



**I
N
A
O
E**

Análisis de transiciones onda-difusión.

por

Elizabeth Saldivia Gómez

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de:
Maestra en Ciencias con especialidad en:

Óptica

en el

**Instituto Nacional en Astrofísica, Óptica
y electrónica**

Agosto 2018
Tonanzintla, Puebla

Supervisada por
Dr. Gabriel Martínez Nikonoff

©INAOE 2018

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y
distribuir copias de esta tesis en su totalidad
o en partes mencionando la fuente.



Índice general

Agradecimientos	VI
Resumen	VII
Introducción	1
1. Conceptos generales de óptica	4
1.1. Fundamentos de óptica geométrica	4
2. Enfoque ondulatorio	7
2.1. Índice de refracción	7
2.2. El principio de Huygens- Fresnel	9
2.3. El modelo del espectro angular	10
3. Estudio de la ecuación onda- difusión.	12
3.1. Transformada virtual de Fourier.	15
4. Síntesis de regiones focales.	17
5. Análisis de regiones focales mediante el método de funciones Green.	20
6. Modelo de advección en la ecuación de transporte de irradiancia.	23
7. Resultados experimentales	25

8. Conclusiones	28
9. Deducción de la ecuación de difusión.	29
10. Deducción de la ecuación de transporte de irradiancia	31
Bibliografía	34

Lista de figuras

1.	Efecto alberca.	1
2.	Formación de circuitos " en la tierra análogo al efecto alberca.	2
1.1.	Frente de onda esférico y el rayo asociado, el cual representa la dirección del flujo de energía.	5
1.2.	Los frentes de onda son análogos a las superficies equipotenciales.	6
2.1.	Propagación de los rayos de luz: (a) en un medio con índice de refracción constante los rayos de luz viajan en línea recta. (b) cuando el índice de refracción es una función de la posición los rayos de luz se curvan.	8
2.2.	Frente de onda primario y fuentes secundarias de onda.	9
3.1.	La línea en rosa es la región frontera entre los tres tipos de ecuaciones diferenciales.	13
3.2.	Un medio con índice de refracción variable es equivalente a un medio de índice de refracción constante con fluctuaciones de amplitud en su superficie.	14
3.3.	Interpretación de la transformada de Fourier como una fuente extendida de luz.	15
4.1.	En la región focal las soluciones armónicas ya son válidas.	18
4.2.	Esquema de la perspectiva extremal.	18
5.1.	Gráfica de la relación de dispersión k	21
7.1.	Arreglo experimental.	25

7.2. Difracción de una rendija parabólica.	26
7.3. Interferencia de la difracción de la rejilla parabólica con una onda plana.	26
7.4. Evidencia experimental de la ecuación de Poisson.	27
9.1. flujo de materia en la dirección x	29
10.1. Flujo de energía a través del área Ω	32

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor, el Dr. Gabriel Martínez Niconoff por su paciencia y apoyo para realizar este trabajo, ha sido un gusto trabajar con el; también doy gracias a mis amigos, los viejos y los que conocí durante el tiempo que duró la maestría, sus consejos de vida y de trabajo me ayudaron mucho.

Agradezco a mi mamá, Patricia Gómez Luna porque gracias a su gran dedicación y esfuerzo me ha sido mas fácil llegar hasta aquí.

Finalmente agradezco a CONACYT por la beca otorgada y a INAOE por brindarme esta oportunidad.

Resumen

En el presente trabajo de tesis, se propone un estudio de los fenómenos de transición onda- difusión, analizando las propiedades físicas que surgen en la vecindad de las regiones focales, y se establecen las condiciones que deben cumplirse para generar estos efectos. El análisis matemático se lleva a cabo mediante una propuesta extremal para la función de fase, que nos muestra que en la región focal, esta satisface la ecuación de Poisson, lo que nos permite identificar un comportamiento análogo al de partículas con carga eléctrica y a través del cual podemos interpretar a la región focal como una fuente/sumidero de campo. El estudio será complementado aplicando un análisis de funciones Green restringidas a la región focal y se encuentra la expresión para la relación de dispersión, la cual nos da información del comportamiento asintótico de los fenómenos onda- difusión.

Derivado de la relación de dispersión se encuentra que en la region focal el efecto difusivo es dominante, esto implica que la función de fase toma valores complejos, generando comportamientos evanescentes en su vecindad.

Utilizando el método de funciones Green se deduce que el índice de refracción, bajo la presencia de efectos difusivos toma valores $n = (0, 1]$.

Durante el proceso de transición se encuentra que el campo óptico exhibe un comportamiento autorregulado. En general los procesos mencionados coexisten simultáneamente; y se pueden utilizar para explicar las propiedades físicas de los haces acelerados así como la generación de guías de onda autoinducidas, para transportar luz a otras frecuencias, lo cual ofrece aplicaciones en la generalización de interconectores ópticos.

Introducción

En el presente trabajo de tesis se describen las propiedades físicas de campos ópticos analizando la posibilidad de transiciones de onda a difusión, el interés surge de la necesidad de explicar efectos cotidianos, uno de ellos puede ser el efecto alberca, el cual se utilizara como prototipo para el planteamiento del problema. Este efecto se muestra en la figura (1):

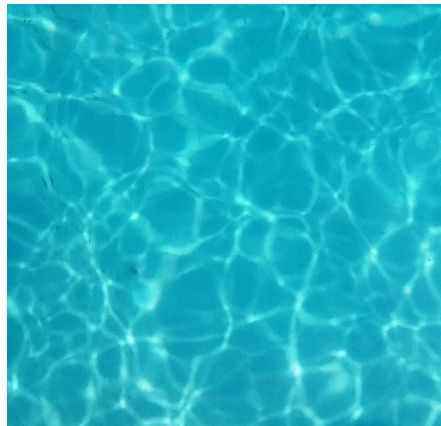


Figura 1: Efecto alberca.

En la figura (1) es posible observar la formación de circuitos cerrados, los cuales tienen áreas en promedio aproximadamente iguales, esto se puede interpretar como un fenómeno de conectividad, los cuales además tienen propiedades fractales, derivados del análisis matemático del efecto. La existencia de trayectorias cerradas implica un análisis del teorema de Stokes, además, se pueden identificar efectos no lineales en la distribución de irradiancia.

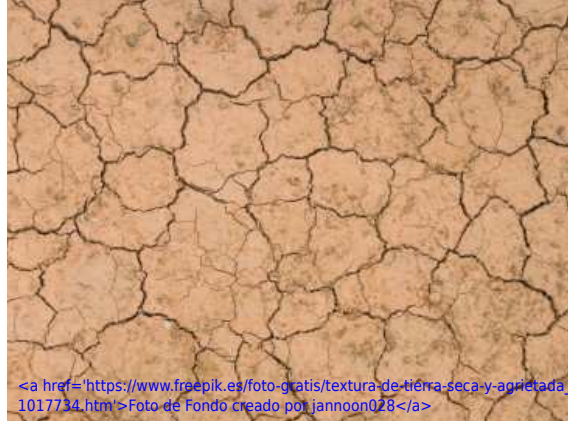


Figura 2: Formación de “circuitos” en la tierra análogo al efecto alberca.

De los comentarios anteriores surge la necesidad de establecer un modelo que explique las propiedades físicas de este tipo de campos ópticos, dado que la conectividad implica una propiedad de que la región focal pueda “estirarse”, lo cual no corresponde a un efecto ondulatorio, por lo que proponemos un modelo difusivo.

