EVOLUCIÓN NO LINEAL DE CAMPOS DE SPECKLE.

por

Lic. Edgar Javier Alvarado Letechipía

Tesis sometida como requisito
parcial para obtener el grado de

MAESTRIA EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE ÓPTICA

en el

Instituto Nacional de Astrofisica, Óptica y Electronica.

Agosto de 2019

Tonantzintla, Puebla.

Supervisada por:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff, INAOE

Resumen

Describir la transformación de la función de densidad de probabilidad asociada a un mapeo no lineal. El análisis se implementa a través de un proceso cripto-determinista caracterizada por el teorema de Liouville. Los efectos físicos asociados se identifican mediante la función de correlación. Se muestran simulaciones realizadas por dichas transformaciones.

El mapeo no lineal genera vórtices asociados al flujo de la función de densidad.

La evolución de campos de speckle se organiza alrededor de “puntos de equilibrio” cuyo comportamiento dinámico corresponde a atractores y repulsores.

Se establece una analogía entre campos ópticos de speckle y procesos termodinámicos los cuales son evidentes en procesos de correlación.

Palabras clave: speckle, no linealidad, correlación.

Abstract

Describe a transformation of the probability density function associated to a nonlinear mapping. The analysis is made through a crypto-deterministic process characterized by the Liouville theorem. The physical effects associated are identify by the correlation function. Simulations of the transformation are shown.

The nonlinear mapping generates vortices associated to the flow of the density function.

The evolution of speckle fields is organized around “balance points” whose dynamical behavior corresponds to attractors and repulsors.

An analogy between optical speckle fields and thermodynamic processes is established which is fundamental to correlation processes.

Keywords: speckle, no-lineality, correlation.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, a mis padres Francisco Alvarado y Maria de la Luz Letechipía por todo su esfuerzo, amor y apoyo que me brindaron a lo largo de mi vida, por enseñarme a esforzarme en todos los proyectos que emprendí y a levantarme hasta cumplirlos. Valoro que desde pequeño siempre me enseñaron el valor y el aprecio al trabajo, y mas que nada su amor incondicional en cualquier momento sin importar la situación. También quiero agradecer a mis hermanos Vianey Alvarado y Abraham Alvarado por todo su cariño, apoyo, sonrisas, buenos recuerdos y momentos que han hecho mi vida feliz. No cabe duda que mi familia siempre estará ahí para mi y yo para ustedes, muchas gracias.

También quisiera agradecer a mi asesor el Dr. Gabriel Martínez Niconoff por todo el apoyo, tiempo, paciencia y enseñanzas que me brindo de la mejor manera a lo largo de la realización de este proyecto de tesis, es un gran investigador y una excelente persona.

Quisiera agradecer a mi novia Ilsse Aguilar quien siempre me acompaño a lo largo de la Maestria y me apoyo de manera incondicional. Gracias por tu tiempo y cariño.

Finalmente, agradezco al pueblo de México y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado a través de la beca No. 491145 para realizar mis estudios de Maestria.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

Si una onda electromagnética incide sobre una superficie plana la cual está dividida en dos medios de índice de refracción diferente, es reflejada y transmitida a través de estos medios, esto de acuerdo a las leyes de la reflexión y la refracción estudiadas en el área de la óptica. El campo reflejado dependerá de parámetros tales como la longitud de onda, el ángulo de incidencia y las propiedades eléctricas (permitividad, permeabilidad y conductividad) de los dos medios adyacentes. Por lo tanto, se sabe que las propiedades eléctricas del medio describen el comportamiento de las leyes de la reflexión y la refracción.

Cuando la interfase entre los medios no es plana y presenta irregularidades decimos que la superficie tiene una rugosidad aleatoria, donde las alturas medidas desde un origen o plano medio difieren de forma aleatoria. En el ámbito práctico o en la vida real todas las superficies, tanto las que ocurren naturalmente como las artificiales, presentan rugosidad.

Muchos fenómenos físicos se presentan cuando se estudian superficies rugosas, por mencionar algunas ramas de la física tenemos a la física de materiales, mecánica, mecánica de fluidos, óptica, etc. Un proceso físico particularmente interesante es el de esparcimiento de ondas electromagnéticas por una superficie rugosa, o su transmisión a través de ésta, la creación de estas distribuciones de luz es conocida como campos de speckle.

Los campos de speckle han sido de gran importancia en el análisis de diversos fenómenos físicos, así como sus grandes aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia. Los campos de speckle se utilizan para analizar campos ópticos, interferencia, difracción, etc., también se utilizan para estudiar ciertos fenómenos biomédicos, como el análisis del sistema sanguíneo, también tiene aplicaciones en el análisis y procesamiento de imágenes.

Sin embargo, a pesar de las numerosas investigaciones que se han hecho en el área, la solución general y exacta al problema de esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias es aún desconocida, y la mayoría de los trabajos se pueden clasificar como alguna aproximación.

Se define una superficie rugosa como aquella que esparce la luz o el frente de onda de una onda plana incidente en diferentes direcciones aleatorias dependiendo de la superficie, de esta manera ciertas regiones pueden tener más energía que otras. Por otro lado, una superficie que refleja especularmente, es decir, en una sola dirección, será definida como una superficie plana.

Una misma superficie puede ser rugosa para algunas longitudes de onda y plana para otras. O bien, para la misma longitud de onda pero a diferentes ángulos de incidencia, la superficie puede ser tanto rugosa como plana. Por lo que podemos decir que una superficie plana es el caso límite de una superficie rugosa. Este límite depende, como veremos, de parámetros como la longitud de onda y el ángulo de incidencia de la radiación con que se ilumine [1,2].

El objetivo de este trabajo de tesis es desarrollar una teoría con la que se permita analizar al campo de speckle a través de sus parámetros estadísticos, para posteriormente estudiar y predecir las propiedades del campo electromagnético de una onda luminosa que interactúa con una superficie de este tipo, y de esta manera estudiar los campos de speckle en medios no lineales, analizando las matemáticas y transformaciones que nos permitan realizar este proceso, así como presentar aplicaciones potenciales en el área de la óptica. En la siguiente subsección mencionaremos específicamente los objetivos generales y particulares de este proyecto de tesis.

1.2 Objetivos

El objetivo principal es estudiar los campos de speckle con una transformación no lineal, se dice no lineal ya que en general el campo de speckle es lineal, esto quiere decir, que se genera el campo de speckle y se deja propagar en medio libre. Lo que se realiza es proponer transformaciones matemáticas el cual nos permita estudiar diferentes efectos físicos que no sean lineales.

Para lograr el objetivo general se tienen que lograr los siguientes objetivos particulares: 1) estudiar la matemática del campo de speckle y su descripción como una distribución de probabilidad Gaussiana, 2) empatar este fenómeno con el modelo del caminante aleatorio el cual nos dicta los fundamentos de la probabilidad Gaussiana; 3) estudiar las transformaciones matemáticas que nos permitan realizar el campo de speckle no lineal; 4) hacer las simulaciones correspondientes para comparar la parte experimental y la teórica.

1.3 Motivación

Algunas de las principales motivaciones de este proyecto de tesis es introducir la no linealidad en una función de probabilidad gaussiana justificado con el teorema de Liouville a través de un proceso crypto-determinista. Este análisis usa como prototipo el fenómeno de speckle, los cuales estos campos ópticos siguen en principio una distribución gaussiana, por lo tanto, utilizando esta distribución estadística se podrá aplicar transformaciones matemáticas que nos permitan modificar las propiedades estadísticas. Con esto, las no linealidades inducen singularidades, puntos de equilibrio, convergencias, ondas de choque, etc., las cuales se interpretan como una transición de fase, y con esto se propone una analogía con un condensado de tipo Bose-Einstein, ya que se ha demostrado que la luz se comporta como fluido bajo ciertas condiciones en condensados de Bose-Einstein [8-9].

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1 Campos de Speckle

Objetos difusores iluminados con luz coherente, resultan en un patrón aleatorio granulado. La propagación de este campo hasta el punto de observación resulta en la suma de cada una de las contribuciones de la luz reflejada en cada punto de la superficie, la interferencia de estas ondas desfasadas pero coherentes, genera el patrón granular conocido como speckle.

Si se considera otro punto de observación las condiciones de interferencia varían debido a que la longitud de la trayectoria de propagación de las componentes dispersadas es diferente y por consiguiente, puede resultar del proceso de interferencia un valor de intensidad diferente e independiente del anterior. Por lo tanto, el patrón de speckle exhibirá una multitud de puntos brillantes donde la interferencia es constructiva, y de puntos oscuros donde la interferencia es destructiva.

En otras palabras, el campo de speckle, como se mencionó en el Capítulo 1, es producido por la interacción de un haz de luz con una superficie rugosa reflectante o transmitante, por lo tanto, las distribuciones de luz resultantes siguen una distribución de manchas oscuras y brillantes, como se muestra en la Figura 1.

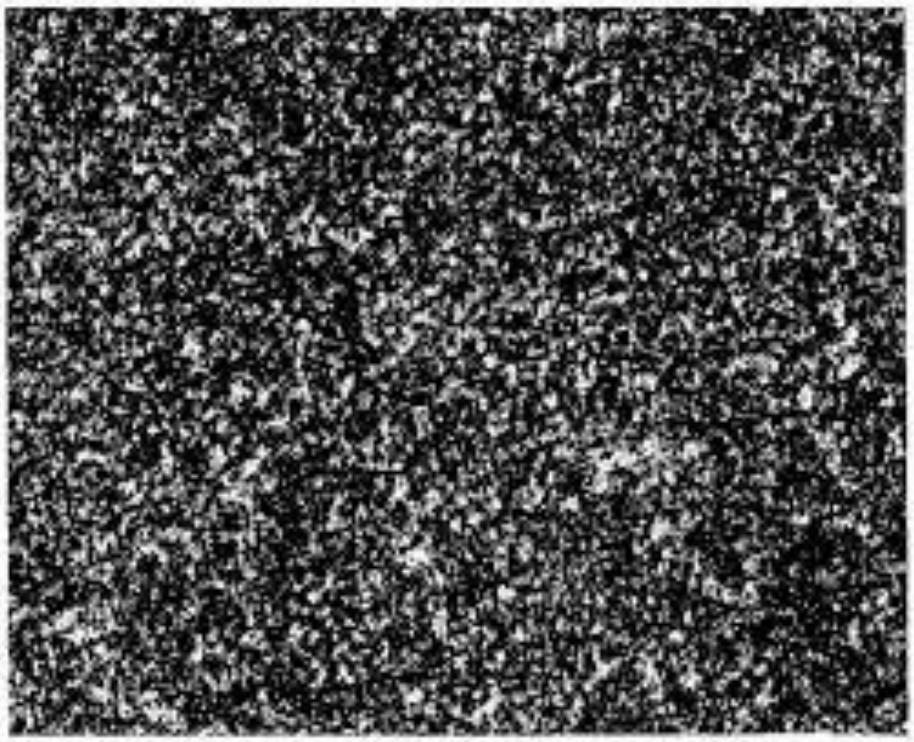


Figura 1. Campo de speckle.

Una representación de la formación de los campos de speckle se muestra en la Figura 2, donde se incide luz de un láser (fuente coherente) hacia la superficie rugosa, esta superficie refleja la luz en diferentes direcciones dependiendo de donde se hizo incidir en la superficie, al propagarse se toma un punto de observación donde las ondas interfieren de manera constructiva o destructiva y así produciendo el campo de speckle.

La Figura 2 sólo muestra una manera de obtener campos de speckle, existen otros sistemas o arreglos experimentales que nos permiten obtener speckle, pero para este proyecto de tesis el objetivo de esta capitulo es solo mencionar brevemente los elementos básicos de su formación.

