



INAOE

**Un instrumento virtual para tomografía por capacitancia
eléctrica**

Por:

Jorge Luis Bacca Moreno

Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ELECTRÓNICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica**
Tonantzintla, Puebla
Agosto del 2013

Supervisado por:

Dr. Rogério Adrián Enríquez Caldera

©INAOE 2013

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes.



Resumen

Título: UN INSTRUMENTO VIRTUAL PARA TOMOGRAFÍA POR CAPACITANCIA ELÉCTRICA.

Autor: JORGE LUIS BACCA MORENO

Palabras claves: tomografía por capacitancia eléctrica, método de elemento finito, instrumento virtual, flujos multifásicos.

Descripción:

El presente trabajo muestra el desarrollo de un instrumento virtual para tomografía por capacitancia eléctrica aplicada a la medición de flujos multifásicos en tuberías cerradas. El objetivo principal del instrumento es permitir mediante simulación el desarrollo de pruebas relacionadas con tomografía capacitiva, lo que facilita la exploración de nuevas configuraciones para diferentes aspectos del proceso de medición de flujo con este método. La posibilidad de definir la geometría de la tubería, el número de píxeles para representar la imagen final del patrón de flujo, la distribución de los electrodos y el patrón de flujo a ser trabajado son algunas de las características de entrada del instrumento. Adicionalmente, los valores de capacitancia entre electrodos, los mapas de sensibilidad del sensor simulado y el error resultante entre la imagen obtenida y la imagen esperada están disponibles como salidas del instrumento para revisión por parte del usuario. El método de elemento finito se utiliza para la solución de la ecuación de Laplace; este procedimiento es de gran importancia para la simulación del proceso de medición.

Estas características se implementan en una interfaz gráfica desarrollada en MATLAB, proponiendo así, una herramienta novedosa y útil para la investigación en medición de flujo multifásico.

Abstract

Title: A VIRTUAL INSTRUMENT FOR ELECTRICAL CAPACITANCE TOMOGRAPHY

Autor: JORGE LUIS BACCA MORENO

Key words: Electrical capacitance tomography, finite element method, virtual instrument, multi-phase flows.

Description:

The development of a virtual instrument for electrical capacitance tomography intended to multi-phase flows measurement is presented. The main goal of this instrument is to simulate user's defined tests related to capacitance tomography. The resulting virtual instrument, promotes the exploration of new configurations in different aspects of flow measurement processes. The possibility to define the pipe lines shapes, the number of pixels to represent the final flow image, the electrodes distribution and the flow pattern to be studied, are some of the parameters that users can introduce to this virtual instrument. The inter-electrode capacitance values, the sensor sensitivity maps and the resulting error between obtained and desired image are the outputs available to the user. The finite element method is used to solve the Laplace equation; this procedure has great importance for the simulation of the measurement process.

The virtual instrument is finally implemented using MATLAB's graphic interface developing tool and represents a novel and reliable tool in the multiphase flow measurement research areas

Agradecimientos

A Dios principalmente y a mi familia por su apoyo incondicional.

Al Doctor Rogerio Adrián Enríquez Caldera, por su paciencia y su oportuna orientación.

Al Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y electrónica (INAOE), por permitirme cursar mis estudios de maestría en sus instalaciones.

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), por el apoyo brindado durante la duración de mis estudios.

Al cuerpo docente que estuvo relacionado con mi formación como maestro y todas aquellas personas que en México representaron mi familia y siempre estuvieron dispuestos a brindarme su apoyo.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia, que siempre estuvo conmigo sin estar a mi lado.

Contenido

1	Introducción	13
1.1.	Organización de la tesis	14
1.2.	Flujos multifásicos	15
1.3.	Técnicas de medición.....	16
1.4.	Tomografía industrial.....	18
1.5.	Principios de los sensores tomográficos	19
1.6.	Tomografía por capacitancia eléctrica.....	20
1.6.1.	Operación del sistema ECT	21
1.7.	Tomografía virtual por capacitancia eléctrica.	24
2	Fundamentos teóricos	27
2.1.	Problemas directo e inverso	27
2.2.	La ecuación de Laplace	28
2.3.	Mapas de sensibilidad.....	31
2.4.	Algoritmo LBP	34
2.5.	Modelos de normalización.....	37
3	Metodología	40
3.1.	El instrumento virtual.....	40
3.2.	Capacitor de placas paralelas	41
3.3.	Distribuciones de potencial	45
3.4.	Mapas de sensibilidad.....	48
3.5.	Reconstrucción de imágenes	49
4	Implementación y resultados	51
4.1.	Geometría de las tuberías.....	51
4.2.	Píxeles de representación	52

4.3.	Localización de los electrodos	53
4.4.	Patrones de flujo	55
4.5.	Medidas de capacitancia y mapas de sensibilidad.....	56
4.6.	Modelos de normalización y estimación del error	59
5	Conclusiones y trabajo futuro	62
6	Apéndices.....	64
6.1.	Apéndice 1, Elemento finito.....	64
7	Lista de figuras	81
8	Bibliografía.....	83

1 Introducción

El movimiento de fluidos por canales abiertos como los ríos o por canales cerrados como tuberías, se conoce como flujo. Este término también está relacionado con la cantidad de material que fluye por unidad de tiempo. Por otro lado, una fase se conoce como todas las partes de la materia que tienen composición química y propiedades físicas homogéneas. Cuando se tiene un fluido con mezclas de composiciones químicas o estados físicos diferentes, se habla de flujos multifásicos. La necesidad de medir este tipo de flujos ha crecido debido a su presencia en diferentes tipos de industrias como industrias de control de maquinaria, generación de energía, procesos de producción de hidrocarburos o distribución y transferencia de productos. Diferentes tareas también están relacionadas con este tipo de flujos como el monitoreo o el establecimiento de tarifas.

Dentro de las técnicas de medición convencionales se tienen los medidores por separación donde se busca precisamente, separar la mezcla en componentes individuales y realizar mediciones independientes de cada componente del flujo. El gran tamaño y los costos de mantenimiento e instalación de este tipo de medidores representan inconvenientes que llevan a buscar nuevas alternativas de medición. Otro tipo de medidores son los denominados medidores *On-line*, los cuales representan medidores compactos y no intrusivos que permiten la medición del flujo sin necesidad de separación. Dentro de este tipo de medidores se tienen los basados en técnicas tomográficas donde se busca obtener una imagen de la sección transversal del flujo y de esta manera realizar la medición.

La tomografía por capacitancia eléctrica (Electrical Capacitance Tomography, ECT), tiene como objetivo final, la creación de imágenes de procesos industriales donde se tienen materiales dieléctricos. Su funcionamiento se basa en la medición de los cambios de capacitancia provocados por la distribución de permitividades del flujo. Dentro de las

principales ventajas de esta técnica se tiene que es no invasiva, no radioactiva, de un costo relativamente bajo y que puede soportar incluso operación en condiciones extremas de temperatura y presión.

La instrumentación virtual vista desde el punto en donde representa el uso de sistemas computarizados para la realización de pruebas y mediciones, representa una herramienta que permite de forma más rápida y económica el diseño de sistemas hardware para mediciones.

Es así como el desarrollo de un instrumento virtual basado en tomografía por capacitancia eléctrica, representa la posibilidad de desarrollar pruebas basadas en software, donde básicamente, se pueda tener una aproximación inicial de lo que será un sistema de medición implementado en hardware.

1.1. Organización de la tesis

El capítulo uno presenta una introducción general al tema, a la problemática y a la intensión de este trabajo y se hace la revisión de algunos antecedentes. También, explica conceptos relacionados a los flujos multifásicos, a algunas técnicas de medición, enfocándose en los sistemas de tomografía y particularmente los relacionados con tomografía por capacitancia eléctrica, creando de esta manera un contexto general del problema.

En el capítulo dos se muestran fundamentos teóricos relacionados con la definición del problema; concretamente la importancia de la ecuación de Laplace y su solución en términos de la distribución de potencial. Se revisan algunos aspectos de un proceso de ECT como los mapas de sensibilidad y la reconstrucción de imágenes.

En el capítulo tres se tiene la metodología utilizada para resolver los problemas relacionados directamente con el proceso ECT. Con base a dicha metodología se implementa el instrumento virtual producto de este trabajo.

El capítulo cuatro corresponde a los resultados obtenidos para las diferentes características del instrumento, mostrando algunos ejemplos y la forma básica como se utiliza.

Finalmente en el capítulo cinco se exponen las conclusiones del trabajo de tesis y se proponen mejoras al instrumento virtual como trabajo futuro.

1.2. Flujos multifásicos

El movimiento de fluidos por canales abiertos como los ríos o cerrados como las tuberías de un acueducto se conoce como flujo; esta definición también aplica para la relación que existe entre la cantidad de material por unidad de tiempo. Las mediciones de flujo están presentes en todos los procesos de transporte de energía por medio de fluidos, pueden ser procesos de control o de indicación; agua, gas e hidrocarburos se encuentran entre los objetos de medición [1].

Una fase se tiene cuando una porción de materia presenta composición química y propiedades físicas homogéneas. Cuando se tienen fluidos con mezclas donde estos parámetros son heterogéneos, se habla de flujos multifásicos. La manera como están distribuidas las fases se conoce como patrón de flujo y en general este patrón no es uniforme debido a la naturaleza aleatoria del fenómeno. La Figura 1 presenta algunos tipos de patrones de flujo.

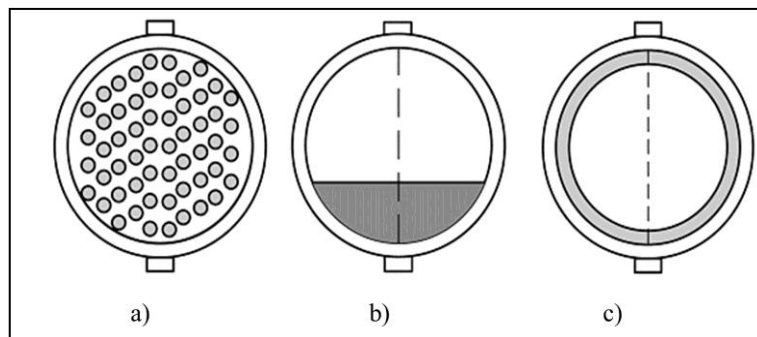


Figura 1, Patrones de flujo (a) Burbuja, (b) Estratificado y (c) Anular [2].

Algunas características de los flujos monofásicos tales como perfiles de velocidad o turbulencia, no son apropiadas para describir flujos multifásicos. Las estructuras de flujos multifásicos están clasificadas en regímenes de flujo cuyas características dependen de un gran número de parámetros. Las distribuciones de fases varían de un régimen a otro y comúnmente no están bajo el control del diseñador del sistema. Los patrones de flujo se alteran por las condiciones de operación, las propiedades del flujo, las velocidades involucradas e incluso la ubicación de las tuberías por las cuales circula el flujo. Teniendo en cuenta la cantidad de casos donde se presentan flujos multifásicos y las condiciones que influyen en su comportamiento, se han desarrollado una considerable cantidad de técnicas para monitorear este tipo de procesos [3].

La predicción precisa de los patrones de flujo es necesaria para garantizar condiciones de operación estables, predecir el rendimiento bajo ciertas condiciones y establecer el comportamiento del fenómeno multi-fase. La sensibilidad a cambios en los patrones de flujo se considera una problemática para los medidores que requieren un flujo homogéneo; algunos sistemas sólo cubren parte de las especificaciones técnicas y operativas además de tener un alto costo.

Una alternativa prometedora y técnicamente disponible para realizar medición multifásica sin obstruir el proceso o crear una dependencia del patrón de flujo, es la relacionada con las técnicas tomográficas con las cuales se obtienen imágenes de la sección transversal de una tubería [4].

1.3. Técnicas de medición

Aunque existen numerosos medidores multifásicos comerciales, la mayoría tienen ciertas limitaciones como la dependencia del régimen del flujo logrando trabajar por ejemplo, sólo con flujos homogéneos. Algunos dispositivos también poseen partes móviles, lo que reduce el rendimiento y

aumenta los costos. Los sistemas de medición multifásica y los medidores comerciales comúnmente están categorizados por:

- Medidores por técnicas de separación: Debido a las dificultades de medir flujos multifásicos directamente, se implementan técnicas de separación para realizar mediciones individuales.
- Medidores *on-line*: otro concepto de medidores multifásicos es implementado para espacios reducidos y con bajos costos de mantenimiento. Los medidores son compactos, sin sensores intrusivos e incluso algunos pueden ser instalados en el lecho marino.

Respecto a los medidores por técnicas de separación algunos problemas típicos relacionados con este tipo de medidores son su tamaño y los costos de instalación y mantenimiento [2] lo cual impulsa el desarrollo de sistemas de medición *on-line*.

En cuanto a esta categoría, la mayoría de ellos utiliza combinaciones de técnicas de medición que pueden ser categorizados en métodos por atenuación radioactiva (e.g. rayos gamma), métodos basados en impedancia, métodos que aplican técnicas de correlación y mediciones basadas en el principio Venturi. Algunos de estos medidores adoptan técnicas de medición con procesamiento de las señales para mejorar el rendimiento del sistema.

Los sistemas tomográficos hacen parte de los medidores *on-line* y entregan una imagen completa de la sección transversal del flujo, permitiendo el desarrollo de un nuevo tipo de medidores, conceptualmente simple y cuya respuesta no se ve afectada por variaciones del flujo [2].

1.4. Tomografía industrial

El término “tomografía industrial de procesos” se refiere a un grupo de técnicas de visualización no invasivas, relativamente nuevo (finales de los 80’s) y aún en desarrollo. El principio básico de la tomografía moderna es determinar la distribución de materiales en alguna región de interés que se obtiene a partir de las señales de sensores distribuidos en la periferia de la tubería.

Las mediciones son no intrusivas, tal vez en algunos casos se penetra la pared de la tubería pero no se interfiere con el medio, también, son no invasivas ya que los sensores están ubicados en la parte externa de la tubería. Cada medición es afectada en mayor o menor grado por la distribución de los materiales dentro de la tubería [5].

Las imágenes de la sección transversal entregan información muy valiosa acerca del proceso, las cuales pueden ser usadas para visualización, monitoreo, verificación de modelos matemáticos e incluso control inteligente. Existen varios tipos de sistemas tomográficos como el eléctrico, ultrasónico, por radiación, por resonancia magnética nuclear (NMR), microondas y sistemas ópticos.

Muchos tipos de sensores incluyendo sensores ópticos, por emisión de positrones, NMR, acústicos, eléctricos (capacitivos, inductivos y resistivos) y de microondas se encuentran disponibles actualmente. Cada tipo de sensor tiene sus propias ventajas y desventajas, de hecho, la selección depende del tipo de aplicación que se quiera. Los sistemas tomográficos relacionados con propiedades eléctricas han recibido atención especial: tomografía por capacitancia eléctrica (ECT), tomografía electromagnética (EMT) y tomografía por resistencia eléctrica (ERT). Este tipo de sistemas involucran electrónica para el sensado, medición y la conmutación necesaria para el funcionamiento del sistema, así como acondicionamiento de señal, conversión análogo/digital, sistemas de comunicación y un sistema de

procesamiento central de la información, incluyendo algoritmos de análisis y visualización de datos. La principal desventaja de estas técnicas es la moderada resolución espacial de las imágenes resultantes ya que los campos eléctricos no se pueden limitar a un camino único entre un emisor y un receptor [2].

La tomografía eléctrica ha motivado aplicaciones para el diseño, la validación, el monitoreo en línea y el control de procesos, lo cual permite mejorar la calidad y la eficiencia de los sistemas reduciendo el desperdicio de tiempo y de recursos y representando a su vez beneficios relacionados con el medio ambiente.

1.5. Principios de los sensores tomográficos

Existen diferentes técnicas para la medición de flujos multifásicos. La clasificación de dichas técnicas puede hacerse en función del tipo de energía utilizada, la proyección de la energía en el medio que se está visualizando o en función de la distorsión del campo del sensor. En la primera clasificación pueden encontrarse técnicas por radiación de energía (luz, rayos x, rayos gamma, resonancia magnética, etc.), técnicas acústicas (señales ultrasónicas) y técnicas basadas en comportamientos eléctricos (conductivas, capacitivas e inductivas).

Un ejemplo de un sistema óptico consiste de un arreglo emisor/receptor de luz infrarroja localizado en la periferia del sensor. La intensidad de la radiación óptica es proporcional a la distribución de fases y al coeficiente de absorción en la trayectoria de la luz. La información recolectada de los ases de luz que cubren el área del flujo se utiliza posteriormente para la reconstrucción de las imágenes.

Mientras que un ejemplo de sistema acústico es el de ultrasonido que consiste en emisores de energía ultrasónica y un igual número de receptores

instalados alrededor de la tubería. El principio de funcionamiento en este caso es la transmisión de energía; el tiempo de propagación de la energía hasta los receptores es medido considerando que el medio perturba la señal y de esta forma se determina la distribución de los materiales dentro de la tubería.

Las técnicas basadas en propiedades de impedancias eléctricas se subdividen en capacitivas, resistivas e inductivas, dependiendo de la propiedad física que se mida. Estas técnicas son relativamente fáciles de instalar y su mantenimiento es también relativamente sencillo, tienen una respuesta rápida y es posible la implementación en tiempo real [4].

1.6. Tomografía por capacitancia eléctrica

La tomografía por capacitancia eléctrica (ECT) ha sido desarrollada para visualización y medición de distribución de permitividades en la sección transversal de una tubería utilizando un sensor capacitivo multi-electrodo. La ECT es de las más estudiadas dentro de diferentes modalidades de tomografía. Existen similitudes entre la ECT y la tomografía de rayos x utilizada en equipos médicos ya que ambas entregan información acerca de la sección transversal de la distribución de los materiales, sin embargo, la ECT se basa en la medición de capacitancia entre los diferentes pares de electrodos que conforman el sensor y el principio de los equipos de rayos x es medir la atenuación de la intensidad de dichos rayos.

