Análisis de Haces Plasmónicos Superficiales

por

Noemi Abundiz Cisneros

Tesis sometida como requisito para obtener el grado de

MAESTRIA EN LA ESPECIALIDAD EN ÓPTICA

en el

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Octubre 2008

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff

Resumen

Se describe la síntesis de modos plasmónicos generalizados utilizando el modelo del espectro angular. El estudio se obtiene a partir de la interferencia entre plasmones superficiales elementales. Una característica intrínseca de plasmones elementales es el conjunto de valores que se puede presentar en la función de flujo de fase la cual se conoce en la literatura óptica como la función de relación de dispersión. Esencialmente esta función describe el conjunto de valores que tiene una onda plasmónica elemental en su función de fase y que depende de la frecuencia de la luz utilizada. Se puede interpretar como una consecuencia de la ley de conservación de momento. El tratamiento se extiende a la superposición incoherente de campos interferidos y se muestra que la convergencia de este tipo de campo genera campos plasmónicos generalizados los cuales tienen propiedades de coherencia parcial. Los parámetros estructurales de los haces interferidos se consideran como variables aleatorias y mediante la función de densidad de probabilidad implícita se generan modos plasmónicos con diversos perfiles, en particular se realiza la síntesis de haces plasmónicos Gaussianos, Bessel y del tipo haz plasmónico cuerda y capilar. Se muestran simulaciones numéricas.

Agradecimientos

Gracias a CONACyT por su apoyo en mis estudios de Maestria.

A mi asesor Dr. Gabriel Martínez Niconoff gracias por la oportunidad que me dió al aceptarme en su grupo de trabajo, tambien, por su paciencia, sus consejos y su gran amistad.que me brindó durante estos 2 años

Gracias a mis sinodales Dra. Patricia Martínez Vara, Dr. Eugene Kuzin y Dr. Julio Cesar Ramírez San Juan por darme sugerencias en la escritura de mi Tesis.

Gracias a mis padres y a mi hermana Laura por estar siempre conmigo brindándome todo su apoyo y darme consejos cuando más lo necesité. Y también, a mis compañeros (Miguel, Librado, Benito, Pedro, Esteban) del INAOE por soportarme estos dos años y pasar buenos momentos juntos.

Contenido

Prefacio

El objetivo del presente trabajo de tesis consiste en describir modos superficiales generalizados a partir de la interferencia entre plasmones elementales. Una característica intrínseca de plasmones elementales es el conjunto de valores que puede presentar la función de flujo de fase la cual se conoce como la relación de dispersión.

Se analiza la superposición incoherente de campos interferidos y se muestra que la convergencia de este tipo de campos genera campos plasmónicos generalizados los cuales tienen propiedades de coherencia parcial. Los parámetros estructurales de los haces interferidos se consideran como variables aleatorias y mediante la función de densidad de probabilidad implícita se generan modos plasmónicos con diversos perfiles, en particular se realiza la síntesis de haces plasmónicos Gaussianos, Bessel y del tipo haz plasmónico cuerda y capilar. La descripción teórica para plasmones superficiales se traslada a la descripción del campo electromagnético de un conjunto de nanopartículas en donde se describen los fenómenos de resonancia a través de la interacción entre sus momentos dipolares.

Capitulo 1
Introducción

En el presente trabajo de tesis se realiza un análisis de modos plasmónicos superficiales generalizados, el estudio se describe mediante la interferencia entre dos plasmones superficiales elementales utilizando el modelo del espectro angular. Los plasmones elementales son ondas no-homogeneas caractérizados por la relación de dispersión, la cual en esencia se describe la función de flujo de fase que tiene asociado un plasmón y que depende de la frecuencia de iluminación utilizada.

La síntesis de haces plasmónicos generalizados se implementa utilizando propiedades de interferencia, el tratamiento es análogo a la construcción de modos libres de difracción para medios homogeneos. En el trabajo se propone una superposición incoherente de modos plasmónicos interferidos y se analiza su convergencia en irradiancia. Los parámetros estructurales de los "*haces superficiales interferidos tipo coseno*", se consideran como variables aleatorias. Asociando distintas funciones de densidad de probabilidad se puede controlar la redistribución energética de los plasmones superficiales interferidos en donde la convergencia presenta diversos perfiles los cuales corresponden con modos plasmónicos generalizados con propiedades de coherencia parcial. Una interpretación adicional es que los haces plasmónicos se pueden considerar como oscilaciones colectivas de carga y por lo tanto se pueden considerar como partículas y de esta manera estudiar la posibilidad de transferencia de momentum, lo cual ofrece interesantes aplicaciones en el ambiente de pinzas ópticas bidimensionales.

Como punto inicial, es conveniente realizar una pequeña descripción de la evolución histórica de los plasmones de superficie, así como de sus aplicaciones, distintos métodos para generarlos.

1.1 Definición de Plasmón

Un plasmón superficial se podría definir como una onda electromagnética propagándose sobre una superficie metálica y que tiene la propiedad de interactuar con los electrones libres del metal. Un modelo geométrico es considerar a la luz como una partícula, la cual al incidir sobre una superficie metálica es atrapada por esta y obligada a desplazarse por la superficie del metal. En este modelo la partícula se conoce como plasmón superficial. Una consecuencia fundamental de esta interpretación es que el plasmón superficial no se refleja en la superficie al momento de incidir sobre la superficie, lo que sería lo usual si estuviéramos hablando de un rayo de luz al chocar con una superficie. Así, que el plasmón superficial se propaga por la superficie metálica, este tratamiento permite incorporar modelos de óptica geométrica a campos plasmónicos en donde la trayectoria de la partícula tiene asociados propiedades extremales y por lo tanto se puede esperar una ecuación tipo eikonal, ver figura 1.I.

1.1.1 Antecedentes históricos

Los estudios de campos plasmónicos se iniciaron a principios del siglo XX. El primer indicio de los plasmones fue en 1902 con el trabajo de Robert W. Wood, él cual observó características que no podía explicar en mediciones ópticas de reflexión sobre rejillas metálicas [26]. Dos años después Maxwell Garnet describe colores brillantes observados en vidrios dopados con metales. La descripción la realizó utilizando la teoría de óptica de metales

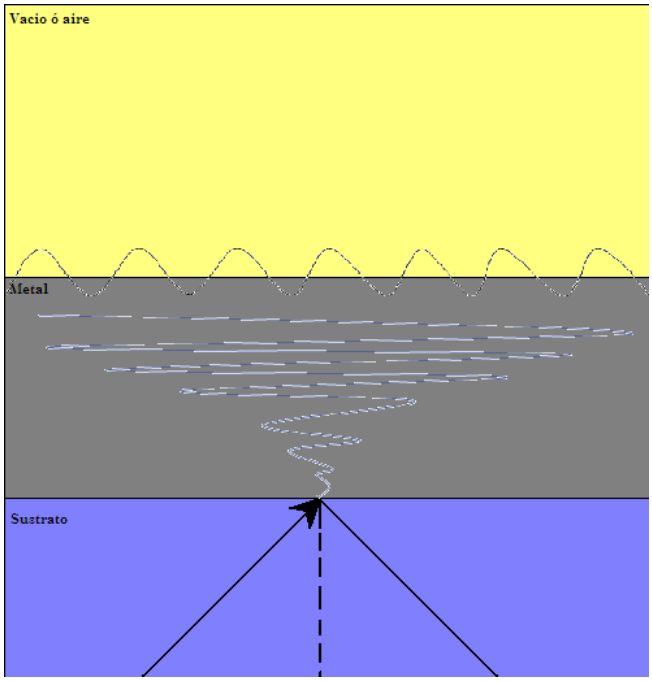

Fig. 1.I. Muestra plasmón formándose en superficie metálica

creada por Drude y las propiedades electromagnéticas de pequeñas esferas utilizando el trabajo de Rayleigh [6]. En 1908 Gustav Mie desarrolló su ahora teoría utilizada de esparcimiento de la luz en partículas esféricas [11].

Después de 1908 con el trabajo de Gustav Mie los estudios con respecto al plasmón superficial quedaron estancados por casi 50 años hasta que David Pines en 1956 describió teóricamente las características de la pérdida de energía que experimentaban los electrones libres en una superficie metálica y él atribuye estas pérdidas a oscilaciones colectivas de electrones libres en el metal. Pines llama estas oscilaciones "plasmones"[16]. Esta es la primera vez que se utiliza el nombre de plasmones para describir este tipo de campo eléctrico propagándose sobre una superficie.

Nuevamente en este año Robert Fano introduce el término de "polariton"para oscilaciones acopladas vinculadas a electrones y la luz dentro de un medio transparente [5]. Un año

después Rufus Ritchie observa una pérdida de energía en electrones en superficies delgadas, en la cual muestra que los modos plasmónicos pueden existir cerca de superficies metálicas [20]. Diez años después nuevamente Rufus Ritchie junto con otros investigadores describen el comportamiento anómalo en rejillas en términos de plasmones superficiales excitados en una rejilla de acoplamiento [18].

En este mismo año Adreas Otto, Erich Kretschman y Heinz Raether presentan métodos para la excitación óptica de plasmones superficiales en superficies metálicas, haciendo experimentos con métodos accesibles para que puedan ser desarrollados en distintos laboratorios sin equipos especializados [15], [4].

En 1970 Uwe Kreibig y Peter Zacharias desarrollaron un estudio en el cual ellos comparan la respuesta electrónica y óptica en nanopartículas de oro y plata. En su trabajo describen las propiedades ópticas de las nanopartículas de metal en términos de plasmones superficiales [24]. Y cuatro años después en 1974 Stephen Cunningham y sus colegas introdujeron el término de plasmón-polaritón superficial (SPP) [22].

En 1998 Thomas Ebbesen y Peter Wolf, mostraron que luz pasando a través de orificios se pueden acoplar para excitar plasmones superficiales en el metal. Esta no es una propiedad común puesto que luz incidiendo sobre superficies metálicas lisas y brillosas no generan ondas plasmónicas. De hecho esta propiedad se utiliza en el presente trabajo de tesis para la síntesis de campos plasmónicos generalizados [23].

El desarrollo de la óptica plasmónica bidimensional se ha desarrollado intensamente durante los últimos años, de hecho en el 2007 Vasily V. Temnov y colaboradores diseñaron un interferómetro tipo Fabry-Perot con plasmones superficiales, en donde miden y comparan experimental y teóricamente la velocidad de grupo de plasmones superficiales. En las rendijas ocurren oscilaciones las cuales generan la propagación de plasmones superficia-

les así como interferencia con luz directamente transmitida. El análisis teórico del modelo propuesto estuvo en una buena concordancia con los resultados experimentales obtenidos [25].

1.1.2 Aplicaciones

Los plasmones superficiales en la óptica han tenido una transición gradual, de estudios fundamentales a más aplicaciones impulsadas por los investigadores. En el presente los plasmones han ido avanzando al mismo tiempo con la tecnología en donde la litografía óptica, almacenamiento de datos ópticos y entre otros, se están acercando a los límites físicos fundamentales. Varios retos tecnológicos fundamentales pueden superarse mediante la utilización de las propiedades únicas de los plasmones superficiales. Gracias a estudios recientes, una amplia gama de plasmones basado en elementos ópticos y diversas técnicas se han desarrollado, incluyendo una gran variedad de guías de ondas, interruptores activos, biosensores y más [3], [2].

Los avances en la utilización de plasmones se ha expandido a otras areas no necesariamente en el campo de la óptica por ejemplo en medicina, donde actualmente Naomi Halas y Jennifer West de la Universidad de Rice en Houston USA, están creando nanoesferas para diagnósticos y/o terapias médicas, este método consiste en crear esferas de sílice recubiertas de delgadas películas de oro. Se crean cientos de estas esferas y las colocan en un recipiente para añadirles un químico llamado aminas[1]. Para poder sincronizar con precisión la longitud de onda de la luz, varían el grosor de la película de oro que envuelve a la nanoesfera, esto lo hacen para así, obtener plasmones superficiales vibrando en el interior y exterior de la superficie con oro. Un uso que se les quiere dar a las nanoesferas es

[1] Aminas: Son compuestos químicos orgánicos que se consideran como derivados del amoniaco y resultan de la sustitución de los hidrógenos de la molécula por los radicales alquinos

la detección de la cantidad de antígenos[2] los cuales están asociados con el VIH, en donde actualmente la técnica utilizada consiste en inyectar tinte fluorescente con anticuerpos ya identificados en la sangre, pero el problema de esta técnica es que la hemoglobina en la sangre absorbe la fluorescencia, haciendo imposible la detección de la presencia de antígenos. Así que, Halas y West adjuntan los anticuerpos a la superficie de las nanoesferas las cuales están sincronizadas para absorber y re-emitir luz en ciertas longitudes de onda en el infrarrojo. Esta es una parte del espectro electromagnético donde el cuerpo humano es en la mayoría transparente, así que la información puede pasar a través de la hemoglobina. Cuando luz infrarroja incide en las nanoesferas, ellos detectan una fuerte señal gracias a los plasmones superficiales que re-emiten la luz [21].

1.2 Objetivo

De los comentarios anteriormente descritos, es evidente que existe un gran interés por el desarrollo de la óptica plasmónica bidimensional. De esta forma, el objetivo del presente trabajo de tesis consiste en describir modos superficiales generalizados a partir de la interferencia entre plasmones elementales. Una característica intrínseca de plasmones elementales es el conjunto de valores que puede presentar la función de flujo de fase la cual se conoce como la relación de dispersión. Se analiza la superposición incoherente de campos interferidos y se muestra que la convergencia de este tipo de campos genera campos plasmónicos generalizados los cuales tienen propiedades de coherencia parcial. Los parámetros estructurales de los haces interferidos se consideran como variables aleatorias y mediante la función de densidad de probabilidad implícita se generan modos plasmónicos con diver-

[2] Atígenos: Es una sustancia que desencadena la formación de anticuerpos y puede causar una respuesta inmune

sos perfiles, en particular se realiza la síntesis de haces plasmónicos Gaussianos, Bessel y del tipo haz plasmónico cuerda y capilar. Se muestran simulaciones numéricas.

Para lograr el objetivo anteriormente descrito, en el capítulo 2 se **describen las propiedades para que un campo óptico se considere un modo**. El estudio inicia con un análisis de los modos homogéneos y se extiende a modos superficiales. Este capítulo se encuentra divido en tres secciones: *Modos ópticos en medios homogéneos, modos ópticos en medios parcialmente coherentes y análisis extremal de modos ópticos*. Este segundo capítulo forma una buena base para entender varios conceptos y herramientas matemáticas utilizadas (como el modelo del espectro angular para describir plasmones superficiales), los cuales son fundamentales en los capítulos subsecuentes.

En el capítulo 3 se **describe la interacción entre modos plasmónicos elementales** y se encuentra dividido en: *Análisis de plasmones elementales los cuales se analizan de manera a analoga a Ondas planas, análisis de plasmones generalizados (haces libre de difracción) y análisis de interferencia de plasmones generalizados.* En la primera sección se hace un breve análisis para definir y analizar un plasmón elemental, en la segunda sección se definen plasmones generalizados, donde se obtiene una relación de dispersión e índice de refracción efectivo. En la última sección se hace un análisis de interferencia de plasmones superficiales, en donde se aplican distintas funciones de densidad de probabilidad para ver la redistribución de cargas de la interferencia de plasmones superficiales.

Finalmente, en el capítulo 4 hace una **descripción de plasmones - partícula**, y se hace un análisis para ver como interactúa un plasmón-partícula, en donde se desarrollan dos métodos distintos, en el primer método se utilizan las ecuaciones de Mathieu y en el segundo método se propone una solución, en ambos casos se desarrollaron simulaciones en la

computadora y consta de las siguientes secciones: *cálculo del método dipolar equivalente, análisis de una nanopárticula, análisis de interacción plasmón*.

Capitulo 2
Descripción de Modos Ópticos

El método utilizado para realizar una descripción de modos ópticos para medios homogéneos y modos parcialmente coherentes a partir del modelo del espectro angular, el cual permite una interpretación a los campos ópticos como una superposición coherente de modos elementales y que permite resolver problemas de difracción, scattering, etc., sobre superficies bidimensionales. El soporte teórico consiste en una expansión de ondas elementales, el caso más simple consiste en una descripción del campo óptico en medios homogéneos considerando una suma de ondas planas. Al introducir la condición de frontera sobre planos, el modelo tiene asociada una representación frecuencial lo que corresponde a un análisis de Fourier.

2.1 Modos ópticos en medios homogéneos

Se realiza una superposición coherente de modos ópticos considerando un medio homogéneo. Partiendo de una onda plana que se propaga libremente en el espacio, en donde satisface la ecuación de Helmholtz y se hace una representación de la onda plana como una transformada de Fourier.

Proponiendo una onda monocromática que se propaga en un campo electromagnético de la forma:

$$E(x, y, z, t) = E_o(x, y, z)e^{i\omega t} \tag{2.1}$$

donde t es un instante del tiempo y $\vec{r}$ es un vector de posición. La función $E_o(\vec{r})$ representa una función de amplitud en un tiempo determinado.

Considerando un medio homogéneo en un área limitada de índice de refracción $n(\omega)$ (en donde el índice de refracción es función de la frecuencia utilizada). En este medio homogéneo debe satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)E(x, y, z) = 0 \tag{2.2}$$

donde $k = n(\omega)k_o$ el cual es el número de ondas en el medio y k_o es el número de ondas en el medio libre.

