Medición de temperaturas de la flama de una vela usando 4 interferómetros de difracción por punto.

por

Juan Carlos Aguilar López

Tesis sometida como requisito parcial

Para obtener el grado de:

Doctor en ciencias en la especialidad en óptica

en el

Instituto nacional de astrofísica, óptica y electrónica.

Tonantzintla, Puebla,

Supervisada por:

Dr. J. Félix Aguilar Valdez

© INAOE 2014

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias en su totalidad o en partes de esta tesis

Contenido

lista de Figuras 4
Resumen 6
Introducción 7
Referencias 10
Capitulo 1. Marco teórico 11
1.1 Relación de los índices de refracción y las temperaturas de un medio transparente. 12
1.2 Transformada de Radon 16
1.3 Transformada Radon Inversa 23
1.3.1 El algoritmo de Kaczmarz 27
1.4 Interferómetro de difracción por punto 34
1.5 Estructura de una flama de una vela 38
Referencias 40
Capitulo 2. Arreglo óptico y procesamiento de datos experimentales 41
2.1 Arreglo óptico para realizar tomografía multidireccional 42
2.2 Obtención de la fase en los interferogramas. 44
2.2.1 Método de Kreis 44
2.3 Preprocesamiento de los datos experimentales 48
2.4 Fabricación de Micro-agujeros 49
2.4.1 Introducción 49
2.4.2 Sistema óptico 49
2.4.3 Resultados 50
Referencias 53
Capitulo 3. Resultados y discusión 54
3.1 Características del sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{W}$ 55
3.2 Ruido y su control 55
3.2 Numero de muestras en las proyecciones 56

3.2 Recuperación tomográfica de la distribución de temperaturas de una flama con una condición inicial $\mathbf{f0}$ igual a cero, y sin una restricción en el signo sobre $\mathbf{f}\boldsymbol{i}$ 57

3.3 Recuperación tomográfica de la distribución de temperaturas de una flama con diferentes condiciones iniciales $\mathbf{f0}$, y con restricción en el signo sobre $\mathbf{f}\boldsymbol{i}$. 58

3.3.1 Resultados para 2 proyecciones en 0° y 90°. 59

3.3.2. Resultados para 4 proyecciones..... 63

Referencias..... 69

Capitulo 4. Conclusiones y trabajo a futuro 70

4.1 Conclusiones generales. 70

4.2 Trabajo a futuro. 71

lista de Figuras

Figura 1.1. Efectos sobre los rayos de luz cuando un objeto de fase no cambia significativamente su dirección de propagación. 13
Figura 1.2. Interferómetro de Mach-Zehnder para estudiar objetos de fase. El término $a(x,y)$ representa la suma de las dos intensidades de los haces que interfieren I_1+I_2. El término $b(x,y)$ representa a $2(I_1I_2)^{1/2}$ 15
Figura 1.3. Franjas de interferencia debido a un objeto de fase con índices de refracción lineal. .. 16
Figura 1.4. Dominio de integración de la transformada Radon. 17
Figura 1.5. Sección de integración sobre $f(x,y)$. 18
Figura 1.6. Formación de una proyección como el conjunto de valores de la transformada de Radon para un ángulo θ constante. 19
Figura 1.7. Proyección de $\Pi(x,y)$ para θ= 0 radianes. Figura 1.8. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/6$. 21
Figura 1.9. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/4$. Figura 1.10. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/3$. 21
Figura 1.11. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/2$. 22
Figura 1.12. Retro-proyección de $p0t$. 23
Figura 1.13. Retro-proyección de $p45t$. 23
Figura 1.14. Reconstrucción después de varias retro-proyecciones. 24
Figura 1.15. Reconstrucción con 180 retro-proyecciones. 24
Figura 1.16. Reconstrucción después de 359 retro-proyecciones después de un filtrado para cada proyección. 24
Figura 1.17. Reconstrucción con 4 retro-proyecciones. 25
Figura 1.18. Ejemplo de Funciones base para representar a una función $f^*(x,y)$. 26
Figura 1.19. Ejemplo de integración sobre cada función base. 26
Figura 1.20. Convergencia del algoritmo de Kaczmarz. 28
Figura 1.21. Efecto del algoritmo de Kaczmarz cuando el sistema no tiene soluciones llamado ciclo limite. 29
Figura 1.22. Convergencia lenta del algoritmo de kaczmarz cuando los híperplanos son casi paralelos. 30
Figura 1.23. Función tipo Gaussiana $f(x,y)=\exp[-(x^2+y^2)]$. 31
Figura 1.24. Reconstrucción usando FBP. 31
Figura 1.25. Reconstrucción con el algoritmo de kaczmarz sin condición inicial. 32
Figura 1.26. Reconstrucción con el algoritmo de kaczmarz con condición inicial. 32
Figura 1.27. Arreglo tomográfico multidireccional propuesto por Doi y Sato. 34
Figura 1.28. Arreglo tomográfico multidireccional propuesto por Wei, Huai-Chun y Zhu. 35
Figura 1.29. Principio basico del interferometro de difraccion por punto. 35
Figura 1.30. Arreglo óptico para realizar un interferómetro de difracción por punto. 36

Figura 1.31. Interferograma en modo infinito realizado con un IDP, sin el objeto y sin muchas aberraciones. 37
Figura 1.32. Interferograma de una flama en modo infinito realizado con un IDP y sin muchas aberraciones. 37
Figura 1.33. Interferograma en modo infinito realizado con un IDP y con astigmatismo. 37
Figura 1.34. Diferentes zonas de combustión en la flama de una vela. 39
Figura 2.1. Arreglo propuesto para hacer tomografía multidireccional. 42
Figura 2.2. Interferogramas resultantes del arreglo experimental presentado en figura 2.1. 43
Figura 2.3. Transformada de Fourier de una sección del interferograma de una flama. 45
Figura 2.4. Filtrado de la transformada de Fourier de una sección del interferograma de una flama. 45
Figura 2.5. Fase con reflexión recuperada de una sección del interferograma de una flama. 45
Figura 2.6. Fase recuperada con punto de reflexión incorrecto de una sección del interferograma de una flama. 46
Figura 2.7. Fase recuperada con punto de reflexión correcto de una sección del interferograma de una flama. 46
Figura 2.8. a. Interferograma de una flama con una sección transversal indicado en la línea negra. b. Fase de la sección transversal indicado en la línea negra. 46
Figura 3.1. Matriz dispersa **W** en donde se observa lo dispersa que es. 55
Figura 3.2. Ejemplo de una proyección con un número de muestras denso. Esto puede hacer que la convergencia sea muy lenta debido a que los Hiper-planos son casi paralelos 56
Figura 3.30. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. 62
Figura 3.41. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. 62
Figura 3.52. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{0}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. 64
Figura 3.63. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{0}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. 64
Figura 3.74. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Aa}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. 65
Figura 3.85. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Aa}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. 65
Figura 3.9. Índices de refracción provenientes del vector final $\mathbf{f}^{i+1}$ sin efectos de ruido. 68
Figura 3.10. Convergencia de la distribución de temperaturas para $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$. 68

Resumen

Un sistema óptico formado por 4 interferómetros de difracción por punto (IDP) es usado para medir la distribución de temperaturas de una flama de una vela. La fase de la luz después de interactuar con la flama es modelada mediante la transformada de Radon y después es procesada mediante un algoritmo iterativo tomografico para finalmente obtener la distribución de temperaturas. Los interferogramas resultantes presentan la asimetría de la flama de la vela, teniendo como consecuencia que es justificado el uso del algoritmo iterativo en vez de usar la transformada de Abel. Las distribuciones de temperatura obtenidas demuestra la utilidad del método propuesto.

Introducción

Para entender el proceso de combustión y las características dinámicas de una flama, es deseable obtener la medición de temperaturas y la distribución espacial de estas. El conocimiento de estas temperaturas también permite un buen diseño y análisis en la eficiencia de un quemador de gas, de tal forma que el quemador logre lo más posible una combustión completa sin producir mucho bióxido de carbono. Un método popular de medición es por medio de un termopar, sin embargo, este tiene la desventaja de que es un método invasivo, es decir, este al introducirse dentro de la flama puede llegar a distorsionar las distribución de las mismas temperaturas que se quiere medir.

Debido a que existe una relación entre los índices de refracción de una gas y su temperatura, existen diversos métodos de no contacto formados por arreglos ópticos para realizar mediciones en temperatura[1],[2]. La mayoría de estos arreglos se basan en sistemas holográficos o interferómetros de doble brazo tales como el de Mach-Zehnder o el de Twyman-Green [1],[2]. Para hacer tales mediciones con estos sistemas ópticos, primero se obtiene la diferencia de caminos ópticos proveniente de varios o de un solo interferograma tomados a diferentes ángulos. El numero de interferogramas necesarios(o también conocido como proyecciones) dependerá de la estructura espacial del objeto, si este no tiene simetría, puede ser que se necesiten varios interferogramas, si el objeto por ejemplo tiene alguna simetría por ejemplo radial, solo será necesario un interferograma ya que todos ellos serán iguales para cualquier ángulo [1], [2]. Después se le aplica a el conjunto de la diferencias de caminos ópticos obtenida en cada interferograma, un procesamiento numérico con algoritmos usados en tomografía computarizada, esto con el fin de que uno pueda obtener los índices de refracción asociados con la flama. El algoritmo tomografico usado para realizar el procesamiento numérico también dependerá del numero de interferogramas disponibles ya que el lugar en donde se realice la medición puede no permitir la captura de muchos interferogramas. Una vez obtenidos los índices de refracción, estos se usan para poder obtener las temperaturas de la flama con la ayuda de la ecuación de Gladstone-Dale[1], [2].

Existen también formas de medición con interferómetros de trayectoria común. Goldmeer presento una forma de hacerlo con el interferómetro de difracción por punto (IDP) [3]. Sin embargo, el método presentado en su trabajo, estaba limitado por el sistema comercial utilizado, con nombre, 'Smartt Interferometer, Coherent, Inc.'. Una de las restricciones, entre otras fue, por ejemplo, la extensión del diámetro de la flama, el cual fue de 0.5 cm aproximadamente. Pese a la simplicidad mostrada en la medición usando el IDP, no se han realizado posteriores trabajos hasta la fecha.

En la mayoría de los trabajos reportados, se presentan estudios de flamas simétricas y bajo esa suposición, se utiliza un algoritmo basado en la transformada de Abel para poder encontrar las temperaturas [3],[4], [5]. Uno supone que la integral describiendo la longitud de caminos ópticos es equivalente a la transformada de Abel de los índices de refracción de la flama. Sin

embargo, en el caso de una flama de una vela, el fenómeno es diferente ya que el proceso de combustión y los materiales con los que está fabricado imponen la estructura de la flama pudiendo ser asimétrica. La transformada de Abel es un caso especial de la transformada de Radon, esta última se utiliza como modelo matemático de la Tomografía computarizada. Cuando el objeto es radial, la transformada de Radon se convierte en la transformada de Abel. La transformada Radon es válida para cualquier objeto sin tener una simetría especial y por lo tanto, es la herramienta matemática adecuada para aplicar en el caso de la flama de una vela.

Entonces, debido a la posible asimetría de la flama de una vela, lo más recomendable es que se haga múltiples mediciones para una mejor estimación de sus temperaturas. Existen pocos trabajos que han realizado tomografía multidireccional para estudios de flamas. Wei et al [5], propuso un sistema con 3 interferómetros de desplazamiento lateral para estimar las temperaturas de una flama de etileno tipo difuso usando dos algoritmos de recuperación tomografica, el de retroproyección filtrada(FBP) y el de Abel. Doi y Sato [6] presentaron un sistema óptico complejo formado por 8 interferometros Twyman-Green para analizar una flama turbulenta y además usaron FBP para calcular las temperaturas de la flama. Un punto importante es la complejidad del sistema óptico, estos dos sistemas propuestos no se prestan a extenderlos más debido a que ocuparían mucho espacio y su costo aumentaría debido a la inclusión de tantos elementos ópticos .

Aunque FBP ciertamente es muy utilizado, Ko y Kihm [7] demuestran con simulaciones numéricas que si el número de proyecciones de un objeto asimétrico es denso, el mejor algoritmo es el de FBP, pero cuando tenemos pocas proyecciones (5 proyecciones por ejemplo), los mejores algoritmos son los llamados de tipo iterativo. Los algoritmos de tipo iterativo buscan resolver un problema expresado en un sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. En nuestro caso, el vector solución $\mathbf{x}$ que uno desea encontrar corresponde a los índices de refracción, la matriz de transformación $\mathbf{A}$ que multiplica al vector solución representa la transformada Radon y el vector $\mathbf{b}$ corresponde a los datos experimentales provenientes de los interferogramas. Los algoritmos iterativos tienen la ventaja de que uno puede modificar al vector resultante en cada iteración de tal forma que este converja a una solución físicamente plausible. Además, estos algoritmos puede aceptar una condición inicial, de tal forma que si algunas de las proyecciones dan indicios de que el objeto tiene simetría radial, se puede utilizar como condición inicial a la solución de acuerdo a la transformada de Abel.

Entonces, considerando lo descrito anteriormente, en esta tesis proponemos un sistema óptico fácil de implementar y expandir, formado por 4 interferómetros IDP, para estimar las temperaturas de la flama de una vela. Tal como se presentará más adelante, debido a que el número de proyecciones es pequeño y a la asimetría presentada por los interferogramas, el cálculo de los índices de refracción es llevado a cabo por un algoritmo iterativo, el algoritmo de Kaczmarz. Se representa el problema mediante un sistema lineal de ecuaciones y se utiliza este algoritmo para resolverlo. Para recuperar la fase de los interferogramas se utiliza el método de Kreis [8]; en ese método se usa la transformada de Fourier y es bastante adecuado para

interferogramas con pocas franjas. Este método es muy útil para nuestro trabajo debido a que los interferogramas resultantes en el experimento tienen pocas franjas. En el capítulo 1 se presenta el marco teórico en donde se desarrolla toda la teoría involucrada relacionada con nuestra técnica propuesta; en el capítulo 2 el experimento es descrito así como también es descrito la obtención y manipulación de los datos. En el capítulo 3 se presentan los resultados obtenidos y sus comentarios. Finalmente en el capítulo 4 están las conclusiones.

Referencias

1. C. M. Vest, Holographic Interferometry, John Wiley & Sons, New York (1979).
2. T. Kreis, Handbook of Holographic Interferometry Optical an Digital Methods, Wiley-VCH, Weinheim (2005).
3. J. S. Goldmeer, D. L. Urban, and Z.-G. Yuan, "Measurement of gas phase temperatures in flames with a point-diffraction interferometer," Appl. Opt. 40(27), 4816–4823 (2001).
4. S. Sharma, G. Sheoran, and C. Shakher, "Digital holographic interferometry for measurement of temperature in axisymmetric flames," Appl. Opt. 51(16), 3228–3235 (2012).
5. W. Lv, H.-C. Zhou, and J.-R. Zhu, "Implementation of tridirectional large lateral shearing displacement interferometry in temperature measurement of a diffused ethylene flame," Appl. Opt. 50(21), 3924–3936 (2011).
6. J. Doi, S. Sato, "Three-dimensional modeling of the instantaneous temperature distribution in a turbulent flame using a multidirectional interferometer ", O.E. 46(1), 015601-1, 015601-7 (2007).
7. H. S. Ko and K. D. Kihm, "An extended algebraic reconstruction technique (ART) for density gradient projections: laser speckle photographic tomography," Exp. Fluids 27(6), 542–550 (1999).
8. T. Kreis, "Digital holographic interference-phase measurement using the Fourier-transform method," J. Opt. Soc. Am. A 3(6), 847–855 (1986).

Capitulo 1. **Marco teórico**

En este capítulo se presenta el fundamento teórico utilizado en este trabajo. Se describe cual es la relación entre los índices de refracción y la distribución de temperaturas de un medio trasparente; también se describe cómo obtener una distribución de índices de refracción por medio de interferometría y tomografía, en donde el proceso tomográfico es modelado con la transformada de Radon; se entenderá que la longitud de caminos ópticos es la transformada de Radon de los índices de refracción, siempre y cuando los efectos de refracción sean mínimos; Se describirá el algoritmo iterativo de Kaczmarz y qué tipo de soluciones son las proporciona; Observaremos como la cantidad de interferogramas o proyecciones obtenidos determina el tipo de algoritmo tomográfico utilizado. Finalmente se describirá el sistema óptico utilizado el cual es basado en el interferómetro de difracción por punto.

1.1 Relación de los índices de refracción y las temperaturas de un medio transparente.

En el área de óptica, existen objetos denominados objetos de fase, este nombre se les da debido a que cuando un haz de luz incide sobre ellos, la amplitud del haz no es modificada pero sí su fase. Por medio de los índices de refracción n de esta clase de objetos, se puede obtener su temperatura utilizándola ecuación de Gladstonde-Dale [1],[2]

$$\frac{n-1}{\rho} = K(\lambda) \tag{1.1}$$

En donde λ es la longitud de onda de la luz, K es la refractividad el cual es casi independiente de λ (por eso también se le nombra como la constante de Gladstone-Dale), y ρ es la densidad. Adicionalmente ρ está relacionado con otras variables

$$\rho = \frac{MP}{RT} \tag{1.2}$$

En donde M es el peso molecular, P es la presión, $R=8.3143$ J/(mol K) es la constante universal del gas, y T es la temperatura absoluta en grados Kelvin. Así que tenemos

$$n-1 = \frac{MP}{RT} K(\lambda) \tag{1.3}$$

Ecuación (1.3) nos permite calcular las temperaturas del objeto mediante sus índices de refracción. En la tabla 1, se muestra diferentes valores de $K(\lambda)$

Tabla 1. Valores de $\boldsymbol{K(\lambda)}$ para aire a una temperatura de 288 °K.

$\boldsymbol{\lambda}$**(nm)**	K(m^3/kg)
356.2	0.2330X10^{-3}
380.3	0.2316
407.9	0.2304
447.2	0.2290
480.1	0.2281
509.7	0.2274
567.7	0.2264
607.4	0.2259
644.0	0.2255
703.4	0.2250
912.5	0.2239

Si la luz es considerado a tener la forma:

$$u(x,y,z) = A(x,y,z)\exp\left\{\frac{2\pi}{\lambda}L(x,y,z) - \omega t\right\} \tag{1.4}$$

En donde λ es la longitud de onda de la luz y ω es la frecuencia angular de la luz. Pero además si la longitud de la onda de la luz es de valor muy pequeño -régimen de la óptica geométrica-, entonces al sustituir u en la ecuación de onda:

$$\left(\nabla^2 + \left[kn(x,y,z)\right]^2\right)u(x,y,z) = 0 \tag{1.5}$$

tenemos que $L(x,y,z)$ puede ser expresado como:

$$\Delta S = L(x,y,z) = \int nds \tag{1.6}$$

La ecuación (1.6) significa que cuando un haz de luz pasa a través del objeto de fase, se produce un cambio en su fase el cual es expresado como la longitud de caminos ópticos ΔS. Sin embargo, si el objeto no produce un cambio significativo en la dirección de propagación, tal como se ilustra en la figura 1.1, entonces ecuación (1.6) puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\Delta S = \int n(x,y,z)dy \tag{1.7}$$

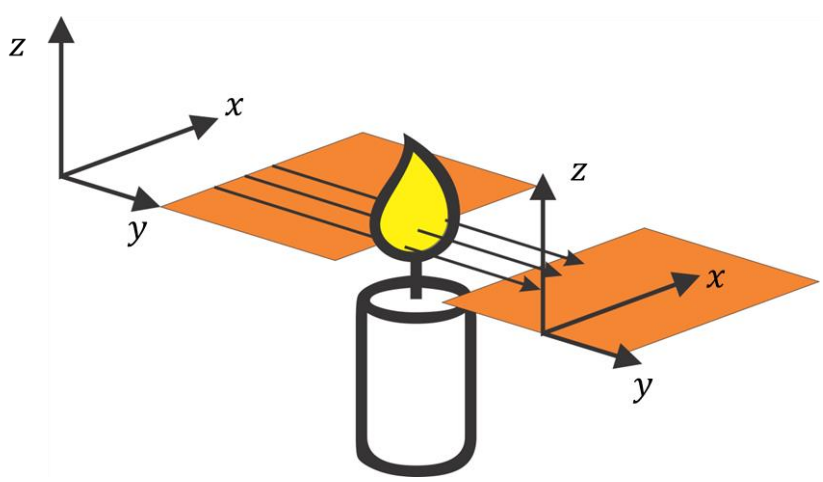


Figura 1.1. Efectos sobre los rayos de luz cuando un objeto de fase no cambia significativamente su dirección de propagación.