La tomografía ECT ha sido desarrollada para crear imágenes de procesos industriales que trabajen con materiales dieléctricos. Se basa en la medición de cambios de capacitancia que son causados por los cambios en la distribución de permitividades del flujo. Las mediciones de capacitancias se obtienen de un sensor multi-electrodo ubicado alrededor de la tubería del

proceso, comúnmente el sensor está compuesto por electrodos cuyo número va de 8 a 12 electrodos.

A partir de las mediciones realizadas se obtienen las imágenes para representar la distribución de permitividades. La mayoría de los sistemas ECT emplean un diseño dedicado para la circuitería encargada de la medición de capacitancia, circuitos de carga/descarga y circuitos de AC que han sido usados satisfactoriamente con flujos de dos fases, e.g. gas/aceite en tuberías de crudo, flujos gas/sólido en transportadores neumáticos y en lechos fluidizados.

Comparada con otras modalidades de tomografía, la ECT ofrece algunas ventajas como no radiación, rápida respuesta, costo relativamente bajo, no intrusiva, no invasiva y la capacidad de trabajar bajo condiciones de alta temperatura y presión. Aunque requiere una reconstrucción de imágenes complicada debido a la relación no lineal entre las mediciones y la distribución de permitividades [2].

1.6.1. Operación del sistema ECT

Los métodos de sensado capacitivo están disponibles para flujos que consisten en componentes con permitividades diferentes, tales como agua/aceite, gas/aceite o mezclas sólido/gas. Los sensores capacitivos representan una alternativa prometedora para un amplio número de aplicaciones.

Un sensor capacitivo consiste normalmente de cuatro módulos principales: (1) electrodos de medición, (2) banda aisladora, (3) cubiertas exterior y radial y (4) conectores y cables coaxiales. Normalmente se tienen entre 8 y 12 electrodos montados en el exterior de la banda aisladora, encapsulados por la cubierta exterior y aunque se han utilizado diferentes tipos/formas de sensores, los más utilizados son de geometría circular. La Figura 2 muestra

la representación convencional de un sistema ECT circular, con los electrodos de medición distribuidos de manera uniforme alrededor de la tubería, los electrodos de guardia utilizados para evitar interferencias externas, la cubierta exterior conectada a tierra y la tubería aisladora sobre la cual se montan los electrodos.

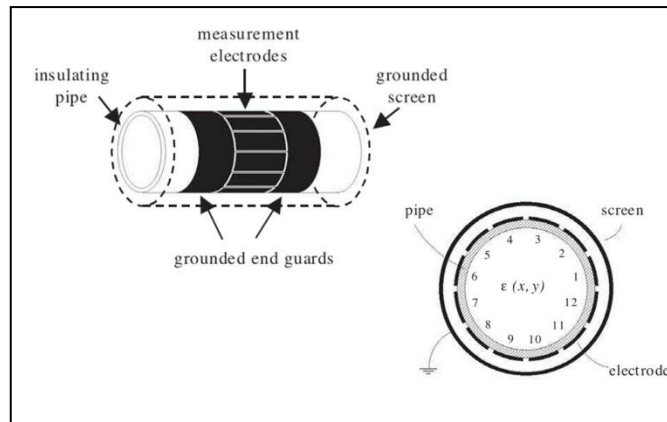


Figura 2, Representación de un arreglo de sensores de un sistema ECT [6]

El primer paso del proceso ECT consiste en obtener un conjunto de medidas de capacitancias que permitan calcular finalmente la imagen de la distribución de permitividades. Para un ejemplo de 12 electrodos como el de la Figura 2, inicialmente el electrodo número 1 se energiza con un voltaje fuente mientras que los electrodos 2 a 12 se utilizan como electrodos detectores y se conectan a tierra, obteniendo de esta manera 11 mediciones de capacitancia independientes. El siguiente paso es energizar el electrodo número 2 y realizar una nueva medición con los electrodos 3 a 12 como electrodos detectores para obtener 10 nuevas mediciones. El proceso continúa energizando cada uno de los electrodos siguientes y utilizando los electrodos restantes como electrodos detectores hasta que se energiza finalmente el electrodo número 11 y se usa el electrodo 12 para la detección y de esta forma se obtienen 66 mediciones independientes.

El número de mediciones está dado por $N(N - 1)/2$ siendo N el número total de electrodos [7]. Las $N(N - 1)/2$ mediciones son finalmente utilizadas para aplicar un algoritmo de reconstrucción de imágenes como el LBP.

Para el desarrollo de este algoritmo hace falta además de las mediciones de capacitancia, valores obtenidos mediante simulación representados por los mapas de sensibilidad del sensor y que serán utilizados como factores de peso.

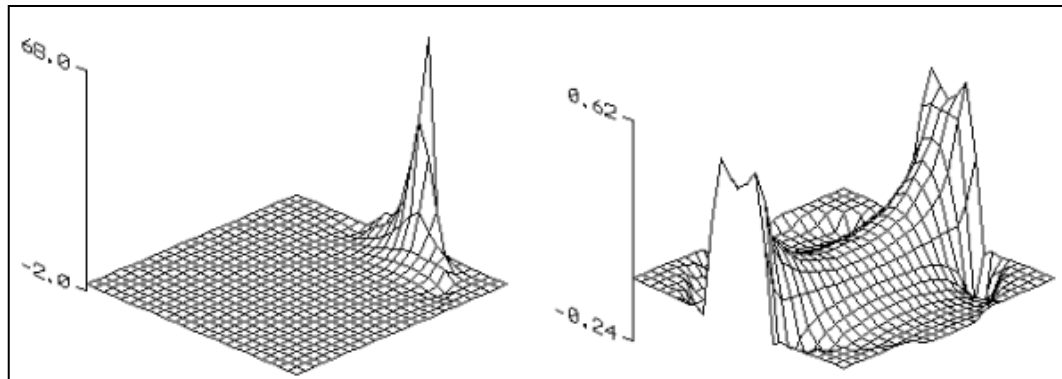


Figura 3, Formas típicas de mapas de sensibilidad [7].

Los mapas de sensibilidad representan la forma como se comportará la respuesta del sensor ante variaciones en la distribución de permitividades, mostrando la contribución de altas permitividades dentro de un medio de baja permitividad. La Figura 3 muestra algunas formas típicas de mapas de sensibilidad para electrodos adyacentes (izquierda) y para electrodos opuestos (derecha). Las medidas en el eje vertical corresponden a fF/cm.

Se puede notar que el máximo en la sensibilidad para electrodos adyacentes es 100 veces más grande que aquella para electrodos opuestos (68:0.62) y que algunas regiones presentan sensibilidades negativas, lo cual significa que en esa zona la capacitancia disminuirá con la presencia de un elemento de alta permitividad. Los mapas de sensibilidad vienen representados por matrices que cuentan con igual número de elementos que la imagen que representará la sección transversal del flujo.

Finalmente el algoritmo de reconstrucción de imagen superpone todas las mediciones de capacitancia utilizando los mapas de sensibilidad como factores de peso para determinar el nivel de gris de cada uno de los elementos que conforma la imagen final.

1.7. Tomografía virtual por capacitancia eléctrica.

La creciente necesidad de implementar medidores simples capaces de medir características del flujo sin recurrir a la separación de fases para diferentes regímenes de flujo, hacen la tomografía industrial una alternativa prometedora. El desarrollo de pruebas para caracterizar algún proceso en particular implica la utilización de instrumentos especializados como la electrónica y los módulos relacionados con la tomografía ECT, lo cual finalmente se traduce en costos.

La posibilidad de realizar simulaciones e investigación basada en software, además de ser más barato y rápido que la implementación hardware, promueve la idea de desarrollar sistemas ECT virtuales para realizar pruebas y estudiar procesos para establecer condiciones de operación.

Algunos trabajos se han realizado previamente enfocados a la investigación de aplicar tomografía ECT virtual para la medición de flujos multifásicos. W Q Yang (1999) [8] hace énfasis en el uso de sensores cuadrados para algunas aplicaciones, expone acerca de la generación de los mapas de sensibilidad, de la solución de la ecuación de Laplace mediante técnicas de diferencias finitas (FDM) y de la aplicación del algoritmo LBP y un algoritmo iterativo basado en LBP para la reconstrucción de imágenes [8].

Zhaoyan Fan et al. (2011) [9] está relacionado con el diseño de un instrumento virtual para sensado basado en ECT. El instrumento de este trabajo se sub divide en siete módulos principales: control de conmutación,

muestreo de datos, calibración de datos, cálculo de permitividades, generación de rejilla para representación, generación de la imagen y visualización. El subsistema de control de conmutación se encarga de dividir el proceso en pasos individuales para la medición de capacitancias de acuerdo al número total de mediciones formadas por todos los electrodos. Las conexiones de cada electrodo así como el multiplexor del circuito de medición, son controlados por los puertos digitales de entrada/salida (DIO) para obtener un valor medido en cada paso de la medición. Después de ser procesada por un pre-amplificador y un amplificador lock-in, la señal de voltaje proporcional al valor de capacitancia es muestreada por el subsistema de muestreo de datos. Cuando todas las capacitancias han sido medidas, el subsistema de normalización las procesa y las reorganiza de forma matricial. La información normalizada es combinada con la matriz de sensibilidad en el subsistema de cálculo de permitividades y finalmente se convierte en una imagen que representa la distribución de permitividades con los módulos de generación de la rejilla, generación de imagen y visualización [9].

W Q Yang (2005) [10] muestra el desarrollo en Matlab y con funciones DOS de un sistema virtual de tomografía ECT (VECT) en tuberías circulares. El diseño del sensor y la distribución de permitividad han sido implementados en esta plataforma así como algunos de los elementos de un sistema ECT. El método de los elementos finitos (FEM) se utiliza para calcular los valores de capacitancia y los mapas de sensibilidad; este sistema puede utilizarse para probar configuraciones y características de un sistema ECT.

El presente trabajo se basa en el desarrollo de un instrumento virtual para realizar pruebas relacionadas con un sistema ECT, presentando como contribución la posibilidad de realizar pruebas trabajando con diferentes geometrías en las tuberías bien sea tuberías cuadradas o circulares, teniendo en cuenta que en los trabajos previos las geometrías eran predefinidas. El método FEM se utiliza para el cálculo de los valores de

capacitancia entre electrodos y de los mapas de sensibilidad; estos valores se encuentran disponibles para la visualización por parte del usuario quien puede seleccionar entre tres diferentes modelos de normalización disponibles. La distribución convencional de sensores está disponible dentro de la herramienta y el usuario también cuenta con la posibilidad de establecer distribuciones personalizadas. Se pueden realizar pruebas con patrones de flujo definidos por el usuario o con patrones definidos previamente. El número de pixeles utilizados para la representación del proceso puede ser modificado y el error entre la imagen resultante y la imagen esperada puede utilizarse como parámetro de rendimiento.

2 Fundamentos teóricos

A continuación se hará una revisión de la manera en que la tomografía por capacitancia eléctrica se utiliza como técnica de visualización; particularmente de flujos multifásicos con componentes dieléctricos.

2.1. Problemas directo e inverso

La reconstrucción de imágenes para visualizar el comportamiento del flujo implica la solución de dos problemas importantes: el problema directo y el problema inverso. El problema directo implica obtener valores de capacitancia, a partir de una distribución de permitividad particular. La transformación directa está dada por [11]

$$C = S * G$$

1

en esta ecuación, C representa los valores de capacitancia de todos los pares de electrodos, G es una matriz que representa la distribución de permitividades del proceso y S es la matriz que corresponde al denominado mapa de sensibilidad para cada par de electrodos.

El problema inverso se basa en crear una imagen correspondiente a la distribución de permitividades a partir de los valores de la capacitancia [11].

$$G = S^{-1} * C$$

2

donde G se interpreta como la matriz que corresponde a la imagen obtenida.

La base de la tomografía ECT como técnica de visualización, reside en la relación que existe entre la distribución de permitividades del flujo y la distribución de potencial eléctrico que se origina en el mismo. Las medidas

de capacitancia y las distribuciones de permitividad están relacionadas por la ecuación [3]:

$$C = \frac{Q}{V} = -\frac{1}{V} \iint_{\Gamma} \varepsilon(x, y, z) \nabla \varphi(x, y, z) d\Gamma$$

3

donde Q representa la carga de los electrodos, V la diferencia de potencial entre ellos, $\varepsilon(x, y, z)$ la distribución de permitividad eléctrica, $\varphi(x, y, z)$ el potencial eléctrico y Γ la superficie del electrodo. Por lo tanto, para resolver la ecuación 3, es necesario conocer el potencial eléctrico $\varphi(x, y, z)$ o de forma equivalente el campo eléctrico $E(x, y, z)$.

2.2. La ecuación de Laplace

Las ecuaciones de Maxwell que rigen el problema electromagnético vienen dadas por [14].

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

4

Las cantidades electromagnéticas relacionadas en las ecuaciones de Maxwell son: la intensidad de campo eléctrico \vec{E} , el desplazamiento eléctrico

\vec{D} , la densidad de flujo magnético \vec{H} , la inducción magnética \vec{B} , la densidad de corriente \vec{j} y la densidad de carga ρ .

Cuando el problema se resuelve para el caso de un material en particular como en este trabajo, el desplazamiento eléctrico puede representarse como una contribución del vacío y del material, dada por

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = (\varepsilon_0 + \chi) \vec{E}$$

$$D = \varepsilon \vec{E}$$

5

donde ε_0 es la permitividad del vacío, \vec{P} la polarización del medio y χ la susceptibilidad eléctrica. La permitividad absoluta ε relaciona la permitividad del medio ε_r y la permitividad del vacío; viene dada por $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$.

Para cantidades independientes del tiempo se puede definir un potencial φ del cual se obtiene el campo eléctrico dado por $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Tenemos entonces que

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \varepsilon (\nabla\varphi) = -\rho$$

6

de forma explícita se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\rho$$

7

La naturaleza de este trabajo supone que en la coordenada z se tiene un comportamiento homogéneo e independiente del tiempo. Por lo tanto, en dos dimensiones la ecuación 7 está dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\rho$$

8

Esta ecuación corresponde a la ecuación de Poisson y define la distribución de potencial en el dominio eléctrico en donde existe el campo eléctrico. Para resolverla se definen las condiciones de frontera dadas por los voltajes en los electrodos. Adicionalmente se consideran condiciones geométricas, la información dieléctrica de los materiales y la densidad de cargas en el dominio [12].

La ecuación de Laplace corresponde a un caso particular de la ecuación de Poisson suponiendo un área libre de cargas netas dentro de la tubería $\rho = 0$ [3].

$$\nabla(\varepsilon(x, y, z) \nabla \varphi(x, y, z)) = 0$$

9

donde al igual que en la ecuación 3, $\varepsilon(x, y, z)$ representa la distribución de permitividad eléctrica y $\varphi(x, y, z)$ el potencial eléctrico. La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas se define entonces por

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial y^2} \right) = 0$$

10

Existen formas de solucionar la ecuación de Laplace de forma analítica, cuando se conoce la expresión para la distribución de permitividad. Sin embargo, los métodos analíticos para la solución de ecuaciones en derivadas

parciales, como la ecuación 9, son inviables cuando se busca resolver el sistema para multitud de distribuciones de permitividad distintas [3], debe buscarse entonces, una manera diferente de obtener la distribución de campo eléctrico dentro de la tubería.

La solución de una ecuación diferencial mediante el método de elemento finito (FEM, finite element method) se basa en la reformulación del problema continuo; básicamente, obtener un grupo de funciones discretas sencillas, que dependan de un número finito de parámetros y posteriormente resolver el problema mediante la minimización de alguna variable física que en la mayoría de los casos está dada por la energía del sistema.

Para el caso de la ecuación 9; el funcional correspondiente [13] viene dado por la energía electrostática; en problemas de electromagnetismo la energía electrostática satisface la solución de 9 de forma promedio y viene dada por

$$F^e[\varphi^e] = \frac{1}{2} \varepsilon \int \int \int_v |\nabla\varphi|^2 dv$$

11

De esta ecuación se obtiene la distribución de potencial necesario para la solución del problema directo.

2.3. Mapas de sensibilidad

Una de las características clave para un sensor tomográfico es la sensibilidad, por lo que se requiere el conocimiento de este concepto importante para el proceso de reconstrucción de imágenes [3]. En diferentes casos la sensibilidad se obtiene ya sea calculando, computando o midiendo

la variación de capacitancia cuando ocurre una variación en la cantidad a medirse.

La sensibilidad de un sensor indica cuanto varía la salida del mismo con respecto a una variación en su ambiente y en el caso de un sensor capacitivo la señal depende del voltaje aplicado, de la permitividad y de la posición o la forma de los electrodos.

Los mapas de sensibilidad también se conocen como distribuciones de permitividad y son esencialmente la respuesta a variaciones de permitividades altas dentro de un medio de baja permitividad lo cual hace la sensibilidad dependiente de la posición.

Como ya se dijo, para un arreglo de N electrodos existen $N(N - 1)/2$ pares independientes de electrodos, entonces, se tiene igual número de mediciones de capacitancia y de mapas de sensibilidad.

Un método para obtener los mapas de sensibilidad representados de forma matricial, es dividir el área de sensado en un número P de pixeles e ir modificando la permitividad de cada uno de ellos, esto es, asignando por turnos un valor de permitividad alto a cada pixel mientras los demás permanecen con un valor de permitividad bajo produciendo cada vez cambios en la carga del electrodo receptor [14]. A cada pixel en un mapa de sensibilidad se le asigna el valor del cambio en la respuesta del sensor cuando dicho pixel tiene asignado el valor de permitividad alta. Así, el mapa de sensibilidad de un par de electrodos $i - j$ puede definirse como

$$S_{ij}(p) = \Delta q_{ij}(p) = -\Delta C_{ij}(p) * v$$

12

donde i y j representan los índices del par de electrodos al cual corresponde el mapa $S_{ij}(p)$; vienen dados por: $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, N$ e $i \neq j$.