Si nos posicionamos en el plano cuando $z = const$, puede ser representado como una transformada de Fourier bidimensional en x y y,

$$E\left(x, y, z\right) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, z)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv \tag{2.3}$$

Ahora si nos desplazamos en el espacio en otra $z = const$ en donde nuevamente se puede representar la distribución de amplitudes como una transformada de fourier bidimensional, la ecuación de Helmholtz (2.2) es válida y la coordenada z cambia de manera continua. Entonces Sustituyendo (2.2) en (2.3), se obtiene que:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \int\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u, v, z\right) e^{i2\pi(ux+vy)}dudv = 0 \tag{2.4}$$

introduciendo la ecuación de Helmholtz en la integral, esto se puede hacer ya que no depende de las variables u y v

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\nabla^2 f\left(u, v, z\right) e^{i2\pi(ux+vy)} + k^2 f\left(u, v, z\right) e^{i2\pi(ux+vy)}\right] dudv \tag{2.5}$$

separando el gradiente en las coordenadas x, y, z,

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f\left(u, v, z\right) e^{i2\pi(ux+vy)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(f\left(u, v, z\right) e^{i2\pi(ux+vy)}\right) + \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(f\left(u, v, z\right) e^{i2\pi(ux+vy)}\right) + k^2 f\left(u, v, z\right) e^{i2\pi(ux+vy)} \end{array} \right] dudv = 0 \tag{2.6}$$

derivando dos veces para x, y y z, se obtiene que

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-4\pi^2 u^2 f - 4\pi^2 v^2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f\right] e^{i2\pi(ux+vy)}dudv = 0 \tag{2.7}$$

factorizando u y v, tenemos que

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left[4\pi^2\left(u^2+v^2\right)-k^2\right]f\left(u,v,z\right)-\frac{\partial^2 f\left(u,v,z\right)}{\partial z^2}\right)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv=0 \tag{2.8}$$

como la exponencial no puede ser cero en todo el espacio, entonces

$$\left[4\pi^2\left(u^2+v^2\right)-k^2\right]f\left(u,v,z\right)-\frac{\partial^2 f\left(u,v,z\right)}{\partial z^2}=0 \tag{2.9}$$

Lo que nos queda es una ecuación diferencial de segundo orden ordinaria con una solución general de la forma:

$$f\left(u,v,z\right)=C_1\left(u,v\right)e^{i\left[4\pi^2\left(u^2+v^2\right)-k^2\right]z}+C_2\left(u,v\right)e^{-i\left[4\pi^2\left(u^2+v^2\right)-k^2\right]z} \tag{2.10}$$

donde C_1 y C_2 son funciones que dependen de las coordenadas especiales (u,v), entonces sustituyendo la ecuación 2.10 en 2.3

$$E\left(x,y,z\right)=\int\int_{-\infty}^{+\infty}C_1\left(u,v\right)e^{i(ux+vy+Lz)}dudv+\int\int_{-\infty}^{+\infty}C_2\left(u,v\right)e^{i(ux+vy-Lz)}dudv \tag{2.11}$$

donde los términos de las exponenciales en la ecuación anterior son los modos en la ecuación. Entonces la ecuación 2.11 es la representación matemática de modos ópticos. Es evidente que también satisface la ecuación de Helmholtz, donde definimos L como:

$$L^2=k^2-u^2-v^2 \quad\Longrightarrow\quad L=\pm\left(k^2-u^2-v^2\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

$$\begin{array}{lll}\text{Caso I} & k^2\geq u^2+v^2 & \Longrightarrow \quad L=+\left(k^2-u^2-v^2\right)^{1/2}\\ \text{Caso II} & k^2<u^2+v^2 & \Longrightarrow \quad L=i\left(k^2-u^2-v^2\right)^{1/2}\end{array} \tag{2.13}$$

La ecuación 2.11 también representa el campo de cuatro tipos de modos de la onda plana:

1. $e^{i(ux+vy+wz)}$ donde $w=(k^2-u^2-v^2)$, $u^2+v^2\leq k^2$: Son ondas planas homogéneas que se propagan en la frontera del plano $z=0$ hacia la frontera del plano $z=Z>0$

2. $e^{i(ux+vy+wz)}$ donde $w = i\left(u^2+v^2-k^2\right)$, $u^2+v^2 > k^2$, Estas ondas son inhomogéneas u ondas evanescentes. Su amplitud decae exponencialmente paralelamente al eje de propagación z desde el plano $z = 0$ hasta el plano $z = Z > 0$.

3. $e^{i(ux+vy-wz)}$ con $w = +\left(k^2-u^2-v^2\right)$, $u^2+v^2 \leq k^2$. Son ondas planas homogéneas que se propagan desde la frontera $z = Z > 0$ hasta $z = 0$.

4. $e^{i(ux+vy-wz)}$ con $w = i\left(u^2+v^2-k^2\right)$, $u^2+v^2 > k^2$ son ondas planas inhomogéneas que se propagan desde $z = Z > 0$ hasta $z = 0$ y decaen exponencialmente propagándose paralelamente en el eje z.

Resumiendo todos los pasos anteriores, para encontrar los modos ópticos se parte de un conjunto de ondas planas que se desplazan en un medio homogéneo y en este medio es válida la ecuación de Helmholtz; después, desplazamos la onda plana hasta una z constante, en donde podemos aplicar su transformada de Fourier bidimensional y al irnos desplazando en el espacio y posicionarnos en distintos planos donde se cumpla que z sea constante, la ecuación de Helmholtz evidentemente sigue siendo válida. Esto ocasiona que obtengamos una ecuación ordinaria de segundo grado con respecto a z, en donde las soluciones obtenidas se introducen en la transformada de Fourier. En conclusión lo que se obtuvo fue una representación del espectro angular, y con cuatro tipos de modos para una onda plana monocromática, además que este método sigue siendo válido cuando nuestro sistema no es infinito y se encuentra limitado espacialmente [10][13].

2.2 Modos ópticos parcialmente coherentes

En la sección anterior se hizo un análisis de los modos ópticos en medios homogéneos, ahora en esta sección se hará nuevamente un análisis de modos ópticos pero para medios parcialmente coherentes, en donde se propone una onda plana monocromática independiente del tiempo pero con una frecuencia υ.

$$V\left(x,y,z,t\right)=U\left(x,y,z;\upsilon\right)e^{-2\pi i t\upsilon} \tag{2.14}$$

la cual se propaga libremente en el espacio $z>0$, como se muestra en la figura 2.I.

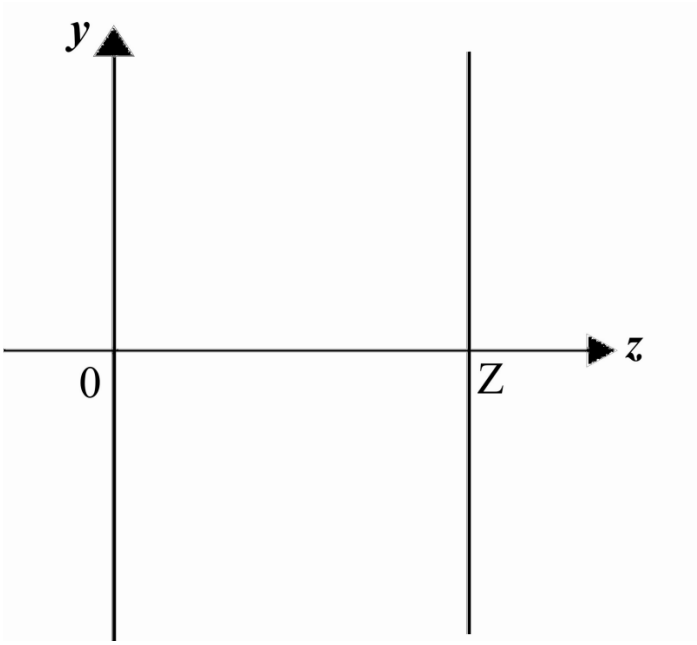

Fig. 2.I. Representación del espectro angular

La parte dependiente del espacio dada por $U\left(x,y,z;\upsilon\right)$ puede ser expresada en el espacio $z\geq 0$ como una superposición de ondas planas, y nuevamente en una posición $z=const$ y asumimos que el campo puede ser representado por medio de una transformada de Fourier,

la cual es de la forma:

$$U\left(x,y,z;\upsilon\right)=\int\int_{-\infty}^{+\infty}A\left(u,v;\upsilon\right)e^{i(ux+vy+Lz)}dudv \tag{2.15}$$

donde

$$\begin{array}{llll} \text{Caso I} & k^2\geq u^2+v^2 & \Longrightarrow & L=+\left(k-u^2-v^2\right)^{1/2} \\ \text{Caso II} & k^2<u^2+v^2 & \Longrightarrow & L=i\left(u^2+v^2-k^2\right)^{1/2} \end{array} \tag{2.16}$$

haciendo el siguiente cambio de variable

$$u=kp,\, v=kq,\, L=km \tag{2.17}$$

donde k es el número de ondas y c es la velocidad de la luz en el vacio,

$$k=2\pi\upsilon/c \tag{2.18}$$

haciendo el cambio de variable en 2.17, se puede representar al campo de la forma:

$$U\left(x,y,z;\nu\right)=\int\int_{-\infty}^{+\infty}a\left(p,q;\upsilon\right)e^{ik(px+qy+mz)}dqdp \tag{2.19}$$

donde

$$a\left(p,q;\upsilon\right)=k^2A\left(kp,kq;\upsilon\right) \tag{2.20}$$

y obtenemos los siguientes casos

$$\begin{array}{llll} \text{Caso I} & 1\geq p^2+q^2 & \Longrightarrow & m=+\left(1-p^2-q^2\right)^{1/2} \\ \text{Caso II} & 1<p^2+q^2 & \Longrightarrow & m=i\left(p^2+q^2-1^2\right)^{1/2} \end{array} \tag{2.21}$$

y como se vio en la sección anterior cuando se cumple que $p^2+q^2\leq 1$ son ondas planas homogéneas las cuales se propagan en una dirección específica (p,q,m). Y para $p^2+q^2>1$ representan ondas evanescentes lo cual implica que sus amplitudes decaen exponencialmente en dirección z. En la ecuación 2.15 y 2.19 son versiones equivalentes en la representación de una onda monocromática que se desplaza en $z\geq 0$.

Donde $U(x, y, z; \upsilon)$ es un conjunto estadístico el cual representa un campo parcialmente coherente en la forma del espectro angular de ondas planas. Esto es que $U(x, y, z; \upsilon)$ es ahora una función aleatoria y también lo es la función de amplitud espectral $a(p, q; \upsilon)$ [10]. En conclusión lo que se hizo fue proponer un campo monocromático independiente del tiempo pero en el cual se pudiera representar fluctuaciones aleatorias en su función de amplitud, esto aseguraría que el campo fuera parcialmente coherente, nuevamente se le volvió aplicar una transformada de Fourier bidimensional en una $z = const$, y se obtuvieron cuatro modos en la forma del espectro angular (en el apéndice A se da una explicación a conceptos de coherencia)

En este capítulo se obtuvieron distintas formas de representar modos ópticos para varios tipos de medios (medios coherentes y parcialmente coherentes). El siguiente paso es trasladar las ideas de campos homogeneos parcialmente coherentes al ambiente de campos plasmónicos superficiales. Haciendo un interferómetro de tipo Young, pero con plasmones superficiales, en donde se varían la separación entre los plasmones como se describirá en el siguiente capítulo. Al ir variando la separación entre las aberturas de los plasmones superficiales se obtienen distintos campos (es decir $U(x, y, z; \upsilon)$*), entonces nuevamente se tiene un campo con procesos aleatorios y es válida la correlación entre distintos instantes de tiempo y obtendríamos un campo electromagnético parcialmente coherente*.

Capitulo 3
Descripción general de campos plasmónicos

En este capítulo se hará un análisis de plasmones elementales, plasmones generalizados libres de difracción y por último se aplicará esta generalización a interferencia con dos plasmones, en donde se variará la función de densidad de probabilidad para el estudio de la interacción entre plasmones superficiales, así como su redistribución de carga implícita en el tratamiento.

3.1 Análisis de plasmones elementales (Onda Plana)

En el capítulo 1 se definió lo que es un plasmón superficial y sus aplicaciones, ahora se hará un análisis de plasmones elementales para dar pie a una generalización de plasmones superficiales libres de difracción y sus aplicaciones.

Existen cargas de electrones en el metal las cuales pueden realizar fluctuaciones coherentes y son llamadas oscilaciones de plasma superficiales [20]. Donde estas oscilaciones longitudinales tienen una frecuencia ω y vector de onda $\beta_{y,z}$, estas se relacionan por una relación de dispersión $\omega\left(\beta_{y,z}\right)$. Estas fluctuaciones de carga, se encuentran acompañadas por campos electromagnéticos longitudinales y transversales, los cuales desaparecen en $|x| \rightarrow \infty$ [19], ver la figura 3.I.En la figura 3.I se puede observar que en la gráfica de la exponencial depende de el campo E_x, y máximo en la superficie se encuentra en $x = 0$, y se puede representar de la siguiente forma:

$$E = (\hat{\imath}a + \hat{\jmath}b + \hat{k}b)e^{-\alpha x}e^{i(\beta_y y + \beta_z z)} \tag{3.1}$$

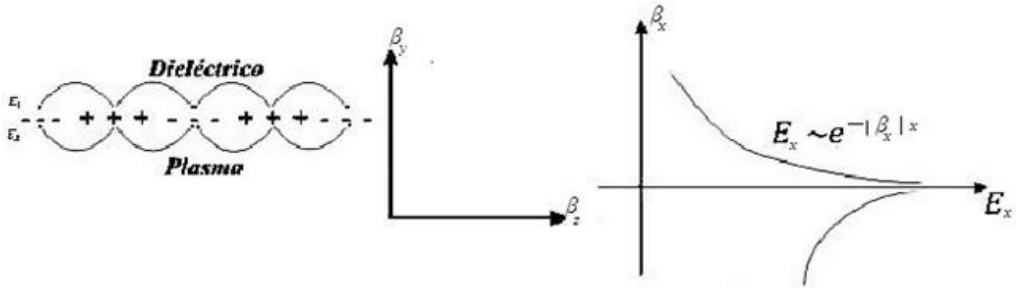

Fig. 3.I. Las cargas y el campo electromagnético de SP se propagan en la superficie en dirección z.[19]

donde es positiva para $x \geq 0$, y negativa para $x \leq 0$ y con β_x imaginaria, la cual causa un decaimiento exponencial en el campo E_x. El vector de onda β_z se encuentra paralela a la dirección z; $\beta_x = 2/\lambda_p$ donde λ_p es la longitud de oscilación del plasmón. Las ecuaciones de Maxwell retrasan la relación de dispersión en el plano de la superficie del metal con la función dieléctrica ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1''$), junto a un medio $\varepsilon_2$como el aire o vacio.

$$D_0 = \frac{\beta_{x1}}{\varepsilon_1} + \frac{\beta_{x2}}{\varepsilon_2} = 0 \tag{3.2}$$

y junto con

$$\varepsilon_i \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \beta_z^2 + \beta_{xi}^2 \tag{3.3}$$

ó

$$\beta_{zi} = \left[\varepsilon_i \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_x^2\right], i = 1, 2... \tag{3.4}$$

El vector de onda β_z es continuo por la interferencia[3]. La relación de dispersión 3.2 se puede escribir como:

$$\beta_z = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

Para ver como se obtuvo la relación de dispersión, ver apéndice B.

[3] Para la derivación de la Relación de Dispersión ver Apéndice B

3.2 Análisis de plasmones generalizados (Haces de libres de difracción)

Se establece una analogía con los haces libres de difracción, se describen los modos plasmónicos generalizados y se describen plasmones coherentes. Entonces, la idea es escribir la estructura de la relación de dispersión.

