



INAOE

Interacción entre múltiples campos cuantizados: un modelo no markoviano

por

Reyle Mar Sarao

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Mayo 2009

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa, INAOE

©INAOE 2009

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en
partes de esta tesis



AGRADECIMIENTOS

Primero quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Héctor Manuel Moya Cessa, por su paciencia y su asesoría para la realización de esta tesis.

También extendo mi agradecimiento a los revisores de tesis y miembros del jurado: Dr. Sabino Chávez Cerda, Dr. Gabriel Martínez Niconoff, Dr. Arturo Olivares Pérez, Dr. Víctor Manuel Arrizón Peña, Dr. Raul Juárez Amaro por sus valiosos comentarios y sugerencias para la mejora de este trabajo.

Al INAOE por su hospitalidad y su apoyo en mi formación. De igual manera agradezco al personal de la biblioteca Luis Enrique Erro por su amable atención y su asistencia en la búsqueda de información para este trabajo.

Agradecimiento especial a CONACYT por la beca de manutención que me permitió cursar los estudios de posgrado.

A mis compañeros.

Muchas gracias a todos.

A mi familia

RESUMEN

El tema de esta tesis se desarrolla en el área de óptica cuántica. El tema que desarrollamos es el de interacción entre múltiples campos cuantizados. Comenzamos con la revisión del modelo más usado para describir la interacción entre un campo de cavidad y un reservorio (entorno). Este modelo usa la aproximación markoviana. El decaimiento de un campo coherente es revisado bajo este modelo. Nuestro propósito principal es proponer un modelo alternativo que no use aproximación markoviana para describir la interacción cavidad-reservorio. Iniciamos con la solución a la ecuación de Schrödinger para dos campos y generalizamos este resultado para múltiples campos. Con la solución obtenida estudiamos la interacción entre múltiples campos inicialmente en estados coherentes. La solución nos permite explicar por qué los campos coherentes permanecen coherentes cuando están sujetos a disipación no markoviana, lo cual nos permite describir la evolución de un campo coherente acoplado a un reservorio sin usar aproximación markoviana. Como objetivo secundario pero estando dentro del tema de interacción entre campos cuantizados, mostramos como modelar un divisor de haz cuántico en óptica clásica. El resultado nos muestra la posibilidad de generar formas específicas del campo electromagnético.

ABSTRACT

The topic of this thesis is developed in quantum optics. The topic we work is the interaction between several quantized fields. We start with the review of the most used model to study the interaction between a cavity field and a reservoir (environment). This model uses the Markovian approximation. The decay of the coherent state is reviewed with this model. Our main goal is to propose an alternative model without using Markovian approach to study the interaction cavity-reservoir. We start with the solution to Schrödinger's equation for two fields and we generalize this result for several fields. With this solution we study the interaction between several fields initially in coherent states. The solution allows us to explain why coherent state remain coherent states when subject to non-Markovian dissipation, with this we can describe the interaction between a coherent state and a reservoir without Markovian approach. A secondary goal in our work about interaction between quantized fields is to show how the quantum process of splitting light may be modeled in classical optics. The solution allows us to study the possibility to engineer specific forms of the classical electromagnetic field.

Índice general

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
PREFACIO	6
1. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS DE ÓPTICA CUÁNTICA	9
1.1. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER	9
1.2. NOTACIÓN DE DIRAC	11
1.3. OBSERVABLES	12
1.4. SOLUCIONES A LA ECUACION DE SCHRÖDINGER	13
1.4.1. Amplitud de probabilidad	13
1.4.2. Operador de evolución	14
1.5. MATRIZ DE DENSIDAD: ECUACIÓN MAESTRA	14
1.6. CUANTIZACIÓN DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	16
1.7. ESTADOS COHERENTES	20
1.7.1. RADIACIÓN EMITIDA POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CO- RRIENTE CLÁSICA	20
1.7.2. ESTADO COHERENTE COMO EIGENESTADO DEL OPE- RADOR DE ANIQUILACIÓN Y ESTADO DESPLAZADO DEL OSCILADOR ARMÓNICO	22
1.8. SOBRE LA COHERENCIA DEL ESTADO COHERENTE	24
2. MODELO MARKOVIANO DE INTERACCIÓN CAVIDAD-RESERVORIO	26
2.1. ECUACION MAESTRA CAVIDAD-RESERVORIO	26
2.2. DECAIMIENTO DE UN ESTADO COHERENTE	33

3. INTERACCIÓN NO MARKOVIANA DE MÚLTIPLES CAMPOS	36
3.1. INTERACCIÓN DE DOS CAMPOS	37
3.2. MODELO NO MARKOVIANO PARA LA INTERACCIÓN ENTRE MÚLTIPLES CAMPOS	40
3.3. TRES CAMPOS	43
3.4. INTERACCIÓN CAVIDAD-RESERVORIO	46
3.5. CONCLUSIONES	47
4. REALIZACIÓN ÓPTICA DE UN DIVISOR DE HAZ CUÁNTICO	49
4.1. DIVISOR DE HAZ CUÁNTICO	49
4.2. IMPLEMENTACIÓN ÓPTICA DEL DIVISOR DE HAZ CUÁNTICO	51
4.3. FUNCIÓN INICIAL $u_1(x) u_1(y)$	56
4.4. ESTADOS COHERENTES SU(2)	58
4.5. FUNCIÓN GAUSSIANA	59
4.6. INTERACCIÓN DE TRES CAMPOS CON UN ÁTOMO	59
4.7. CONCLUSIONES	61
CONCLUSIONES FINALES Y PROBLEMAS ABIERTOS	62
APÉNDICE 1: ECUACIÓN DE HEISENBERG	64
APÉNDICE 2: APROXIMACIÓN DE ONDA ROTANTE	66
TRABAJOS DERIVADOS DE ESTA TESIS	69
5. SUMMARY IN ENGLISH: “INTERACTION BETWEEN SEVERAL FIELDS: A NON-MARKOVIAN MODEL”	70
BASIC TOOLS OF QUANTUM MECHANICS	70
MARKOVIAN MODEL FOR CAVITY-FIELD INTERACTION	77
NON-MARKOVIAN INTERACTION FOR SEVERAL FIELDS	81
OPTICAL REALIZATION OF A QUANTUM BEAM SPLITTER	85
FUTURE WORKS	91
Bibliografía	92

Índice de figuras

1.1. Paquete de onda con perfil gaussiano en un potencial armónico; en cualquier punto de la trayectoria el paquete mantiene su forma gaussiana, por lo que su estado es coherente	25
2.1. Cavity unidimensional (H_s) acoplada a un reservorio térmico (H_R)	29
2.2. Número de fotones para un campo de cavity acoplado al reservorio térmico	35
3.1. Número de fotones para un campo coherente ($\omega_1 = 3$, 1 fotón inicial) en interacción con otros dos campos también coherentes ($\omega_2 = \omega_3 = 2,5$, estos campos empiezan con cero fotones). Los acoplamientos son $\lambda_{12} = \lambda_{23} = 0,2$	48
4.1. Divisor de haz	50
4.2. Vista transversal de los haces	53
4.3. Dos haces propagándose con un pequeño ángulo entre ellos; el haz de prueba generará la guía de onda para el haz señal.	53

PREFACIO

El estudio de la luz ha ocupado un lugar destacado en nuestra búsqueda por comprender la naturaleza. Newton propuso que la luz estaba formada por corpúsculos, pero la descripción ondulatoria propuesta por Huygens y respaldada por el experimento de interferencia de Young y los experimentos de difracción inclinaron la balanza a favor de la descripción ondulatoria. Posteriormente Maxwell formalizó la teoría ondulatoria de la luz al determinar teóricamente que la luz es una onda, logrando incluso predecir la velocidad de las ondas electromagnéticas. Justo cuando se creía tener una descripción completa de la luz, la radiación de cuerpo negro descrito por Planck, el efecto fotoeléctrico descrito por Einstein, y el choque de luz con electrones (efecto Compton) desafiaron la electrodinámica de Maxwell y la mecánica newtoniana.

En la radiación de cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico la luz se absorbe o emite en paquetes discretos de energía llamados cuantos, que en el caso de la luz se denominan fotones. En el efecto Compton la luz interactúa con un electrón en forma similar al choque elástico entre dos bolas de billar. Como si lo anterior no fuera suficiente, un haz de electrones, e incluso un haz de átomos o moléculas, al atravesar aberturas muy pequeñas cuyos tamaños son comparables a la longitud de onda de De Broglie $\lambda = \hbar/p$ (\hbar la constante de Planck y p el momento de la partícula), sufren desviaciones cuyas trayectorias describen patrones semejantes a los formados por difracción de luz. Al respecto, redes cristalinas han sido usadas para difractar electrones.

Se tiene por un lado, ondas de luz que exhiben comportamiento de partículas, y por otro, partículas que muestran algún comportamiento ondulatorio. Esto da lugar a la dualidad onda-partícula. La mecánica cuántica surgió como una propuesta para describir estos fenómenos.