El subíndice p representa los píxeles del mapa y cumple que: $p = 1, 2, \dots, P$, siendo P el número total de píxeles del mapa. Los mapas de sensibilidad para el par de electrodos $i - j$ puede también definirse como

$$S_{ij}(p) = \frac{C_{ij}(p) - C_{ij}(emp)}{C_{ij}(full) - C_{ij}(emp)}$$

13

donde $C_{ij}(p)$ representa la medición de capacitancia cuando sólo el píxel p representa el material con la permitividad más alta y los demás píxeles al material con baja permitividad, $C_{ij}(emp)$ representa el valor de capacitancia del par $i - j$ cuando la totalidad de píxeles representan el material de baja permitividad y $C_{ij}(full)$ el valor de capacitancia del par cuando la totalidad de los píxeles corresponden al material de alta permitividad.

Para un mismo par de electrodos la sensibilidad puede variar drásticamente, i.e. la distribución de sensibilidades no es uniforme.

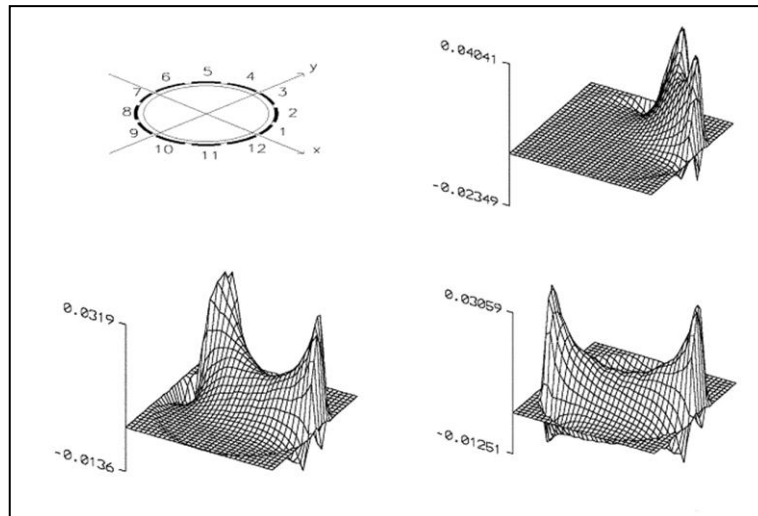


Figura 4, Formas de distribuciones de sensibilidad [6].

La Figura 4 también muestra algunas formas básicas de distribuciones de permitividad para un sensor de 12 electrodos en una tubería circular [14]. Se puede notar que la sensibilidad es más alta cerca de los electrodos que en el centro de la región de sensado, lo cual indica que la sensibilidad es proporcional a la intensidad de del campo eléctrico.

Otra forma de calcular la sensibilidad está dada por

$$S_{ij}(x, y) = - \int_{a(x,y)} \frac{\vec{E}_i(x, y)}{V_i} \cdot \frac{\vec{E}_j(x, y)}{V_j} d_x d_y$$

14

donde $\vec{E}_i(x, y)$ representa la distribución de campo eléctrico cuando el electrodo i funciona como electrodo fuente con un voltaje de excitación V_i mientras los otros electrodos se conectan a tierra y $a(x, y)$ representa el área del pixel (x, y) .

Los mapas de sensibilidad pueden ser obtenidos por medición física o por el método FEM. Cuando se obtienen por medición física se deben superar aspectos relacionados con el gran número de mediciones requeridas, con las configuraciones para las pruebas que requieren diversas modificaciones con el fin investigar los cambios en los parámetros físicos y con casos donde no es conveniente usarlo debido al gran tamaño de las tuberías, lo cual lleva a que muchos investigadores prefieran el método FEM (Revisar apéndice 1).

2.4. Algoritmo LBP

El problema de reconstrucción de imágenes bidimensionales por retroproyección se basa en obtener una imagen a partir de las proyecciones obtenidas en dicho proceso. En el caso de un proceso ECT la idea es obtener proyecciones de la distribución de permitividades por medio de las

diferentes combinaciones de pares de electrodos fuente-receptor. Conceptualmente, al modificar el ángulo de detección alrededor del objeto se obtienen las diferentes proyecciones como se muestra en la Figura 5 donde el objeto tiene coordenadas (x, y) y la proyección está caracterizada por la información (r, φ) .

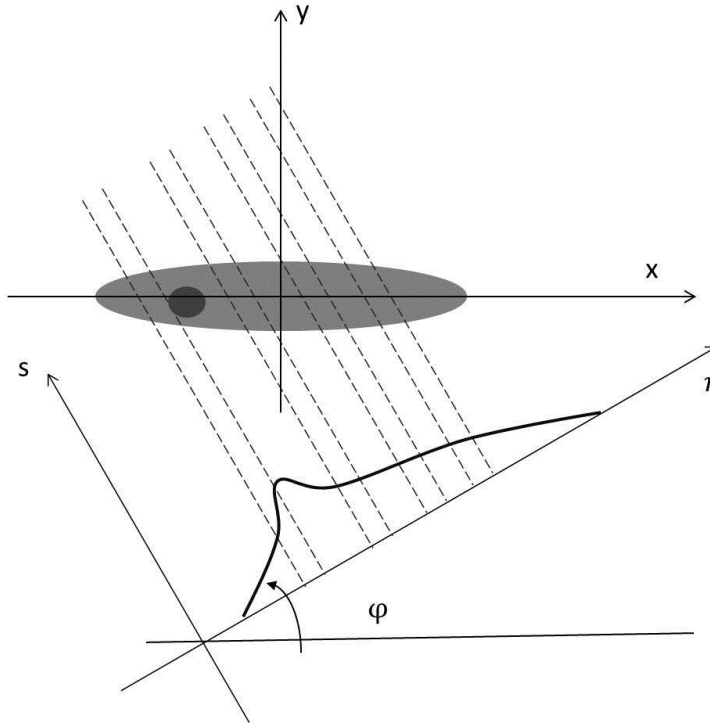


Figura 5, Proyección $p(r, \varphi)$ de un objeto con coordenadas (x, y) .

En una retroproyección se asigna un peso igual a todos los pixeles que contribuyen a un mismo punto de cada proyección particular y este proceso se repite para todas las proyecciones y las intensidades de un mismo punto se suman para obtener una imagen $\hat{f}(x, y)$ representada matemáticamente por

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{j=1}^n p(r, \varphi_j) d\varphi$$

donde n es el número de proyecciones y φ representa el ángulo de cada proyección.

La Figura 6 muestra una representación del concepto de proyección donde a) representa 4 posibles proyecciones P1-P4 para un objeto circular, b) muestra lo que serían las proyecciones P1 y P3, c) corresponde a las 4 posibles proyecciones y d) sería el resultado de obtener infinitas proyecciones de este objeto circular.

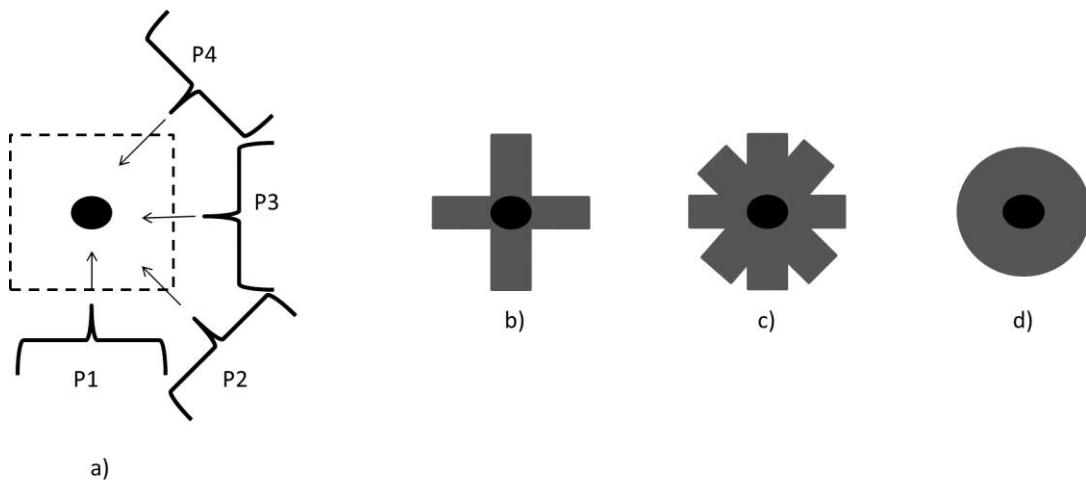


Figura 6, Representación del concepto de proyección.

Las $N(N - 1)/ 2$ medidas de capacitancia actúan como proyecciones para el algoritmo LBP y permiten obtener la imagen que muestra la mezcla de los componentes en una sección transversal de la tubería y el algoritmo LBP se encarga de la obtención de dicha imagen.

La tarea de un algoritmo de reconstrucción de imágenes consiste en forma discreta en obtener la matriz G a partir de los valores C mientras la matriz S se considera una matriz constante por simplicidad. El algoritmo LBP utiliza la matriz S transpuesta en lugar de la inversa y el orden de las matrices depende del número de píxeles utilizados para representar el sistema [15].

Para un sensor con N electrodos y una imagen hecha de P pixeles representando el interior de la tubería, la fórmula básica del algoritmo LBP calcula el nivel de gris de la siguiente manera

$$G(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N C_{ij} S_{ij}(x, y)}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N S_{ij}(x, y)}$$

16

donde S_{ij} representa el mapa de sensibilidad, (x, y) la coordenada del pixel de interés y C_{ij} la capacitancia normalizada para el par de electrodos $(i - j)$ [8].

2.5. Modelos de normalización

Es práctica común en los sistemas ECT utilizar valores normalizados para la reconstrucción de imágenes. La normalización convencional asume que la distribución de los materiales se presenta en paralelo y el valor de capacitancia normalizada es una función lineal de la capacitancia medida [16]

$$\lambda = \frac{C_m - C_l}{C_h - C_l}$$

17

donde λ es el valor normalizado para la capacitancia medida entre un par de electrodos, C_m es el valor medido, C_l es el valor de capacitancia obtenido cuando el sensor está lleno del material con la permitividad más baja y C_h es el valor de capacitancia medido para el sensor lleno con el material de permitividad más alta.

De la ecuación 17 se tiene que los valores serán máximo 1 y mínimo 0 cuando el sensor esté lleno con los materiales de más alta y más baja permitividad respectivamente. Cuando el sensor esté parcialmente lleno con material de alta permitividad, la capacitancia normalizada se tratará como una interpolación lineal [16].

La Figura 7 muestra un sensor tomográfico con 8 electrodos (izquierda) que contiene un elemento cilíndrico de alta permitividad dentro de un medio con aire y se toma la capacitancia entre los electrodos 1-4 como ejemplo. La capacitancia medida puede ser considerada como 3 capacitancias en serie donde C_1 y C_3 corresponden al espacio con aire y C_2 corresponde a la capacitancia del objeto. Ya que C_1 y C_3 corresponden al mismo material, se pueden considerar como una sola capacitancia en serie, C_4 . Ahora C_4 y C_2 se pueden modelar como una nueva capacitancia también en serie. Las dos capacitancias se pueden aproximar como un capacitor de placas paralelas como el mostrado en la Figura 7 (derecha).

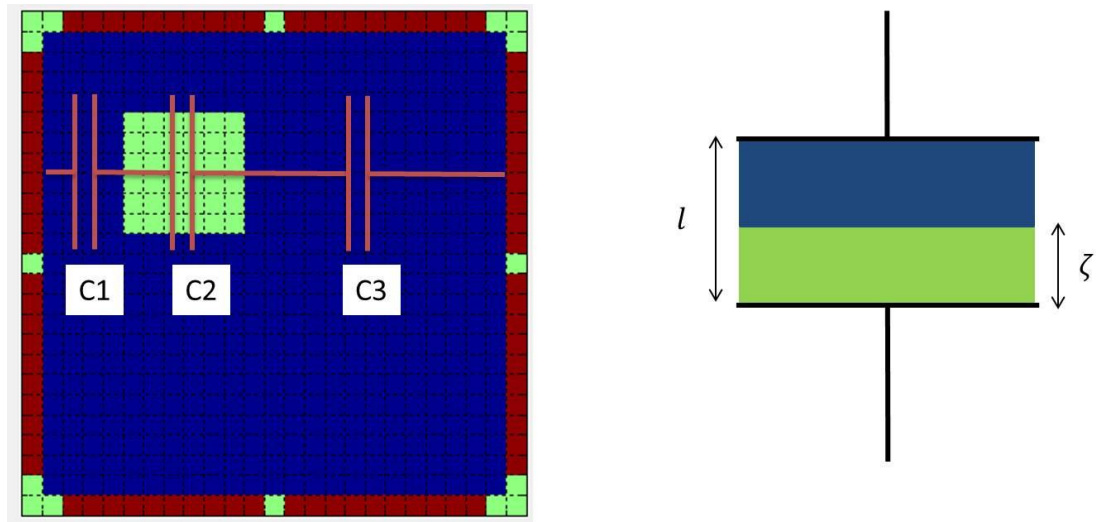


Figura 7, (izquierda) Sensor con un elemento de alta permitividad en un ambiente con aire, (derecha) modelado con un capacitor de placas paralelas [16].

Se asume un valor de unidad para el espacio entre las dos placas y un grosor de ζ que representa una fracción del material de alta permitividad. Ya

que C_l y C_h representan las capacitancias para el espacio dentro de las placas lleno con material de baja y alta permitividad respectivamente, se tiene que la fracción de capacitancia para material de alta permitividad es C_h/ζ y para baja permitividad $C_l/(1 - \zeta)$ dando como resultado el valor de capacitancia normalizada como

$$C_m = \frac{1}{\frac{\zeta}{C_h} + \frac{1-\zeta}{C_l}}$$

18

reorganizando queda

$$\zeta = \frac{\frac{1}{C_m} - \frac{1}{C_l}}{\frac{1}{C_h} - \frac{1}{C_l}}$$

19

Esta ecuación también puede ser considerada un valor normalizado donde se asume la distribución de los materiales en serie.

El valor convencional de normalización asume la distribución en paralelo, lo cual es factible sólo para algunas situaciones, de igual manera, la normalización en serie sólo es completamente correcta para los casos donde los electrodos son completamente paralelos.

3 Metodología

Un sistema como el ECT tiene diferentes ventajas y aplicación en diferentes áreas industriales; su desarrollo de manera personalizada involucra diferentes características que deben ser estudiadas. A continuación se muestra la metodología general aplicada en este trabajo con el fin de desarrollar el instrumento virtual y cubrir de manera dinámica las diferentes etapas de una tomografía ECT.

3.1. El instrumento virtual

Teniendo en cuenta los aspectos teóricos relacionados con el proceso tomográfico ECT se explicarán a continuación algunas consideraciones para el diseño del instrumento virtual. La Figura 8 muestra un esquema general de las etapas y el funcionamiento del instrumento virtual.

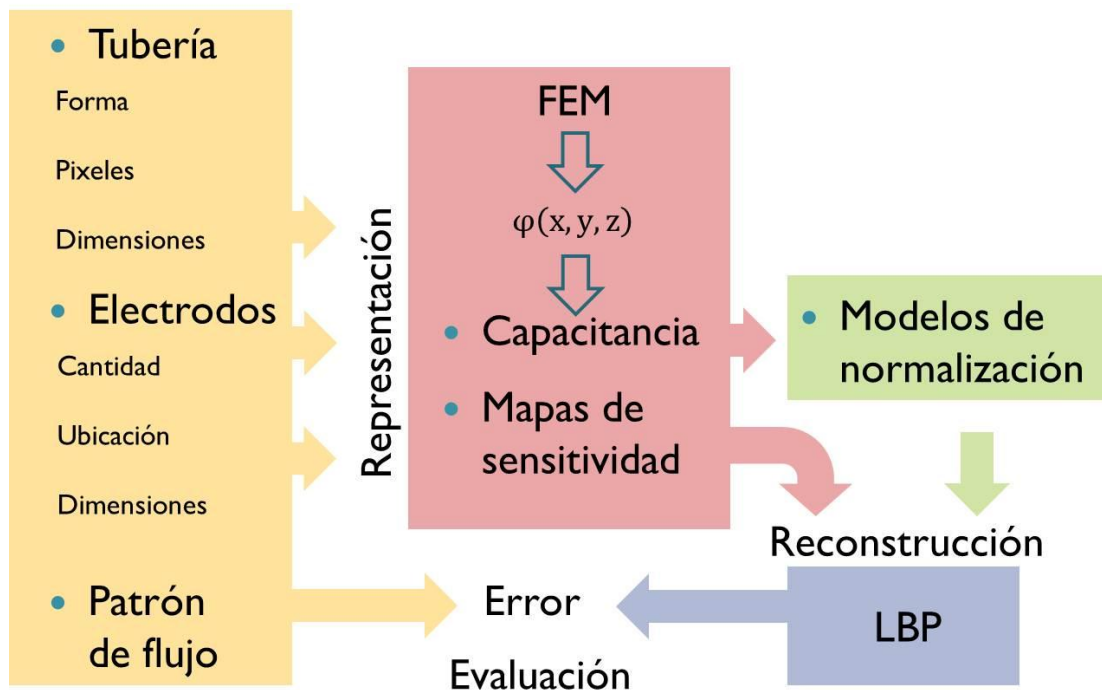


Figura 8, Esquema del instrumento virtual.

El usuario del instrumento tendrá la posibilidad de definir parámetros relacionados con la tubería, los electrodos y el patrón de flujo. En primer lugar podrá definir la geometría de la tubería, los pixeles que utilizará para la representación y las dimensiones de la misma. Con los parámetros de la tubería definidos, el siguiente paso está relacionado con establecer la configuración la cantidad, la ubicación y las dimensiones de los electrodos. Finalmente se tendrá la posibilidad de cargar una imagen correspondiente al patrón de flujo que se quiere estudiar.