Los efectos mostrados en la figura (1) no son descritos completamente en términos de la ecuación de onda o de la ecuación de Helmholtz, en particular, los efectos de conectividad, no se explican considerando únicamente efectos de amplitud, por esta razón, se propone un análisis de la ecuación de transporte de irradiancia (6.2) en donde en la función de fase se implementa proponiendo un modelo de advección.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Debido a este tipo de fenómenos no lineales, los cuales no se pueden abordar de manera completa desde la ecuación de Helmholtz, proponemos una modificación a la solución tradicional:

$$\psi = \phi \exp(i\omega t) \quad (2)$$

debido a que el único parámetro en el que tenemos la libertad de hacer modificaciones en (6.1) es a k , proponemos una ecuación análoga, de la forma:

$$\nabla^2 \phi + \sigma^2 \phi = 0, \quad \text{donde:} \quad \sigma^2 = k^2 + i b \omega \quad (3)$$

donde ahora, el hecho de que σ sea una función compleja, tiene implicaciones físicas, las cuales nos permiten explicar las transiciones onda- difusión.

La estructura propuesta de la tesis es la siguiente, en el capítulo 2 se describen algunos conceptos de óptica necesarios para explicar el fenómeno de difracción, en particular, se hace énfasis en la transformada virtual de Fourier, la razón es facilitar

la interpretación de comportamientos análogos a los de carga eléctrica, los cuales, aparecen reportados como carga topológica, de manera adicional se realiza una breve descripción del modelo de cálculo variacional. En el capítulo 3 se presenta una breve introducción del soporte matemático que sustenta las propuestas hechas en este trabajo .

En el capítulo 4 se describe la síntesis de las regiones focales a través de un análisis extremal lo que nos lleva a establecer la ecuación de Poisson, demostrando que los parámetros difusivos son los responsables del comportamiento de carga topológica, este método es complementario al método de funciones Green para la solución de la ecuación de Helmholtz, es cual se expone en el capítulo 5. En el capítulo 6 se implementa el modelo de advección en la ecuación de transporte de irradiancia, esta propuesta permite identificar los efectos no lineales generando una ecuación de Burgers; finalmente en el capítulo 7 se presentan las conclusiones generales de la tesis y se plantea el trabajo futuro.

Capítulo 1

Conceptos generales de óptica

1.1. Fundamentos de óptica geométrica

Una de las ideas más útiles en la óptica ha sido visualizar a la luz como trayectorias geométricas, esto ha servido para resolver varios problemas de aplicación y ha permitido el desarrollo de la misma, sin embargo, sabemos que la luz es fundamentalmente un fenómeno electromagnético, por lo que el caso geométrico puede verse como un caso particular, cuando la longitud de onda es muy pequeña comparada con las longitudes a las que las propiedades de los materiales tales como la frecuencia ν y el índice de refracción n varían de forma notable, es decir con la escala a la que la inhomogeneidad del medio se hace notar [4] ($\lambda_0 \rightarrow 0$ o aproximación eikonal), y de esta manera formular las leyes de la óptica de manera geométrica, sin embargo es importante mantener en mente que se trata de una aproximación ya que en caso de no darse las condiciones anteriores, los efectos ondulatorios son imposibles de despreciar.

En la óptica geométrica se considera que la energía es transportada a lo largo de ciertas curvas (los rayos de luz), y estas curvas o rayos de luz tienen la propiedad de ser siempre perpendiculares a los frentes de onda, los cuales están definidos como superficies de fase constante (en la ecuación de la onda), Figura(1.1).

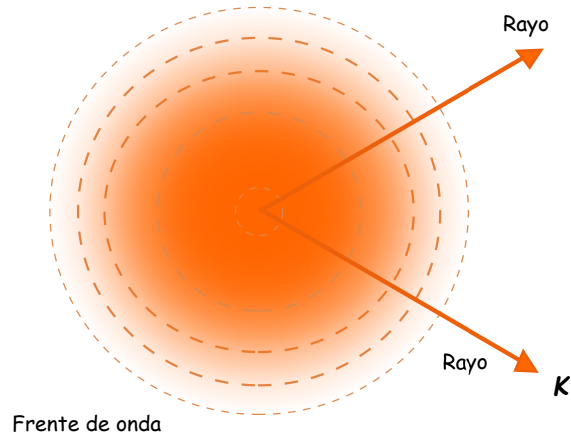


Figura 1.1: Frente de onda esférico y el rayo asociado, el cual representa la dirección del flujo de energía.

El principio de mínima acción determina la geometría de las trayectorias que sigue una partícula, “extremizando” la acción de todas las trayectorias posibles, debido a que la acción de la trayectoria de una partícula es matemáticamente parecida a la longitud de camino óptico de un rayo de luz, el principio de mínima acción es análogo al principio de Fermat [5].

El principio de Fermat dice que la trayectoria que sigue un rayo de luz es aquella que hace que la longitud de camino óptico tome un valor extremal. Podemos expresar al campo electromagnético ϕ como una función de amplitud $A(x, y, z)$ multiplicada por una función de fase de la forma $L = L(x, y, y')$:

$$\phi(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(ik_0 L(x, y, y')) \quad (1.1)$$

donde la función de fase nos da la información acerca de la geometría del frente de onda y por tanto, de la dirección de propagación del flujo de energía (la dirección del rayo geométrico). Por lo que podemos expresar el camino óptico como:

$$LCO = \int_A^B L(x, y, y') dx \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) debe satisfacer un principio extremal tal que $\delta LCO = 0$, esta condición nos conduce a:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad (1.3)$$

es conocido que la solución de la ecuaciones de Euler (1.4) son geodésicas en el espacio; es fácil observar que estas mismas ecuaciones escritas en su forma vectorial

se escriben como:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (1.4)$$

donde $ds = \sqrt{1 + y'^2}$. Dado que δL y dL son funciones independientes entre si, se cumple que:

$$dL = nds, \quad \delta L = s\delta n \quad (1.5)$$

de donde se obtiene que $\frac{dL}{ds} = \hat{t} \cdot \vec{\nabla} L = n$, tomando el modulo al cuadrado de ambos lados, llegamos a la ecuación eikonal:

$$|\vec{\nabla} L|^2 = n^2 \quad (1.6)$$

la cual nos da la relación entre la estructura espacial de medio en el que se propaga la luz, lo cual conocemos a través del índice de refracción y la fase del campo.

Otra analogía con la mecánica clásica es la interpretación del índice de refracción como una función potencial, lo cual geoméricamente se puede observar en la figura (1.2):

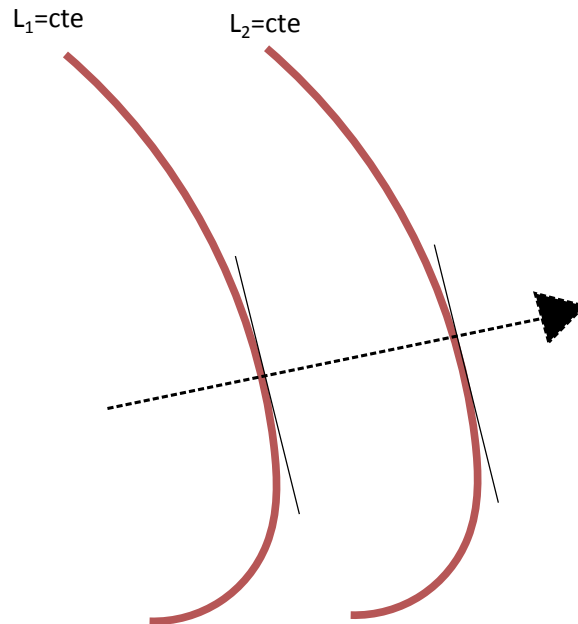


Figura 1.2: Los frentes de onda son análogos a las superficies equipotenciales.

Es importante mantener en mente la ecuación (1.2) para secciones posteriores.

