Instituto Nacional de Astrofísica, Optica y Electrónica.

Teorema de *Van Cittert-Zernike* para campos plasmónicos

Por

Lic. Marco Antonio Torres Rodríguez

Tesis para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN ÓPTICA

Agosto 2014

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff, INAOE
Dr. Javier Muñoz López, INAOE

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Coordinación de óptica

Teorema de van Cittert-Zernike para campos plasmónicos

Tesis

Para obtener el grado de Maestro en ciencias con especialidad en Óptica

Presenta

Lic. Marco Antonio Torres Rodríguez

Directores de tesis

Dr. Gabriel Martínez Niconoff y Dr. Javier Muñoz López

A Claudia Iris Rodríguez Fernández De Lara, Marco Antonio Torres Jiménez, Claudia Iris Torres Rodríguez, Carlos Villa Jiménez, Ana Luz Guzmán Figueroa.
Por el tiempo que me han apoyado y estado conmigo
Y por el amor que he recibido de ustedes.

En memoria de Ernesto Rodríguez Rodríguez

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres; Claudia Iris Rodríguez Fernández De Lara y Marco Antonio Torres Jiménez, por el apoyo, amor y confianza que durante toda mi vida me han brindado. A mi hermana Claudia Iris Torres Rodríguez y su esposo Carlos Villa Jiménez, por la ayuda que me han brindado y su amor. A mi abuela Iris Fernández De Lara Granada por compartir conmigo muchos momentos inolvidables y el apoyo que me da. A mi novia Ana Luz Guzmán Figueroa, porque el tiempo que ha estado conmigo es sincero, por su apoyo y amor incondicional, sobre todo en los momentos más difíciles. A mis hermanos Antonio Sabugal, Miguel Gracia y Ari Tenorio, que aunque no compartimos sangre son como de mi familia. A mis compañeros de generación en especial a Hernando, Memo e Irán, por compartir excelentes momentos. A mi profesor Dr. Gustavo Rodríguez Zurita porque su instrucción es responsable de que haya llegado a este momento. A mi asesor de tesis de maestría Dr. Gabriel Martínez Niconoff, por el tiempo dedicado hacia mí, por compartir todos sus conocimientos conmigo y por la amabilidad que siempre me ha mostrado. A mi co-asesor de tesis de maestría Dr. Javier Muñoz López, por darme ánimos desde los primeros momentos de mi maestría, por su total apoyo y la disposición de trabajar conmigo en cada momento. A CONACYT por la asignación de beca, que permitió el desarrollo de esta tesis.

INDICE

1. Introducción

En los últimos años el desarrollo de la óptica plasmónica ha tenido un avance altamente significativo por las potenciales aplicaciones que ofrece tales como; el desarrollo de metamateriales, espectroscopia ramman sintonizable, pinzas plasmónicas e implementación de guias ópticas plasmónicas, así como el desarrollo de sensores plasmónicos, en particular los sensores de hidrocarburos y de hidrógeno [1].

En el presente trabajo de tesis se establecen los fundamentos de óptica plasmónica y se estudian los modelos de polarización parcial, el tratamiento se extiende a la descripción de los efectos de coherencia parcial plasmónica, lo cual permite establecer el Teorema de Van Cittert-Zernike plasmónico. De esta forma, se establece una analogía entre óptica para ondas homogéneas con el estudio de los campos plasmónicos. Un tópico de gran interés es la posibilidad de síntesis de las singularidades de polarización plasmónica, el cual ofrece aplicaciones para el desarrollo de pinzas plasmónicas. Las singularidades se generan por el hecho de que las correlaciones en amplitud de un campo plasmónico se propagan como una onda. Las singularidades se pueden encontrar desde la función de fase cuyo estudio tiene como soporte teórico el método de fase estacionaria.

Una contribución importante del trabajo de tesis consiste en encontrar la ecuación diferencial que nos describe la geometría asociada a las singularidades plasmónicas.

Para la descripción de los efectos de polarización parcial plasmónica se establece una analogía con los modelos de polarización para campos electromagnéticos propagándose en el espacio libre. Y para establecer el teorema de Van Cittert-Zernike plasmónico se traslada la teoría de coherencia parcial, así como, la propagación de campos electromagnéticos correlacionados al ambiente plasmónico. Un resultado que se prueba, es que los plasmones elementales no son susceptibles de ser polarizables, sin embargo, el campo asociado a la interferencia permite inducir efectos de polarización, cuyo análisis se genera mediante la proyección sobre tres planos mutuamente perpendiculares, lo cual permite establecer un conjunto de parámetros de Stokes asociados a cada plano. Se encuentra la representación de los parámetros de Stokes para campos plasmónicos completamente coherentes y se extienden para campos interferidos parcialmente coherentes y polarizados. Dichas representaciones permiten establecer los fundamentos de la teoría de coherencia plasmónico por medio de la matriz de coherencia en donde cada término de dichas matrices son las correlaciones de los campos eléctricos constituyentes. Para la descripción de las correlaciones plasmónicas se utiliza el modelo del espectro angular, con lo cual se prueba que las correlaciones se propagan como una onda. Lo cual nos da la pauta para analizar los términos de la matriz de coherencia y mostrar que sus elementos correspondientes tienen estructura de transformada de *Fourier* lo cual corresponde con el teorema de *Van Cittert-Zernike*, el estudio se extiende a la propagación de la matriz de coherencia a diferentes puntos de la superficie metálica.

1.1 Objetivo general

El objetivo de este trabajo de tesis, es dar una descripción de los efectos de polarización utilizando como estructura prototipo los campos plasmónicos interferidos, además dar una descripción de la teoría de coherencia parcial para estos campos. De esta forma establecer el teorema de *Van Cittert-Zernike* para campos plasmónicos.

1.2 Estructura de la tesis

Para cumplir con el objetivo anteriormente descrito, la estructura de la tesis es la siguiente. En el capítulo 2 se establecen los conceptos fundamentales de polarización, y se establece la teoría de coherencia parcial utilizando la estructura modal de un campo plasmónico. En el capítulo 3 se describe la amplitud plasmónica generada por la interferencia entre dos modos plasmónicos y se establece una analogía con la teoría clásica de polarización. De esta forma, se identifican los parámetros susceptibles de ser controlados para implementar los procesos de polarización parcial plasmónica. Mediante la proyección del campo eléctrico sobre tres planos mutuamente perpendiculares se establece un conjunto de parámetros de Stokes, los cuales llevan la información de los efectos de coherencia parcial los se ven reflejados en las trayectorias de polarización. El modelo incluye los casos de campos plasmónicos totalmente coherentes y otro conjunto de parámetros de Stokes para campos plasmónicos parcialmente polarizados y coherentes. En el capítulo 4 se establece una matriz de coherencia cuyos elementos tienen estructura de transformada de Fourier lo cual constituye el teorema de *Van Cittert-Zernike* plasmónico. Se establece una matriz generalizada de coherencia cuyo análisis se siguen dos caminos, una es mediante la propagación de correlaciones y la otra en un contexto puramente matemático mediante el producto directo entre matrices. En ambos casos se encuentra la matriz de coherencia generalizada. Finalmente en el capítulo 5 se enuncian las conclusiones generales y se bosqueja el trabajo a futuro. En esta tesis se incluyen 6 apéndices los cuales permiten hacer fluida la lectura sin descuidar el formalismo teórico.

2. Conceptos teóricos fundamentales

En este capítulo se establecen los fundamentos de óptica plasmónica haciendo énfasis en la descripción de un modo plasmónico y se utiliza para establecer el modelo del espectro angular plasmónico. Se describen los conceptos de polarización y de teoría de coherencia parcial y se encuentra la estructura de la matriz de coherencia. Finalmente se describen los conceptos de singularidades ópticas.

2.1 Modos Plasmónicos elementales

En esta sección se presenta una descripción general de que es un plasmón superficial los cuales se utilizarán posteriormente para el estudio de polarización plasmónica. Estamos interesados en la descripción de ondas propagándose sobre una superficie metálica utilizando como medio de transporte los electrones libres los cuales se interpretan como un "mar" de electrones que corresponde a un plasma. La onda generada se conoce como un plasmón superficial [2]. Históricamente el estudio de plasmones se generó en física del estado sólido, interpretando al plasmón como la cuasipartícula resultado de la cuantización de las oscilaciones del plasma, de la misma forma que un fotón o un fonón son cuantizaciones de ondas electromagnéticas y mecánicas. Por tanto, los plasmones son oscilaciones de la densidad del gas de Fermi (gas de electrones libres [2]), usualmente a frecuencias ópticas. También pueden interactuar con un fotón para crear una tercera cuasipartícula llamada polaritón de plasma. El estudio de los plasmones superficiales se puede obtener desde las ecuaciones de *Maxwell,* lo cual es el punto de vista que se sigue en este trabajo de tesis. Los plasmones son importantes para describir las propiedades ópticas de los metales. Los plasmones de superficie son ondas no homogéneas cuya propagación está confinada a la superficie metálica [3], esto es, ocurren en la interfaz entre un dieléctrico y un metal. Permiten explicar las anomalías en la difracción de una red de difracción metálica (Anomalía de *Wood*) y también son útiles en la espectroscopia *Ramman* de superficie entre otras aplicaciones. La resonancia de plasmones superficiales es utilizada en bioquímica [2].

Muchas investigaciones se han centrado en el rango de las microondas porque es posible diseñar mecánicamente superficies materiales con patrones del orden de algunos pocos centímetros que son útiles para estas longitudes de ondas. En cambio, crear plasmones superficiales en el rango óptico implica producir superficies con geometrías menores a los 400 nm.

Como se mencionó anteriormente los plasmones se propagan en la interface entre dos medios distintos, uno es un dieléctrico con una permitividad ε_1 y el otro es un metal con permitividad ε_2 , como se muestra en la Fig.2.1. Se desea una onda en una interface metal-dieléctrico con dirección de propagación z y un coeficiente de atenuación α en la dirección x.

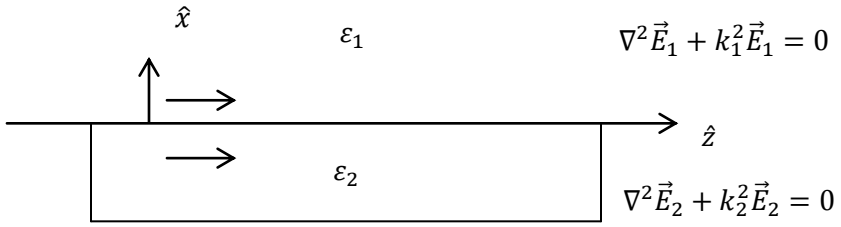

Fig.2.1: Esquema de dos campos propagándose en dirección $\hat{z}$, uno propagándose en un dieléctrico con permitividad ε_1, mientras que el otro en un metal con permitividad ε_2.

Los dos campos electromagnéticos en cada medio se modelan como [2]:

$$\vec{E}_1(x,z) = \exp\{i\beta_1 z\}\ \exp\{-\alpha_1 x\}\left(a_1\hat{\imath} + b_1\hat{k}\right) \tag{2.1.1}$$

$$\vec{E}_2(x,z) = \exp\{i\beta_2 z\}\ \exp\{-\alpha_2 x\}\left(a_2\hat{\imath} + b_2\hat{k}\right); \tag{2.1.2}$$

la estructura anterior satisface la ecuación de *Helmholtz* .En donde β_1 es el término que describe la propagación de la onda plasmónica y se conoce como la relación de dispersión del campo propagándose en el dieléctrico y β_2 la relación de dispersión del campo propagándose en el metal, α_i es el factor de decaimiento, $a_i\ y\ b_i$ son las amplitudes de los campos en las componentes en las direcciones $\hat{\imath}$ y $\hat{k}$ respectivamente. $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ están relacionados por las condiciones de frontera entre el dieléctrico y el metal [2].
El problema consiste en relacionar $\beta_i, \alpha_i, a_i, b_i$con las propiedades del medio. Usando las condiciones de frontera tenemos que [4]:

$$E_{1T} = E_{2T}\ \ ;\quad \text{en } x = 0 \text{ y } z \text{ arbitrario,}$$

entonces:

$$b_1 = b_2\ . \tag{2.1.2a}$$

De la condición de frontera para las componentes normales tenemos que:

$$\varepsilon_1 E_{1N} = \varepsilon_2 E_{2N}\ \ , \tag{2.1.2b}$$

de donde:

$$\varepsilon_1 a_1 = \varepsilon_2 a_2\ \ , \tag{2.1.2c}$$

por lo tanto:

$$a_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a_1. \tag{2.1.2d}$$

La relación (2.1.2d) nos dice que las componentes normales de los campos están relacionadas debido a que estamos estudiando una interface dieléctrico-metal y es natural que sus amplitudes en la dirección normal se mantengan solo que estando una de ellas escalada por las permitividades de los campos.