Sabemos que el índice de refracción es el cociente de la velocidad de fase entre dos ondas electromagnéticas, una de ellas se propaga en el vacio y la otra en un medio homogeneo, el índice de refracción satisface:

$$n = \frac{c}{v} \tag{3.6}$$

donde la ecuación 3.6 es el índice de refracción que se encuentra definido para dos ondas planas. Entonces una onda plana se puede representar como:

$$e^{i(kz-\omega t)} = e^{ik(z-vt)} \tag{3.7}$$

donde $\omega = kv$. Y si ahora tenemos dos ondas planas que interfieren, como se muestra en 3.II se puede hacer una superposición de ondas para encontrar su campo resultante.en donde el campo resultante sería de la forma:

$$E = e^{i[k(z\cos\alpha + y\sin\alpha)-\omega t]} + e^{i[k(z\cos\alpha - y\sin\alpha)-\omega t]} \tag{3.8}$$

y su intensidad:

$$I = 2e^{ikz\cos\alpha-\omega t}\cos(ky) \tag{3.9}$$

de aquí se puede encontrar una n_{ef} para las dos ondas planas que interfieren:

$$n_{ef} = \frac{k'}{k_0} = \frac{k\cos\alpha}{k_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda}\cos\alpha = n\cos\alpha \tag{3.10}$$

haciendo lo análogo para el caso de un plasmón,

$$E = e^{-\alpha x}e^{i(kz-\omega t)} \tag{3.11}$$

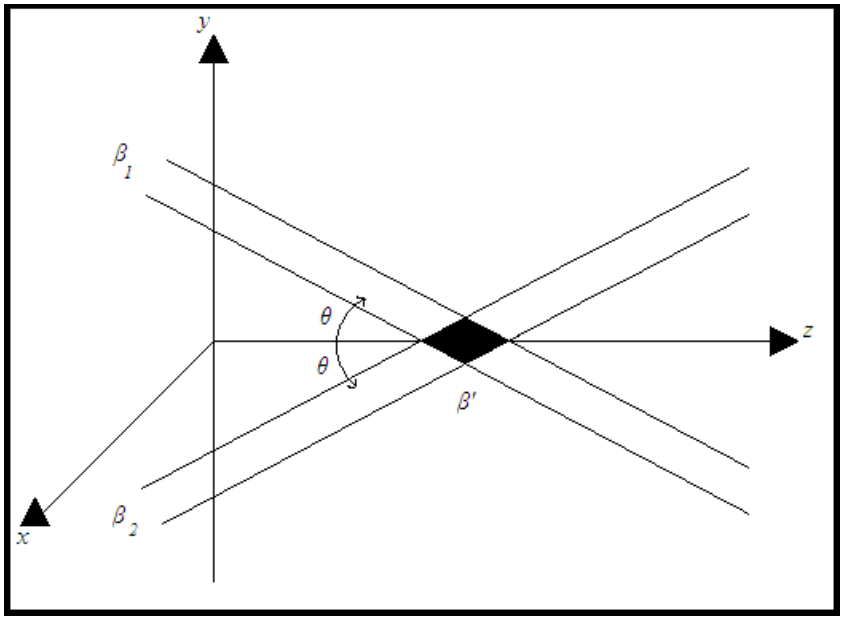

Fig. 3.II. Se muestra el arreglo experimental propuesto, en donde β_1 y β_2 corresponde a la dispersión de los plasmones superficiales generalizados

el cual es un plasmón que se propaga en dirección z, con una atenuación que decae exponencialmente en dirección x y donde su índice de refracción está conformado por una dispersión β (Ver Apéndice B),

$$\beta = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2} \tag{3.12}$$

entonces el índice de refracción es de la forma:

$$n_p = \frac{\beta}{k_0} = \frac{\frac{\omega}{c}}{\frac{\omega}{c}}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2} \tag{3.13}$$

y si ahora hacemos la interferencia de dos plasmones utilizando el mismo arreglo que se muestra en la figura 3.II, pero separados los plasmones por un ángulo θ, con respecto al eje z:

$$E = E_1 + E_2 = \hat{\xi}_1 e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta + y\sin\theta)} + \hat{\xi}_2 e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta - y\sin\theta)} \tag{3.14}$$

donde α es la razón de atenuación perpéndicular al plano de propagación del plasmón. La intensidad satisface:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta + y\sin\theta)} + e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta - y\sin\theta)} \\ &= e^{-2\alpha x} e^{2i\beta y\sin\theta} + e^{-2\alpha x} e^{-2i\beta y\sin\theta} + e^{-2\alpha x} + e^{-2\alpha x} \\ &= e^{-2\alpha x}\left[2 + e^{2i\beta y\sin\theta} + e^{-2i\beta y\sin\theta}\right] \\ &= e^{-2\alpha x}\left[2 + 2\cos\left(2\beta y\sin\theta\right)\right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

la relación de dispersión β' para el campo interferido toma la forma:

$$\beta' = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}\cos\alpha = \beta\cos\alpha$$

con un índice de refracción efectiva (n_{ef}) dado por:

$$n_{ef} = \frac{\beta\cos\alpha}{k_0} = \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}\cos\alpha$$

y en donde β' y n_{ef} es la dispersión e índice de refracción efectivo respectivamente, de ambas ondas ya superpuestas.

3.3 Análisis de interferencia de plasmones generalizados

En la ecuación 3.15 se obtuvo la interferencia de dos plasmones sumando su campo resultante; ahora se obtendrá el campo pero utilizando la representación del espectro angular, con el mismo arreglo que se muestra en la figura 3.II y nuevamente separados por un ángulo θ. Pero en este caso también consideramos que son dos deltas de Dirac las que se proponen como fuentes puntuales en la posición a y $-a$.

$$e^{-\alpha x}\hat{\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}\left(\frac{z\cos\theta}{\lambda_0}+\frac{y\sin\theta}{\lambda_0}\right)}\left[\delta\left(u+a\right)+\delta\left(u-a\right)\right]du \tag{3.16}$$

haciendo

$$\frac{\cos\theta}{\lambda_0} = v; \ \frac{\sin\theta}{\lambda_0} = u \tag{3.17}$$

la ecuación 3.16 queda

$$e^{-\alpha x}\hat{\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}(zv+yu)}\left[\delta\left(u+a\right)+\delta\left(u-a\right)\right]du \tag{3.18}$$

$$e^{-\alpha x}\hat{\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(u+a\right)e^{i2\pi\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}(zv+yu)}+\delta\left(u-a\right)e^{i2\pi\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}(zv+yu)}\right]du$$

$$e^{-\alpha x}\hat{\xi}e^{i2\pi\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^{1/2}zv}\left[e^{i2\pi ay\beta\frac{c}{\omega}}+e^{-i2\pi ay\beta\frac{c}{\omega}}\right]$$

$$e^{-\alpha x}\hat{\xi}e^{i2\pi\beta z\frac{\omega}{c}\frac{\cos\theta}{\lambda_0}}2\cos\left(2\pi ya\frac{c}{\omega}\beta\right)$$

donde a es de la forma:

$$a = \frac{\sin\theta}{\lambda_0} \tag{3.19}$$

entonces sustituyendo el valor de a en la ecuación 3.18

$$2e^{-\alpha x}\hat{\xi}e^{i\beta z\cos\theta}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{c}{\omega}\beta y\sin\theta\right) \tag{3.20}$$

$$2e^{-\alpha x}\hat{\xi}e^{i\beta z\cos\theta}\cos\left(\beta y\sin\theta\right)$$

obteniendo la intensidad de 3.20

$$\begin{aligned} I &= 4e^{-2\alpha x}\left|\hat{\xi}\right|^2\cos^2\left(\beta y\sin\theta\right) \\ &= \frac{4}{2}e^{-2\alpha x}\left|\hat{\xi}\right|^2\left[1+\cos\left(2\beta y\sin\theta\right)\right] \\ &= 2e^{-2\alpha x}\left|\hat{\xi}\right|^2\left[1+\cos\left(2\beta y\sin\theta\right)\right] \end{aligned} \tag{3.21}$$

si comparamos la ecuación 3.15 en donde se hizo una superposición de dos plasmones con la ecuación 3.21 se utilizó la representación del espectro angular, se puede ver que ambas ecuaciones son iguales; el uso de la representación angular es una herramienta matemática muy útil ya que ayuda a visualizar los problemas desde otro punto de vista.

La figura 3.III muestra una simulación de la intensidad obtenida de la interferencia de plasmones superficiales generalizados (ver la ecuación 3.21) en el plano $x = 0$, ya que

solo en la superficie del metal es donde se genera el plasmón, esto es, si nos vamos afuera del plano $x = 0$ el plasmón superficial decae exponencialmente esto se puede deducir de la ecuación anterior.En esta simulación (ver figura 3.III) realizada en Matlab™, se puede

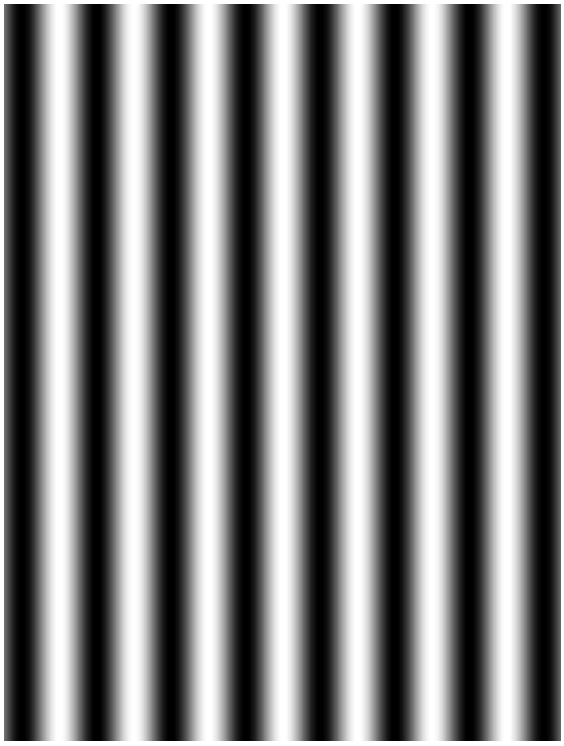

Fig. 3.III. Muestra el campo obtenido por la interferencia de dos plasmones superficiales y $\beta = 2$

ver un patrón cosenoidal formado por la interferencia de dos plasmones superficiales generalizados, se hizo $\beta = 2$, $x = 0$ y el ángulo se dejó fijo ($\theta = \pi/5$), el eje y se varió de $[-10, 10]$, con un incremento de $0{,}01$. El eje z es constante esto se puede ver de la ecuación 3.21

3.4 Densidad de Carga de la Interferencia de dos Plasmones

Como vimos en las secciones anteriores se obtuvo el campo producido de la interferencia de dos plasmones, pero ahora lo que se quiere ver es su densidad de carga para ver la redistribución de cargas que se produjo de los dos plasmones.

La densidad de carga de un campo está definido como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.22}$$

de la ecuación 3.14 muestra el campo obtenido de la interferencia de dos plasmones, en donde $\hat{\xi}_1$ y $\hat{\xi}_2$ son de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &= \hat{\imath}a + \hat{\jmath}b\sin\theta + \hat{k}b\cos\theta \\ \hat{\xi}_2 &= \hat{\imath}a - \hat{\jmath}b\sin\theta + \hat{k}b\cos\theta \end{aligned} \tag{3.23}$$

sustituyendo los valores de $\hat{\xi}_1$ y $\hat{\xi}_2$ en la ecuación 3.14, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= e^{-\alpha x}e^{i\beta z\cos\theta}\left[\begin{array}{c}\left(\hat{\imath}a + \hat{k}b\cos\theta\right)\left(e^{i\beta y\sin\theta} + e^{-i\beta y\sin\theta}\right) + \\ \hat{\jmath}b\sin\theta\left(e^{i\beta y\sin\theta} - e^{-i\beta y\sin\theta}\right)\end{array}\right] \\ \vec{E} &= 2e^{-\alpha x}e^{i\beta z\cos\theta}\left[\left(\hat{\imath}a + \hat{k}b\cos\theta\right)\cos\left(\beta y\sin\theta\right) + \hat{\jmath}b\sin\theta\sin\left(\beta y\sin\theta\right)i\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

derivando la ecuación 3.24, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= -2a\alpha\cos\left(\beta y\sin\theta\right)e^{-\alpha x}e^{i\beta z\cos\theta} \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 2ib\beta\sin^2\theta\cos\left(\beta y\sin\theta\right)e^{-\alpha x}e^{i\beta z\cos\theta} \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 2ib\beta\cos^2\theta\cos\left(\beta y\sin\theta\right)e^{-\alpha x}e^{i\beta z\cos\theta} \end{aligned} \tag{3.25}$$

sustituyendo ecuaciones 3.25 en la ecuación de densidad de carga (3.22)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 2\cos\left(\beta y\sin\theta\right)e^{-\alpha x}e^{i\beta z\cos\theta}\left(-a\alpha + ib\beta\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.26}$$

obteniendo la probabilidad de la densidad de carga utilizando como función de densidad una densidad de probabilidad uniforme.

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\pi}; \quad 0 < \theta < \pi \tag{3.27}$$

la ecuación 3.27 muestra la forma de la densidad de probabilidad uniforme.

$$\begin{aligned} \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0} &= \int_0^{\pi} 2\cos(\beta y \sin\theta)\, e^{-\alpha x} e^{i\beta z \cos\theta} (-a\alpha + ib\beta)\, \rho(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}(-a\alpha + ib\beta)\, e^{-\alpha x} \int_0^{\pi} \cos(\beta y \sin\theta)\, e^{i\beta z \cos\theta} d\theta \end{aligned} \tag{3.28}$$

La densidad de carga obtenida en la ecuación 3.28 muestra una integral no analítica; al graficar $\cos(\beta y \sin\theta)\, e^{i\beta z \cos\theta}$ para ver su comportamiento se obtuvo la siguiente gráfica 3.IV

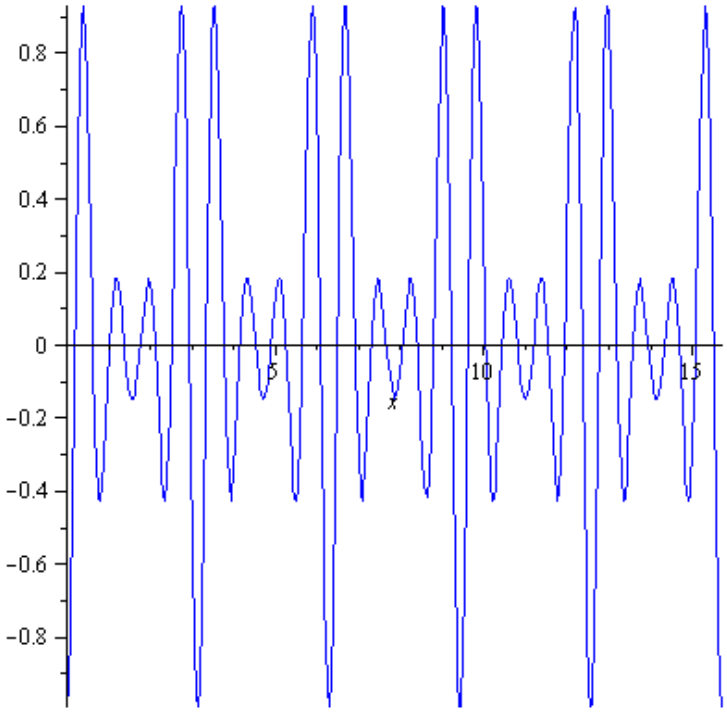

Fig. 3.IV. Producto de la integral ($\cos(\beta y \sin\theta)\, e^{i\beta z \cos\theta}$) de la densidad de carga, obtenida de la ecuación 3.28

Se puede ver que tiene un comportamiento periódico, en donde solo se graficó la parte real ya que se quiere que tenga un significado físico a un $z \neq 0$. Por otro lado como la integral es complicada solo se dejará indicada. Si se graficara en el plano $z = 0$ la gráfica obtenida sería de forma cosenoidal.

3.5 Interferencia en plasmones con distintas funciones de densidad

De la figura 3.V se muestra la dirección de propagación de los plasmones de superficie en el plano yz, en donde las direcciones caracterizadas por el angulo θ cambian de manera aleatoria con respecto al eje z. Ahora la interferencia forma un ensamble de plasmones interferidos cada uno de ellos corresponde a un ángulo distinto, esto es, se produce un ensamble de campos ópticos en donde se tiene que el ángulo θ es una variable aleatoria. Para la síntesis de diversos modos plasmónicos, se asocia a la variable aleatoria diversas funciones de probabilidad para ver la variedad de haces plasmónicos.

3.5.1 Probabilidad de interferencia de plasmones usando una densidad de probabilidad uniforme

A la intensidad obtenida anteriormente (ec. 3.15) se le asocia una función de densidad de probabilidad uniforme, de la forma:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\pi}; \ \in \ 0 < \theta < \pi \tag{3.29}$$

entonces,

$$\langle I(\theta) \rangle = \int \rho(\theta) I(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} e^{-2\alpha x} \left(2\int_0^{\pi} d\theta + 2\int_0^{\pi} \cos(2\beta y \sin\theta) d\theta \right) \tag{3.30}$$

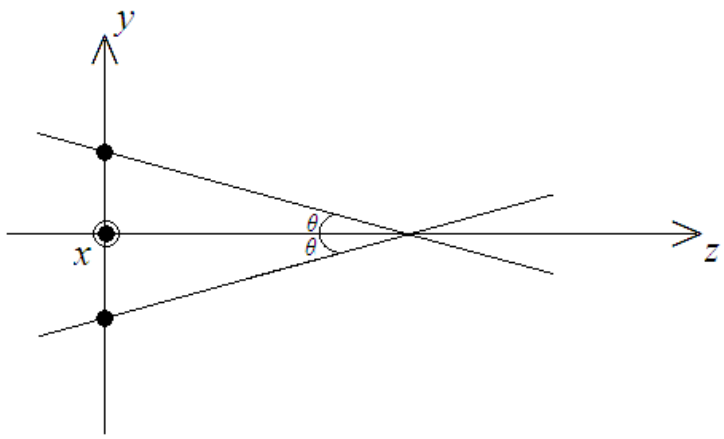

Fig. 3.V. Arreglo experimental propuesto, para encontrar el campo producido por plasmones superficiales generalizados.

de la integral anterior (ec.3.30), se puede ver que es una función Bessel de orden cero y se encuentra definida como:

$$J_0\left(x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(x\sin\theta\right) d\theta \tag{3.31}$$

aplicando esta fórmula (3.31) en la ecuación (3.30)

$$\begin{aligned} \langle I\left(\theta\right)\rangle &= \frac{1}{\pi}e^{-2\alpha x}\left(2\pi + 4\pi J_0\left(2\beta y\right)\right) \\ &= e^{-2\alpha x}\left(2 + 4J_0\left(2\beta y\right)\right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

La figura 3.VI muestra el patrón de franjas obtenido al simular la intensidad promedio resultante (ver ecuación 3.32) y utilizando una densidad de probabilidad uniforme, se puede ver claramente que tiene forma de una función Bessel y la dispersión (β) controla el ancho de las franjas.