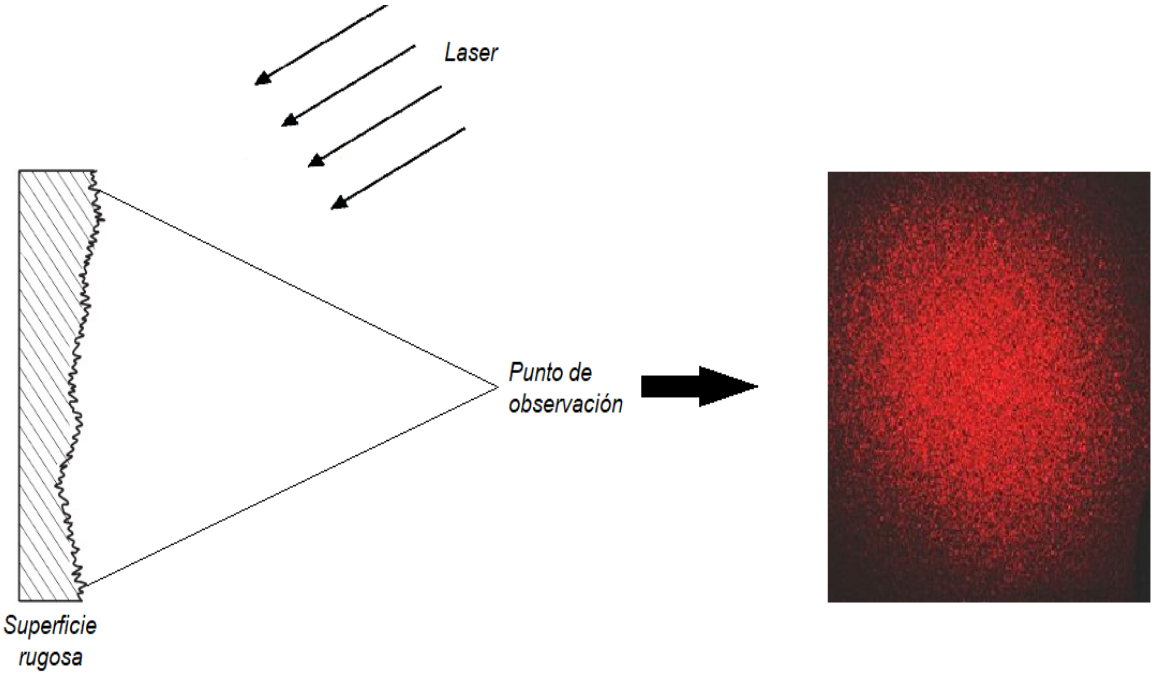


Figura 2. Formación de speckle

2.2 El campo de speckle como fenómeno de camino aleatorio

Este proyecto de tesis solo se basa en la primera aproximación del campo de speckle, esto es, las propiedades estadísticas en un solo punto del espacio. Por lo tanto, solo se hace mención que existe la segunda aproximación, que consiste en las propiedades estadísticas en dos o más puntos del espacio [3,4].

Sea u(x, y, z; t) la representación de una señal analítica con una sola componente de polarización del campo eléctrico en un punto de observación (x, y, z) y en un instante de tiempo t. Para una onda monocromática la señal analítica toma la forma

$$u(x, y, z;\ t) = A(x, y, z)\exp\,[i2\pi vt] \tag{2.1}$$

donde v representa la frecuencia y A la amplitud del campo, la cual es una función compleja del espacio

$$A(x, y, z) = |A(x, y, z)|\exp[i\theta(x, y, z)]. \tag{2.2}$$

La intensidad de la onda está dada por

$$I(x,y,z) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |u(x,y,z;t)|^2 dt = |A(x,y,z)|^2 \qquad (2.3)$$

La amplitud del campo eléctrico en un punto de observación dado (x,y), consiste de múltiples contribuciones desfasadas desde diferentes regiones de esparcimiento de la superficie rugosa. Esto es, la amplitud del fasor A(x,y,z) es representada como una suma de muchas contribuciones de fasores elementales

$$A(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} a_k(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} |a_k| e^{-i\phi_k}. \qquad (2.4)$$

Para una mejor ilustración de la ecuación anterior, tenemos la representación de la adición compleja de las muchas contribuciones elementales de A en la Figura 3.

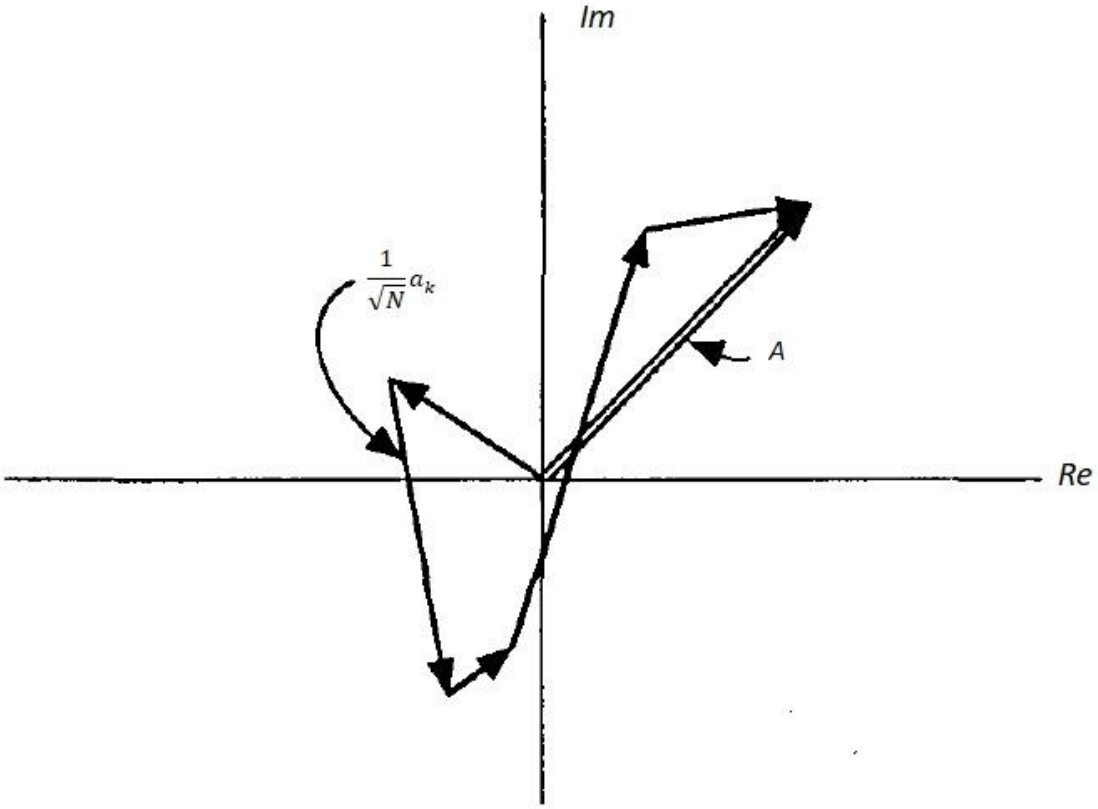


Figura 3. Camino aleatorio en el plano complejo

Se quiere conocer la estadística asociada al campo complejo, la intensidad y la fase del patrón de speckle en un punto (x,y,z). El problema es equivalente a la clásica caminata

aleatoria en el plano [5-7]. Consideremos que los fasores elementales tienen las siguientes propiedades estadísticas:

i) La amplitud $\frac{a_k}{\sqrt{N}}$ *y* la fase ϕ_k del k-ésimo fasor elemental son estadísticamente independientes el uno del otro y de las amplitudes y las fases de todos fasores elementales.

ii) Las fases ϕ_k están uniformemente distribuidas sobre un el intervalo primario $(-\pi, \pi)$ (i.e. la superficie es rugosa es grande comparada con la longitud de onda, con lo cual resulta que variaciones de fase de muchas veces 2π radianes producen una distribución uniforme sobre el intervalo primario).

A continuación, se muestran algunos resultados reportados en la literatura [3,4]. Para un número N grande de contribuciones elementales, se encuentra que las partes real e imaginaria de las componentes del campo en (x,y,z) son independientes, tienen media cero y son variables aleatorias gaussianas idénticamente distribuidas. A partir de estos resultados pueden obtenerse las funciones densidad de probabilidad $\rho(A_0)$ para amplitud, $\rho_I(I)$ para intensidad y $\rho_\theta(\theta)$ para fase siendo ellos respectivamente

$$\rho(A_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{|A_0|^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{2.5}$$

donde la varianza está dada por

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{<|a_k^2|>}{2}, \tag{2.6}$$

$$\rho_I(I) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\right\}, & I \geq 0, \\ 0, & otro\ caso \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\rho_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \theta < \pi \\ 0 & otro\ caso \end{cases}. \tag{2.8}$$

Por lo tanto y para fines prácticos se presentaron las propiedades estadísticas del campo de speckle en el plano complejo en términos de amplitud, intensidad y fase.

Cabe mencionar que el patrón que sigue el fenómeno de speckle es la estadística gaussiana, la cual se representa con la función de densidad de probabilidad Gaussiana.

Por otra parte, el campo de spleckle se puede escribir en términos del plano real (coordenadas cartesianas) de la siguiente forma

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.9}$$

esta representación es con la cual se trabajará en los capítulos siguientes, ya que nos permitirá agregar las nuevas transformaciones de este proyecto de tesis.

2.3 Variables Aleatorias conjuntas

En algunos problemas físicos y probabilísticos en veces es necesario involucrar un sistema de diversas variables aleatorias, de esta manera la descripción probabilística obtenida puede extenderse a cualquier número de variables aleatorias. En este proyecto de tesis solo se expondrá la situación para dos variables aleatorias, ya que en la subsección anterior se encuentra la distribución de probabilidad de un campo de speckle en dos variables.

Considérense dos variables aleatorias *X* y *Y*. Se define la función de distribución de probabilidad conjunta como

$$F_{x,y}(x,y) = Prob\{X \leq x, Y \leq y\}. \tag{2.10}$$

Suponiendo que la función $F_{x,y}(x,y)$ es continua en todos los puntos, se puede definir la función de densidad de probabilidad conjunta como

$$p_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y}. \tag{2.11}$$

Utilizando la definición de derivada parcial, podemos rescribir como

$$p_{x,y}(x,y) = Prob\{x \leq X \leq x + dx, y \leq Y \leq y + dy\}. \qquad (2.12)$$

Por lo tanto, podemos expresar la función de probabilidad conjunta $F_{x,y}(x,y)$ como

$$F_{x,y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p_{x,y}(\zeta,\eta) d\zeta d\eta, \qquad (2.13)$$

donde

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p_{x,y}(\zeta,\eta) d\zeta d\eta = 1, \qquad (2.14)$$

por lo tanto, la integración de cada una de las variables es independiente, con esto se puede encontrar la densidad de probabilidad de sólo una de las variables aleatorias.

Es importante mencionar que las variables aleatorias X, Y son estadísticamente independientes entre sí y por definición cumplen la siguiente relación [10].

$$p(x,y) = p_x(x) p_y(y). \qquad (2.15)$$

2.4 Distribución de probabilidad Gaussiana

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss ó distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en estadística y en la teoría de probabilidades.

Si el número de eventos es muy grande, entonces se puede utilizar la función de distribución de Gauss para describir los fenómenos físicos. La distribución de Gauss es una función continua que se aproxima a la exacta distribución binomial de eventos.

La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico. Esta curva se conoce como campana de Gauss y es el gráfico de una función gaussiana.

La distribución de probabilidad Gaussiana se define por la densidad de probabilidad:

$$\rho_x(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-<x>)^2}{2\sigma_x{}^2}\right\}, \tag{2.16}$$

donde <x> es la esperanza matemática y σ_x^2 es la varianza de la variable aleatoria x [11].