Capítulo 2

Enfoque ondulatorio

El análisis tradicional del campo óptico se obtiene de la ecuación de Helmholtz (5.3), la cual tiene como solución funciones armónicas tipo la ecuación (2), lo cual es útil en las regiones con baja densidad de rayos, puesto que el comportamiento armónico prevalece, sin embargo, como mencionamos en la sección anterior, el comportamiento de la irradiancia de la simple interferencia de dos ondas planas es no lineal, lo cual, usando la relación dada por la ecuación (6.5), y la ecuación eikonal, se deduce que en estas zonas de interferencia, el índice de refracción también tiene un comportamiento no lineal, lo cual explica la compresión que experimenta el campo en la vecindad de las regiones focales.

2.1. Índice de refracción

Los efectos generados cuando hay un cambio de medio en la propagación de la luz son bien conocidos, el mas representativo es el doblamiento de un lápiz de madera cuando lo introducimos en una pecera, pues este efecto es generado por un cambio en la velocidad con la que la luz viaja, esto se debe a las distintas propiedades de los medios, en óptica, el índice de refracción se refiere al cociente de velocidades o en términos de la permitividad y permeabilidad del medio como sigue:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (2.1)$$

y si conocemos los índices de refracción absolutos de dos medios , podemos definir el índice de refracción relativo como:

$$n_{eff} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.2)$$

Por lo general, en el caso de medios lineales, este suele ser un valor constante, sin embargo, casi cualquier medio puede comportarse como un medio no lineal, lo cual depende básicamente de la intensidad de la luz incidente, y en el caso de las regiones focales, es donde el campo alcanza su máximo valor de intensidad, en estas regiones se generan efectos como el autoenfocamiento, o efectos de difusión, como los que nos interesan en este trabajo, en ambos casos es conveniente escribir al índice de refracción en términos de la frecuencia de la luz o de su longitud de onda, lo cual nos permite observar los parámetros ópticos sobre los cuales ocurren cambios. Por lo que podemos expresarlo como:

$$n = \frac{K}{K_0}, \quad \text{con} \quad K_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.3)$$

sin embargo, cabe resaltar que el índice de refracción de un medio también puede ser modificado cuando la intensidad de la luz es suficientemente grande, puesto que induce efectos no lineales, de forma que n también puede ser función de la posición y del tiempo, las transiciones onda- difusión tienen lugar en las regiones focales, donde el índice de refracción efectivo tiende a cero.

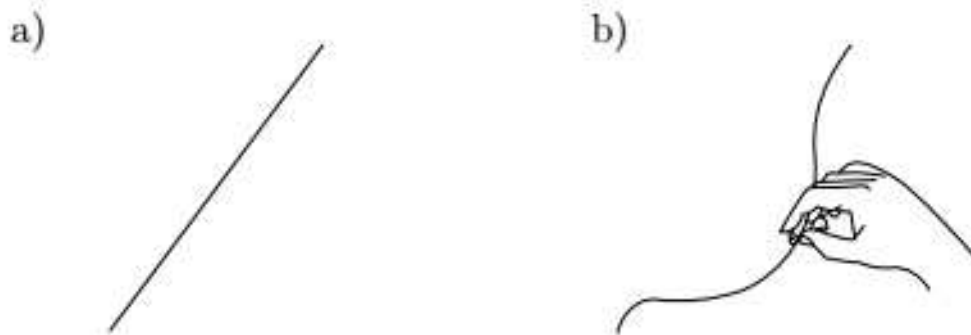


Figura 2.1: Propagación de los rayos de luz: (a) en un medio con índice de refracción constante los rayos de luz viajan en línea recta. (b) cuando el índice de refracción es una función de la posición los rayos de luz se curvan.

Difracción

La difracción es el fenómeno que surge cuando el campo óptico encuentra un obstáculo en su camino y es debido a este que se modifica la distribución de energía, en este capítulo describiremos brevemente los modelos de difracción de la óptica clásica.

2.2. El principio de Huygens- Fresnel

Christian Huygens en 1678 postuló que cada punto sobre un frente de onda de luz puede ser tratado como una fuente de ondas secundarias esféricas, a partir de las cuales se forma un nuevo frente de onda en la dirección de propagación; este nuevo frente de onda es la envolvente de las ondas secundarias; este principio se introdujo de forma analítica en 1818 por Fresnel, el cual predijo la existencia de los patrones de difracción, con lo cual se aceptó la teoría ondulatoria de la luz sobre la teoría corpuscular.

El principio de Huygens- Fresnel nos dice que cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en cierto tiempo, se comporta como una fuente de ondas secundarias esféricas, cuya frecuencia es igual a la de la onda primaria, por lo que, la amplitud del campo óptico en cualquier posterior esta dada por la superposición de todas esas ondas, considerando sus amplitudes y fases relativas. Más adelante, la descripción matemática fue perfeccionada por Kirchhoff, Rayleigh y Sommerfeld.

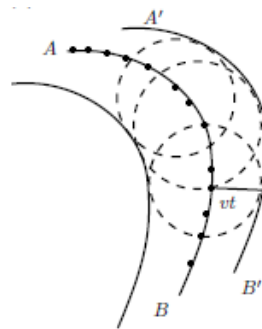


Figura 2.2: Frente de onda primario y fuentes secundarias de onda.

La forma de una onda esférica esta dada por:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \exp^{ik(r \pm vt)} \quad (2.4)$$

donde el frente de onda esta descrito por $\vec{k} \cdot \vec{r}$, de (2.4) se observa que la amplitud de la onda es una función de r , por lo que, cuando la distancia de propagación aumenta, la onda se atenúa o disminuye en amplitud, por lo que a distancias suficientemente grandes de la fuente que la produjo, esta onda se parecerá a una porción de onda plana.

2.3. El modelo del espectro angular

Según [1], en este modelo se propone la descripción de cualquier campo óptico como un conjunto de ondas planas cuyos vectores de propagación tienen diferentes direcciones, que además satisfaga la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

La solución clásica consiste en separar las componentes espaciales de las temporales, proponiendo una solución de la forma:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp^{i\omega t} \quad (2.6)$$

sustituyendo (2.6) en (5.2) se obtiene la ecuación para la amplitud compleja de la onda o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) + k^2 \psi(x, y, z) = 0 \quad (2.7)$$

donde \vec{k} es el vector de dirección de la onda; la solución más simple de esta ecuación es una onda plana representada por:

$$\psi(x, y, z) = A e^{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma} = A e^{i2\pi(xu + yv + zp)} \quad (2.8)$$

donde α , β y γ son los ángulos directores de \vec{k} , donde se satisface que:

$$u^2 + v^2 + p^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.9)$$

la expresión (2.9) representa una esfera en el espacio frecuencial, para el caso en que u , v , p sean reales. Por lo que el campo de difracción, en su representación modal se expresa de la siguiente manera:

$$\phi(x, y, z) = \int \int A(u, v) e^{i2\pi(xu + yv + zp)} du dv \quad (2.10)$$

donde la condición de frontera ó función de transmitancia, determinada por el objeto difractante esta dada por:

$$\phi(x, y, z = 0) = t(x, y) = \int \int A(u, v) e^{i2\pi(xu+yv)} dudv \quad (2.11)$$

Es posible notar que la ecuación (2.11) tiene la forma de transformada de Fourier, por lo que, podemos obtener la distribución de amplitudes calculando la función inversa:

$$A(u, v) = \int \int f(x, y) e^{-i2\pi(xu+yv)} dx dy \quad (2.12)$$

Capítulo 3

Estudio de la ecuación onda-difusión.

Ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

La forma general de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden es:

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

$$a(x, y, z)z_{xx} + 2b(x, y, z)z_{xy} + c(x, y, z)z_{yy} + \dots \quad (3.2)$$

La estructura de la ecuación diferencial esta en el comportamiento de las 2 derivadas, y su clasificación se obtienen del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(x, y, z) & b(x, y, z) \\ b(x, y, z) & c(x, y, z) \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

El valor de δ nos permite clasificarlas en 3 tipos:

$$\text{Si } \Delta > 0, \quad \text{la ecuación es elíptica,} \quad (3.4)$$

$$\text{Si } \Delta \geq 0, \quad \text{la ecuación es parabólica,} \quad (3.5)$$

$$\text{Si } \Delta < 0, \quad \text{la ecuación es hiperbólica,} \quad (3.6)$$

en la región donde $\Delta < 0$ existe un conjunto de transformaciones $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, las cuales nos permiten realizar una transición de un tipo de ecuación a cualquiera de los otros dos tipos.

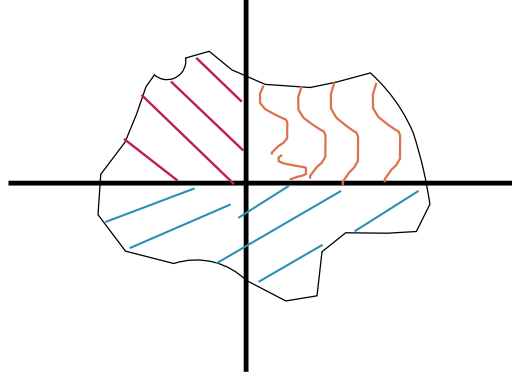


Figura 3.1: La línea en rosa es la región frontera entre los tres tipos de ecuaciones diferenciales.

el análisis de las formas cuadráticas implica el cálculo de un discriminante heredado de resolver una curva cuadrática, en un sistema de este tipo se puede tener cualquiera de los siguientes casos:

- Hiperbólico - dos raíces reales, efectos ondulatorios.
- Parabólico - raíz real, efecto difusivo.
- Elíptico- raíces imaginarias.

En el caso de la ecuación de onda, tenemos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \eta} = 0 \quad (3.7)$$

existen las transformaciones cuyo argumento es de la forma:

$$\xi = \xi(x - vt) \quad \eta = \eta(x + vt) \quad (3.8)$$

las curvas (3.8) se conocen como las curvas características, así, un sistema hiperbólico tiene 2 curvas características, un sistema parabólico tiene una curva característica y un ecuación elíptica no tiene curvas características en el plano real.

La idea es que en un sistema óptico las curvas características evolucionan a través de un comportamiento asintótico, el problema suele ser encontrar las curvas características para las condiciones de frontera dadas, y la topología del espacio de soluciones esta dada por las funciones $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$.

Para la ecuación de onda de la forma:

$$U_{xx} = \frac{1}{v^2} U_{tt} \quad (3.9)$$

tiene soluciones de la forma:

$$U(x - vt) \quad \text{o} \quad U(x + vt) \quad (3.10)$$

de las cuales podemos seleccionar un solo tipo de solución recordando la condición de radiación de Sommerfeld, la cual dice que el campo se debe propagar alejándose de la apertura, no hacia la apertura [3], por lo que físicamente solo son posibles las soluciones de la forma $U(x - vt)$, de esta manera podemos encontrar una ecuación equivalente a la de onda

Se propone un análisis para la relación de balance entre el índice de refracción y las fluctuaciones de la curvatura de un campo óptico cerca de las regiones focales, y para entender la razón por la cual analizamos este tipo de transiciones mediante la ecuación de difusión, recordemos la fig (1), donde podemos interpretar como mecanismo de generación de la red de zonas focales en el fondo de la alberca como la amplitud de las fluctuaciones de la superficie del agua, o de forma equivalente, estas fluctuaciones se interpretan como un índice de refracción aleatorio, tal como se esquematiza en la fig (4.2):

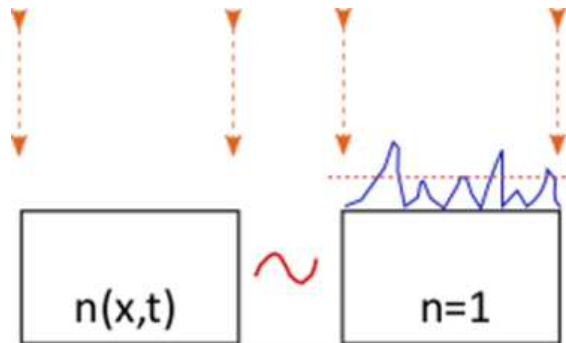


Figura 3.2: Un medio con índice de refracción variable es equivalente a un medio de índice de refracción constante con fluctuaciones de amplitud en su superficie.

donde las fluctuaciones siguen una distribución gaussiana, cuya varianza depende del tiempo, de la forma:

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi\sigma(t)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t)}\right) \quad (3.11)$$

estas fluctuaciones satisfacen la ecuación de difusión, ecuación (??):

$$\nabla^2 \rho = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

Por lo que los efectos difusivos se transfieren al campo óptico en las regiones focales a través de la condición de frontera [8] dada por la ecuación (3.11), y corresponden a la región de Fraunhofer. En estas regiones surgen propiedades físicas interesantes, las cuales pueden extender los modelos tradicionales de óptica.

3.1. Transformada virtual de Fourier.

En los modelos de óptica, particularmente en difracción, es común el cálculo de la difracción de Fraunhofer, la cual se propone desde la integral de difracción, para nuestro problema, proponemos que las fluctuaciones del índice de refracción generan cambios de fase en el plano de Fourier, los cuales podemos interpretar como una onda que se propaga sobre el plano de la fuente, la cual induce un flujo de fase, dado por la ecuación de onda.

Un concepto útil que proporciona un enfoque geométrico es el de transformada virtual de Fourier, este esta esquematizado en la fig(??).

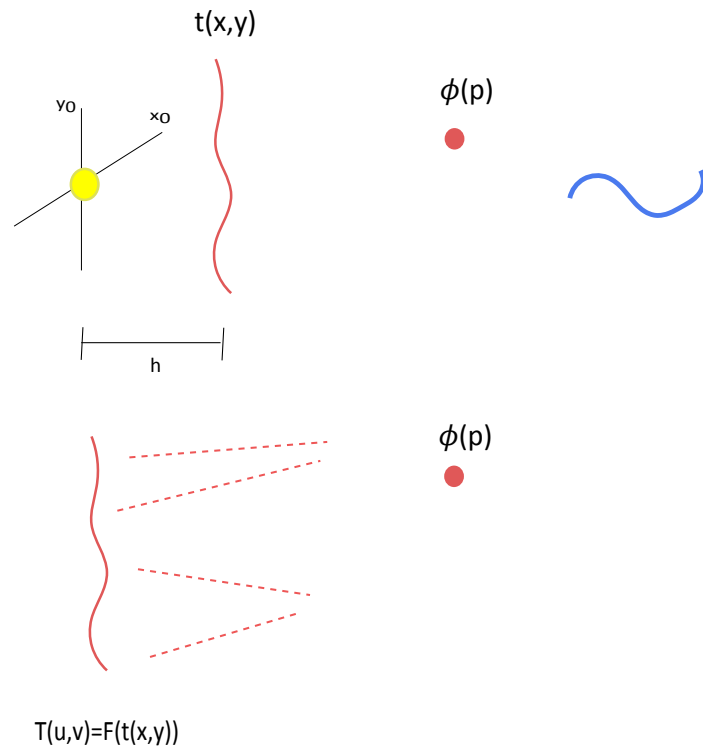


Figura 3.3: Interpretación de la transformada de Fourier como una fuente extendida de luz.

este concepto permite interpretar al plano de Fourier como el plano **fuelle** para el campo difractado, generando el control de una distribución continua de

fuentes.

Con un sistema óptico auxiliar se puede generar la transformada de Fourier, e interpretar al plano de Fourier como un conjunto de regiones de regiones focales. Sobre este plano, se analizarán los efectos físicos de interés, en particular los efectos difusivos.