Al aplicar el formalismo de mecánica cuántica para describir el compor-

tamiento de la luz, se tiene la óptica cuántica.

Usando la luz podemos manipular la materia, de ahí la necesidad de contar con modelos que describan satisfactoriamente el campo electromagnético. Un ejemplo de esto se tiene en procesamiento cuántico de información, en donde se busca reproducir las operaciones lógicas realizadas por procesadores electrónicos usando estados atómicos o moleculares. La manipulación de estos átomos o moléculas se realiza con luz.

La óptica cuántica tiene otras aplicaciones en el diseño de láseres y sensores. En los primeros se busca generar un estado específico del campo mientras que en los segundos se busca obtener información a partir de la radiación que interactúa con los átomos del sensor.

Otro tema que ha ocupado un lugar destacado en el desarrollo de la óptica cuántica es el estudio de campos en cavidades y como estos interactúan con su entorno. En particular, los campos en estados coherentes han sido y siguen siendo utilizados en virtud de que son los estados cuánticos que más se aproximan al comportamiento del campo electromagnético clásico. El describir las propiedades de los campos coherentes sigue siendo un tema muy activo.

Motivados por lo anterior, en este trabajo proponemos un modelo para describir la interacción entre múltiples campos cuantizados. La solución obtenida la usaremos para estudiar la interacción entre campos coherentes y para describir la evolución del sistema cavidad-reservorio cuando el campo de cavidad es coherente. Además de lo anterior, todavía dentro del tema de interacción entre campos, mostraremos como modelar un divisor de haz cuántico usando óptica clásica.

Esta tesis consta de cuatro capítulos en el siguiente orden:

Capítulo 1: Breve revisión de conceptos básicos de mecánica cuántica necesarios para estudiar los sistemas físicos en óptica cuántica.

Capítulo 2: Revisión del modelo cavidad-reservorio con aproximación Born-Markov, siendo este el más utilizado en la literatura.

Capítulo 3: Nosotros estudiamos la interacción entre múltiples campos inicialmente en estados coherentes. La solución obtenida nos permite explicar por qué los estados coherentes permanecen coherentes cuando están sujetos a disipación no markoviana. Primero estudiamos la interacción entre dos campos y mostramos que este es el bloque de construcción para la interacción total. Nosotros damos una solución algebraica completa de este sistema. Con

esto último damos una descripción alternativa del sistema cavidad-reservorio sin usar aproximación markoviana.

Capítulo 4: Nosotros mostramos como el proceso cuántico de división de luz puede ser modelado en óptica clásica. Un segundo resultado es la posibilidad de generar formas específicas de un campo clásico.

Finalizamos con las conclusiones y algunos comentarios sobre trabajos futuros.

Capítulo 1

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS DE ÓPTICA CUÁNTICA

La luz, como es bien conocido, es una onda, esto es lo que se maneja en óptica física. Sin embargo, bajo circunstancias especiales, la luz muestra un carácter corpuscular, tal como ocurre en el efecto Compton, en el que la luz choca contra un electrón como si fuera una bola de billar, o el efecto fotoeléctrico, en el que la absorción y emisión de luz se realiza en paquetes discretos de energía. Se hace necesario, entonces, un formalismo que permita describir este tipo de fenómenos. La mecánica cuántica ha sido una respuesta a estas interrogantes.

Iniciamos, entonces, con un breve repaso de tópicos básicos de mecánica cuántica, como son la ecuación de Schrödinger, el concepto de observable y la cuantización del campo electromagnético.

1.1. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

El estudio de sistemas físicos requiere el uso de ecuaciones diferenciales que describen la evolución de tales sistemas. En mecánica clásica la segunda ley de Newton proporciona la información sobre el sistema físico, y se cuenta con formulaciones alternativas como el lagrangiano o el hamiltoniano que proporcionan la misma información que la segunda ley de Newton pero con la ventaja de que los resultados se obtienen de una forma más fácil. En elec-

tromagnetismo las ecuaciones de Maxwell describen la evolución de los sistemas cuando las propiedades electromagnéticas entran en juego. En forma semejante, en mecánica cuántica la ecuación de Schrödinger [1] describe la evolución del sistema físico. Existe una descripción alternativa que aporta la misma información que la ecuación de Schrödinger, denominada ecuación de Heisenberg; la diferencia entre ambas radica en la forma en que exhiben esta información (apéndice 1). Aun cuando en este trabajo de tesis usaremos la ecuación de Schrödinger para describir el campo electromagnético cuantizado, en el capítulo 4 usaremos la aproximación de onda rotante al modelar un divisor de haz cuántico, y la descripción de esta aproximación es detallada en el apéndice 2 usando la ecuación de Heisenberg. Esto nos permitirá ver un ejemplo de como la ecuación de Heisenberg puede complementar la descripción que aporta la ecuación de Schrödinger.

Iniciaremos con una breve revisión de conceptos básicos para abordar la descripción de sistemas físicos. En la física clásica los parámetros físicos (energía, velocidad, momento lineal, momento angular, posición, etc) toman un rango continuo de valores, pero hay fenómenos como el efecto fotoeléctrico y los espectros atómicos en los cuales la energía toma valores discretos. La descripción de estos fenómenos y la radiación de cuerpo negro motivaron el surgimiento de la mecánica cuántica, en la cual se considera la dualidad onda-partícula, tal que ondas como la luz pueden comportarse como partículas y viceversa, esto bajo circunstancias especiales.

La mecánica cuántica aborda los problemas con la siguiente formulación [1]:

1) El concepto clásico de trayectoria se sustituye por el de un estado variando en el tiempo. El estado cuántico de un sistema (electrón, átomo, campo EM, etc.) está caracterizado por una función de onda $\psi(\vec{r}, t)$ la cual contiene toda la información que es posible obtener sobre el sistema.

2) $\psi(\vec{r}, t)$ es interpretada como la amplitud de probabilidad de hallar la partícula en el instante t en la posición \vec{r} y $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ es la densidad de probabilidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dr = 1, \quad (1.1)$$

siendo $|\psi(\vec{r}, t)|^2 dr$ la probabilidad de hallar la partícula en el elemento de volumen $dr = dx dy dz$.

3) Al realizar una medición sobre el sistema:

- a) El resultado debe pertenecer a un conjunto de eigenestados $\{a\}$.
- b) Cada eigenvalor a está asignado a un eigenestado, que es una eigenfunción $\psi_a(\vec{r}, t)$. Esta función es tal que, si $\psi(\vec{r}, t_0) = \psi_a(\vec{r})$ (siendo t_0 el instante en que se realiza la medición), la medición siempre arroja a .
- c) Para cualquier $\psi(\vec{r}, t)$, la probabilidad P_a de hallar el eigenvalor a por una medición en el instante t_0 se encuentra descomponiendo $\psi(\vec{r}, t)$ en términos de las funciones $\psi_a(\vec{r})$:

$$\psi(\vec{r}, t_0) = \sum_a c_a \psi_a(\vec{r}). \quad (1.2)$$

De lo anterior se tiene

$$P_a = \frac{|c_a|^2}{\sum_a |c_a|^2}. \quad (1.3)$$

- d) Si la medición conduce a a , la función de onda del sistema inmediatamente después de la medición es

$$\psi'(\vec{r}, t_0) = \psi_a(\vec{r}). \quad (1.4)$$

- e) La evolución del sistema es descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t), \quad (1.5)$$

con

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{V}(\vec{r}, t) \quad (1.6)$$

siendo el operador hamiltoniano del sistema.

1.2. NOTACIÓN DE DIRAC

Existe una notación estándar para describir estados cuánticos en la teoría de mecánica cuántica compuesta por paréntesis angulares y barras verticales. Es también llamada notación bracket por que el producto interno (producto punto) de dos estados es denotado por un bracket, $\langle \phi | \psi \rangle$, consistiendo de una

parte izquierda, $\langle \phi |$, llamada bra, y una parte derecha, $|\psi\rangle$, llamada ket. La notación fue inventada por Paul Dirac, por lo que comunmente se le denomina notación de Dirac [1]. El ket $|\psi\rangle$ es un vector, siendo el bra $\langle \psi |$ el vector transpuesto conjugado del ket correspondiente.

En la sección anterior se mencionó que el estado de cualquier sistema físico está definido por su función de onda $\psi(\vec{r}, t)$. En la notación de Dirac a la función de onda $\psi(\vec{r}, t)$ le corresponde el ket $|\psi\rangle$.

Si $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ están expresados en una base continua, el producto escalar es

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int \varphi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) dr. \quad (1.7)$$

Si $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ están expresados en una base discreta ortogonal, tal que

$$|\varphi\rangle = \sum_j b_j |\varphi_j\rangle, \quad (1.8)$$

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle, \quad (1.9)$$

el producto escalar es

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_j b_j^* c_j, \quad (1.10)$$

siendo $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

1.3. OBSERVABLES

Las cantidades físicamente medibles como energía, posición, momento lineal, momento angular, momento dipolar eléctrico, etc, se denominan observables y se representan por operadores expresados como matrices hermitianas.