Con estos parámetros definidos, el instrumento se encarga de calcular los valores de capacitancia y los mapas de sensibilidad aplicando el método FEM. Como puntos intermedios en el proceso está la posibilidad de revisar los valores de capacitancia obtenidos, la revisión de la forma de los mapas de sensibilidad y la selección del modelo de normalización que se quiere utilizar para la reconstrucción.

Finalmente se realiza el proceso de reconstrucción de imágenes aplicando el algoritmo LBP; la imagen resultante se compara con el patrón de flujo esperado para determinar el error y usar este valor como un parámetro de evaluación de la configuración establecida.

Para mostrar la forma como el instrumento obtiene la distribución de permitividades dentro de la tubería y calcula los valores de capacitancia entre los electrodos a continuación se muestra un ejemplo donde se calcula el valor de capacitancia de un capacitor de placas paralelas.

3.2. Capacitor de placas paralelas

Utilizando el método FEM se analizará un ejemplo relacionado con un capacitor de placas paralelas mostrado en la Figura 9 (para mayor detalle, revisar apéndice 1). Se tienen dos permitividades diferentes y el sistema se discretiza con 6 elementos. Con base a la ecuación 3 y los parámetros del

capacitor mostrados a continuación, se obtiene un valor de capacitancia dado por

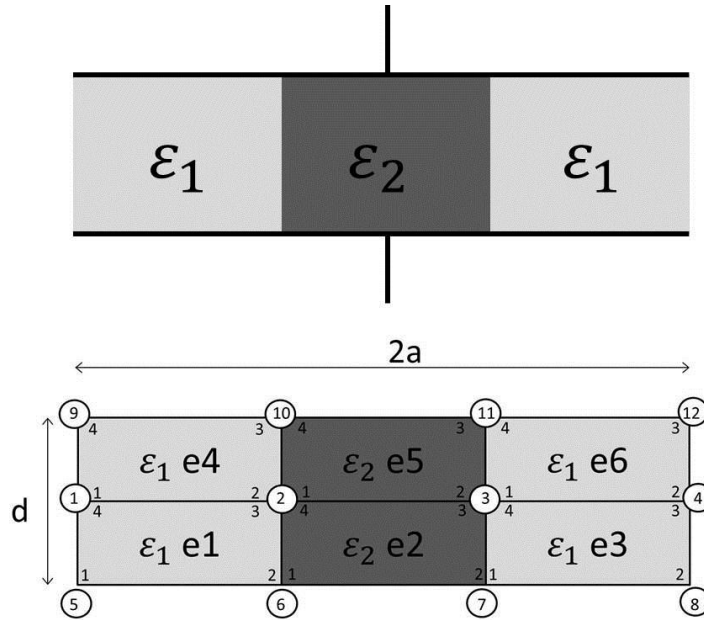


Figura 9, Capacitor de placas paralelas (arriba) y su representación con 6 elementos (abajo).

$$a = 34.3559 * 10^{-4} m^2$$

$$d = 7.067 * 10^{-2} m$$

$$\epsilon_0 = 8.8543 * 10^{-12}$$

$$\epsilon_{r1} = 2$$

$$\epsilon_{r2} = 80$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 * \epsilon_{r1}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 * \epsilon_{r2}$$

$$C = \frac{2 * a}{3 * d} (2 * \epsilon_1 + \epsilon_2) = 2.1323 * 10^{-22} F$$

Para la obtención de este valor mediante el método FEM, el primer paso consiste en definir la rejilla que representa el sistema, la Figura 9 muestra el sistema (arriba) y la rejilla (abajo); cada uno de los elementos de la rejilla está definido por un elemento rectangular como el mostrado en la Figura 10. En la Figura 9, los números internos de los elementos corresponden a los

nodos locales y los números encerrados corresponden a los nodos globales del sistema.

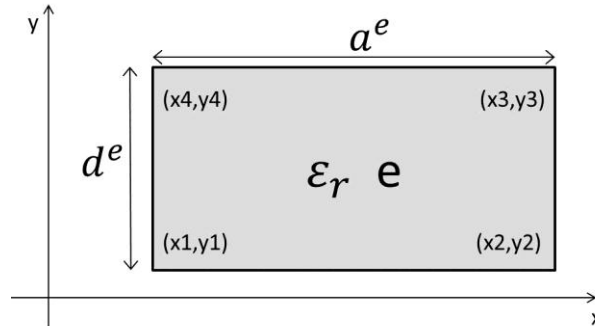


Figura 10, Elemento rectangular.

El siguiente paso corresponde con la definición de funciones que representen el elemento y establezcan la relación entre los nodos locales que lo conforman. La manera como se representa esta relación nodal está dada por la matriz

$$A^e = \begin{bmatrix} A_{11}^e & A_{12}^e & A_{13}^e & A_{14}^e \\ A_{21}^e & A_{22}^e & A_{23}^e & A_{24}^e \\ A_{31}^e & A_{32}^e & A_{33}^e & A_{34}^e \\ A_{41}^e & A_{42}^e & A_{43}^e & A_{44}^e \end{bmatrix}$$

20

Donde cada término representa la forma como un nodo del elemento se relaciona consigo mismo y con los otros nodos. Los elementos de esta matriz se determinan por

$$A_{ij}^e = \iint_e \epsilon_e \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$i, j = 1, 2, 3 \dots w$ $w =$ número de nodos del elemento e

donde los términos N_i y N_j corresponden a funciones denominadas funciones base y están definidas en términos de la geometría del elemento. Con la matriz A^e representando cada elemento, el siguiente paso consiste en representar el sistema ensamblado mediante una matriz A_{comp} cuyos términos establecen la relación nodal global del sistema y donde las relaciones nodales locales están implícitas.

Para la solución del sistema se tiene que el funcional en el caso electromagnético, está dado por la energía electrostática en función de la distribución de potencial.

$$F^e[\varphi^e] = \frac{1}{2} \varepsilon \int \int \int_v |\nabla \varphi|^2 dv$$

21

De forma matricial se tiene

$$F = \frac{1}{2} [\varphi]^T [A_{comp}] [\varphi]$$

22

La ecuación 22 está en función de la distribución de potencial que se busca determinar y de la matriz que representa el sistema ensamblado. El método FEM en este caso se basa en la solución de un problema de minimización a través la derivada de la energía electrostática en función de los potenciales desconocidos.

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial}{\partial [\varphi_f]_k} [\varphi_f^T \varphi_b^T] \begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fb} \\ A_{bf} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_f \\ \varphi_b \end{bmatrix} = 0$$

23

los subíndices f y b representan los nodos con potenciales libres y los nodos con potenciales conocidos respectivamente. Derivar y resolver la ecuación 23 en términos de los potenciales desconocidos da como resultado

$$\varphi_f = -A_{ff}^{-1} * A_{fb} * \varphi_b$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} -A_{ff}^{-1} A_{fb} \varphi_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$

24

Nótese que los nodos 5, 6, 7 y 8 representan la placa inferior del capacitor con un potencial de 0(v), los nodos 9, 10, 11 y 12 representan la placa superior con un voltaje de 1(v) y los nodos 1, 2, 3 y 4 en este caso corresponden a los nodos con potenciales desconocidos. El vector solución para este ejemplo viene dado por

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_f \\ \varphi_b \end{bmatrix} = |0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1|$$

Finalmente el valor de la capacitancia se determina por

$$C = \frac{[\varphi]^t [A_{comp}] [\varphi]}{V} = 2.1322 * 12^{-22} F$$

donde el resultado obtenido, corresponde con el valor resultante al aplicar la definición de capacitancia. De esta manera se parte del problema continuo, se realiza la discretización y caracterización del sistema y por medio de la minimización de la energía se determina la distribución de potencial nodal para calcular el valor de capacitancia. Este procedimiento representa la solución del problema directo asociado a un sistema ECT aplicando el método FEM.

3.3. Distribuciones de potencial

Como se mostró previamente, uno de los pasos intermedios del método FEM para calcular el valor de capacitancia corresponde a la determinación del vector de potenciales. Ahora, aplicando este método en un sistema que representa una tubería cuadrada con 4 electrodos en su periferia como se

muestra en la Figura 11 (donde los pixeles de tonalidad clara representan los electrodos y los de tonalidad oscura representan el interior de la tubería), se obtienen las distribuciones de potencial en el interior de la tubería. Dichas distribuciones serán utilizadas posteriormente para el cálculo de los mapas de sensibilidad. La numeración alrededor de la imagen corresponde a la numeración definida para los electrodos.

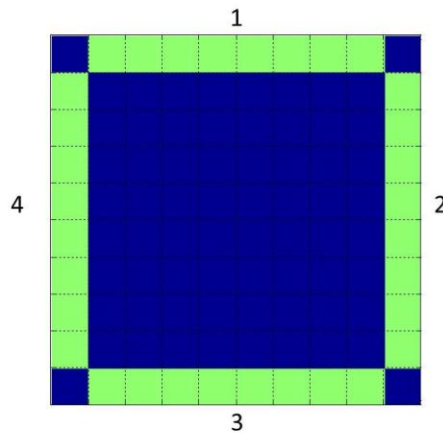


Figura 11, Representación de tubería cuadrada con 4 electrodos con una matriz de 10*10 elementos

Para $N = 4$ electrodos, se tienen $N * \frac{(N-1)}{2} = 6$ posibles combiaciones independientes de pares de electodos e igual número de posibles distribuciones de potencial. Para obtener las distribuciones de potencial el procedimiento es el mismo descrito para calcular el valor de capacitancia entre electodos.

Cuando el electrodo número 1 se utiliza como electrodo fuente conectado a un voltaje de 1(v) y los electodos 2, 3 y 4 se usan como electodos detectores conectados a tierra, 0 (v), se obtienen las distribuciones de potencial mostradas en la Figura 13 (arriba izquierda, arriba derecha y abajo respectivamente); considerando que dentro de la tubería se tiene la distribución de permitividad mostrada en la Figura 12.

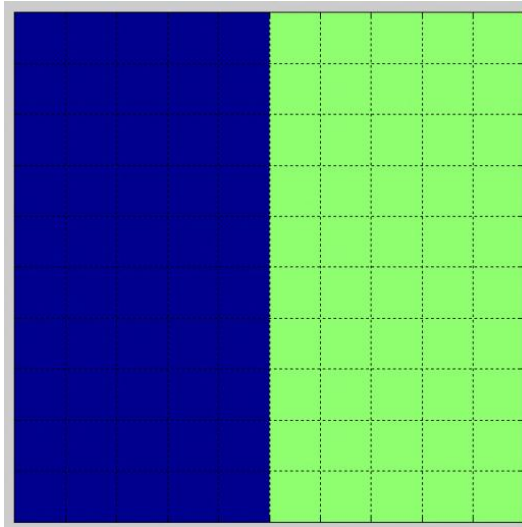


Figura 12, Distribución de permitividad para cálculo de distribución de potencial.

A partir de estas distribuciones se obtienen las distribuciones de campo eléctrico y seguidamente los mapas de sensibilidad del sensor.

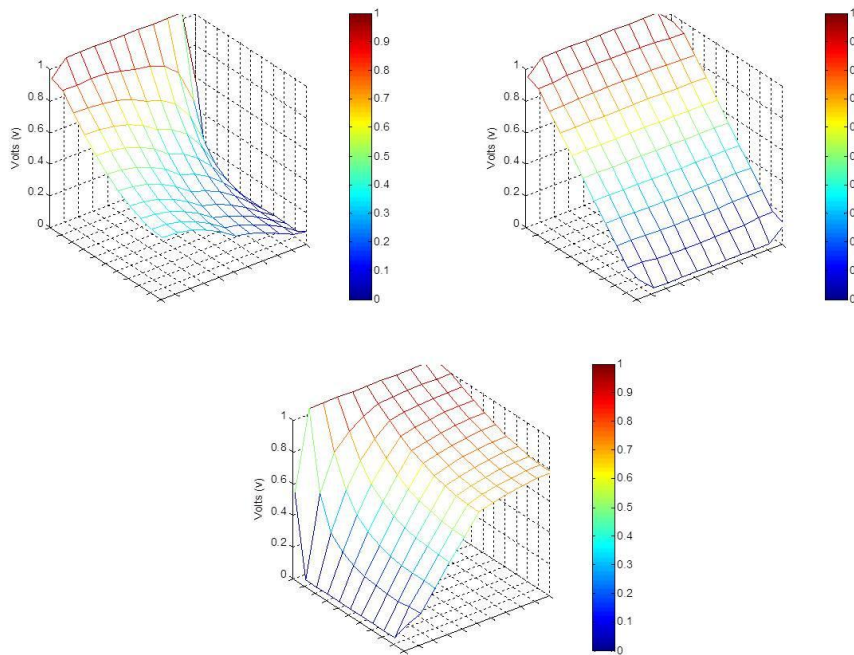


Figura 13, Distribución de potencial de los pares 1-2 (arriba izquierda), par 1-3 (arriba derecha) y par 1-4 (abajo)

3.4. Mapas de sensibilidad

Para obtener los mapas de sensibilidad que caracterizan al sensor, el primer paso es obtener las N distribuciones de potencial que corresponden a igual número de electrodos. Para obtener estas distribuciones se establece cada uno de los electrodos como electrodo fuente mientras los demás electrodos están todos conectados a tierra. Seguidamente se obtiene la distribución de campo eléctrico y se obtienen los mapas de sensibilidad como lo indica la ecuación 14.

Para un ejemplo correspondiente a un sensor cuadrado con 8 electrodos en su periferia como el mostrado en la Figura 14, el mapa de sensibilidad correspondiente al par de electrodos 1-4 se muestra en la Figura 16 y las distribuciones de potencial de los electrodos 1 y 4 son los encontrados en la Figura 15 izquierda y derecha respectivamente.

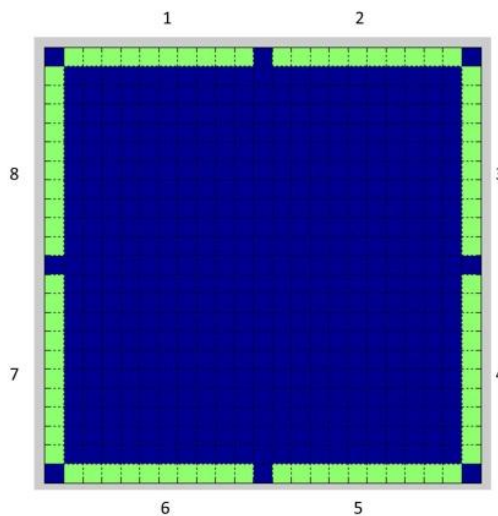


Figura 14, Representación para sensor con 8 electrodos.

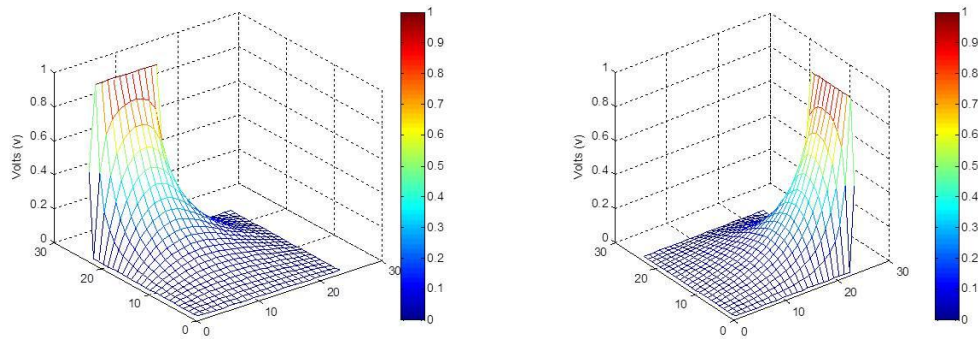


Figura 15, Distribuciones de potencial para electrodos 1 (izquierda) y 4 (derecha).

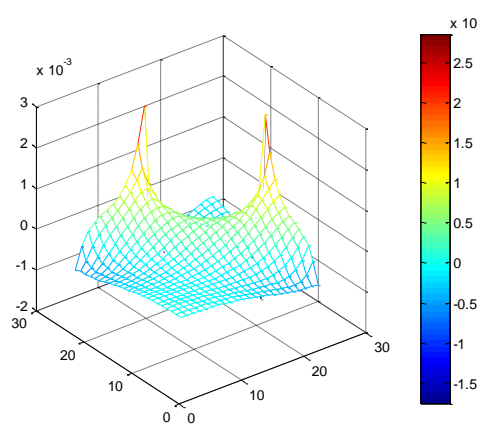


Figura 16, Mapa de sensibilidad para el par de electrodos 1-4.

3.5. Reconstrucción de imágenes

Finalmente después de obtener los valores de capacitancia entre electrodos, obtener los valores normalizados y conocer los mapas de sensibilidad, se implementa el algoritmo LBP basado en la ecuación 16 y se obtienen las imágenes que representan las distribuciones de permitividad dentro de la tubería.

Algunos ejemplos se muestran en la Figura 17. Los valores de los pixeles están normalizados en las imágenes originales y en las imágenes reconstruidas.