La integración solo se lleva a cabo en un eje, en nuestro caso en el eje y. Como consecuencia de la ecuación (1.7) es que, un conjunto de rayos a una altura z_1, sufrirá cambios en la fase debido

a unos índices de refracción $n(x,y,z_1)$ que solo están a una altura z_1. Otros rayos que estén a una altura z_2, sufrirá cambios en la fase debido solo a los índices de refracción $n(x,y,z_2)$ que solo están a una altura z_2. Por lo tanto diferentes funciones de índices de refracción $n(x,y,z_1)$, $n(x,y,z_2)$, $n(x,y,z_3)$, ... modificaran en la fase a un conjunto de rayos que este a unas alturas z_1, z_2, z_3 ,.... respectivamente. Cuando dos ondas monocromáticas con amplitudes complejas $U_1(r)$ y $U_2(r)$ se superponen, el resultado es una onda monocromática de la misma frecuencia que tiene la siguiente amplitud compleja:

$$U(r) = U_1(r) + U_2(r) \tag{1.8}$$

La intensidades de las ondas que conforman $U_1(r)$ son $I_1 = |U_1|^2 = U_1 U^*_1$ y $I_2 = |U_2|^2 = U_2 U^*_2$, mientras que la intensidad de la onda total es:

$$I = |U|^2 = |U_1 + U_2|^2 = |U_1|^2 + |U_2|^2 + U^*_1 U_2 + U_1 U^*_2 \tag{1.9}$$

Realizando las siguientes substituciones:

$$U_1 = \sqrt{I_1}\exp(i\varphi_1) \tag{1.10}$$

$$U_2 = \sqrt{I_2}\exp(i\varphi_2) \tag{1.11}$$

en donde φ_1 y φ_2 son las fases de las dos ondas, entonces usando las anteriores ecuaciones tenemos que la intensidad de la onda resultante está dado por:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi) \tag{1.12}$$

$$\text{donde} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{1.13}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\int\left[n(x,y,z) - n_0\right]dy \tag{1.14}$$

Un arreglo típico para obtener la ecuación (1.10) es el interferómetro de Mach-Zehnder ilustrado en la figura 1.2.

Entonces podemos observar que en interferómetria, lo que se obtiene es una diferencia de caminos ópticos expresado de la siguiente forma:

$$N\lambda = \int\left[n(x,y,z) - n_0\right]dy \tag{1.15}$$

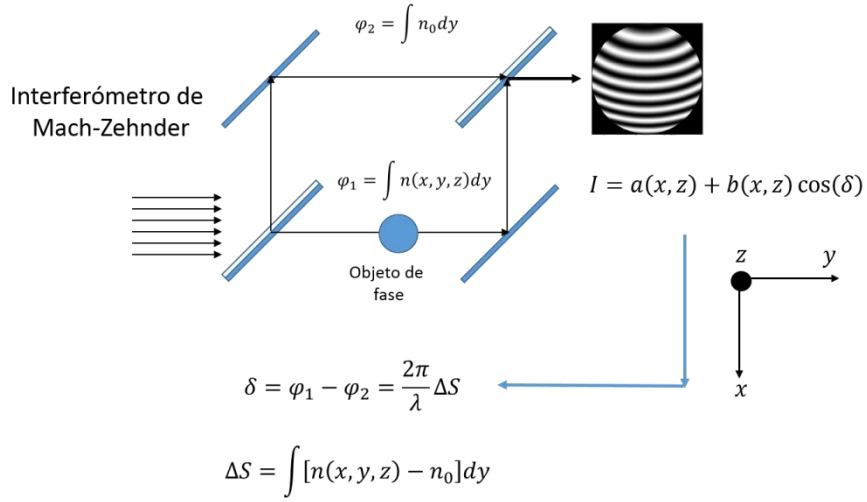


Figura 1.2. Interferómetro de Mach-Zehnder para estudiar objetos de fase. El término $a(x,y)$ representa la suma de las dos intensidades de los haces que interfieren I_1+I_2. El término $b(x,y)$ representa a $2(I_1I_2)^{1/2}$

En donde N es un número entero conocido como orden y n_0 es el índice de refracción del medio ambiente en donde pasa el haz de referencia. Si usáramos el término $n(x,y,z)$-n_0 contenida en ecuación (1.15), la distribución de temperaturas del objeto de fase quedaría de la siguiente forma:

$$n-1=\frac{MP}{RT}K(\lambda) \quad ; \quad n_0-1=\frac{MP}{RT_0}K(\lambda) \tag{1.16}$$

$$n-n_0=\frac{MP}{R}K(\lambda)\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right) \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{T}=\frac{R(n-n_0)}{MPK(\lambda)}+\frac{1}{T_0} \tag{1.18}$$

$$T=\left[\frac{1}{T_0}+\frac{(n-n_0)R}{K(\lambda)MP}\right]^{-1} \tag{1.19}$$

Una caso simple es cuando el objeto de fase tiene un índice de refracción que solo cambia en una dirección, por ejemplo en la dirección z, tal como se ilustra en la figura 1.3. Si el objeto tiene una longitud l en la dirección y, entonces la diferencia de caminos ópticos quedaría de la siguiente forma [1],[2]

$$\int\left[n(x,y,z)-n_0\right]dy=\int_0^l\left[n(z)-n_0\right]dy \tag{1.20}$$

$$=\left[n(z)-n_0\right]l \tag{1.21}$$

Si los índices cambian linealmente, por ejemplo:

$$n(z)=n_0-mz \tag{1.22}$$

en donde m es la pendiente, tenemos entonces que:

$$\frac{N\lambda}{lm}=z \tag{1.23}$$

Su interferograma también se muestra en la figura 1.3 para $n(z)$ lineal. Ahora, si el objeto de fase es totalmente asimétrico, los valores de ecuación (1.15) serían diferentes en cada ángulo de observación, es decir, cada interferograma tendría diferente distribución de franjas. Sin embargo, como se verá a continuación, la ecuación (1.15) está expresada como la transformada de Radon de $n(x,y,z)$-n_0 a un ángulo θ=0. Esto tendrá como consecuencia que si queremos obtener $n(x,y,z)$-n_0, debemos calcular una transformada de Radon inversa al conjunto de datos obtenidos de cada interferograma en diferentes ángulos de observación.

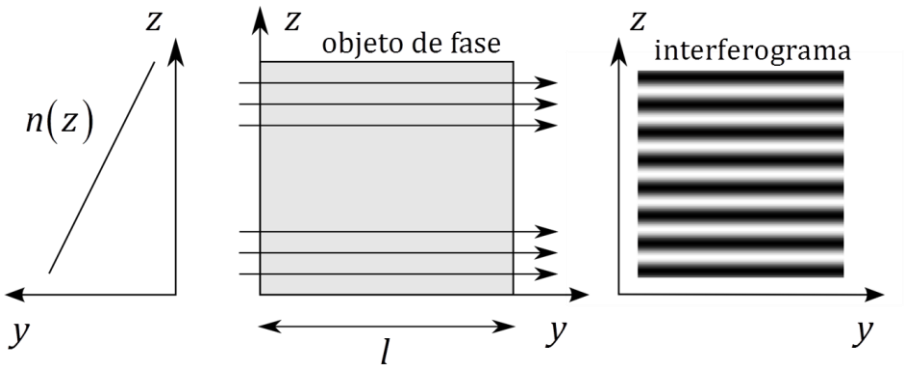


Figura 1.3. Franjas de interferencia debido a un objeto de fase con índices de refracción lineal.

1.2 Transformada de Radon

Un problema que surge en diferentes campos es el de determinar una función $f(x,y)$ a partir de sus integrales de línea [3],[4]. Estos incluyen en el área de medicina, astronomía, cristalografía, geofísica, óptica y ciencia de materiales. En estas aplicaciones el objetivo central es obtener cierta información acerca de la estructura interna de un objeto ya sea haciendo incidir la radiación de una fuente (tal como rayos X) a través del objeto o utilizando la información de la propia fuente cuando es auto-emitida, tal como un órgano dentro del cuerpo que contiene un isótopo radioactivo. La transformada de Radon representa la base matemática común para

todo esta clase de problemas. La transformada Radon y su inversa está definida de la siguiente forma:

Transformada de Radon

$$\Re f = p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)\,\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\,dxdy \tag{1.24}$$

$\delta =$ delta de dirac

Transformada de Radon Inversa

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} g(x\cos\theta + y\cos\theta)\,d\theta \tag{1.25}$$

$$g(x\cos\theta + y\cos\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(f)\,|f|\,e^{j2\pi f(x\cos\theta + y\cos\theta)}\,df \tag{1.26}$$

En donde $P_\theta(f)$ en ecuación (1.26) es la transformada de Fourier de $p_\theta(t)$. La transformada de Radon representa una integral sobre $f(x,y)$ sobre un dominio determinado por la ecuación $x\cos\theta + y\sin\theta = t$, es decir, se establece una integral de línea con dirección en $x\cos\theta + y\sin\theta = t$ tal como se ilustra en la figura 1.4. La delta de Dirac actúa como una función de muestreo sobre $f(x,y)$, únicamente los valores de x y y que cumplan $x\cos\theta + y\sin\theta = t$, serán tomados en cuenta bajo la operación de integración descrita en ecuación (1.24). Gráficamente esto se representa en la figura (1.15).

Sin embargo, esto solo representa un valor de $\Re f$, una forma más natural de representar los valores de $\Re f$ es agrupando todos los valores correspondientes a t para una θ constante el cual es representado por $p_\theta(t)$ y es llamado como la proyección de $f(x,y)$ para un ángulo θ. Gráficamente esto se ilustra en la figura 1.6.

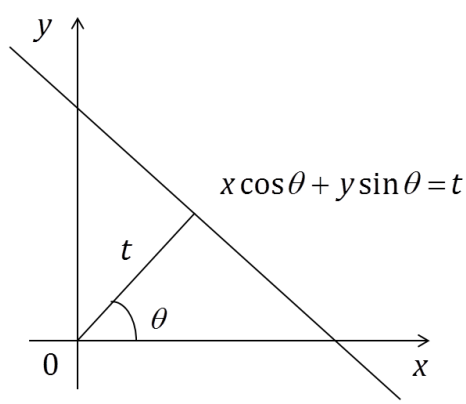


Figura 1.4. Dominio de integración de la transformada Radon.

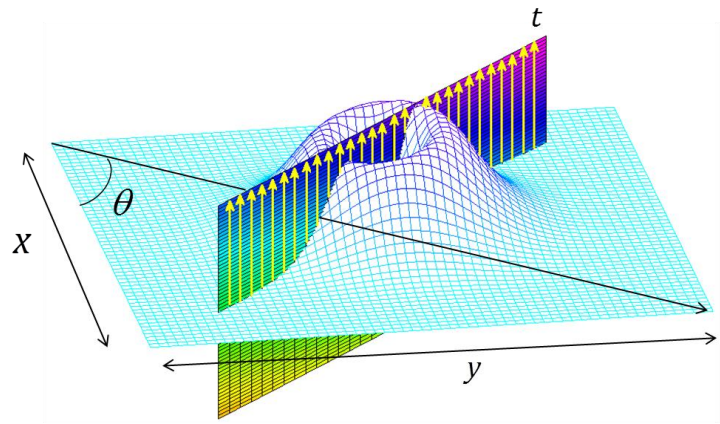


Figura 1.5. Sección de integración sobre $f(x,y)$.

Ahora procederemos a calcular la transformada de Radon de $n(x,y,z)$ para θ=0 y a una dada altura constante z_0 [4], tenemos lo anterior que:

$$\Re f = p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int n(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)dxdy \tag{1.27}$$

$$\Re f = p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int n(x,y)\delta(x - t)dxdy \tag{1.28}$$

$$\Re f = p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t,y)dy \tag{1.29}$$

Pero se puede observar de la figura 1.4 o la figura 1.6 que en θ=0 el eje t es igual al eje x. Por lo tanto tenemos que:

$$\Re f = p_\theta(t) = p_\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\mathrm{x},y)dy \tag{1.30}$$

el cual es básicamente es la expresión de la longitud de caminos ópticos para una dada altura constante z_0 tal como también se indica en ecuación (1.6). Entonces podemos concluir que encontrar $n(x,y)$ es invertir su transformada de Radon dado por ecuación (1.15).

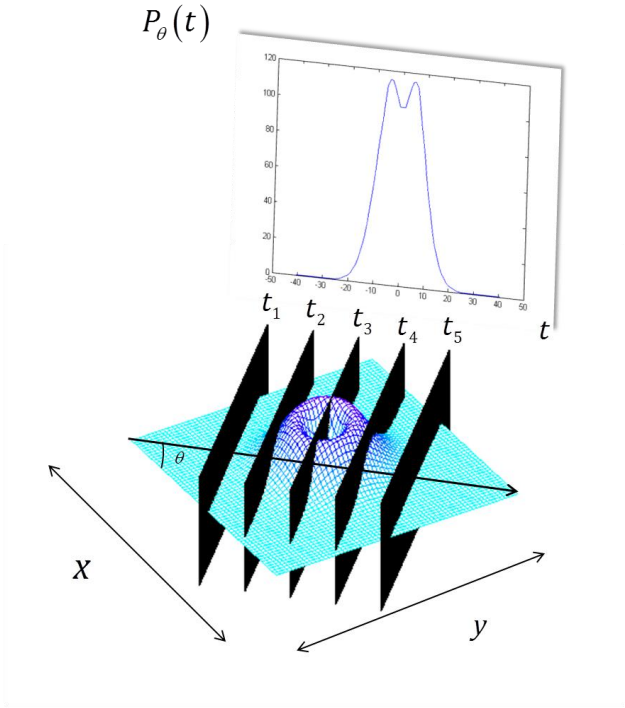


Figura 1.6. Formación de una proyección como el conjunto de valores de la transformada de Radon para un ángulo θ constante.

Cuando $f(x,y)$ es par y separable, es decir $f(x,y)=f(x)\,f(y)$ podemos expresar su transformada de Radon de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
p_\theta(t) &= p_{\theta,t}\{f(x,y)\} = \iint f(x)f(y)\delta(t - x\cos\theta - y\sin\theta)dxdy \\
&= \frac{1}{|\sin\theta||\cos\theta|}\int f\left(\frac{\alpha}{|\sin\theta|}\right) f\left(\frac{t-\alpha}{|\cos\theta|}\right)d\alpha \\
&= \frac{1}{|\sin\theta||\cos\theta|} f\left(\frac{t}{|\sin\theta|}\right) * f\left(\frac{t}{|\cos\theta|}\right) \qquad (1.31)
\end{aligned}
$$

$*$ = operacion de convolucion

$y|\sin\theta| = \alpha$; para cualquier angulo, excepto $\theta=[0,180,90,270]$

Su demostración se da a continuación:

Tenemos que $\iint f(x)f(y)\delta(t\text{-}x\cos\theta - y\sin\theta)dxdy$ puede ser expresado como :

$$
p_\theta(t) = \iint f(x)f(y)\delta\left[\cos\theta\left(\frac{t}{\cos\theta} - x - y\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right]dxdy \qquad (1.32)
$$

$$=\iint f(x)f(y)\frac{1}{|\cos\theta|}\delta\left(x-\frac{t}{\cos\theta}+y\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)dxdy \tag{1.33}$$

$$=\frac{1}{|\cos\theta|}\int f\left(\frac{t-y\sin\theta}{\cos\theta}\right)f(y)dy \tag{1.34}$$

cuando $\theta\in(0,\pi/2)$ tendremos que $\sin\theta/\cos\theta$ será positivo, cuando $\theta\in(\pi/2,\pi)$ tendremos los mismos valores en orden inverso de $\sin\theta/\cos\theta$ pero ahora con diferente signo debido a que el termino $\cos\theta$ es negativo. Entonces, podemos expresar a los valores de $f[(t-y\sin\theta)/\cos\theta]$ para $\theta\in(\pi/2,\pi)$ equivalentemente cómo $f[(-t+y\sin\theta)/\cos\theta]$ pero para $\theta\in(\pi/2,0)$, y si consideramos que $f(x)=f(-x)$, entonces concluimos que el efecto del signo de $\sin\theta$ y $\cos\theta$ no influye en el resultado y finalmente tenemos que:

$$=\frac{1}{|\cos\theta|}\int f\left(\frac{t-y|\sin\theta|}{|\cos\theta|}\right)f(y)dy \tag{1.35}$$

$$=\frac{1}{|\cos\theta||\sin\theta|}\int f\left(\frac{\alpha}{|\sin\theta|}\right)f\left(\frac{t-\alpha}{|\cos\theta|}\right)d\alpha \tag{1.36}$$

$$\alpha=y|\sin\theta|$$

Esto significa que podemos calcular la transformada de Radon de una función separable par mediante una transformada de Fourier rápida. Cuando tengamos $0<\theta<\pi/4$, el soporte de $f(t/|\cos\theta|)$ será mayor que el soporte de $f(t/|\sin\theta|)$; cuando $\theta=\pi/4$, los dos soportes serán iguales. Los resultados obtenidos para $\pi/4<\theta<\pi/2$ serán los mismos que para $0<\theta<\pi/4$ pero con un orden inverso.

Ecuación 1.31 es de mucha utilidad cuando la función $f(x,y)$ está formada por funciones base B y además estas son separables. Podemos calcular la transformada de Radon mediante la transformada rápida de Fourier para casi cualquier ángulo. En sección 1.3 utilizaremos la función Bi-cubico como función base para representar $f(x,y)$.

Como ejemplo, se muestra la transformada de Radon de la función rectángulo $\Pi(x,y)$ el cual es una función par separable y podemos expresarla como $\Pi(x)\Pi(y)$. La ecuación de su transformada de Radon para $0<\theta<\pi/4$ está dado por:

$$\Re\{\Pi(x,y)\}\begin{cases} t \le -\dfrac{(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}{2} & , \quad P_\theta(t)=0 \\ -\dfrac{(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}{2} \le t \le \dfrac{|\sin\theta|-|\cos\theta|}{2} & , \quad P_\theta(t)=\dfrac{1}{|\sin\theta||\cos\theta|}\left(t+\dfrac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{2}\right) \\ \dfrac{|\sin\theta|-|\cos\theta|}{2} \le t \le \dfrac{|\cos\theta|-|\sin\theta|}{2} & , \quad P_\theta(t)=\dfrac{1}{|\cos\theta|} \\ \dfrac{|\cos\theta|-|\sin\theta|}{2} \le t \le \dfrac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{2} & , \quad P_\theta(t)=\dfrac{1}{|\sin\theta||\cos\theta|}\left(\dfrac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{2}-t\right) \\ t \ge \dfrac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{2} & , \quad P_\theta(t)=0 \end{cases} \tag{1.37}$$

para $\theta\in[0,\pi/2, \pi,3\pi/2]$ tenemos que:

$$p_0(t)=p_{\pi/2}(t)=p_\pi(t)=p_{3\pi/2}(t)=f(t) \tag{1.38}$$

Ejemplos de las proyecciones de $\Pi(x,y)$ para $\theta\in[0, \pi/6, \pi/4, \pi/3,\pi/2]$ se ilustran en las figuras 1.7,1.8,1.9 y 1.10.

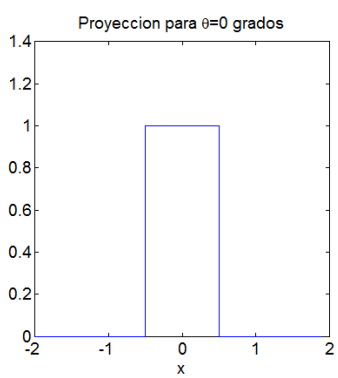


Figura 1.7. Proyección de $\Pi(x,y)$ para θ= 0 radianes.

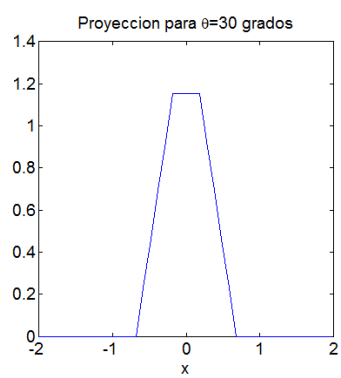


Figura 1.8. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/6$.