Fenómenos de difusión

Cuando abrimos un perfume o cortamos una mandarina en una habitación cerrada, es posible percibir el aroma rápidamente, pues las moléculas del líquido después de evaporarse se difunden en el aire, distribuyéndose por todo el espacio con el fin de homogeneizar la concentración de partículas, este flujo es una consecuencia del movimiento aleatorio de las partículas de la sustancia. Una condición necesaria para que tenga lugar un fenómeno de difusión es que la distribución espacial de las moléculas no sea uniforme; la manera en que cambia la concentración de partículas en el tiempo

Estos fenómenos se describen matemáticamente mediante la ecuación:

$$\nabla^2 \phi = D \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.13)$$

En el apéndice 1 se muestra la explicación de esta ecuación.

Capítulo 4

Síntesis de regiones focales.

Cuando la luz se propaga es común que ocurra difracción o enfocamiento, en estos puntos de enfocamiento, la intensidad de luz es muy grande, y la teoría en la cual los rayos ópticos geométricos están dotados de amplitud y fase que les permite interferir en donde se cruzan cerca de estas regiones [2].

Las regiones focales se caracterizan principalmente por ser regiones de máxima irradiancia, las cuales pueden ser utilizadas para generar efectos no lineales, y en particular, cuando se analiza su interacción, para producir guías de onda, para formar circuitos ópticos. Matemáticamente, están representadas por la envolvente de todos los centros de curvatura de la condición de frontera de la función de transmitancia, figura (4.1).

Puesto que la solución armónica a la ecuación de Helmholtz no es válida en general, pues en la vecindad de las regiones focales, existe un conflicto en determinar “la frecuencia” del campo, ya que las oscilaciones empiezan a interferir y cuando llegan a la envolvente de todos los rayos Figura (4.1), ya no son armónicas, es decir $\omega = \omega(x, y, z)$, lo cual nos lleva a proponer que K es una función del espacio también.

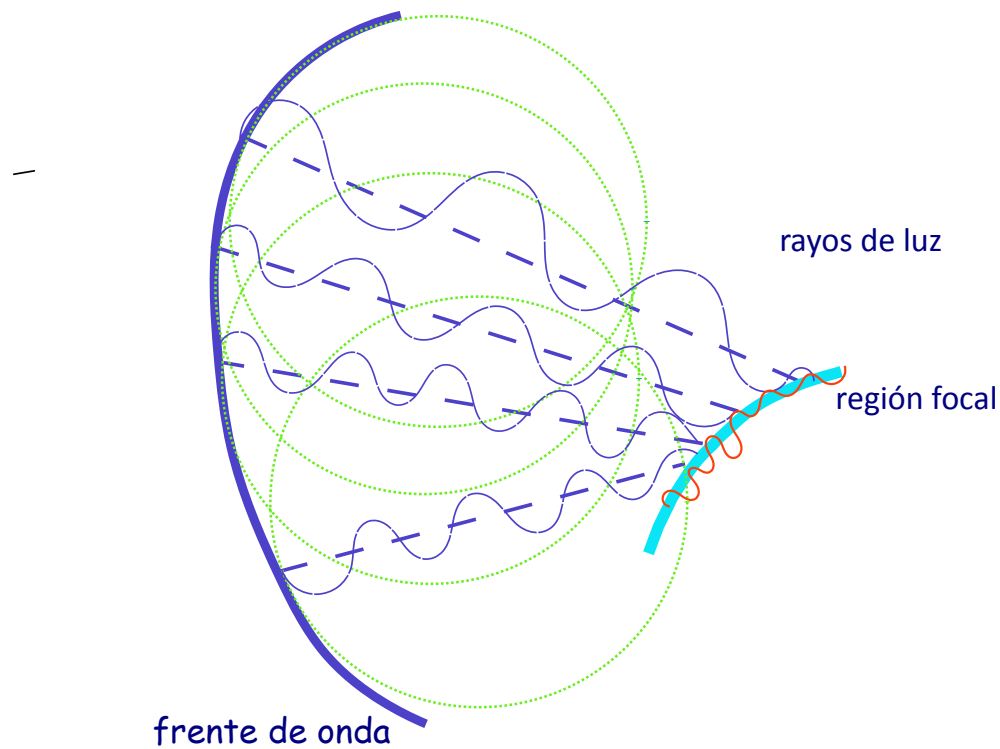


Figura 4.1: En la región focal las soluciones armónicas ya son válidas.

Por lo que la solución tradicional $\phi = e^{i\omega t}\phi$ se debe transformar a:

$$\phi = e^{i\omega(x,y,z)t}\phi \quad (4.1)$$

La idea es interpretar a la fuente como un colapso del frente de onda, puesto que la evolución del frente de onda nos da la dinámica del campo, el cual tiene asociadas un conjunto de trayectorias, que podemos interpretar:

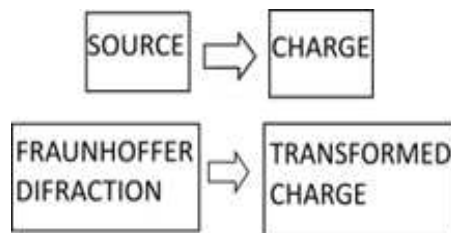


Figura 4.2: Esquema de la perspectiva extremal.

Sabemos que los rayos de luz satisfacen el principio de Fermat, proponemos

como solución a la ecuación:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 \phi + \sigma^2 \phi = 0 \quad (4.3)$$

funciones de la forma:

$$\phi = A \exp(iK_0 L) \quad (4.4)$$

donde L en general puede ser una función compleja de la forma $L = h + ig$, sustituyendo L en (4.4), y separando las partes reales e imaginarias obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 g &= K_0 (|\nabla h|^2 - |\nabla g|^2) - \frac{K^2}{K_0} \\ \nabla^2 h &= 2(\nabla h \cdot \nabla g) - \frac{b\omega}{K_0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para el caso en el que queramos recuperar únicamente efectos ondulatorios, lo podemos hacer mediante $b = 0$ ó $g = 0$, lo que nos reduce las ecuaciones (4.5) a las siguientes expresiones:

$$\nabla^2 h = 0 \quad \text{y} \quad |\nabla h|^2 = \frac{K^2}{K_0^2} = n^2 \quad (4.6)$$

Las expresiones anteriores corresponden con los modelos ya conocidos, por lo que el modelo es consistente con la óptica tradicional. Para el caso en el que se presenten efectos difusivos, tenemos $K = 0$ y $(\nabla h \cdot \nabla g) = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 h &= -\frac{b\omega}{K_0} \quad (\text{a}) \\ \nabla^2 g &= 0 \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

La ecuación (4.7(a)) implica que en la parte donde ocurren los procesos de difusión se comporta como una carga para el campo ondulatorio.

Los resultados de este modelo deben empatarse con los que se obtienen mediante el método de funciones Green.

Capítulo 5

Análisis de regiones focales mediante el método de funciones Green.

Como se mencionó en la sección anterior, las condiciones y resultados obtenidos mediante la propuesta de una solución extremal, se deben poder obtener mediante el método de funciones Green.

El método de funciones Green es ampliamente usado en muchas áreas de la física, incluidos todos los campos ondulatorios, tanto escalares como vectoriales [6], este método se basa en la premisa bajo la cual, dada una geometría, cualquier campo que satisfaga una distribución de fuente y condiciones arbitrarias iniciales y de frontera, pueden construirse a partir de integrales espaciales y temporales, soluciones a problemas más elementales (solución Green); en el caso de ondas tipo ecuación diferencial parcial con condiciones iniciales dadas, la dependencia en el tiempo es armónica, lo cual nos permite eliminar la variable temporal del cálculo.