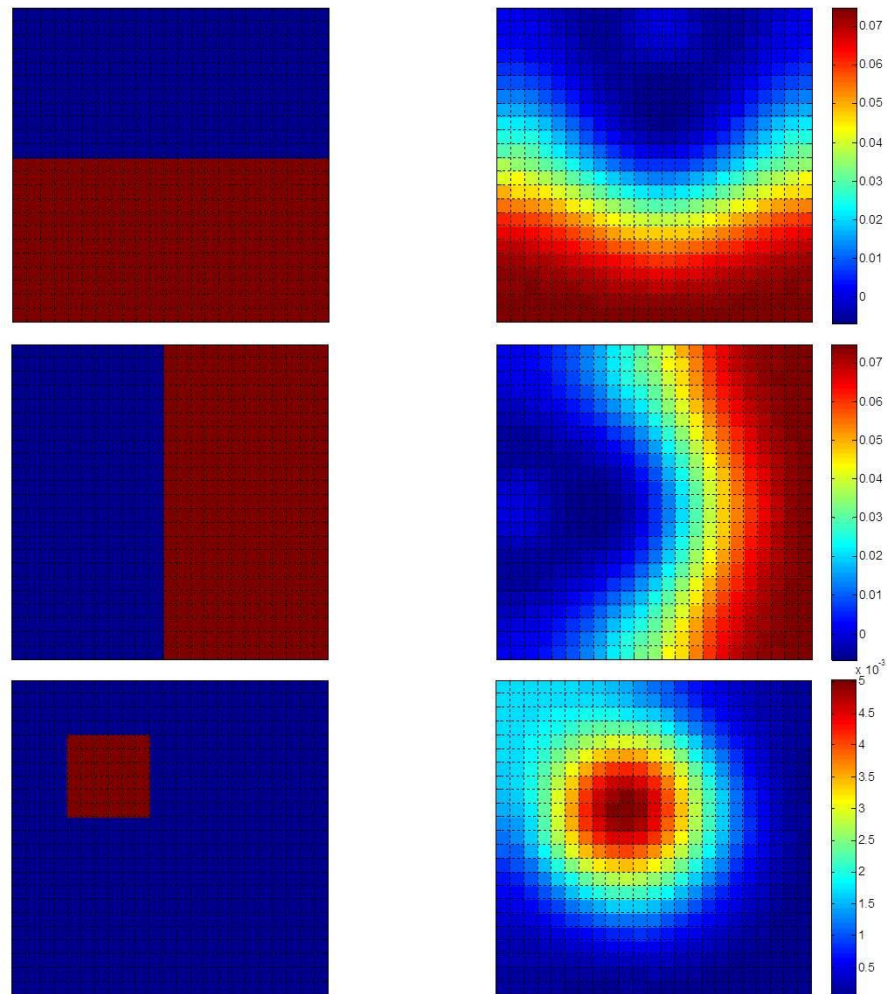


Figura 17, Distribuciones originales (izquierda) e imágenes reconstruidas (Derecha).

Es así como se obtiene finalmente la imagen reconstruida para un proceso de tomografía ECT, partiendo desde el cálculo de valores de capacitancia, obteniendo las distribuciones de potencial, las distribuciones de campo eléctrico, calculando los mapas de sensibilidad y aplicando el algoritmo de reconstrucción LBP. Todo el proceso basado en el método FEM y la solución de la ecuación de Laplace.

4 Implementación y resultados

Para la implementación del instrumento virtual se creó una herramienta simple y amigable para el usuario en donde se aplicó la teoría expuesta y la metodología establecida. Existen diferentes herramientas computacionales que permiten el desarrollo de este tipo de productos. Se seleccionó MATLAB con base en el conocimiento previo en su manejo y a la intención de probar fácilmente tanto el conocimiento del tema como la teoría relacionada.

Cuando se conocen características del proceso bajo estudio, se puede pensar en determinar configuraciones que brinden un rendimiento apropiado del sistema ECT. El diseño del instrumento virtual, se basó en la idea de crear una herramienta dinámica que permitiera realizar pruebas básicas de un sistema ECT para trabajar con flujos multifásicos.

El procedimiento básico se basa en la selección de la forma de la tubería y sus dimensiones, seguidamente se definen los pixeles para representar la tubería, se establece la ubicación de los electrodos, se carga la imagen del flujo a ser analizado y finalmente con estos parámetros establecidos, el instrumento calcula los valores de capacitancia entre electrodos, los mapas de sensibilidad y reconstruye la imagen final. Con el cálculo del error entre la imagen obtenida y la esperada se determina si la configuración utilizada cumple o no con los requerimientos del usuario. Para brindar dinamismo se consideran algunos aspectos revisados a continuación.

4.1. Geometría de las tuberías

La mayoría de los sistemas ECT han sido diseñados para trabajar con tuberías circulares, aunque existen aplicaciones industriales que involucran tuberías cuadradas o rectangulares. Algunos trabajos previos permiten la simulación de sistemas ECT con geometrías definidas previamente. En el instrumento virtual producto de este trabajo se puede cambiar la geometría

de las tuberías. La Figura 18 muestra la sección del instrumento virtual en la cual se selecciona la geometría de la tubería con la cual se quiere trabajar. También se dispone de diferentes unidades de medida para las dimensiones de la tubería.

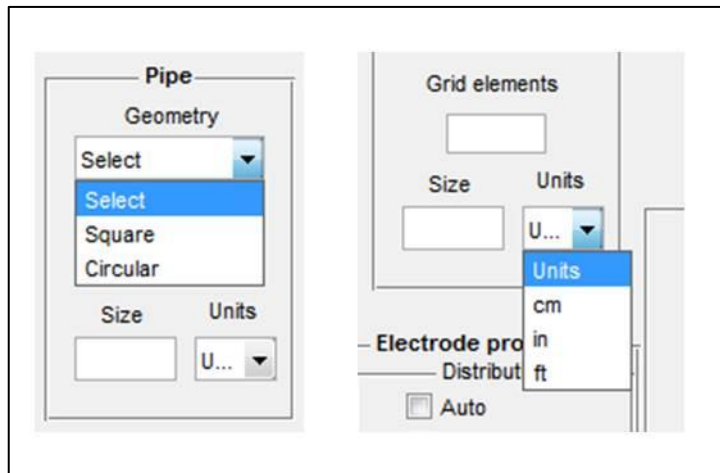


Figura 18, Sección del instrumento virtual para definir la geometría de la tubería.

4.2. Píxeles de representación

La posibilidad de detectar detalles dentro de una imagen es un indicador de la resolución de la cual se dispone, por lo tanto, el número de elementos (Píxeles) dentro de la imagen juega un factor decisivo. La posibilidad de modificar el número de píxeles en la rejilla para la representación de la imagen es uno de los aspectos incluidos en el instrumento.

La Figura 19 muestra algunos ejemplos de diferentes representaciones en donde se tienen tuberías cuadradas y circulares. El número de píxeles para la representación de la imagen también se puede definir introduciendo en la casilla correspondiente la cantidad de elementos que se tendrán por lado, obteniendo finalmente una rejilla cuadrada con elementos cuadrados iguales. La zona de color azul representa el interior de la tubería rodeada por los

pixeles de color rojo que representan la periferia y la zona disponible para representar los electrodos.

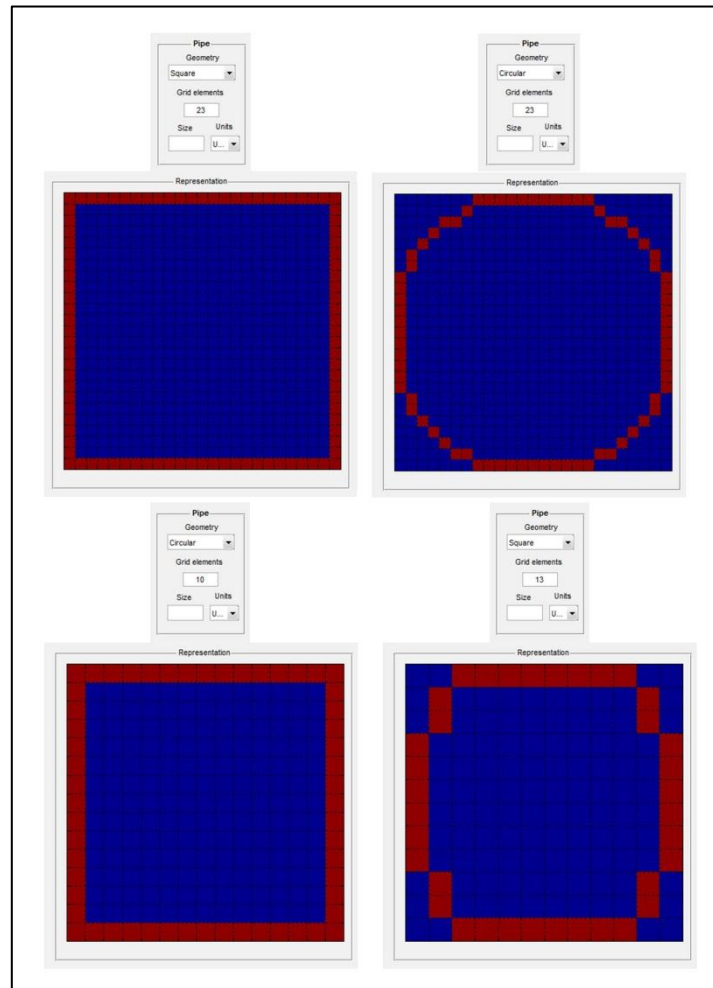


Figura 19, Secciones del instrumento relacionadas con la representación de la tubería.

4.3. Localización de los electrodos

Los sistemas ECT convencionales tienen electrodos distribuidos de manera uniforme alrededor de la tubería. Explorar nuevas configuraciones en el montaje de los electrodos brinda la posibilidad de determinar una configuración adecuada para procesos particulares, esta es una de las ventajas que presenta el instrumento virtual que se desarrolló.

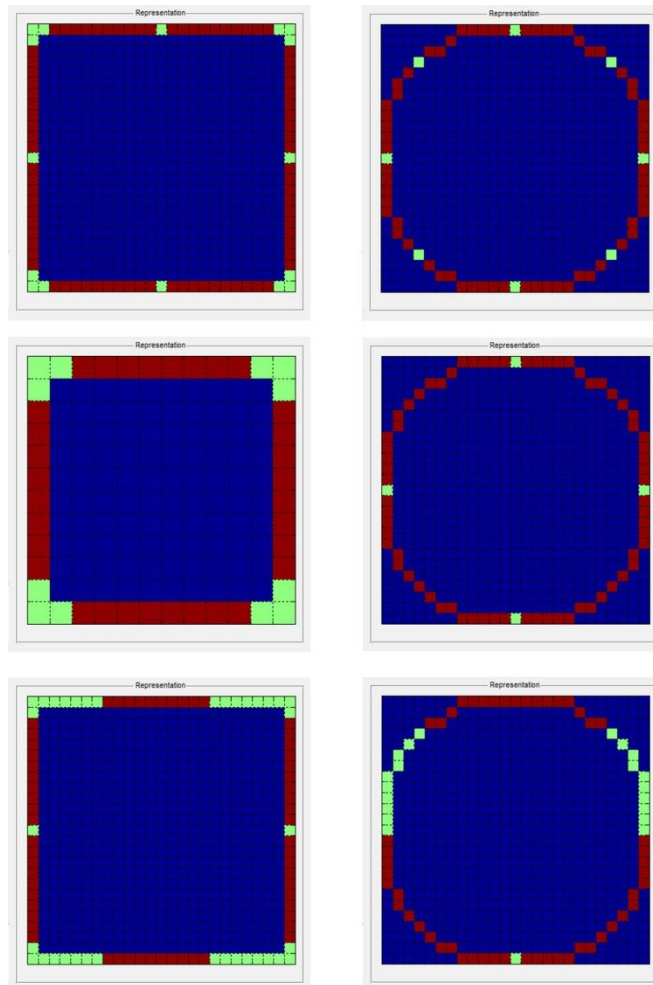


Figura 20, Ejemplos de representación para diferentes distribuciones de electrodos.

La distribución de los electrodos alrededor de la tubería puede realizarse de forma convencional, con lo cual el instrumento se encarga de determinar automáticamente las ubicaciones de los electrodos. Otra manera de establecer las ubicaciones de los electrodos es de forma personalizada, en este caso se definen ciertos parámetros para poder obtener una representación adecuada de los electrodos.

En la Figura 20 la fila superior y la fila central muestran ejemplos de electrodos distribuidos uniformemente; adicionalmente, configuraciones no uniformes se muestran en la fila inferior donde el usuario es quien define a su

conveniencia la posición de los electrodos. Los pixeles de color rojo corresponden a los electrodos, los de color verde la separación entre electrodos y la zona de color azul representa el interior de la tubería.

4.4. Patrones de flujo

El instrumento desarrollado permite al usuario cargar la imagen del flujo que caracteriza el proceso estudiado. La imagen del flujo se procesa para poder ser representada con el número de pixeles definidos previamente. La Figura 21 muestra el ejemplo de un patrón de flujo cargado y representado por 2 rejillas con diferente número de pixeles en una tubería cuadrada.

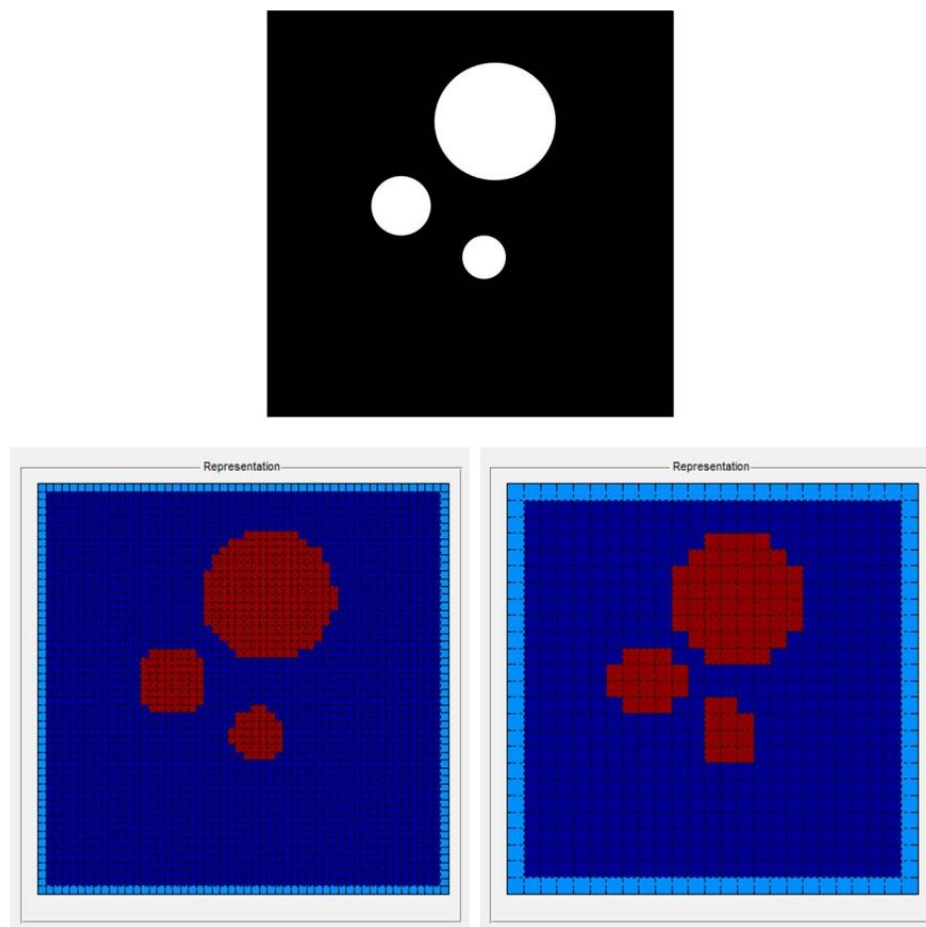


Figura 21, Arriba patrón a ser representado, abajo izquierda representación con rejilla de 50 * 50 pixeles, abajo derecha representación con rejilla de 23*23 pixeles.

La Figura 22 muestra el ejemplo de un patrón de flujo cargado y representado por 2 rejillas con diferente número de píxeles en una tubería circular.

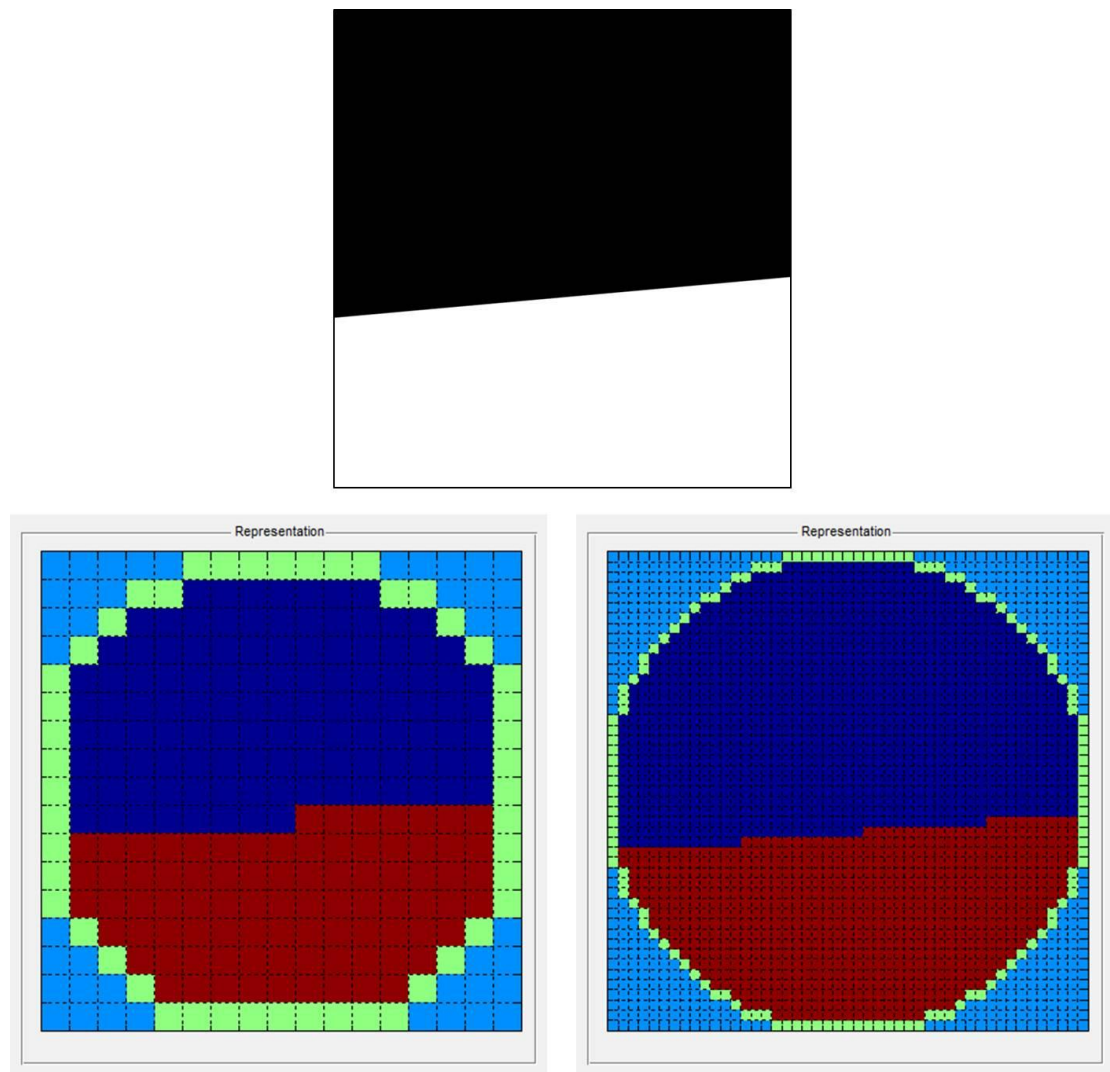


Figura 22, Arriba patrón a ser representado, abajo izquierda representación con rejilla de 15*15 píxeles, abajo derecha representación con rejilla de 45*45 píxeles.