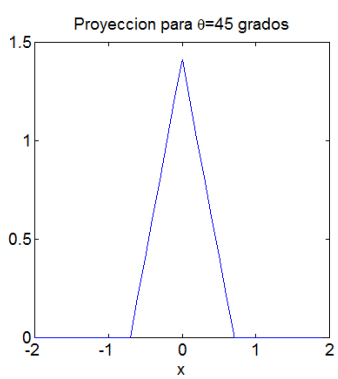


Figura 1.9. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/4$.

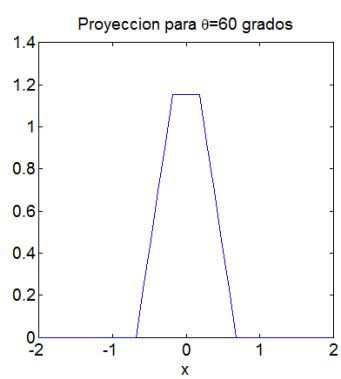


Figura 1.10. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/3$.

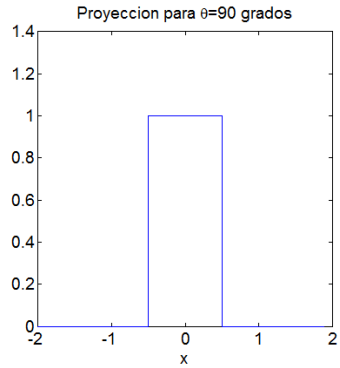


Figura 1.11. Proyección de $\Pi(x,y)$ para $\theta=\pi/2$.

En nuestro caso, el de una flama, varios autores consideran que la flama tiene una estructura radial [1],[2]. Cuando se tiene esa restricción, la fórmula para calcular la transformada de Radon pasa a convertirse a la transformada de Abel. Existen 4 versiones de la transformada de Abel, en el libro "The Transforms and Applications Handbook" [4] pueden encontrarse todas estas versiones. La que está relacionada directamente con nuestro problema es la tipo $\mathcal{A}_3$ descrita por la siguiente ecuación:

$$\mathcal{P}(t)=\mathcal{A}_3\{f(r)\}=2\int_x^{\infty}\frac{rf_3(r)\,dr}{\left(r^2-t^2\right)^{1/2}} \tag{1.39}$$

para t>0

en donde $r=(x^2+y^2)^{1/2}$. Existen diferentes métodos para poder invertir numéricamente esta ecuación, una de ellas es precisamente usando el algoritmo de retro-proyección filtrada. Debido a que restringimos el objeto a que tenga simetría radial, todas sus proyecciones serán iguales para todos los ángulos. Entonces, repetimos $P(t)$ para una cierta cantidad de ángulos y luego usamos el algoritmo de retro-proyección filtrada para estimar $f(r)$.

1.3 Transformada Radon Inversa

La idea de la transformada de Radon inversa descrita en ecuaciónes (1.25) y (1.26) es invertir el proceso de proyección, o como comúnmente se nombra, hacer un proceso de retro-proyección. Gráficamente la retro-proyección se puede describir de la siguiente forma, tenemos una proyección a un cierto ángulo, los valores de la proyección se retro-proyectan en el espacio en donde la función será reconstruida. Como ejemplo, se ilustra para el caso de θ=0 en la figura 1.12 y para el caso de $\theta=\pi/4$ se ilustra en la figura 1.13.

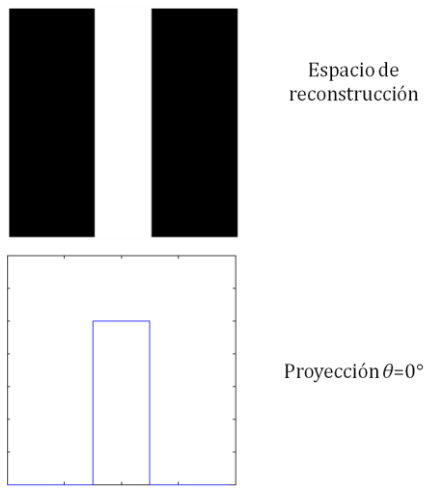


Figura 1.12. Retro-proyección de $p_0(t)$.

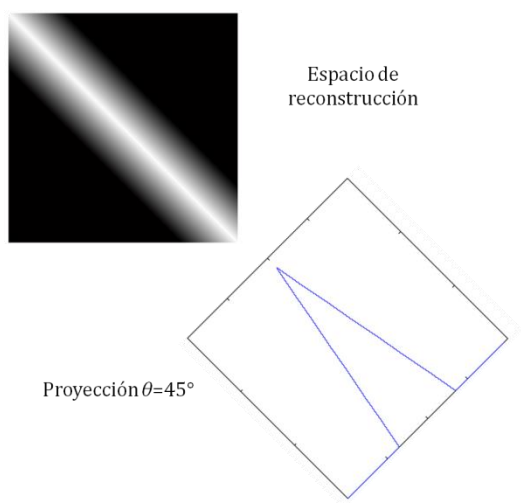


Figura 1.13. Retro-proyección de $p_{45}(t)$.

cuando el número de retro-proyecciones empieza a aumentar, empezamos a recuperar algo similar a la función rectángulo tal como se ilustra en la figura 1.14.

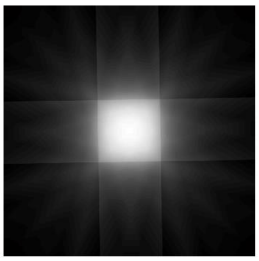


Figura 1.14. Reconstrucción después de varias retro-proyecciones.

para 180 proyecciones, entre 0 y 180 grados, tenemos la siguiente reconstrucción:

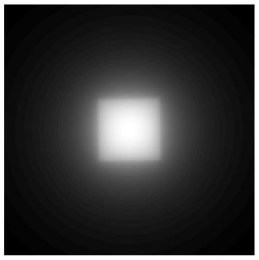


Figura 1.15. Reconstrucción con 180 retro-proyecciones.

Sin embargo observamos que la imagen presenta un cierto emborronamiento, es por eso que tenemos que aplicar un proceso de filtrado para cada proyección antes de hacer la retro-proyección. El proceso de filtrado esta descrito por la ecuación (1.25) en donde observamos que es una transformada de Fourier inversa y el filtro aplicado esta dado por $|f|$. El resultado se ilustra en la figura 1.16 para 359 proyecciones, entre 0 y 180 grados.

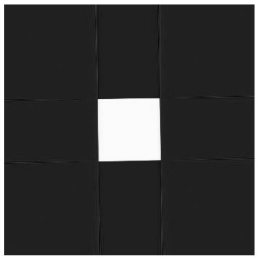


Figura 1.16. Reconstrucción después de 359 retro-proyecciones después de un filtrado para cada proyección.

Sin embargo, el número de proyecciones tiene que ser grande para que se obtenga una buena reconstrucción, en la figura 1.17 se muestra la reconstrucción con 4 proyecciones, tomadas en 0 , π/6, π/4 , π/2 grados.

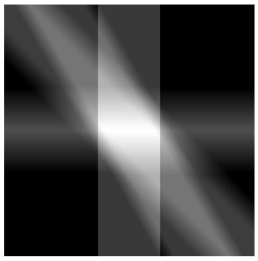


Figura 1.17. Reconstrucción con 4 retro-proyecciones.

podemos observar que la reconstrucción no es buena, no se puede distinguir que lo que se está reconstruyendo es una función rectángulo. Es por eso que se utiliza otro método de inversión de la transformada de Radon pero para pocas proyecciones.

El proceso de la transformada Radon tambien se puede describir mediante una matriz de transformacion **W** [3],[4], en donde formamos un vector **f** el cual representa a la funcion $f(x,y)$, entonces tenemos:

$$\mathbf{Wf} = \mathbf{P} \tag{1.40}$$

en donde **P** es el vector formado por la unión de todas las proyecciones tomadas. En un problema real, **P** representa los datos experimentales. En los siguientes párrafos describiremos como formar la matriz **W** y consecuentemente formar la ecuación (1.40).

Debido a que no podemos obtener exactamente a la función $f(x,y)$ en problemas físicos reales y además no podemos obtener un número infinito de datos, optamos por estimar a la función $f(x,y)$ por medio de otra función $f^*(x,y)$. La función $f^*(x,y)$ estará formada en términos de una sumatoria de N funciones base $B(x,y)$ tal como se ilustra en la figura 1.18. Entonces $f^*(x,y)$ quedaría expresado de la siguiente forma:

$$f^*(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k B_k(x,y) \tag{1.41}$$

Los coeficientes c_k pueden ser encontrados mediante una aproximación de mínimos cuadrados o mediante una interpolación. Nosotros elegimos la interpolación pero para esto suponemos que $f^*(x,y)$ está formada por MxM=N elementos y por cada elemento habrá una función base. Precisamente los elementos c_k forman al vector **f**. Cuando la función base $B(x,y)$ es de las llamadas interpoladoras tales como la función rectángulo, la función lineal o la función Bi-

cubico, los coeficientes c_k son iguales a valores de $f^*(x,y)$ en posiciones (i,j), i=1,2,3,4,...., j = 1,2,3,4, ... , pero cuando $B(x,y)$ no es interpoladora tal como el B-spline cubico, los valores de c_k difieren a los de $f^*(x,y)$[5].

En nuestro caso, la cantidad que queremos recuperar es $n(x,y,z)$-n_0 el cual es una función suave y por lo tanto podemos elegir a la función Bi-cubico para formar su estimado . Al ser la función Bi-cubico separable, significa que podemos expresarla su transformada de Radon por medio de la ecuación (1.31) .

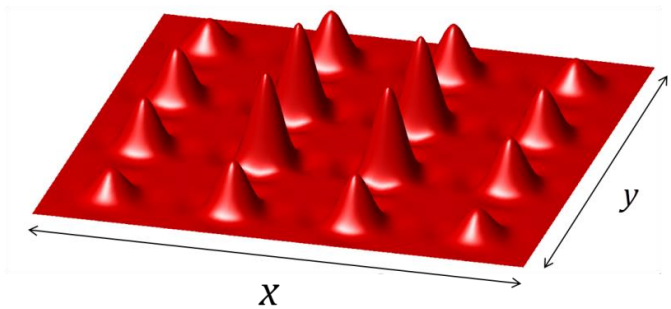


Figura 1.18. Ejemplo de Funciones base para representar a una función $f^*(x,y)$.

Haciendo una analogía con el caso de óptica geométrica, la transformada de Radon actúa como un rayo integrador sobre $f^*(x,y)$, pero debido a que $f^*(x,y)$ está representado por una sumatoria de funciones bases $B_k(x,y)$, la integración se llevara a cabo para cada función base. Esto se ilustra en la figura 1.19.

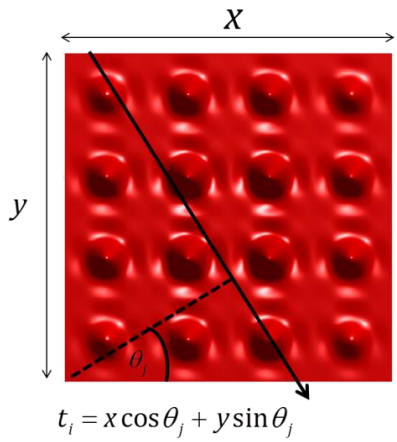


Figura 1.19. Ejemplo de integración sobre cada función base.

Entonces para una cierta dupla (t_i,θ_j) tenemos la siguiente ecuación:

$$c_1 w_1\{t_i,\theta_j\} + c_2 w_2\{t_i,\theta_j\} + c_3 w_3\{t_i,\theta_j\} + \cdots + c_M w_M\{t_i,\theta_j\} = p\{t_i,\theta_j\}\ , \qquad (1.42)$$

en donde un coeficientes w_k representa el valor de las transformada de Radon para una función base $B_k(x,y)$ debido al rayo integrador en la dirección $x\cos\theta_j + y\sin\theta_j = t_i$ y $p\{t_i, \theta_j\}$ es la suma o el valor de la transformada de Radon en (t_i, θ_j). Entonces para diferentes valores de (t_i, θ_j) iremos formando la matriz **W**.

Cuando el número de proyecciones es pequeño el sistema en ecuación (1.40) es generalmente indeterminado. Como ejemplo, tenemos *n=2* proyecciones, cada uno con 128 muestras, pero si el tamaño en muestras del diámetro promedio del objeto es menor que 128 entonces podríamos elegir como el tamaño final de cada lado de la imagen como *M=128* así que el tamaño de la matriz seria de *IXJ* en donde *I*=128X2=256 y *J*=128X128=16384.

La forma clásica para resolver sistemas indeterminados es encontrando la pseudo-inversa de **W** o por medio de un algoritmo iterativo, proporcionando una solución de tipo mínimos cuadrados [6]. Sin embargo, el tipo de solución que se obtiene con la pseudo-inversa, puede resultar no realístico y es por eso que se utilizan algoritmos iterativos los cuales se les puede aplicar un vector solución inicial $\mathbf{f}^0$ que tiene las características del resultado deseado. Soluciones basado en SVD- pseudo inversas y la regularización de Tikhonov se hacen imprácticos cuando la matriz **W** es muy grande. Estos tipos de matrices requieren mucha memoria. Si la mayoría de los elementos en **W** son cero, entonces **W** es una matriz dispersa, de tal forma que solo será necesario guardar los elementos diferentes de cero y sus posiciones dentro de la matriz. Los métodos para encontrar la solución de un sistema lineal de ecuaciones basado en por ejemplo SVD y factorización QR no tienden a trabajar muy bien con matrices dispersas. El problema es que las matrices que se producen en la factorización de **W** frecuentemente son más densos que la propia **W**. En particular, las matrices **U** y **V** en SVD y la matriz **Q** en la factorización QR, son requeridas a ser ortogonales y esto tiene como consecuencia que resulten ser muy densas [6].

En el caso de un algoritmo iterativo no se requiere el uso de más matrices como en el caso de SVD. En cada iteración, está presente una multiplicación entre las filas de **W** y el vector solución que se produce en cada iteración, en donde este proceso puede ser realizado sin un uso adicional de memoria [6]. También como podemos observar en la figura 1.19, un rayo no intercepta a la mayoría de las funciones base que forma $f^*(x,y)$, por lo tanto, la mayoría de los coeficientes w_k serán cero y **W** será dispersa.

1.3.1 El algoritmo de Kaczmarz

El algoritmo de Kaczmarz es un algoritmo iterativo de los llamados de proyecciones utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales especialmente en aquellos originados por aplicaciones en tomografía [6]. Para entender el algoritmo, hay que notar que cada una de las filas del sistema $\mathbf{W}_{i,*}\mathbf{f} = p_i$, forman un híper-plano que es de dimensión *m*-1 dentro del espacio vectorial *m,* en donde $\mathbf{W}_{i,*}$ representa la *i*-ésima fila de la matriz **W**. El algoritmo de Kaczmarz empieza con una solución inicial $\mathbf{f}^0$, y después encuentra o se mueve hacia una solución $\mathbf{f}^1$ por medio de una proyección de la solución inicial $\mathbf{f}^0$ en el híperplano definido por la primera fila

en **W**. Después $\mathbf{f}^1$ es proyectado sobre el híperplano definido en la siguiente fila $\mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{f} = p_{i+1}$. El proceso es repetido hasta que la solución es proyectada en todos los *n* híperplanos presentes en **W**. Este proceso es repetido hasta que la solución ha convergido suficientemente. Como ejemplo, se muestra en la figura 1.20 la solución para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ -x + y &= -1 \end{aligned} \tag{1.43}$$

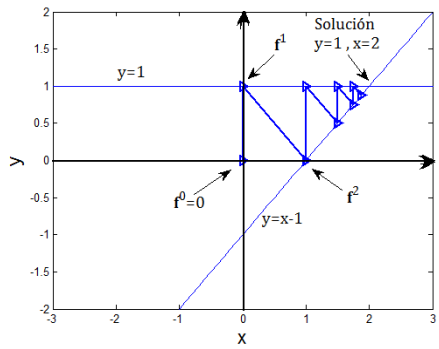


Figura 1.20. Convergencia del algoritmo de Kaczmarz.

Para definir el algoritmo, es necesario desarrollar una fórmula que calcule la proyección de un vector sobre un híper-plano $\mathbf{W}_{i,*}\mathbf{f} = p_i$. Un híperplano en $\mathbf{R}^n$ es el conjunto de puntos $x \in \mathbf{R}^n$ que cumple la siguiente ecuación:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b \tag{1.44}$$

en donde, $\langle \cdot \rangle$ denota al producto punto, **a** es un vector constante y *b* es un escalar. El vector **a** es ortogonal al híperplano. En el caso de de ecuación (1.43), para y=1 , **a**=(0,1), para $-x+y=-1$, **a**=(-1,1). Entonces para el caso de $\mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{f} = p_{i+1}$, el vector $\mathbf{W}_{i+1,*}^T$ será el vector perpendicular a ese híperplano y por lo tanto, la actualización de $\mathbf{f}^i$ debido a su proyección ortogonal sobre $\mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{f} = p_{i+1}$, será proporcional a $\mathbf{W}_{i+1,*}^T$, es decir:

$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}^i + \beta \mathbf{W}_{i+1,*}^{\ T} \tag{1.45}$$

Debido a que $\mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{f}^{i+1} = p_{i+1}$, tenemos la siguiente expresión:

$$\mathbf{W}_{i+1,*}\left(\mathbf{f}^i + \beta \mathbf{W}_{i+1,*}^{\ T}\right) = p_{i+1} \tag{1.46}$$

$$\mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{f}^i - p_{i+1} = -\beta \mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{W}_{i+1,*}^{\ T} \tag{1.47}$$

$$\beta = -\frac{\left(\mathbf{W}_{\mathrm{i}+1,*}\mathbf{f}^{i} - p_{\mathrm{i}+1}\right)}{\mathbf{W}_{\mathrm{i}+1,*}\mathbf{W}_{i+1,*}{}^{T}} \tag{1.48}$$

entonces la formula queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}^{i} - \frac{\left(\mathbf{W}_{\mathrm{i}+1,*}\mathbf{f}^{i} - p_{\mathrm{i}+1}\right)}{\mathbf{W}_{\mathrm{i}+1,*}\mathbf{W}_{i+1,*}{}^{T}}\mathbf{W}_{i+1,*}{}^{T} \tag{1.49}$$

El algoritmo de Kaczmarz para resolver el sistema de ecuaciones **Wf=P**, esta dado de la siguiente forma:

1. establecemos una condición inicial $\mathbf{f}^{0}$
2. Para $i = 0,1,...,m,$ tenemos que

$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}^{i} - \frac{\left(\mathbf{W}_{\mathrm{i}+1,*}\mathbf{f}^{i} - p_{\mathrm{i}+1}\right)}{\mathbf{W}_{\mathrm{i}+1,*}\mathbf{W}_{i+1,*}{}^{T}}\mathbf{W}_{i+1,*}{}^{T} \tag{1.50}$$

3. Si la solucion no ha convergido lo suficiente, regresamos al segundo paso

Puede ser demostrado que si el sistema de ecuaciones **Wf=P** tiene una solución única, entonces el algoritmo de Kaczmarz convergerá a la solución. Si el sistema de ecuaciones tiene muchas soluciones, el algoritmo convergerá a la solución más cercana al vector $\mathbf{f}^{0}$. Si no hay una solución exacta al sistema de ecuaciones, el algoritmo convergerá a un conjunto de vectores, típicamente estará oscilando alrededor de una solución aproximada, a este proceso se le llama ciclo limite y se ilustra en la figura 1.21 [6],[7].

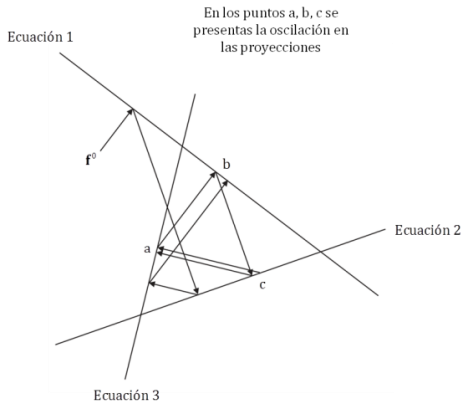


Figura 1.21. Efecto del algoritmo de Kaczmarz cuando el sistema no tiene soluciones llamado ciclo limite.