De las condiciones de frontera y de condición de amarre [2], las relaciones de dispersión para cada campo β_1 y β_2 son iguales en la interface ya que de lo contrario un campo se atrasaría respecto del otro, es decir, llevan la misma velocidad.
Ahora bien, la onda superficial en cada medio toma la forma:

$$\vec{E}_1(x,z) = \exp\{i\beta z\}\ \exp\{-\alpha_1 x\}\left(a\hat{\imath} + b\hat{k}\right) \tag{2.1.3}$$

$$\vec{E}_2(x,z) = \exp\{i\beta z\}\ \exp\{-\alpha_2 x\}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a\hat{\imath} + b\hat{k}\right). \tag{2.1.4}$$

Supongamos medios libres de carga, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad y \quad \nabla \cdot \vec{E}_2 = 0; \tag{2.1.5}$$

entonces tenemos que:

$$(-a\alpha_1 + ib\beta)\exp\{-\alpha_1 x\}\ \exp\{i\beta z\}\ = 0\ , \tag{2.1.6}$$

$$\left(-a\alpha_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + ib\beta\right)\exp\{-\alpha_2 x\}\ \exp\{i\beta z\}\ = 0\ , \tag{2.1.7}$$

de las ecuaciones (2.1.6,2.1.7) encontramos que:

$$\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha_1\ \ , \tag{2.1.8}$$

usando la ecuación (2.1.8) en la ecuación (2.1.7) encontramos que el campo $\vec{E}_2$ se escribe de la siguiente forma:

$$\vec{E}_2(x,z) = \exp\{i\beta z\}\ \exp\left\{-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha x\right\}\ \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a\hat{\imath} + b\hat{k}\right). \tag{2.1.9}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.9) en la ecuación de *Helmholtz* y haciendo primero el análisis para la componente en dirección $\hat{\imath}$ se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial z^2} + k_1^2 \vec{E}_1 = 0\,, \quad k_1^2 = k_0^2 \varepsilon_1 \tag{2.1.10}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial z^2} + k_2^2 \vec{E}_2 = 0\,, \quad k_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 \tag{2.1.11}$$

entonces:

$$\alpha^2 - \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_2 = 0 \tag{2.1.12}$$

Para la componente en dirección $\hat{k}$ del campo $\vec{E}_2$ tenemos que:

$$\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \alpha^2 - \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_2 = 0\,, \tag{2.1.13}$$

Sustituyendo la primera ecuación de las ecuaciones (2.1.12) en la (2.1.13) podremos obtener el resultado deseado.

$$\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} (\beta^2 - k_0^2 \varepsilon_1) - \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_2 = 0\ , \tag{2.1.14}$$

entonces:

$$\beta^2 \left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - 1 \right) + k_0^2 \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} \right) = 0 \tag{2.1.15}$$

de aquí que:

$$\beta^2 = \frac{k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} - \varepsilon_2 \right)}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - 1 \right)}\,, \tag{2.1.16}$$

haciendo el álgebra correspondiente con la ecuación (2.1.16) el resultado queda como:

$$\beta^2 = \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) k_0^2 \quad \text{con} \ \ k_0 = \frac{\omega}{c} \tag{2.1.17}$$

por lo tanto:

$$\beta = k_0 \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2}\,. \tag{2.1.18}$$

La ecuación (2.1.18) es la relación de dispersión la cual es continua sobre la interface ya que de no serlo los campos tendrían entre ellos un retraso [2].
Supongamos que $\varepsilon_1 > 0$, para metales tenemos que $\varepsilon_2 = \xi + i\eta$ y si $\xi < 0$ y $|\xi| > \varepsilon_1$ la onda resultante adquiere la forma de una onda plasmónica. Se tiene entonces que β es un número complejo dadas las propiedades de los materiales.
Se cumple que $\left|\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}\right| > 1$ entonces $|\beta| > \frac{w}{c} = k_0$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ entonces $\beta > k_0$.
De lo anteriormente expuesto se tiene que el plasmón es una onda no radiativa y por lo tanto el proceso inverso de una onda con vector de onda k_0 incidiendo sobre una superficie metálica plana no puede excitar al plasmón. Una consecuencia de que la relación de dispersión sea compleja, es que la distancia de propagación en medios semi-infinitos es corta, aproximadamente $10\ \mu m$, lo cual es una limitante para la implementación de la óptica plasmónica. Este último punto se puede resolver utilizando películas delgadas de espesor del orden de $20 - 100\ nm$

2.2 Polarización

Polarización se define como el estudio de la trayectoria que describe el campo eléctrico como función de amplitudes y fases relativas, es una característica que presentan las ondas vectoriales [1,6]. La onda de interés propagándose en la dirección z es de la forma:

$$E = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} , \tag{2.2.1}$$

dónde:

$$E_x = E_{0x}\exp\{i(kz - \omega t)\} \quad \text{y} \quad E_y = E_{0y}\exp\{i(kz - \omega t + \delta)\} \tag{2.2.2}$$

La trayectoria que sigue el campo eléctrico es una elipse en un plano perpendicular a la dirección de propagación. La ecuación para E_y se puede escribir de una forma equivalente como sigue:

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(kz - \omega t)\cos\delta - \sin(kz - \omega t)\sin\delta \tag{2.2.3}$$

Desarrollando el álgebra correspondiente se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta - \sin(kz - \omega t)\sin\delta$$

entonces:

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta = -\sin(kz - \omega t)\sin\delta. \tag{2.2.4}$$

Se tiene también que:

$$\sin(kz - \omega t) = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.2.5}$$

sustituyendo la ecuación (2.2.5) en (2.2.4) nos lleva a:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]^{1/2} (\sin\delta)^2. \tag{2.2.6}$$

Finalmente se obtiene:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\delta = (\sin\delta)^2. \tag{2.2.7}$$

Esta es la ecuación de una elipse cuyos ejes forman un ángulo α con el sistema coordenado (E_x, E_y) que satisface [5]:

$$\tan 2\,\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\delta}{{E_{0x}}^2 - {E_{0y}}^2}, \tag{2.2.8}$$

cuando $\alpha = 0$ o $\delta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$, la ecuación (2.2.8) toma la forma canónica de una elipse:

$$\frac{{E_x}^2}{{E_{0x}}^2} + \frac{{E_y}^2}{{E_{0y}}^2} = 1. \tag{2.2.9}$$

Además, si $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ la ecuación (2.2.9) se reduce a:

$${E_x}^2 + {E_y}^2 = {E_0}^2, \tag{2.2.10}$$

lo cual nos da una polarización circular. Ahora, si δ es un múltiplo par de π, la ecuación (2.2.7) toma la forma:

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x, \tag{2.2.11}$$

y similarmente para múltiplos impares de π:

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x, \tag{2.2.12}$$

lo cual representa polarización lineal [5].

2.2.1 Parámetros de Stokes

Hasta ahora hemos considerado la luz polarizada en términos del campo eléctrico cuya representación más general es la de la luz elíptica. Las medidas hechas en la práctica son generalmente promedios sobre intervalos de tiempo comparativamente largos, por lo que sería más conveniente introducir algunos parámetros alternativos para describir la polarización, a estos parámetros se les conoce como *parámetros de Stokes,* que pueden determinarse experimentalmente.
Los parámetros de Stokes en términos de las amplitudes y fases relativas están dados por las siguientes ecuaciones [8]:

$$S_0 = {E_{0x}}^2 + {E_{0y}}^2 \tag{2.2.13}$$

$$S_1 = {E_{0x}}^2 - {E_{0y}}^2 \tag{2.2.14}$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y}\cos\delta \tag{2.2.15}$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y}\sin\delta \tag{2.2.16}$$

Esto para luz monocromática, además las amplitudes y la fase relativa δ entre los campos son independientes del tiempo, donde S_0 representa la energía de la onda, el parámetro S_1 mide la asimetría en la energía entre los campos constituyentes, S_2 y S_3 son dos parámetros complementarios que se relacionan con la orientación del eje de la elipse. Podemos identificar los siguientes casos:

1) $\delta = 0$.

Entonces, $S_2 = 2E_{0x}E_{0y} > 0$ y $S_3 = 0$.
Por lo tanto se tiene polarización lineal

2) $\delta = \pi$.

Entonces, $S_2 = 2E_{0x}E_{0y} < 0$ y $S_3 = 0$.
Por lo tanto se tiene polarización lineal, el valor negativo de S_2 distingue los dos modos de polarización lineal.

3) $\delta = \pi/2$.

Entonces, $S_2 = 0$ y $S_3 = 2E_{0x}E_{0y} > 0$.
Por tanto se tiene polarización elíptica izquierda, el valor positivo de S_3 indica que el sentido es izquierdo. Si $S_1 = 0$ la polarización es circular.

4) $\delta = 3\pi/2$.

Entonces, $S_2 = 0$ y $S_3 = -2E_{0x}E_{0y} < 0$.
Por tanto se tiene polarización elíptica derecha, el signo negativo de S_3 indica que el sentido es a la derecha. Si $S_1 = 0$ la polarización es circular.

Ahora bien, en el caso general de radiación no monocromática se miden los valores promedio, sobre tiempo o frecuencia de los parámetros de Stokes. Entonces los parámetros de Stokes en este caso son [5,8]:

$$\mathrm{S}_0 =< {E_{0x}}^2 > +< {E_{0y}}^2 > \tag{2.2.17}$$

$$\mathrm{S}_1 =< {E_{0x}}^2 > -< {E_{0y}}^2 > \tag{2.2.18}$$

$$\mathrm{S}_2 =< 2E_{0x}E_{0y}\cos\delta > \tag{2.2.19}$$

$$\mathrm{S}_3 =< 2E_{0x}E_{0y}\sin\delta > \tag{2.2.20}$$

Si el haz no está polarizado $< {E_{0x}}^2 >=< {E_{0y}}^2 >$, además E_{0x} y E_{0y} no tienen cero como promedio ya que el cuadrado de la amplitud siempre es positivo, entonces, S_0 es igual y $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2 = \mathrm{S}_3 = 0$. Los últimos dos parámetros promedian cero independientemente de las amplitudes, además, es común y conveniente normalizar los parámetros dividiendo cada uno por S_0. El conjunto de parámetros de Stokes para luz natural es $(1,0,0,0)$, si la luz esta polarizada horizontalmente los parámetros normalizados son $(1,1,0,0)$, similarmente para polarización vertical los parámetros son $(1,-1,0,0)$, para luz circular derecha $(1,0,0,1)$, para luz circular izquierda $(1,0,0,-1)$. Cuando la luz es completamente polarizada los parámetros cumplen con la siguiente relación:

$${S_0}^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2 \,. \tag{2.2.21}$$

Además, para luz parcialmente polarizada el grado de polarización está dado por la ecuación siguiente:

$$V = \frac{\left({S_1}^2+{S_2}^2+{S_3}^2\right)^{1/2}}{S_0} \tag{2.2.22}$$

2.3 Teoría de coherencia

En esta sección se describe la teoría de coherencia para el caso vectorial. Entendemos a la coherencia como una medida de la similitud que tiene un campo electromagnético consigo mismo en diferentes puntos del espacio o consigo en un mismo punto del espacio pero en diferentes tiempos. Usamos la representación matricial para identificar la matriz de coherencia, con esto se hace el análisis de la propagación de correlaciones que nos lleva finalmente al teorema de *Van Cittert-Zernike*. También se mencionan algunos conceptos sobre singularidades de polarización.

2.3.1 Teoría de coherencia: caso vectorial

Para describir la teoría de coherencia vectorial hacemos uso del sistema esquematizado en la Fig. 2.2 el cual tiene una fuente primaria extendida. De un punto de la fuente emerge el campo, el cual se propaga en distintas direcciones. Los campos en los puntos p y q tienen asociados un estado de polarización, justo después de los puntos mencionados colocamos un analizador el cual nos permitirá obtener las componentes del campo y sus estados de polarización en el punto s.

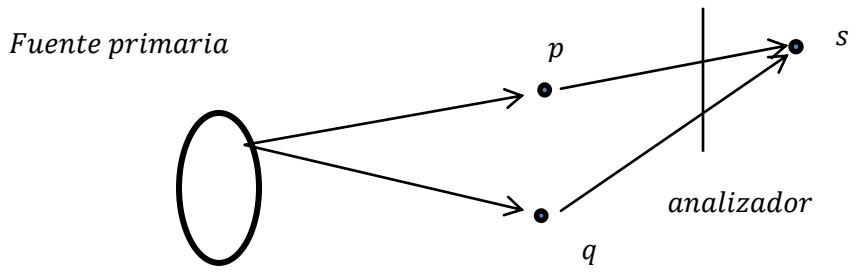

Fig. 2.2: Esquema de la fuente primaria extendida de donde emerge un campo eléctrico hacia los puntos p y q, para después propagarse a través de un analizador y obtener el estado de polarización del campo en el punto s.

Los campos en los puntos p y q están dados por:

$$\vec{E}_i(p) = \hat{\imath} a_i \exp\{i\delta_i\} \exp\left\{ikr_{ip}\right\} + \hat{\jmath} b_i \exp\{i\gamma_i\} \exp\left\{ikr_{ip}\right\}$$
$$\vec{E}_i(q) = \hat{\imath} a_i \exp\{i\delta_i\} \exp\left\{ikr_{iq}\right\} + \hat{\jmath} b_i \exp\{i\gamma_i\} \exp\left\{ikr_{iq}\right\}, \tag{2.3.1}$$

dónde a_i y b_i son las amplitudes de cada componente en los puntos p y q respectivamente, γ_i y δ_i son las fases en cada componente, r_{ip} y r_{iq} son los vectores de posición que hay entre puntos de la fuente y los puntos p y q.