Si \hat{A} es una observable para la cual se realiza una medición, el resultado de ésta es uno de los eigenvalores de \hat{A} . Lo anterior se expresa como

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad (1.11)$$

siendo λ el eigenvalor de \hat{A} correspondiente al estado $|\psi\rangle$.

Una cantidad muy importante en mecánica cuántica es el valor medio de \hat{A} , definido como

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (1.12)$$

El conmutador de dos observables \hat{A} , \hat{B} se define por

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (1.13)$$

el cual puede ser distinto de cero por tratarse de matrices.

1.4. SOLUCIONES A LA ECUACION DE SCHRÖDINGER

1.4.1. Amplitud de probabilidad

La ecuación de Schrödinger es

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle, \quad (1.14)$$

que es la ecuación de movimiento para $|\psi\rangle$.

Sea $\{|\psi_j\rangle\}$ una base de estados para el sistema bajo estudio; cualquier estado del sistema puede expresarse como

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0} c_j |\psi_j\rangle, \quad (1.15)$$

donde $|\psi_j\rangle$ no depende del tiempo.

Al reemplazar (1.15) en (1.14) se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0} c_j |\psi_j\rangle = \hat{H} \sum_{j=0} c_j |\psi_j\rangle = \sum_{k=0} b_k |\psi_k\rangle \quad (1.16)$$

y se obtiene un sistema de ecuaciones

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_j = \sum_{k=0} b_k. \quad (1.17)$$

Las cantidades c_j se conocen como amplitudes de probabilidad.

1.4.2. Operador de evolución

Si se propone

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right) |\psi(0)\rangle, \quad (1.18)$$

se aprecia que es solución de (1.14). $\hat{U}(t)$ se conoce como operador de evolución, definido como

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right). \quad (1.19)$$

Este método es útil cuando \hat{H} puede expresarse como combinación lineal de operadores conmutables entre sí, ya que la exponencial de una suma de operadores solo es factorizable cuando estos conmutan o cuando los operadores son simples.

Veremos ejemplos del operador de evolución en el capítulo 2 donde lo usaremos para escribir la solución a la ecuación maestra para el sistema cavidad-reservorio. En los capítulos 3 y 4 volveremos a usar el operador de evolución para escribir la solución a la ecuación de Schrödinger para múltiples campos cuantizados.

1.5. MATRIZ DE DENSIDAD: ECUACIÓN MAESTRA

Anteriormente se enunció que para un sistema físico dado, existe un vector de estado $|\psi\rangle$ que contiene toda la información posible sobre el sistema. Para extraer información sobre el sistema debemos calcular el valor esperado de la correspondiente observable \hat{O} ,

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle. \quad (1.20)$$

En muchas situaciones no conocemos $|\psi\rangle$; solo podríamos conocer la probabilidad P_ψ de que el sistema se halle en el estado $|\psi\rangle$. En este caso además de tomar el promedio mecánico cuántico debemos tomar también el promedio sobre un ensemble de muchos sistemas que han sido preparados idénticamente. En vez de la ecuación (1.20), el valor esperado de \hat{O} es

$$\langle\langle\hat{O}\rangle_{QM}\rangle_{Ensemble} = tr\left(\hat{O}\hat{\rho}\right), \quad (1.21)$$

donde el operador de densidad está dado por

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.22)$$

y tr indica la operación matricial de traza. La matriz de densidad tiene las siguientes propiedades [3]

$$tr(\hat{\rho}) = 1, \quad (1.23)$$

$$tr(\hat{\rho}^2) \leq 1, \quad (1.24)$$

$$tr(\hat{O}\hat{\rho}) = tr(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (1.25)$$

En el caso en que toda P_ψ es cero excepto para un estado $|\psi\rangle$, se tiene

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.26)$$

y es llamado un “estado puro”, mientras que los estados cuyas matrices de densidad son una superposición de la forma dada en la expresión (1.22) se denominan “estados mezclados”. Usando la traza para $\hat{\rho}^2$ podemos distinguir entre estados puros y mezclados, ya que para un estado puro se tiene [3]

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad (1.27)$$

$$tr(\hat{\rho}^2) = 1, \quad (1.28)$$

mientras que para un estado mezclado

$$tr(\hat{\rho}^2) < 1. \quad (1.29)$$

En el capítulo 4 veremos un ejemplo de estado mezclado para el campo elec-

tromagnético. Retomando la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle, \quad (1.30)$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para $\hat{\rho}$.

Tomando la derivada temporal de $\hat{\rho}$ (1.22) se tiene

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_{\psi} P_{\psi} \left(\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} \langle \psi| + |\psi\rangle \frac{\partial \langle \psi|}{\partial t} \right), \quad (1.31)$$

donde P_{ψ} es independiente del tiempo.

Usando la ecuación (1.30) para reemplazar $\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t}$ y $\frac{\partial \langle \psi|}{\partial t}$ en la ecuación (1.31) obtenemos

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1.32)$$

La ecuación (1.32) es llamada ecuación de Von Neumann o ecuación maestra. Esta es más general que la ecuación de Schrödinger ya que proporciona información tanto estadística como mecánico cuántica sobre el sistema dado. Tiene un amplio uso para modelar sistemas con pérdidas, como el caso de una cavidad acoplada a un reservorio térmico. En el capítulo 2 revisaremos el modelo más usado para modelar el sistema cavidad reservorio empleando el método de la ecuación maestra con aproximación markoviana.

1.6. CUANTIZACIÓN DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Al inicio mencionamos que hay fenómenos como el efecto fotoeléctrico y la radiación de cuerpo negro en los que la luz muestra un comportamiento cuantizado. Estos fenómenos hacen necesario introducir el concepto de cuantización para describir apropiadamente el comportamiento del campo electromagnético. En esta sección revisaremos brevemente como introducir la cuantización para campos.

Las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.33)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.34)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.35)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (1.36)$$

y las relaciones constitutivas

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1.37)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.38)$$

describen la dinámica de los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} , junto con los vectores desplazamiento \vec{D} e inducción \vec{B} .

Tomando el rotacional de(1.34) y usando las ecuaciones (1.33), (1.36), (1.37) y (1.38) se obtiene la conocida ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.39)$$

con $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

Ahora consideremos el campo eléctrico dentro de una cavidad resonante de longitud L . Elegimos el campo eléctrico con polarización en la dirección x y lo expandimos en los modos normales de la cavidad [2]

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \text{sen}(k_j z), \quad (1.40)$$

siendo q_j la amplitud del modo normal con la dimensión de una longitud, $k_j j \pi / L$, con $j=1,2,3,\dots$ y

$$A_j = \left(\frac{2\nu_j^2 m_j}{V \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (1.41)$$

siendo $\nu_j = j\pi c/L$ la eigenfrecuencia de la cavidad, $V=LA$ (A es el área transversal de la cavidad) es el volumen de la cavidad y m_j es una constante con la dimensión de masa. La componente distinta de cero del campo magnético H_y

en la cavidad es obtenida de (1.40):

$$H_y = \sum_j A_j \left(\frac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j} \right) \cos(k_j z). \quad (1.42)$$

El hamiltoniano \hat{H} para el campo es

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) d\tau, \quad (1.43)$$

donde la integración es hecha sobre el volumen de la cavidad. Al sustituir las ecuaciones (1.40) y (1.42) en (1.43) se obtiene

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_j (m_j \nu_j^2 q_j^2 + m_j \dot{q}_j^2) = \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j \nu_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right), \quad (1.44)$$

donde $p_j = m_j \dot{q}_j$ es el momento canónico del j -ésimo modo. La ecuación (1.44) expresa el campo electromagnético como una suma de energías de osciladores armónicos independientes; cada modo es equivalente a un oscilador armónico.

Las cantidades q_j, p_j pueden ser identificadas como operadores \hat{q}_j, \hat{p}_j que obedecen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{q}_j, \hat{p}_l] &= i\hbar \delta_{jl}, \\ [\hat{q}_j, \hat{q}_l] &= [\hat{p}_j, \hat{p}_l] = 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Se definen los operadores

$$\hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar \nu_j}} (m_j \nu_j q_j + i p_j), \quad (1.46)$$

$$\hat{a}_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar \nu_j}} (m_j \nu_j q_j - i p_j). \quad (1.47)$$

Usando $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$ el hamiltoniano (1.44) se reescribe como

$$\hat{H} = \hbar \sum_j \nu_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right), \quad (1.48)$$

con $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$ siguiendo las relaciones de conmutación para $\hat{p}_j, \hat{p}_j^\dagger$:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_j, \hat{a}_l^\dagger] &= i\hbar\delta_{jl}, \\ [\hat{a}_j, \hat{a}_l] &= [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_l^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Los operadores \hat{a}_j y \hat{a}_j^\dagger se conocen como operadores de aniquilación y creación de fotones respectivamente. Los estados de número o estados de Fock representados como $|m\rangle$ son soluciones para el oscilador mecánico cuántico y forman una base muy conveniente para representar los estados del campo electromagnético. Los estados de número se definen como [2]

$$|m\rangle = \phi_m(q) = \frac{1}{(2^m m!)} H_m \left(\sqrt{\frac{\nu}{\hbar}} q \right) \phi_0(q), \quad (1.50)$$

$$\phi_0(q) = \left(\frac{\nu}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\nu q^2}{2\hbar} \right), \quad (1.51)$$

siendo H_m el polinomio de Hermite.