Si consideramos un campo electromagnético completamente monocromático de la forma:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{U}(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

es solución de la ecuación:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

obtenemos la siguiente expresión:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0$$

la cual podemos simplificar usando el teorema de Green, donde $k = \omega/c$, como se mencionó en capítulos anteriores, la propuesta es analizar una ecuación análoga, la cual nos permita explicar las transiciones que se suceden en las regiones focales, por lo que, en vez de analizar la ecuación (5.3), lo haremos con la expresión:

$$\nabla^2 \phi + (k^2 + i\omega)\phi = 0 \quad (5.3)$$

puesto que la estructura de las ecuaciones es la misma, la función Green para (5.3), en la cual están considerados efectos de onda y de difusión, esta dada por:

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{e^{i\sigma r}}{r} \left[(-i\sigma - \frac{1}{r})\phi \hat{r} - \nabla \phi \right] \cdot \hat{n} ds, \quad (5.4)$$

considerando que el numero de onda complejo σ es de la forma $\sigma = \xi + i\eta = (k^2 + i\omega b)^{1/2}$, sustituyéndolo en (5.4), llegamos a:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{e^{i\sigma r \xi} e^{\sigma r \eta}}{r} \left[(\xi(i-1) - \frac{1}{r})\phi \hat{r} - \nabla \phi \right] \cdot \hat{n} ds, \quad (5.5)$$

donde la relación de dispersión esta dada por:

$$k^2 = \xi^2 - \eta^2, \quad \text{con} \quad \sigma = \xi + i\eta, \quad (5.6)$$

la cual gráficamente se representa en la figura (/reffig:reldis):

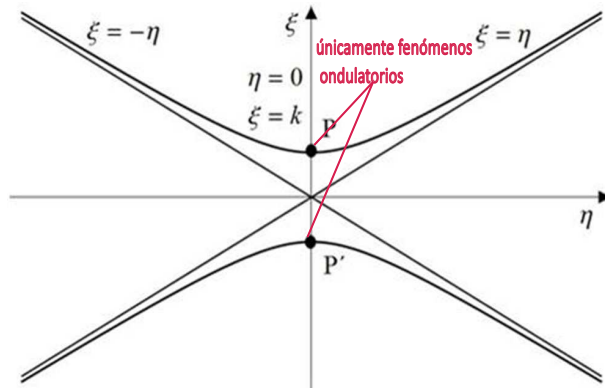


Figura 5.1: Gráfica de la relación de dispersión k .

Analizando los casos limites, es decir, cuando $k^2 \leftarrow \xi^2$, esto implica que no

existe la parte imaginaria, por lo que el efecto difusivo no esta presente, y se recupera la ecuación de Helmholtz, y cuando $k^2 \leftarrow 0$, lo cual es posible únicamente cuando el índice de refracción efectivo tiende a 0, por lo que la ecuación (3) toma la forma:

$$\nabla^2 \phi_d + i\omega b \phi_d = 0 \quad (5.7)$$

cuya solución Green esta dada por:

$$\phi_d = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{e^{i\eta r} e^{-\eta r}}{r} \left[(i\eta - \eta - \frac{1}{r}) \phi \hat{r} - \nabla \phi \right] \cdot \hat{n} ds, \quad (5.8)$$

donde $\eta = \sqrt{\frac{b\omega}{2}}$, la ecuación (5.8) representa el comportamiento de la amplitud para el caso donde el comportamiento dominante es el de difusión.

Si nos fijamos únicamente en una trayectoria, y consideramos que en la región focal, la curvatura es la misma que la de la condición de frontera de la función Green, obtenemos el mismo resultado que el derivado del análisis extremal, lo cual le da consistencia al modelo.

Como mencionamos, cuando $k \leftarrow 0$, la solución Green se escribe como:

$$\begin{aligned} \phi_w(P) = 0 &= \lim_{k \leftarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{e^{ikr}}{r} \left[(ik - \frac{1}{r}) \phi \hat{r} - \nabla \phi \right] \cdot \hat{n} ds \quad (5.9) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{1}{r} \left(\left(-\frac{1}{r} \right) \phi \hat{r} - \nabla \phi \right) \cdot \hat{n} ds, \end{aligned}$$

lo que implica:

$$\nabla \phi = -\frac{\phi}{r} \hat{r} \quad (5.10)$$

la expresión anterior representa una región focal [7].

Por otra parte, la ecuación (5.3) tiene como solución:

$$\phi = (A \sin \theta + B \cos \theta) C \exp hy \quad (5.11)$$

La estructura de (5.11) es la justificación para proponer la interacción de regiones focales mediante un potencial tipo Yukawa, que será el tema de trabajos posteriores.

Capítulo 6

Modelo de advección en la ecuación de transporte de irradiancia.

El modelo se define proponiendo una relación de balance entre dos variables, por ejemplo, amplitud y fase o irradiancia y fase, en donde generalmente una variable depende de la razón de cambio de algunas otras variables, uno de los casos mas conocidos, de este tipo de modelos es el de la presión de radiación.

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (6.1)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot (I \nabla_{\perp} L) = -\frac{\partial I}{\partial z} \quad (6.2)$$

El objetivo de este trabajo es hacer un estudio de las propiedades físicas en las regiones focales, las cuales presentan efectos no lineales, y generan transiciones de onda- difusión.

De manera complementaria a los comentarios anteriores, es posible describir efectos no lineales en las distribuciones de irradiancia. Es un hecho conocido que la irradiancia asociada a la interferencia de dos ondas planas con la misma amplitud es:

$$I = 2I_0(1 + \cos(k_1 - k_2)) \quad (6.3)$$

Por sustitución directa se puede probar que una franja de interferencia satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha \partial \beta} = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \quad (6.4)$$

de manera complementaria, sustituyendo (6.3) en (6.2) se tiene:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\alpha \operatorname{sen}(\alpha x)}{1 + \cos(\alpha x)} \left| \frac{\partial L}{\partial x} \right| = 0 \quad (6.5)$$

de las ecuaciones (6.4) y (6.5) es posible notar que tanto la fase como la irradiancia siguen comportamientos no lineales, en general, cuando el término de propagación en la irradiancia es diferente de cero $\frac{\partial I}{\partial z} \neq 0$, obtenemos la ecuación de Burguers.

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \mathbb{L} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (6.6)$$

Capítulo 7

Resultados experimentales

Para identificar los resultados presentados en las secciones anteriores, usamos el siguiente arreglo experimental para evidenciar el comportamiento difusivo en la región focal.

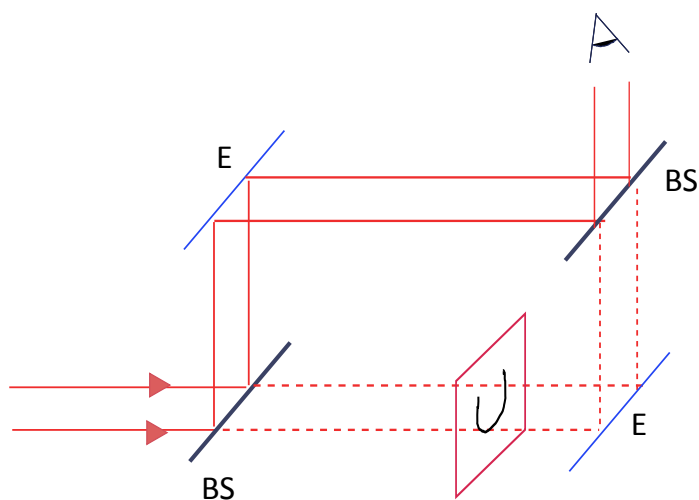


Figura 7.1: Arreglo experimental.