El campo total de la fuente primaria en los puntos p y q se expresa como:

$$\vec{E}_T(p) = \sum_{i=1}^{N} (\hat{\imath} a_i \exp\{i\delta_i\} + \hat{\jmath} b_i \exp\{i\gamma_i\}) \exp\{ikr_{ip}\} = \hat{\imath}\phi_1 + \hat{\jmath}\psi_1$$

$$\vec{E}_T(q) = \sum_{j=1}^{N} (\hat{\imath} a_j \exp\{i\delta_j\} + \hat{\jmath} b_j \exp\{i\gamma_j\}) \exp\{ikr_{jq}\} = \hat{\imath}\phi_2 + \hat{\jmath}\psi_2 \,. \tag{2.3.2}$$

dónde:

$$\phi_1 = a_i \exp\{i\delta_i\} \exp\{ikr_{ip}\}$$

$$\psi_1 = b_i \exp\{i\gamma_i\} \exp\{ikr_{ip}\}\,, \tag{2.3.2a}$$

que son las expresiones para cada componente del campo en el punto p.
De manera similar tenemos:

$$\phi_2 = a_j \exp\{i\delta_j\} \exp\{ikr_{jq}\}$$

$$\psi_2 = b_j \exp\{i\gamma_j\} \exp\{ikr_{jq}\}\,, \tag{2.3.2b}$$

que son las expresiones para cada componente del campo en el punto q.

El campo total en el punto s se expresa como:

$$\vec{E}(s) = \phi_1 \cos\theta \exp\{ikr_{ps}\} + \psi_1 \sin\theta \exp\{ikr_{ps}\}$$

$$+\phi_2 \cos\theta \exp\{ikr_{qs}\} + \psi_2 \sin\theta \exp\{ikr_{qs}\}. \tag{2.3.3}$$

La intensidad en el punto s es:

$$I(s) = E(s)E^*(s) = \phi_1\phi_1^*(\cos\theta)^2 + \phi_1\psi_1^*\sin\theta\cos\theta + \phi_1\phi_2^*(\cos\theta)^2\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\}$$

$$+\phi_1\psi_2^*\cos\theta\sin\theta\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\} + \psi_1\phi_1^*\cos\theta\sin\theta$$

$$+\psi_1\psi_1^*(\sin\theta)^2 + \psi_1\phi_2^*\sin\theta\cos\theta\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\}$$

$$+\psi_1\psi_2^*(\sin\theta)^2\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\} + \phi_2\phi_1^*(\cos\theta)^2\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\}$$

$$+\phi_2\psi_1^*\sin\theta\cos\theta\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\} + \phi_2\phi_2^*(\cos\theta)^2$$

$$+\phi_2\psi_2^*\cos\theta\sin\theta + \psi_2\phi_1^*\cos\theta\sin\theta\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\}$$

$$+\psi_2\psi_1^*(\sin\theta)^2\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\} + \psi_2\phi_2^*\cos\theta\sin\theta$$

$$+\psi_2\psi_2^*(\sin\theta)^2 \qquad (2.3.4)$$

Esta relación es más simple de manejar si se expresa en términos de matrices. La matriz de coherencia para un campo electromagnético parcialmente coherente se expresa como [8]:

$$J = \begin{pmatrix} \langle|E_1|^2\rangle & \langle E_1E_2^*\rangle \\ \langle E_1E_2^*\rangle & \langle|E_2|^2\rangle \end{pmatrix}. \qquad (2.3.4.A)$$

Al hacer la representación matricial de la ecuación (2.3.4) en la forma de la matriz (2.3.4.A) podremos identificar la matriz de coherencia generalizada como:

$$I(s) = T \cdot J_g \cdot T^{\intercal *} \quad , \qquad (2.3.5)$$

dónde T es una matriz renglón:

$$T = (\cos\theta\exp\{ikr_{ps}\} \quad \sin\theta\exp\{ikr_{ps}\} \quad \cos\theta\exp\{ikr_{qs}\} \quad \sin\theta\exp\{ikr_{qs}\}) \qquad (2.3.6)$$

$T^{\intercal *}$ es una matriz columna:

$$T^{\intercal *} = \begin{pmatrix} \cos\theta\exp\{-ikr_{ps}\} \\ \sin\theta\exp\{-ikr_{ps}\} \\ \cos\theta\exp\{-ikr_{qs}\} \\ \sin\theta\exp\{-ikr_{qs}\} \end{pmatrix} \quad , \qquad (2.3.7)$$

y el símbolo $\intercal *$ significa que la matriz es traspuesta conjugada.

La matriz J_g es llamada matriz de coherencia generalizada y nos dice como se mezclan los campos en el punto s, los paréntesis triangulares representan los valores promedios dado que las amplitudes son variables aleatorias.
La matriz J_g se expresa como:

$$J_g = \begin{pmatrix} \langle|\phi_1|^2\rangle & \langle\phi_1\psi_1^*\rangle & \langle\phi_1\phi_2^*\rangle & \langle\phi_1\psi_2^*\rangle \\ \langle\psi_1\phi_1^*\rangle & \langle|\psi_1|^2\rangle & \langle\psi_1\phi_2^*\rangle & \langle\psi_1\psi_2^*\rangle \\ \langle\phi_2\phi_1^*\rangle & \langle\phi_2\psi_1^*\rangle & \langle|\phi_2|^2\rangle & \langle\phi_2\psi_2^*\rangle \\ \langle\psi_2\phi_1^*\rangle & \langle\psi_2\psi_1^*\rangle & \langle\psi_2\phi_2^*\rangle & \langle|\psi_2|^2\rangle \end{pmatrix} . \tag{2.3.8}$$

Reescribiendo la matriz J_g tenemos que:

$$J_g = \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix} \tag{2.3.9}$$

Donde A, B, C , C^* son matrices compuestas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} \langle|\phi_1|^2\rangle & \langle\phi_1\psi_1^*\rangle \\ \langle\psi_1\phi_1^*\rangle & \langle|\psi_1|^2\rangle \end{pmatrix} . \tag{2.3.10}$$

La matriz A contiene la información de los parámetros de coherencia, parámetros de Stokes en el punto p.

$$B = \begin{pmatrix} \langle|\phi_2|^2\rangle & \langle\phi_2\psi_2^*\rangle \\ \langle\psi_2\phi_2^*\rangle & \langle|\psi_2|^2\rangle \end{pmatrix}, \tag{2.3.11}$$

la matriz B lleva la misma información solo que en el punto q.

$$C = \begin{pmatrix} \langle\phi_1\phi_2^*\rangle & \langle\phi_1\psi_2^*\rangle \\ \langle\psi_1\phi_2^*\rangle & \langle\psi_1\psi_2^*\rangle \end{pmatrix} \ y \ \ C^* = \begin{pmatrix} \langle\phi_2\phi_1^*\rangle & \langle\phi_2\psi_1^*\rangle \\ \langle\psi_2\phi_1^*\rangle & \langle\psi_2\psi_1^*\rangle \end{pmatrix}, \tag{2.3.12}$$

Llevan la información de la *correlación de los parámetros de* Stokes entre p y q.

En el caso en que ψ_1, ϕ_1 sean funciones estadísticamente independientes, tenemos que:

$$\langle\phi_1\psi_1^*\rangle = \langle\phi_1\rangle\langle\psi_1^*\rangle . \tag{2.3.13}$$

2.3.2 Propagación de correlaciones

En esta sección se muestra, que la función de correlación en amplitudes de un campo electromagnético, presenta características ondulatorias, esto nos permite establecer un modelo de coherencia parcial conservando la naturaleza vectorial del campo electromagnético.
De la Fig. 2.2, igual que la sección anterior,

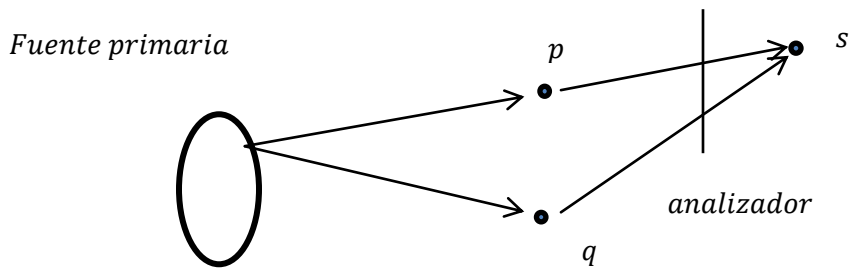

Fig. 2.2: Esquema de la fuente primaria extendida de donde emerge un campo eléctrico hacia los puntos p y q, para después propagarse a través de un analizador y obtener el estado de polarización del campo en el punto s.

el campo en el punto p es $\vec{E}_1$ y el campo en el punto q es $\vec{E}_2$. La representación para cada componente de acuerdo al modelo de espectro angular es:

$$\vec{E}_1 = \hat{\imath} \iint A(u,v)\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}\,dudv$$

$$+\hat{\jmath} \iint B(u,v)\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}\,dudv \qquad (2.3.14)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{\imath} \iint A(u',v')\exp\{i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}\,du'dv'$$

$$+\hat{\jmath} \iint B(u',v')\exp\{i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}\,du'dv'\ , \qquad (2.3.15)$$

donde $A(u,v), B(u,v)$ son las amplitudes de cada componente en términos de las frecuencias espaciales, que contribuyen a generar el campo en el punto p. De manera análoga, $A(u',v'), B(u',v')$ son las amplitudes que genera el campo en el punto q.
Los procesos de coherencia parcial se describen en términos de las correlaciones de los campos, los cuales están definidos como:

$$\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle = E_{12} = \iint \iint \langle A(u,v) A^*(u',v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}$$

$$\times \ \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} du dv du' dv'$$

$$+ \iint \iint \langle B(u,v) B^*(u',v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}$$

$$\times \ \exp\{i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} du dv du' dv'$$

$$+2Re \iint \iint \langle A(u,v) B^*(u',v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}$$

$$\times \ \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} du dv du' dv' \quad , \qquad (2.3.16)$$

en donde los paréntesis triangulares significan un promedio estadístico.

En el *apéndice A*, se demuestra que la función de correlación entre los campos correspondientes satisface la ecuación de *Helmholtz*, $\nabla^2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle + k^2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle = 0$.
Sabemos que la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \ , \qquad (2.3.17)$$

tiene como solución:

$$\phi = \psi \exp\{i\omega t\} \ , \qquad (2.3.18)$$

En nuestro caso, si la función de correlación se multiplica por un término armónico en términos de una nueva variable τ, se define una nueva función que se conoce como la función de coherencia mutua dada por:

$$\Gamma = \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle \exp\{i\omega\tau\} \ .$$

Entonces es claro que satisface una ecuación tipo onda:

$$\nabla^2 \Gamma = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tau^2} \qquad (2.3.19)$$

Donde la interpretación física para τ es un tiempo de retraso entre los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$.
Interpretando los términos de la matriz (2.3.9) en términos de las funciones de correlación, restringiéndonos solo al primer término de la matriz (C de 2.3.12) tenemos que este toma la forma:

$$\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = \iint \iint \langle A(u,v) A^*(u',v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}$$

$$\times \ \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} du dv du' dv' \qquad (2.3.20)$$

Definiendo $x' = x - x_0$:

$$\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = \iint \iint \iiint \langle A(u,v) A^*(u',v') \rangle \exp\{i2\pi x(u-u')\} \exp\{i2\pi x_0 u'\} \exp\{i2\pi y(v - v')\}$$

$$\times \ \exp\{i2\pi y_0 v'\} \exp\{i2\pi z(p-p')\} \exp\{i2\pi z_0 p'\} dx dy dz du dv du' dv'$$

$$= \iint \iint \langle A(u,v) A^*(u',v') \rangle \, \delta(u-u') \exp\{i2\pi x_0 u'\} \delta(v-v')$$

$$\times \ \exp\{i2\pi y_0 v'\} \delta(p-p') \exp\{i2\pi z_0 p'\} du dv du' dv'$$

$$= \iint \langle |A(u,v)|^2 \rangle \exp\{i2\pi(x_0 u + y_0 v + z_0 p)\} du dv$$

$$= K(x_0, y_0, z_0) = K(x - x', y - y', z - z') \quad , \qquad (2.3.21)$$

el término $\langle |A(u,v)|^2 \rangle$ es llamado el espectro de potencias. Si derivamos la función de correlación dada por la expresión (2.3.21) sabemos que cumplirá con la ecuación de *Helmholtz* (APENDICE A'). Se puede realizar el mismo procedimiento para la representación de todos los términos de la matriz.

Cuando la correlación se calcula sobre un plano se tiene que $z_0 = 0$, entonces la expresión (2.3.21) toma la forma de la transformada de Fourier del espectro de potencias. Recalcamos que heredado de las propiedades de la δ de *Dirac* se tiene que solo se correlacionan los campos que se propagan en la misma dirección.

Se tiene que la expresión para todas las correlaciones es:

$$\langle \phi_i \phi_j^* \rangle = \iint A(u,v) B^*(u,v) \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \, du dv = w(x,y,z,\gamma) \qquad (2.3.22)$$

Esta última ecuación es la función de densidad espectral para una sola frecuencia. Si obtenemos la transformada de *Fourier* en la variable τ, tenemos:

$$F\{w(x,y,z,\gamma)\} = \int w(x,y,z,\gamma) \exp\{i2\pi\gamma\tau\} \, d\gamma = \Gamma(x,y,z,\tau) \qquad (2.3.23)$$

donde $\tau = t_1 - t_2$.