La aplicación de \hat{a} a un estado de número $|m\rangle$ produce

$$\hat{a}|m\rangle = \sqrt{m}|m-1\rangle, \quad (1.52)$$

mientras que \hat{a}^\dagger produce

$$\hat{a}^\dagger|m\rangle = \sqrt{m+1}|m+1\rangle, \quad (1.53)$$

que son los procesos de creación y aniquilación de fotones.

El operador

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}, \quad (1.54)$$

se conoce como “operador de número” de fotones.

Usando la ecuación (1.54) reescribimos el hamiltoniano (1.48) como

$$\hat{H} = \hbar \sum_j \nu_j \left(\hat{n}_j + \frac{1}{2} \right). \quad (1.55)$$

En términos de \hat{a}_j y \hat{a}_j^\dagger los campos eléctrico (1.40) y magnético (1.42) se

escriben como

$$\hat{E}_x(z, t) = \sum_j \xi_j \left(\hat{a}_j \exp(-i\nu_j t) + \hat{a}_j^\dagger \exp(i\nu_j t) \right) \text{sen}(k_j z), \quad (1.56)$$

$$\hat{H}_y(z, t) = -i\epsilon_0 c \sum_j \xi_j \left(\hat{a}_j \exp(-i\nu_j t) - \hat{a}_j^\dagger \exp(i\nu_j t) \right) \text{cos}(k_j z), \quad (1.57)$$

donde

$$\xi_j = \left(\frac{\hbar \nu_j}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2}, \quad (1.58)$$

tiene las dimensiones de campo eléctrico.

1.7. ESTADOS COHERENTES

En esta sección vamos a exponer un tema que ha sido destacado en el desarrollo de la óptica cuántica, el estado coherente. En mecánica cuántica el estado coherente es un estado del oscilador armónico cuántico cuyo comportamiento reproduce cercanamente el de un oscilador armónico clásico. Erwin Schrödinger lo derivó en 1926 como un paquete de onda con perfil gaussiano de mínima incertidumbre mientras buscaba soluciones de la ecuación de Schrödinger que satisfacen el principio de correspondencia [4]. Mientras que los paquetes de onda con perfil gaussiano eran bien conocidos, ellos no llamaron la atención hasta que Roy J. Glauber, en 1963, dió una descripción cuántica de coherencia del campo electromagnético [5]. Aquí el estado coherente describe un campo oscilante, el estado cuántico más cercano a una onda sinusoidal.

1.7.1. RADIACIÓN EMITIDA POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CORRIENTE CLÁSICA

Una forma de abordar el estado coherente es mostrándolo como la radiación emitida por una distribución de corriente clásica. Aquí el adjetivo clásico se refiere a que la corriente puede ser descrita por un vector $\vec{j}(\vec{r}, t)$ el cual no es un operador.

Consideremos que esta corriente está acoplada al potencial vectorial descrito por el operador [2]

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = -i \sum_k \frac{1}{\nu_k} \vec{e}_k \varepsilon_k \hat{a}_k \exp\left(-i\nu_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}\right) + H.C., \quad (1.59)$$

el cual está expresado en términos de los operadores \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger , en forma semejante como se hizo para introducir la cuantización en el campo eléctrico. La frecuencia es denotada por ν_k , ε_k es la permitividad y \vec{e}_k es un vector unitario.

El hamiltoniano que describe la interacción entre el campo \hat{A} y la corriente \vec{j} está dado por [2]

$$\hat{V}(t) = \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \hat{A}(\vec{r}, t) d^3r, \quad (1.60)$$

y el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ correspondiente para el sistema combinado obedece la ecuación de Schrödinger en el marco de interacción

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{V}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (1.61)$$

La solución a la ecuación anterior puede escribirse formalmente como

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{V}(t')\right] |\psi(0)\rangle, \quad (1.62)$$

pero se debe proceder con cuidado, porque el operador $\hat{A}(\vec{r}, t)$ no conmuta consigo mismo en tiempos diferentes.

La exponencial que aparece en la ecuación (1.62) es reescrita como [2]

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{V}(t')\right] = \prod_k \exp\left(\alpha_k \hat{a}_k^\dagger - \alpha_k^* \hat{a}_k\right), \quad (1.63)$$

donde la amplitud compleja dependiente del tiempo α_k es

$$\alpha_k = \frac{1}{\hbar\nu_k} \varepsilon_k \int_0^t dt' \int d\vec{r} \vec{e}_k \cdot \vec{j}_\nu(\vec{r}, t') \exp\left(-i\nu_k t' + i\vec{k} \cdot \vec{r}\right). \quad (1.64)$$

En la ecuación (1.64) la corriente \vec{j}_ν tiene el subíndice ν para indicar que oscila a la frecuencia $\nu = ck$. Si elegimos como estado inicial el vacío, $|\psi(0)\rangle$,

el vector de estado estará dado por

$$|\psi(t)\rangle = \prod_k \exp\left(\alpha_k \hat{a}_k^\dagger - \alpha_k^* \hat{a}_k\right) |0\rangle_k. \quad (1.65)$$

Para el caso de un estado coherente multimodo la ecuación (1.65) se expresa como el producto de estados coherentes monomodo $|\alpha_k\rangle$:

$$|\{\alpha_k\}\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle, \quad (1.66)$$

$$|\alpha_k\rangle = \exp\left(\alpha_k \hat{a}_k^\dagger - \alpha_k^* \hat{a}_k\right) |0\rangle_k. \quad (1.67)$$

1.7.2. ESTADO COHERENTE COMO EIGENESTADO DEL OPERADOR DE ANIQUILACIÓN Y ESTADO DESPLAZADO DEL OSCILADOR ARMÓNICO

Otra forma de abordar el estado coherente es definiéndolo como eigenestado del operador de aniquilación \hat{a} con eigenvalor α ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.68)$$

La expresión anterior significa físicamente que un estado coherente no es afectado por la detección (aniquilación) de un fotón.

El estado coherente $|\alpha\rangle$ tiene la expansión en estados de número [2]

$$|\alpha\rangle = [\exp(-|\alpha|^2)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1.69)$$

y usando la expresión

$$|n\rangle = \left[(\hat{a}^\dagger)^n / \sqrt{n!} \right] |0\rangle, \quad (1.70)$$

reescribimos la ecuación (1.69) como

$$|\alpha\rangle = [\exp(-|\alpha|^2/2)] [\exp(\alpha \hat{a}^\dagger)] |0\rangle. \quad (1.71)$$

Usando la propiedad

$$[\exp(-\alpha^* \hat{a})] |0\rangle = 0, \quad (1.72)$$

la expresión (1.71) puede reescribirse como

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (1.73)$$

$$\hat{D} = [\exp(-|\alpha|^2/2)] [\exp(\alpha \hat{a}^\dagger)] [\exp(-\alpha^* \hat{a})], \quad (1.74)$$

$\hat{D}(\alpha)$ es llamado “operador desplazamiento” [5].

Para factorizar la expresión (1.74) usamos el siguiente

TEOREMA DE BAKER-HAUSDORFF:

Si \hat{A} y \hat{B} son dos operadores tales que

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0, \quad (1.75)$$

entonces

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = [\exp(-[\hat{A}, \hat{B}]/2)] [\exp \hat{A}] [\exp \hat{B}], \quad (1.76)$$

usando la ecuación (1.76) reescribimos (1.74) como

$$\hat{D}(\alpha) = \exp[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}], \quad (1.77)$$

tal como aparece en (1.67).

El operador $\hat{D}(\alpha)$ es unitario, tal que

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = [\hat{D}(\alpha)]^{-1}. \quad (1.78)$$

Cuando se aplica a los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger se obtiene

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (1.79)$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \quad (1.80)$$

por lo que produce un desplazamiento en las amplitudes \hat{a} y \hat{a}^\dagger .

1.8. SOBRE LA COHERENCIA DEL ESTADO COHERENTE

Como se expuso anteriormente, el campo electromagnético puede ser expresado como un conjunto de osciladores armónicos desacoplados; al introducir la cuantización con la definición de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger (ecuaciones (1.46) y (1.47)) se llega al hamiltoniano del oscilador mecánico cuántico (1.48), cuyas soluciones son los estados de número

$$|n\rangle = \phi_n(q) = \frac{1}{(2^n n!)} H_n \left(\sqrt{\frac{\nu}{\hbar}} q \right) \phi_0(q), \quad (1.81)$$

$$\phi_0(q) = \left(\frac{\nu}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\nu q^2}{2\hbar} \right), \quad (1.82)$$

donde $H_n(x)$ es el polinomio de Hermite.