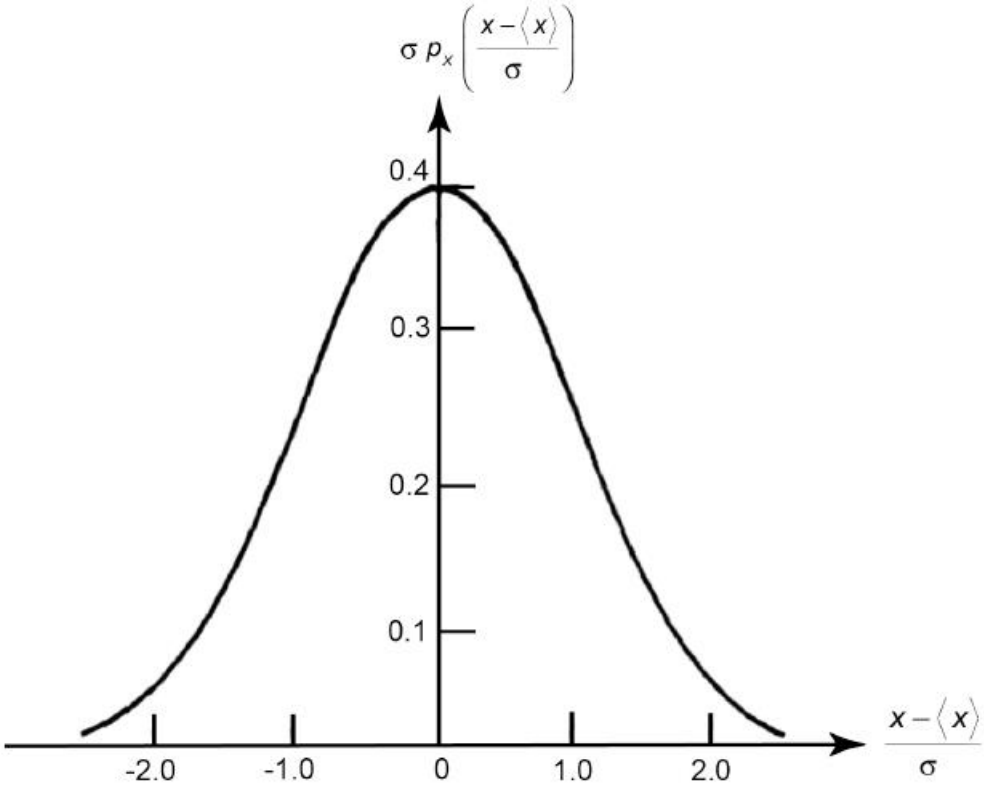


Figura 4. Campana de Gauss

En la figura 4 se muestra la gráfica para la distribución gaussiana.

2.5 Teorema de Louville

El teorema de Liouville es un resultado de la mecánica hamiltoniana sobre la evolución temporal de un sistema mecánico. Un conjunto de partículas con condiciones iniciales

cercanas pueden representarse por la región conexa que ocupa en el espacio de fases. El teorema establece que dicha región mantendrá invariante su volumen a pesar de que se estirará y se encogerá a medida que cada partícula evolucione.

La conservación de probabilidades de una función de probabilidad la podemos expresar como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (k\rho) = 0, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot k + k \nabla \cdot \rho = 0, \tag{2.18}$$

donde escribimos la derivada total de ρ como $d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial u} du$, por lo tanto, sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot k = 0, \tag{2.19}$$

se quiere analizar la evolución de ρ cuando se tiene un mapeo que cumple con las ecuaciones de Hamilton

$$k = \binom{\dot{q}}{\dot{p}}, \tag{2.20}$$

donde $\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ y $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial p}$ son coordenadas y momentos generalizados. Sustituyendo el valor de k

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p})\rho] = 0, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (-\frac{\partial \rho}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial \rho}{\partial p}) = 0, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] = 0, \tag{2.23}$$

Por lo tanto, las implicaciones geométricas de esta demostración son que se interpreta el mapeo de una función de probabilidad ρ como un fluido incompresible. Por otra parte, si partimos de la ecuación original

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (k\rho) = 0, \tag{2.24}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(\nabla \cdot k)\, dt, \tag{2.25}$$

$$\rho = \rho(a, b) e^{-\int \nabla \cdot k\, dt}, \tag{2.26}$$

donde a, b son condiciones iniciales y $\nabla \cdot k = (\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}) \cdot (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$, por lo tanto

$$\nabla \cdot k = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \frac{\partial H^2}{\partial q \partial p} = 0, \tag{2.27}$$

$$\rho = \rho(a, b) e^0 = \rho(a, b). \tag{2.28}$$

Como el Jacobiano de la transformación es igual a 1 los elementos de volumen se preservan, por lo tanto, se conserva la probabilidad.

Entonces, bajo cualquier transformación se conserva la probabilidad, este fundamento lo utilizaremos como base para poder aplicar las transformaciones correspondientes a la distribución gaussiana del campo de speckle en los capítulos siguientes.

En la figura 5 se muestra un mapeo de una función de densidad de probabilidad a través de una transformación arbitraria, donde las condiciones iniciales están establecidas como puntos en el plano.

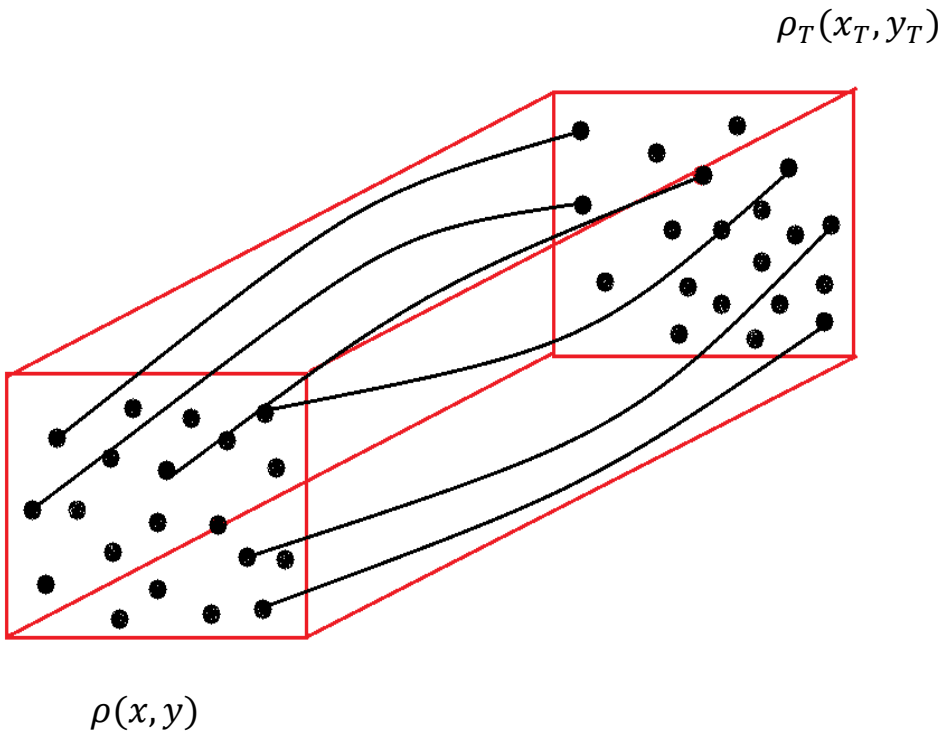


Figura 5. Mapeo de una función de probabilidad bajo una transformación arbitraria

Capítulo 3

Desarrollo teórico

3.1 Proceso crypto-determinista

Un proceso crypto-determinista se define en este proyecto de tesis como un proceso en el cual las condiciones iniciales (a, b) de un sistema están determinadas para una función dada y donde estas condiciones iniciales pueden tomar diferentes valores, y a su vez pueden ser variables aleatorias.

Sea $f(x, y, y', y'') = 0$ una ecuación diferencial con condiciones iniciales $f(0) = a$ y $f'(0) = b$, cuya solución es

$$F(x, y, a, b) = f(a, b)f(x, y), \tag{3.1}$$

por lo tanto, la función $F(x, y, a, b)$ depende de las variables x, y, a y b [12]. El comportamiento local es determinado por las variables (x, y) y el comportamiento global por las variables (a, b).

En otras palabras, la evolución del sistema quedará determinada en un conjunto finito de soluciones a la ecuación diferencial, se formarán familias de soluciones dependiendo de

los valores de a y b, por lo que la ecuación diferencial no estará determinada hasta fijar cada condición inicial (Figura 6).

El proceso crypto-determinsta en este ámbito se define como la evolución de cada uno de los puntos de la función que dependen de las condiciones iniciales, como estas condiciones o variables no son deterministas, se crean familias de curvas las cuales cambian la forma en que una función puede ser analizada o transformada, esto es, introducir fenómenos de teoría de catástrofe o sistemas dinámicos.

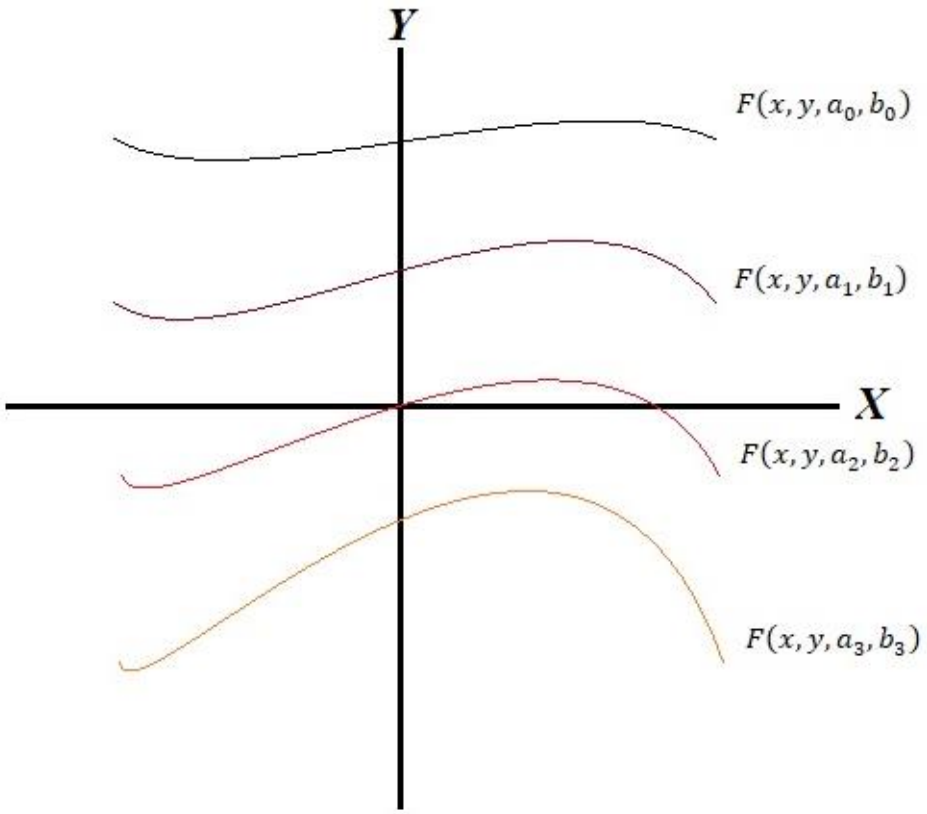


Figura 6. Función F(x,y,a,b) para diferentes valores de las condiciones iniciales a y b.

Si a una función F(x,y,a,b) continua y diferenciable se le aplica alguna transformación de coordenadas, derivada, integración, rotación, etc., la evolución de cada una de las familias de curvas tendrá diferentes gráficas o representaciones, por lo que una función al aplicarle una transformación no es igual para las diferentes condiciones iniciales.

Aquí destacamos que el proceso de crypto toma significado, esto es, cuando se especifican las condiciones iniciales la función es determinista hasta ese momento, si no se especifican las condiciones la función es una familia de curvas igualmente probables de existir. En este ámbito, una función se puede encriptar o mandar información sin que cualquier receptor sepa con certeza cual es la función original [13].

Si la función que se propone es una densidad de probabilidad gaussiana $\rho(x, y, a, b)$ donde las variables a y b son variables aleatorias, tendremos diferentes funciones de densidad de probabilidad para los diferentes valores de a y b.