En la simulación de la figura 3.VI realizada en Matlab™, con $\beta = 2$, $x = 0$ y $y = [-10, 10]$, con un incremento de $0{,}01$; se obtuvo un patrón tipo Bessel, esto quiere decir que las car-

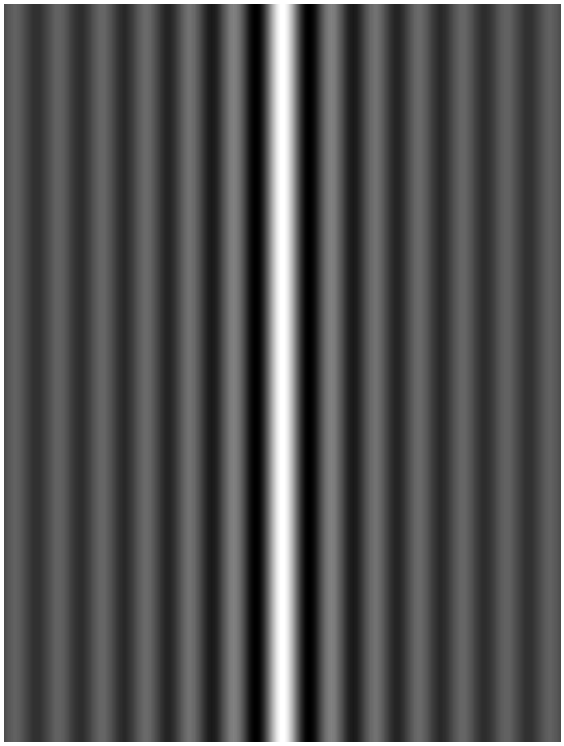

Fig. 3.VI. Simulación de la probabilidad de plasmones superficiales generalizados con una densidad de probabilidad uniforme y $\beta = 2$.

gas de los plasmones superficiales se redistribuyen la mayor parte en el centro. La siguiente figura 3.VII muestra un corte transversal para distintos valores de la relación de dispersión (β) .En la figura anterior se puede ver que al ir incrementando β el ancho de la franja prin-

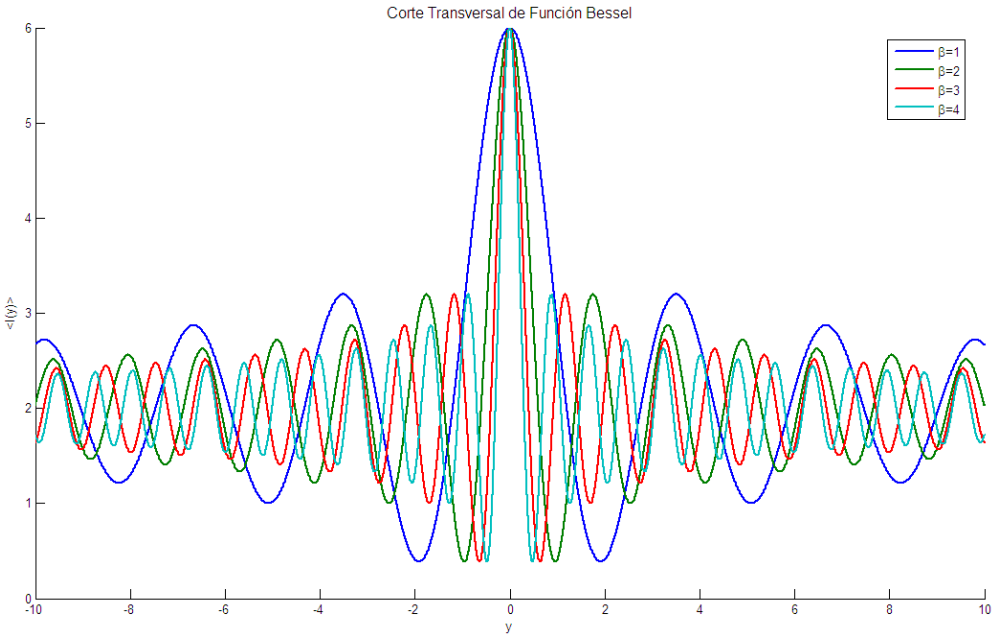

Fig. 3.VII. Corte transversal de función Bessel con función de densidad uniforme, variando β

cipal se va estrechando, y presenta más oscilaciones, pero con menor amplitud, mientras que en β más pequeñas su franja principal es más ancha, con oscilaciones más lentas y amplitudes más grandes.

3.5.2 Probabilidad de interferencia de plasmones usando una densidad de probabilidad uniforme agregando una fase

Los haces "Dark Hollow"se caracterizan por tener en su centro intensidad cero y en la actualidad son de gran interés para su estudio, ya que tienen aplicaciones como en guía de átomos fríos y pinzas ópticas [17]. Diferentes métodos han sido desarrollados para pro-

ducir rayos láser huecos ó "*hollow laser beams*", como el método de selección de modos transversal, métodos ópticos geométricos, métodos ópticos holográficos, métodos holográficos generados por computadora, entre otros [27]. Ahora se quieren generar usando plasmones superficiales como veremos enseguida.

Se hizo interferencia con dos plasmones pero ahora agregando una fase a uno de ellos, esto se hizo para obtener una Bessel inversa y obtener "Dark Hollow Plasmon Beam".

Agregando la fase, se obtiene:

$$\begin{aligned} E_1 &= \hat{\xi}_1 e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta + y\sin\theta)+i\delta} \\ E_2 &= \hat{\xi}_2 e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta - y\sin\theta)} \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde δ es la fase. Sumando E_1 y E_2:

$$E = E_1 + E_2 = \hat{\xi}_1 e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta + y\sin\theta)+i\delta} + \hat{\xi}_2 e^{-\alpha x} e^{i\beta(z\cos\theta - y\sin\theta)} \tag{3.34}$$

la intensidad resultante es

$$\begin{aligned} I &= e^{-2\alpha x} e^{i\beta z\cos\theta - i\beta z\cos\theta} \left(e^{i\beta\sin\theta + i\delta} + e^{-i\beta\sin\theta}\right)\left(e^{-i\beta y\sin\theta - i\delta} + e^{i\beta y\sin\theta}\right) \\ &= e^{-2\alpha x}\left(e^{i\beta y\sin\theta} e^{i\delta} + e^{-i\beta y\sin\theta}\right)\left(e^{-i\beta y\sin\theta} e^{-i\delta} + e^{i\beta y\sin\theta}\right) \\ &= e^{-2\alpha x}\left(2 + e^{i2\beta y\sin\theta} + e^{-i2\beta y\sin\theta}\right) \\ &= e^{-2\alpha x}\left(2 + 2\cos\left(2\beta y\sin\theta + \delta\right)\right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ahora calculando la intensidad promedio asociada a la ecuación 3.35, con una función de densidad de probabilidad uniforme $\rho(\theta) = \frac{1}{\pi}; \in 0 < \theta < \pi$:

$$\begin{aligned}
\langle I(\theta)\rangle &= \int \rho(\theta) I(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} e^{-2\alpha x}\left(2\int_0^{\pi} d\theta + 2\int_0^{\pi} \cos(2\beta y \sin\theta + \delta)\, d\theta\right) \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-2\alpha x}\left(2\pi + 2\int_0^{\pi} [\cos(2\beta y \sin\theta)\cos\delta - \sin(2\beta y \sin\theta)\sin\delta]\, d\theta\right) \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-2\alpha x}\left(2\pi + 2\cos\delta \int_0^{\pi} \cos(2\beta y \sin\theta)\, d\theta\right) \\
&= e^{-2\alpha x}\left[2 + 4\cos(\delta) J_o(2\beta y)\right]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

La ecuación 3.36 muestra la intensidad promedio con una función de densidad uniforme, pero con una fase δ. Para encontrar el mínimo de intensidad en la franja principal se hizo $I \to 0$ en $y \to 0$, entonces

$$\begin{aligned}
2 + 4\cos(\delta) J_o(0) &= 0 \\
2 + 4\cos(\delta) &= 0 \\
\cos(\delta) &= -\frac{1}{2} \\
\delta &= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

por lo tanto para obtener que el valor central la franja sea mínimo el valor de la fase δ, debe ser:

$$\delta = \frac{2}{3}\pi \tag{3.38}$$

La imagen que se muestra abajo (ver figura 3.VIII) es la simulación obtenida en Matlab™ de la intensidad promedio (ver ecuación 3.36), aplicando una densidad de probabilidad uniforme pero ahora agregando una fase.

En la simulación anterior se utilizó $\beta = 2$, $y = [-10, 10]$ y con una fase $\delta = \frac{2}{3}\pi$ y se puede observar que la franja central tiene intensidad cero, lo que nos da por resultado es una Bessel invertida ó *dark hollow beam*. Para ver qué ocurre al ir variando la relación

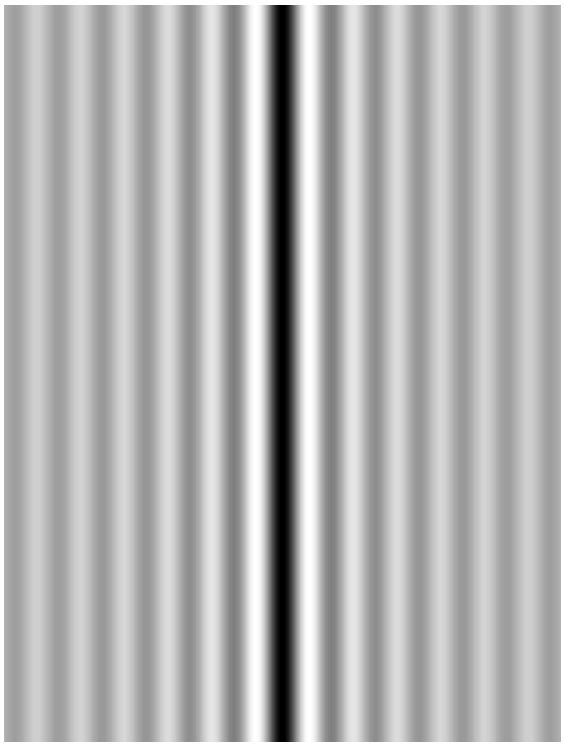

Fig. 3.VIII. Muestra el patrón de franjas con forma de una función Bessel pero invertida, $\beta = 2$

de dispersión, la siguiente figura 3.IX muestra su comportamiento y donde se puede ver que al incrementar los valores de β, la franja central oscura se hace cada ves más estrecha, las oscilaciones son cada vez más cortas y la amplitud es más pequeña; a diferencia de ir disminuyendo β, donde la franja central es más grande (línea azul), sus períodos de oscilación es casi dos veces más grande que cuando $\beta = 4$, y su amplitud es más grande. En todas las gráficas se puede ver que mientras más nos alejamos del centro de la gráfica, esta se va desvaneciendo poco a poco.Para generar un patrón de interferencia tipo "*dark*

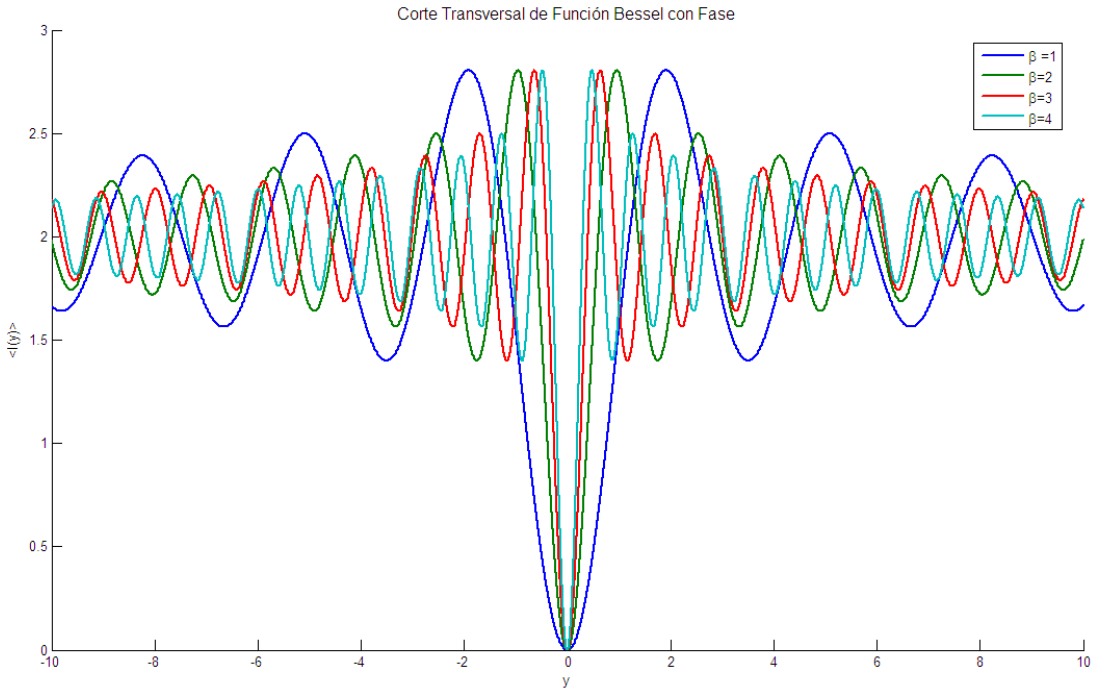

Fig. 3.IX. Corte transversal de función Bessel con función de densidad uniforme, variando β y agregado una fase $\delta = \frac{2}{3}\pi$

hollow.^{ex}perimentalmente, el cambio de fase se puede producir inclinando el haz incidencia en las rendijas del arreglo experimental[4].

[4] En este capítulo se encuentra una sección en donde se propone un arreglo experimental.

3.5.3 Interferencia promedio utilizando una función de densidad de probabilidad Gaussiana

Ahora se propone agregar una densidad de probabilidad Gaussiana, para el promedio de la interferencia con plasmones y encontrar la nueva redistribución de energía/cargas. En donde la función de densidad de probabilidad Gaussiana se encuentra definida como[5]:

$$\rho\left(\theta\right) = \frac{2k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2\theta^2}{2}} \ \in \ 0 < \theta < \pi \tag{3.39}$$

y en figura 3.X se muestra la gráfica de la función de probabilidad Gaussiana nuevamente tomando la ecuación de intensidad obtenida anteriormente (ec. 3.21),[7].

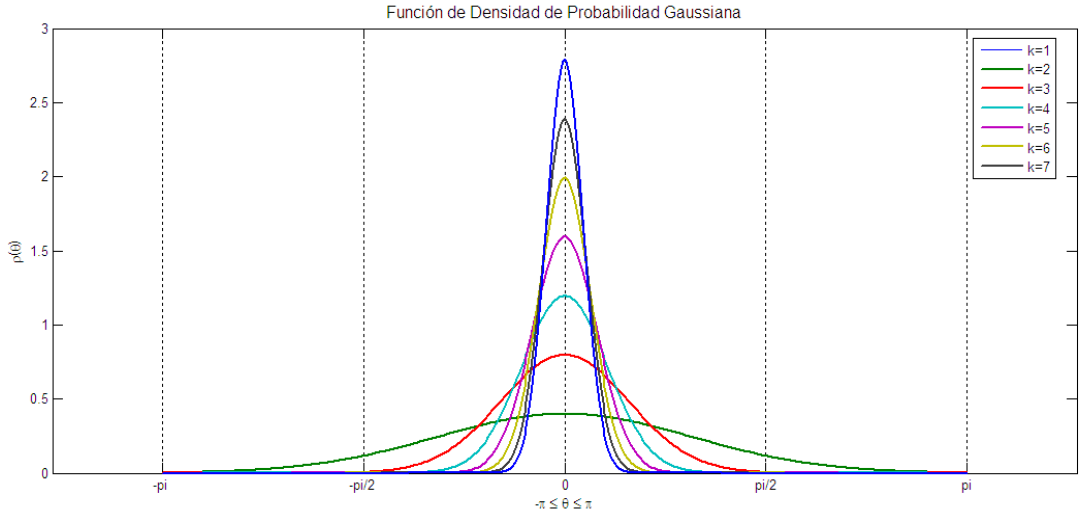

Fig. 3.X. Función de densidad de probabilidad Gassiana

En donde al ir incrementado los valores de k la densidad de probabilidad Gaussiana se hace más angosta, si $k = 0$, entonces se obtendría el caso de una función de probabilidad uniforme; entonces, obteniendo el promedio de la intensidad ($I\left(\theta\right)$) y aplicando la densidad

[5] La ecuación 3.39 se puede encontrar en [7], capítulo 2

de probabilidad (ec. 3.39) a la ecuación de intensidad (ec. 3.21):

$$\langle I(\theta)\rangle = \int_0^{\pi} \rho(\theta)\, I(\theta)\, d\theta = \frac{4k}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\alpha x} \left[\int_0^{\pi} e^{-\frac{k^2\theta^2}{2}} d\theta + \int_0^{\pi} \cos(2\beta y \sin\theta)\, e^{-\frac{k^2\theta^2}{2}} d\theta \right] \quad (3.40)$$

la primer integral tiene de solución de una función error, mientras que la segunda integral se hizo numéricamente utilizando el método de la cuadratura Gaussiana, ambos casos se resolvieron en Matlab™,

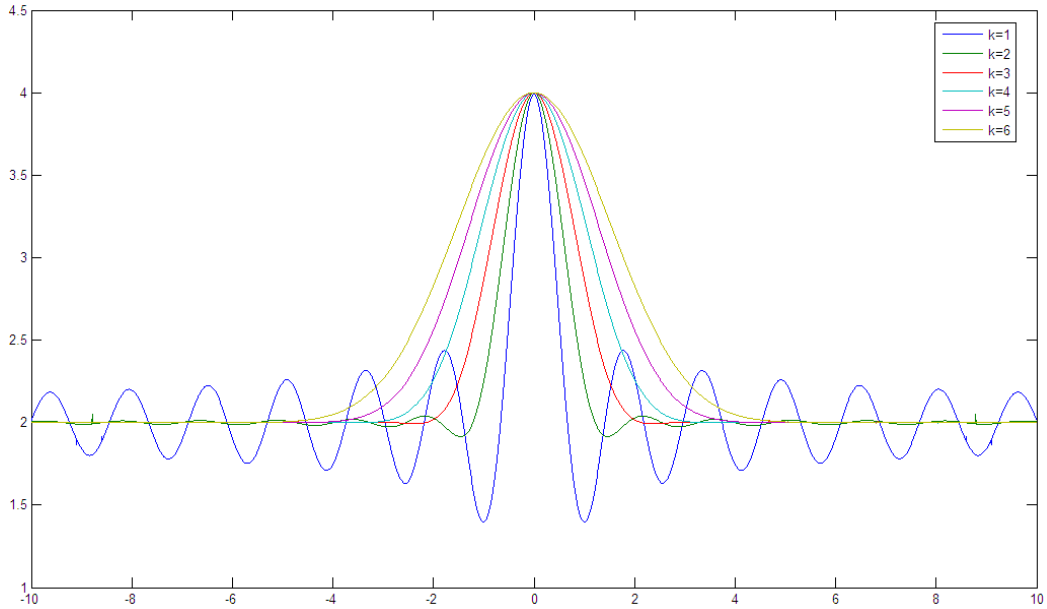

Fig. 3.XI. Corte transversal de ecuación con distintos valores de k

En la figura 3.XI se muestra un corte transversal de la intensidad promedio (ec. 3.40), dejando $\beta = 2$, variando $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, con un rango en $y = [-10, 10]$ y un incremento de $0{,}001$; de aquí se puede ver que cuando $k = 1$ parece más a la intensidad promedio con densidad de probabilidad uniforme, mientras que al ir aumentando k se puede ver que la franja central se hace más ancha, pero sus franjas subsecuentes tiene menor intensidad y decaen a cero más rápido, como debería de suceder al aplicar una función de densidad tipo Gaussiana.