La ecuación (2.3.23) es la función de coherencia mutua considerando todas las frecuencias. Tenemos que expresión general para cada término de la matriz de coherencia está dada por:

$$\Gamma_{ij} = \iiint A_i(u,v)B_j{}^*(u,v)\exp\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\}\, dudvd\gamma \quad , \qquad (2.3.24)$$

dónde el carácter vectorial está implícito en cada componente de la matriz.
Un análisis en detalle se describe en el apéndice A'', lo cual corrobora que las correlaciones se propagan con un carácter ondulatorio.

2.3.3 Descripción de singularidades

Asociando principios extremales a una función de fase, se describe la solución singular para la función de correlación, además se utilizará el método de fase estacionaria para evaluar las integrales oscilantes.
Supongamos la siguiente expresión:

$$I = \int g(x,y)\exp\{ikf(x,y)\}\, dxdy \quad , \qquad (2.3.25)$$

dónde $g(x,y)$ es una amplitud cuyo valor depende del punto que se esté estudiando y $f(x,y)$ es una la función de fase , además ambas funciones son reales.
Sea la expresión (2.3.25) una integral oscilante que varía rápido en su núcleo con respecto de $f(x,y)$, partiremos de esta última integral para introducir el método de fase estacionaria [8]. Supongamos que x_0, y_0 es un punto crítico de $f(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{y=y_0} = 0 \ . \qquad (2.3.26)$$

Haciendo una expansión en serie de potencias a la función $f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{y=y_0}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)\Big|_{y=y_0}(y-y_0)^2$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}(x-x_0)(y-y_0) + \ldots \qquad (2.3.27)$$

El segundo y tercer término de la ecuación (2.3.27) son cero debido a (2.3.26), para simplificar la notación se definen los siguientes términos:

$$a = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)\Big|_{x=x_0} \ , \ b = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)\Big|_{y=y_0} \ , \ c = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \qquad (2.3.27.a)$$

Entonces reescribiendo e introduciendo el desarrollo de $f(x,y)$ en la integral (2.3.25) tenemos que:

$$I \simeq g(x_0,y_0)\exp\{ikf(x_0,y_0)\}$$

$$\times \iint \exp\left\{i\frac{k}{2}[a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2 + 2c(x-x_0)(y-y_0)]\right\} dxdy$$

$$= D \iint \exp\left\{ia\frac{k}{2}\left[(x-x_0)^2 + \frac{b}{a}(y-y_0)^2 + 2\frac{c}{a}(x-x_0)(y-y_0)\right]\right\} dxdy \ ,$$

$con \ \ D = g(x_0,y_0)\exp\{ikf(x_0,y_0)\}$

$$= D \iint \exp\left\{ia\frac{k}{2}\left[\left((x-x_0) + \frac{c}{a}(y-y_0)\right)^2 - \frac{c^2}{a^2}(y-y_0)^2 + \frac{b}{a}(y-y_0)^2\right]\right\} dxdy$$

$$= D \int \left[\int \exp\left\{ia\frac{k}{2}\left((x-x_0) + \frac{c}{a}(y-y_0)\right)^2\right\} dx\right] \exp\left\{-\left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{b}{a}\right)(y-y_0)^2\right\} dy \qquad (2.3.28)$$

Considerando solo los términos dentro de los paréntesis cuadrados, se tiene que la integral toma la forma:

$$\int \exp\left\{ia\frac{k}{2}\left((x-x_0) + \frac{c}{a}(y-y_0)\right)^2\right\} dx = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{ka}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left(\frac{c^2a - ba^2}{a^3}\right)\frac{ka}{2}}}$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{ka}} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2a - ba^2}{a^2}\frac{k}{2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{ka}} \frac{\sqrt{ka}}{\sqrt{\frac{c^2 - ba}{2}}}$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{c^2 - ba}} \qquad (2.3.29)$$

La expresión (2.3.29) se indetermina donde el argumento de la raíz cuadrada es cero [15], esto quiere decir que cuando esto ocurre la integral diverge, lo cual podemos asociar con una

singularidad para integrales oscilantes. Tomamos el denominador de la ecuación (2.3.29) y usando las ecuaciones (2.3.27.a) tenemos que:

$$\sqrt{c^2 - ba} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)\right)} = 0$$

por lo tanto, la singularidad ocurre cuando:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.3.30)$$

Utilizando el análisis descrito en la sección anterior, se pueden asociar con singularidades de polarización

3. Polarización para campos plasmónicos

Los plasmones superficiales elementales (**Sp**) son ondas no homogéneas generadas por oscilaciones coherentes de electrones libres de los metales [2,3]. Una propiedad genérica que presentan los campos vectoriales es la polarización que puede ser entendido como el estudio de la trayectoria que describe el campo eléctrico como una función de la amplitud y la fase relativa en un plano perpendicular a la dirección de propagación [5,6]. Para describir sus propiedades físicas es necesaria una representación vectorial, como consecuencia, las propiedades de polarización son introducidas en una manera similar a las de ondas propagándose en el espacio libre. Sin embargo, se deben notar algunas diferencias físicas, una de ellas es que la trayectoria del campo eléctrico comparte el mismo plano con el vector de *Poynting*. Además, cada componente del campo eléctrico del **Sp** está ligada con las ecuaciones de *Maxwell*, esto significa que no se pueden introducir o manipular términos de fase sobre cada componente, es decir, para los **Sp** los parámetros de polarización están mezclados y la trayectoria no puede ser modificada en el sentido de que no se distingue un parámetro que nos ayude a controlar la polarización del plasmón superficial.

3.1 Descripción de la polarización

En el capítulo anterior hemos descrito a los plasmones elementales, sin embargo, para describir la polarización plasmónica es necesario tener una expresión alterna que nos ayude a entender la idea de la polarización de los plasmones.
De manera análoga al tratamiento clásico de polarización en los campos electromagnéticos más comunes, partiremos de la superposición de dos plasmones superficiales elementales [7], uno en el plano $x - z$ cuya dirección de propagación es la dirección z y otro al cual se le hace una rotación alrededor del eje x, lo que nos dará dos plasmones superficiales rotados un ángulo θ.

3.2 Polarización

Las oscilaciones de los electrones libres son generadas en una interface que conecta dos medios, las expresiones para el campo eléctrico en cada medio asociado al **Sp** y suponiendo que se propaga a lo largo de la dirección z se escribe como:

$$\overrightarrow{E_1} = \left(a\hat{\imath} + \frac{a\alpha_1}{i\beta}\hat{k}\right)\exp\{i(\beta z - wt)\}\, exp\{-\alpha_1 x\} \quad x \geq 0; \tag{3.2.1}$$

$$\vec{E}_2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}a\hat{\imath} - \frac{\varepsilon_1 a\alpha_2}{\varepsilon_2 i\beta}\hat{k}\right)\exp\{i(\beta z - wt)\}\, exp\{+\alpha_2 x\} \quad x < 0\,, \tag{3.2.2}$$

En esta representación $\varepsilon_{1,2}$ son la constante dieléctrica de cada medio, a es una constante que describe la amplitud del **Sp** , β es la relación de dispersión y $\alpha_{1,2}$ son los parámetros que nos

indican como se va a atenuar el plasmón superficial. Debemos obtener una expresión alterna de la ecuación (3.2.1) debido a que $\beta = c + id$.
Entonces:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{id}{c^2+d^2} \tag{3.2.3}$$

Sustituyendo la ecuación (3.2.3) en la ecuación (3.2.1) tenemos lo siguiente:

$$\overrightarrow{E_1} = \left(a\hat{\imath} + \hat{k}a\alpha\left(\frac{ic}{c^2+d^2} + \frac{d}{c^2+d^2}\right)\right)\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)z\}\exp\{(iRe\beta)z\}$$

$$= a\hat{\imath} + \hat{k}a\alpha\left(\frac{iRe\beta}{|\beta|^2} + \frac{Im\beta}{|\beta|^2}\right)\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)z\}\exp\{i(Re\beta)z\}$$

$$= \left(a\hat{\imath} + \hat{k}\frac{a\alpha}{|\beta|^2}(iRe\beta + Im\beta)\right)\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)z\}\exp\{i(Re\beta)z\}$$

$$= a\left(\hat{\imath} + \hat{k}(\xi + i\eta)\right)\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)z\}\exp\{i(Re\beta)z\}, \tag{3.2.4}$$

donde $\xi = \frac{a\alpha}{|\beta|^2}Im\beta$, $\eta = \frac{a\alpha}{|\beta|^2}Re\beta$.

La ecuación (3.2.4) es la expresión para el campo sin haberle realizado la rotación, el campo rotado queda como sigue:

$$\overrightarrow{E_{1R}} = a[\left(\hat{\imath} + \left(\hat{k}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta\right)(\xi + i\eta)\right)\exp\{-\alpha x\}$$

$$\times\ \exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta + y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta + y\sin\theta)\}]$$

$$= a\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta + y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta + y\sin\theta)\}$$

$$\times\ \left(\hat{\imath} + \hat{\jmath}\sin\theta\,(\xi + i\eta) + \hat{k}\cos\theta(\xi + i\eta)\right) \tag{3.2.5}$$

El campo rotado a un ángulo – θ es:

$$\overrightarrow{E_{2R}} = a\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta - y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta - y\sin\theta)\}$$

$$\times\ \left(\hat{\imath} - \hat{\jmath}\sin\theta\,(\xi + i\eta) + \hat{k}\cos\theta(\xi + i\eta)\right) \tag{3.2.6}$$

Estamos ahora interesados por la suma entre los plasmones dados por las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6), lo cual lo hacemos por componentes indicadas en los subíndices de cada suma:

$$\left(\overrightarrow{E_{1R}}+\overrightarrow{E_{2R}}\right)_{\hat{\imath}}=\hat{\imath}[a\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta-y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta-y\sin\theta)\}$$

$$+a\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta+y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta+y\sin\theta)\}]$$

$$=\hat{\imath}a\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta)\}$$

$$\times\ [\exp\{(Im\beta)(y\sin\theta)\}\exp\{-i(Re\beta)(y\sin\theta)\}$$

$$+\exp\{(-Im\beta)(y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(y\sin\theta)\}]. \tag{3.2.7}$$

Si en la ecuación (3.2.7) usamos la aproximación paraxial, el término que contiene a la parte imaginaria de β se vuelve muy pequeño en comparación con la parte real, por lo tanto tenemos:

$$\left(\overrightarrow{E_{1R}}+\overrightarrow{E_{2R}}\right)_{\hat{\imath}}=2\hat{\imath}a\exp\{-\alpha x\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta)\}$$

$$\times\ \exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta)\}\cos[(Re\beta)y\sin\theta] \tag{3.2.8}$$

Ahora bien, la componente $\hat{\jmath}$ esta dada por:

$$\left(\overrightarrow{E_{1R}}+\overrightarrow{E_{2R}}\right)_{\hat{\jmath}}=\hat{\jmath}a\exp\{-\alpha x\}[(\xi+i\eta)\sin\theta\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta+y\sin\theta)\}$$

$$\times\ \exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta+y\sin\theta)\}-(\xi+i\eta)\sin\theta\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta-y\sin\theta)\}$$

$$\times\ \exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta-y\sin\theta)\}]$$

$$=\hat{\jmath}a\exp\{-\alpha x\}(\xi+i\eta)\sin\theta\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta)\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta)\}$$

$$\times\ [\exp\{(-Im\beta)(y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(y\sin\theta)\}$$

$$-\exp\{(Im\beta)(y\sin\theta)\}\exp\{-i(Re\beta)(y\sin\theta)\}]. \tag{3.2.9}$$

Aplicando la misma aproximación que la de la ecuación (3.2.7) a la ecuación (3.2.9) obtenemos el siguiente resultado:

$$\left(\overrightarrow{E_{1R}}+\overrightarrow{E_{2R}}\right)_{\hat{\jmath}}=2i\hat{\jmath}a\exp\{-\alpha x\}(\xi+i\eta)\sin\theta\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta)\}$$

$$\times\ \exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta)\}\sin[(Re\beta)y\sin\theta] \tag{3.2.10}$$

La componente $\hat{k}$ esta dada por:

$$\left(\overrightarrow{E_{1R}}+\overrightarrow{E_{2R}}\right)_{\hat{k}}=\hat{k}a\exp\{-\alpha x\}(\xi+i\eta)\cos\theta\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta)\}\exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta)\}$$

$$\times\left[\exp\{(-Im\beta)(y\sin\theta)\}\exp\{i(Re\beta)(y\sin\theta)\}\right.$$

$$\left.+\exp\{(Im\beta)(y\sin\theta)\}\exp\{-i(Re\beta)(y\sin\theta)\}\right]\ . \qquad (3.2.11)$$

Aplicando la aproximación paraxial:

$$\left(\overrightarrow{E_{1R}}+\overrightarrow{E_{2R}}\right)_{\hat{k}}=2\hat{k}a\exp\{-\alpha x\}(\xi+i\eta)\cos\theta\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta)\}$$

$$\times\ \exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta)\}\cos[(Re\beta)y\sin\theta]\ . \qquad (3.2.12)$$

Sobre las ecuaciones (3.2.12) y (3.2.10) introducimos una nueva notación como sigue:

$$(\xi+i\eta)=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\exp\left\{i\,tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\right\}=W\exp\{i\delta_z\}$$

$$i(\xi+i\eta)=W\exp\{i\delta_y\} \qquad (3.2.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.2.13) en (3.2.12) y (3.2.10) tenemos entonces la expresión completa para la suma de los campos expresado en forma matricial como:

$$\overrightarrow{E_T}=\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}=2a\exp\{-\alpha x\}\exp\{i(Re\beta)(z\cos\theta)\}$$

$$\times\ \exp\{(-Im\beta)(z\cos\theta)\}\begin{pmatrix}\cos\Omega\\W\sin\theta\sin\Omega\exp\{i\delta_y\}\\W\cos\theta\cos\Omega\exp\{i\delta_z\}\end{pmatrix}\quad , \qquad (3.2.14)$$

dónde $\Omega=\Omega(y,\theta)=(Re\beta)y\sin\theta$. Cabe notar que cuando $\theta=0$ se recupera la estructura original (3.2.4).