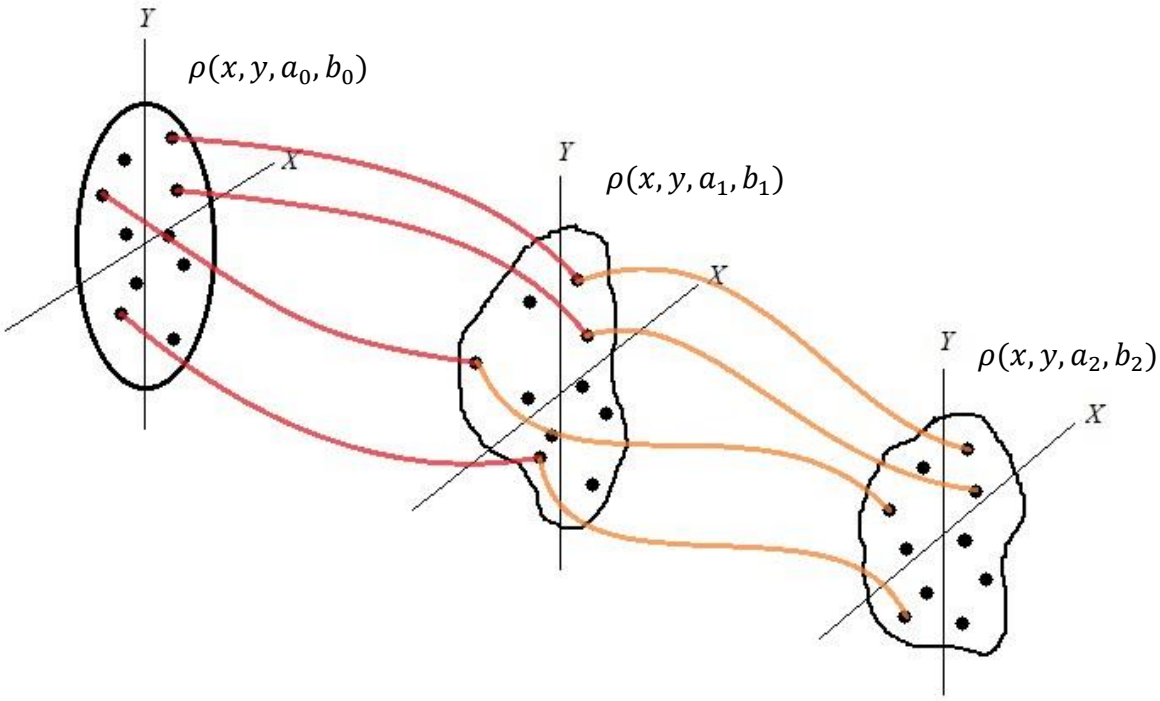


Figura 7. Distribución de probabilidad gaussiana para diferentes valores de las condiciones iniciales a y b.

Por lo tanto, podremos seguir las familias de curvas que se generan en la función de densidad gaussiana. La figura 7 muestra funciones de probabilidad gaussiana $\rho(x, y, a, b)$ con diferentes condiciones iniciales o en este caso variables a y b, se muestra como la función de densidad de probabilidad cambia conforme los valores de a y b toman diferentes valores.

Como se menciona anteriormente en este capítulo, el propósito de introducir condiciones iniciales o nuevas variables (a,b) en funciones o en funciones de probabilidad gaussiana es encontrar la forma que nos permita manipular las ecuaciones a través de transformaciones matemáticas para poder inducir la no linealidad de efectos ópticos en campos de speckle.

Estas transformaciones se tratan desde diferentes enfoques, se analizarán como sistemas caóticos, sistemas dinámicos y transformaciones de coordenadas.

Finalmente empataremos estas transformaciones con fenómenos estudiados de campos de speckle, en este caso, autocorrelaciones.

3.2 Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable, generalmente es el tiempo.

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente y en los que el tiempo transcurre discretamente. Los sistemas dinámicos de tiempo continuo se expresan con ecuaciones diferenciales; éstas pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDEs) y ecuaciones diferenciales con retrasos (DDEs). Por otro lado, si el tiempo es discreto los sistemas se describen por medio de ecuaciones de diferencias (Des).

La forma de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico puede ser en forma de serie de tiempo (gráfica de una variable de estado contra tiempo), o en forma de espacio fase. El espacio fase de un sistema n-dimensional $\dot{x} = F(x)$ es el espacio donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada parámetro del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada

punto del espacio representa cada posible estado de las variables de sistema. En este tipo de representación el tiempo se vuelve un parámetro implícito; como ejemplo se muestra la figura 8, una serie de tiempo (izquierda) y un plano fase (derecha) de un sistema dinámico.

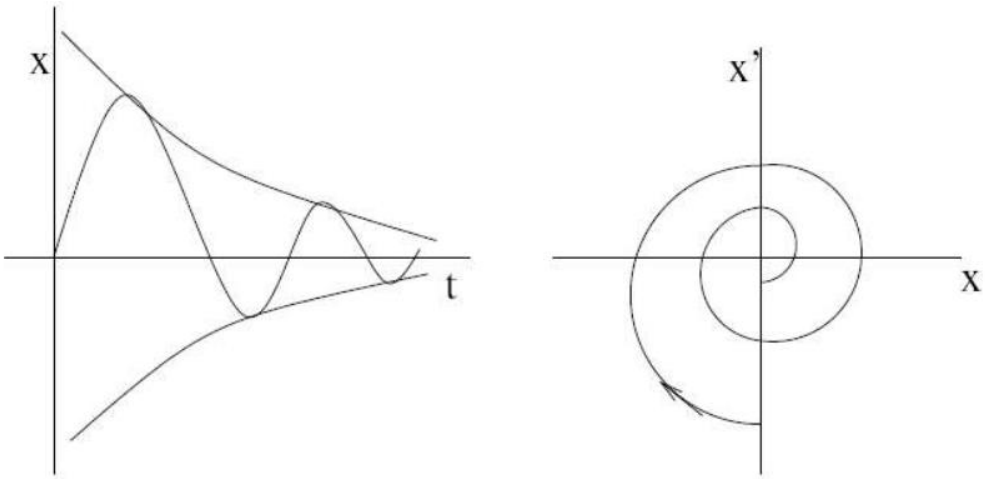


Figura 8. Posición contra tiempo y espacio fase.

El espacio fase está descrito por un campo vectorial F que rige el recorrido de las variables del sistema x(t) en el tiempo, el recorrido de estas variables recibe el nombre de trayectoria. La Figura 9 muestra el campo vectorial en el espacio fase de un sistema dinámico, en él se pueden apreciar singularidades (puntos, ciclos o subconjuntos del espacio fase) que atraen a las trayectorias que pasan cerca de ellas y otras que las repelen.

Se dice que una singularidad del espacio fase es estable, sumidero o atractor si toda trayectoria que comienza cerca de ella se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre. De hecho, si dicha región atrae a todas las trayectorias del espacio fase, recibe el nombre de atractor global.

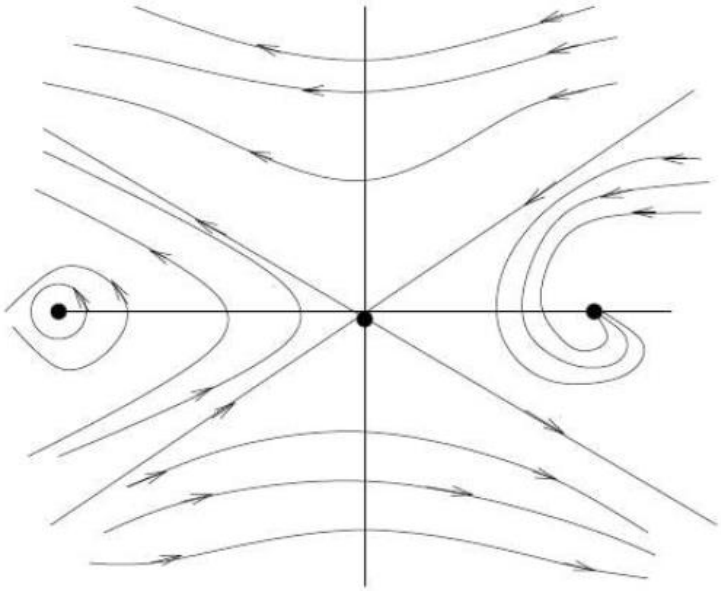


Figura 9. Posición contra tiempo y espacio fase.

La importancia de la estabilidad de las singularidades radica en que ésta determina la estabilidad del sistema en el que se presenten las singularidades. En sistemas lineales las singularidades sólo pueden ser puntos, los cuales se conocen como puntos fijos; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar puntos fijos, ciclos límite y regiones llamadas atractores extraños.

Las singularidades son llamadas puntos fijos o críticos; en estos puntos el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es nulo. Los eigenvalores λ del sistema guardan una estrecha relación con los puntos fijos ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto fijo [14]. En base al comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos fijos, estos se pueden clasificar en:

- Nodo: es un punto tal que en sus proximidades todas las órbitas entran a él. Es asintóticamente estable si las órbitas están direccionadas al punto lo que sucede si los eigenvalores del sistema son reales, negativos y distintos entre sí, Figura 10. En cambio, si las trayectorias se alejan del nodo, éste es inestable y los eigenvalores del sistema son reales, positivos y diferentes entre ellos.

- Nodo estrella: Es un nodo en el que la tasa de rapidez con que todas las trayectorias convergen o divergen del punto es igual. En este caso, los eigenvalores del sistema son reales e iguales, si son positivos el nodo estrella es inestable y si son negativos es estable.
- Foco: Este punto es asintóticamente estable cuando todas las órbitas en sus proximidades tienden a él, pero no entran en él; para que esto suceda los eigenvalores del sistema son complejos conjugados con parte real negativa. Los focos inestables se producen cuando las trayectorias tienden a él en $t \to -\infty$ y corresponden a sistemas con eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, ver figura 11.
- Centro: Es tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas. Ninguna órbita entra y ninguna sale. Este punto es neutralmente estable y se presenta cuando los eigenvalores del sistema son imaginarios puros, ver figura 12.
- Punto Silla: Las trayectorias inicialmente tienden al punto, pero después divergen de él. Este tipo de punto es inestable y se da cuando existen eigenvalores de un sistema que son distintos y de signo opuesto, ver figura 13.

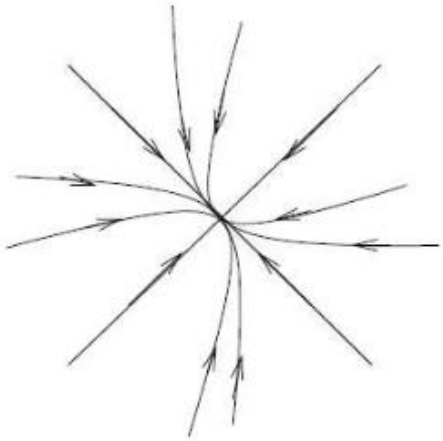


Figura 10. Punto crítico Nodo.

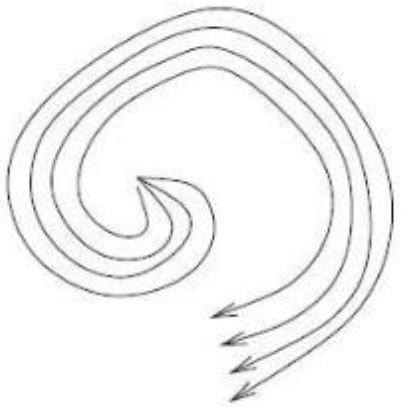


Figura 11. Punto crítico Foco.

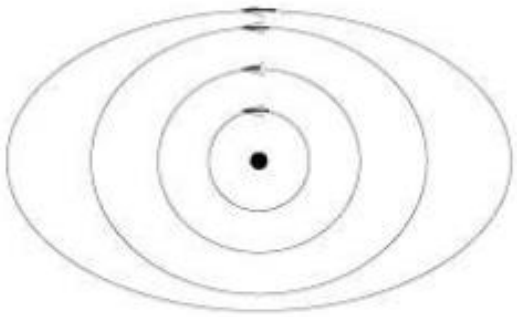


Figura 12. Punto crítico Centro.