Se hizo una simulación en Matlab™ la cual se muestra en la figura 3.XII,esta simulación

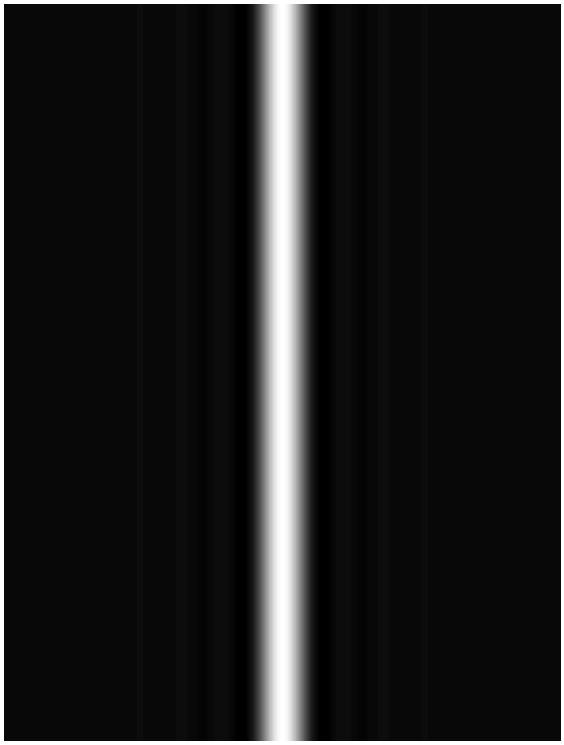

Fig. 3.XII. Campo generado por la interferencia de plasmones superficiales aplicando una función de densidad Gaussiana y $k = 2$

muestra como se miraría el patrón de interferencia de la intensidad promedio, con el uso de una función de probabilidad Gaussiana, donde se hizo para $\beta = 2$, $k = 2$, y en un rango de $y = [-10, 10]$ con un incremento de $0{,}01$.

3.6 Arreglo experimental propuesto

En esta sección se presenta una propuesta del arreglo experimental para implementar la interferencia con dos plasmones superficales. La figura 3.XIII se muestra el arreglo experimental de la construcción de un interferómetro de Young con plasmones superficiales, en

donde se propone utilizar un sustrato de vidrio con un recubrimiento de oro ó plata; entre medio del sustrato y el recubrimiento de oro, una película de otro material para mejorar la adhesión entre estas; la luz para generar los plasmones estará ubicada en la parte superior, del sustrato.

Por otro lado, se necesita que la separación entre los dos plasmones superficiales sea continuo, ya que el tiempo de vida de las cargas que se generan en un conductor es de alrededor de $10^{-18}seg$ y $10^{-15}seg$ cuando a la superficie se le añade otro elemento como el argón. Por lo cual si se hace que el cambio de separación entre las aberturas sea en distintos instantes de tiempo, no se podrá generar un patrón de interferencia, por el tiempo de vida de las cargas tan pequeño.

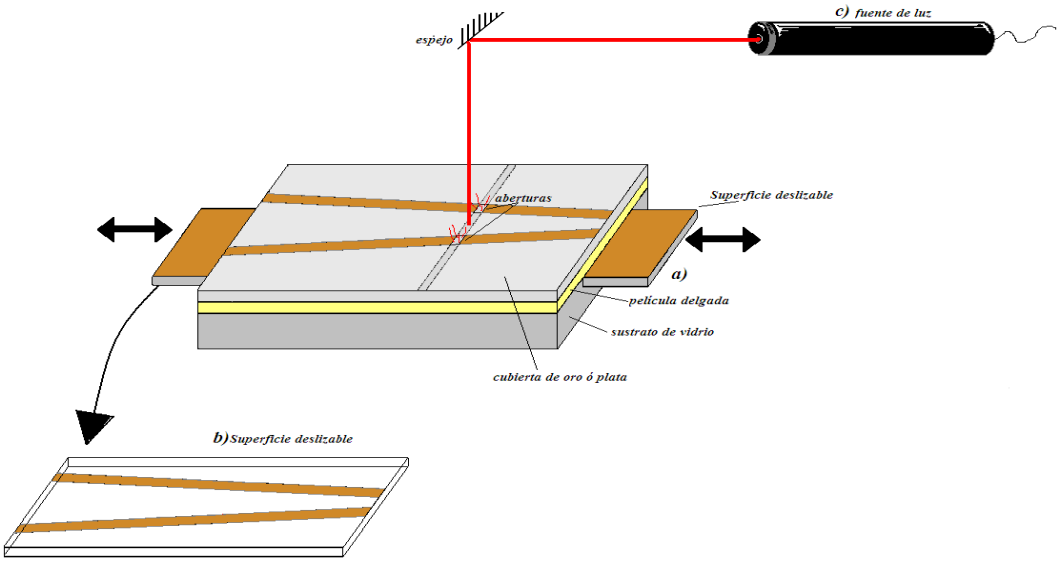

Fig. 3.XIII. Arreglo experimental de interferómetro de Young para plasmones superficiales

Así que se propone una placa hecha del mismo sustrato de vidrio que se pueda desplazar continuamente (ver figura 3.XIII a y b) con dos franjas verticales a través de toda la placa,

sin el recubrimiento de oro ó plata que lleva el sustrato de vidrio; estas franjas tienen que estar inclinadas para poder generar un ángulo entre las aberturas. La placa superior también debe tener una abertura horizontal que permita pasar la luz y simular así las rendijas para generar la interferencia.

Como se dijo anteriormente se necesita que el movimiento de la superficie deslizable sea continuo, para que sea válida la intensidad promedio obtenida de las ecuaciones 3.32, 3.36 y 3.40. La luz que incide en el sustrato con recubrimiento de oro ó plata, se propone que incida por la parte superior del sustrato de vidrio, como se muestra en el arreglo experimental (figura 3.XIII). En donde el movimiento de la superficie deslizable se podría generar por dos electrodos conectados en la placa deslizable. Y por último para poder observar la interferencia de plasmones superficiales se pueden utilizar instrumentos electrónicos, como un microscopio electrónico.

La siguiente imagen 3.XIV muestra una descripción geométrica de coherencia parcial, para unirlo con los resultados obtenidos de interferencia con plasmones superficiales, en donde se explica geométricamente porque se considera el interferómetro de Young como un medio parcialmente coherente.En la figura 3.XIV, en la fuente primaria independiente

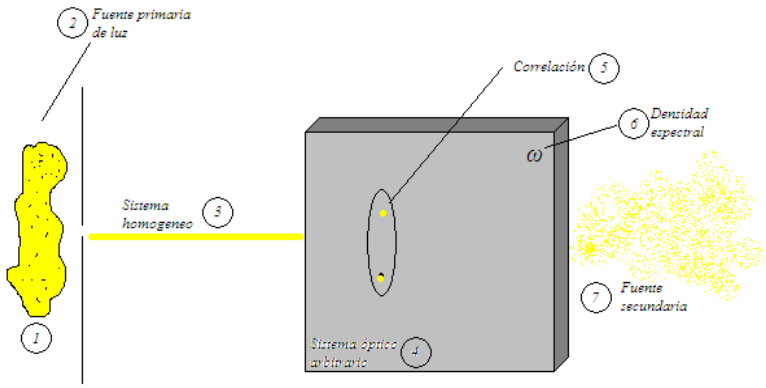

Fig. 3.XIV. Descripción geométrica de coherencia parcial.

(1) se cumple el teorema de van Cittert-Zernike que se utiliza para obtener la longitud de coherencia, después de pasar por la abertura (2) las ecuaciones de van Cittert-Zernike ya no es válida, pero si es un sistema homogéneo (3). Al entrar la luz en un sistema óptico sufre un cambio y si se toman dos haces de luz estos no son mutuamente coherentes si no que se unen por una correlación, en donde existe una redistribución de coherencia y una densidad de espectral (5). En la fuente secundaria (7) ya se tiene un medio parcialmente coherente.

En este capítulo se definió un plasmón elemental, hasta adaptarlo a un interferómetro de Young, después de tener un patrón tipo cosenoidal se agregaron a este, distintas funciones de densidad de probabilidad para ver las redistribuciones de carga. Se pudo observar, que al agregar una función de probabilidad uniforme se obtuvieron haces tipo Bessel; al agregarle una fase se pueden llegar a obtener haces plasmónicos tipo "Dark Hollow". Por otro lado al agregar una función de probabilidad tipo Gaussiana, se obtuvo un patrón con una franja central más intensa, pero con un decaimiento más rápido de la intensidad fuera de la franja central. Se propuso también, un arreglo experimental para llevar a cabo la interferencia de plasmones superficiales como un trabajo a futuro.[6]

[6] Todas las simulaciones realizadas en Matlab^{TM} el tamaño son de dimensiones 2001×2001 pixeles

Capitulo 4
Descripción de plasmones – partícula

En este capítulo se hace un análisis de un plasmón-partícula, el tratamiento se realiza a través de considerar una película conductora de espesor 20-40nm. Esto permite la posibilidad de síntesis de plasmones de largo recorrido. Una posterior reducción en la coordenada de propagación z a dimensiones de 20-40nm permite la síntesis de plasmones-partícula. Estos se modelan como una onda de carga superficial. El estudio se realiza a través del momento dipolar estableciendo una analogía mecánica como un sistema de resorte sin masa. El tratamiento se extiende a una interacción entre varios plasmones-partícula y el estudio se realiza utilizando una variante de la teoría de acoplamiento de modos.

4.1 Cálculo del momento dipolar equivalente

Como caso previo, se analiza un plasmón-partícula y se define el momento dipolar equivalente, ya que este nos permite establecer una analogía mecánica

Un medio homogéneo se caracteriza por tener propiedades estructurales isotrópicas en cualquier punto en el espacio. Ahora si colocamos un dipolo eléctrico, que se encuentra formado por dos cargas de signos opuestos ($-Q$, $+Q$), misma magnitud y dirección del campo $\mathbf{E}$, separadas una distancia $2a$.En la figura 4.I se muestra un esquema de un dipolo eléctrico en donde se observa que es estimulado por un campo eléctrico, lo que provoca que el dipolo sienta fuerzas de signos contrarios y empiece a oscilar en el medio. Donde hay un torque neto respecto al eje que pasa por cero, y está dado por:

$$T = 2aF \sin\theta \tag{4.1}$$

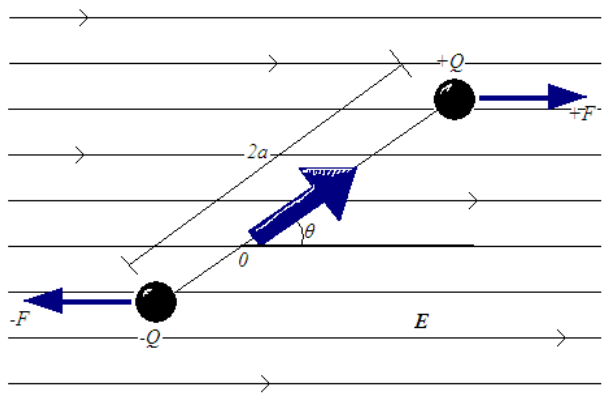

Fig. 4.I. Dipolo eléctrico

donde la fuerza y el dipolo son

$$F = QE \quad \text{y} \quad p = 2aQ \tag{4.2}$$

si se sustituye la ec. 4.2 en la ec. 4.1, se obtiene que

$$\tau = pE \sin\theta \tag{4.3}$$

Entonces un dipolo eléctrico que se encuentra en un campo $\mathbf{E}$ experimenta una torque que tiende a alinearlo con el campo (ver ecuación 4.4):

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{4.4}$$

Por otro lado un momento dipolar que se denota por $\overrightarrow{p}$ es una magnitud vectorial con módulo igual al producto de la carga Q por la distancia que las separa $\overrightarrow{d}$, cuya dirección es la recta que los une.

$$\overrightarrow{p} = Q \cdot \overrightarrow{d}$$

Para valores suficientemente bajos el módulo del campo eléctrico externo, puede probarse que el momento dipolar es aproximadamente proporcional a:

$$\vec{p} = \alpha \mathbf{E} \tag{4.5}$$

donde α es la polarización electrónica que es un desplazamiento de las cargas en presencia de un campo eléctrico.

Por lo tanto, el momento dipolar de dos cargas iguales y de signo contrario se define como el producto de la carga por la distancia que los separa, como se muestra en la figura 4.II.El

Fig. 4.II. Momento dipolar eléctrico

conjunto de cargas de partículas puede interaccionar con otras partículas, con el medio que la rodea ó con un campo eléctrico aplicado [8].

Ahora que conocemos los principios básicos de un momento dipolar equivalente de una partícula y como es que este presenta fluctuaciones al incidir un campo electromagnético, es importante conocer la interacción un dipolo cerca de una superficie, ya que será utilizado más adelante para hacer un análisis de interacción plasmón - partícula.

El problema de radiación de un dipolo cerca de una superficie tiene varios campos de estudio como: teoría de antenas, diseños de circuitos y control de contaminación de superficies. Esta teoría es aplicada para explicar el efecto Raman de absorción de moléculas metálicas inmersas en gases nobles. En campos cercanos ópticos, los dipolos que se encuentran cerca de una superficie pueden ser consideradas como pequeñas fuentes de luz.

Una forma de calcular un campo dipolar es a través de reducir dimensionalmente la superficie conductora. Considerando ahora el arreglo de la figura 4.III, para dar una explicación de los casos que se pueden presentar en un dipolo que se encuentra arriba de la película.

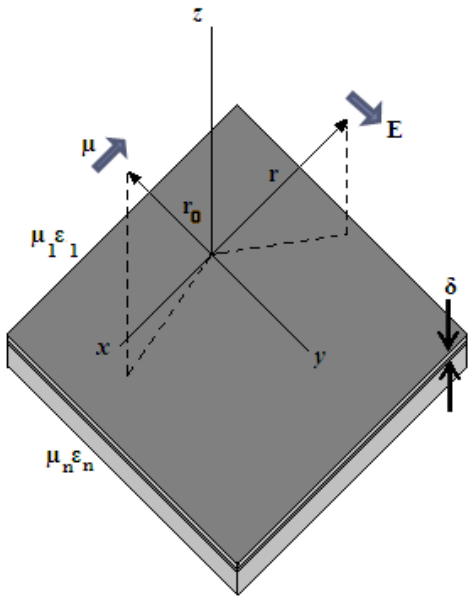

Fig. 4.III. Muestra configuración de dipolo [14]

Ahora si en la parte superior (vacio) es menos denso que el parte del sustrato. Y si la distancia del dipolo desde la superficie de la película superior es menor a una longitud de onda, se puede decir que las componentes del campo evanescente del dipolo interactúan con la estructura de la película y forman otras formas de radiación electromagnética. Esto es, su energía puede ser absorbida por la película, transformándose en ondas que se propagan en el sustrato ó acoplamiento de modos propagándose a lo largo de la película. En otro caso, las ondas planas que se propagan en dirección al ángulo crítico con reflexión total interna $\alpha_c = \sin^{-1}(n_1/n_2)$, donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de cada medio respectivamente. La amplitud de las ondas planas depende exponencialmente de la altura del dipolo por encima de la película. Así, los dipolos más grandes que un par de longitud es de onda, en la superficie no habrá luz en la superficie en direcciones más allá del ángulo crítico [14].

4.2 Análisis de interacción plasmón-partícula

En esta sección se describe lo que es una nanopartícula y se hace un análisis de un plasmón-partícula en una superficie. Una nanopartícula es una partícula microscópica con una dimensión menor a $100nm$, que en la actualidad tiene muchas aplicaciones en el área de la óptica y una de ellas es verla como un plasmón-partícula.

Las componente paralelas del vector de onda k_z necesarias para la excitación de plasmones superficiales también se presentan en campos cercanos confinados como partículas metálicas ó incluso moléculas fluorescentes. Esto es, en todas las formas para generar los plasmones superficiales son excitados por componentes de campos evanescentes tal que estos coinciden con el vector de onda k_z paralelo al plasmón superficial 4.IV.