En ciertos casos, la solución física esperada debe tener un cierto signo, es decir, puede ser totalmente positiva o totalmente negativa, entonces, para que el algoritmo de Kaczmarz

converja a una solución totalmente positiva, uno puede restringir al resultado de cada iteración de esta forma $\mathbf{f}^i > \mathbf{0}$ o $\mathbf{f}^i < \mathbf{0}$. Si el signo no es elegido correctamente, la temperatura en grados Kelvin pueden ser negativas usando ecuación (1.19), por lo tanto dando un valor incorrecto.

Uno de los grandes problemas en la convergencia es el ruido, en el trabajo de Christian Hasen [8] se demuestra como el ruido blanco afecta a la convergencia del algoritmo, básicamente lo que pasa es que en las primeras iteraciones el algoritmo de Kaczmarz converge bien a la solución, sin embargo después de unas iteraciones el algoritmo empieza a converger también a las características del ruido, es decir, el ruido se amplifica. Se llega a un punto en donde el error $\| \mathbf{f} - \mathbf{f}^i \|_2$ alcanza un mínimo y después de ese mínimo el error empieza a crecer debido al ruido, y a esto se le llama semi-convergencia. Sin embargo, el ruido y la convergencia pueden ser controlados mediante un parámetro de relajación denotado como τ. El parámetro τ es introducido en ecuación (1.38) como un elemento multiplicativo de tal forma que la ecuación (1.39) o la ecuación (1.40) quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}^i - \tau \frac{\left(\mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{f}^i - p_{i+1}\right)}{\mathbf{W}_{i+1,*}\mathbf{W}_{i+1,*}^{\ T}} \mathbf{W}_{i+1,*}^{\ T} \tag{1.51}$$

el parámetro τ tiene valores dentro del intervalo (0,2) y básicamente en bajos valores de τ la convergencia es lenta y para valores cerca de 2 la convergencia es rápida. En la presencia de ruido y con valores de τ cercanos a 2, el mínimo error de $\| \mathbf{f} - \mathbf{f}^i \|_2$ presente en la semi-convergencia se alcanza muy rápido, además que el valor del error mínimo obtenido solo se presenta para el valor de τ elegido. Lo contrario sucede con valores de τ cercanos a 0, el error mínimo se alcanza en forma lenta pero con la característica de que es menor que al correspondiente para valores de τ cercanos a 2 [8]. También la convergencia puede ser rápida o lenta dependiendo de qué tan ortogonales sean los híperplanos. Si estos son casi paralelos la convergencia será muy lenta tal como se ilustra en la figura 1.22.

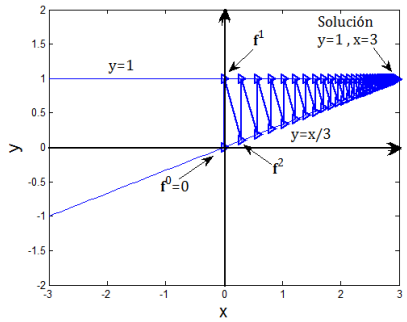


Figura 1.22. Convergencia lenta del algoritmo de kaczmarz cuando los híperplanos son casi paralelos.

Entonces a veces es necesario hacer un ordenamiento de los híperplanos de tal forma que estos sean ortogonales en lo más posible y así asegurar una rápida convergencia. Sin embargo,

cuando el sistema no tiene solución, cada ordenamiento diferente dará un ciclo límite diferente, provocando a su vez una convergencia diferente.

Presentamos a continuación la simulación de la recuperación de una función tipo Gaussiana $f(x,y)=\exp[-(x^2+y^2)]$, en donde su grafica es ilustrada en la figura 1.23.

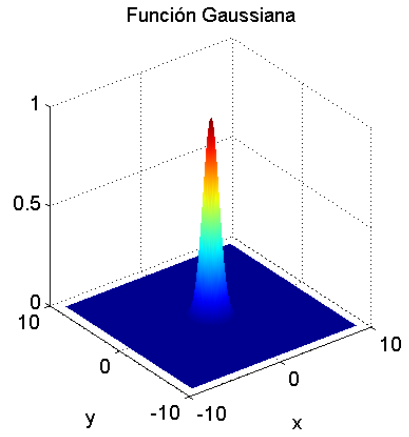


Figura 1.23. Función tipo Gaussiana $f(x,y)=\exp[-(x^2+y^2)]$.

En este trabajo tomamos a 0°, 26°, 90°, 116° como ángulos para las proyecciones experimentales, así que tomamos también esos ángulos para desarrollar esta simulación numérica. Si usamos FBP, obtenemos la reconstrucción descrita en la figura 1.24.

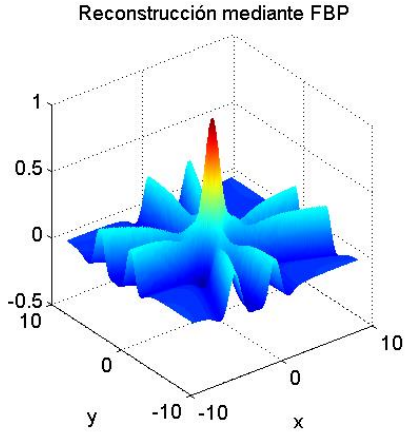


Figura 1.24. Reconstrucción usando FBP.

Podemos observar que la reconstrucción no es satisfactoria en las regiones que rodean el lóbulo central pero el valor máximo que es de 0.9890 es muy cercano al valor máximo de la función Gaussiana que es de 1. La reconstrucción usando ecuación (1.41) con $\tau=1$ y $\mathbf{f}^0 = 0$ se presenta en la figura 1.25.

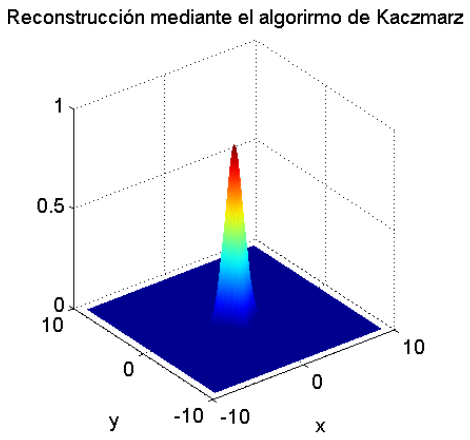


Figura 1.25. Reconstrucción con el algoritmo de kaczmarz sin condición inicial.

Podemos observar que la reconstrucción es más satisfactoria en las regiones que rodean el lóbulo central pero el valor máximo que es 0.8744 es significativamente más bajo que el valor máximo de la función Gaussiana. Para poder solucionar el problema de valor máximo en el algoritmo de Kaczmarz, establecemos como solución inicial el algoritmo de retroproyección filtrada, el resultado se ilustra en la figura 1.26. El resultado es también satisfactorio en las regiones que rodean el lóbulo central pero ahora el valor máximo es de 1.0082.

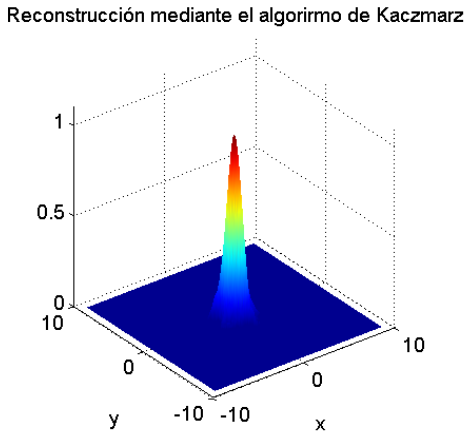


Figura 1.26. Reconstrucción con el algoritmo de kaczmarz con condición inicial.

De acuerdo a los resultados anteriores, se concluye que siempre es bueno usar una solución inicial diferente de cero ya sea que provenga del algoritmo de retro-proyección filtrada o del conocimiento de una solución física que sea factible como el de la solución debido a la transformada de Abel.

Sin embargo, la selección de la condición inicial no es tan obvia tal como se describe a continuación. Un vector **f** en términos de la matriz **W**, puede ser descompuesto por dos componentes denotados como [9]:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{+} + \mathbf{f}^{-} \tag{1.52}$$

en donde $\mathbf{f}^{+}$ denota el rango $\mathcal{R}(\mathbf{W})$ de $\mathbf{W}$ con un tamaño de *IxJ*, el cual puede ser expresado como la combinación lineal de *I* filas tal como se describe en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{f}^{+} = \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.53}$$

y el otro espacio es el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{W})$ el cual es ortogonal a $\mathcal{R}(\mathbf{W})$ y es denotado como

$$\mathbf{W}\mathbf{f}^{-} = \mathbf{0} \tag{1.54}$$

usando ecuación (1.42), ecuación (1.43) y ecuación (1.44) sobre ecuación (1.30), uno puede encontrar la siguiente expresión:

$$\mathbf{f}^{\mathbf{0}+} = \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{0}} = \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right]^{-\mathbf{1}}\mathbf{P} \tag{1.55}$$

$\mathbf{f}^{0+}$ es conocida como la solución de norma mínima y básicamente el algoritmo de Kaczmarz converge a esta solución cuando $\mathbf{f}^{0}=\mathbf{0}$. Pero como se había dicho anteriormente, si $\mathbf{f}^{0}$ es diferente del vector cero, entonces las solución convergerá a la solución más cercana al vector $\mathbf{f}^{0}$ en el sentido de mínimos cuadrados. Esto es expresado por medio de la siguiente ecuación [10]:

$$\lim_{i\to\infty}\mathbf{f}^{i} = P_{\mathcal{N}(\mathbf{W})}\left(\mathbf{f}^{0}\right) + \mathbf{f}^{0+} \tag{1.56}$$

Donde $P_{\mathcal{N}(\mathbf{W})}(\mathbf{f}^{0})$ denota como la proyección de $\mathbf{f}^{0}$ sobre $\mathcal{N}(\mathbf{W})$. Entonces la solución siempre será la suma de la solución de norma mínima mas la proyección de $\mathbf{f}^{0}$ sobre $\mathcal{N}(\mathbf{W})$. Esto deriva a que tendremos muchas soluciones de tipo de mínimos cuadrados, entonces un punto importante es hacer una buena selección de $\mathbf{f}^{0}$ de tal forma que nos lleve a un resultado que sea realístico.

1.4 Interferómetro de difracción por punto

El proceso de hacer tomografía del objeto de fase suave depende del arreglo óptico utilizado. Si quisiéramos hacer tomografía multidireccional usando el interferómetro de Mach-Zehnder, este sería muy complicado debido a que este tiene dos brazos. Junta Doi y Seishiro Sato presentaron un arreglo con 8 interferómetros Twyman-Green para medir las temperaturas de una flama tal como se ilustra en la figura 1.27[11].

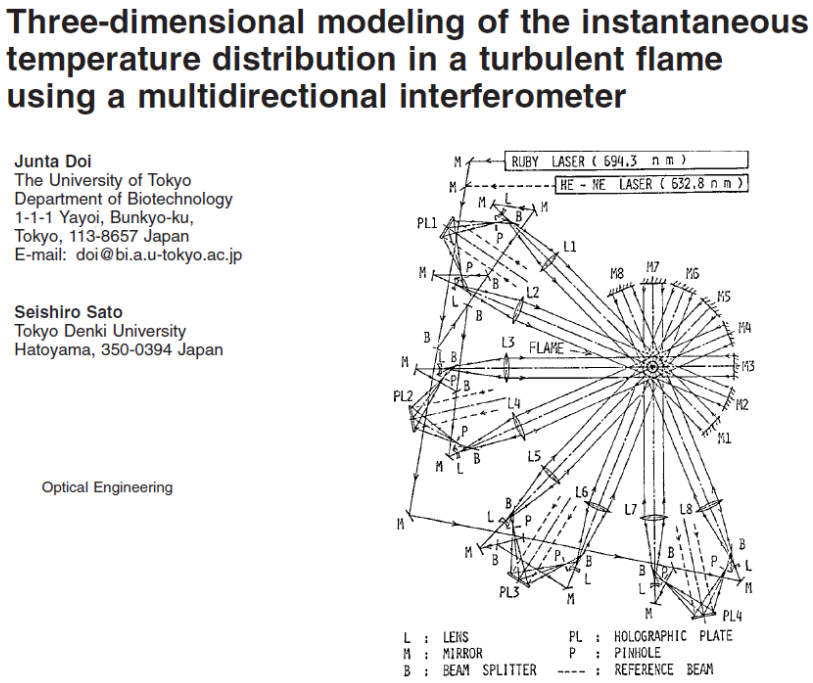


Figura 1.27. Arreglo tomográfico multidireccional propuesto por Doi y Sato.

Se puede observar la gran complejidad y la gran cantidad de elementos utilizados. El algoritmo que Doi y Sato usaron fue el de retroproyección filtrada, el cual puede ser justificado por el hecho de tener 8 proyecciones.

Otro arreglo basado en 3 interferómetros de desplazamiento lateral para medir las temperaturas de una flama fue propuesto por Wei Lv, Huai-Chun Zhou, y Jin-Rong Zhu tal como se ilustra en la figura 1.28 [12]. También se puede apreciar que el sistema para el caso de mas interferómetros resulta en ser más complejo. En su trabajo, los autores utilizaron un desplazamiento grande, de tal forma que la obtención de la fase fuera más fácil. Además, ellos también usaron el algoritmo de retroproyección filtrada.

En este trabajo nosotros proponemos el uso del interferómetro de difracción por punto (IDP) para solventar los problemas antes mencionados en el caso de otros interferómetros [13].

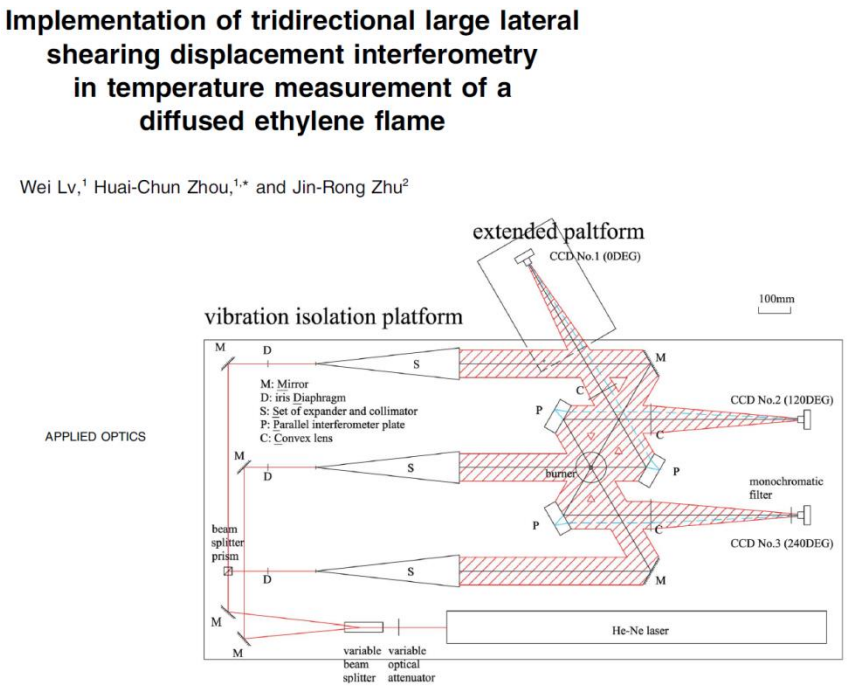


Figura 1.28. Arreglo tomográfico multidireccional propuesto por Wei, Huai-Chun y Zhu.

Un interferómetro de Difracción por punto es un interferómetro de trayectoria común en el cual el haz de referencia es generado por difracción debido a un pequeño micro-agujero o del extremo de una fibra óptica. Ambos haces , el de referencia y el del objeto son coherentes e interfieren tal como se ilustra en la figura 1.29.

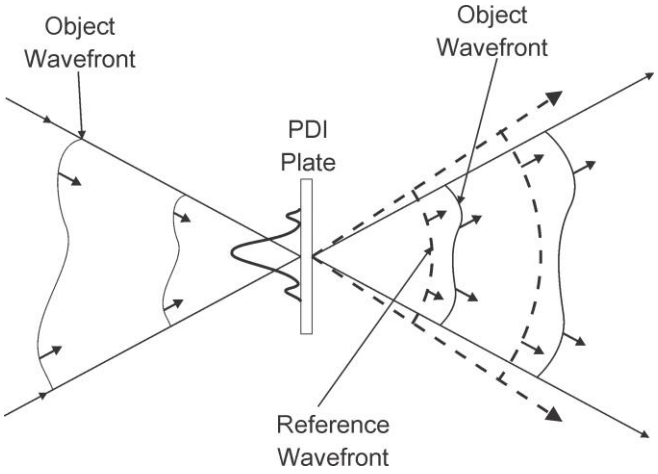


Figura 1.29. Principio basico del interferometro de difraccion por punto.

El arreglo utilizado en este trabajo se ilustra en la figura 1.30. Una placa semitransparente denotado como IDP, el cual tiene un micro-agujero, es puesto cerca o en el foco de un haz convergente. Una fuente de luz S con la suficiente coherencia es colocado en el primer punto focal F1 de la lente L1 que actúa como colimador. Un frente de onda plano sale de L1 y es transmitido sobre una muestra transparente (una placa plana, prisma o flama). El frente de onda distorsionado es trasmitido hacia una segunda lente L2 y esta hace converger el haz hacia su punto focal F2. Precisamente el PDI es puesto en ese punto y se produce el haz de referencia también.

El contraste de las franjas depende mucho del diámetro y posición del micro-agujero dentro de la imagen de la fuente S y también puede ser modificada cambiando la transmitancia del PDI. Si el PDI está dentro del plano focal de la lente y los elementos ópticos no tienen aberraciones, no observaremos franjas dentro del interferograma, a este interferograma resultante se dice que está en modo infinito. Cambiando la posición lateral del micro-agujero uno introduce tilt en la longitud de caminos ópticos, lo cual significa que se observaran franjas paralelas en el interferograma. Desplazando en forma axial el PDI, se logra observar franjas circulares. El contraste de las franjas y la irradiancia trasmitida se hacen muy bajos cuando típicamente 5 franjas son introducidos dentro el interferograma.

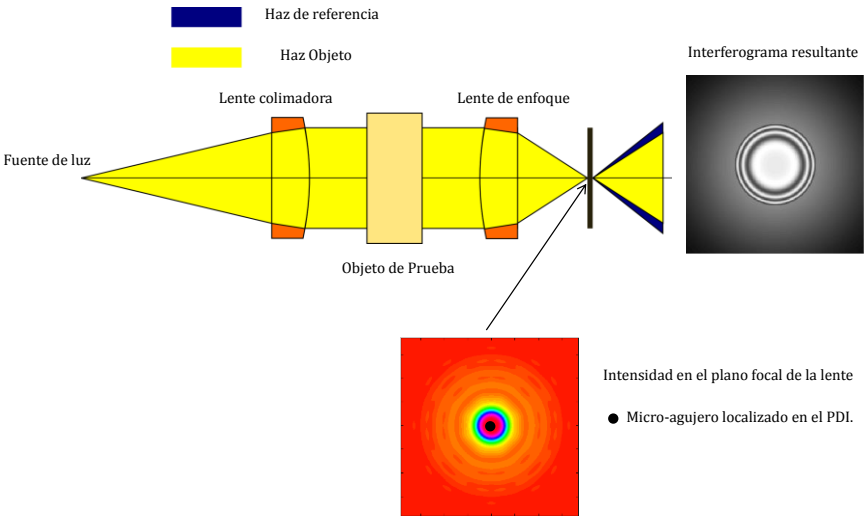


Figura 1.30. Arreglo óptico para realizar un interferómetro de difracción por punto.

En este trabajo se coloca la placa PDI en el plano focal de la lente de enfoque, esto significa que las franjas producidas solo serán debido al objeto de prueba, esto se cumple claro esta si los elementos ópticos no presentan un grado considerable de aberraciones. Algunos ejemplos prácticos de interferogramas, todos en modo infinito, se presentan en las figuras 1.31, 1.32, 1.33. En la figura 1.31 se presenta el caso de pocas aberraciones, en la figura 1.32 es el caso anterior de la figura 1.31 pero en esta ocasión se introduce un objeto de fase y en la figura 1.33 en el caso donde se tiene aberraciones específicamente de astigmatismo.

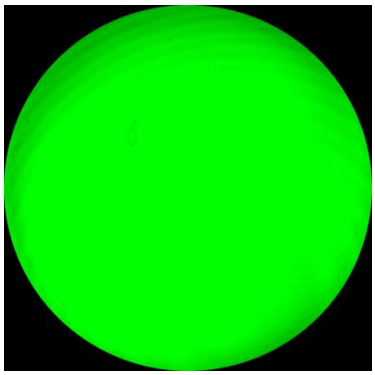


Figura 1.31. Interferograma en modo infinito realizado con un IDP, sin el objeto y sin muchas aberraciones.