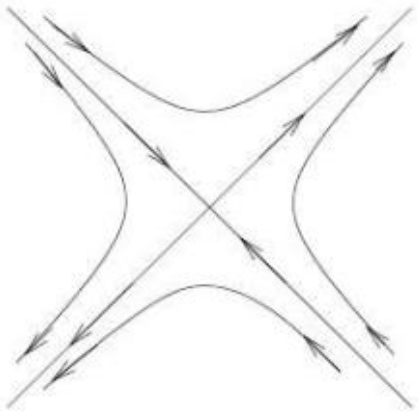


Figura 13. Punto crítico Punto silla.

Un atractor extraño es aquel que tiene un movimiento aperiódico y es muy sensible a condiciones iniciales. En muchas ocasiones surge cuando diferentes ciclos límite y puntos fijos tipo silla se encuentran en el sistema. Bajo ciertas condiciones dichos repulsores enviarán la trayectoria a infinito; sin embargo, puede haber situaciones que la trayectoria se quede viajando de repulsor a repulsor, sin tender a infinito, haciendo una órbita aperiódica [14-18].

Capítulo 4

Resultados

4.1 Campos de speckle no lineales

El propósito de este proyecto de tesis es implementar la no linealidad en campos de speckle, esto se realiza a través de analizar el sistema dinámico en la función de densidad de probabilidad del campo de speckle.

Como se menciona en el capítulo anterior los sistemas dinámicos nos permiten incorporar variables de estado, estas variables en este caso, pueden ser variables aleatorias. Partiendo de la función de densidad de probabilidad del campo de speckle

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.1}$$

se introduce una transformación del tipo $y = y(x)$, (como se menciono en el capítulo 2, las variables x, y, son variables estadísticamente independientes) con esto podremos expresar la densidad de probabilidad en términos de una sola variable

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+y(x)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.2}$$

con lo cual existirá una relación funcional entre y y x. De esta manera se puede proponer cualquier función continua $f(x)$ y comprobar que la función resulte en fenómenos no lineales, pero en vez de analizar cada función a prueba y error, haremos un análisis más profundo.

Proponemos en la transformación la incorporación de las variables de estado a y b, de esta manera tendremos

$$y = g(x, a, b), \tag{4.3}$$

por lo tanto, la función de densidad de probabilidad resulta como

$$\rho(x, y) \rightarrow \rho_T = \rho_T(x, y, a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2 + g(x,a,b)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.4}$$

con esta nueva ecuación podremos analizar la nueva función transformada ρ_T donde las variables a y b dictarán la evolución del sistema.

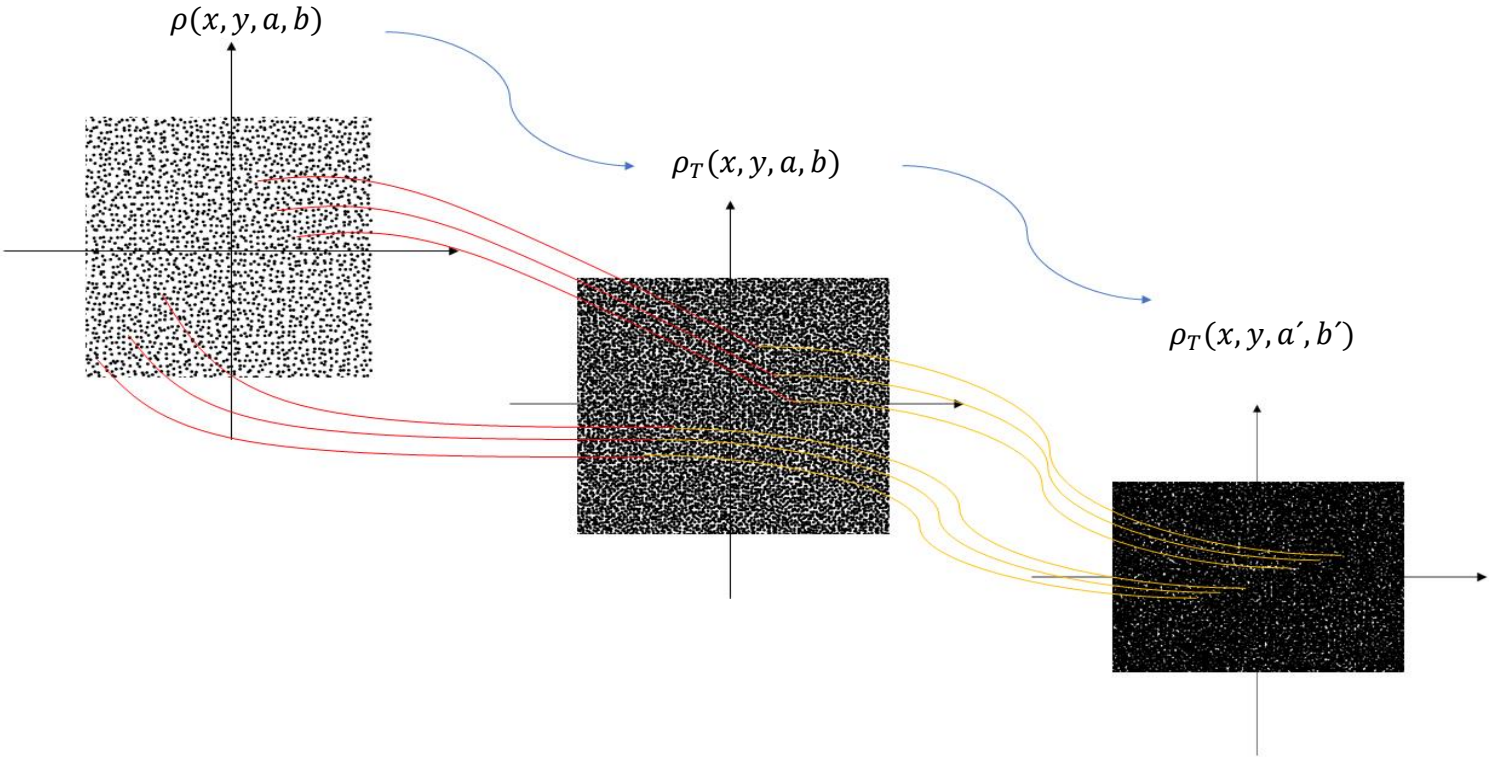


Figura 14. Transformación de $\rho(x, y, a, b)$.

A manera ilustrativa la figura 14 nos muestra la evolución del sistema inicial a un sistema transformado con condiciones iniciales a y b, y después se muestra la modificación del sistema cambiando las condiciones iniciales de $a \rightarrow a'$ y $b \rightarrow b'$.

Por lo tanto, podemos observar que las condiciones iniciales o variables de estado modifican la evolución del sistema, introduciendo una transformación adecuada de la función $g(x, y, a, b)$ podemos implementar la no linealidad del campo de speckle y mas aún manipular esta ecuación con las variables a y b.

Partimos de las ecuaciones representativas de sistemas dinámicos, en este caso sistemas caóticos [19-20], las cuales nos introducen las singularidades mencionadas en el capítulo 3, dentro de esta clasificación se encuentran:

- De pliegue o dobles (una variable de estado): $y = x^3 + ax$,
- De fruncido o cúspide (dos variables de estado): $y = x^4 + ax^2 + bx$,
- La cola de milano: $y = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$,
- La mariposa: $y = x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$,
- El ombligo elíptico: $z = \frac{x^3}{3} - xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy$,
- El ombligo parabólico: $z = x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$,
- El ombligo hiperbólico: $z = x^3 + y^3 + axy + bx + cy$.

Este proyecto de tesis sólo está basado en ecuaciones tipo cúspide y de dobles, las cuales son las que se trabajaron para introducir los fenómenos no lineales, los demás casos solo se mencionan de manera complementaria.

Se implementa ρ_d la transformación de dobles $g(x, a) = x^3 + ax$, por lo tanto

$$\rho_d(x, y, a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2 + g(x,a,b)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.5}$$

$$\rho_d(x, y, a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2 + (x^3 + ax)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.6}$$

$$\rho_d(x,y,a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{(1+a^2)x^2+2ax^4+x^6}{2\sigma^2}}, \tag{4.7}$$

También se implementa ρ_c la transformación de cúspide $g(x,a,b) = x^4 + ax^2 + bx$, por lo tanto

$$\rho_c(x,y,a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+g(x,a,b)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.8}$$

$$\rho_c(x,y,a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+(x^4+ax^2+bx)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.9}$$

$$\rho_c(x,y,a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^8+2ax^6+2bx^5+a^2x^4+2abx^3+x^2(1+b^2)}{2\sigma^2}}, \tag{4.10}$$

Para analizar las transformaciones el exponente se iguala a una constante, de ésta manera se estudia la evolución del sistema cuando la fase es constante, por lo tanto, tenemos los casos $\rho, \rho_T, \rho_d, \rho_c$, ..., etc., generando los siguientes sectores

$\rho \to x^2 + y^2 = c$, entonces se generan familias de círculos de fase constante,

$\rho_T \to x^2 + x^2 = c$, entonces se generan familias de rectas de fase constante,

$\rho_d \to x^2 + (x^3 + ax)^2 = c$ y $\rho_c \to x^2 + (x^4 + ax^2 + bx)^2 = c$, entonces se generan curvas de fase constante.

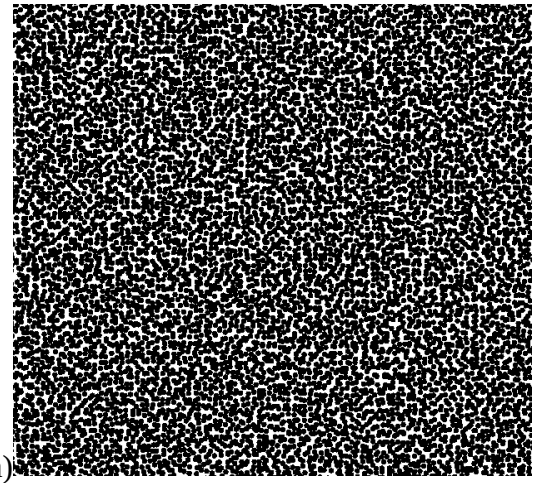
4.1.1 Correlación

La función de autocorrelación se define como la correlación cruzada de la señal consigo misma, resulta de gran utilidad para encontrar patrones repetitivos dentro de una señal, como la periodicidad de una señal enmascarada bajo el ruido o para identificar la frecuencia fundamental de una señal que no contiene dicha componente, pero aparecen numerosas frecuencias armónicas de esta.

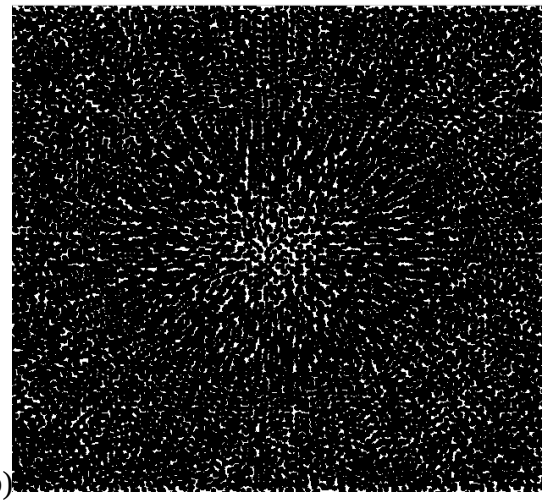
En diferentes áreas de la óptica, las funciones de correlación se utilizan para caracterizar las propiedades estadísticas y de coherencia de un campo electromagnético. El grado de coherencia es la correlación normalizada de campos eléctricos. En su forma más sencilla, es útil para cuantificar la coherencia entre dos campos eléctricos, cuando se miden

en un interferómetro de Michelson o cualquier otro interferómetro óptico lineal. La correlación entre pares de campos, se utiliza típicamente para conocer el carácter estadístico de fluctuaciones de intensidad. La correlación de primer orden es de hecho la correlación amplitud-amplitud y la de segundo orden es la correlación de intensidad-intensidad [21,22,24]. También se utiliza para diferenciar entre estados de luz que requieren una descripción cuántica y aquellos para los que los campos clásicos son suficientes. Consideraciones análogas son aplicables a cualquier campo de Bose en física subatómica, (correlaciones de Bose–Einstein) [23].