4.5. Medidas de capacitancia y mapas de sensibilidad.

Una de las características de este instrumento es permitir al usuario interactuar con algunos de los parámetros del proceso, entre ellos, los

valores de capacitancia entre electrodos y los mapas de sensibilidad obtenidos con el método FEM están disponibles para revisión.

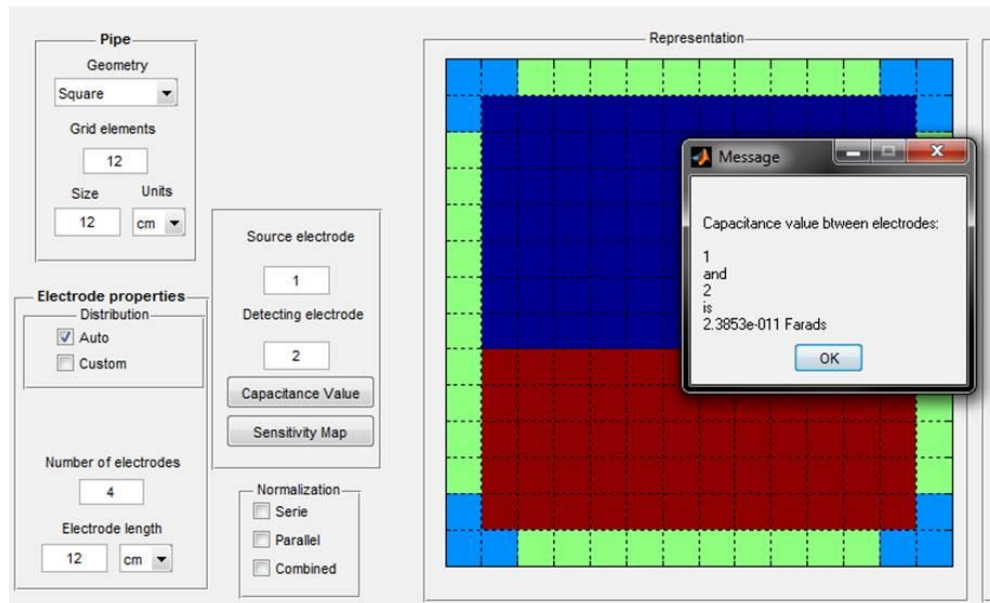


Figura 23, Ejemplo de revisión de capacitancia.

La Figura 23 muestra la sección del instrumento en donde se establece el par de electrodos de interés y seguidamente se selecciona entre la información de la medida de capacitancia y el mapa de sensibilidad relacionado con dicho par. Para este caso se está revisando el valor de capacitancia entre el par de electrodos 1-2.

La Figura 24 muestra un ejemplo de la revisión del mapa de sensibilidad entre los electrodos 2 y 6 de una tubería cuadrada de 12 electrodos uniformemente distribuidos en su periferia. La Figura 25 muestra otro ejemplo donde se tiene una vista completa del instrumento, se representa una tubería cuadrada con 8 electrodos, un patrón de flujo estratificado, las dimensiones de la tubería y de los electrodos, la imagen reconstruida y la revisión de algunos valores de capacitancia y un mapa de sensibilidad.

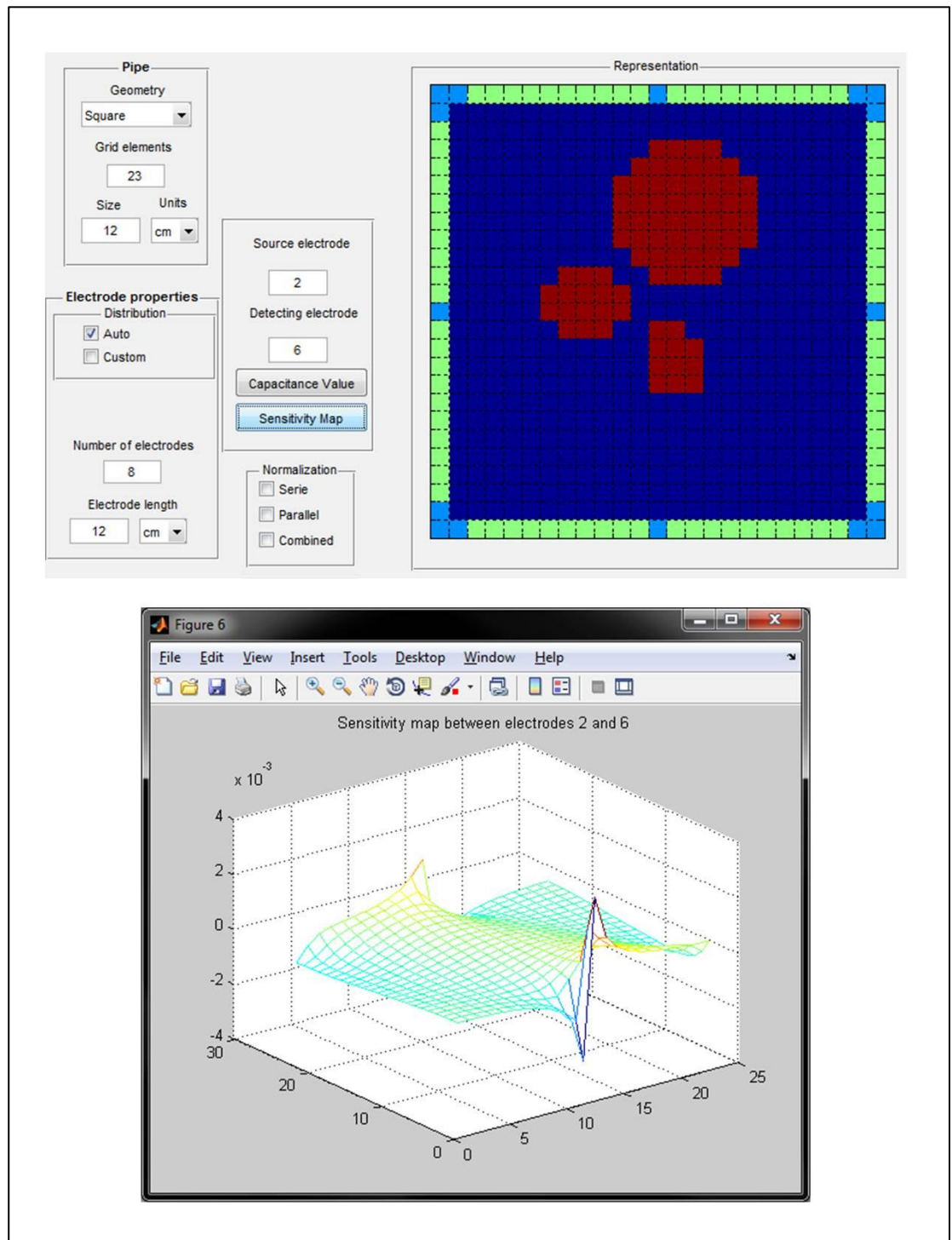


Figura 24, Ejemplo de revisión de mapa de sensibilidad.

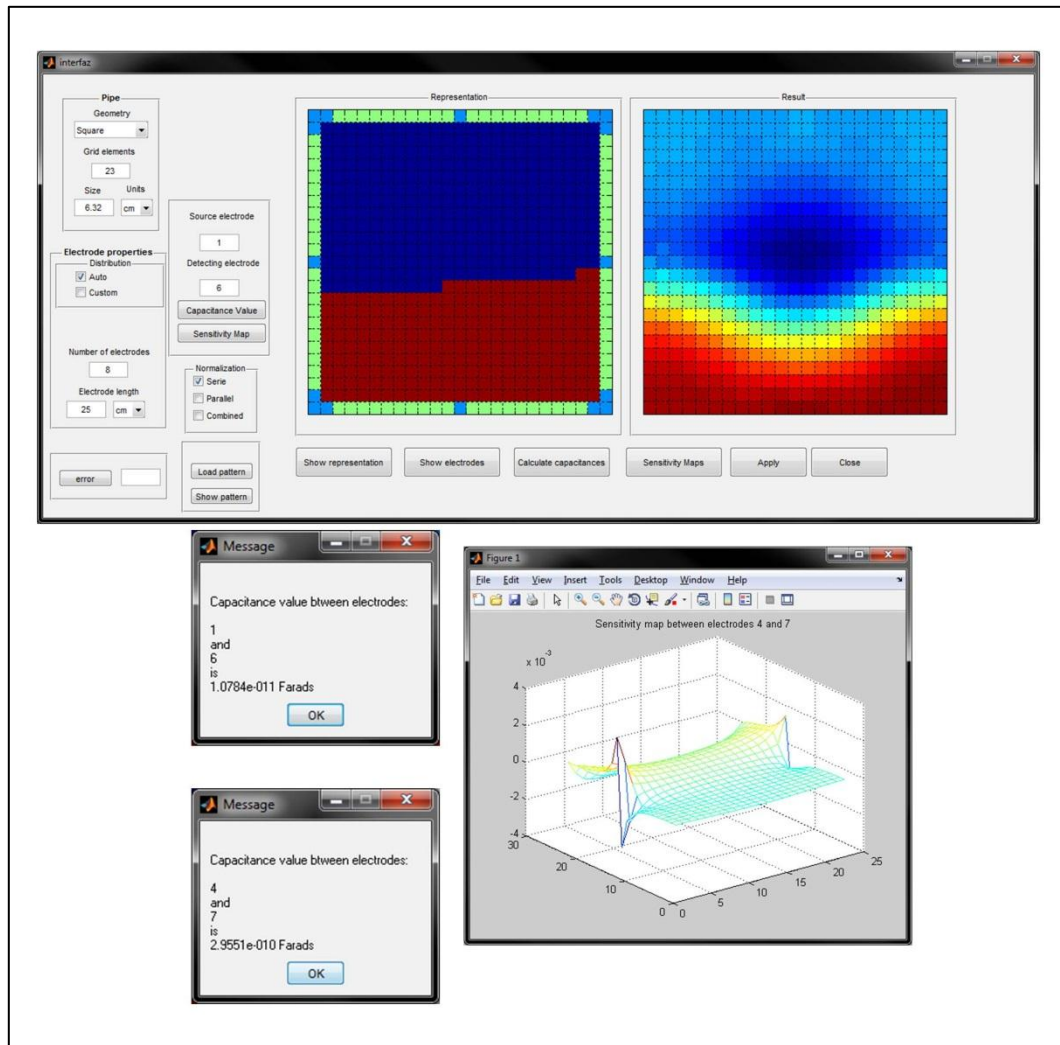


Figura 25, Resultados del instrumento.

4.6. Modelos de normalización y estimación del error

El instrumento diseñado permite al usuario definir el modelo de normalización que más se adapte a sus necesidades, el modelo serie y el modelo paralelo están disponibles, así como un modelo en donde se realiza una combinación serie-paralelo para evaluar una nueva posibilidad de normalización de datos. Finalmente el criterio de evaluación de la configuración definida por el usuario se define como el error entre la imagen esperada y la imagen obtenida con el instrumento. La Figura 26 y la Figura

27 muestran el resultado para un flujo de burbuja y uno estratificado respectivamente con imágenes reconstruidas para los diferentes tipos de normalización. Se muestra que cualitativamente la normalización combinada es más conveniente para el flujo de burbuja y la normalización paralela para el flujo estratificado para la configuración que se estableció previamente.

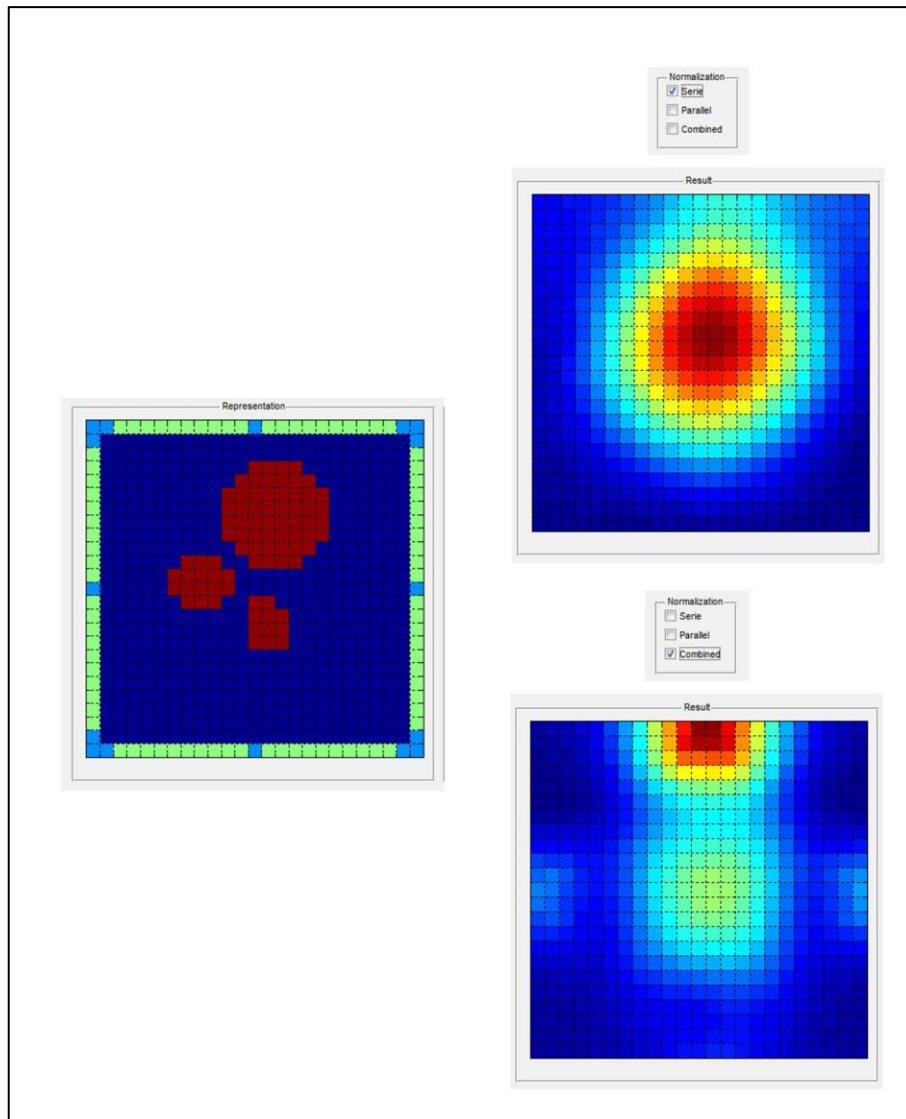


Figura 26, Reconstrucciones con dos tipos de normalización, serie y combinada.

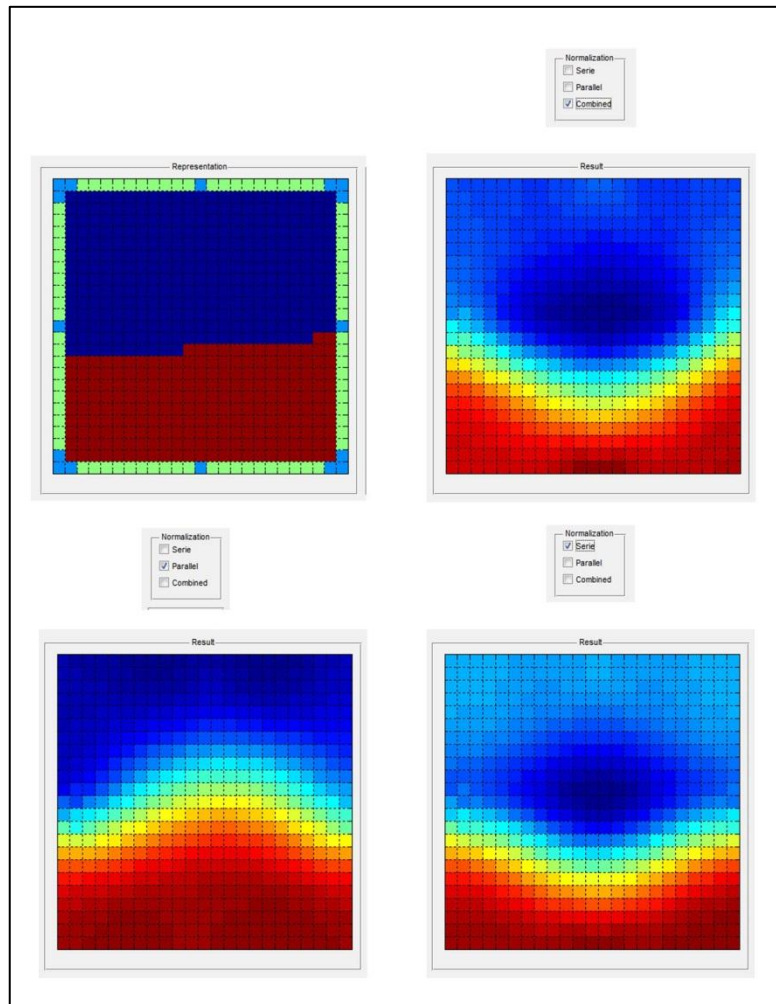


Figura 27, Reconstrucciones con los tres tipos de normalización.