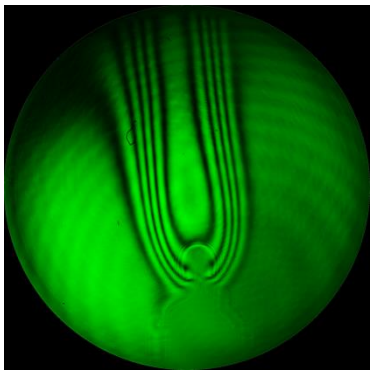


Figura 1.32. Interferograma de una flama en modo infinito realizado con un IDP y sin muchas aberraciones.

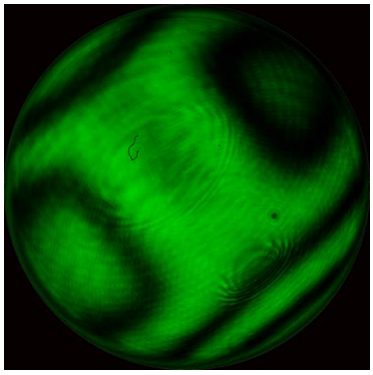


Figura 1.33. Interferograma en modo infinito realizado con un IDP y con astigmatismo.

Jeffrey S. Goldmeer [14] presento un trabajo sobre la medición de temperaturas de una flama usando también un interferómetro de difracción por punto, sin embargo las mediciones estuvieron limitadas por el sistema comercial usado ya que la flama que se midió en ese trabajo, su diámetro fue pequeño(*0.5 cm*) en comparación de una flama de uso práctico.

1.5 Estructura de una flama de una vela

La máxima temperatura de una vela depende mucho de su proceso de fabricación o básicamente del tipo de cera que se utiliza como combustible. Actualmente la parafina, que es un tipo de hidrocarburo es el elemento más utilizado para su fabricación. Otro elemento importante es la mecha ya que es el elemento que sirve para inyectar combustible a el proceso de combustión.

En general el recorrido de las moléculas de la cera esta dado de la siguiente forma [15]: El calor de la flama de la vela primero derrite la cera, y esta se eleva a través de la mecha mediante la acción de capilaridad. Más arriba de la mecha, en donde el calor está más elevado, vaporiza a la cera que se mueve desde la mecha hasta dentro del espacio que lo rodea. El calor de la flama y moléculas reactivas(radicales libres) dentro la flama descomponen a las moléculas de la cera, particularmente despojando átomos de hidrogeno de la columna vertebral de cadenas de carbón. Algunas de las cadenas de carbón se fragmentan en gas de carbón, y también en pequeñas(típicamente teniendo 2 átomos de carbón) moléculas y fragmentos de moléculas. Los átomos de hidrogeno despojados de las moléculas de agua eventualmente se combinan con átomos de oxigeno provenientes del aire y se forma moléculas de agua. Los átomos de carbón eventualmente se combinan con el oxigeno para formar monóxido de carbón o bióxido de carbón, pero primero muchos de ellos se combinan para formar largos(en lo que se refiere a moléculas) grupos de material sólido rico en carbón, denominado hollín. Parte del hollín se quema dentro de la flama para hacer bióxido de carbono y otra parte de ello, se escapa de la flama.

Varias zonas de la flama pueden ser vistas. En la parte inferior esta una región de color azul, esta luz es debido a las emisiones moleculares de gas de carbón, C_2. Más arriba de la flama esta una región que está prácticamente opaco y otra que emite luz amarilla. La zona en donde se produce luz amarilla se le conoce como la región incandescente y es donde las partículas de hollín calientes brillan dando luz como la de un filamento de un foco. En la parte interior de la flama, cerca de la mecha, no hay mucho oxigeno y la mayoría de las reacciones que ocurren son fragmentaciones inducidas por calor y reordenamientos. En las regiones exteriores, donde el oxigeno puede entrar proveniente del aire, los fragmentos se combinan con oxigeno, para que después se forme agua y bióxido de carbono.

Muchos factores afectan la combustión de una flama y muchos de ellos son difíciles de variar, tal como la presión del aire, concentración de oxígeno, conductividad térmica del aire y la flotabilidad de los productos de reacción calientes. Uno de ellos es fácil de controlar, el viento. Una brisa fuerte, o la misma respiración de una persona puede soplar los gases calientes de la flama fuera de la fuente principal (la vela y la mecha), de tal forma que se interrumpe el proceso y se extingue la flama. En la figura 1.34 se muestran las diferentes zonas de una flama en condiciones estables.

Zona 1 (zona no luminosa): La cera sobre la mecha se evapora. No hay suficiente oxigeno para producir combustión. La temperatura es alrededor de 600 °C cerca de la mecha.

Zona 2 (Zona azul): Hay un excedente de oxígeno y en esa parte de la flama se da una combustión limpia y de color azul.

Zona 3 (zona obscura): Pirolisis o rompimiento del combustible inicia debido al poco oxígeno creando partículas de carbón. La temperatura puede estar alrededor de los 1000 °C.

Zona 4 (Zona luminosa): Es la zona donde el predomina la luz amarilla brillante. Todavía hay falta de oxigeno para una combustión completa así que la pirolisis continua y existe una mayor producción de partículas de carbono. La temperatura puede estar alrededor de los 1200 °C.

Zona 5 (velo): Hay un excedente de oxígeno en esta zona que no es luminosa de tal forma que las partículas de carbono se consumen rápido y mas completamente entra las fronteras de la zona 4 y zona 5. La temperatura puede estar alrededor de los 1400 °C.

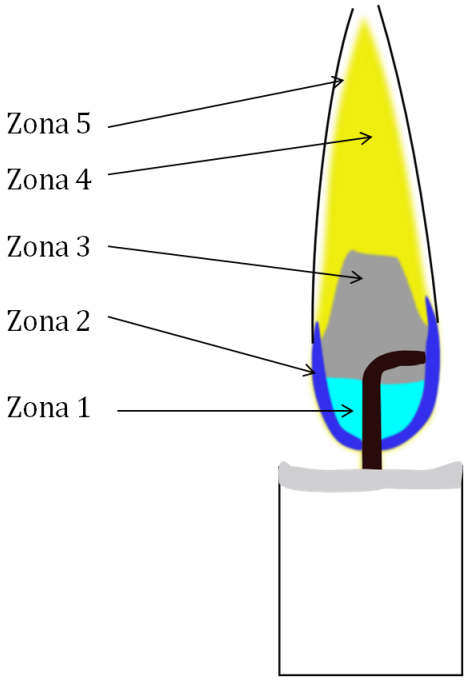


Figura 1.34. Diferentes zonas de combustión en la flama de una vela.

Referencias

1. C. M. Vest, Holographic Interferometry, John Wiley & Sons, New York (1979).
2. T. Kreis, Handbook of Holographic Interferometry Optical an Digital Methods, Wiley-VCH, Weinheim (2005).
3. A. D. Poularikas, Transforms and Applications Handbook, CRC Press, Boca Raton, Florida (2010).
4. S. R. Deans, The Radon Transform and Some of Its Applications, Dover Publications, New York (1993).
5. P. Thevenaz, T. Blu and M. Unser, Image Interpolation and Resampling, Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis, Academic Press, San Diego, CA (2000).
6. R. C. Aster, B. Borchers, and C. H. Thurber, Parameter Estimation and Inverse Problems, Elsevier Academic Press, San Diego, CA (2005).
7. CL. Byrne, Applied and Computational Linear Algebra: A First Course, , http://faculty.uml.edu/cbyrne/ByrneACLAbook.pdf , (2009).
8. C. Hansen and M. Saxild-Hansen, "AIR tools—a MATLAB package of algebraic iterative reconstruction methods," J. Comput. Appl. Math. 236(8), 2167–2178 (2012).
9. W. Y. Yang, W. Cao, T. Chung , J. Morris, Applied Numerical Methods Using MATLAB, Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey, 2005.
10. C. Popa, R. Zdunek, "Kaczmarz extended algorithm for tomographic image reconstruction from limited-data," Mathematics and Computers in Simulation 65(6), 579-598 (2004).
11. J. Doi, S. Sato, "Three-dimensional modeling of the instantaneous temperature distribution in a turbulent flame using a multidirectional interferometer ", O.E. 46(1), 015601-1, 015601-7 (2007).
12. W. Lv, H.-C. Zhou, and J.-R. Zhu, "Implementation of tridirectional large lateral shearing displacement interferometry in temperature measurement of a diffused ethylene flame," Appl. Opt. 50(21), 3924–3936 (2011).
13. J. M. Geary, Introduction to Wavefront Sensors, SPIE Press, Tutorial Text in Optical Engineering, Bellingham, Washington (1995).
14. J. S. Goldmeer, D. L. Urban, and Z.-G. Yuan, "Measurement of gas phase temperatures in flames with a point-diffraction interferometer," Appl. Opt. 40(27), 4816–4823 (2001).
15. K. Roth, "Alle Jahre wieder: die Chemie der Weihnachtskerze," Chemie in unserer Zeit 37(6), 424–429 (2003).

Capitulo 2. **Arreglo óptico y procesamiento de datos experimentales**

En este capítulo se presenta el arreglo óptico usado para hacer tomografía y los interferogramas resultantes del experimento. Se observara que el arreglo óptico es muy simple basado en simples unidades del IDP. También se presentará el proceso para crear un IDP. Se describirá como procesar los interferogramas para obtener su fase mediante el método de Kreis. También se observará que los interferogramas realmente indican la asimetría de la flama justificando el uso de un algoritmo diferente al del modelo de la transformada de Abel.

2.1 Arreglo óptico para realizar tomografía multidireccional

El arreglo experimental usado en este trabajo se presenta en la figura 2.1, el cual está formado por 4 interferómetros IDP colocados en 0°, 26.5°, 90° y 116.5°. La disposición para usar estos ángulos se debió fundamentalmente a las limitaciones de la mesa holográfica utilizada. Debido a que los IDP son interferómetros de una sola trayectoria se puede observar que no existe una obstrucción entre sus elementos ópticos, solo existe una intercepción entre los haces en el punto en donde la vela es colocado.

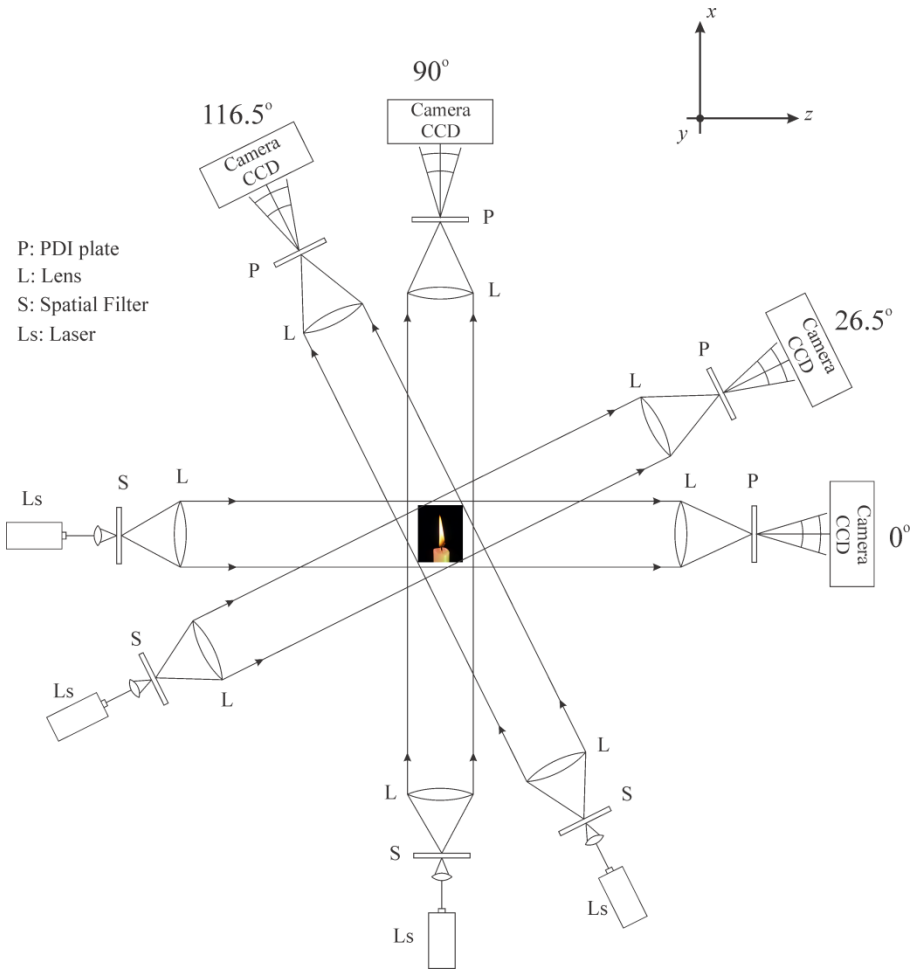


Figura 2.1. Arreglo propuesto para hacer tomografía multidireccional.

En cada interferómetro se utiliza un Laser Ls de 532.8 nm, 30 mW, tipo diodo, pues ya que estos resultan ser económicos y tener la suficiente coherencia para poder producir franjas de interferencia. Las lentes L son acromáticas con una longitud focal de *30 cm* cada una y con diámetro de *50.8 mm*. Como elementos para cada filtro espacial se utilizo objetivos de *10X* con una apertura numérica de *0.45* y microagujeros de *5 μm*. Se escogió ese tamaño del micro-agujero con el fin de que el lóbulo central del patrón de difracción abarcara la pupila de la lente

colimadora. Las placas IDP tienen micro-agujeros en un rango de *4-6 μm* puestos en una película de *100 nm*. En la sección 2.4 se presenta cual fue el proceso de fabricación de los micro agujeros sobre películas de titanio. Algunos de los resultados para un cierto tiempo t son mostrados en la figura 2.2. La vela utilizada en el experimento fue de *5 mm* produciendo una flama de alrededor de *2 cm* de diámetro promedio.

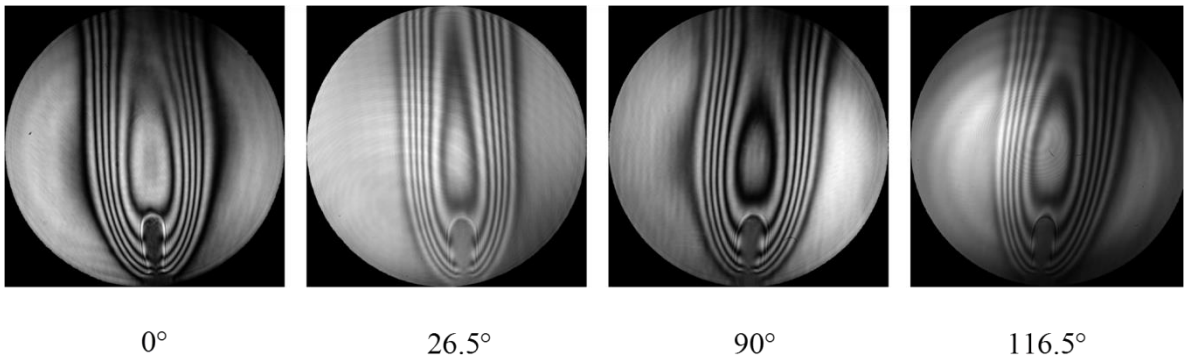


Figura 2.2. Interferogramas resultantes del arreglo experimental presentado en figura 2.1.

Se puede observar de los inteferogramas que la forma de la flama es diferente en cada proyección, por lo tanto no es válido considerar una simetría radial de la flama como comúnmente se hace.

Para capturar los interferogramas se utilizó como modelo la cámara sony alpha 290 con un tamaño en pixeles del CCD de 4592X3056. Este modelo de cámara tiene un sensor infrarrojo para poder controlar algunas de sus funciones de disparo mediante un control remoto. Debido a que la flama es un evento dinámico, las capturas para cada ángulo deben ser al mismo tiempo, por lo tanto, se fabricó un circuito que pudiera controlar las cámaras con la ayuda de su sensor infrarrojo de tal forma que se puedan disparar aproximadamente al mismo tiempo.

En la siguiente sección se describe cómo obtener la fase de los interferogramas para nuestro caso especial de franjas de interferencia producidas por el de una flama.

2.2 Obtención de la fase en los interferogramas.

Cuando un interferograma tiene muchas franjas debido a la introducción de un tilt o cuando se tiene 4 o más interferogramas debido al uso de una técnica de corrimiento de fase, el problema de recuperar la fase se torna más fácil usando transformada de Fourier o una fórmula de inversión ya conocida, respectivamente para estos dos casos [1]. Sin embargo, para la situación en donde no sea posible realizar lo anterior, se puede dar el caso de solo poder obtener un solo interferograma y con pocas franjas.

Una forma de recuperar la fase bajo esta situación es por medio de un ajuste polinómico [2],[3] tal como el de los polinomios de Zernike, sin embargo, en el caso de un interferograma de una flama, la densidad de franjas es baja en la parte central, por lo tanto el ajuste no es correcto llevando a posibles errores significativos en el cálculo de temperaturas. Sin embargo, aun bajo estas situaciones, es posible calcular la fase con buenos resultados utilizando el método de Kreis [4], en donde se calcula las transformada de Fourier del interferograma pero sin la necesidad de la introducción de un tilt en el sistema óptico.

2.2.1 Método de Kreis

Los cambios de fase producidos por el objeto de fase son unidimensionales, tal como se puede entender por medio de las figura 1 y ecuación (1.15). Entonces los cambios de intensidad lo podemos describir en términos de una sola variable tal como se describe en la siguiente ecuación:

$$I(x) = a(x) + b(x)\cos\left[\delta(x)\right] \tag{2.1}$$

pero tomando en cuenta la identidad trigonométrica $\cos x = \frac{e^{-jx}+e^{jx}}{2}$ tenemos que:

$$I(x) = a(x) + b(x)\frac{e^{j[\delta(x)]}}{2} + b(x)\frac{e^{j[-\delta(x)]}}{2} \tag{2.2}$$

si la densidad de franjas es baja, la transformada de Fourier de los tres elementos presentes en ecuación (2.2) estarán muy sobreimpuestos alrededor del origen, tal como se ilustra en la figura 2.3.

Si se realiza un filtrado de tal forma que solo se deja pasar parte del espectro desde alrededor del origen tal como se ilustra en la figura 2.4, entonces, después de obtener la transformada de Fourier inversa , recuperar la fase y finalmente desenvolverla, obtendremos un resultado tal como se ilustra en la figura 2.5.

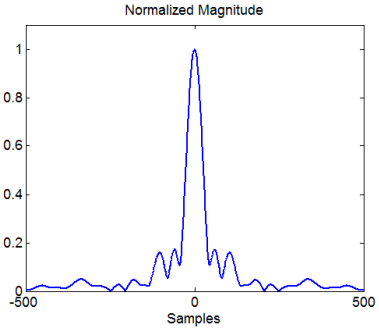


Figura 2.3. Transformada de Fourier de una sección del interferograma de una flama.

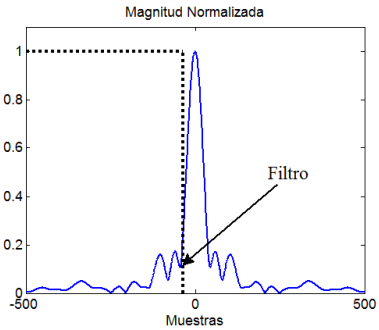


Figura 2.4. Filtrado de la transformada de Fourier de una sección del interferograma de una flama.

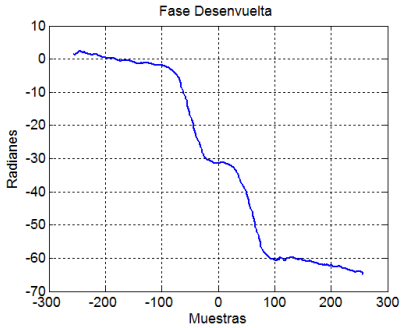


Figura 2.5. Fase con reflexión recuperada de una sección del interferograma de una flama.