Se sigue de la definición de valor esperado, para la coordenada generalizada q se tiene

$$\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(q) \phi_n(q) dq = 0 \quad (1.83)$$

y en forma similar

$$\langle p \rangle = 0, \quad (1.84)$$

$$\langle p^2 \rangle = \hbar \nu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.85)$$

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar}{\nu} \left(\nu + \frac{1}{2} \right). \quad (1.86)$$

Las incertidumbres para las coordenadas y momentos generalizados están dados como

$$\langle \Delta p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \hbar \nu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.87)$$

$$\langle \Delta q \rangle^2 = \frac{\hbar}{\nu} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.88)$$

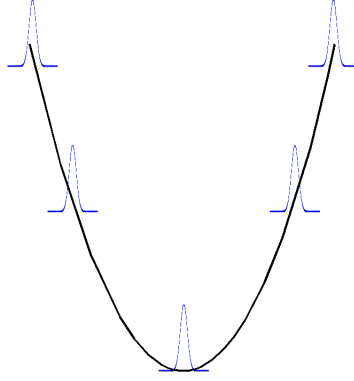


Figura 1.1: Paquete de onda con perfil gaussiano en un potencial armónico; en cualquier punto de la trayectoria el paquete mantiene su forma gaussiana, por lo que su estado es coherente

El producto de incertidumbres es

$$\Delta p \Delta q = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.89)$$

el cual es mínimo para el estado base ($n=0$).

Un paquete de onda que mantiene constante su varianza Δq mientras describe un movimiento armónico simple tiene un comportamiento muy cercano al de un campo clásico libre [5].

Si tomamos como estado inicial en $t = 0$ una función de onda de la forma dada por (1.82) (y que minimiza la expresión (1.89)) excepto que está desplazada en la dirección q positiva por una cantidad q_0 ,

$$\psi(q, 0) = \left(\frac{\nu}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\nu}{2\hbar} (q - q_0)^2 \right], \quad (1.90)$$

la función de onda en cualquier instante posterior está dada como

$$\psi(q, t) = \left(\frac{\nu}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\nu}{2\hbar} (q - q_0 \cos \nu t)^2 \right]. \quad (1.91)$$

El paquete de onda descrito por (1.91) oscila en un potencial de oscilador armónico simple sin cambiar su forma, y en este sentido, decimos que su estado es coherente (figura 1.1).

Capítulo 2

MODELO MARKOVIANO DE INTERACCIÓN CAVIDAD-RESERVORIO

En óptica cuántica es común encontrar el término “electrodinámica cuántica de cavidades”; las cavidades se usan para generar campos electromagnéticos y estos para manipular átomos, moléculas, e incluso, otros campos. En un primer acercamiento se estudian modelos de interacción átomo-campo, ión-laser, campo-campo, etc. en los cuales no se considera la interacción con el entorno, y por tanto, el sistema no pierde ni gana energía. El siguiente paso es agregar correcciones o hacer aproximaciones para considerar la interacción con el entorno. En mecánica cuántica la forma usual de describir la interacción con el entorno es usando ecuaciones maestras y de Fokker-Planck.

Con esto en mente, hacemos un repaso del modelo más usado para describir la interacción entre una cavidad y su entorno, con el formalismo de la ecuación maestra, cuya solución expresamos con el método de superoperadores.

2.1. ECUACION MAESTRA CAVIDAD-RESERVORIO

Sean dos sistemas S y R , siendo S el sistema que nos interesa conocer y R un reservorio acoplado a S . El hamiltoniano del sistema compuesto $S \oplus R$

tiene la forma general

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (2.1)$$

donde \hat{H}_S y \hat{H}_R son las energías libres correspondientes y \hat{H}_{SR} es la energía de interacción. Denotaremos por $\hat{\chi}(t)$ el operador de densidad del sistema completo $S \oplus R$ y por $\hat{\rho}(t)$ el operador de densidad reducido para S

$$\hat{\rho}(t) = tr_R[\hat{\chi}(t)], \quad (2.2)$$

donde tr_R indica la operación matricial de traza sobre los estados de R . Como se vió en el capítulo anterior $\hat{\rho}$ contiene toda la información posible sobre S . Nuestro interés por el momento reside en obtener una ecuación para $\hat{\rho}(t)$ que contenga las propiedades de R como parámetros.

En el capítulo anterior se vió que la ecuación de movimiento para $\hat{\chi}$ es,

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\chi}], \quad (2.3)$$

con \hat{H} dado por (2.1). En estos casos es conveniente aplicar una transformación para pasar el marco de interacción, así obtenemos una expresión más compacta que nos ayuda a identificar que aproximaciones pueden aplicarse para obtener soluciones satisfactorias.

En el marco de interacción la matriz de densidad es

$$\tilde{\chi} = \left\{ \exp(i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\} \hat{\chi} \left\{ \exp(-i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\}, \quad (2.4)$$

de las ecuaciones (2.1) y (2.3) obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}, \tilde{\chi}], \quad (2.5)$$

$$\tilde{H}_{SR} = \left\{ \exp(i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\} \hat{H} \left\{ \exp(-i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\}. \quad (2.6)$$

Ahora integramos (2.5) para obtener

$$\tilde{\chi}(t) = \hat{\chi}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \left[\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t')] \right], \quad (2.7)$$

y sustituimos $\hat{\tilde{\chi}}(t)$ en (2.5) obteniendo

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\chi}}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\tilde{H}}(t), \hat{\tilde{\chi}}(0) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t'), \hat{\tilde{\chi}}(t') \right] \right]. \quad (2.8)$$

La ecuación anterior es exacta, pero difícil de resolver; ahora examinaremos las aproximaciones que han sido usadas para obtener soluciones.

Si asumimos que la interacción comienza en $t = 0$ y que en ese instante no hay correlación entre S y R , se tiene

$$\hat{\chi}(0) = \hat{\tilde{\chi}}(0) = \hat{\rho}(0) \hat{R}_0, \quad (2.9)$$

donde $\hat{\rho}(0)$ es la matriz de densidad inicial para S y \hat{R}_0 la matriz de densidad inicial para R . Al no haber correlación entre S y R la matriz para el sistema $S \oplus R$ puede ser factorizada en $t = 0$.

Como la traza es invariante ante transformaciones lineales, se tiene

$$tr_R(\hat{\tilde{\chi}}) = \left\{ \exp(i/\hbar) (\hat{H}_S) t \right\} \hat{\rho} \left\{ \exp(-i/\hbar) (\hat{H}_S) t \right\} = \hat{\rho}, \quad (2.10)$$

usando la traza sobre los estados de R en (2.8) obtenemos

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\rho}}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_R \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t'), \hat{\tilde{\chi}}(t') \right] \right], \quad (2.11)$$

donde el término $(1/i\hbar) tr_R \left\{ \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t), \hat{\tilde{\chi}}(0) \right] \right\}$ ha sido removido bajo la suposición $tr_R \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t) \hat{R}_0 \right] = 0$. Esto queda garantizado incluyendo $tr_R \left[\hat{\tilde{H}}_{SR} \hat{R}_0 \right]$ en el hamiltoniano del sistema $S \oplus R$, lo que es equivalente a aplicar una transformación de rotación para agregar o remover un término de energía constante, tal como ocurre cuando el hamiltoniano se escribe en el marco de interacción.

Ahora supondremos que el acoplamiento descrito por \hat{H}_{SR} es muy débil. Al establecer que en $t = 0$ $\hat{\chi}$ está factorizado, en instantes posteriores las correlaciones entre S y R se producirían por la interacción entre estos, y en todo instante $\hat{\chi}(t)$ mostraría desviaciones del orden \hat{H}_{SR} respecto al estado inicial no correlacionado dado en (2.9). Además R es un sistema muy grande

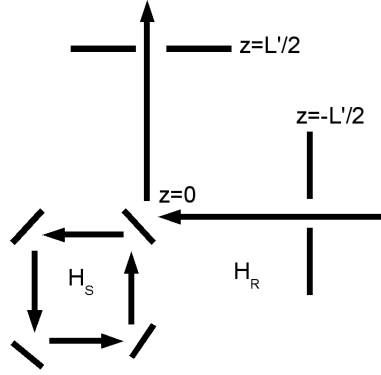


Figura 2.1: Cavity unidimensional (H_S) acoplada a un reservorio térmico (H_R)

cuyo estado no es afectado significativamente por su interacción con S .

Con las consideraciones anteriores, se propone escribir

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\rho}(t) \hat{R}_0 + \hat{O}(\hat{H}_{SR}). \quad (2.12)$$

Ahora se hará una “aproximación de Born” en (2.12), que consiste en despreciar la contribución de términos de orden más alto que el segundo en \hat{H}_{SR} , tal que escribimos (2.11) como

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_R \left[\hat{H}_{SR}(t), \left[\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \right] \right]. \quad (2.13)$$

Ahora consideraremos el modelo explícito “campo de cavity - reservorio térmico”. En la figura 2.1 se ilustra una cavity con modos de ondas viajeras que satisfacen condiciones de frontera en $z = -L'/2, L'/2$. El modo de la cavity se acopla al reservorio a través de un espejo parcialmente transmisor.