El arreglo experimental es un interferómetro, en el cual se hizo interferir, en el primer caso, un frente de onda plano, con el campo difractado por la rendija parabólica, en el segundo caso, fue la interferencia de la difracción de la rendija parabólica, con ella misma.

En la figura (7.2) se muestra únicamente el campo difractado por la rejilla parabólica

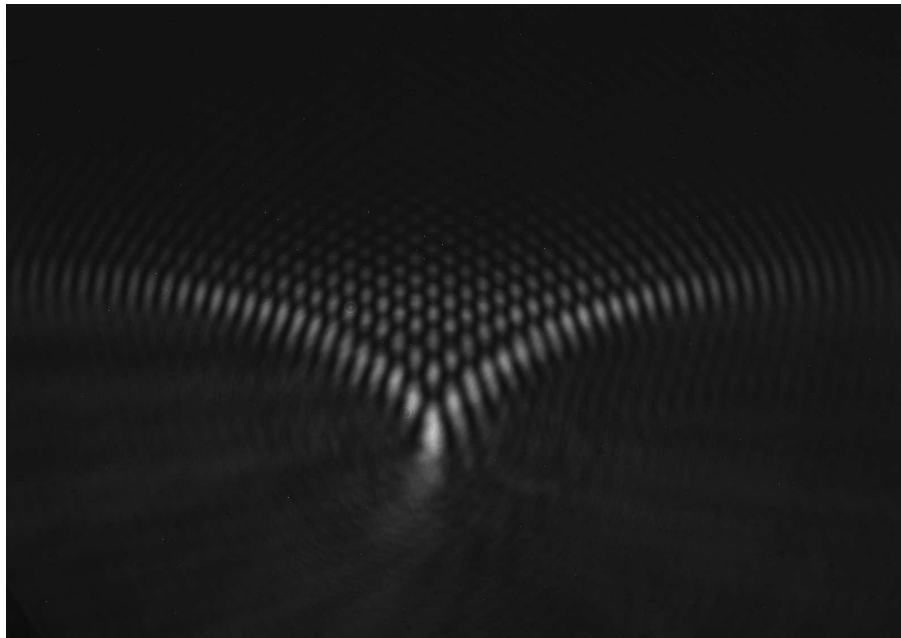


Figura 7.2: Difracción de una rendija parabólica.

En la figura (7.3), se muestra la interferencia entre un frente de onda plano y la difracción de la rejilla parabólica.

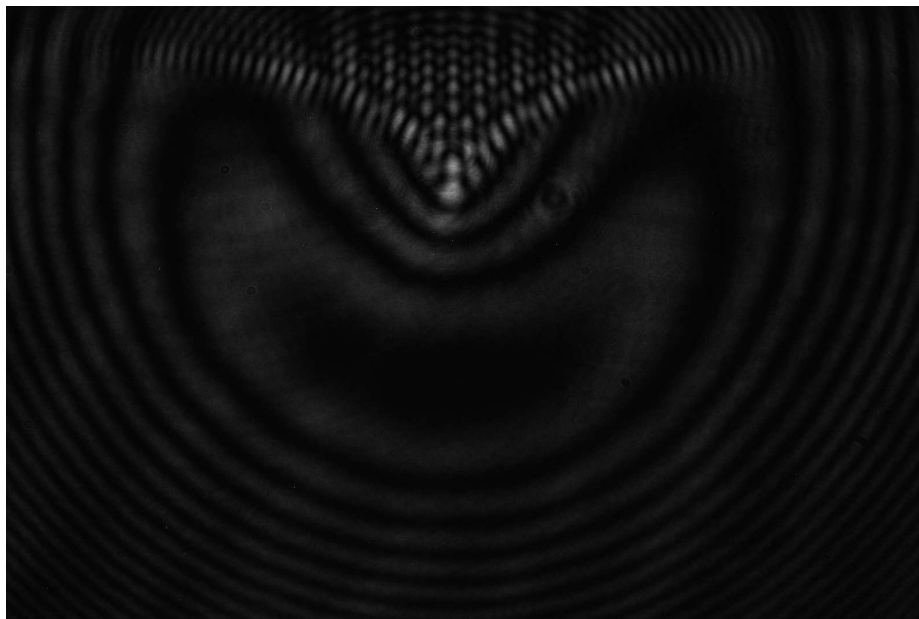


Figura 7.3: Interferencia de la difracción de la rejilla parabólica con una onda plana.

de esta imagen, podemos observar la invariancia en la geometría de la región

focal bajo el efecto de interferencia, también es posible notar que las franjas de interferencia están acotadas por la misma región focal.

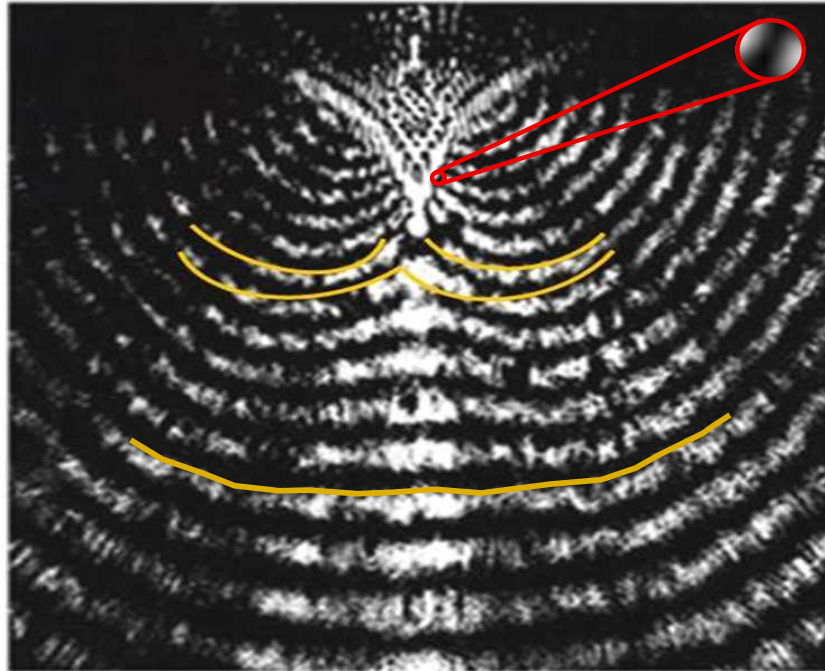


Figura 7.4: Evidencia experimental de la ecuación de Poisson.

La figura anterior corresponde con la interferencia de la difracción de la rejilla parabólica con ella misma, en la figura (7.4) podemos notar como las franjas, al igual que en caso anterior, están limitadas por la región focal, también resulta evidente como estas franjas de interferencia, al acercarse a la región focal, se van rompiendo, esta interacción corresponde con efectos de bifurcación, los cuales tienen que ser analizados mediante la interacción en irradiancia de las franjas, que además corresponden con efectos no lineales, como mostramos en el capítulo 6. En esta imagen también es posible observar el efecto de que la región focal actúa como fuente o sumidero del campo, comportamiento predicho por la ecuación (4.7(a)), que nos indica, que los parámetros difusivos son los responsables por el efecto como de carga eléctrica.

Capítulo 8

Conclusiones

Se analizaron las condiciones bajo las cuales procesos de onda- difusión son posibles, derivado del estudio se encontró que estos procesos ocurren en la vecindad de la región focal de un campo óptico. El análisis matemático se basó en el método de funciones Green, el cual fue implementado a partir de la propuesta de una ecuación tipo ecuación de Helmholtz, con número de onda complejo, el modelo fue complementado con un análisis extremal derivado del principio de Fermat, del cual podemos observar que la propuesta de que la fase de la onda sea una función compleja nos permite modelar el efecto de compresión y evanescencia o conectividad del campo óptico en la vecindad de la región focal, puesto que obtenemos la ecuación de Poisson, lo cual nos permite interpretar a la región focal como un sumidero o una fuente de algo análogo a una carga eléctrica y recuperar los resultados del tratamiento óptico tradicional dado por la ecuación eikonal y el comportamiento ondulatorio.