La expresión (3.2.14) determina la distribución de amplitud del campo plasmónico, así mismo con la ecuación (3.2.14) se quiere describir la trayectoria del campo. Para esto se definirán elipses de polarización para los planos $x-y$, $x-z$, $y-z$ y sus respectivos parámetros de Stokes.

3.3 Parámetros de Stokes

Usando la ecuación (3.2.14) proponemos escribir el vector de *Jones* como:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega \\ W\sin\theta\sin\Omega\exp\{i\delta_y\} \\ W\cos\theta\cos\Omega\exp\{i\delta_z\} \end{pmatrix}. \tag{3.3.1}$$

Analizando la proyección del vector de Jones sobre cada plano y siguiendo el tratamiento clásico de polarización [6], definimos tres trayectorias para el campo eléctrico en cada plano, los parámetros de *Stokes* son rápidamente identificados.

1) En el plano $(x-y)$, la trayectoria del campo eléctrico es:

$$\left(\frac{E_x}{\cos\Omega}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{W\sin\theta\sin\Omega}\right)^2 - \left(\frac{2E_xE_y}{W\cos\Omega\sin\theta\sin\Omega}\right)\cos\delta_y = (\sin\delta_y)^2 \ , \tag{3.3.2}$$

y los correspondientes parámetros de Stokes son:

$$S_{0xy} = (\cos\Omega)^2 + W^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2 \tag{3.3.3}$$

$$S_{1xy} = (\cos\Omega)^2 - W^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2 \tag{3.3.4}$$

$$S_{2xy} = 2W\cos\Omega\sin\theta\sin\Omega\cos\delta_y \tag{3.3.5}$$

$$S_{3xy} = 2W\cos\Omega\sin\theta\sin\Omega\sin\delta_y \ . \tag{3.3.6}$$

Se debe notar que los parámetros de *Stokes* son dependientes de la coordenada y. El caso más simple puede ser identificado cuando $y = 0$, entonces, los valores de los parámetros de *Stokes* son:

$$(S_{0xy} \quad S_{1xy} \quad S_{2xy} \quad S_{3xy})_{y=0} = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \ . \tag{3.3.7}$$

Esto significa que el orden cero de las franjas de interferencia tiene polarización lineal, siendo el campo eléctrico perpendicular al plano $(y-z)$.

2) En el plano $(x-z)$, la trayectoria es:

$$\left(\frac{E_x}{\cos\Omega}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{W\cos\theta\cos\Omega}\right)^2 - \left(\frac{2E_xE_z}{W\cos\theta(\cos\Omega)^2}\right)\cos\delta_z = (\sin\delta_z)^2 \ , \tag{3.3.8}$$

los parámetros de *Stokes* están dados por:

$$S_{0xz} = (\cos\Omega)^2 + W^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2 \tag{3.3.9}$$

$$S_{1xz} = (\cos\Omega)^2 - W^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2 \tag{3.3.10}$$

$$S_{2xz} = 2W(\cos\Omega)^2\cos\theta\cos\delta_z \tag{3.3.11}$$

$$S_{3xz} = 2W(\cos\Omega)^2\cos\theta\sin\delta_z\ . \tag{3.3.12}$$

En $y = 0$, los valores de los parámetros de *Stokes* son:

$$(S_{0xz} \quad S_{1xz} \quad S_{2xz} \quad S_{3xz})_{y=0} =$$

$$(1 + W^2(\cos\theta)^2 \quad 1 - W^2(\cos\theta)^2 \quad 2W\cos\theta\cos\delta_z \quad 2W\cos\theta\cos\delta_z)\ . \tag{3.3.13}$$

Lo cual significa que el orden cero de las franjas de interferencia tiene polarización elíptica [5,8].

3) En el plano $(y - z)$, la trayectoria es:

$$\left(\frac{E_y}{W\sin\theta\sin\Omega}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{W\cos\theta\cos\Omega}\right)^2 - \left(\frac{2E_yE_z}{W^2\sin\theta\sin\Omega\cos\theta\cos\Omega}\right)\cos\delta_z = (\sin\delta_z)^2, \tag{3.3.14}$$

los parámetros de *Stokes* son:

$$S_{0yz} = W^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2 + W^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2 \tag{3.3.15}$$

$$S_{1yz} = W^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2 - W^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2 \tag{3.3.16}$$

$$S_{2yz} = 2W^2\sin\theta\sin\Omega\cos\theta\cos\Omega\cos\delta_z \tag{3.3.17}$$

$$S_{3yz} = 2W^2\sin\theta\sin\Omega\cos\theta\cos\Omega\sin\delta_z\ . \tag{3.3.18}$$

En $y = 0$, los parámetros son:

$$(S_{0yz} \quad S_{1yz} \quad S_{2yz} \quad S_{3yz})_{y=0} = (W^2(\cos\theta)^2 \quad -W^2(\cos\theta)^2 \quad 0 \quad 0)\ . \tag{3.3.19}$$

Esto significa que el campo eléctrico tiene polarización lineal a lo largo de la coordenada z. En el apéndice B se muestra que cada conjunto de parámetros de Stokes satisface la relación:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\ , \tag{3.3.20}$$

que se satisface para campos plasmónicos completamente coherentes y polarizados. Finalmente remarcamos que cada conjunto de parámetros de *Stokes* depende de los parámetros (y, θ) [7].
Como una conclusión parcial, tenemos que un plasmón superficial elemental tiene fija su polarización, sin embargo, la interferencia entre dos de ellos presenta propiedades similares a los campos ópticos polarizables clásicos. El estado de polarización es descrito proyectando el campo eléctrico sobre tres planos mutuamente perpendiculares.

3.4 Plasmones superficiales parcialmente polarizados

El conjunto de parámetros de *Stokes* para haces interferidos son dependientes de los parámetros (y, θ). El campo plasmónico proyectado sobre cada plano tiene asociado una familia de esferas de *Poincare,* esto porque los parámetros de Stokes son dependientes de los parámetros (y, θ). De esta representación es posible incorporar efectos de polarización parcial que están implícitos en la matriz de coherencia asociada a cada plano. La estructura de la matriz de coherencia en términos de los parámetros de *Stokes* es [8]:

$$J = \begin{pmatrix} \langle \frac{S_0+S_1}{2} \rangle & \langle \frac{S_2+iS_3}{2} \rangle \\ \langle \frac{S_2-iS_3}{2} \rangle & \langle \frac{S_0-S_1}{2} \rangle \end{pmatrix}, \tag{3.4.1}$$

donde los paréntesis triangulares representan el valor medio. Este se obtiene usando la relación siguiente:

$$\langle S_i \rangle = \int S_i(y, \theta)\rho(\theta)d\theta = M_i(y)\,; i = 1,2,3\,, \tag{3.4.2}$$

con $\rho(\theta)$ la función de densidad de probabilidad.

Para el experimento, proponemos usar una película delgada de oro que contiene dos aberturas [9,10] depositado en un material elástico, aplicando una fuerza aleatoria paralela al eje que conecta las aberturas controlamos la separación relativa entre ellas generando el ensamble de **Spc.** El sistema óptico para generar la interferencia esta mostrado en la Fig. 3, donde la gota de aceite, de índice de refracción $n = 2.1$ actúa como una lente generando la suma entre dos **Sp** [11].

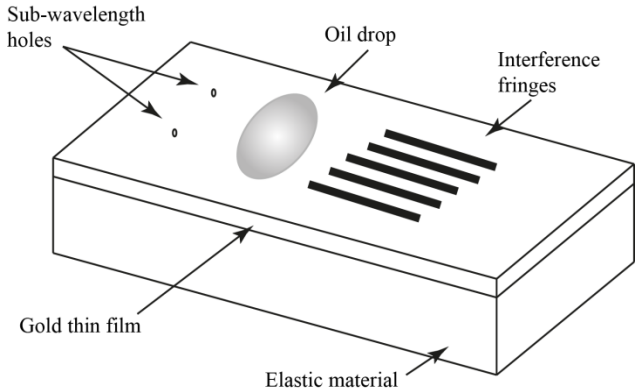

Fig. 3: Sistema experimental propuesto para generar la convergencia incoherente de **Spc.** El ancho de la película delgada de oro es de $40\ nm$ puesta sobre un material elástico. La posición relativa entre las aberturas está en el intervalo de $5-15\ nm$ y es controlada aplicando una fuerza aleatoria.

Como un ejemplo consideramos el caso cuando la función de densidad de probabilidad $\rho(\theta)$ es uniforme en el intervalo $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$. Del apéndice D, para este caso, los parámetros de *Stokes* dados por las Eqs. [3.3.3-3.3.18] en términos de la función *Bessel* [12] adquieren la siguiente forma:

1) Sobre el plano $(x-y)$:

$$\langle S_{0xy}\rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{W^2}{4}\right) J_0(2hy) + \frac{W^2}{4} J_2(2hy) \tag{3.4.3}$$

$$\langle S_{1xy}\rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{W^2}{4}\right) J_0(2hy) - \frac{W^2}{4} J_2(2hy) \tag{3.4.4}$$

$$\langle S_{2xy}\rangle = 2W\cos(\delta_y) J_1(2hy) \tag{3.4.5}$$

$$\langle S_{3xy}\rangle = 2W\sin(\delta_y) J_1(2hy)\ . \tag{3.4.6}$$

En general, la polarización promedio en el plano $(x-y)$ corresponde a polarización elíptica, conteniendo el caso de polarización lineal el cual ocurre cuando $y=0$.

2) Sobre el plano $(x-z)$:

$$\langle S_{0xz}\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{W^2}{4}\right) J_0(2hy) + \frac{W^2}{4} J_2(2hy) + \frac{1}{2} + \frac{W^2}{4} \tag{3.4.7}$$

$$\langle S_{1xz}\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{W^2}{4}\right) J_0(2hy) - \frac{W^2}{4} J_2(2hy) + \frac{1}{2} - \frac{W^2}{4} \tag{3.4.8}$$

$$\langle S_{2xz}\rangle = W\cos(\delta_y) J_0(2hy) \tag{3.4.9}$$

$$\langle S_{3xz}\rangle = W\sin(\delta_y) J_0(2hy)\ . \tag{3.4.10}$$

En general, la polarización promedio en el plano $(x - z)$ corresponde a polarización elíptica.

3) Sobre el plano $(y - z)$:

$$\langle S_{0yz} \rangle = W^2\big(1 + J_0(2hy)\big) + J_2(2hy) \tag{3.4.11}$$

$$\langle S_{1yz} \rangle = 0 \tag{3.4.12}$$

$$\langle S_{2yz} \rangle = 0 \tag{3.4.13}$$

$$\langle S_{3yz} \rangle = 0 \tag{3.4.14}$$

Sobre el plano $(y - z)$ el campo plasmónico es completamente no polarizado.
En la Fig.4a, mostramos la simulación numérica para la distribución de irradiancia sobre el plano $(y - z)$ asociada al **Spc** completamente coherente de la ecuación (3.2.14). En la Fig. 4b, mostramos la simulación numérica cuando la separación relativa entre las aberturas de la Fig. (3), sigue una densidad de probabilidad uniforme, donde la curva de modulación es fácilmente identificable. El cálculo fue obtenido tomando el modulo cuadrado de la ecuación (3.2.14) y obteniendo su valor promedio. Seleccionamos el plano $(y - z)$ porque corresponde al plano de la superficie metálica el cual nos permite establecer el Sistema de referencia.