El hamiltoniano del sistema $S \oplus R$ es la suma de los términos

$$\hat{H}_S = \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.14)$$

$$\hat{H}_R = \sum_j \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j, \quad (2.15)$$

$$\hat{H}_{SR} = \sum_j \hbar \left(\kappa_j^* \hat{a} \hat{r}_j^\dagger + \kappa_j \hat{a}^\dagger \hat{r}_j \right) = \hbar \left(\hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\Gamma} \right), \quad (2.16)$$

$$\hat{\Gamma} = \kappa_j \hat{r}_j. \quad (2.17)$$

Los operadores $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ y $\hat{r}_j(\hat{r}_j^\dagger)$ corresponden a los procesos de aniquilación (creación) de fotones del campo de cavidad y del reservorio respectivamente. Consideraremos que el reservorio está en equilibrio térmico a la temperatura absoluta T , su matriz de densidad

$$\hat{R}_0 = \sup \prod_j \exp \left(-\frac{\hbar\omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j}{k_B T} \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega_j}{k_B T} \right) \right), \quad (2.18)$$

con k_B la constante de Boltzman. Los operadores en el marco de interacción son

$$\hat{\tilde{a}} = \exp(i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t) \hat{a} \exp(-i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t) = \hat{a} \exp(-i\omega_c t), \quad (2.19)$$

$$\hat{\tilde{a}}^\dagger = \exp(i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t) \hat{a}^\dagger \exp(-i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t) = \hat{a}^\dagger \exp(-i\omega_c t), \quad (2.20)$$

$$\hat{\tilde{\Gamma}} = \sum_j \kappa_j \hat{r}_j \exp(-i\omega_j t), \quad (2.21)$$

$$\hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger = \sum_j \kappa_j^* \hat{r}_j^\dagger \exp(i\omega_j t). \quad (2.22)$$

La ecuación maestra para $\hat{\rho}$ la escribimos como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\tilde{\rho}}}{\partial t} = & - \int_0^t dt' \{ [\hat{\tilde{a}} \hat{\tilde{\rho}}(t') - \hat{\tilde{\rho}}(t') \hat{\tilde{a}}] \exp(-i\omega_c(t+t')) \langle \hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger(t) \hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. + \\ & [\hat{\tilde{a}}^\dagger \hat{\tilde{\rho}}(t') - \hat{\tilde{\rho}}(t') \hat{\tilde{a}}^\dagger] \exp(i\omega_c(t+t')) \langle \hat{\tilde{\Gamma}}(t) \hat{\tilde{\Gamma}}(t') \rangle_R + h.c. + \\ & [\hat{\tilde{a}} \hat{\tilde{a}}^\dagger \hat{\tilde{\rho}}(t') - \hat{\tilde{a}}^\dagger \hat{\tilde{\rho}}(t') \hat{\tilde{a}}] \exp(-i\omega_c(t-t')) \langle \hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger(t) \hat{\tilde{\Gamma}}(t') \rangle_R + h.c. + \\ & [\hat{\tilde{a}}^\dagger \hat{\tilde{a}} \hat{\tilde{\rho}}(t') - \hat{\tilde{\rho}}(t') \hat{\tilde{a}}^\dagger] \exp(i\omega_c(t-t')) \langle \hat{\tilde{\Gamma}}(t) \hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \}, \quad (2.23) \end{aligned}$$

con las funciones de correlación del reservorio dadas por:

$$\langle \hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger(t) \hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger(t') \rangle_R = 0, \quad (2.24)$$

$$\langle \hat{\tilde{\Gamma}}(t) \hat{\tilde{\Gamma}}(t') \rangle_R = 0, \quad (2.25)$$

$$\langle \hat{\tilde{\Gamma}}^\dagger(t) \hat{\tilde{\Gamma}}(t') \rangle_R = \sum_j |\kappa_j|^2 \{ \exp(i\omega_j(t-t')) \} \bar{n}(\omega_j, T), \quad (2.26)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_j |\kappa_j|^2 \{ \exp(-i\omega_j(t-t')) \} [\bar{n}(\omega_j, T) + 1], \quad (2.27)$$

siendo \bar{n} el número promedio de fotones térmicos,

$$\bar{n}(\omega_j, T) = \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j \right) = \frac{\exp(-\hbar\omega_j / (k_B T))}{1 - \exp(-\hbar\omega_j / (k_B T))}. \quad (2.28)$$

Las funciones (2.26), (2.27) involucran una sumatoria sobre los osciladores del reservorio, la cual cambiamos por una integración introduciendo una densidad de frecuencias $g(\omega)$ (el reservorio es un conjunto infinito de osciladores armónicos desacoplados). Para el reservorio unidimensional mostrado en la figura 2.1 se tiene

$$g(\omega) = L' / 2\pi c. \quad (2.29)$$

Se reescribe la ecuación (2.23) con el cambio de variable $\tau = t - t'$, quedando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & - \int_0^t dt' \{ [\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t-\tau) - \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t-\tau) \hat{a}] \exp(-i\omega_c \tau) \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R + h.c. \\ & + [\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t-\tau) - \hat{a} \hat{\rho}(t-\tau) \hat{a}^\dagger] \exp(i\omega_c \tau) \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R + h.c. \}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega [\exp(i\omega\tau)] g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T), \quad (2.31)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega [\exp(-i\omega\tau)] g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 [\bar{n}(\omega, T) + 1]. \quad (2.32)$$

Si τ es suficientemente grande, la exponencial compleja en (2.31), (2.32) hará que las funciones $g(\omega)$, $|\kappa(\omega)|^2$ y $\bar{n}(\omega, T)$ promedien cero.

Para estimar que tan “grande” es τ , vamos a considerar $\kappa(\omega)$ constante, lo cual deja a $\bar{n}(\omega, T)$ como única función dependiente de ω . También podemos calcular las integrales (2.31) y (2.32) extendiendo el límite de integración a $-\infty$ y reemplazando $\bar{n}(\omega, T)$ por $\bar{n}(|\omega|, T)$. Con esto obtenemos una transformada de Fourier y la correlación temporal estará dada por el inverso del ancho $\hbar\omega / (k_B T)$ de $\bar{n}(|\omega|, T)$. A la temperatura ambiente, este es un número del orden de $0,25 \times 10^{-13} s$ [6].

La dependencia temporal de $\hat{\rho}$ respecto a t está caracterizada por el tiempo de decaimiento para el modo de cavidad (el inverso del ancho de línea del modo), un número que puede ser del orden de $10^{-8} s$ [6].

Las variables t y τ definen escalas de tiempo para las dinámicas de S y R respectivamente. Del cálculo para las integrales (2.31) y (2.32) se obtuvo que τ es del orden de $0,25 \times 10^{-13} s$, mucho más pequeño que el intervalo temporal para el decaimiento del modo de cavidad.

La integración respecto a τ en (2.30) está dominada por tiempos mucho más cortos que los definidos por t para la evolución de $\hat{\rho}$; esto permite hacer una aproximación markoviana al reemplazar $\hat{\rho}(t - \tau)$ por $\hat{\rho}(t)$, obteniéndose

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \alpha \left(\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} \right) + \beta \left(\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger \right) + h.c., \quad (2.33)$$

$$\alpha = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega [\exp(-i(\omega - \omega_c)\tau)] g(\omega) |\kappa(\omega)|^2, \quad (2.34)$$

$$\beta = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega [\exp(-i(\omega - \omega_c)\tau)] g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T). \quad (2.35)$$

Dado que la integración respecto a τ está dominada por intervalos mucho más cortos que los definidos por t , podemos extender la integración respecto a τ al infinito y obtener

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau \exp(-i(\omega - \omega_c)\tau) = \pi \delta(\omega - \omega_c) + i \frac{P}{(\omega_c - \omega)}, \quad (2.36)$$

siendo P el valor principal de Cauchy.