Se observa que parte de la fase sufre un reflexión y esto se debe a que corresponde la fase del término conjugado presente en la ecuación (2.2). Entonces es necesario encontrar un punto de inversión de tal forma que la fase desenvuelta ya no presente esa reflexión. El primer paso para lograr esto es seleccionar un punto dentro de la fase envuelta en donde uno cree que se inicia tal reflexión. El siguiente paso es desenvolver la fase, pero es posible que el punto de reflexión seleccionado esté incorrecto produciendo una fase tal como se ilustra en la figura 2.6.

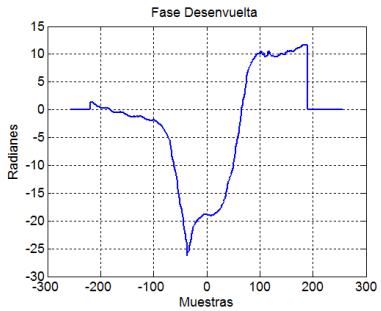


Figura 2.6. Fase recuperada con punto de reflexión incorrecto de una sección del interferograma de una flama.

En el caso de una flama, debido a que su fase es suave, la fase recuperada no debe presentar cambios abruptos tales como el de la figura 2.6, entonces el criterio es que, el punto de inversión que produzca la fase más suave será el elegido para representar la fase de la flama. Un punto correcto de reflexión produce una fase tal como se ilustra en la figura 2.7.

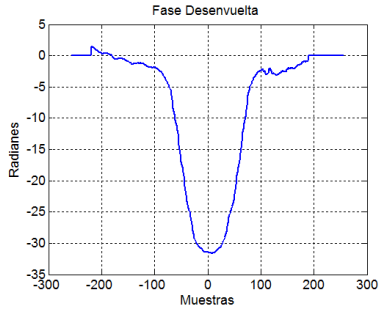
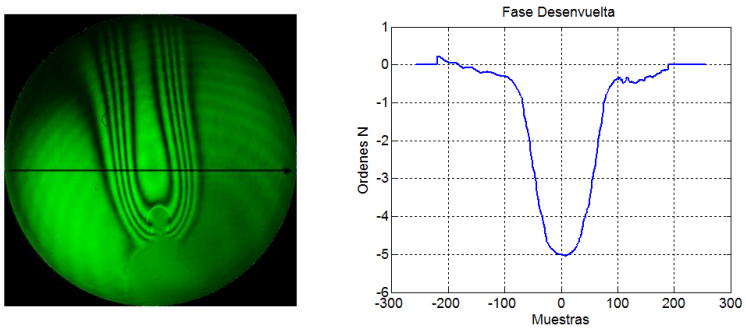


Figura 2.7. Fase recuperada con punto de reflexión correcto de una sección del interferograma de una flama.

El resultado de la figura 2.7 corresponde a la fase presente a una cierta altura de la flama tal como se ilustra en la figura 2.8 pero esta vez con los órdenes N en lugar de la fase.



a b

Figura 2.8. a. Interferograma de una flama con una sección transversal indicado en la línea negra. b. Fase de la sección transversal indicado en la línea negra.

Es usual encontrar cámaras que tengan sensores de imagen con una alta densidad de pixeles, en nuestro caso usamos un sensor CCD de 4592X3056 pixeles con un pixel pitch de $5\ \mu m$, entonces se captura un interferograma con muy buen valor de paso de muestreo. Sin embargo, en el momento de calcular su transformada de Fourier discreta, el resultado dará un espectro con un muestreo bajo debido a que el valor del paso de muestreo en el dominio de la Transformada de Fourier discreta es inversamente proporcional al del dominio espacial. Esto tiene como consecuencia de que uno no pueda elegir adecuadamente la frecuencia de corte de nuestro filtro. Entonces para poder solucionar este problema, hacemos un sub-muestreo del interferograma tomada por el sensor de imagen y después se aplica un filtro pasa bajos para atenuar problemas de Aliasing. La imágenes para nuestros cálculos pueden quedar hasta de 256X256 pixeles aun manteniendo buen detalle de las franjas de interferencia debido a que son pocas y de baja frecuencia.

Si la frecuencia de corte es elegida desde la muestra mínima negativa hasta una muestra con índice negativo que este alejado del origen, cuando se recupere la fase , se observara un valor de órdenes que no está de acuerdo con lo aproximadamente visto en el interferograma, esto es debido a la perdida de información ya que prácticamente se suprimen los dos elementos complejos que están en ecuación 1.22 . En forma similar, si la frecuencia de corte es elegida desde la muestra mínima negativa hasta una muestra con índice positivo que este alejado del origen, cuando se recupere la fase , se observara un valor de órdenes que no está de acuerdo con lo aproximadamente visto en el interferograma, esto debido probablemente a la redundancia de datos ya que se recuperan información mezclada de los dos términos exponenciales presentes en ecuación 1.22.

Una cosa importante es el signo que debe tener la fase recuperada en el caso de la flama, en el ejemplo anterior la fase es negativa, pero si yo utilizo un filtro que solo abarca muestras con índice positivo, obtengo una fase positiva. Sin embargo, por experiencias anteriores y resultados en otros trabajos, la fase tiene que ser negativa para que uno obtenga valores de temperatura que sean físicamente factible.

2.3 Preprocesamiento de los datos experimentales

Cuando uno obtiene la fase de los interferogramas, esta información tiene que ser expresada en términos de diferencia de caminos ópticos para así poder incluirlo en **P** dentro del algoritmo de Kaczmarz. Entonces cuando obtengamos la fase φ, realizamos el siguiente ajuste de valores.

$$\lambda N = \frac{\lambda \Delta S}{2\pi} \tag{2.3}$$

Otro punto importante a considerar es que la función que se está tratando de recuperar $f^*(x,y)$, tiene un espacio entre sus valores o elementos c_k igual a una unidad, es decir un metro. Sin embargo los valores de la proyecciones no corresponden a una función de este tipo, por ejemplo, en el caso de una lente con una pupila de 4.6 cm, la función exacta $f(x,y)$ para este caso tendría un diámetro promedio menor que el de la pupila, pero para una función $f^*(x,y)$ de 257X257 elementos c_k, estaríamos hablando de 257 metros en el eje x y y. Por lo tanto es necesario normalizar a λN con respecto a la resolución con la que fueron tomados los interferogramas para que sus valores correspondan a lo de $f^*(x,y)$. Como ejemplo se tiene una función rectángulo bidimensional que tiene como dimensiones en cada uno de sus lados de 0.01 m, si tenemos la proyección para $\theta=0$, entonces esa proyección sería también una función rectángulo con una altura de 0.01 unidades en t. Si decidimos que las funciones base en $f^*(x,y)$ sean también funciones rectángulo bidimensionales y además que esté formada por 50X50 coeficientes c_k (dicho de otra forma, 50X50 pixeles), entonces la proyección para $\theta=0$ de $f^*(x,y)$ tendría una altura con un valor de 50 unidades en t. La resolución o espacio entre coeficientes c_k tomando en cuenta el número de pixeles y los valores de sus lados de $f(x,y)$ es de 0.01/50, así que los valores correctos de las proyecciones para $f^*(x,y)$ son 0.01/(0.01/50)=50. El ejemplo anterior muestra que es necesario dividir λN entre la resolución de las imágenes en donde están contenidas las proyecciones.

La resolución depende del tamaño del interferograma contenido en el sensor de imagen ya sea CCD o CMOS. Debido a que normalmente el tamaño del sensor es menor que el de la pupila del sistema, entonces el interferograma tendrá un tamaño menor que el de la pupila, descrito de esta forma $I(\varepsilon x)$, en donde $\varepsilon>0$. Si el sensor de imagen tiene un pixel pitch de Δx, entonces el muestreo sobre I quedaría como $I[\varepsilon(n\Delta x)]$ en donde n es un número entero. Pero observamos de lo anterior que el muestreo efectivo sobre I no escalada es $\varepsilon\Delta x$, y por lo tanto tenemos que la resolución es $\varepsilon\Delta x$. Con base en eso tenemos que los valores de **P** en ecuación (1.40) corresponden a:

$$\lambda N \,/\, \varepsilon\Delta x \tag{2.4}$$

El valor de ε es fácil de calcular, solo se realiza la división entre el diámetro de la pupila y el diámetro del interferograma contenido en el sensor de imagen.

2.4 Fabricación de Micro-agujeros

Parte esencial del interferómetro de difracción por punto es el micro-agujero contenido en la placa PDI. El proceso de fabricación fue llevado a cabo mediante un haz enfocado incidente sobre una película de titanio, el cual está colocado en el plano focal de la lente. El haz incidente tiene la suficiente energía para producir un micro-agujero mediante el proceso de sublimación [5], en donde el tamaño puede variar dependiendo fundamentalmente de la potencia del laser, la forma del spot debido a las aberraciones de los elementos ópticos y la transmitancia de la placa.

2.4.1 Introducción

Micro-fabricación es el proceso de fabricar estructuras en escala micrométrica y menores escalas. Ablación usando laser pulsados de corta duración desde los nanosegundos a los femtosegundos es uno de los más comunes técnicas de micro-fabricación [5],[6], usado para la fabricación de micro agujeros de alta precisión y para la formación de patrones en estructuras metálicas. Ablación con laser es el proceso de remover material de la superficie de un sólido por medio de la irradiación sobre el objeto con un haz laser. En el caso de flujos bajos de laser, el material es calentado debido a la energía absorbida y después se evapora o sublima. Usualmente, ablación con laser se refiere a remover material con un laser pulsado. En un flujo elevado del laser, el material es convertido típicamente en plasma. Con el uso de pulsos con duración de femtosegundos, es posible producir bordes bien definidos sobre la superficie con muy poco o sin ningún daño térmico en los alrededores del área iluminada. Esto en contraste con el caso de pulsos de nanosegundos. Sin embargo, es posible producir ablación con un laser de onda continua si la intensidad del laser es lo suficientemente alto. La cantidad de material removido depende de la penetración del haz sobre la muestra y depende de sus propiedades ópticas y la longitud de onda del laser. Ramirez-San-Juan et al [7], ilustraron que es posible hacer micro-agujeros dentro del rango de *600 nm* a *1.2 μm* de diametro por medio de sublimación en una película de titanio de 65 nm, usando un laser continuo infrarrojo de baja potencia.

2.4.2 Sistema óptico

El sistema óptico para la fabricación de micro-agujeros es presentado en figura 2.9. Usamos 2 lentes (Thorlabs, LBF254-200-A) de *20 cm* de longitud focal y *2.54 cm* de diámetro para colimar y enfocar el haz que viene de un objetivo de microscopio de *20X* de apertura numérica de *0.4* y un laser de *532.8 nm* de *126 mW*. Sin embargo, la pérdida de potencia a través de cada uno de los elementos ópticos da una potencia final de *26 mW*. Al mismo tiempo, el objetivo de microscopio de *50X* de *0.85* de apertura numérica, permite observar el daño que provoca el haz enfocado sobre la placa PDI con la ayuda de una iluminación con luz blanca cual es presentado en figura 2.10. No obstante, si movemos la lente L2 en la dirección axial, el tamaño y la forma del spot sobre la placa es modificado debido a la presencia de aberraciones dentro de los componentes ópticos, esto es presentado en figura 2.11.

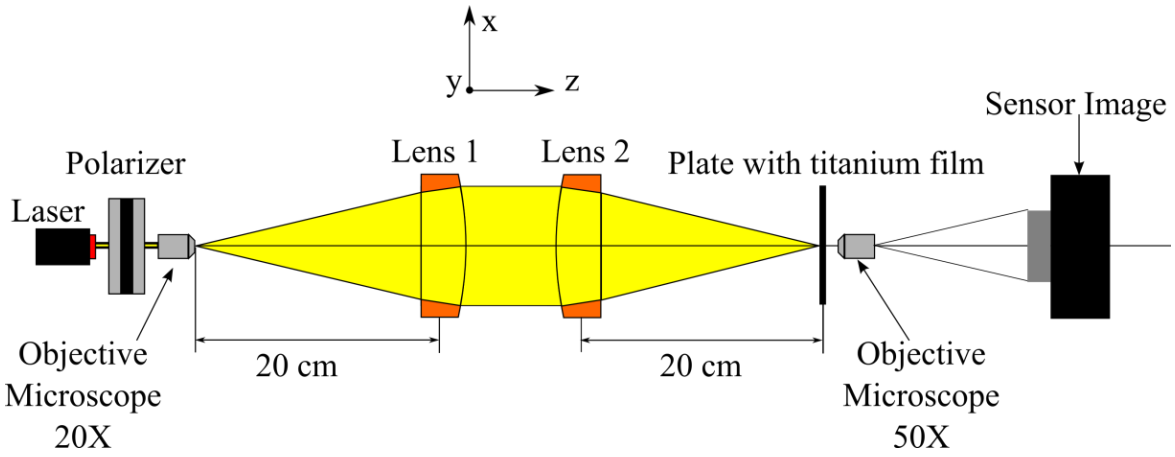


Fig. 2.9. Sistema Óptico para la fabricación de pinholes sobre placas con película de titanio.

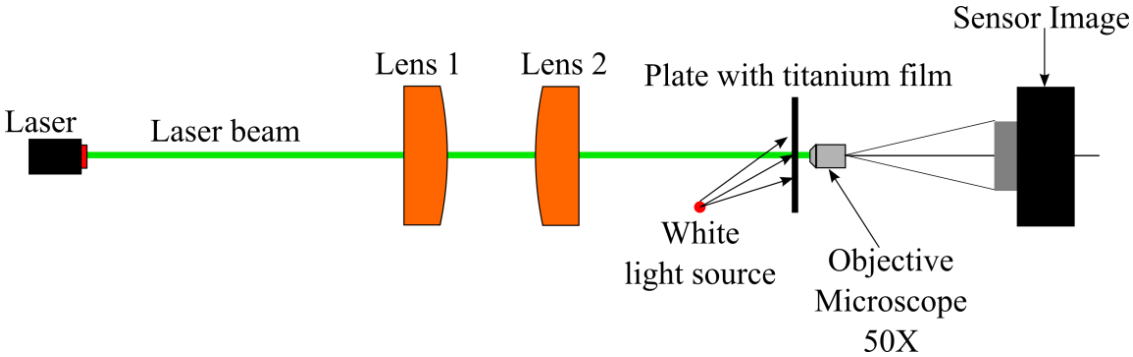


Fig. 2.10. Forma práctica de visualizar el daño sobre la placa con película de titanio utilizando luz laser o luz blanca.

Algunos de estos spots serán útiles para hacer micro-agujeros tal como se presentara en la siguiente sección. El tamaño del micro-agujero puede ser determinado con la ayuda de la montura X-Y-Z utilizada para hacer movimientos micrométricos de la placa de titanio. La máxima resolución del micrómetro es alrededor de 0.5 μm, entonces creando un pinhole de cualquier tamaño en alguna posición, después se crea otro micro-agujero pero después de haber realizado un desplazamiento de 10 μm ya sea en la dirección X o Y. Después se toma una foto con la ayuda del sensor de imagen, de tal forma que la distancia en pixeles entre los centros de los agujeros en la imagen pues corresponde a 10 μm de distancia y de esa forma se sabe la relación entre pixeles y el pixel pitch del sensor de imagen. La incertidumbre del tamaño de la estimación es de 0.7 μm.

2.4.3 Resultados

Para el spot observado en la figura 2.11c, con una potencia incidente de 26 mW sobre la placa de titanio, el daño se produce como la forma de una línea irregular de 8 μm $\pm$0.2 μm de espesor tal como es visto en figura 2.12a. Si usamos este spot y modulamos la intensidad por medio de

una placa polarizadora, es posible crear micro-agujero de diferentes rangos, desde 1 μm ±0.2μm a 8μm ±0.2μm de diámetro. Sin embargo, la forma no puede ser satisfactoria, así que se busca otro spot al como el de la figura 2.11d. Los resultados aparecen en figuras 2.12b y 2.12c.

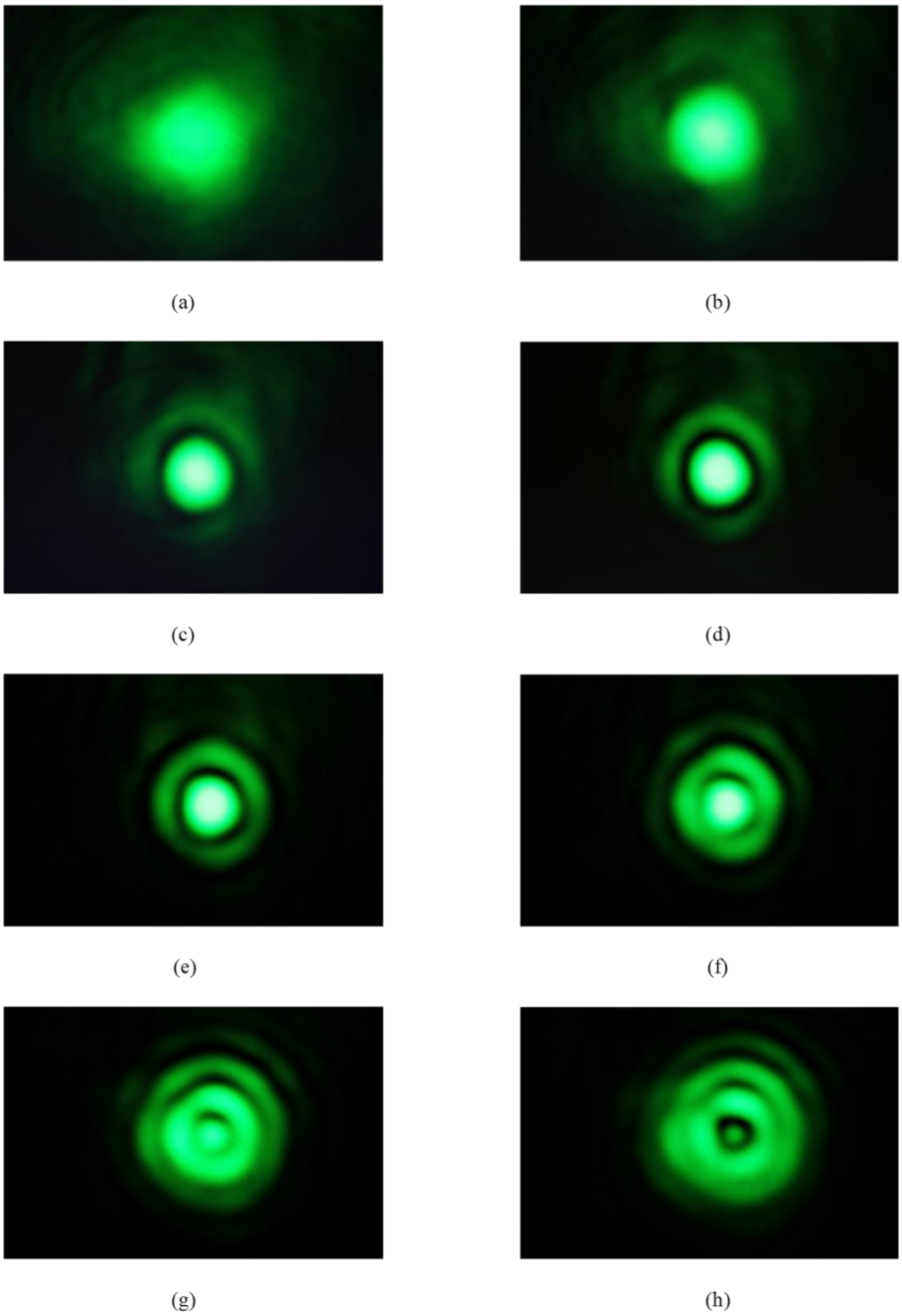


Fig. 2.11. Diferentes formas de los spots de la luz proveniente de lente 2 sobre la placa con película de titanio cuando lente 2 es desplazado en la dirección Z tal como se indica en figura 2.9.