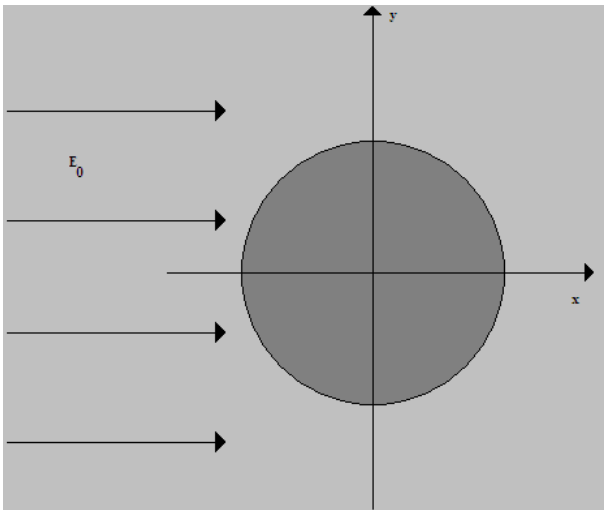

Fig. 4.IV. Campo polarizado que incide sobre una partícula

Se analizan teóricamente los modos electromagnéticos asociados a partículas considerándola como un sistema cuasi-estático, lo que significa que no es válida la ecuación de Helmholtz. Esto es heredado del hecho de que la longitud de onda es mucho mayor que

las dimensiones de una nanopartícula. Esto es, que se asume que todos los puntos de un objeto responden simultáneamente a un campo entrante. Esto es cierto si el objeto es más pequeño a una longitud de onda de la luz (nanopartícula). La ecuación de Helmholtz se reduce a la ecuación de Laplace [9]. La ecuación 4.6 muestra el campo de las oscilaciones de un dipolo, donde se considera en campo cercano y cuasi-estático.

$$\mathbf{E}\left(r\mathbf{n},t\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[k^2\left(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\mu}\right)\times\mathbf{n}\frac{e^{ikr}}{r}+\left[3\mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mu}\right)-\boldsymbol{\mu}\right]\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right)e^{ikr}\right]e^{i\omega t} \quad (4.6)$$

donde μ es el momento dipolar y si se hace $kr << 1$ la ecuación 4.6 queda

$$E\left(rn,t\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3n\left(n\cdot\mu\right)-\mu\right]\frac{e^{i\omega t}}{r^3} \quad (4.7)$$

La ecuación 4.7 muestra el campo electrostático de un dipolo, donde las oscilaciones ocurren en $e^{i\omega t}$. En los límites del campo eléctrico se puede representar por un potencial $E=-\nabla\Phi$. Además, este potencial debe satisfacer la ecuación de Laplace (ver ecuación 4.8) [14].

$$\nabla^2\Phi=0 \quad (4.8)$$

Un plasmón-partícula puede ser representado por un campo cuasi-estático, en donde la ecuación de Laplace se satisface en campo cercano. Por otro lado, la resonancia de un plasmón-partícula depende que presentan las constantes dieléctricas en su entorno.

4.3 Análisis de conjunto de nanopartículas distribuidas aleatoriamente

Si hacemos incidir un campo con polarización S a un conjunto de nanopartículas, estas se alinearan horizontalmente (ya que se pueden ver como dipolos) como se muestra en la figura 4.V en una superficie metálica. Los plasmones superficiales generados en la super-

ficie generaran oscilaciones en las partículas. Esta alineación se puede describir como un conjunto de resortes sin masa y las ecuaciones de onda son válidas.

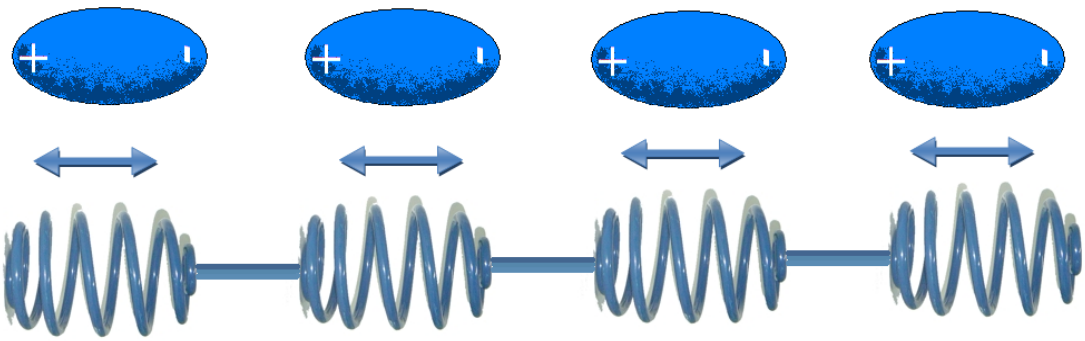

Fig. 4.V. Muestra las oscilaciones horizontales producidas por plasmón-partícula

Ahora si consideramos un campo con polarización P el cual se incide a los plasmones-partículas, estas se alinearan verticalmente, como se muestra en la figura 4.VI y en donde se presentaran oscilaciones cruzadas

En donde se puede acoplar una ecuación de momento dipolar que tenga periodicidad de la forma:

$$\ddot{x} + \left(a_0^2 + 2a_1a_0\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)x = 0 \tag{4.9}$$

donde de la ecuación 4.9 donde a_0^2 nos da información de la frecuencia natural y el término de $2a_1a_0\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ nos dice que tanto cambia la frecuencia con respecto a un tiempo t. Esta ecuación es unidimensional y se considera que un resorte se comporta de forma cosenoidal. La ecuación anterior se resolvió por dos métodos el primero por funciones de Mathieu y en la otra se propuso una solución análoga a la teoría de acoplamiento de modos tipo exponencial; en el cuál en ambos casos se hizo una simulación en la computadora (utilizando programas matemáticos como Matlab™ y Maple 11™)

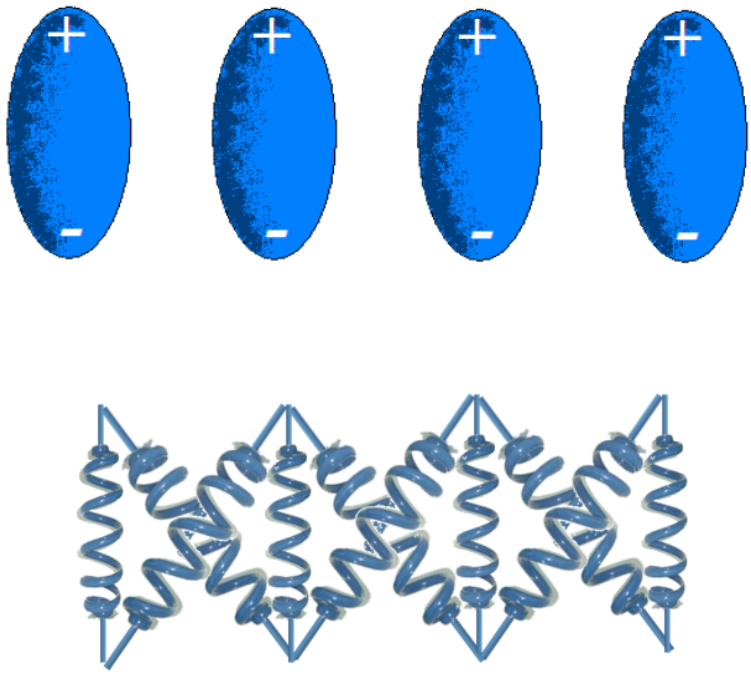

Fig. 4.VI. Conjunto de plasmones-partículas con polarización P

4.3.1 Primer caso utilizando la ecuación de Mathieu

Por resolver

$$\ddot{x} + \left(a_0^2 + 2a_1a_0\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)x = \frac{q_0}{m_e}E_0\cos(\Omega t) \tag{4.10}$$

donde la frecuencia en x está dada por

$$\omega_x = \frac{2\pi t}{T} \tag{4.11}$$

y la frecuencia en y es

$$\omega_y = a_0^2 \tag{4.12}$$

de constante k.Entonces,

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{n} \tag{4.13}$$

Esta es la ecuación diferencial de tipo Mathieu, donde la solución es inestable para pequeños valores de $2a_1a_0$ (amplitud del eje y) cuanto menor sea n, más profunda es la

inestabilidad y la solución es de la forma:

$$x_p = u_1 x_1 + u_2 x_2 \tag{4.14}$$

Tiene la forma de:

$$x_H = C_1 Ce\left(a_0, a_1 a_0, t\right) + C_2 Se\left(a_0, a_1 a_0, t\right) \tag{4.15}$$

donde Se y Ce se definen como:

$$\begin{aligned} Ce\left(\tfrac{2\pi}{T}, a_1\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(a_1\right)\cos\left(\tfrac{n2\pi}{T}t\right) \\ Se\left(\tfrac{2\pi}{T}, a_1\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(a_1\right)\sin\left(\tfrac{n2\pi}{T}t\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} W_0 &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ce & Se \\ Ce' & Se' \end{vmatrix} = CeSe' - Ce'Se \\ W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f_x & y_2' \end{vmatrix} = -f\left(x\right) y_2 = -q_0 E_0 \cos\left(\Omega t\right) Se \\ W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f_x \end{vmatrix} = f\left(x\right) y_1 = q_0 \cos\left(\Omega t\right) Ce \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde Se' y Ce' están definidas como:

$$\begin{aligned} Ce'\left(\frac{2\pi}{T}, a_1\right) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\pi}{T} A_n\left(a_1\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \\ Se' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\pi}{T} B_n\left(a_1\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde U_1 y U_2 son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{W_1}{W_0} dx = \int -\frac{q_0 E_0 \cos\left(\Omega x\right) Se}{CeSe' - Ce'Se} dx \\ u_2 &= \int \frac{W_2}{W_0} dx = \int \frac{q_0 E_0 \cos\left(\Omega x\right) Ce}{CeSe' - Ce'Se} dx \end{aligned} \tag{4.19}$$

entonces sustituyendo la ecuación 4.19 en la ecuación 4.14, para obtener la solución particular de la ecuación número 4.10

$$x_p = \int -\frac{q_0 E_0 \cos\left(\Omega t\right) Se}{CeSe' - Ce'Se} dt Ce + \int \frac{q_0 E_0 \cos\left(\Omega t\right) Ce}{CeSe' - Ce'Se} dt Se \tag{4.20}$$

con la solución obtenida utilizando el resultado de mathieu se hizo una simulación en Maple 11™, para ver el comportamiento del plasmón como partícula.La linea verde muestra

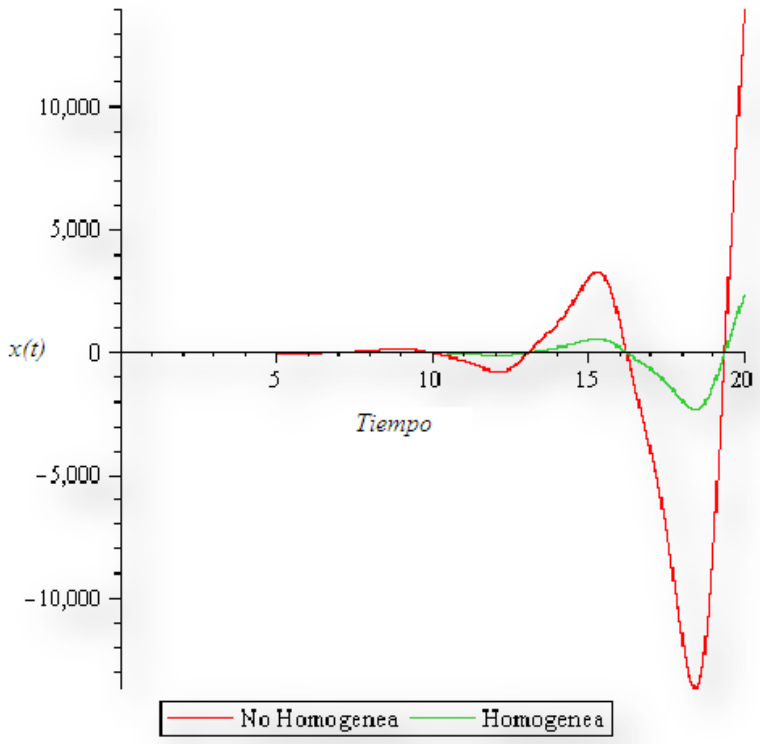

Fig. 4.VII. Muestra la solución homogenea y no homogenea de la ecuación de Mathieu para el plasmón como partícula

la simulación de la ecuación de Mathieu homogénea y la linea roja donde se puede ver que la amplitud varía más severamente es la solución de Mahieu no homogénea. Se puede ver en ambos casos que al transcurrir el tiempo en los dipolos, estos presentan oscilaciones extrañas, en donde llega un momento en que se rompe el enlace entre conjunto de dipolos.

4.3.2 Segundo caso proponiendo solución análoga a teoría de acoplamiento de modos

Resolviendo la ecuación de momento dipolar para plasmón-partícula, pero ahora proponiendo una solución, entonces la ecuación a resolver es la siguiente:

$$\ddot{x} + \left(a_0^2 + 2a_1 a_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) x = 0 \tag{4.21}$$

donde la ecuación 4.22 es la amplitud promedio, la cual es cercana a las oscilaciones del campo incidente

$$\langle x \rangle = x_o \cos(\omega t) \tag{4.22}$$

y proponiendo como solución

$$x = A(x)\, e^{ia_0 t} + B(x)\, e^{-ia_0 t} \tag{4.23}$$

derivando dos veces la ecuación 4.23

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A}e^{ia_0 t} + ia_0 A e^{ia_0 t} + \dot{B}e^{-ia_0 t} - ia_0 e^{-ia_0 t} \\ \ddot{x} &= \ddot{A}e^{ia_0 t} + ia_0 \dot{A}e^{ia_0 t} + ia_0 \dot{A}e^{ia_0 t} - a_0^2 A e^{ia_0 t} + \\ &\quad \ddot{B}e^{-ia_0 t} - ia_0 \dot{B}e^{-ia_0 t} - a_0^2 B e^{-ia_0 t} - ia_0 \dot{B}e^{-ia_0 t} \end{aligned} \tag{4.24}$$

y sustituyendo $\ddot{x}$ y x en la ecuación 4.21

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\ddot{A} + 2ia_0\dot{A} - a_0^2 A\right) e^{ia_0 t} + \left(\ddot{B} - 2ia_0\dot{B} - a_0^2 B\right) e^{-ia_0 t} + \\ &\quad \left(a_0^2 + 2a_0 a_1 \cos(\omega t)\right)\left(Ae^{ia_0 t} + Be^{-ia_0 t}\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

como se quiere que él plasmón partícula llegue a un estado de equilibrio en un determinado tiempo, entonces se puede eliminar los términos de segunda derivada ($\ddot{A}$ y $\ddot{B}$).aplicando la

condición de envolvente lenta.

$$\begin{aligned} 0 &= 2ia_0\dot{A}e^{ia_0t} - 2ia_0\dot{B}e^{-ia_0t} + 2a_0a_1A\cos(\omega t)\,e^{ia_0t} + 2a_0a_1B\cos(\omega t)\,e^{-ia_0t} \\ &+2ia_0\dot{A}e^{ia_0t} - 2ia_0\dot{B}e^{-ia_0t} + a_0a_1Ae^{i(\omega+a_0)t} + a_1a_0Ae^{-i(\omega-a_0)t} \\ &+a_0a1Be^{i(\omega-a_0)t} + a_0a_1Be^{-i(\omega+a_0)t} \end{aligned} \tag{4.26}$$

en la ecuación 4.26 se eliminaron los téminos de $a_0^2Ae^{ia_0t}$ y $a_0^2Be^{-ia_0t}$ se eliminan, simplificando la ecuación. Tomando la ecuación anterior (4.26) y multiplicándola por e^{-ia_0t} y eliminando los términos complejos, ya que se quiere obtener es un promedio temporal y al obtener la intensidad de la ecuación estas componentes se eliminaran, obtenemos la siguiente:

$$2ia_0\dot{A} + a_1a_0Be^{i(\omega-2a_0)t} + a_1a_0Be^{-i(\omega+2a_0)t} = 0 \tag{4.27}$$

entonces la ecuación 4.27 queda:

$$2ia_0\dot{A} + a_1a_0Be^{i(\omega-2\omega_0)t} = 0 \tag{4.28}$$

de la ecuación anterior 4.28 se toma ω como el doble de su frecuencia natural ($2a_0$). Esto es para encontrar una ecuación diferencia de primer grado.