Los campos de speckle se autocorrelacionan para poder obtener los sectores de familias de fase constante, también con este proceso se encuentra un mecanismo que permite observar los puntos singulares generados en los campos de speckle no lineales. La figura 15 a) nos muestra una simulación de un campo de speckle, y en b) muestra el campo de speckle autocorrelacionado.



a)



b)

Figura 15. A)Campo de speckle, b)Autocorrelación.

Al momento de aplicar ciertas transformaciones al campo de speckle, generamos diferentes curvas de fase constante mostradas en las siguientes figuras, en las cuales se puede observar que generamos ciertas similitudes con las singularidades mostradas en las figuras 10, 11,12 y 13.

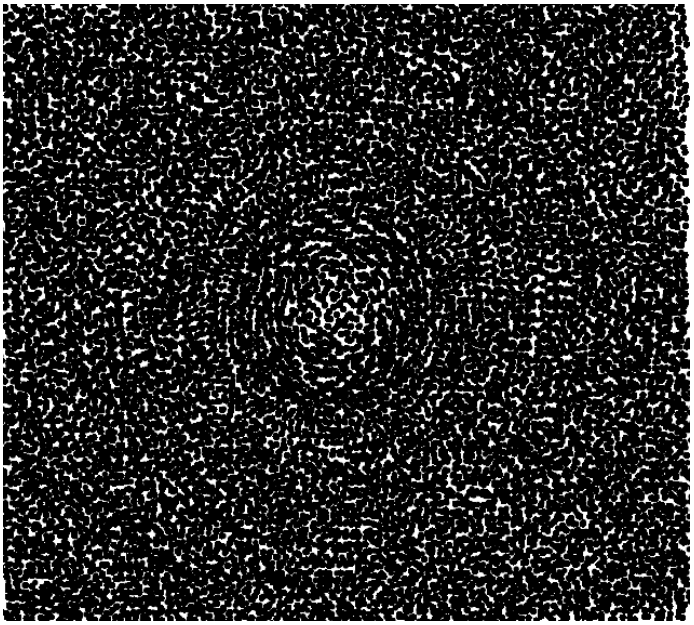


Figura 16. Autocorrelación con speckle rotado.

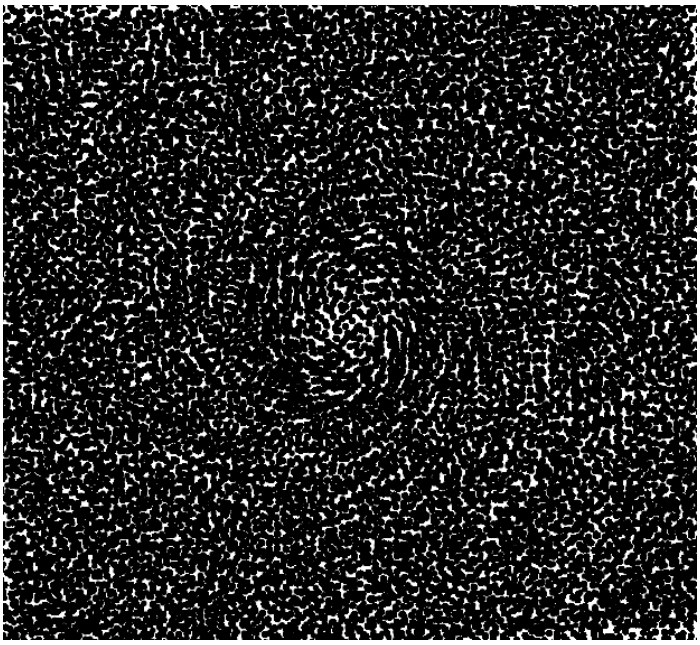


Figura 17. Autocorrelación de speckle escalado 1.

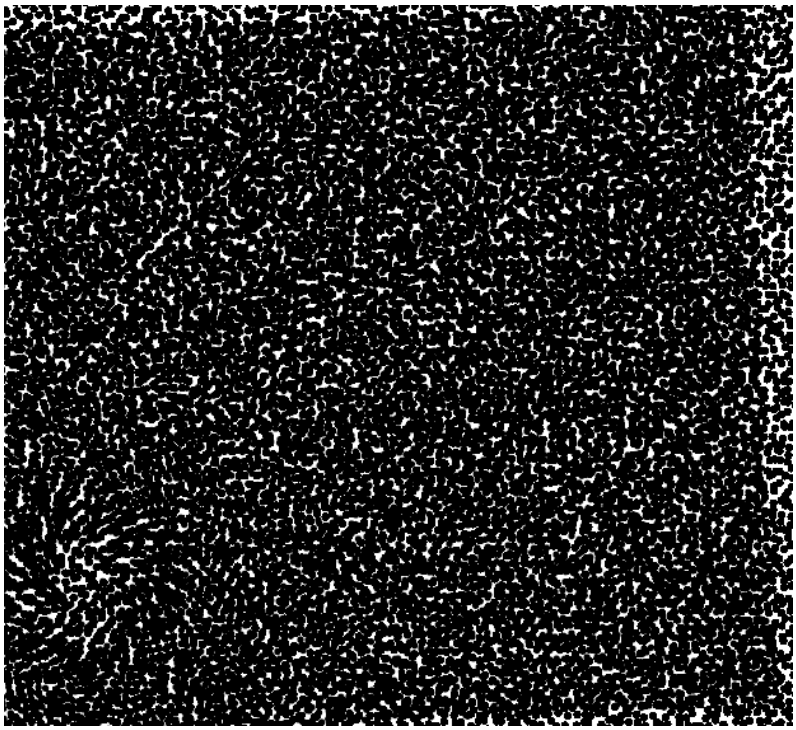


Figura 18. Autocorrelación de speckle escalado y trasladado.

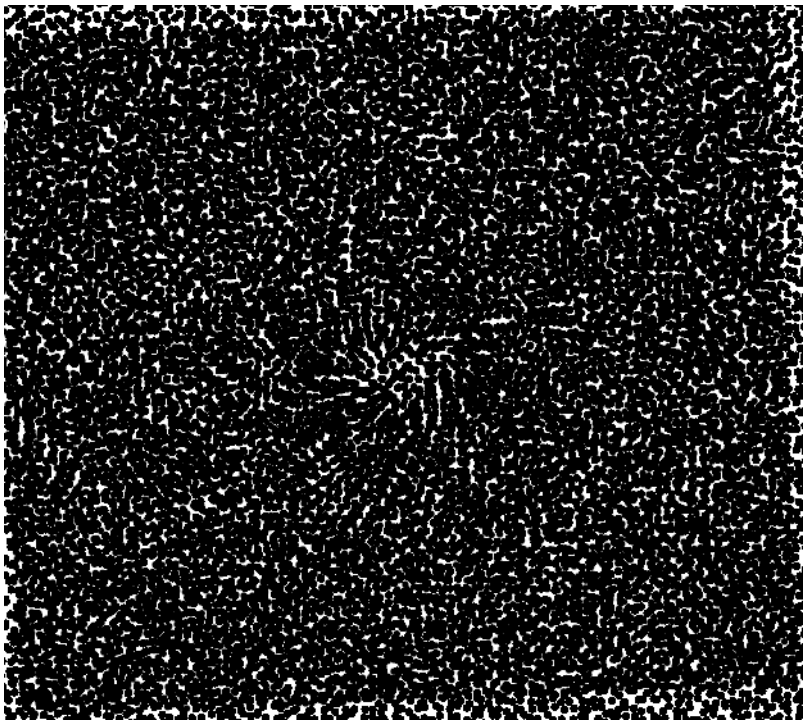


Figura 19. Autocorrelación de speckle escalado 2.

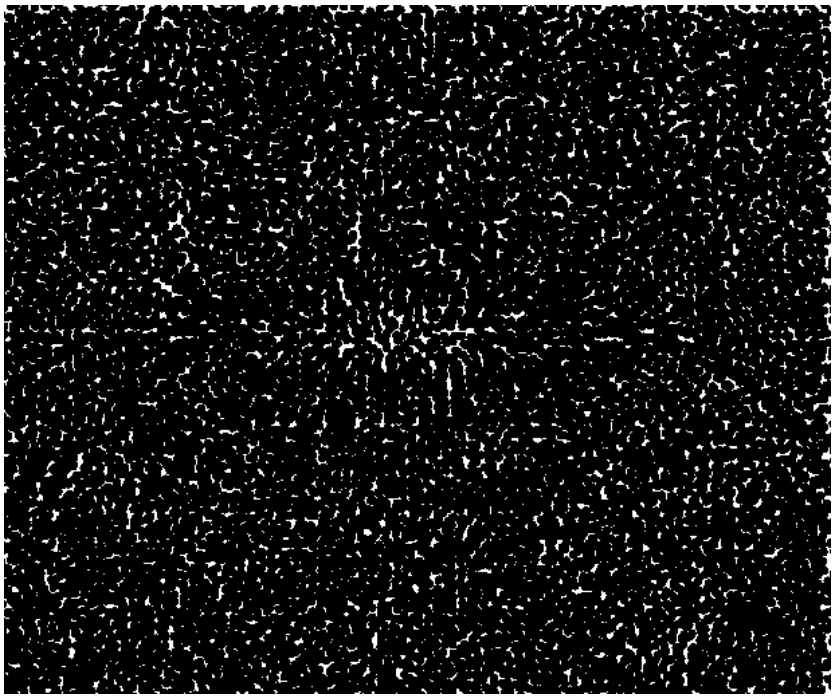


Figura 20. Autocorrelación de speckle a escala, translación y rotación a).

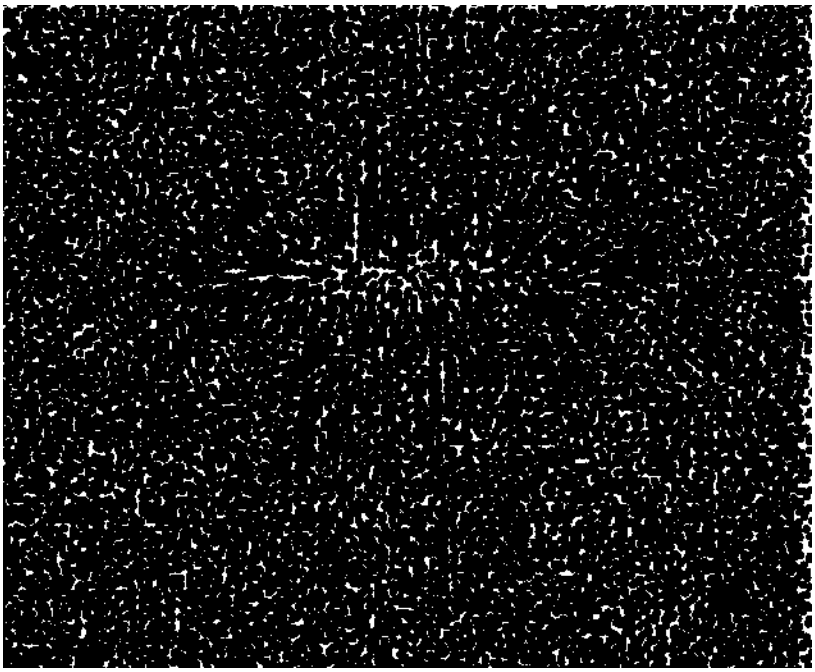


Figura 21. Autocorrelación de speckle a escala, translación y rotación b).