Usando la ecuación (2.36) se obtiene

$$\alpha = \pi g(\omega_c) |\kappa(\omega_c)|^2 + i\Delta, \quad (2.37)$$

$$\beta = \pi g(\omega_c) |\kappa(\omega_c)|^2 \bar{n}(\omega_c) + i\Delta', \quad (2.38)$$

$$\Delta = P \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2}{\omega_c - \omega}, \quad (2.39)$$

$$\Delta' = P \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2}{\omega_c - \omega} \bar{n}(\omega, T). \quad (2.40)$$

Ahora se define

$$\kappa = \pi g(\omega_c) |\kappa(\omega_c)|^2, \quad (2.41)$$

$$\bar{n} = \bar{n}(\omega_c, T), \quad (2.42)$$

y usando las expresiones (2.33), (2.37) y (2.38) la ecuación maestra en el cuadro de interacción es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i\Delta \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho} \right] + \kappa \left(2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \\ & + 2\kappa \bar{n} \left(\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

En el cuadro de Schrödinger la ecuación maestra está dada por

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_s, \hat{\rho} \right] + \left\{ \exp(-i/\hbar) \left(\hat{H}_s \right) t \right\} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \left\{ \exp(-i/\hbar) \left(\hat{H}_s \right) t \right\}. \quad (2.44)$$

Tomando $\hat{H}_s = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$, sustituimos $\partial \hat{\rho} / \partial t$ en (2.44) y usando (2.10) y (2.19)-(2.22) llegamos a la ecuación maestra para una cavidad acoplada a un reservorio térmico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i\omega'_c \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho} \right] + \kappa \left(2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \\ & + 2\kappa \bar{n} \left(\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\omega'_c = \omega_c + \Delta. \quad (2.46)$$

2.2. DECAIMIENTO DE UN ESTADO COHERENTE

La ecuación (2.45) describe la evolución de un campo de cavidad acoplado a un reservorio térmico en la aproximación Born-Markov. Por simplicidad consideraremos una cavidad a cero absoluto ($T = 0^\circ K$) y $\omega'_c = 0$ ($\Delta = -\omega_c$). Con estas condiciones se tiene $\bar{n} = 0$ y la ecuación (2.45) se reduce a

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa \left(2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right). \quad (2.47)$$

Se expondrá la solución a la ecuación (2.47) definiendo los superoperadores

$$\hat{J} = 2\kappa \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger, \quad \hat{L} = -\kappa \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \kappa \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.48)$$

con lo que reescribimos (2.47) como

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = (\hat{J} + \hat{L}) \hat{\rho}, \quad (2.49)$$

y la solución se propone como

$$\hat{\rho}(t) = \left\{ \exp(\hat{L}t) \right\} \left\{ \exp(f(t)\hat{J}) \right\} \hat{\rho}(0). \quad (2.50)$$

Derivando la ecuación anterior e igualando con (2.49) se obtiene

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{L}\hat{\rho}(t) + (df/dt) \left\{ \exp(\hat{L}t) \right\} \hat{J} \left\{ \exp(-\hat{L}t) \right\} \hat{\rho}(t) = (\hat{J} + \hat{L}) \hat{\rho}. \quad (2.51)$$

Usando la relación de conmutación

$$[\hat{L}, \hat{J}] \hat{\rho} = 2\kappa \hat{J} \hat{\rho}, \quad (2.52)$$

recurrimos al teorema de Baker-Hausdorff (1.76) para obtener

$$\left\{ \exp(\hat{L}t) \right\} \hat{J} \left\{ \exp(-\hat{L}t) \right\} = \hat{J} \exp(2\kappa t), \quad (2.53)$$

tal que

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left(\hat{L} + (df/dt) \hat{J} \exp(2\kappa t) \right) \hat{\rho}(t). \quad (2.54)$$

Comparando (2.54) con (2.49) se obtiene la ecuación diferencial

$$(df/dt) \exp(2\kappa t) = 1, \quad f(0) = 0, \quad (2.55)$$

cuya solución es

$$f(t) = \frac{1 - \exp(-2\kappa t)}{2\kappa}. \quad (2.56)$$

Ahora tomemos como condición inicial un estado coherente, $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, tal que

$$\hat{\rho}(t) = \left\{ \exp(\hat{L}t) \right\} \left\{ \exp\left(\hat{J} \frac{1 - \exp(-2\kappa t)}{2\kappa}\right) \right\} |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (2.57)$$

Desarrollando la segunda exponencial en serie de Taylor y aplicando las potencias de \hat{J} a la matriz de estado coherente (los estados coherentes son

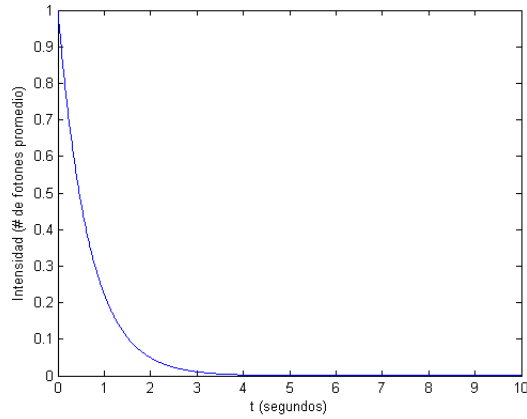


Figura 2.2: Número de fotones para un campo de cavidad acoplado al reservorio térmico

eigenestados del operador de aniquilación) obtenemos

$$\hat{\rho}(t) = \{ \exp([1 - \exp(-2\kappa t)] |\alpha|^2) \} \{ \exp(\hat{L}t) \} |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.58)$$

y aplicando la exponencial del operador \hat{L} a la matriz de estado coherente,

$$\{ \exp(\hat{L}t) \} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \{ \exp(-\kappa\hat{n}t) \} |\alpha\rangle\langle\alpha| \{ \exp(-\kappa\hat{n}t) \}, \quad (2.59)$$

finalmente obtenemos

$$\hat{\rho}(t) = |\alpha \exp(-\kappa t)\rangle\langle\alpha \exp(-\kappa t)|, \quad (2.60)$$

que es lo esperado para un estado coherente. En la figura 2.2 se aprecia una gráfica para el valor esperado del número de fotones tomando $\kappa = 1,5$, $\alpha = 1$.

Capítulo 3

INTERACCIÓN NO MARKOVIANA DE MÚLTIPLES CAMPOS

En el capítulo anterior vimos que un estado coherente sujeto a disipación mantiene su forma durante la evolución del sistema total. Vimos que dada la ecuación maestra para un campo en una cavidad con pérdidas a temperatura de cero absoluto

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (3.1)$$

con \hat{a} (\hat{a}^\dagger) el operador de aniquilación (creación) de fotones para el modo de cavidad, κ la constante de decaimiento y $\hat{\rho}$ la matriz de densidad, si el estado inicial del campo de cavidad es un estado coherente $|\alpha\rangle$, la evolución de éste es $|\alpha \exp(-\kappa t)\rangle$, esto es, su amplitud decae con el tiempo [7]. Una posible respuesta sobre por qué el estado coherente mantiene su forma cuando está sujeto a disipación es el hecho de que los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación, pero este argumento no se mantiene para un proceso disipativo de 2 fotones [8]

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa \left(2\hat{a}^2\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2 \right), \quad (3.2)$$

aun cuando los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación cuadrado (dando lugar a estados coherentes pares e impares [9]).

Las ecuaciones anteriores son obtenidas usando la aproximación Born-Markov [8, 10]. En el caso en que tales aproximaciones no son usadas, y entonces, cuando la interacción entre un oscilador armónico y un conjunto de

osciladores armónicos (el ambiente o reservorio) es considerado, no está claro como decae un campo coherente.

En este capítulo proponemos un modelo sin aproximación Born-Markov para responder la pregunta anterior. Primero consideraremos la interacción entre dos campos cuantizados, la solución obtenida será la guía para escribir la solución general para el caso de múltiples campos. Finalmente usaremos ese resultado para describir como decae un campo coherente acoplado a un reservorio.

3.1. INTERACCIÓN DE DOS CAMPOS

Consideremos el hamiltoniano para dos campos en interacción (con $\hbar = 1$)

$$\hat{H} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger), \quad (3.3)$$

un sistema como este puede ser generado por la interacción de dos campos cuantizados con un átomo de 2 niveles [11] aplicando una transformación para pasar al marco de interacción, obtenemos

$$\hat{H}_I = \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger), \quad (3.4)$$

con $\Delta = \omega_a - \omega_b$ la desintonía; \hat{a} y \hat{b} son modos ortogonales, tal que $[\hat{a}, \hat{b}] = 0$. Será de utilidad definir los operadores del modo normal dados por [12]

$$\hat{A}_1 = \delta \hat{a} + \gamma \hat{b}, \quad \hat{A}_2 = \gamma \hat{a} - \delta \hat{b}, \quad (3.5)$$

$$\delta = \frac{2\lambda}{2\Omega\sqrt{\Omega - \Delta}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\Omega - \Delta}{2\Delta}}, \quad (3.6)$$

con $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2}$ la frecuencia de Rabi. Los coeficientes δ y γ cumplen con $\delta^2 + \gamma^2 = 1$. \hat{A}_1 y \hat{A}_2 son operadores de aniquilación semejantes a \hat{a} y \hat{b} satisfaciendo la relación de conmutación

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_1^\dagger] = [\hat{A}_2, \hat{A}_2^\dagger] = 1, \quad (3.7)$$

además, los operadores del modo normal conmutan entre sí

$$\left[\hat{A}_1, \hat{A}_2 \right] = \left[\hat{A}_1, \hat{A}_2^\dagger \right] = 0, \quad (3.8)$$

tal como ocurre con \hat{a} y \hat{b} .