Puede verse entonces que el instrumento permite realizar el procedimiento completo desde la determinación de la forma de la tubería y sus dimensiones, la definición de los elementos de la rejilla de representación, establecer el número de electrodos y su distribución ya sea automática o definida por el usuario, pasando por la carga y visualización el patrón de flujo que se quiere analizar, el cálculo de los valores de capacitancia y los mapas de sensibilidad que están disponibles para revisión, la selección el método de normalización y finalmente la obtención de la imagen reconstruida y la determinación del error como parámetro de evaluación.

5 Conclusiones y trabajo futuro

Del proceso desarrollado en este trabajo de investigación se concluye

- Los flujos multifásicos son un fenómeno presente en diferentes tipos de industrias. El impulso de investigación en esta área, contribuye un mejor aprovechamiento de los recursos naturales y en particular al establecimiento de mejores herramientas de medición.
- La implementación de un instrumento virtual para el desarrollo de pruebas previas al montaje final permite simular procesos industriales de forma más económica y rápida que con un sistema en hardware dado que representa instrumentos especializados cuyo rendimiento puede mejorarse con la ayuda de la virtualidad.
- Dentro de las características consideradas para el instrumento se encuentra la posibilidad de revisar algunos valores del proceso como lo son los valores de capacitancia entre electrodos y la forma de los mapas de sensibilidad del sensor simulado.
- Se resolvió la ecuación de Laplace en términos de la distribución de potencial para un espacio con carga neta cero, aprovechando la versatilidad del método de elemento finito FEM. Determinando así las distribuciones de potencial en el interior de una tubería con distribución de permitividad no uniforme, los valores de capacitancia entre electrodos y los mapas de sensibilidad del sensor.
- Se incluyó dentro del diseño del instrumento un modelo de normalización combinado con la intención de aprovechar las 2 técnicas de normalización utilizadas comúnmente para la reconstrucción de imágenes.
- Se desarrolló un instrumento virtual dinámico que permite establecer diferentes parámetros de un sistema ECT como son la geometría de las tuberías, los pixeles de representación de la

imagen final, la cantidad y la distribución de los electrodos y el tipo de flujo que se quiere identificar.

Como trabajo futuro se propone:

- Implementar la representación de la tubería circular, con una rejilla en coordenadas cilíndricas que permita una mejor aproximación al modelo de este tipo de tuberías.
- Habilitar el instrumento para recibir valores de capacitancia reales que permitan la reconstrucción de la imagen estableciendo en el instrumento los parámetros de representación para el sistema con el cual se realizaron las mediciones.
- Tener la posibilidad de que el modelo de normalización para cada valor de capacitancia pueda ser definido por el usuario, permitiendo así mayor dinamismo del instrumento.
- Determinar las posibilidades de mejora en cuanto a la programación del código y su implementación en otras herramientas como LabView.

6 Apéndices

6.1. Apéndice 1, Elemento finito

Pasos básicos del método FEM

La teoría FEM aquí expuesta está basada principalmente en el trabajo de G. Ramesh [13]; está orientado a casos de electromagnetismo y es considerado adecuado para esta investigación.

El método FEM aplicado a cualquier problema involucra cuatro pasos principalmente:

- Segmentación para representar la geometría del problema por medio de un número finito de elementos.
- Obtención de las ecuaciones características para cada elemento.
- Ensamble de todos los elementos del problema para generar las ecuaciones que representan el sistema
- Solución del sistema de ecuaciones para determinar las variables desconocidas.

A estos pasos deben agregarse otros pasos de post-procesamiento, los cuales implican procesado de los datos generados para obtener algunos parámetros de interés como: los parámetros S en circuitos, características de líneas de transmisión, frecuencias de resonancia, características de radiación, entre otras.

Método FEM en una dimensión

A continuación se construirá un sub-espacio de funciones V_h de dimensión finita para representar un espacio continuo V definido por funciones lineales a pedazos; el sub-espacio V_h corresponderá a un conjunto de funciones lineales y continuas en cada intervalo $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, de longitud $h_j = x_j - x_{j-1}$

con $j = 1, \dots, M + 1$. El conjunto de funciones v es continuo en el intervalo $[0,1]$ y cumple que $v(0) = v(1) = 0$ como se muestra en la Figura 28.

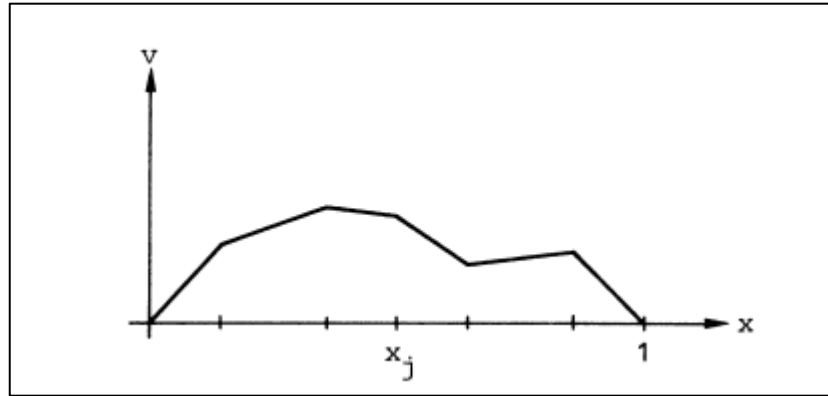


Figura 28, Ejemplo de una función v [17].

Para describir una función v que pertenezca al espacio V_h debe cumplirse que un valor puntual n_j en cada nodo x_j debe tener el mismo valor que $v(x_j)$, esto es $n_j = v(x_j)$. A continuación se introduce un conjunto de funciones base N_j que corresponden a funciones lineales a pedazos, estas funciones adquieren un valor 1 en el nodo x_j y 0 fuera de él como se muestra en la Figura 29. Las funciones base están definidas por

$$N_j(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, i, j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

25

Donde M corresponde al número de nodos del sistema v .

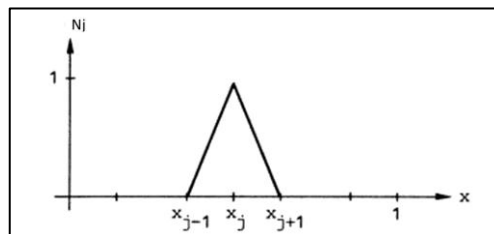


Figura 29, Función base N_j [17].

De esta manera el sistema v puede representarse por una combinación lineal de las funciones base N_j

$$v(x) = \sum_{i=1}^M n_i N_{i(x)}, \quad x \in [0,1]$$

26

El problema de elemento finito puede reformularse y escribirse en forma matricial como

$$A\xi = b$$

27

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de $M \times M$ elementos $a_{ij} = (N'_i, N'_j)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$$

28

La matriz A se conoce como la matriz del sistema y b es el vector de entradas. Se tiene entonces un sistema de M ecuaciones con M incógnitas ξ . La formulación del problema de elemento finito para un sistema lineal por piezas se aplica para la solución de la ecuación de Laplace en términos de la distribución de potencial en 2 dimensiones.

Solución de la ecuación de Laplace con el método FEM

Como se mostró para el problema en una dimensión, el primer paso del método FEM consiste en dividir el problema general en un número de sub-problemas más sencillos; por lo tanto se determinan un número finito de elementos. Algunas formas de elementos utilizados para el análisis con FEM se muestran en la Figura 30.

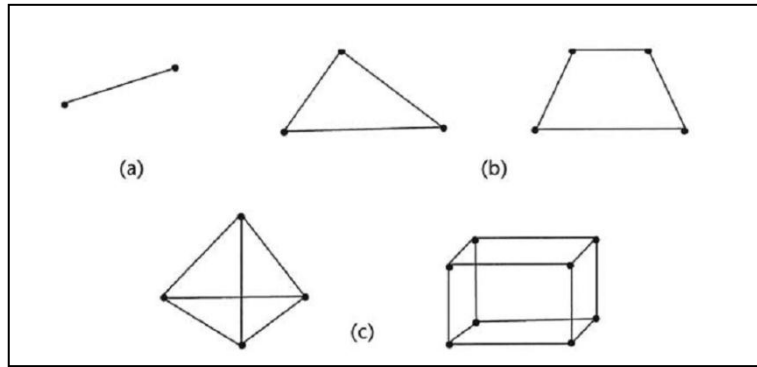


Figura 30, Elementos utilizados en el análisis con FEM para (a) una dimensión, (b) dos dimensiones y (c) problemas tridimensionales [13]

El segmento lineal, recto o curvilíneo, se utiliza para representar problemas de una sola dimensión. Para problemas de dos dimensiones, el modelado se realiza con elementos triangulares o cuadriláteros y para problemas en tres dimensiones se discretiza con tetraedros o bloques.

Un ejemplo de discretización en 2 dimensiones se muestra en la Figura 31; una región circular se aproxima por medio de un octágono formado por ocho elementos triangulares y nueve nodos. Se puede utilizar una combinación de elementos triangulares y cuadriláteros; sin embargo el modelado con elementos triangulares es más común ya que permite aproximar de mejor manera regiones con geometrías arbitrarias.

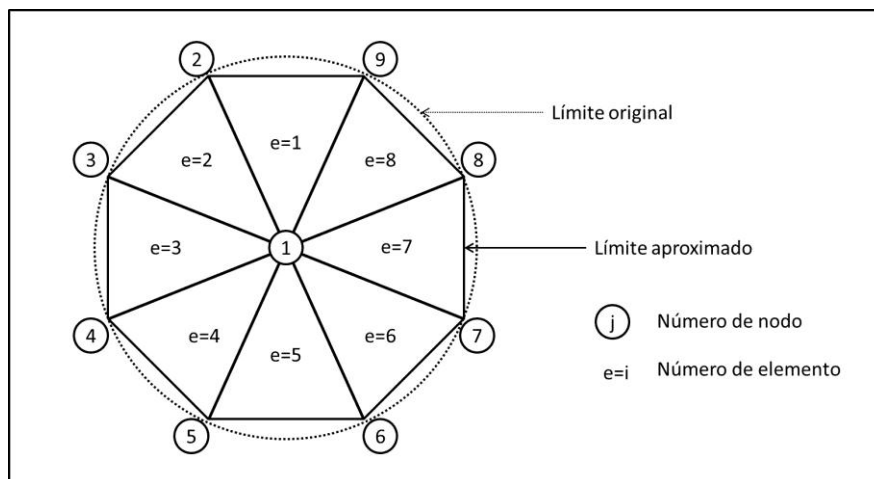


Figura 31, Ejemplo de discretización de un círculo con 8 elementos triangulares [13].

En el caso electromagnético existe una distribución de campo φ (potencial) en una región delimitada por (x, y) ; tal distribución se puede aproximar por medio de elementos e con distribuciones individuales φ^e . Así pues, la distribución del problema completo estaría dada por una combinación lineal de las distribuciones de todos los elementos individuales.

$$\varphi(x, y) = \sum_{e=1}^{P_e} \varphi^e(x, y)$$

29

donde P_e es el número de elementos de la región solución.

El siguiente paso es representar las distribuciones φ^e con funciones base del análisis FEM en dos dimensiones. Dos tipos de funciones base se pueden encontrar: funciones de nodos y funciones de bordes, las funciones de bordes se consideran de orden superior pero las funciones de nodos permiten simplicidad en el análisis.

Funciones base

Las funciones base se definen sobre cada elemento y lo representan de forma única. Estas funciones influyen el valor del potencial en los elementos vecinos a través de las condiciones de continuidad. Existe una relación entre la precisión deseada y el orden de las funciones base, normalmente se utilizan funciones de primero, segundo y tercer orden. En general el orden de la ecuación diferencial a ser resuelta, define el orden máximo del polinomio a ser utilizado. En la mayoría de los problemas de electromagnetismo, sólo la continuidad de la función y no la de la derivada de la función es necesaria.

Una vez que las funciones base han sido seleccionadas, la distribución aproximada para un elemento e de dos dimensiones con n nodos puede ser escrita como

$$\varphi^e(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i^e N_i^e(x, y)$$

30

donde $N_i^e(x, y)$ son las funciones de forma bidimensionales y c_i^e son coeficientes que deben ser determinados al igual que el caso unidimensional de la ecuación 26. Las ecuaciones para c_i^e son obtenidas haciendo cumplir la ecuación diferencial que gobierna el problema; particularmente se trabaja con la ecuación de Laplace cuyo funcional está definido por la energía electrostática (ecuación 11); la forma matricial de la energía electrostática está definida por

$$[F^e] = [A^e][\varphi^e]$$

31

donde A^e representa la matriz del elemento que describe la relación entre sus nodos y φ^e representa el vector de potenciales nodales. La forma de la matriz de elementos para un elemento e con cuatro nodos viene dada por

$$A^e = \begin{bmatrix} A_{11}^e & A_{12}^e & A_{13}^e & A_{14}^e \\ A_{21}^e & A_{22}^e & A_{23}^e & A_{24}^e \\ A_{31}^e & A_{32}^e & A_{33}^e & A_{34}^e \\ A_{41}^e & A_{42}^e & A_{43}^e & A_{44}^e \end{bmatrix}$$

32

que cuenta con $w * w$ elementos, siendo w el número de nodos del elemento e [13].

Ensamble de elementos

Para ilustrar el concepto de ensamble de elementos, considérese la Figura 31 donde la geometría octagonal que representa el círculo se segmenta en ocho elementos triangulares, cada uno de ellos cuenta con 3 nodos lo cual da lugar a 24 nodos locales (3 nodos * 8 elementos) y 24 ecuaciones que representan el sistema. Cuando se realiza el ensamble de los elementos para obtener los valores globales se presenta el caso en donde varios nodos locales comparten un mismo nodo global; en el nodo central del octágono se tiene la unión de 8 nodos locales. Con 9 valores de potencial globales para este ejemplo, el número de ecuaciones representativas, es mayor que el número de incógnitas (24 ecuaciones y 9 incógnitas).

Como en el caso unidimensional la representación del problema en dos dimensiones se considera una combinación lineal de todos los elementos del sistema. La forma matricial mostrada en 31 corresponde a un conjunto de ecuaciones para cada elemento del sistema; la matriz A^e representa la relación entre los nodos que describen dicho elemento. Este conjunto de ecuaciones es ensamblado con los conjuntos que representan los demás elementos del sistema

$$\sum_{e=1}^{N_e} [A^e][\varphi^e] = \sum_{e=1}^{N_e} [F^e]$$

33

Finalmente se obtiene la forma matricial

$$[A][\varphi] = [F]$$

34

donde φ es el vector de potenciales globales y sus elementos son los coeficientes c_i^e .

El procedimiento de ensamble considera este aspecto y finalmente entrega tantas ecuaciones como variables desconocidas y asegura la continuidad de los valores del vector de potenciales.

Matriz del sistema

La ecuación 34 se resuelve para determinar el vector φ . Los valores son obtenidos cuando el funcional del sistema se hace estacionario con respecto a los coeficientes $c_i, i = 1,2,3 \dots N$, donde N es el número global de nodos. La matriz A es una matriz cuadrada de tamaño $N \times N$. Gracias a la linealidad del proceso de ensamble, se puede obtener la derivada de F^e con respecto a cada c_i^e y luego realizar el ensamble [13].

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial F^e}{\partial c^e} = [0]$$

35

que es un conjunto de ecuaciones el cual se resuelve para determinar el vector φ con los potenciales de todos los nodos del sistema; seguidamente obtener la forma de la distribución de campo eléctrico y calcular los valores de capacitancia.

Se analizará un ejemplo relacionado con un capacitor de placas paralelas, para explicar y aplicar la teoría expuesta previamente. La Figura 32 muestra la configuración básica para un capacitor de placas paralelas y sus propiedades geométricas.

$$a = 68.7119 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$d = 7.067 * 10^{-2} \text{ m}$$

$$\varepsilon_0 = 8.8543 * 10^{-12}$$

$$\varepsilon_r = 1 \text{ (aire)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 * \varepsilon_r$$

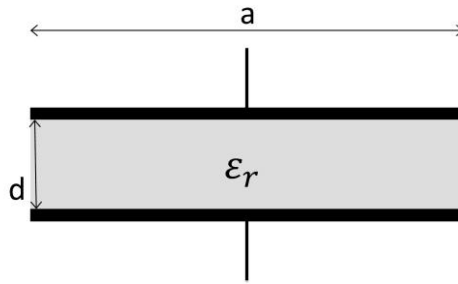


Figura 32, Configuración básica de un capacitor de placas paralelas.

Para este caso, a representa el área del electrodo, d la separación entre las placas y ϵ_r representa la permitividad absoluta entre los electrodos. Para este ejemplo tenemos que al aplicar la definición de capacitancia de la ecuación 3 da como resultado

$$C = \epsilon * \frac{a}{d}$$

36

lo cual nos da un valor numérico de $C = 0.8609 \text{ pF}$ para un voltaje de 1(v) en la placa superior y 0(v) en la placa inferior, valor que se buscará obtener por medio del método FEM.

El primer paso del método FEM corresponde a la creación de la rejilla que representará el problema, en este caso el ejemplo del capacitor de placas paralelas. Para este ejemplo se representará el problema con una configuración sencilla de 2 elementos como se muestra en la Figura 33.