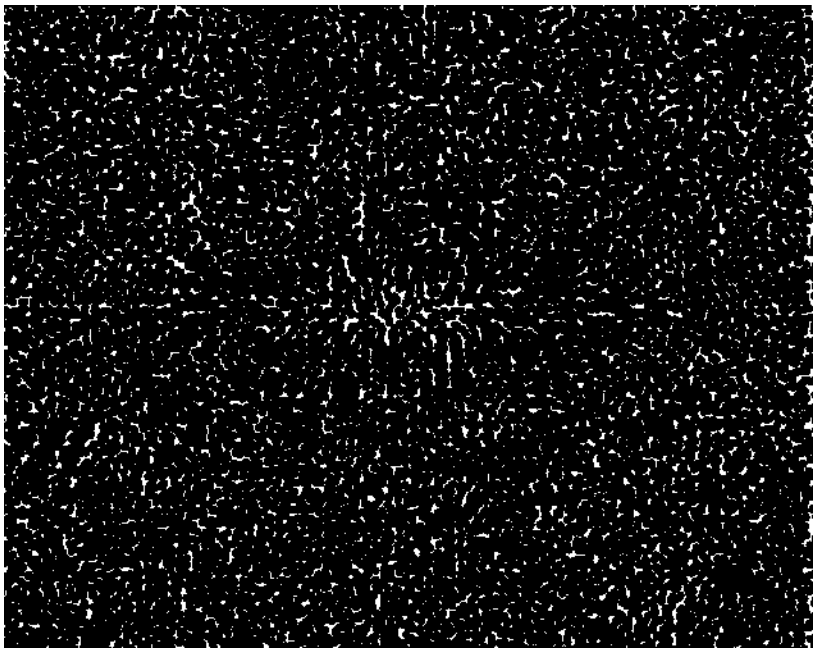


Figura 22. Autocorrelación de speckle a escala, translación y rotación c).

Comparando algunas de las simulaciones anteriores, se puede observar que se obtienen las trayectorias originadas por los puntos críticos o los puntos singulares de los sistemas dinámicos mostrados en el capítulo 3, las figuras 23-25 muestran estas comparaciones.

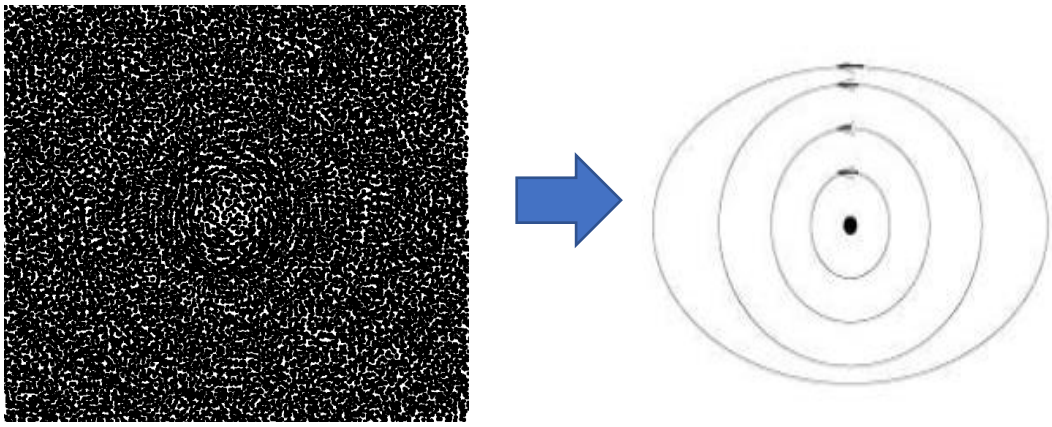


Figura 23. Trayectorias de autocorrelación tipo punto crítico centro.

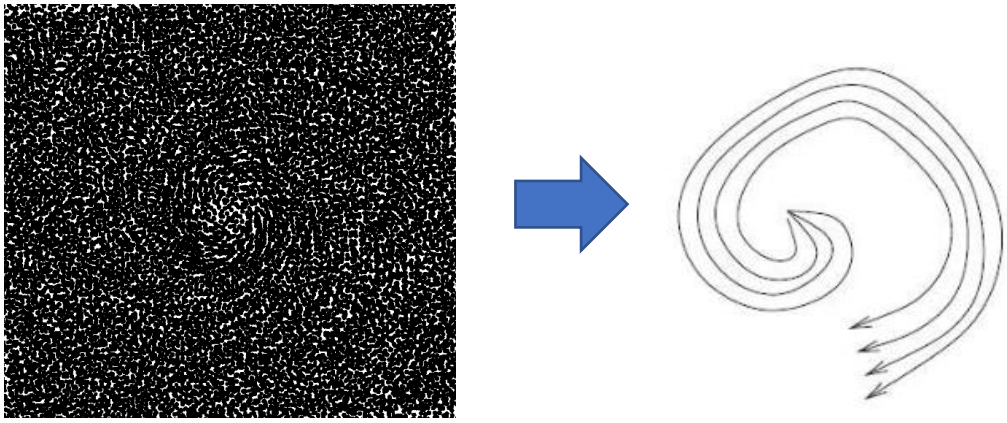


Figura 24. Trayectorias de autocorrelación tipo punto crítico foco.

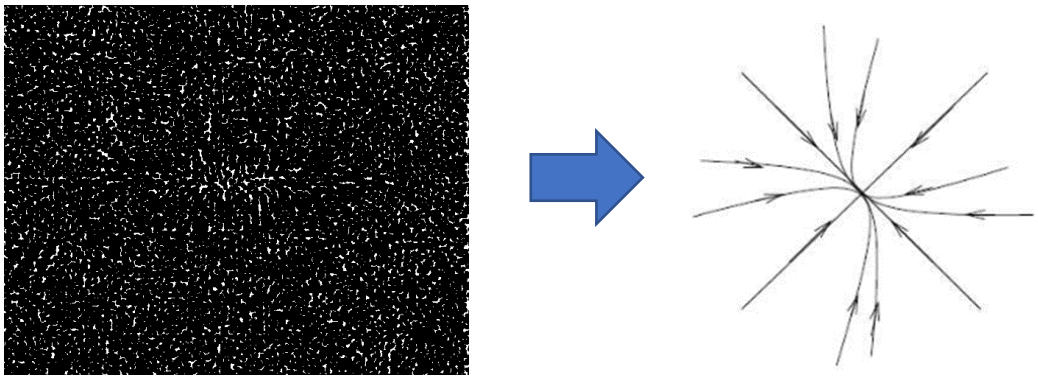


Figura 25. Trayectorias de autocorrelación tipo punto crítico nodo.

Entonces se comprueba que la no linealidad del campo de speckle se ve implementada cuando se aplican las transformaciones correspondientes, pero la dinámica del sistema y su evolución se ve determinada hasta que aplicamos la autocorrelación del campo. Cabe mencionar que las variables a y b, son deterministas en las simulaciones anteriores, y que su forma cambia conforme se varían los parámetros.

Si se varían los parámetros a y b, se tiene una evolución dinámica del campo de speckle simulando el comportamiento de un fluido en dirección del eje z, esto se ilustra en la figura 26, de esta manera se puede ver la evolución del sistema por instantes de tiempo.

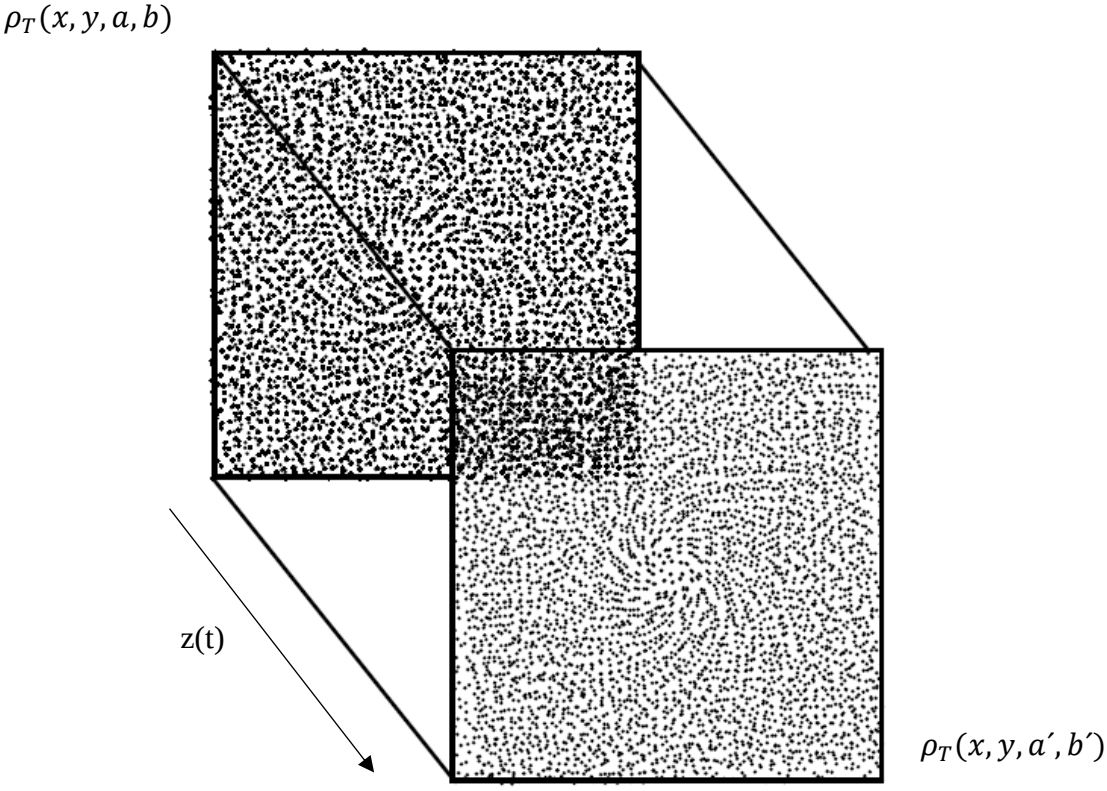


Figura 26. Evolución de campo de speckle en z(t) cambiando CI.

La transformación se propone como función del tiempo para poder simular un flujo del campo de speckle, de esta manera se hace evolucionar el campo de speckle estático 2D a un campo de speckle dinámico 3D.

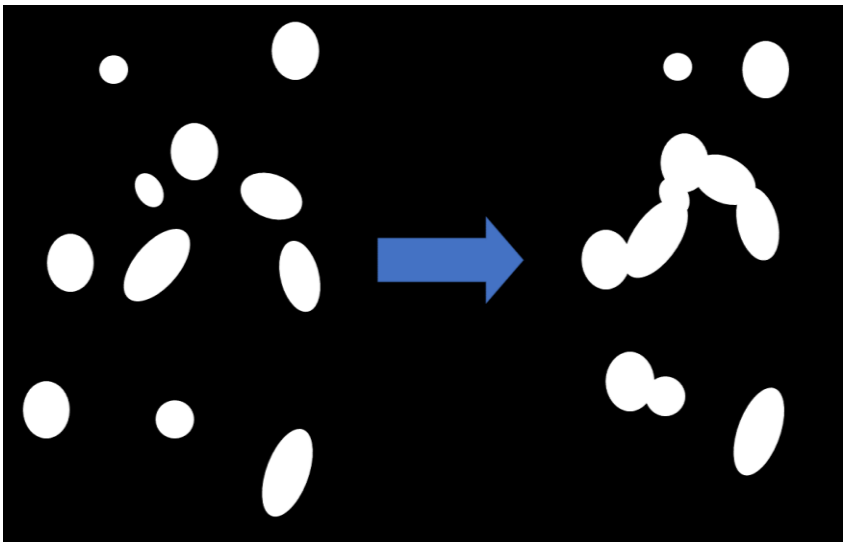


Figura 27. Esquematización de un campo de speckle al cual se le aplica una transformación y muestra interacción entre motas de speckle.

Este proyecto de tesis sólo se basa en el análisis teórico de estos nuevos fenómenos físicos, existe evidencia experimental que soporta estas nuevas ideas, La figura 27 esquematiza la transformación de un sector de un campo de speckle bajo cierta transformación en trayectorias de correlación, las cuales podemos definir como la interacción entre dos motas de speckle siendo transformadas en un continuo, simulando luz como fluido [25]. La evidencia experimental mostrada en la figura 28 muestra este tipo de interacciones entre motas de speckle.