- Caso para $\omega = 2a_0$

$$\begin{aligned} 2ia_0\dot{A} + a_1a_0Be^{i(\omega-2a_0)t} &= 0 \\ \dot{A} &= -a_1a_0B\left(\frac{1}{2ia_0}\right) = \frac{ia_1}{2}B \\ &\Longrightarrow \dot{A} - \frac{ia_1}{2}B = 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ahora multiplicando la ecuación 4.27 por e^{ia_0t}se obtiene:

$$2ia_0\dot{A}e^{i2a_0t} - 2ia_0\dot{B} + a_1a_2Ae^{i(\omega+2a_0)t} + a_1a_0Ae^{-i(\omega-2a_0)t} + a_1a_0Be^{i\omega t} + a_1a_0Be^{-i\omega t} = 0 \tag{4.30}$$

eliminando y reduciendo términos obtenemos:

$$-2ia_0\dot{B} + a_1a_0Ae^{i(\omega+2a_0)t} + a_1a_0Be^{-i(\omega-2a_0)t} = 0 \tag{4.31}$$

haciendo nuevamente ω a $2a_0$, para obtener una segunda ecuación diferencial:

- Para $\omega = 2a_0$ se hace el mismo procedimiento de sustituir este valor en la ecuación 4.31 y en la cual nuevamente se obtendrá una ecuación parecida a la ecuación 4.29

$$\begin{aligned} -2ia_0\dot{B} + a_1a_0Ae^{i(\omega-2a_0)} &= 0 \\ \dot{B} &= -a_1a_0A\left(\frac{-1}{2ia_0}\right) = -\frac{ia_1}{2}A \\ &\Longrightarrow \dot{B} + \frac{ia_1}{2}A = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Entonces de las ecuaciones 4.29 y 4.32 obtenidas anteriormente se puede ver que son ecuaciones acopladas. Derivando la ecuación 4.29 y sustituyendo en esta la ecuación 4.32, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{A} - \frac{ia_1}{2}B &= 0 \Longrightarrow \ddot{A} - \frac{ia_1}{2}\dot{B} \\ \text{sust. ec. 4.32} &\Longrightarrow \ddot{A} - \frac{ia_1}{2}\left(-\frac{ia_1}{2}A\right) \\ &\therefore \quad \ddot{A} - \frac{a_1^2}{4}A = 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

ahora realizando el mismo procedimiento para la ecuación 4.32, se obtiene lo análogo pero en términos de B:

$$\therefore \ddot{B} - \frac{a_1^2}{4}B = 0 \tag{4.34}$$

ahora contamos con dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (4.33 y 4.34), en donde su solución es de la forma:

$$A = C_1e^{\frac{a_1}{2}t} + C_2e^{-\frac{a_1}{2}t} \text{ y } B = C_3e^{\frac{a_1}{2}t} + C_4e^{-\frac{a_1}{2}t} \tag{4.35}$$

sustituyendo A y B de la ecuación 4.35 en la ecuación 4.23, se obtiene:

$$x\left(t\right)=C_1e^{\frac{a_1}{2}t}e^{ia_0t}+C_2e^{-\frac{a_1}{2}t}e^{ia_0t}+C_3e^{\frac{a_1}{2}t}e^{-ia_0t}+C_4e^{-\frac{a_1}{2}t}e^{-ia_0t} \tag{4.36}$$

Para la ecuación 4.36 se propusieron les siguientes condiciones iniciales (ecuación 4.37) y apartir de estas condiciones iniciales propuestas se obtuvieron solo dos soluciones, las cuales nos ayudaron a entender las oscilaciones generadas por los plasmones-partículas.

$$x\left(0\right)=1;\ \dot{x}\left(0\right)=0 \tag{4.37}$$

El primer caso ralizado fue para cuando las contantes son $C_1=C_2=C_3=C_4=\frac{1}{4}$, en donde la solución encontrada es de la forma (ecuación 4.38)

$$x=\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{a_1}{2}t\right)\cos\left(a_0t\right) \tag{4.38}$$

La siguiente figura muestra la simulación generada en Matlab™ a partir de la solución 4.38y para el segundo caso $C_1=C_4=\frac{1}{2}$ y $C_2=C_3=0$, donde se obtuvo la siguiente solución 4.39

$$x=\frac{1}{2}\left(e^{\left(\frac{a_1}{2}+ia_0\right)t}+e^{-\left(\frac{a_1}{2}+ia_0\right)t}\right) \tag{4.39}$$

la simulación de la solución anterior se muestra en la figura 4.IX,

Tanto de las funciones de Mathieu como los dos casos propuestos con una solución solución análoga a teoría de acoplamiento de modos, presentan la misma forma, en donde se puede observar nuevamente la misma oscilación extraña que empieza a diverger hasta que esta termina abruptamente.

4.4 Calculo del índice de refracción equivalente

Esta última sección se calcula el índice de refracción equivalente la cual está relacionada con la ecuación de onda del conjunto de plasmones-partículas. Sustituyendo la amplitud

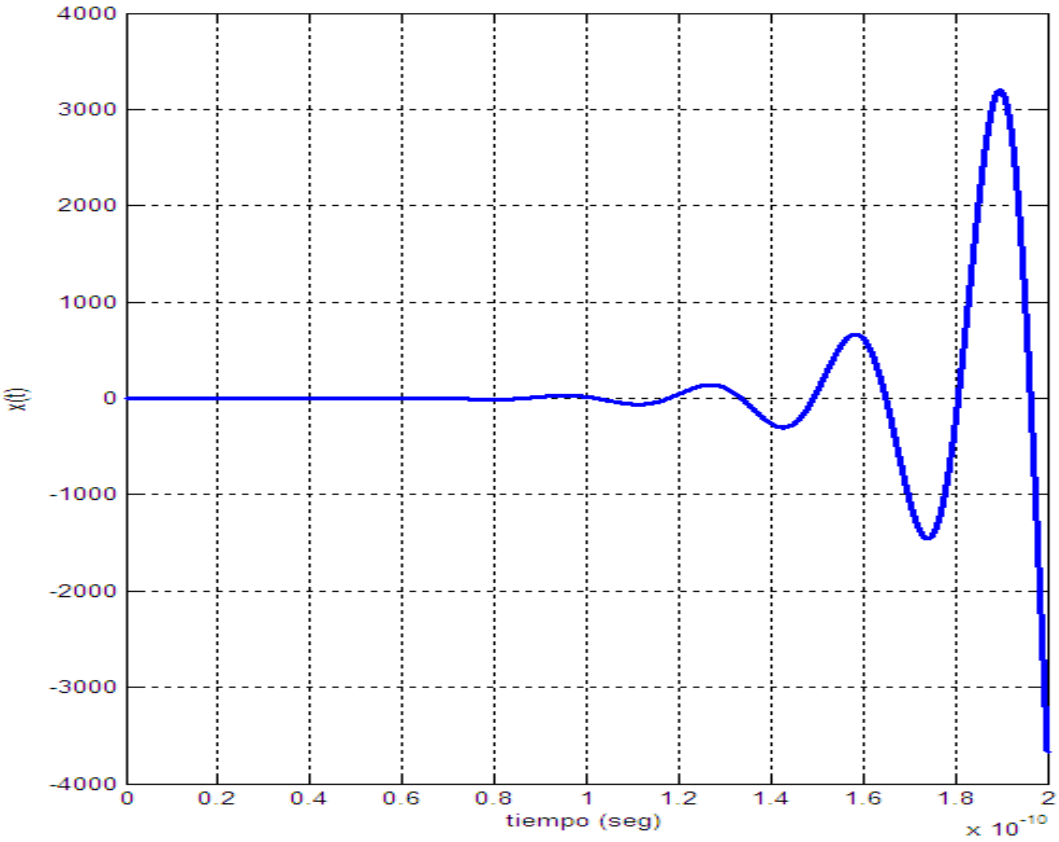

Fig. 4.VIII. Simulación hecha en Matlab ™ para $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{1}{4}$. Con $a_0 = 2x10^{11} seg^{-1}$, $a_1 = 1x10^{11} seg^{-1}$, $tiempo = 20x10^{-11} seg$ $incremento = 1x10^{-14}$

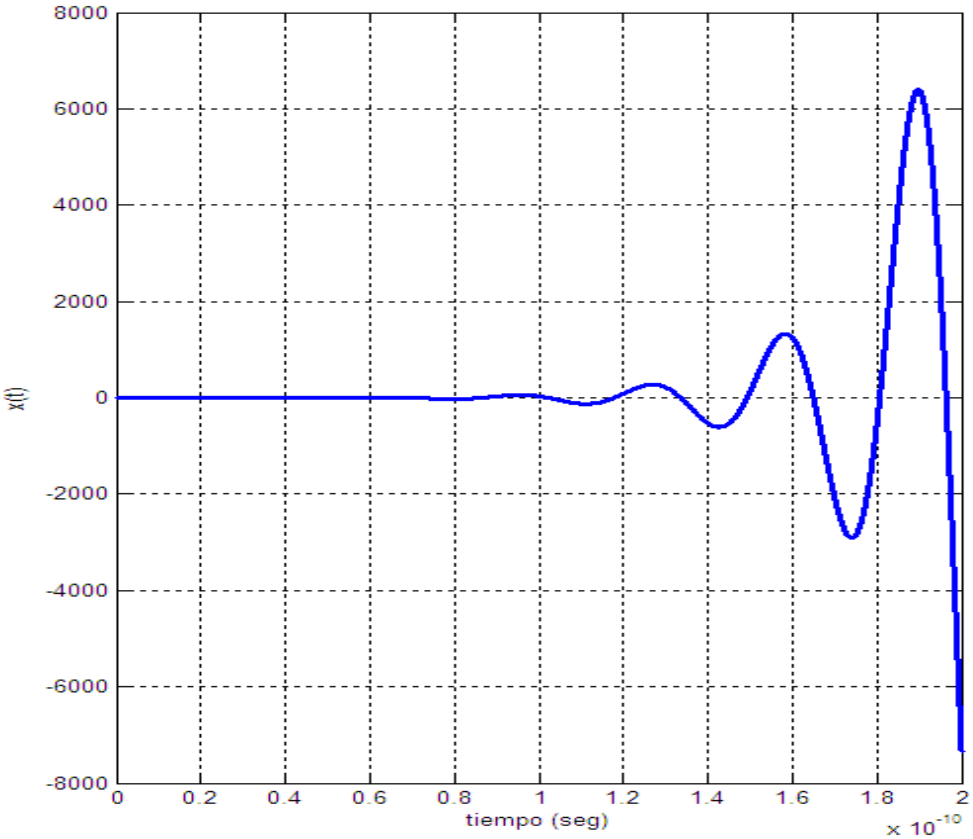

Fig. 4.IX. Simulación hecha en Matlab ™ para $C_1 = C_4 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = C_3 = 0$. Con $a_0 = 2x10^{11} seg^{-1}$, $a_1 = 1x10^{11} seg^{-1}$, $tiempo = 20x10^{-11} seg$ $incremento = 1x10^{-14}$

promedio de la ecuación 4.22 en la ecuación de onda no homogénea de la ecuación 4.10, obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{q_0}{m_e}\mathbf{E}\cos(\Omega t) &= -x_o\Omega^2\cos(\Omega t) + \left(a_0^2 + 2aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)x_0\cos(\Omega t) \quad (4.40)\\
\frac{q_0}{m_e}\mathbf{E} &= -x_0\Omega^2 + x_0a_0^2 + 2x_0aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\\
\frac{q_0}{m_e}\mathbf{E} &= x_0\left(\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)\\
x_0 &= \frac{\frac{q_0}{m_e}\mathbf{E}}{\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}
\end{aligned}$$

sustituyendo 4.22 en la ecuación 4.40,

$$x = \frac{\frac{q_0}{m_e}\mathbf{E}\cos(\Omega t)}{\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \tag{4.41}$$

donde se tiene que el momento dipolar inducido es,

$$\mathbf{p} = q_0x \tag{4.42}$$

entonces, la ecuación 4.42

$$\mathbf{p} = \frac{\frac{q_0}{m_e}\mathbf{E}\cos(\Omega t)}{\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \tag{4.43}$$

y por otro lado sabemos, también

$$\mathbf{p} = \alpha N\mathbf{E}_n \tag{4.44}$$

que es el momento dipolar inducido de la i-ésima molécula, entonces de la ecuación 4.43 se tiene que

$$\alpha = \frac{q_0^2N\cos(\Omega t)}{m_e\left(\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)} \tag{4.45}$$

donde $\alpha = \varepsilon - \varepsilon_0$, sustituyendo en 4.45

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{q_0^2N\cos(\Omega t)}{m_e\left(\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)} \tag{4.46}$$

multiplicando ambos lados por $1/\varepsilon_0$, obtenemos

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{q_0^2 N \cos(\Omega t)}{\varepsilon_0 m_e \left(\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)} \tag{4.47}$$

y sabemos

$$n^2 = 1 - \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{4.48}$$

donde $\varepsilon/\varepsilon_0$ es la constante dieléctrica ó permitividad eléctrica relativa, χ_e es la susceptibilidad eléctrica del medio y n es el índice de refracción. Por lo tanto, el índice de refracción está dado por,

$$n = \left(1 + \frac{q_0^2 N \cos(\Omega t)}{\varepsilon_0 m_e \left(\Omega^2 + a_0^2 + 2aa_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)}\right)^{1/2} \tag{4.49}$$

[12], [8].

Graficando el índice de refracción obtenido, se puede observar de la gráfica 4.X que tiene

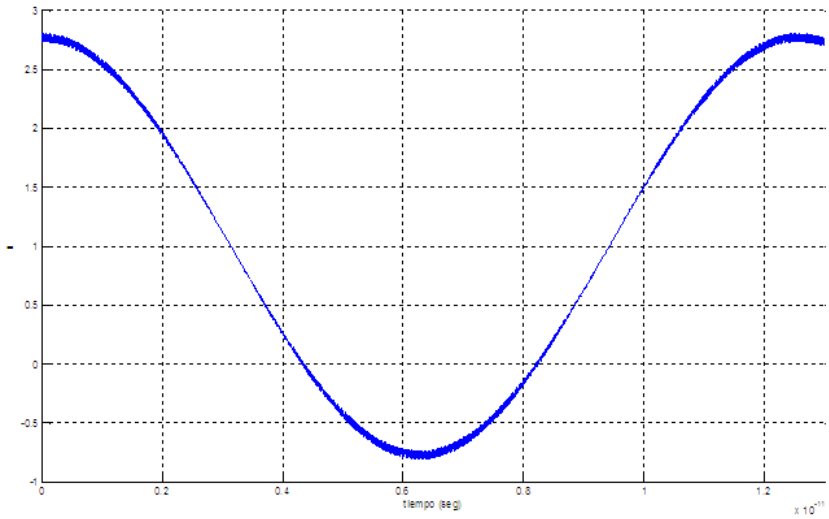

Fig. 4.X. Indice de refracción equivalente, $N = 1x10^{28}/m^3$, $q_0 = -1{,}6025x10^{-19}C$, $\varepsilon_0 = 8{,}85x10^{-12}F/m$, $m_e = 9{,}11x10^{-31}kg$, $a_0 = 3x10^{15}s^{-1}$, $a_1 = 3x10^{13}s^{-1}$, $\Omega = 5x10^{11}s^{-1}$, $t = 0.{,}13x10^{-12}seg$, $Incremento = 1x10^{-15}$, Matlab™

un comportamiento tipo cosenoidal por la ecuación 4.49, de aquí se pueden ver índices

negativos y esto da lugar a obtener metamateriales, los cuales presentan propiedades electromagnéticas inusuales como: índice negativo, constituyen una estructura periódica, cuya dimensión es menor a la longitud de onda con la que se vaya a trabajar, etc. Y son usados para la creación de superlentes, los cuales mejoran la calidad de las imágenes.

Por otro lado el índice equivalente igual a cero nos dice que dipolo no presenta oscilaciones; el índice de 0 a 1, dice que los dipolos se encuentra desfasados y en sentidos opuestos; el índice mayor a 1 nos diría que los dipolos se encuentran casi en fase.

En conclusión en este capítulo se construyeron plasmones-partículas a partir de plasmones de largo recorrido, en donde se hizo un análisis de un conjunto de plasmones-partículas, en donde se le asoció una ecuación de momento dipolar. Y las soluciones encontradas para la ecuación de momento dipolar presentan oscilaciones extrañas y divergentes; pero, con índice equivalente negativo que da lugar a metamateriales.

Capitulo 5
Conclusiones

En conclusión se realizó un análisis teórico bidimensional de una superposición incoherente de haces plasmónicos generalizados, donde se describió su relación de dispersión y su índice de refracción efectivo. Por otro lado se hace un interferómetro de Young con plasmones superficiales, que a partir de la interferencia de plasmones superficales de largo recorrido y tomar el ángulo θ como una variable aleatoria, se obtuvieron distintos tipos de haces plasmónicos como: Bessel, Capilares y Gaussianos.

Después, se pasa de oscilaciones colectivas de carga a oscilaciones colectivas de dipolos; entonces, a partir de plasmones superficiales de largo recorrido se pueden obtener plasmones-partículas, donde se analizó el acoplamiento de plasmones-partículas y se obtuvo una ecuación para el momento dipolar y observaron oscilaciones extrañas, las cuales iban divergiendo. Se encontró también, el índice de refracción equivalente asociado a la ecuación de momento dipolar para un conjunto de plasmones-partículas y se demostró que índice de refracción equivalente puede tomar valores negativos, dando lugar a metamateriales

5.1 Trabajos a Futuro

Como trabajo a futuro se tiene como propósito llevar a cabo el arreglo experimental propuesto para el interferómetro de Young con plasmones superficiales. También, hacer una síntesis de nanopartículas hechas por medio de una reacción química.

Apendice A
Conceptos de Coherencia

Para entender la descripción de los modos en medios homogéneos y parcialmente coherentes, se define lo que es coherencia y coherencia parcial, y a partir de ahí poder establecer una relación de coherencia parcial a plamones superficiales.

En las primeras investigaciones sobre coherencia fueron estudiar el tamaño de la región de coherencia de la luz de fuentes extendidas hasta que en 1938 Zernike definió el grado de coherencia de las fluctuaciones de la luz y estableció una serie de resultados. Si consideramos un interferómetro de Young y hacemos incidir un haz de luz en una rendija con dos orificios en donde el haz que se hace incidir no es completamente monocromático, es decir se encuentra formado por otras longitudes de onda, lo que se obtiene con esto son fluctuaciones irregulares en la fase y amplitud, las cuales son demasiado rápidas para el ojo humano ó algún detector ordinario.

Del interferómetro de Young podemos obtener varios tipos de coherencia, los dos primeros se pueden obtener si se tienen dos haces que provienen de la misma fuente, entonces estas fluctuaciones se encuentran correlacionadas y los haces son completa ó parcialmente coherentes, esto depende si se encuentran completa ó parcialmente correlacionados. Y el último tipo de coherencia sería si los haces de luz se encuentran completamente no-correlacionados, entonces los haces son mutuamente incoherentes [1]

Partiendo del interferómetro de Young que se muestra en la figura A.I.