Este análisis se implementará posteriormente para evaluar la posibilidad de generar guías de onda con regiones focales, con el objetivo de generar circuitos ópticos, análogos a los que se pueden observar en el efecto alberca, dada la forma en la que se distribuyen las zonas de mayor irradiancia, las cuales en promedio rodean áreas iguales, y forman nodos, lo cual sugiere que entre ellas hay una interacción tipo potencial Yukawa, lo cual es admisible, dado que como hemos visto en este trabajo, en la región focal, el comportamiento predominante es el difusivo, el cual se puede interpretar en términos de partículas y choques inelásticos.

Derivado de la forma de la función de fase propuesta, es posible observar fenomenológicamente y analíticamente, las propiedades de fractalidad de estos circuitos ópticos autogenerados. De igual manera, como complemento matemático, evaluar la validez del teorema de Stokes en este tipo de regiones y extender dicho análisis a diferentes geometrías.

Capítulo 9

Deducción de la ecuación de difusión.

Los fenómenos de transporte son los de onda y difusión, en esta sección se describen los procesos difusivos utilizando como prototipo el movimiento aleatorio de las partículas. Para que este tipo de procesos se pueda presentar, es necesario que la distribución espacial de partículas en el medio sea inhomogénea, es decir debe existir un gradiente de concentración entre dos puntos en el espacio.

Supongamos que la concentración de partículas es una función de la posición en el espacio, consideremos por simplicidad el caso unidimensional, a lo largo del eje x .

Sea J la densidad de corriente de partículas, o número de partículas que atraviesan un área unitaria por unidad de tiempo, en la dirección x , la primera ley de Fick nos dice que J es proporcional al gradiente de concentración:

$$J = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (9.1)$$

donde D es el coeficiente de difusión y depende de las propiedades de medio.

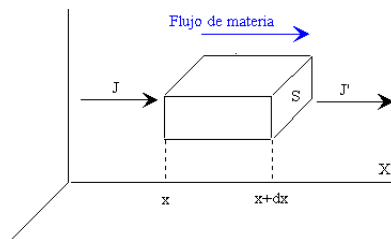


Figura 9.1: flujo de materia en la dirección x .

por lo que la acumulación de partículas en un elemento de volumen Sdx por

unidad de tiempo es igual al flujo entrante JS menos el flujo que sale $J'S$:

$$JS - J'S = \frac{\partial J}{\partial x} S dx = S dx \frac{\partial J}{\partial x} \quad (9.2)$$

por otro lado, la cantidad de partículas por unidad de tiempo es:

$$S dx \frac{\partial n}{\partial t} \quad (9.3)$$

igualando (9.2) y (9.3) y usando (9.1) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial n}{\partial x} \right) = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (9.4)$$

Capítulo 10

Deducción de la ecuación de transporte de irradiancia

La ecuación de transporte de irradiancia se utiliza para recuperar información de la fase desde mediciones de irradiancia, sin usar un método interferométrico, pues esta ecuación relaciona la fase del campo en un plano ortogonal al eje óptico con la razón de cambio de la intensidad del haz a lo largo de la dirección de propagación. consideremos el campo de la forma:

$$\psi(x, y, z) = [I(x, y, z)]^{1/2} \exp[i\phi(x, y, z)]. \quad (10.1)$$

donde la fase del campo esta dada por:

$$\phi(x, y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} W(x, y, z) = kW(x, y, z). \quad (10.2)$$

en la ecuación (10.2), la función $W(x, y, z)$ representa el frente de onda .

Es conocido que en un medio isotrópico y no conductor, los rayos de luz se definen como trayectorias ortogonales al frente de onda $W(x, y, z)$, que a su vez, coinciden con la dirección promedio del vector de Poynting, en un plano perpendicular al de propagación del frente de onda, la distribución espacial de intensidad se obtiene mediante la divergencia y convergencia de los rayos a lo largo de plano de observación.

ahora consideremos un vector a lo largo de la dirección de propagación:

$$\mathbf{m} = \frac{\nabla W}{|\nabla W|}, \quad (10.3)$$

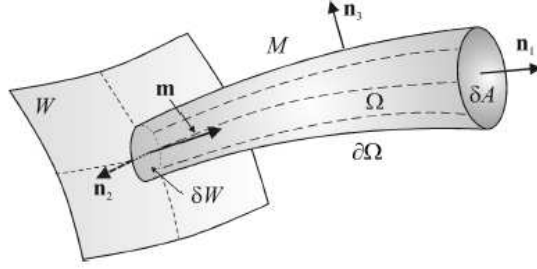


Figura 10.1: Flujo de energía a través del área Ω

entonces el flujo de energía promedio que pasa a través de una superficie cerrada $\delta\Omega$ el cual encierra un volumen Ω_s es igual a cero:

$$\int_{\delta\Omega} \langle \mathbf{s} \rangle \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{i=1}^3 \int_{\delta\Omega} \langle \mathbf{s} \rangle \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_i ds = 0. \quad (10.4)$$

en donde $\delta\Omega = \delta W, m, \delta A$ y n_i , ($i = 1, 2, 3$) es la normal externa de $\delta\Omega$. La ecuación (10.4) es equivalente a:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = 0, \quad (10.5)$$

la ecuación (10.5) es la ecuación de conservación de energía.

Por otra parte tenemos la ecuación eikonal:

$$(\nabla W)^2 = n^2, \quad (10.6)$$

Por lo que:

$$\langle S \rangle = I \frac{\nabla W}{n} \quad (\text{a}) \quad , \rightarrow \quad \left(I \frac{\nabla W}{n} \right) = 0 \quad (\text{b}), \quad (10.7)$$

Si el medio es homogéneo, de la ecuación (10.7(b)) obtenemos:

$$I \nabla^2 W + \nabla W \cdot \nabla I = 0, \quad (10.8)$$

la ecuación anterior nos da la relación entre la fase y la intensidad de una onda. Escribiendo la ecuación (10.8) en términos del laplaciano transversal ∇_T y

suponiendo que la onda o el campo es monocromático, se satisface lo siguiente:

$$\left| \frac{\partial W}{\partial z} \right| \approx 1 \quad (10.9)$$

$$\left| \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right| \gg |\nabla_T^2 W| \quad (10.10)$$

con la cual la ecuación (10.8) se reduce a:

$$I \nabla_T^2 W + \nabla_T W \cdot \nabla_T I + \frac{\partial I}{\partial z} = 0. \quad (10.11)$$

La cual se conoce como la ecuación de transporte de irradiancia.

Bibliografía

- [1] M. Born, E. Wolf, Principles of optics, Pergamon, 1965
- [2] Berry, M.V. Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and their Diffraction Patterns. Progress in optics XVIII, 1980.
- [3] Gbur, G. Mathematical Methods for Optical Physics and Engineering. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [4] Lahiri A, Basic Optics I-II: Electromagnetic Theory, ray optics, e-Book, 2014
- [5] Lemons, Don. Perfect Form: Variational Principles, Methods, and Applications in Elementary Physics, Princeton, Princeton University Press, 1997
- [6] Mandelis, Andrea. Diffusion- wave fields: mathematical methods and Green functions, Springer- Verlag New York, 2001
- [7] Berry, M. V, Catastrophe optics: Morphologies of caustics and their diffraction patterns, Progress in optics XVIII, 1980
- [8] Martinez, Niconoff, G, Carranza, J, and Rodriguez, A. C. Caustics of diffraction fields, Opt. Commun. 114, 1995.