Figura 28. Evidencia experimental.

El propósito de implementar la no linealidad en el campo de speckle junto con trayectorias de correlación e interacción de motas de speckle como partículas, y estas a su vez siendo interpretadas como un fluido o flujo de luz, es poder empatar las ideas con condensados de Bose-Einstein, los cuales bajo ciertas condiciones físicas la luz se comporta como fluido o en otros casos frenar luz o disminuir su velocidad [26-27].

4.2 Ecuaciones de Frenet-Serret

Otra forma de implementar la no linealidad en el campo de speckle es a través de las ecuaciones de Frenet-Serret, en geometría diferencial, las fórmulas de Frenet-Serret describen las propiedades cinemáticas de una partícula que se mueve a lo largo de una curva continua y diferenciable en el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, o las propiedades geométricas de la curva en sí, independientemente de cualquier movimiento. Más específicamente, las fórmulas describen las derivadas de los llamados vectores unitarios tangentes, normales y binormales en términos mutuos.

Los vectores de unidad tangente, normal y binormal, a menudo llamados **T**, **N** y **B**, o colectivamente el marco Frenet-Serret o el marco **TNB** (figura 29), juntos forman una base ortonormal que abarca $\mathbb{R}^3$, y se definen de la siguiente manera:

- **T** es el vector unitario tangente a la curva, apuntando en la dirección del movimiento.
- **N** es el vector unitario normal, la derivada de **T** con respecto al parámetro de longitud de arco de la curva, dividido por su longitud.
- **B** es el vector unitario binormal, el producto cruzado de **T** y **N**.

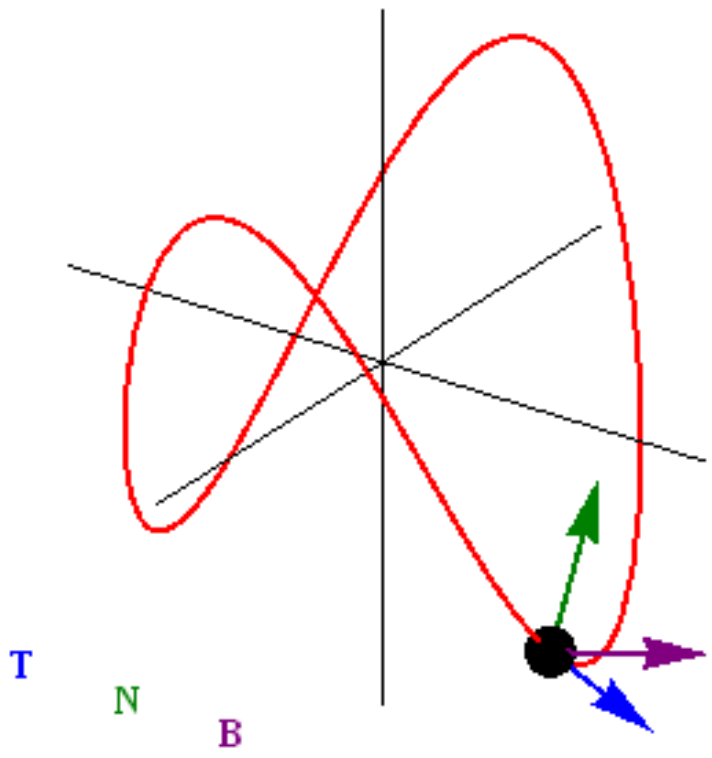


Figura 29. Sistema **TNB**.

Se forma un sistema de ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones de Frenet-Serret

$$\frac{dT}{ds} = kN, \tag{4.1}$$

$$\frac{dN}{ds} = -kT + \gamma B, \tag{4.12}$$

$$\frac{dB}{ds} = -kN, \tag{4.13}$$

tomando ciertas consideraciones el anterior sistema de ecuaciones tiene como soluciones

$$y = \frac{k}{2}x^2, \tag{4.14}$$

$$z = \frac{k\gamma}{6}x^3, \tag{4.15}$$

$$z^2 = \frac{2}{9}\gamma^2 R y^3, \tag{4.16}$$

k y γ son dos parámetros que permiten el estudio de la superficie cuya representación, donde k es la curvatura, donde es una medida del cambio de dirección del vector tangente

a una curva, cuanto más rápido cambia éste a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva, se dice que es más grande la curvatura, y γ es la torción, la cual es una medida del cambio de dirección del vector binormal: cuanto más rápido cambia, más rápido gira el vector binormal alrededor del vector tangente y más retorcida aparece la curva [28-29].

Con esta representación de ecuaciones se puede realizar la transformación en la función de densidad de probabilidad

$$\rho(x,y,z) \rightarrow \rho_T = \rho_T(x,y,z,k,\gamma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}, \qquad (4.17)$$

$$\rho_T(x,y,z,k,\gamma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x(k,\gamma)^2+y(k,\gamma)^2+z(k,\gamma)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (4.18)$$

por lo tanto, se podrá controlar la curvatura k y la torsión γ de la curva a analizar, lo que nos permite trabajar en este sistema coordenado es poder llevar la función de densidad de probabilidad a un sistema 3D, con lo que el campo de speckle se puede manipular a manera de fluido en cualquier eje coordenado (x,y,z).

Capítulo 5

Conclusiones

Se describió de manera concisa que es un campo de speckle y como se genera, también se describió la formulación matemática con la que se representan a los campos de speckle, y se estudiaron las propiedades estadísticas que describen este fenómeno.

La no linealidad se introdujo en la estadística gaussiana, que describe al campo de speckle, con esto se aplicaron los nuevos fenómenos físicos. La no linealidad aparece al momento de aplicar las transformaciones correspondientes, en este caso se hizo uso de sistemas dinámicos y más específicamente de sistemas caóticos, las singularidades presentes generan las trayectorias de correlación con la cual podemos hacer una analogía con un fluido y en este caso como proyecto a futuro poder empatar estos fenómenos con condensados de Bose-Einstein.

La no linealidad también se genera introduciendo geometría diferencial, con lo cual las ecuaciones de Frenet-Serret proporcionan las propiedades de curvatura y torción que producen los fenómenos de trayectorias de correlación. También nos permite manipular el campo de speckle de un sistema coordenado x,y que se propagá en el eje z, a un sistema coordenado TNB, con lo cual el sistema coordenado ya no se limita a propagarse en un solo eje sino a que el sistema evolucione en cualquier dirección. Hasta hoy en día los campos de speckle solo se han analizado en 2D por lo que la introducción de estas ecuaciones nos permite manipular el campo de speckle.

Cabe mencionar que este proyecto de tesis está basado en un desarrollo y análisis teórico, aunque la evidencia experimental que respalda nuestro trabajo ha sido reportada en la literatura. Las simulaciones que se realizaron están basadas en la estructura de la distribución gaussiana del campo de speckle.

Se logró introducir la no linealidad del campo de speckle a través de diferentes transformaciones. Las trayectorias de singularidad mostradas en la teoría de sistemas dinámicos se reproducen en las simulaciones en las trayectorias de correlación obtenidas para diferentes casos. Se incorpora un análisis matemático que permite estudiar el campo de speckle como si fuera un fluido, con esto se puede estudiar el campo de speckle de 2D a 3D.

Apéndice

A continuación, se muestra un prototipo de los códigos usados para la generación y simulación de la correlación de un campo de speckle con distribución de probabilidad gaussiana hecho en MatLab

speckle.m:

```
clear variables
clear functions
clc

 ejemploa='b1.png';
 X=imread(ejemploa);
 X=double(X);
 size(X)
 Y= imnoise2('gaussian', 100, 100, 1, 1);
 X1=X.*Y;
 %Z= imrotate(X1,1);
 Z = imrotate(X1,3,'crop');


 F=X1.*Z;

subplot(1,4,2);
image(Z);
axis off;
axis image;

subplot(1,4,1);
image(X1);
axis image;
axis off;

subplot(1,4,3);
image(F);
axis image;
axis off;
```

donde b1, es una imagen creada en blanco para poder darle fondo al campo de speckle.

Índice de figuras

Referencias

[1] S. O. Rice, “Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces,” Commun. Pure Appl. Math. **4**, 351-378 (1951).

[2] Díaz Gonzáles, G., “Estudio de Fenómenos Electromagnéticos en la Interfase de Dos Medios”, Tesis de Doctorado INAOE, 1-4 (2013).

[3] J.C. Dainty, “Laser speckle and related phenomena”, Springer-Verlag, V.9, 1-32 (1975).

[4] J.W. Goodman. Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications. Roberts & Company, Publishers, Greenwood Village, CO, 2007.

[5] Pearson, K. (1905). "The Problem of the Random Walk". Nature. **72** (1865): 294.

[6] J. W. Goodman, "Some fundamental properties of speckle*," J. Opt. Soc. Am. **66**, 1145-1150 (1976)

[7] Dayan Li, Damien P. Kelly, and John T. Sheridan, "Three-dimensional static speckle fields. Part I. Theory and numerical investigation," J. Opt. Soc. Am. A **28**, 1896-1903 (2011)

[8] J. L. Everett, G. T. Campbell, B. C. Buchler, “Dynamical observations of self-stabilizing stationary light”, Nature Physics (26 Sep 2016), doi: 10.1038/nphys3901

[9] Onofrio, R. *et al. Observation of superfluid flow in a Bose-Einstein condensed gas*. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2228–2231 (2000).

[10] Devore J. *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. Séptima edición. Cengage Learning. 2008.

[11] Johnson R**.** *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. Octava edición. Pearson. 2012.

[12] Boyce, William E.; DiPrima, Richard C. (1967). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, (4ª edición). John Wiley & Sons. p. 3.

[13] N. Koblitz. A course in Number Theory and Crytography. SpringerVerlag, (1987).

[14] Loaiza Ramírez, M.. “Diseño y simulación de un criptosistema caótico para comunicaciones seguras”. Tesis Licenciatura. Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones. Departamento de Computación, Electrónica, Física e Innovación, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Universidad de las Américas Puebla. Mayo. 2006.

[15] David Ruelle y Floris Takens (1971). «On the nature of turbulence». *Communications of Mathematical Physics* **20**: 167-192.

[16] D. Ruelle (1981). «Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors». *Communications of Mathematical Physics* **82**: 137-151.

[17] John Milnor (1985). «On the concept of attractor». *Communications of Mathematical Physics* **99**: 177-195.

[18] David Ruelle, 1989. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*, Academic Press.

[19] T. Poston y I. N. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, London, 1978.

[20] Gilmore R., "Catastrophe theory for scientists and engineers", Wiley, 1981.

[21] Loudon, Rodney, *The quantum theory of light* (Oxford University Press, 2000),

[22] Weisstein, Eric W. «Autocorrelation». *MathWorld*. Wolfram Research.

[23] BEC 2009, Bose-Einstein Condensation 2009.

[24] Autocorrelación. (2019, 30 de agosto). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 08:39, septiembre11, 2019 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Autocorrelaci%C3%B3n&oldid=118738849.

[25] G. Martínez Niconoff, G. Díaz González, P. Martínez Vara, J. Silva Barranco and J. Munoz-Lopez (May 29th 2013). Bifurcation Effects Generated with Holographic Rough Surfaces, Holography - Basic Principles and Contemporary Applications, Emilia Mihaylova, IntechOpen, DOI: 10.5772/54512. Available from: https://www.intechopen.com/books/holography-basic-principles-and-contemporary-applications/bifurcation-effects-generated-with-holographic-rough-surfaces

[26] L. V. Hau et al., Nature 397, 594 (1999).

[27] Carusotto I, Hu SX, Collins LA, Smerzi A. Phys Rev Lett. 2006 Dec 31;97(26):260403. Epub 2006 Dec 27.

[28] Guggenheimer, Heinrich (1977), Differential Geometry, Dover, *ISBN 0-486-63433-7*.

[29] Wikipedia contributors. (2019, August 16). Frenet–Serret formulas. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 07:10, September 12, 2019, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Frenet%E2%80%93Serret_formulas&oldid=911100660