Definiendo un campo de la forma $V(\vec{r},t)$, donde $\vec{r}$ representa la posición del campo en un tiempo t, entonces

$$V(\vec{r},t) = k_1 V(\mathbf{r}_1, t-t_1) + k_2 V(\mathbf{r}_2, t-t_2) \tag{A.1}$$

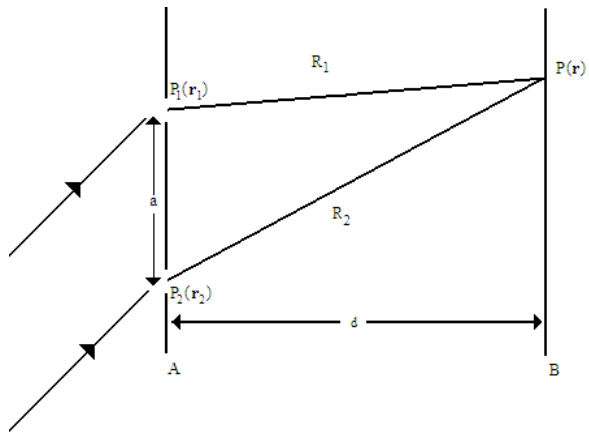

Fig. A.I. Experimento del interferómetro de Young propuesto para determinar la función de correlacióon de un haz de luz

donde

$$t_1 = \frac{R_1}{c} \text{ y } t_2 = \frac{R_2}{c}$$

t_1 y t_2 es el tiempo en que la luz viaja del punto P_1 al punto P y P_2 al punto P respectivamente, c es la velocidad de luz en el vacío y k_1 y k_2 son factores constantes que dependen de la medida de los orificios que se encuentran en el punto A de la figura A.I.

La intensidad instantánea $I(\vec{r}, t)$ en el punto $P(\vec{r})$ en un tiempo t está definido por

$$I(\vec{r}, t) = |k_1|^2 I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) + |k_2|^2 I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) + 2\,\mathrm{Re}\left[k_1^* k_2 V^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) V(\mathbf{r}_2, t - t_2)\right] \tag{A.2}$$

Si tomamos el promedio de la ecuación A.2 sobre distintos instantes de tiempo y posiciones, se obtiene

$$\langle I(\vec{r}, t)\rangle = |k_1|^2 \langle I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1)\rangle + |k_2|^2 \langle I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2)\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left[k_1^* k_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2)\right] \tag{A.3}$$

donde

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle \tag{A.4}$$

La ecuación A.4 es la función de correlación transversal de procesos aleatorios de $V(\mathbf{r}_1 t)$ y $V(\mathbf{r}_2, t)$.Esto representa la correlación que existe entre las fluctuaciones de la luz en el punto P_1 y P_2 (ver figura A.I) en el tiempo t_1 y t_2.

Donde en un tiempo promedio donde ocurren procesos aleatorios estacionarios representados por $f(t)$ se puede escribir de esta forma:

$$\langle f(t)\rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)\,dt \tag{A.5}$$

y de la función de la correlación transversal (ecuación A.4), puede ser remplazada por una función de correlación transversal temporal, entonces sustituyendo A.4 en A.5 se obtiene que;

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)\, V(\mathbf{r}_2, t-\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} V^*(\mathbf{r}_1, t)\, V(\mathbf{r}_2, t-\tau)\,dt \tag{A.6}$$

de la ecuación A.6 se conoce como función de coherencia mutua. Con la ecuación A.3 y la A.6; en $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)$ se puede representar la intensidad promedio en un punto r,

$$\langle I(\mathbf{r},t)\rangle = \langle V^*(\mathbf{r},t)\, V(\mathbf{r},t)\rangle = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0) \tag{A.7}$$

y si normalizamos la función de coherencia mutua se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)]^{1/2}\,[\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}} \\ &= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\langle I(\vec{r}_1, t)\rangle]^{1/2}\,[\langle I(\vec{r}_2, t)\rangle]^{1/2}} \end{aligned} \tag{A.8}$$

donde $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ es el grado de coherencia de las fluctuaciones de la luz en los puntos $P_1(\mathbf{r}_1)$ y $P_2(\mathbf{r}_2)$; para un proceso aleatorio estacionario la A.8 debe satisfacer,

$$0 \le |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \le 1 \tag{A.9}$$

para todos los valores de r_1, r_2 y τ.

Ya que hemos definido el grado de coherencia y coherencia mutua; para que la luz sea completamente coherente en un punto $\vec{r}$ debe de cumplir lo siguiente,

$$|\gamma(\vec{r},\vec{r},\tau)| = 1 \tag{A.10}$$

en todos los valores de τ.

Considerando nuevamente un campo estacionario $V(\vec{r},t)$ y con $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ como su función de coherencia mutua. Se propone que $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ cae la suficientemente rápido en τ, esto hace que la función de coherencia mutua sea integrable,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|\, d\tau < \infty \tag{A.11}$$

y aplicando el teorema de análisis de la integral de Fourier a $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$, se obtiene una transformada de Fourier frecuencial de la forma

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)\, e^{2\pi i\nu\tau} d\tau \tag{A.12}$$

y la ecuación A.12 es la llamada función de densidad del espectro transversal $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$, es una función continua en ν.

De la ecuación A.8 y A.9 involucran una función de correlación de una función aleatoria estacionaria que es integrable. Además, la función de coherencia mutua Γ implica que también sea una función integrable, esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|^2\, d\tau < \infty \tag{A.13}$$

aplicando la relación de Parseval en A.13 con respecto a ν.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)|^2\, d\nu < \infty \tag{A.14}$$

y obtendremos que la ecuacióon A.12 es invertible

$$\Gamma\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau\right)=\int_0^{+\infty}W\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu\right)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu \tag{A.15}$$

los límites de la ecuación A.15 van de 0 a $+\infty$, porque se habla de una función de coherencia mutua con la es una señal analítica.

Si proponemos ahora que la densidad espectral transversal es una función continua en r_1 y r_2 a través de un domino D. Entonces $\left|W\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu\right)\right|^2$ será necesariamente limitada en D. Consecuentemente se obtiene que

$$\iint_{DD}\left|W\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu\right)\right|^2 d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2<\infty \tag{A.16}$$

y se cumple también,

$$W\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu\right)=W^*\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu\right) \tag{A.17}$$

además, la función es positiva

$$\iint_{DD}W\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu\right)f^*\left(\mathbf{r}_1\right)f\left(\mathbf{r}_2\right)d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2\geq 0 \tag{A.18}$$

donde $f\left(\vec{r}\right)$ es una función cuadrática integrable, por lo tanto la ecuación A.16 es Hermitiana y mayor a cero, entonces la densidad espectral se puede definir como

$$W\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu\right)=\sum_n\alpha_n\left(\nu\right)\psi_n^*\left(\mathbf{r}_1,\nu\right)\psi_n\left(\mathbf{r}_2,\nu\right) \tag{A.19}$$

la ecuación A.19 es una función convergente, donde $\psi_n\left(\vec{r},\nu\right)$ es la eigenfunción y los coeficientes $\alpha_n\left(\nu\right)$ son eigenvalores. Ahora para representar modos coherentes se parte de un conjunto de funciones monocromáticas de la forma,

$$U\left(\vec{r},\nu\right)e^{i2\pi\nu t} \tag{A.20}$$

donde cada componente de $U\left(\vec{r},\nu\right)$ es una superposición lineal de la forma,

$$U\left(\vec{r},\nu\right)=\sum_n a_n\left(\nu\right)\psi_n\left(\vec{r},\nu\right) \tag{A.21}$$

donde a_n son coeficientes aleatorios y la correlación de $U(\mathbf{r}_1)$ y $U(\mathbf{r}_2)$ en un punto r_1 y r_2 en el campo y está dado por:

$$\langle U^*(\mathbf{r}_1)\, U(\mathbf{r}_2)\rangle_\nu = \sum_n \alpha_n(\nu)\, \psi_n^*(\mathbf{r}_1)\, \psi_n(\mathbf{r}_2) \tag{A.22}$$

y comparando A.19 con A.22 se obtiene que,

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \langle U^*(\mathbf{r}_1)\, U(\mathbf{r}_2)\rangle \tag{A.23}$$

la ecuación A.23 quiere decir

Así que se construyó un conjunto de campos aleatorios que dan una representación a la densidad espectral W de un campo dado como una función de correlación sobre este conjunto. Y donde también $U(\vec{r}, \nu)$ satisface la ecuación de Helmholtz, entonces

$$\nabla^2 U(\vec{r}, \nu) + k^2 U(\vec{r}, \nu) = 0 \tag{A.24}$$

donde $k = 2\pi\nu/c$ es el número de onda asociado a ν. Y de aquí se puede cuncluir que cada componente aleatoria que ocurre en $U(\vec{r}, \nu)$ y representa en campo parcialmente coherente. En resumen se partió de un interferómetro de Young, se definió la función de coherencia mutua y grado de coherencia para poder llegar hasta la densidad espectral y sus propiedades, además se propuso un conjunto de funciones monocromáticas aleatorias $U(\vec{r}, \nu)$ para representar un campo parcialmente coherente.

Ahora si utilizamos este procedimiento para unirlo a un interferómetro con plasmones, la separación de los dos puntos de donde sale la luz, donde la variación de estas separaciones se podría tomar como la variación del campo en el tiempo, lo que obtendríamos un medio parcialmente coherente.

Apendice B
Relación de Dispersión

A continuación se deriva la relación de dispersión para plasmones superficiales, partiendo del siguiente arreglo (ver figura B.I):La figura anterior muestra plasmones superficiales

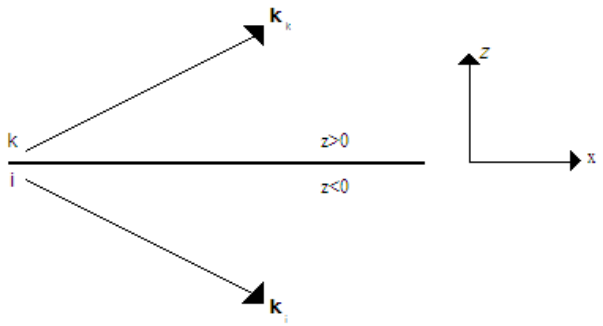

Fig. B.I. Muestra la interferencia entre dos medios i y k.

propagándose entre dos medios i y k, y donde k_i yk_k son los vectores de onda, propagándose en dirección z y x. También se puede ver que el campo eléctrico se encuentra en plano zx, entonces el campo magnético se encuentra en dirección y. La siguiente ecuación B.1 muestra el campo magnético y eléctrico que se propagan en ambos medios.

$$\begin{array}{ll} z > 0 & \begin{array}{c} \boldsymbol{H}_2 = (0, H_{y2}, 0)\, e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} \\ \boldsymbol{E}_2 = (E_{x2}, 0, E_{z2})\, e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} \end{array} \\ z < 0 & \begin{array}{c} \boldsymbol{H}_1 = (0, H_{y1}, 0)\, e^{i(k_{1}x + k_{z1}z - \omega t)} \\ \boldsymbol{E}_1 = (E_{x1}, 0, E_{z1})\, e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)} \end{array} \end{array} \tag{B.1}$$

Los campos anteriormente descritos (ver ecuación B.1) deben de cumplir las ecuaciones de maxwell, que muestran en las ecuaciones B.2a:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_i = \varepsilon_i \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} E_i \tag{B.2a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} H_i \tag{B.2b}$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_i \boldsymbol{E}_i = 0 \tag{B.2c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_i = 0 \tag{B.2d}$$

y en la frontera entre los dos medios podemos establecer la siguientes funciones de continuidad

$$E_{x1} = E_{x2} \tag{B.3a}$$

$$H_{y1} = H_{y2} \tag{B.3b}$$

$$\varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2} \tag{B.3c}$$

de las ecuaciones (B.3a y c) se obtiene

$$k_{z1} = k_{z2} = k_z \tag{B.4}$$

de la ecuación B.2a nos da

$$\frac{\partial H_{yi}}{\partial z} = -\varepsilon_i E_{zi} \frac{\omega}{c} \text{ ó} \tag{B.5}$$

$$+k_{z1} H_{y1} = +\frac{\omega}{c} \varepsilon_1 E_{z1} \tag{B.6}$$

$$+k_{z2} H_{y2} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon_2 E_{z2} \tag{B.7}$$

Si tomamos la ecuación (B.3a y c) y la sustituimos en la ecuación B.5, se tiene que

$$H_{y1} - H_{y2} = 0 \tag{B.8}$$

$$\frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} H_{y1} + \frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} H_{y2} = 0 \tag{B.9}$$

uniendo las ecuaciones B.8 y b,

$$D_0 = \frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} = 0 \tag{B.10}$$

La ecuación B.10 es la relación de dispersión para plasmones superficiales que se muestran en la figura 3.XI. Y se obtiene de las ecuaciones B.2a,b y B.5

$$k_x^2 + k_{zi}^2 = \varepsilon_i \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{B.11}$$

De la ecuación B.10 y la ecuación B.11,

$$k_x = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)^{1/2} \tag{B.12}$$

Haciendo al medio $\varepsilon_2 = 1$ (aire) y al medio ε_1 un metal donde $\varepsilon_1 < 0$, $|\varepsilon_1| > 1$, y tambien $k_z > \omega/c$ y k_{zi} se convierte en imaginario ó complejo. El campo tiene su máximo en la superficie $z = 0$ y decaí exponencialmente en ambas direcciones de z, como es característico de las ondas superficiales [19].

Lista de Figuras

Bibliografia

[1] Born, M. and E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambrige University, 2002.

[2] Brongersma, M.L., J.W Hartman H.H. Atwater. "Plasmonics: Electromagnetic Energy Transfer and Switching in Nanoparticle Chain-Arrays Below the Driffraction Limit. In: Molecular Electronics Symposium.". November-December 1999.

[3] Brongersma, Mark L. and Pieter G. Kik. *Surface Plasmon Nanophotonics*. Springer Series, 2007.

[4] E. Kretschmann, H. Reather. "Radiative Decay of Non-Radiative Surface Plasmon Excited by Light," *Z. Naturf*, *23A*:2135 (1968).

[5] Fano, U. "Atomic Theory of Electromagnetic Interactions in Dense Materials," *Phys. Rev*, *103*:1202 (1956).

[6] Garnett, J.C. Maxwell. "Colours in Metal Glasses and Metallic Films," *Philos. Trans. R. Soc. London*, *203*:385 (1904).

[7] Goodman, Joseph W. *Statistical Optics*. John Wiley and Sons,Inc., 2000.

[8] Jackson, John David. *Classical Electrodynamics* (Third edition Edition). John Wiley and Sons, Inc., 2001.

[9] Kerker, M. "The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation," *New York: Academic Press*, *84* (1969).

[10] Mandel, L. and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambrige University Press, 1995.

[11] Mie, G. "Beiträge Zur Optik Trüber Medien, Speziell Kolloidaler Metall Ösungen," *Ann. Phys*, *203*:377 (1908).

[12] Miles V. Klein, Thomas E. Furtak. *Optics* (Second edition Edition). John Wiley and Sons, Inc., 1986.

[13] Nieto-Vesperinas, Manuel. *Scattering and Diffraction in Physical Optics*. World Scientic, 2006.

[14] Novotny, Lukas and Bert Hecht. *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, 2006.

[15] Otto, A. "Excitation of Nonradiative Surface Plasma Waves in Silver by the Method of Frustrated Total Reflection," *Z. Phys*, *398* (1968).

[16] Pines, D. "Collective Energy Losses in Solids," *Rev. Mov. Phys.*, *28*:184–198 (1956).

[17] Qiansen Xie, Daomu Zhao. "Generation of Dark Hollow Beams by Using a Fractional Radial Hilbert Transform System," *Optics Cummunications*, *275*:394–398 (Marzo 2007).

[18] R. H. Ritchie, E. T. Arakawa, J. J. Cowa R.N. Hamm. "Surface-Plasmon Resonance Effect in Grating Diffraction," *Phys. Rev. Lett.*, *21*:1530–1532 (1968).

[19] Raether, Heinz. *Surface Plasmons: On Smooth and Rough Surfaces and on Gratings*. Springer-Verlag, 1988.

[20] Ritchie, R.H. "Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films," *Phys. Rev.*, *106*:874 (1957).

[21] Schechter, Bruce. "Bright New World," *New Scientist*, *178*:30 (2003).

[22] S.L. Cinningham, A. A. Maradudin, R.F. Wallis. "Effect of a Charge Layer on the Surface-Plasmon-Polariton Dispersion Curve," *Phys. Rev. B*, *10*:3342 (1974).

[23] T. W. Ebbesen, H.J. Lezec, H. F. Ghaemic T. Thio P.A. Wolff. "Extraordinary Optical Transmission Through Sub-Wavelength Hole Arrays," *Nature*, *391*:667–669 (1998).

[24] U. Kreibig, P. Zacharias. "Surface Plasma Resonances in Small Spherical Silver and Gold Particles," *Z. Physik*, *231*:128 (1970).

[25] V. V. Temnov, U. Woggon, J. Dintinger E. Devaux and T. W. Ebbensen. "Surface Plasmon Interferometry: Measuring Group Velocity of Surface Plasmons," *Opt. Letter*, *32*(10):1235–1237 (2007).

[26] Wood, R. W. "On a Remarkable Case of Uneven Distribution of Light in a Diffraction Grating Spectrum," *Phil. Mag*, *4*:396 (1902).

[27] Zhangrong Mei, Daomu Zhao. "Controllable Dark-Hollow Beams and their Propagation Characteristics," *J. Opt. Soc. Am.*, *22*(9):1898–1902 (Sep 2005).