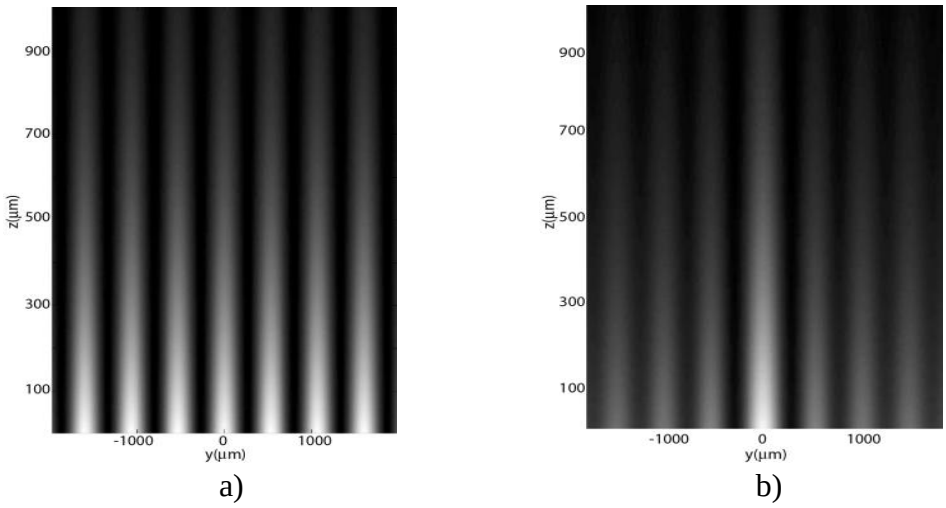

Fig. 4: a) Distribución de Irradiancia para un **Spc** completamente coherente. b) **Spc** parcialmente polarizado con densidad de probabilidad uniforme.

Como una aplicación de esto, las propiedades de polarización parcial pueden ser implementadas para el atrapamiento de partículas [13], las condiciones bajo las cuales esto es posible se analizarán en un trabajo futuro, además este estudio puede ser extendido en una forma general con otras funciones de densidad de probabilidad, la integral (3.4.2) representa la ecuación integral de primera clase de *Fredholm* [14] cuyo núcleo son los parámetros de *Stokes*. Puede ser hecho proponiendo una función específica para $M_i(y)$, donde la función desconocida es la función de

densidad de probabilidad. El campo eléctrico fue proyectado en tres planos mutuamente perpendiculares lo cual puede ser aplicado al estudio de las singularidades de polarización [15] lo cual ocurre en las regiones focales plasmónicas [16].

4. Teorema de *Van Cittert-Zernike* para campos plasmónicos

En este capítulo se estudia la función de correlación en amplitudes entre dos puntos arbitrarios del campo plasmónico, lo cual constituye el teorema de *Van Cittert-Zernike* para los campos plasmónicos. El teorema establece "*el estudio de correlación de segundo orden entre componentes del campo en diferentes puntos del espacio*" [8]. Se tomará como base lo expuesto en el capítulo de teoría de coherencia para establecer este teorema. Para lograr el objetivo anterior, se propone el siguiente camino, analizar la matriz de coherencia considerando solo el plano $y - z$ [8], esto debido a que este plano coincide con el de la superficie plasmónica.

4.1 Teorema de *Van Cittert-Zernike* local para campos plasmónicos

El teorema de *Van Cittert-Zernike* local se puede obtener a partir de la matriz de coherencia, definida por [8]:

$$J = \begin{pmatrix} E_i \\ E_j \end{pmatrix} (E_i \quad E_j)^* = \begin{pmatrix} |E_i|^2 & E_i E_j^* \\ E_j E_i^* & |E_j|^2 \end{pmatrix}, \tag{4.1.1}$$

En donde las componentes están asociadas a un punto p, de la ecuación (2.3.21), cuando $E_i E_j^*$ tienen estructura de una transformada de Fourier, la representación (4.1.1) se conoce como el teorema de *Van Cittert-Zernike*. Para el caso del plano $y - z$ la matriz (4.1.1) toma la forma siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} |E_y|^2 & E_y E_z^* \\ E_z E_y^* & |E_z|^2 \end{pmatrix} . \tag{4.1.2}$$

Utilizando el modelo del espectro angular, sea:

$$E_y = \int b(u) \exp\{i2\pi(yu + zp)\}\, du\,, \tag{4.1.3}$$

al igual que en la sección 2.3.2 las amplitudes complejas son considerados variables aleatorias cuya densidad de probabilidad dependerá de nuestras condiciones iniciales . Debemos tener los promedios, de aquí que el primer término de la matriz de coherencia quede de la siguiente forma:

$$\left|E_y\right|^2 = \langle E_y E_y^* \rangle = \iint \langle b(u) b^*(u') \rangle \exp\{i2\pi(yu + zp)\} \exp\{-i2\pi(y'u' + z'p')\} du du'$$

$$= \lim_{\substack{y' \to y \\ z' \to z}} \int \langle |b(u)|^2 \rangle \exp\{i2\pi u(y - y')\} \exp\{i2\pi p(z - z')\} du, \qquad (4.1.4)$$

el límite en la ecuación (4.1.4) significa que nos estamos acercando al punto de coordenadas (y, z) y por lo tanto, solo las frecuencias espaciales correspondientes a la misma dirección de propagación están correlacionadas. Esto significa que la correlación en amplitudes debe ser de la forma:

$\langle b(u) b^*(u') \rangle = \delta(u - u') |C(u')|^2$, entonces:

$$\left|E_y\right|^2 = \iint \delta(u - u') \langle |C(u')|^2 \rangle \exp\{i2\pi(yu + zp)\} \exp\{-i2\pi(y'u' + z'p')\} du du'$$

$$= \int \langle |C(u)|^2 \rangle \exp\left\{i2\pi\big(u(y - y') + p(z - z')\big)\right\} du = \phi_1(y - y', z - z'). \qquad (4.1.5)$$

y los campos son estacionarios espacialmente

Ahora:

$$E_y E_z^* = \iint b(u) C^*(u') \exp\{i2\pi(yu + zp)\} \exp\{-i2\pi(y'u' + z'p')\} du du' \qquad (4.1.6)$$

Considerando la misma hipótesis descrita anteriormente, esto es:

$\langle b(u) C^*(u') \rangle = \delta(u - u') b(u) C^*(u')$, entonces:

$$E_y E_z^* = \int \langle b(u) C^*(u) \rangle \exp\{i2\pi u(y - y')\} \exp\{i2\pi p(z - z')\} du du'$$

$$= \phi_2(y - y', z - z') \qquad (4.1.7)$$

Donde $b(u) C^*(u)$ es la función de correlación espectral, si $b(u) = C^*(u)$ entonces tenemos el espectro de potencias.

De manera análoga para el término restante tenemos que:

$$E_y^* E_z = \iint b^*(u)C(u')\exp\{i2\pi(yu+zp)\}\exp\{-i2\pi(y'u'+z'p')\}dudu' \ , \qquad (4.1.8)$$

si $\langle b^*(u)C(u')\rangle = \delta(u-u')b^*(u)C(u')$, entonces:

$$E_y^* E_z = \int \langle b^*(u)C(u)\rangle \exp\{i2\pi u(y-y')\}\exp\{i2\pi p(z-z')\}\, dudu'$$

$$= \phi_3(y-y', z-z'). \qquad (4.1.9)$$

Por último tenemos que:

$$|E_z|^2 = \langle E_z E_z^*\rangle = \iint C(u)C^*(u')\exp\{i2\pi(yu+zp)\}\exp\{-i2\pi(y'u'+z'p')\}dudu'$$

$$= \lim_{\substack{y'\to y \\ z'\to z}} \int \langle |C(u)|^2\rangle \exp\{i2\pi u(y-y')\}\exp\{i2\pi p(z-z')\}\, du \ . \qquad (4.1.10)$$

Al igual que la ecuación (4.1.4) el límite significa que nos estamos acercando al punto en el que estamos interesados que se está estudiando.

Si $\langle C(u)C^*(u')\rangle = \delta(u-u')|C'(u')|^2$, entonces:

$$|E_z|^2 = \iint \delta(u-u')\langle |C'(u')|^2\rangle \exp\{i2\pi(yu+zp)\}\exp\{-i2\pi(y'u'+z'p')\}dudu'$$

$$= \int \langle |C'(u)|^2\rangle \exp\left\{i2\pi\big(u(y-y')+p(z-z')\big)\right\} du$$

$$= \phi_4(y-y', z-z') \ . \qquad (4.1.11)$$

Ya que tenemos las expresiones para cada término de la matriz (4.1.2), tenemos que el teorema de *Van cittert-Zernike* toma la siguiente forma:

$$J = \begin{pmatrix} \phi_1(y-y', z-z') & \phi_2(y-y', z-z') \\ \phi_3(y-y', z-z') & \phi_4(y-y', z-z') \end{pmatrix} \ . \qquad (4.1.12)$$

La ecuación (4.1.12) tiene cuatro términos que tienen estructura de transformada de Fourier, esto es:

$$1)\ \phi_1(y-y',z-z') = \mathcal{F}\{\langle|C(u)|^2\rangle\}$$

$$2)\ \phi_2(y-y',z-z') = \mathcal{F}\{\langle b(u)C^*(u)\rangle\}$$

$$3)\ \phi_3(y-y',z-z') = \mathcal{F}\{\langle b^*(u)C(u)\rangle\}$$

$$4)\ \phi_4(y-y',z-z') = \mathcal{F}\{\langle|C'(u)|^2\rangle\}\ .$$

Las ecuaciones (1-4) representan el teorema de *Van Cittert-Zernike* para el plano $y-z$ [6].

4.2 Descripción del Teorema generalizado de *Van Cittert-Zernike.*

La generalización del teorema consiste en considerar la naturaleza vectorial del campo en dos puntos diferentes del plano. Esto proporciona una representación global de procesos de coherencia parcial de segundo orden, los parámetros involucrados en el estudio se muestran en la figura 5.

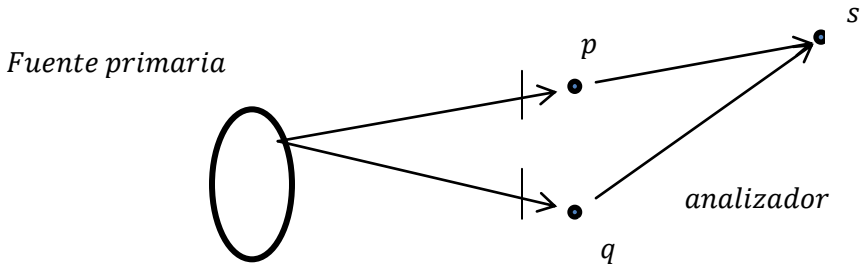

Fig. 5: Fuente primaria generando un campo, justo antes de los puntos p y q hay un analizador para descomponer el campo en dos componentes respectivamente, en cada punto existe una matriz de coherencia local que nos dice como se mezclan los estados de polarización en cada punto para después tener una matriz de coherencia general en el punto s.

De la Fig. 5, sea un campo inicial representado por:

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_{1i} \\ E_{2i} \end{pmatrix}\ . \tag{4.2.1}$$

También supongamos que cada componente del vector $\vec{E}_i$ se descompone en dos componentes generadas por los analizadores que se tienen justo antes del punto p y q, es decir, tenemos que considerar dos componentes del campo que tienen polarización ortogonal entre ellas, entonces la ecuación (4.2.1) toma la siguiente forma:

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_{1i} \\ E_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

Una forma alternativa de encontrar la matriz de coherencia, es como la dada en la ecuación (4.1.1), introduciremos una nueva operación llamada producto directo ($\otimes$) entre matrices, esta operación se realiza de la siguiente manera: *si se tienen dos matrices de grado $n \times m$ y $m \times n$, su producto directo es una matriz de grado $nm \times mn$, y la operación es igual a multiplicar cada elemento de la primera matriz por la segunda matriz.*

$$J = \begin{pmatrix} E_{1i} \\ E_{2i} \end{pmatrix} (E_{1i} \quad E_{2i})^* = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} \otimes ((\alpha \quad \beta) \quad (a \quad b))^* = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & \alpha a^* & \alpha b^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 & \beta a^* & \beta b^* \\ a\alpha^* & a\beta^* & |a|^2 & ab^* \\ b\alpha^* & b\beta^* & ba^* & |b|^2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.4}$$

Podemos observar que la matriz (4.2.4) tiene la misma estructura que la matriz (2.3.7), es decir, lleva la información de cómo se mezclan los estados de polarización entre los puntos p y q, para poder describir a la matriz (4.2.4) utilizaremos otra notación:

$$J = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & \alpha a^* & \alpha b^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 & \beta a^* & \beta b^* \\ a\alpha^* & a\beta^* & |a|^2 & ab^* \\ b\alpha^* & b\beta^* & ba^* & |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & J_{12} \\ J_{21} & J_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.5}$$

dónde:

$$J_1 = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \; J_{12} = \begin{pmatrix} \alpha a^* & \alpha b^* \\ \beta a^* & \beta b^* \end{pmatrix}, J_{21} = \begin{pmatrix} a\alpha^* & a\beta^* \\ b\alpha^* & b\beta^* \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix}. \tag{4.2.6}$$

En la matriz J_1 si sumamos los elementos obtenemos la energía y la información de cómo se mezclan las componentes del campo E_{1i} en el punto p, en la matriz J_2 si sumamos los elementos obtenemos la energía y la información de cómo se mezclan las componentes del campo E_{2i} en el punto q, las matrices J_{12} y J_{21} nos dicen la información de la correlación de los campos E_{1i} y E_{2i}, es decir, estamos en posibilidad de dar una representación adicional a los modelos existentes de cómo correlacionar a los campos. Debido a que las matrices (4.2.6) comparten la misma estructura con la matriz (4.1.12), sus elementos tienen también estructura de transformada de *Fourier*, cabe hacer notar que en esta representación los elementos de las matrices (4.2.6) representan la correlación de los campos en los puntos p y q, esto puede ser aplicado a cualquier tipo de campos no solo a los campos plasmónicos, a la ecuación (4.2.5) le llamamos el Teorema de *Van Cittert-Zernike* generalizado.