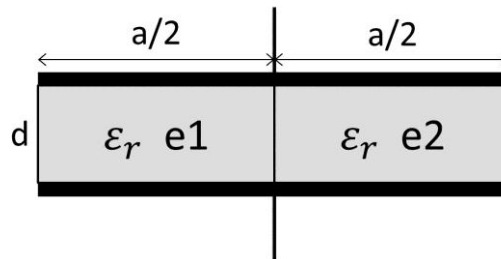


Figura 33, Representación con elementos finitos para un capacitor de placas paralelas

En este caso la discretización asegura que la distribución dieléctrica es homogénea para cada uno de los elementos. En el método FEM, cada elemento está caracterizado por un conjunto de nodos que se denominan nodos locales. Cuando un número finito de elementos se ensambla para representar un sistema, varios nodos locales pueden representar un mismo nodo global de dicha representación.

La Figura 34 muestra la representación con elementos finitos del sistema de la Figura 33; se tienen 2 elementos independientes, 8 nodos locales enumerados al interior de cada uno de los elementos y 6 nodos globales enumerados dentro de los círculos alrededor de la figura.

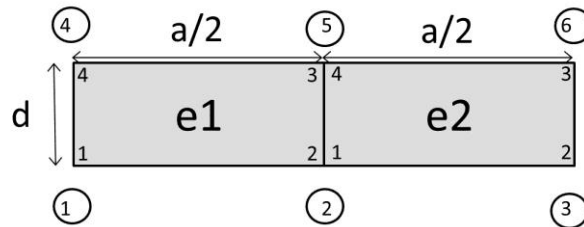


Figura 34, Representación nodal.

Los nodos locales para cada elemento se enumeran en sentido anti horario sin importar cuál sea el nodo número 1 y esta orientación debe cumplirse con todos los elementos para que sea válida la teoría mostrada.

Después de la representación con FEM, la distribución de potencial dentro del capacitor viene dada por la solución de la ecuación de Laplace suponiendo que el campo eléctrico es normal a la superficie de las placas en todos sus puntos. El criterio de solución consiste en la minimización de algún parámetro físico como la energía, que representa el funcional para la ecuación de Laplace en problemas electrostáticos y viene dada por

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \iint_s \epsilon |\nabla \varphi|^2 ds$$

donde s representa el área de la sección transversal de la geometría y se soluciona en términos del potencial eléctrico φ . Para el análisis los dos elementos rectangulares tienen un área de

$$\frac{a}{2} * d$$

como se muestra en la Figura 34.

Para obtener la matriz de elementos y la matriz del sistema es necesario definir las funciones base de un elemento rectangular como el mostrado en la Figura 35.

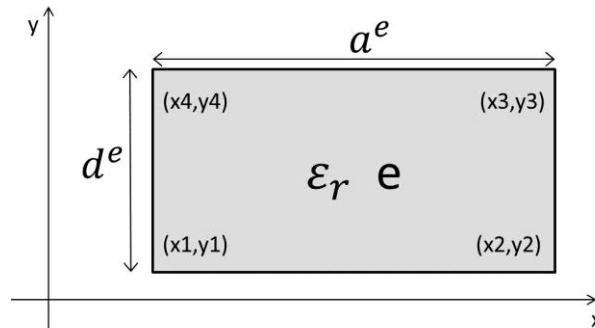


Figura 35, Elemento rectangular

La distribución de potencial del elemento puede ser aproximada mediante una variación lineal dada por

$$\varphi^e(x, y) = a' + b'x + c'y + d'xy$$

38

Las constantes a' , b' , c' y d' pueden ser determinadas a partir de los potenciales en cada uno de los 4 nodos del elemento. Definiendo los potenciales nodales como φ_1^e , φ_2^e , φ_3^e y φ_4^e se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi_1^e &= a' + b'x_1 + c'y_1 + d'x_1y_1 \\ \varphi_2^e &= a' + b'x_2 + c'y_2 + d'x_2y_2 \\ \varphi_3^e &= a' + b'x_3 + c'y_3 + d'x_3y_3 \\ \varphi_4^e &= a' + b'x_4 + c'y_4 + d'x_4y_4\end{aligned}$$

39

Al resolver este sistema de ecuaciones y substituir los resultados en la ecuación 38, la distribución de potencial dentro del elemento rectangular se puede expresar como

$$\varphi^e = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^e N_i^e(x, y)$$

40

En donde N_i^e representa las funciones base del elemento y se definen por

$$\begin{aligned}N_1^e(x, y) &= \frac{(x_2 - x)(y_4 - y)}{\Delta} \\ N_2^e(x, y) &= \frac{(x - x_1)(y_3 - y)}{\Delta} \\ N_3^e(x, y) &= \frac{(x - x_4)(y - y_2)}{\Delta} \\ N_4^e(x, y) &= \frac{(x_3 - x)(y - y_1)}{\Delta}\end{aligned}$$

41

Estas funciones tienen valor cero fuera del elemento y el símbolo Δ denota el área del elemento, dada por

$$\Delta = a^e b^e = (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_4)(y_4 - y_1)$$

42

que contiene $m * m$ elementos (m es el número de nodos locales que representan el sistema). Seguidamente se debe obtener una matriz A_{comp} para representar el sistema cuando los elementos son ensamblados. Esta matriz tiene $n * n$ elementos (n es número de nodos globales) y está definida por

$$A_{comp} = C^T * A_{dis} * C$$

46

donde la matriz C representa la relación de los nodos locales con los nodos globales. Para el ejemplo de la Figura 34, la matriz C sería

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \\ \varphi_3^1 \\ \varphi_4^1 \\ \varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \\ \varphi_3^2 \\ \varphi_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{pmatrix}_{dis} = \begin{pmatrix} 100000 \\ 010000 \\ 000010 \\ 000100 \\ 010000 \\ 001000 \\ 000010 \\ 000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}_{comp}$$

$$\varphi_{dis} = C * \varphi_{comp}$$

47

De esta manera la matriz del sistema A_{dis} para la Figura 34 es una matriz de $8 * 8$ elementos (8 nodos locales), la matriz C tendría $8 * 6$ elementos y la matriz A_{comp} contaría con $6 * 6$ elementos (6 nodos globales).

Para obtener una solución aproximada de la ecuación de Laplace en términos de la distribución de potencial, la energía del sistema es minimizada en el modelo ensamblado. Para facilitar la solución, los nodos globales con potencial desconocido son enumerados en primer lugar y por último los nodos con potenciales conocidos. Para el ejemplo de la Figura 34 no existen nodos con potencial desconocido. Para la minimización de la energía se

busca obtener la derivada con respecto a cada uno de los potenciales; seguidamente la ecuación en forma matricial de la minimización de la energía viene dada por

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial}{\partial [\varphi_f]_k} [\varphi_f^T \varphi_b^T] \begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fb} \\ A_{bf} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_f \\ \varphi_b \end{bmatrix} = 0$$

48

Los sub índices f y b representan los valores libres (free) y los valores de frontera (boundaries) que representan los potenciales desconocidos y conocidos del sistema respectivamente. La matriz $\begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fb} \\ A_{bf} & A_{bb} \end{bmatrix}$ constituye una forma reorganizada de la matriz del sistema A_{comp} .

Ya que la derivada con respecto a los valores de potencial conocidos, no es posible, realizar la minimización respecto a los valores desconocidos da como resultado

$$\begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_f \\ \varphi_b \end{bmatrix} = 0$$

49

La matriz rectangular $\begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fb} \end{bmatrix}$ contiene tantas filas como variables desconocidas pero el número de columnas es el mismo que el número de nodos globales. Reorganizando este sistema para obtener una expresión que permita obtener los potenciales desconocidos y crear un vector solución φ de potenciales locales se obtiene

$$\varphi = \begin{bmatrix} -A_{ff}^{-1} A_{fb} \varphi_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$

50

De esta manera se obtienen todos los potenciales nodales con el método FEM y se utilizan para determinar la capacitancia.

La forma matricial del funcional de la energía viene dada por

$$F = \frac{1}{2} [\varphi]^T [A_{comp}] [\varphi]$$

51

mientras que por otra parte la energía almacenada en un capacitor

$$F = \frac{1}{2} C * V^2$$

52

Para $V = 1(v)$ la comparación entre las ecuaciones 51 y 52 da como resultado

$$C = \frac{[\varphi]^t [A_{comp}] [\varphi]}{V}$$

53

Implementando este procedimiento en Matlab, se obtuvo un valor de capacitancia de $C = 8.609 * 10^{-13}F$; el valor obtenido mediante programación corresponde con el valor esperado al aplicar en este caso la definición de capacitancia.

Con la aplicación del método FEM el valor de capacitancia entre electrodos se puede calcular de la forma como se mostró en el ejemplo anterior. La ecuación de Laplace es necesaria para dicho propósito y su solución con este método obedece en primer lugar, a la definición de la rejilla para representar el sistema y así, obtener el número finito de elementos que discretizan el problema continuo; seguidamente se enumeran los nodos locales para cada elemento y se determina la matriz del sistema A_{dis} con la

información de todos los elementos sin ensamblar; a continuación se definen los nodos globales de manera que un solo nodo global puede corresponder a varios nodos locales.

Con el sistema discretizado y definido por los nodos globales, se determina la matriz C que establece la relación de dichos nodos con los nodos locales; utilizando la matriz C se obtiene la matriz A_{comp} del sistema ensamblado. La matriz A_{comp} es utilizada en el proceso de minimización de la energía en términos de los potenciales de los nodos globales; el resultado de la minimización es el vector de potenciales nodales con el cual se obtiene finalmente el valor de capacitancia entre electrodos.

7 Lista de figuras

Figura 1, Patrones de flujo (a) Burbuja, (b) Estratificado y (c) Anular [2].	15
Figura 2, Representación de un arreglo de sensores de un sistema ECT [6]	22
Figura 3, Formas típicas de mapas de sensibilidad [7].	23
Figura 4, Formas de distribuciones de sensibilidad [6].	33
Figura 5, Proyección pr, φ de un objeto con coordenadas (x, y).	35
Figura 6, Representación del concepto de proyección.	36
Figura 7, (izquierda) Sensor con un elemento de alta permitividad en un ambiente con aire, (derecha) modelado con un capacitor de placas paralelas [16].	38
Figura 8, Esquema del instrumento virtual.	40
Figura 9, Capacitor de placas paralelas (arriba) y su representación con 6 elementos (abajo).	42
Figura 10, Elemento rectangular.	43
Figura 11, Representación de tubería cuadrada con 4 electrodos con una matriz de 10*10 elementos	46
Figura 12, Distribución de permitividad para cálculo de distribución de potencial.	47
Figura 13, Distribución de potencial de los pares 1-2 (arriba izquierda), par 1-3 (arriba derecha) y par 1-4 (abajo)	47
Figura 14, Representación para sensor con 8 electrodos.	48
Figura 15, Distribuciones de potencial para electrodos 1 (izquierda) y 4 (derecha.	49
Figura 16, Mapa de sensibilidad para el par de electrodos 1-4.	49
Figura 17, Distribuciones originales (izquierda) e imágenes reconstruidas (Derecha).	50
Figura 18, Sección del instrumento virtual para definir la geometría de la tubería.	52

Figura 19, Secciones del instrumento relacionadas con la representación de la tubería.....	53
Figura 20, Ejemplos de representación para diferentes distribuciones de electrodos.	54
Figura 21, Arriba patrón a ser representado, abajo izquierda representación con rejilla de 50 * 50 pixeles, abajo derecha representación con rejilla de 23*23 pixeles.	55
Figura 22, Arriba patrón a ser representado, abajo izquierda representación con rejilla de 15*15 pixeles, abajo derecha representación con rejilla de 45*45 pixeles.	56
Figura 23, Ejemplo de revisión de capacitancia.....	57
Figura 24, Ejemplo de revisión de mapa de sensibilidad.	58
Figura 25, Resultados del instrumento.	59
Figura 26, Reconstrucciones con dos tipos de normalización, serie y combinada.	60
Figura 27, Reconstrucciones con los tres tipos de normalización.....	61
Figura 28, Ejemplo de una función v [17].....	65
Figura 29, Función base N_j [17].	65
Figura 30, Elementos utilizados en el análisis con FEM para (a) una dimensión, (b) dos dimensiones y (c) problemas tridimensionales [13]....	67
Figura 31, Ejemplo de discretización de un círculo con 8 elementos triangulares [13].	67
Figura 32, Configuración básica de un capacitor de placas paralelas.	72
Figura 33, Representación con elementos finitos para un capacitor de placas paralelas	72
Figura 34, Representación nodal.	73
Figura 35, Elemento rectangular.....	74

8 Bibliografía

- [1] R. Pallás, *Sensores y acondicionadores de señal*, Barcelona: Boixareu, 2007.
- [2] I. Ismail, J. Gamio y S. Bukari, «Tomography for multi-phase flow measurement in the oil industry.,» *Flow Measurement and instrumentation*, vol. 16, pp. 145-155, 2005.
- [3] A. M. Olmos, «Nuevas estrategias y sistemas de medida para tomografía eléctrica de capacitancia,» Universidad de Granada, Granada, 2009.
- [4] A. Ramírez y F. Sánchez, «Métodos de medición de flujo volumétrico en mezclas bifásicas (líquido-gas) utilizando métodos tomográficos».
- [5] Y. T, «Status of electrical tomography in industrial applications,» *Journal of Electronic imaging*, vol. 10, pp. 608-619, 2001.
- [6] J. Gamio y C. Ortiz Alemán, «Electrical capacitance tomography two-phase oil-gas pipe flow imaging by the linear back-projection algorithm,» *Geofísica internacional*, vol. 44, pp. 265-273, 2005.
- [7] W. Q. Yang, «Design of electrical capacitance tomography sensors,» *Measurement science and technology*, vol. 21, 2010.
- [8] W. Q. Yang y S. Liu, «Electrical capacitance tomography with a square sensor,» de *1st world congress on industrial process tomography*, Manchester, 1999.
- [9] F. Zhaoyan, G. Robert X, J. Wang y (2011), «Virtual instrument for online electrical capacitance tomography. Practical applications and

solutions using LabView software. Dr. Silviu Folea (Ed.), ISBN:978-953-307-650-8, InTech,» Available from: <http://www.intechopen.com/books/practical-applications-and-solutions-using-labview-software/virtual-instrument-for-online-electrical-capacitance-tomography>.

- [10] Y. Li y W. Yang, «Virtual electrical capacitance tomography sensor,» *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 15, pp. 183-188, 2005.
- [11] S. Donthi, «Capacitance based tomography for industrial applications,» M. Tech. credit seminar report, electronic sstems group, EE Dept IIT Bombay, 2004.
- [12] J. Bastos y N. Ida, *Electromagnetics and calculation of fields*, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [13] G. Ramesj, *Analytical and computational methods en electromagnetics.*, Artech house, 2008.
- [14] W. Q. Yang, D. M. Spink, J. C. Gamio y M. S. Beck, «Sensitivity distributions of capacitance tomography sensors with parallel field excitation,» *Meas. Sci. Technol.*, vol. 8, pp. 562-569, 1997.
- [15] B. Almasharay, S. M. Qasim, S. Alshebeili y W. W. Al-Masry, «Realization of linear back projection algorithm for capacitance tomography using FPGA,» de *Fourth world congress on industrial process tomograhly*, Aizu, Japan.
- [16] W. Q. Y. & M. Byars, «An improved normalization approach for electrical capacitance tomography,» de *1st world congress on industrial procces tomography*, Buxton, 1999.
- [17] C. Johnson, *Numerical solutions of differential equations by the finite element method*, Sweden: Studentlitteratur, 1987.

- [18] B. Zhou, «Technologies boost virtual instrumentation,» *EE Times Asia*, pp. 1-4, 2008.
- [19] T. York, «Status of electrical tomography in industrial applications,» *Journal of Electronic imaging*, vol. 10, pp. 608-619, 2001.
- [20] C. Xu y F. Dong, «Electrical resistance tomography system based on compactPCI for multiphase flow measurement».
- [21] H. Talib, J. Mohamad-saleh, K. Zainal-Mokhtar y N. Osman-Ali, «On the comparison of capacitance-based tomography data normalization methods for multilayer perceptron recognition of gas-ol flow paterns,» *modern applied science*, vol. 3, nº 1, pp. 108-116, 2009.
- [22] S. Surekha, *LabView based advanced instrumentation systems*, Springer, 2007.
- [23] M. F. R. a. M. M. T. R. Abdul Rahim, «Non-Invasive Ultrasonic Tomography».
- [24] O. I. & J. E. Nordtved, «A new reconstruction algorithm for process tomography,» *IOP Science*, 1993.
- [25] Y. S. Kim, «Sensitivity map generation in electrical capacitance tomography using mixed normalization models,» *Measurement science and technology*, vol. 18, pp. 2092-2102, 2007.
- [26] M. B. Ian Atkinson, «Un nuevo horizonte en mediciones de flujo multifásico».
- [27] S. Huang, A. Plaskowki y C. Xie, «Tomographic imaging of two-component flow using capacitance sensors,» 1989.
- [28] S. S. Donthi, «Capacitance based Tomography for Industrial Applications».

- [29] I. Ismail, J. Gamio y S. Bukari, «Tomography for multi-phase flow measurement in the oil industry.,» pp. 145-155, 2005.
- [30] S. H. & C. B. J. Luca, «Analytical capacitive sensor sensitivity distribution and applications,» *Measurement science and technology*, vol. 17, pp. 2467-2478, 2006.
- [31] S. M. Huang, A. B. Plaskowski, C. G. Xie y M. S. Beck, «Tomographic imaging of two-component flow using capacitance sensor,» *Journal Phys. E:Sci. Instrum.*, vol. 22, pp. 173-177, 1989.
- [32] A. Martinez Olmos, J. Alberdi Primicia y J. Fernandez Marron, «Simulation design of electrical capacitance tomography sensors,» *IET Sci. Meas. Technol.*, vol. 1, nº 4, p. 216–223, 2007.