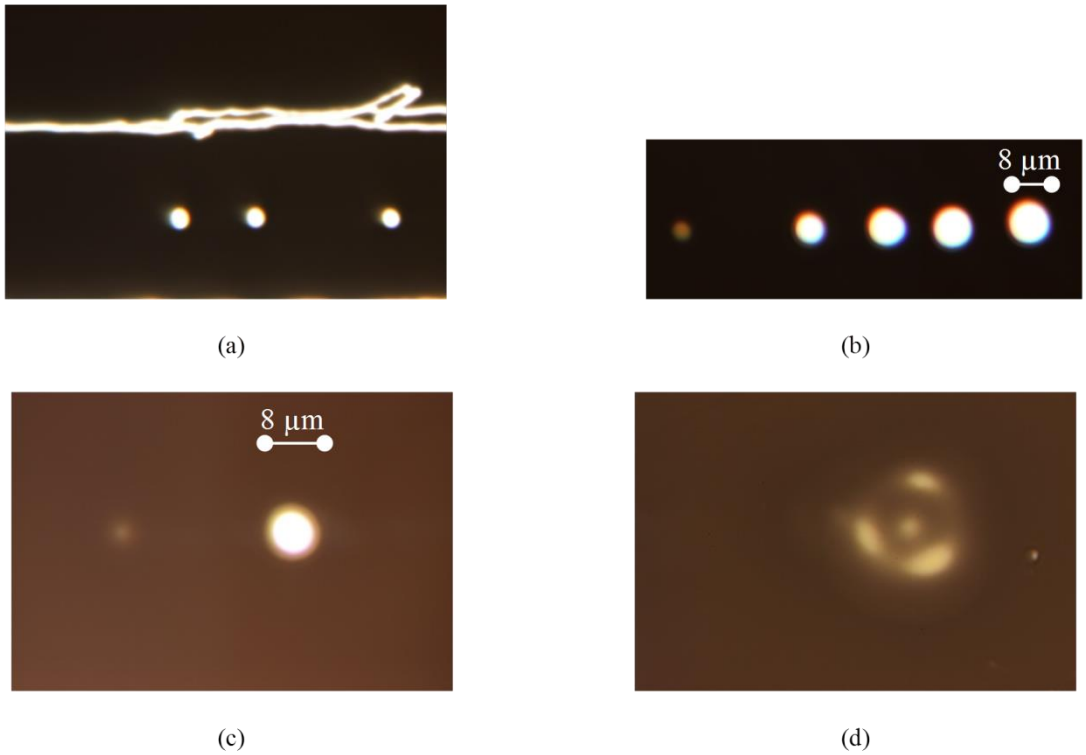


Fig. 5.Diferentes pinholes producidos por algunos de los spots presentados en figura 2.11 a) Daño producido por el spot en figura 2.11c. b) Daño producido por el spot en figura 2.11d. c) Comparacion de los tamanos de los pinholes fabricados con el spot de la figura 2.11.d d) Daño producido por el spot en figura 2.11h.

En este caso es también posible hacer micro-agujeros alrededor de 1 µm $\pm$0.2µm a 8µm $\pm$0.2µm de diámetro pero con la diferencia de que su forma es mejor. Si usamos los siguientes spots, los tamaños de los pinholes están alrededor de 3µm $\pm$0.2µm a 4µm $\pm$0.2µm de diámetro; hay una disminución del rango de los tamaños. No obstante , si nosotros movemos más adelante a la lente L2, es decir, introducimos desenfoque, los anillos alrededor del spot central, tienen más energía y pueden producir daño alrededor del micro-agujero creado, resultando en que no es de utilidad ese micro-agujero tal como se ilustra en la figura 2.12.c.

Referencias

1. T. Kreis, Handbook of Holographic Interferometry Optical an Digital Methods, Wiley-VCH, Weinheim (2005).

2. C. M. Vest, Holographic Interferometry, John Wiley & Sons, New York (1979).

3. J. S. Goldmeer, D. L. Urban, and Z.-G. Yuan, "Measurement of gas phase temperatures in flames with a point-diffraction interferometer," Appl. Opt. 40(27), 4816–4823 (2001).

4. T. Kreis, "Digital holographic interference-phase measurement using the Fourier-transform method," J. Opt. Soc. Am. A 3(6), 847–855 (1986).

5. B. N. Chichkov, C. Momma, S. Nolte, F. Alvensleben, and A. Tünnermann, "Femtosecond, picosecond and nanosecond laser ablation of solids," Appl. Phys., *A Mater. Sci. Process.* **63**, 109(1996).

7. Malcolm C. Gower, "Industrial applications of laser micromachining," Optics Express 7, 56(2000).

6. J. C. Ramirez-San-Juan et al., "Micro-hole drilling in thin films with cw low power lasers," Opt. Mater. Express 1(4), 599–604 (2011).

Capitulo 3. **Resultados y discusión**

En esta sección se presenta lo resultados de la recuperación tomográfica usando los datos experimentales presentados en el capítulo 2. Se mostrara que con una condición inicial $\mathbf{f}^0$ igual a cero, y sin una restricción en el signo sobre $\mathbf{f}^i$ dentro del algoritmo de Kaczmarz, las temperaturas resultantes no tienen significado físico de acuerdo a las temperaturas indicadas en la sección 1.5. Si utilizamos una restricción en el signo sobre $\mathbf{f}^i$, con diferentes condiciones iniciales tal como la solución de Abel, veremos que los valores de la reconstrucción tomográfica son más reales y por lo tanto ser considerados como una buena estimación de las temperaturas de la flama de la vela. Finalmente observaremos los efectos del ruido en la reconstrucción y porque es importante un proceso de filtrado en la iteración final.

3.1 Características del sistema lineal de ecuaciones W

La matriz **W** se forma a partir de ecuación (1.21), debido a que usamos a la función bi-cubico como nuestra función base. Se usa la transformada de Fourier discreta para poder calcular la convolucion en ecuación (1.21). Una vez que se calcula la convolucion, el resultado se multiplica con el paso de muestro con el que es muestreado $f(t/|\sin\theta|)$ y $f(t/|\cos\theta|)$ de tal forma que se obtengan valores similares a los de la convolucion pero si fuera llevado a cabo en forma analítica. En la figura 3.1 se muestra un mapa de valores de la matriz **W**.

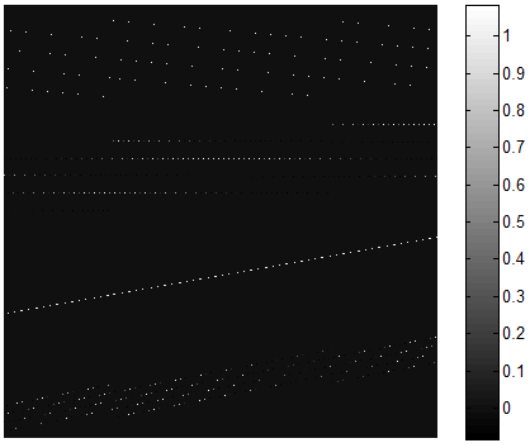


Figura 3.1. Matriz dispersa **W** en donde se observa lo dispersa que es.

Se puede observar que casi todos los valores de **W** son cero, es decir, es una matriz dispersa. La anterior propiedad de **W** se aprovecha de tal forma que se evitan hacer multiplicaciones con estos elementos de valor cero. Esto aumenta la rapidez con la que se ejecuta las iteraciones de manera muy contrastada.

3.2 Ruido y su control

Dos formas de ruido que están presentes en los interferogramas son ruido blanco Gaussiano y ruido de tipo de Poisson. Existen diferentes tipos de filtros que tratan de suprimir estas degradaciones en las imágenes [1], sin embargo, en este trabajo se opto por usar un simple filtro butterworth pasa bajos y se deja como futuro trabajo la opción de aplicar un filtro más sofisticado dentro del algoritmo de Kaczmarz. El filtrado no se realiza por cada iteración $\mathbf{f}^{i+1}$, es decir, no se actualiza a $\mathbf{f}^{i+1}$ por su versión filtrada. Esto es debido a que normalmente son muchas las iteraciones que se realizan, y puede ser que la región pasa-banda del filtro que no es uniforme pueda llegar a afectar en forma significativa la forma de $\mathbf{f}^{i+1}$. Entonces el filtro se aplica solamente hasta en la última iteración. También se utiliza un valor del parámetro τ de tal forma que el ruido no se amplifique mucho en cada iteración. El valor usado para τ es de 0.01.

3.2 Numero de muestras en las proyecciones

El número de muestras por proyección afecta la convergencia del algoritmo de Kackzmarz. Si el número de muestras es grande tal como se muestra en la figura 3.2, esto puede hacer que la convergencia sea muy lenta debido a que los Hiper-planos son casi paralelos (ver figura 1.22). Es por eso que en nuestro caso se hace un sub-muestreo de las proyecciones en un factor de 4 tal como se muestra en la figura 3.3. Esto acelera la convergencia y mejora el resultado tal como se verá en las siguientes secciones.

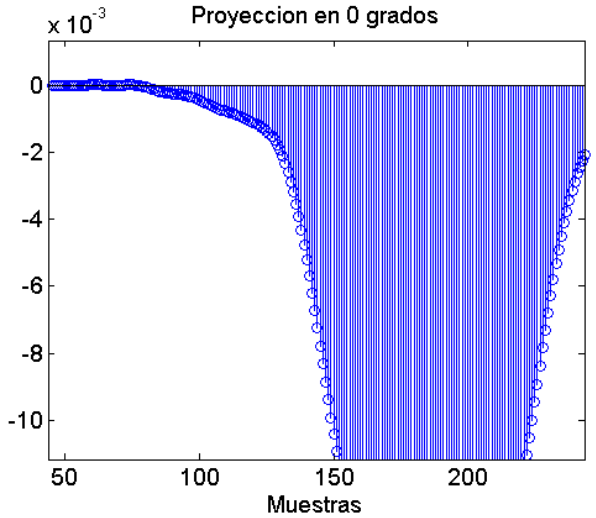


Figura 3.2. Ejemplo de una proyección con un número de muestras denso. Esto puede hacer que la convergencia sea muy lenta debido a que los Hiper-planos son casi paralelos

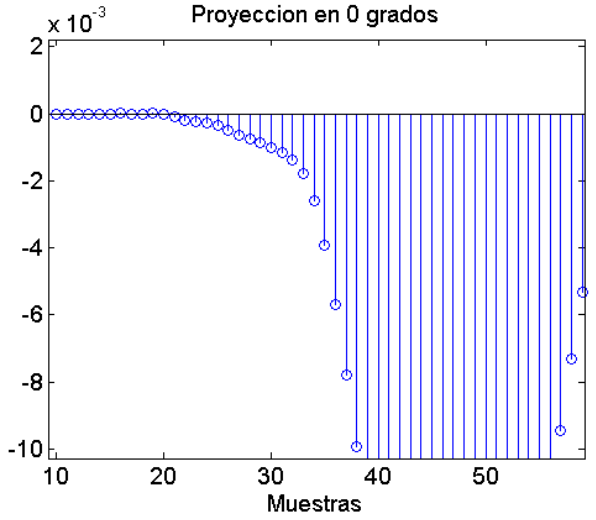


Figura 3.3. Ejemplo de una proyección con un número de muestras adecuado. Esto puede hacer que la convergencia sea muy rápida.

3.2 Recuperación tomográfica de la distribución de temperaturas de una flama con una condición inicial $\mathbf{f}^0$ igual a cero, y sin una restricción en el signo sobre $\mathbf{f}^i$

Los resultados usando los interferogramas en figura 2.2, a una altura de 21 mm dentro del la pupila de la lente, con $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, y sin una restricción en el signo sobre $\mathbf{f}^i$, se muestran en la figura 3.3 y figura 3.4. El valor máximo de las temperaturas es de 374 °K, es decir 101 °C, sin embargo este valor no corresponde a uno que sea realístico de acuerdo a la sección 1.5, dando a entender que este resultado no tiene sentido físico. Esto se puede entender debido a que la solución es una tal que es la más cercana a $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$ y que da mínimo valor a la norma $\|\mathbf{W}\mathbf{f}^i - \mathbf{P}\|_2$.

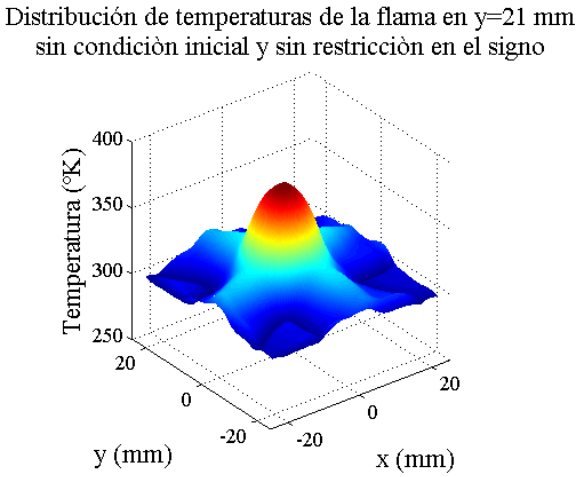


Figura 3.3. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, y sin restricción en el signo.

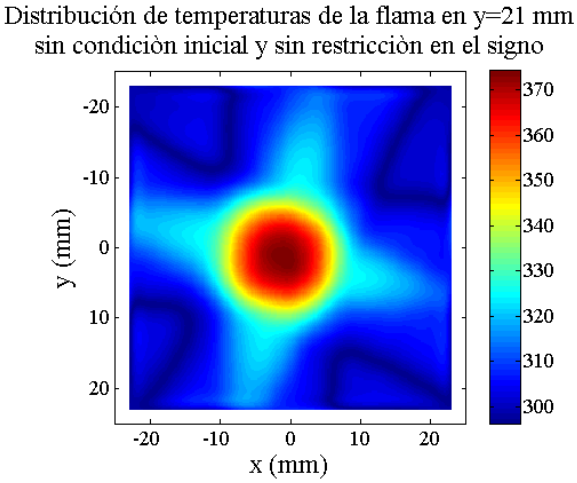


Figura 3.4. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, y sin restricción en el signo.

3.3 Recuperación tomográfica de la distribución de temperaturas de una flama con diferentes condiciones iniciales $\mathbf{f}^0$, y con restricción en el signo sobre $\mathbf{f}^i$.

En esta sección se muestra los resultados igualmente usando los interferogramas en figura 2.2, a una altura de 21 mm dentro del la pupila de la lente, pero ahora con diferentes $\mathbf{f}^0$, y con una restricción en el signo sobre $\mathbf{f}^i$ de tal forma que siempre sea negativo. La solución de Abel para cada interferograma se muestra en las figuras 3.5.a, 3.5.b, 3.5.c, 3.5.d y serán denotadas como $\mathbf{f}^{Aa}$, $\mathbf{f}^{Ab}$, $\mathbf{f}^{Ac}$, y $\mathbf{f}^{Ad}$ respectivamente. Basados en otros trabajos y de acuerdo a la sección 1.5, las soluciones que parecen ser físicamente plausibles son para los casos presentados en las figuras 3.5.a y 3.5.d, además de casi tener el mismo valor máximo que son de 1118 °K y 1111 °K respectivamente.

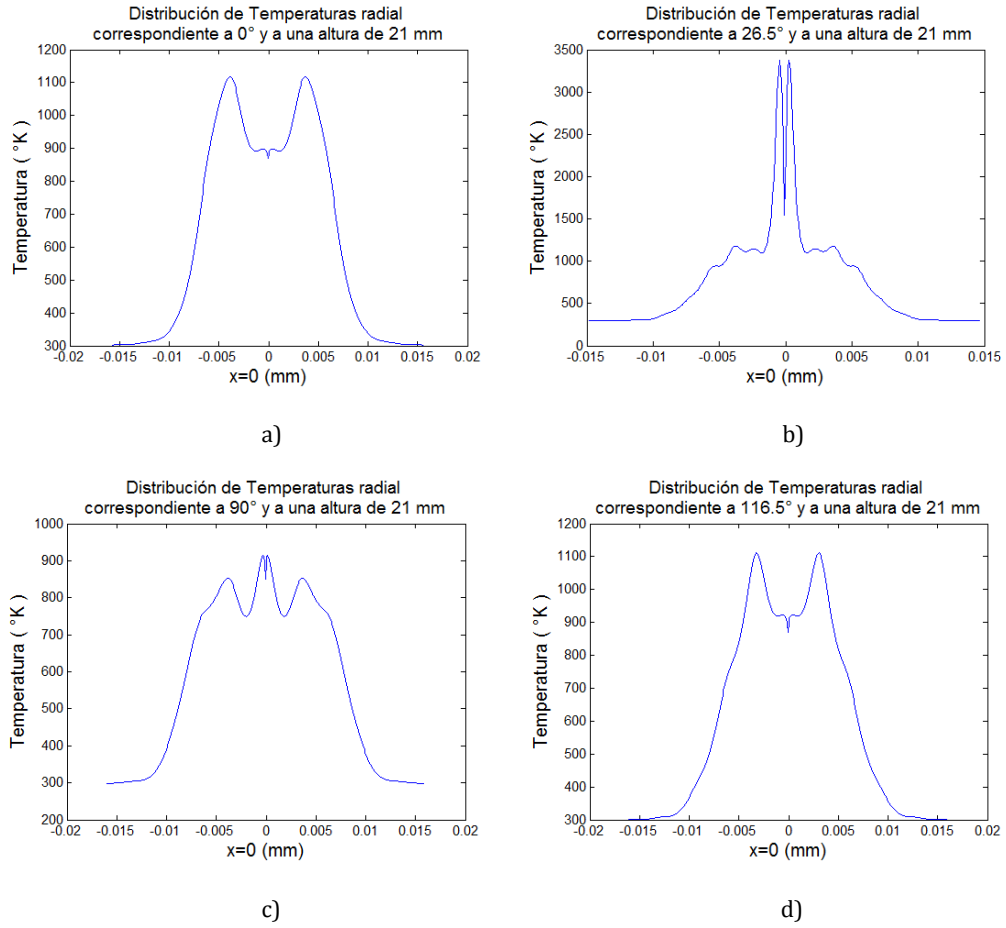


Figura 3.5. Distribuciones de temperatura por cada interferograma de acuerdo de la transformada de Abel. a) 0°, b) 26.5°, c) 90° y d) 116.5°.

En el caso de la figura 3.5.b no es posible debido a que su temperatura más alta de 3379 °K (3105 °C) es bastante superior a la máxima posible registrada en la flama de una vela. En el caso de la figura 3.5.c el resultado tampoco es posible debido a que su temperatura más alta de 914 °K (641 °C) es más bajo a la mínima posible registrada en la flama de una vela. Escogemos a los índices de refracción correspondiente a 3.5.a y a 3.5.d como $\mathbf{f}^{0}$ y presentamos los resultados en los siguientes párrafos.

3.3.1 Resultados para 2 proyecciones en 0° y 90°.

Al principio de este trabajo se pensaba desarrollar un sistema óptico con dos interferómetros, y resulta pues de valor ver las diferencias de los cálculos entre dos proyecciones y 4 proyecciones. En las figura 3.6 y 3.7 se presenta el resultado el caso de 0° y 90°, $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{0}$, y con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. En las figura 3.8 y 3.9 se presenta el resultado para el caso de 0° y 90°, $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Aa}$, y con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. En las figura 3.10 y 3.11 se presenta el resultado para el caso de 0° y 90°, $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$ y con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

Lo que uno puedo observar es que los máximos de temperatura con condición inicial diferente de **0** (1075 °K para $\mathbf{f}^{Aa}$ y 1081°K para $\mathbf{f}^{Ad}$) y sin condición inicial **0** (341 °K) son muy diferentes, al igual que en su distribución espacial. Otra cosa importante es la que los valores de las proyecciones del vector final $\mathbf{f}^{i+1}$(sin filtrado) en los tres casos convergen bien a las proyecciones experimentales. Es decir, en los tres casos la solución es correcta numéricamente hablando pero existe la ambigüedad de cuál será la condición inicial más adecuada. Las dos soluciones presentadas por figura 3.8 y por figura 3.10 pueden ser correctas, la solución descrita en la figura 3.6 no es físicamente aceptable. La única forma de saber cuál es la mejor solución es calculando la norma l2 del error $\| \mathbf{P} - \mathbf{W}\mathbf{f}^{i+1} \|_2$ entre las proyecciones de las solución y experimentales. Las resultados son para $\mathbf{f}^{0}=\mathbf{0}$,0.0679, para $\mathbf{f}^{0}=\mathbf{f}^{Aa}$, 0.0119, y para $\mathbf{f}^{0}=\mathbf{f}^{Ad}$, 0.0116. Entonces el mejor resultado es con $\mathbf{f}^{0}=\mathbf{f}^{Ad}$.

Los resultados mostrados en las figuras, son las versiones filtradas de ruido; los valores de $\| \mathbf{P} - \mathbf{W}\mathbf{f}^{i+1} \|_2$ se hicieron con respecto a la versión con ruido.