De la estructura matricial, se propone como medida de coherencia global a la función de correlación entre pares de elementos del campo, de la siguiente forma:

$$\gamma = \frac{1}{Tr(J)} \sum (1 - \det(J_i)) \tag{4.2.7}$$

Esto debido a que estamos trabajando con campos parcialmente coherentes.

4.3 Transformación de la matriz de Coherencia

En las secciones anteriores hemos establecido las matrices de coherencia para generar el teorema de *Van Cittert-Zernike* de una forma local y general, ahora en esta sección estudiamos como se modifica la matriz de coherencia general cuando se propagan los campos electromagnéticos.

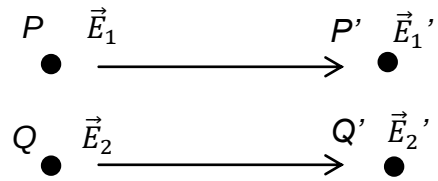

Fig. 6: Propagación de la matriz de coherencia

Supongamos dos campos $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ en dos puntos distintos, Fig. 6, los cuales tienen asociadas una matriz de coherencia J_1, J_2 respectivamente y queremos ver como son las matrices de coherencia en otros puntos al propagar los campos y al transformar la matriz de coherencia, para esto usamos la representación de la ecuación (4.2.4) y hacemos lo siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \\ E_{x2} \\ E_{y2} \end{pmatrix} \otimes (E_{x1} \quad E_{y1} \quad E_{x2} \quad E_{y2})^*, \tag{4.3.1}$$

al hacer la operación la matriz de coherencia queda como:

$$J = \begin{pmatrix} |E_{x1}|^2 & E_{x1}{E_{y1}}^* & E_{x1}{E_{x2}}^* & E_{x1}{E_{y2}}^* \\ E_{y1}{E_{x1}}^* & |E_{y1}|^2 & E_{y1}{E_{x2}}^* & E_{y1}{E_{y2}}^* \\ E_{x2}{E_{x1}}^* & E_{x2}{E_{y1}}^* & |E_{x2}|^2 & E_{x2}{E_{y2}}^* \\ E_{y2}{E_{x1}}^* & E_{y2}{E_{y1}}^* & E_{y2}{E_{x2}}^* & |E_{y2}|^2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.2}$$

Sea una matriz U que para este caso debe ser de grado 2×2 y representa la propagación que sufrirán los campos iniciales. Esta matriz se aplica a los campos E_1 y E_2 para obtener los campos propagados:

$$E_1' = UE_1 \tag{4.3.3}$$

$$E_2' = UE_2 \tag{4.3.4}$$

Entonces el producto directo matricial queda como:

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} \otimes (E_1' \quad E_2')^* = \begin{pmatrix} UE_1 \\ UE_2 \end{pmatrix} (E_1 U^{T*} \quad E_2 U^{T*}) \tag{4.3.5}$$

La ecuación (4.3.5) queda como:

$$J = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \otimes \left((E_{x1}{}^* \quad E_{y1}{}^*) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{T*} \quad (E_{x2}{}^* \quad E_{y2}{}^*) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{T*} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} UE_1E_1^*U^{T*} & UE_1E_2^*U^{T*} \\ UE_2E_1^*U^{T*} & UE_2E_2^*U^{T*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U\langle J_{11}\rangle U^{T*} & U\langle J_{12}\rangle U^{T*} \\ U\langle J_{21}\rangle U^{T*} & U\langle J_{22}\rangle U^{T*} \end{pmatrix} \ , \tag{4.3.6}$$

la ecuación (4.3.6) tiene la misma estructura de la (4.3.2), esto quiere decir que la matriz de coherencia se mantiene cuando se propagan los campos.
Sea $\widehat{\Omega}_{ij} = \langle J_{ij} \rangle$ con $i, j = 1,2$, la ecuación (4.3.6) en términos de covarianzas queda como:

$$J = \begin{pmatrix} U\widehat{\Omega}_{11}U^{T*} & U\widehat{\Omega}_{12}U^{T*} \\ U\widehat{\Omega}_{21}U^{T*} & U\widehat{\Omega}_{22}U^{T*} \end{pmatrix}, \text{ con } \widehat{\Omega}_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.3.7}$$

Esta representación tiene un análogo en la óptica cuántica, en específico, con los enredamientos de partículas, además se puede hacer una analogía con el fenómeno de autoimágenes ya que la matriz de coherencia se mantiene al hacer una transformación, es por eso que como una continuación a este trabajo se propone el encontrar cual es la matriz U para el caso de campos electromagnéticos.

5. Conclusiones

En esta tesis se describieron procesos de coherencia parcial para campos plasmónicos, el estudio se logró estableciendo una analogía con procesos de polarización parcial clásica. En particular, se encontró un conjunto de parámetros de Stokes para campos plasmónicos totalmente coherentes sobre tres planos mutuamente perpendiculares. El estudio se extendió a parámetros de Stokes para campos plasmónicos parcialmente coherentes y polarizados, en donde los promedios estadísticos se obtuvieron utilizando una expansión de las funciones *seno* y *coseno* en términos de la función *Bessel*. Debido a que usamos plasmones superficiales *cosenoidales* interferidos y el campo resultante depende de las coordenadas espaciales (y, θ), se puede controlar el ángulo con el cual interfieren estos campos y por consiguiente podemos modificar el estado de polarización en las franjas de interferencia, el ejemplo prototipo corresponde a la franja de orden cero, cuya polarización fue descrita en el capítulo 2, derivado de este estudio realizado se publicado un artículo en una revista de arbitraje anónimo [17]. Se describieron los procesos de coherencia parcial y polarización parcial mediante la matriz de coherencia, en un mismo punto pero considerando la naturaleza vectorial del campo eléctrico. Con este tratamiento se encontró el teorema de *Van Cittert-Zernike* local. Este resultado se generalizo considerando la interacción vectorial entre dos puntos arbitrarios y se encontró la representación generalizada del teorema de *Van Cittert-Zernike*. El estudio se simplifico por medio de del producto directo entre matrices, lo cual nos permitió establecer una matriz de coherencia más general que contiene a las matrices de coherencias locales para cada campo y la correlación de los campos al igual que la ecuación 2.3.4, confirmando que la utilización de la operación de producto directo entre matrices nos resulta en la misma estructura que la primera matriz de coherencia encontrada. De igual forma hemos establecido el teorema de *Van Cittert-Zernike* para campos plasmónicos por medio de la propagación de correlaciones, en donde los términos de la matriz de coherencia para el plano $y - z$ tienen una estructura de transformada de *Fourier*. Por último hemos mostrado que al propagar a los campos de un punto a otro la matriz de coherencia generalizada tiene la misma estructura al realizarle una transformación. Creemos que lo presentado en esta tesis es una contribución buena al estudio de los campos plasmónicos debido a que en la literatura hay muy poca información sobre la polarización de los campos plasmónicos y el estudio de la coherencia de estos campos. Es por esto último que como trabajo a futuro existen varias temas por estudiar, una es asociar fenómenos de entropía a la matriz de coherencia generalizada, también cuando se le realiza la transformación a la matriz de coherencia generalizada podemos establecer una analogía con el fenómeno de autoimágenes y además asociar propiedades de grupo a dicha matriz.

6. Bibliografía

[1] Nelson Dario Gomez Cardona, *"Modelización y realización experimental de sensores de campo evanescente basados en resonancia de plasmones de superficie en fibras ópticas"*, Universidad Nacional de Colombia.

[2] M H. Raether, "*Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings"*, Vol. **111** of Springer tracts in modern physics, Springer-Verlag, Berlin, (1988)

[3] J.M. Pitarke, V.M. Silkin, E.V. Shulkov and P.M. Echenique, "Theory of Surface plasmons and surface-plasmons polaritons" Rep. Prog. Phys. 70, 1-87, (2007)

[4] J.D. Jackson, *"Classical Electrodynamics"*, John Wiley and Sons, Inc.

[5] E. Hecht, "*Óptica"*, Addison Wesley, Madrid, 2000.

[6] R.M.A. Azzam, N.M. Bashara, "*Ellipsometry and Polarized light"*, North-Holland, (1979)

[7] G. Martinez-Niconoff, P. Martinez Vara, J. Muñoz Lopez, J.C. Juarez M and A. Carbajal Dominguez, "Partially coherent surface plasmon modes," Journal European Of the Optical Society JEOS **6**, 11009, (2011)

[8] L. Mandel and E. Wolf, "Optical coherence and quantum optics", Cambridge U. Press, UK, (1995)

[9] H. F. Ghaemi, Tineke Thio, and D. E. Grupp, T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, "Surface plasmons enhance optical transmission through subwavelength holes" Phys Rev. B, 58, 11, (1998)

[10] W. L. Barnes, A. Dereux and T.W. Ebbesen, "Surface *plasmon* subwavelength optics", Nature, 424, 14, 824, (2003)

[11] G. Martinez Niconoff, J.A. Sanchez-Gil, H.H. Sanchez, and A. Perez-Leija "Self-imaging and caustics in two-dimensional surface plasmon optics," Opt. Comm., **281**, 2316-2320, (2008)

[12] G.N Watson, "*A treatise on the theory of Bessel functions",* Cambridge University Press, (1966)

[13] W. Liu, D. N. Neshev, I. V. Shadrivov, A. E. Miroshnichenko, and Y. S. Kivshar, "Plasmonic Airy beam manipulation in linear optical potentials," Opt. Lett., **36** 1164-1166, (2011)

[14] A.C. Pipkin, "*A course on integral Equations", Springer-Verlag*, (1991)

[15] G. Martinez Niconoff, P. Martinez Vara, G. Diaz Gonzalez, J.Silva Barranco and A. Carbajal Domìnguez, "Surface Plasmon Singularities", International Journal of Optics, 152937, (2012)

[16] J.F Nye, "Polarization Effects in the Diffraction of Electromagnetic Waves: The Role of Disclinations", Proc. R. Soc. Lond. A 1983 387, (1983)

[17] P. Martínez Vara, M.A. Torres Rodríguez, S.I. De Los Santos García, J. Muñoz López, G. Martínez Niconoff, *"Partial Polarization in interfered plasmon fields",* Hindawi Publishimg corporation, Journal of nanomaterials, Volume 2014, 602374.

7. Apéndices

APENDICE A

Mostrar que la función de correlación dada por la ecuación (2.3.16) satisface la ecuación de *Helmholtz*:

$$\nabla^2\langle\vec{E}_1\vec{E}_2^*\rangle + k^2\langle\vec{E}_1\vec{E}_2^*\rangle = 0$$

Muestra:

$$\langle\vec{E}_1\vec{E}_2^*\rangle = E_{12} = \iint\iint D\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}$$

$$\times\ \exp\{-i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$+\iint\iint H\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}$$

$$\times\ \exp\{i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$+2Re\iint\iint K\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}$$

$$\times\exp\{-i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}dudvdu'dv',$$

con $D = \langle A(u,v)A^*(u',v')\rangle$, $H = \langle B(u,v)B^*(u',v')\rangle$ y $K = \langle A(u,v)B^*(u',v')\rangle$.

Haciendo el análisis por términos, entonces:

$$\nabla^2\left[\iint\iint D\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}dudvdu'dv'\right]$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint\iint D\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\iint\iint D\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\iint D\exp\{i2\pi(xu+yv+zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u'+y'v'+z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$= (i2\pi u)^2 \iint \iint D\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$+(i2\pi v)^2 \iint \iint D\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$+(i2\pi p)^2 \iint \iint D\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$= [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2] \iint \iint D\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}$$

$$\times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'.$$

Ahora:

$$\nabla^2 \left[\iint \iint H\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint \iint H\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iint \iint H\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint \iint H\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'$$

$$= [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2] \iint \iint H\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}$$

$$\times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'.$$

Por ultimo:

$$\nabla^2 \left[2Re \iint \iint K\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}\exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'\right]$$

$$= [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2]2Re \iint \iint K\exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}$$

$$\times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'.$$

Entonces sustituyendo en la ecuación de *Helmholtz*:

$$[(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2]E_{12} + k^2 E_{12} = (-4\pi^2 u^2 - 4\pi^2 v^2 - 4\pi^2 p^2)E_{12} + k^2 E_{12}$$

$$= -4\pi^2(u^2 + v^2 + p^2)E_{12} + k^2 E_{12} = 0\,,$$

como $(u^2 + v^2 + p^2) = \frac{1}{\lambda^2}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, por lo tanto:

$$\frac{-4\pi^2}{\lambda^2}E_{12} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}E_{12} = 0.$$

APENDICE A'