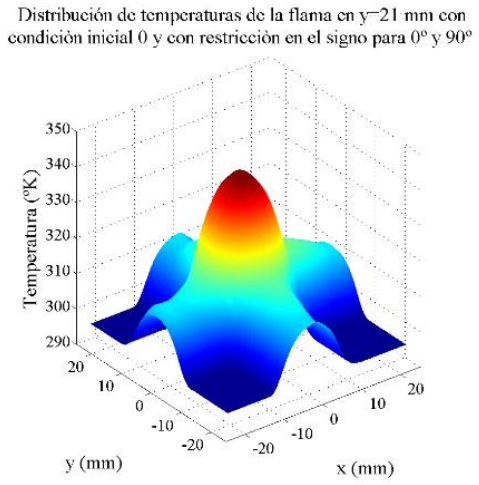


Figura 3.6. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

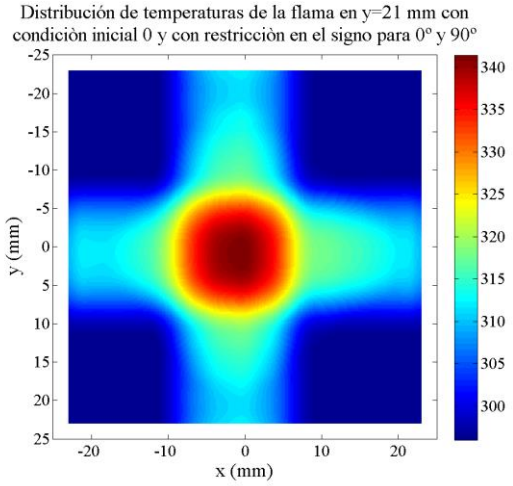


Figura 3.7. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con $\mathbf{f}^0=\mathbf{0}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

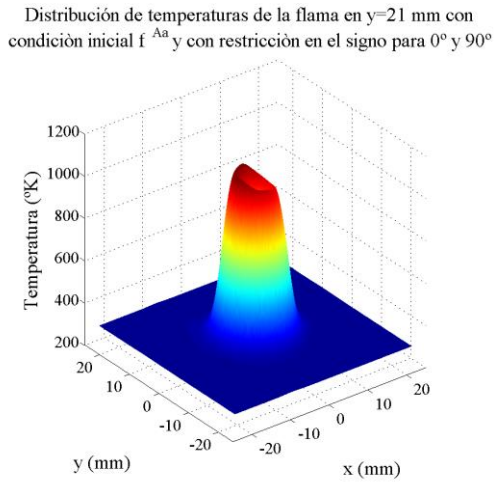


Figura 3.8. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con, $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Aa}$ con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

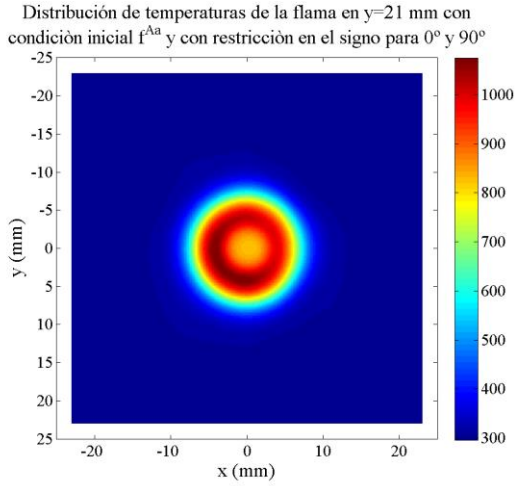


Figura 3.9. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Aa}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

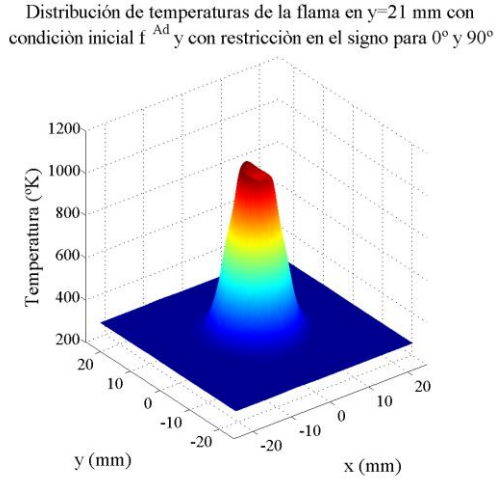


Figura 3.30. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

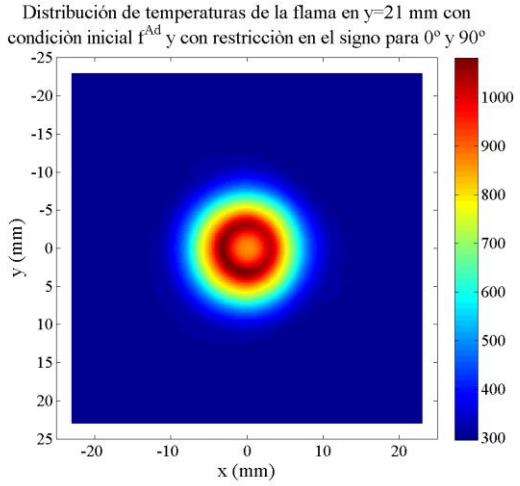


Figura 3.41. Resultado de la distribución de temperaturas usando dos proyecciones 0° y 90°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

3.3.2. Resultados para 4 proyecciones

En las figura 3.12 y 3.13 se presenta el resultado para el caso de $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. En las figura 3.14, 3.15 se presenta el resultado para el caso de $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Aa}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. En las figura 3.16, 3.17 se presenta el resultado para el caso de $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Ad}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo. Para el caso de $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$ se alcanza una temperatura máxima de 393 °K, para $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Aa}$ se alcanza una temperatura máxima de 1101 °K y para $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Ad}$ tenemos una una temperatura máxima de 1110 °K. De los resultados se puede observar la importancia de una condición inicial diferente de **0**. Solo para $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Aa}$ y $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Ad}$ los resultados tienen sentido físico. La única forma de saber cuál de las dos soluciones es la más correcta, es calculando y comparando la norma l2 del error entre la proyecciones experimentales **P** con las proyecciones que proporciona el vector final $\mathbf{f}^{i+1}$, es decir $\| \mathbf{P} - \mathbf{W}\mathbf{f}^{i+1} \|_2$. La solución que presente menor error será las más adecuada para considerarla como las temperaturas de la flama. Las resultados son para $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, 0.0717, para $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Aa}$, 0.0185, y para $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Ad}$, 0.0180. Entonces el mejor resultado es con $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^{Ad}$. También se consideró como solución inicial al resultado del algoritmo de retroproyección filtrada, pero esta dio más error (0.0398) que $\mathbf{f}^{Aa}$ y $\mathbf{f}^{Ad}$ y por eso no se mostró sus gráficas.

Si el número de muestras en las proyecciones hubiera sido por ejemplo 4 veces mayor, la convergencia es más lenta (356 millones de iteraciones para el valor original de muestras y 5.5 millones de iteraciones para 4 veces menos muestras). Las proyecciones del resultado de la versión filtrada no llegan a ajustarse tan bien a las experimentales tal como se ilustra en la figura 3.18. Es por eso que se debe buscar un método de regularización de la matriz de proyecciones para que este no amplifique el ruido y que la versión filtrada se llegue a ajustar bien a las proyecciones experimentales.

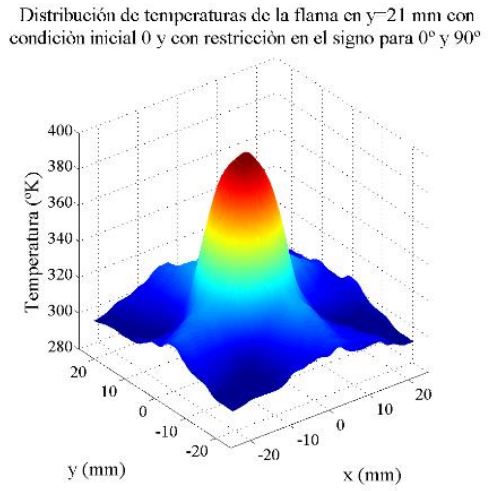


Figura 3.52. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

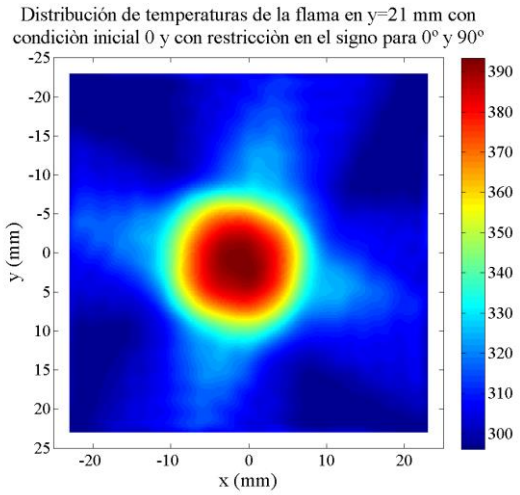


Figura 3.63. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

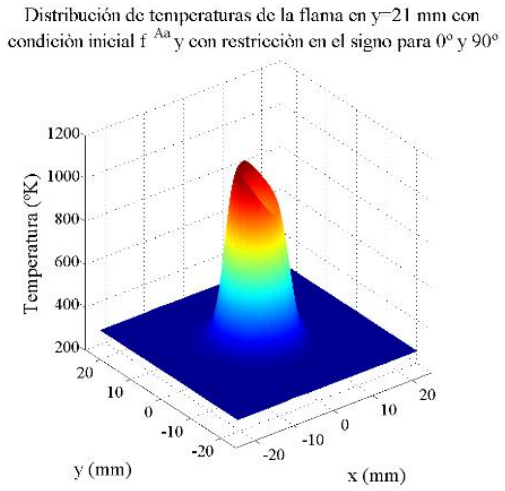


Figura 3.74. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Aa}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

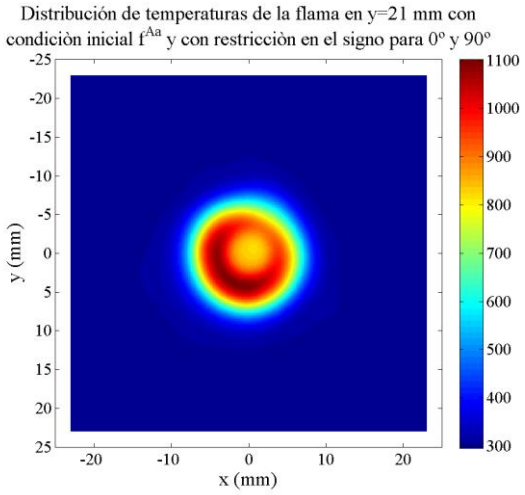


Figura 3.85. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Aa}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

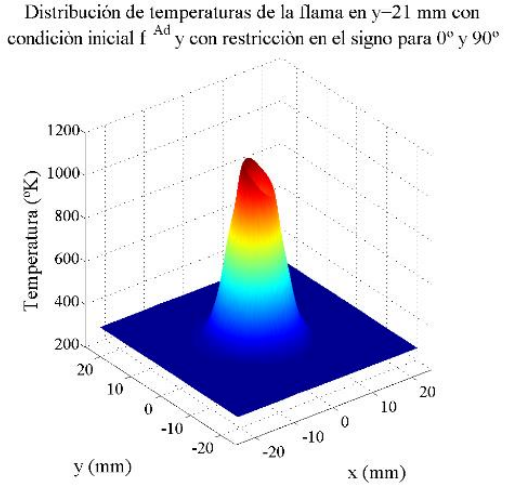


Figura 3.16. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

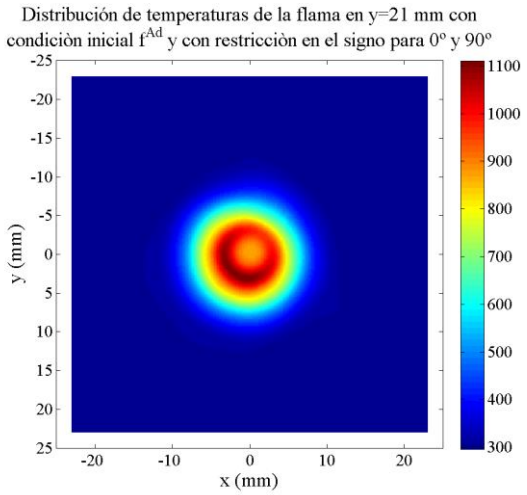


Figura 3.17. Resultado de la distribución de temperaturas usando 4 proyecciones 0°, 26.5°, 90° y 116.5°, con $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$, con restricción en el signo, de tal forma que siempre este negativo.

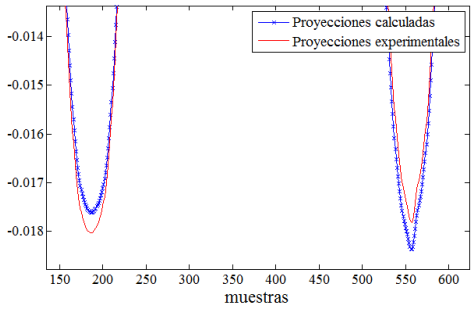


Figura 3.18. Comparación entre las proyecciones experimentales y las proyecciones del vector final $\mathbf{f}^{i+1}$ para $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{0}$ cuando el número de muestras en las proyecciones es denso.

Para ver la importancia del filtrado en la eliminación del ruido, mostramos en las siguientes figuras los efectos del ruido en la reconstrucción de temperaturas. En la figura 3.25 se muestra al estimado de $n(x,y,z) - n_0$ para $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$ pero sin un proceso de filtrado. En la figura 3.26 se muestra su respectiva distribución de temperaturas.

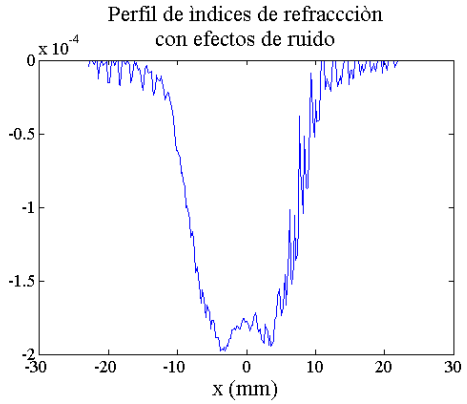


Figura 3.25. Índices de refracción provenientes del vector final $\mathbf{f}^{i+1}$ con efectos de ruido.

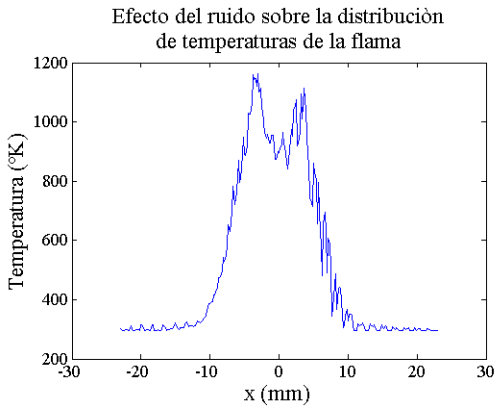


Figura 3.26. Efectos del ruido sobre la reconstrucción de las temperaturas de la flama.

Una versión filtrada de la función presente en la figura 3.24 se muestra en la figura 3.26. En figura 3.27 se muestra la convergencia de las versiones filtradas de la distribución de temperaturas.

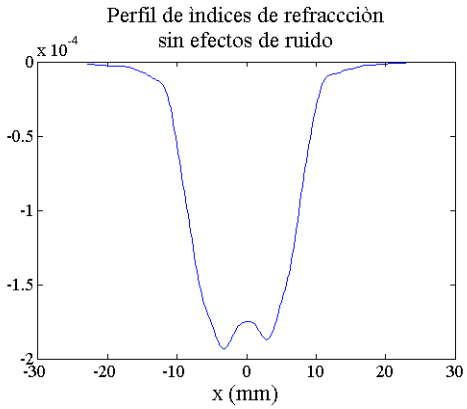


Figura 3.9. Índices de refracción provenientes del vector final $\mathbf{f}^{i+1}$ sin efectos de ruido.

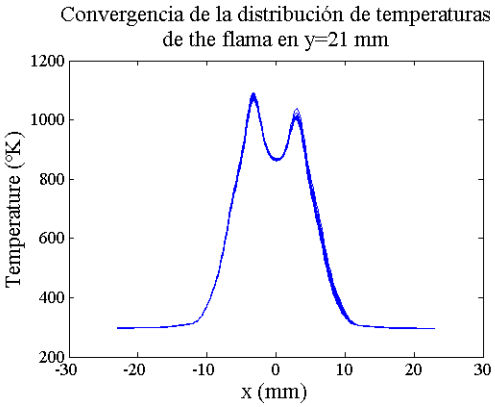


Figura 3.10. Convergencia de la distribución de temperaturas para $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$.

Referencias

1. F. Luisier, T. Blu, and M. Unser, "Image Denoising in Mixed Poisson–Gaussian Noise" IEEE Transactions on Image Processing 20(3), 696–708 (2011).
2. A. D. Poularikas, Transforms and Applications Handbook, CRC Press, Boca Raton, Florida (2010).
3. CL. Byrne, Applied and Computational Linear Algebra: A First Course, http://faculty.uml.edu/cbyrne/ByrneACLAbook.pdf , (2009).

Capitulo 4. **Conclusiones y trabajo a futuro**

4.1 Conclusiones generales.

1.- En este trabajo se demuestra un sistema tomográfico fácil de implementar basado en 4 IDP.

2.- Además de fácil de implementar, el sistema es fácil de expandir a más de 4 interferómetros debido a que el IDP es un interferómetro de trayectoria común y no se obstruyen entre sí.

3.- Los interferogramas resultantes presentan la asimetría de la flama lo cual indica que no es válido solo utilizar la transformada de Abel para modelar el problema.

4.- Debido a que las franjas de la flama son pocas y por otro lado no se puede introducir más franjas debido a la perdida de contraste del IDP, es necesario usar un método adecuado para recuperar la fase bajo esta situación. El método de Kreis es usado para resolver ese problema y se demuestra su efectividad para el caso particular de los interferogramas de una flama.

5.- El método de fabricación de micro-agujeros para realizar los IDP demuestra que es fácil de implementar. Se pueden lograr micro-agujeros de buena calidad siempre y cuando los elementos ópticos no presenten muchas aberraciones.

6.- Con 4 proyecciones, sin restricción en el signo de $\mathbf{f}^{i}$ y sin condición inicial, no podemos lograr un estimado satisfactorio de las temperaturas usando el algoritmo de Kaczmarz. Están demuestran ser muy bajas y no corresponden a lo reportado en otros trabajos.

7.- Con 4 proyecciones, con restricción en el signo de $\mathbf{f}^{i}$ y con diferentes condiciones iniciales, obtenemos un mejor estimado de las temperaturas usando el algoritmo de Kaczmarz.

8.- La única forma de comparar cual de las diferentes condiciones iniciales da mejor estimado de las temperaturas, es calculando la norma l2 del error entre las proyecciones experimentales y las generadas por el ultimo vector solución $\mathbf{f}^{i+1}$ a ser considerado.

9.- De acuerdo al criterio elegido para ver cuál es la mejor condición inicial, la solución $\mathbf{f}^{0} = \mathbf{f}^{Ad}$ proporciona el menor error entre las proyecciones experimentales y las generadas por el ultimo vector solución $\mathbf{f}^{i+1}$.

10.- La condición inicial debido a la transformada de Abel mejora la reconstrucción. Lo anterior sugiere que uno debe de buscar la mejor solución inicial dentro del conjunto posible. Se tiene que delimitar ese conjunto posible de soluciones agregando más parámetros físicos tal como el que se uso de hacer siempre a $\mathbf{f}^{i}$ negativo.

11.- Se demuestra que un valor bajo del parámetro de relajación τ en el algoritmo de Kaczmarz sirve para amortiguar el ruido teniendo como consecuencia que la iteración final no presenta

niveles fuertes de ruido y que es fácil quitarlo con un simple filtro pasa-bajos tal como el butterworth.

12.- Es necesario hacer un submuestro del número de proyecciones ya que si no se realiza esto, la convergencia puede ser muy lenta y uno podría encontrar una solución que no es satisfactoria.

4.2 Trabajo a futuro.

El principal problema es encontrar la solución inicial $\mathbf{f}^0$ correcta para el algoritmo de Kaczmarz. Es necesario introducir más parámetros físicos de la flama a $\mathbf{f}^0$ para poder delimitar el espacio de soluciones. Es por eso que se piensa considerar como condición inicial los resultados de simulaciones del proceso de combustión de flamas.

Con más recursos económicos uno podría armar más interferómetros para mejorar la aproximación.