Mostrar que la función de correlación dada por la ecuación (2.3.21) cumple la ecuación de *Helmholtz*:

$$\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = \phi_{12} = \iint \langle |A(u,v)|^2 \rangle \exp\{i2\pi(x_0 u + y_0 v + z_0 p)\} du dv, \quad x_0 = x - x'$$

con $F = \langle |A(u,v)|^2 \rangle$, entonces:

$$\nabla^2 \left[\iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv \right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv$$

$$= (i2\pi u)^2 \iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv$$

$$+(i2\pi v)^2 \iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv$$

$$+(i2\pi p)^2 \iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv$$

$$= [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2] \iint \iint F \exp\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} du dv$$

$$= (-4\pi^2 u^2 - 4\pi^2 v^2 - 4\pi^2 p^2)\phi_{12}.$$

Sustituyendo en la ecuación de *Helmholtz*:

$$-4\pi^2(u^2 + v^2 + p^2)\phi_{12} + k^2\phi_{12} = 0.$$

como $(u^2 + v^2 + p^2) = \frac{1}{\lambda^2}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, por lo tanto:

$$\frac{-4\pi^2}{\lambda^2}\phi_{12} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\phi_{12} = 0.$$

APENDICE A''

Mostrar que la ecuación (2.3.24) cumple con la ecuación de onda:

$$\Gamma = \iiint A(u,v)B^*(u,v)\exp\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\}\, dudvd\gamma\ ,$$

con $G = A(u,v)B^*(u,v)$.

$$\nabla^2\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\iiint G\exp\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\}\, dudvd\gamma$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\iiint G\exp\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\}\, dudvd\gamma$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iiint G\exp\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\}\, dudvd\gamma$$

$$= [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2]\Gamma\ .$$

Ahora:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Gamma = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\iiint G\exp\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\}\, dudvd\gamma = \frac{1}{c^2}(i2\pi\gamma)^2\Gamma\ .$$

Entonces:

$$(-4\pi^2u^2 - 4\pi^2v^2 - 4\pi^2p^2)\Gamma = -\frac{4\pi^2\gamma^2}{c^2}\Gamma\,,$$

como $(u^2 + v^2 + p^2) = \frac{1}{\lambda^2}$ y $\lambda\gamma = c$, entonces:

$$-4\pi^2(u^2 + v^2 + p^2)\Gamma = -\frac{4\pi^2\gamma^2}{\lambda^2\gamma^2}\Gamma\,,$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{\lambda^2}\Gamma = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma\,.$$

APENDICE B

Debemos comprobar las siguientes relaciones:

a) $S_{0xy}^2 = S_{1xy}^2 + S_{2xy}^2 + S_{3xy}^2$, **b)** $S_{0xz}^2 = S_{1xz}^2 + S_{2xz}^2 + S_{3xz}^2$, **c)** $S_{0yz}^2 = S_{1yz}^2 + S_{2yz}^2 + S_{3yz}^2$.

Para **a)**

$$S_{0xy}^2 = (\cos\Omega)^4 + W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 + 2W^2(\cos\Omega)^2(\sin\Omega)^2(\sin\theta)^2 \tag{3.a}$$

$$S_{1xy}^2 = (\cos\Omega)^4 + W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 - 2W^2(\cos\Omega)^2(\sin\Omega)^2(\sin\theta)^2 \tag{3.b}$$

$$S_{2xy}^2 = 4W^2(\cos\Omega)^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\delta_y)^2 \tag{3.c}$$

$$S_{3xy}^2 = 4W^2(\cos\Omega)^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\sin\delta_y)^2 \tag{3.d}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ S_{1xy}^2 + S_{2xy}^2 + S_{3xy}^2 &= (\cos\Omega)^4 + W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 - 2W^2(\cos\Omega)^2(\sin\Omega)^2(\sin\theta)^2 \\
&\quad +4W^2(\cos\Omega)^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2\left[\left(\cos\delta_y\right)^2 + \left(\sin\delta_y\right)^2\right] \\
&= (\cos\Omega)^4 + W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 - 2W^2(\cos\Omega)^2(\sin\Omega)^2(\sin\theta)^2 \\
&\quad +4W^2(\cos\Omega)^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2 \\
&= (\cos\Omega)^4 + W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 + 2W^2(\cos\Omega)^2(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2\,. \qquad (3.e)
\end{aligned}$$

Es claro que la ecuación (3.a) es la misma que la ecuación (3.e):

$$\therefore \qquad S_{0xy}^2 = S_{1xy}^2 + S_{2xy}^2 + S_{3xy}^2 \tag{3.f}$$

Para **b)**

$$S_{0xz}^2 = (\cos\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4 + 2W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2 \tag{3.g}$$

$$S_{1xz}^2 = (\cos\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4 - 2W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2 \tag{3.h}$$

$$S_{2xz}^2 = 4W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2(\cos\delta_z)^2 \tag{3.i}$$

$$S_{3xz}^2 = 4W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2(\sin\delta_z)^2 \tag{3.j}$$

$$\Rightarrow\ S_{1xz}^2 + S_{2xz}^2 + S_{3xz}^2 = (\cos\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4 - 2W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2$$

$$+4W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2[(\cos\delta_z)^2 + (\sin\delta_z)^2]$$

$$= (\cos\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4 - 2W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2$$

$$+4W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2$$

$$= (\cos\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4 + 2W^2(\cos\Omega)^4(\cos\theta)^2 \tag{3.k}$$

Comparando las ecuaciones (3.g) y (3.k) claramente son iguales:

$$\therefore \qquad S_{0xz}^2 = S_{1xz}^2 + S_{2xz}^2 + S_{3xz}^2 \tag{3.l}$$

Para **c)**

$$S_{0yz}^2 = W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4 + 2W^4(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2 \tag{3.m}$$

$$S_{1yz}^2 = W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4 - 2W^4(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2 \tag{3.n}$$

$$S_{2yz}^2 = 4W^4(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2(\cos\delta_z)^2 \tag{3.o}$$

$$S_{3yz}^2 = 4W^4(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2(\sin\delta_z)^2 \tag{3.p}$$

$$\Rightarrow S_{1yz}^2 + S_{2yz}^2 + S_{3yz}^2 = W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4$$

$$-2W^4(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2$$

$$+4W^4(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2[(\cos\delta_z)^2+(\sin\delta_z)^2]$$

$$= W^4(\sin\theta)^4(\sin\Omega)^4 + W^4(\cos\theta)^4(\cos\Omega)^4$$

$$+2W^4(\sin\theta)^2(\sin\Omega)^2(\cos\theta)^2(\cos\Omega)^2 \tag{3.q}$$

Comparando las ecuaciones (3.m) y (3.q) claramente son iguales:

$$\therefore \quad S_{0yz}^2 = S_{1yz}^2 + S_{2yz}^2 + S_{3yz}^2 \tag{3.r}$$

APENDICE C

$$[]^2 = \iint e^{-s(x^2+y^2)}\,dxdy \tag{4.a}$$

Pasamos a coordenadas circulares y tenemos que:

$$x = r\cos\theta \tag{4.b}$$

$$y = r\sin\theta \tag{4.c}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.d}$$

$$dxdy = rdrd\theta \tag{4.e}$$

Sustituimos las ecuaciones anteriores en la ecuación (4.a) y obtenemos la siguiente representación:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-sr^2}\,rdrd\theta = \frac{2\pi}{2s}\int_0^\infty e^{-sr^2}\,2srdr = -\frac{2\pi}{2a}\int_0^\infty e^{-u}\,du = \sqrt{\frac{2\pi}{2s}} \tag{4.f}$$

APENDICE D

La función de densidad de probabilidad $\rho(\theta) = cte$.

1) para el plano $x - y$:

$$S_{0xy} = (\cos(hy\sin\theta))^2 + \omega^2(\sin\theta)^2(\sin(hy\sin\theta))^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2hy\sin\theta) + \omega^2(\sin\theta)^2(1 - \cos(2hy\sin\theta))\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy\sin\theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}\omega^2(\sin\theta)^2\cos(2hy\sin\theta).$$

Entonces:

$$\langle S_{0xy}\rangle = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy\sin\theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}\omega^2(\sin\theta)^2\cos(2hy\sin\theta)\right)\rho(\theta)d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy\sin\theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos(2hy\sin\theta)\right)\rho(\theta)d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{4}\right)\cos(2hy\sin\theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin\theta)^2 + \frac{\omega^2}{4}\cos 2\theta\cos(2hy\sin\theta)\right)\rho(\theta)d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{4}\right)J_0(2hy) + 2\sum_{n=1} J_{2n}(2hy)\cos 2n\theta + \frac{\omega^2}{4}\cos 2\theta\, J_0(2hy) + \frac{\omega^2}{2}\cos 2\theta\sum_{n=1} J_{2n}(2hy)\cos 2n\theta\right)\rho(\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\omega^2\right)J_0(2hy) + \frac{\omega^2}{4}J_2(2hy).$$

Para el parámetro S_{1xy} solo modificamos el signo:

$$\langle S_{1xy}\rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\omega^2\right)J_0(2hy) - \frac{\omega^2}{4}J_2(2hy).$$

Para el parámetro S_{2xy} :

$$S_{2xy} = 2\omega\cos(hy\sin\theta)\sin\theta\sin(hy\sin\theta)\cos\delta_y$$

$$= \frac{\sin(2hy\sin\theta)}{2}\sin\theta.$$

Entonces:

$$\langle S_{2xy}\rangle = \int 2\sum_{n=0} J_{2n+1}(2hy)\frac{\sin\left((2n+1)\theta\right)}{2}\sin\theta\cos\delta_y\,\rho(\theta)d\theta$$

$$= 2\omega \cos\delta_y J_1(2hy).$$

$$\langle S_{3xy}\rangle = 2\omega \sin\delta_y J_1(2hy).$$

2) Para el plano $x - z$:

$$S_{0xz} = (\cos(hy\sin\theta))^2 + \omega^2(\cos\theta)^2(\cos(hy\sin\theta))^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy\sin\theta) + \frac{\omega^2(\cos\theta)^2}{2}\cos(2hy\sin\theta) + \frac{\omega^2(\cos\theta)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy\sin\theta) + \left(\frac{\omega^2}{4}\cos 2\theta + \frac{\omega^2}{4}\right)\cos(2hy\sin\theta) + \frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^2}{4}\cos 2\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right)\cos(2hy\sin\theta) + \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\cos 2\theta\cos(2hy\sin\theta) + \frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^2}{4}\cos 2\theta$$

Entonces:

$$\langle S_{0xz}\rangle = \int\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right)J_0(2hy) + \frac{1}{2} + \frac{\omega^2\cos 2\theta\, J_0(2hy)}{4} + \frac{\omega^2\cos 2\theta}{2}\sum_{n=1} J_{2n}(2hy)\cos 2n\theta\right]\rho(\theta)d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right)J_0(2hy) + \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}J_2(2hy) + \frac{\omega^2}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right)J_0(2hy) + \frac{\omega^2}{4}J_2(2hy).$$

Para el parámetro S_{0xz} solo modificamos el signo:

$$\langle S_{1xz}\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right)J_0(2hy) - \frac{\omega^2}{4}J_2(2hy).$$

Para el parámetro S_{2xz} :

$$S_{2xz} = 2\omega(\cos(hy\sin\theta))^2\cos\theta\cos\delta_z$$

$$= 2\omega\left[\frac{1}{2}\cos(hy\sin\theta) + \frac{1}{2}\right]\cos\theta\cos\delta_z$$

Entonces:

$$\langle S_{2xz}\rangle = \int 2\omega\left[\frac{1}{2}J_0(2hy) + \sum_{n=1} J_{2n}(2hy)\cos 2n\theta\cos\theta\right]\cos\delta_z\,\rho(\theta)d\theta$$

$$= \omega J_0(2hy)\cos\delta_z.$$

Para S_{3xz} :

$$\langle S_{3xz}\rangle = \omega J_0(2hy)\sin\delta_z.$$

3) Para el plano $y - z$:

$$S_{0yz} = \omega^2(\sin\theta)^2(\sin(hy\sin\theta))^2 + \omega^2(\cos\theta)^2(\cos(hy\sin\theta))^2$$

$$= 2\omega^2\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos(2hy\sin\theta) + \frac{1}{2}\right).$$

Entonces:

$$\langle S_{0yz}\rangle = \int \omega^2[\cos 2\theta\cos(2hy\sin\theta) + \cos 2\theta\cos(2hy\sin\theta) + 1]\,\rho(\theta)d\theta$$

$$= \omega^2\left[\cos 2\theta\, J_0(2hy) + 2\cos 2\theta\sum_{n=1} J_{2n}(2hy)\cos 2n\theta + \cos 2\theta + J_0(2hy) + 2\sum_{n=1} J_{2n}(2hy)\cos 2n\theta + 1\right]$$

$$= \omega^2[1 + J_0(2hy) + J_2(2hy)].$$

Para S_{1yz}:

$$\langle S_{1yz}\rangle = 0.$$

Para S_{2yz} :

$$S_{2yz} = 2\omega^2\sin\theta\cos\theta\sin(hy\sin\theta)\cos(hy\sin\theta)\cos\delta_z.$$

Entonces:

$$\langle S_{2yz}\rangle = \int [2\omega^2 \sin\theta \cos\theta \sin(hy\sin\theta)\cos(hy\sin\theta)\cos\delta_z]\,\rho(\theta)d\theta$$

$$= \int \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\frac{\sin(hy\sin\theta)}{2}\right]\rho(\theta)d\theta$$

$$= \int \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta \sum_{n=0} J_{2n+1}(2hy)\sin\big((2n+1)\theta\big)\right]\rho(\theta)d\theta = 0.$$

Para S_{3yz} :

$$\langle S_{3yz}\rangle = 0.$$