Usando estos operadores el hamiltoniano (3.4) se reescribe como

$$\hat{H}_I = \mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2, \quad (3.9)$$

con $\mu_{1,2} = (\Delta \pm \Omega) / 2$.

El propósito de escribir el hamiltoniano (3.4) en la forma (3.9) es aplicar el operador de evolución al estado inicial, ya que como se vio en el capítulo 1, la ecuación de Schrödinger (con $\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle \quad (3.10)$$

tiene como solución

$$|\psi(t)\rangle = \left[\exp(i\hat{H}t) \right] |\psi(0)\rangle. \quad (3.11)$$

En este punto la expresión (3.8) es de suma importancia para la búsqueda de la solución, ya que como consecuencia se obtiene

$$\left[\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1, \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \right] = 0, \quad (3.12)$$

y esto nos conduce a la factorización del operador de evolución para el hamiltoniano (3.9),

$$\begin{aligned} \exp(-i\hat{H}t) &= \exp\left(-it \left[\mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \right]\right) \\ &= \left[\exp\left(-it\mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1\right) \right] \left[\exp\left(-it\mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2\right) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

el cual era nuestro objetivo inicial.

Para tener un medio de transformar los estados de una representación a otra, notamos que los estados de vacío en ambas representaciones $|0\rangle_a |0\rangle_b$ y $|0\rangle_{A1} |0\rangle_{A2}$ difieren solamente por una fase [12]. Primero notamos que

$$\hat{A}_1 |0\rangle_a |0\rangle_b = 0, \quad (3.14)$$

y en forma similar el operador \hat{A}_2 tiene el mismo efecto. De estos elegimos la fase tal que

$$|0\rangle_a|0\rangle_b = |0\rangle_{A1}|0\rangle_{A2}. \quad (3.15)$$

Ahora consideremos estados coherentes como estados iniciales, la función de onda que evoluciona en el tiempo es

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \left\{ \exp\left(-it\left[\mu_1\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 + \mu_2\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\right]\right) \right\} \hat{D}_a(\alpha)\hat{D}_b(\beta)|0\rangle_a|0\rangle_b \\ &= \left\{ \exp\left(-it\left[\mu_1\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 + \mu_2\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\right]\right) \right\} \hat{D}_a(\alpha)\hat{D}_b(\beta)|0\rangle_{A1}|0\rangle_{A2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde $\hat{D}_c(\epsilon) = \exp(\epsilon\hat{c}^\dagger - \epsilon^*\hat{c})$ es el operador de desplazamiento de Glauber [5]. Recurriendo a (3.5) podemos escribir \hat{a} y \hat{b} en términos de los operadores \hat{A}_1 y \hat{A}_2 en (3.16) como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \left\{ \exp\left(-it\left[\mu_1\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 + \mu_2\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\right]\right) \right\} \otimes \\ &\quad \hat{D}_{A1}(\alpha\delta + \beta\gamma)\hat{D}_{A2}(\alpha\gamma - \beta\delta)|0\rangle_{A1}|0\rangle_{A2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aplicando la exponencial y los operadores de desplazamiento en (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{D}_{A1}([\alpha\delta + \beta\gamma]\exp(-i\mu_1t))\hat{D}_{A2}([\alpha\gamma - \beta\delta]\exp(-i\mu_2t))|0\rangle_{A1}|0\rangle_{A2} \\ &= |[\alpha\delta + \beta\gamma]\exp(-i\mu_1t)\rangle_{A1}|[\alpha\gamma - \beta\delta]\exp(-i\mu_2t)\rangle_{A2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) muestra que en la nueva base los estados coherentes permanecen coherentes durante su evolución. Transformando de vuelta a la representación original obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\delta[\alpha\delta + \beta\gamma]\exp(-i\mu_1t) + \gamma[\alpha\gamma - \beta\delta]\exp(-i\mu_2t)\rangle_a \otimes \\ &\quad \otimes |\gamma[\alpha\delta + \beta\gamma]\exp(-i\mu_1t) - \delta[\alpha\gamma - \beta\delta]\exp(-i\mu_2t)\rangle_b \end{aligned} \quad (3.19)$$

y los estados coherentes permanecen coherentes durante la evolución del sistema. Para obtener las ecuaciones (3.18), (3.19) se utilizó la siguiente propiedad

$$\hat{D}_c(\epsilon_1)\hat{D}_c(\epsilon_2) = \hat{D}_c(\epsilon_1 + \epsilon_2)\exp\left(\frac{1}{2}\{\epsilon_1\epsilon_2^* - \epsilon_1^*\epsilon_2\}\right). \quad (3.20)$$

En la siguiente sección veremos que el modelo de interacción entre dos

campos es fácilmente generalizable a cualquier número arbitrario de campos.

3.2. MODELO NO MARKOVIANO PARA LA INTERACCIÓN ENTRE MÚLTIPLES CAMPOS

Consideremos el hamiltoniano para N campos

$$\hat{H} = \sum_j \omega_j \hat{n}_j + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger). \quad (3.21)$$

Buscaremos reescribir (3.21) como

$$\hat{H} = \sum_m \mu_m \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m, \quad (3.22)$$

tal que

$$[\hat{A}_m, \hat{A}_n^\dagger] = 0, \quad (3.23)$$

$$[\hat{A}_m, \hat{A}_m^\dagger] = 1. \quad (3.24)$$

Definimos los \hat{A}_n como

$$\hat{A}_n = \sum_i r_{ni} \hat{a}_i, \quad (3.25)$$

siendo r_{ni} un número real.

La expresión (3.23) (usando la propiedad $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 0$, $[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = 1$) se expresa como

$$[\hat{A}_m, \hat{A}_n^\dagger] = \sum_i r_{ni} r_{mi} = 0, \quad (3.26)$$

que tiene la forma de un producto escalar de vectores $\vec{r}_n \cdot \vec{r}_m = 0$, por lo que \vec{r}_n y \vec{r}_m son ortogonales. Con los coeficientes r_{ni} en (3.25) definimos los vectores

$$\vec{r}_n = \begin{pmatrix} r_{n1} \\ r_{n2} \\ \vdots \\ r_{ni} \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

tal que $\vec{r}_n \cdot \vec{r}_m = 0$, esto es, los n vectores \vec{r}_n son una base ortogonal para

\mathbb{R}^n .

A continuación definimos las matrices

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \dots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1i} & r_{2i} & \dots & r_{ni} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_i \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

donde las columnas de \hat{P} son los \vec{r}_n y \hat{D} es una matriz diagonal siendo μ_i el elemento sobre la diagonal principal.

Combinando las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.25) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\sum_m \mu_m r_{mi}^2 = \omega_i, \quad (3.30)$$

$$\sum_m \mu_m r_{mi} r_{mj} = \lambda_{ij}, \quad (3.31)$$

con $i \neq j$.

Las ecuaciones (3.30) y (3.31) se pueden expresar en forma matricial como

$$\hat{\Lambda} = \hat{P} \hat{D} \hat{P}^t = \begin{pmatrix} \omega_1 & \lambda_{21} & \dots & \dots & \lambda_{k1} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \dots & \dots & \lambda_{k2} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \dots & \dots & \lambda_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{1k} & \lambda_{2k} & \dots & \dots & \omega_k \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

tal que el elemento sobre la diagonal principal en $\hat{\Lambda}$ es $\lambda_{ii} = \omega_i$.

La matriz $\hat{\Lambda}$ es simétrica ($\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$), por lo cual satisface el siguiente teorema de álgebra lineal [13]:

TEOREMA:

Si $\hat{\Lambda}$ es una matriz $n \times n$, entonces los siguientes enunciados son equiva-

lentes:

- a) $\hat{\Lambda}$ es simétrica,
- b) $\hat{\Lambda}$ es diagonalizable ortogonalmente,
- c) $\hat{\Lambda}$ tiene un conjunto de eigenvectores ortonormales.

Como consecuencia del inciso c del teorema anterior, la matriz $\hat{\Lambda}$ (3.32) no puede tener columnas repetidas.

Otro enunciado útil es el siguiente [13]:

TEOREMA:

- a) La ecuación característica de una matriz simétrica solo contiene raíces reales.
- b) Si un eigenvalor μ de una matriz simétrica $\hat{\Lambda}$ está repetido k veces como raíz de la ecuación característica, entonces el eigenespacio correspondiente a μ es k -dimensional.

De resolver la ecuación de Schrödinger hemos pasado al problema de diagonalizar una matriz simétrica $\hat{\Lambda}$, cuyos eigenvalores son los μ_i sobre la diagonal principal de \hat{D} (3.29), y la matriz que diagonaliza a $\hat{\Lambda}$ es \hat{P} , siendo esta última ortogonal ($\hat{P}^{-1} = \hat{P}^t$).

De lo anterior, el proceso para solucionar las ecuaciones (3.30) y (3.31) es el siguiente:

- 1) Formar la matriz $\hat{\Lambda}$,
- 2) Obtener los eigenvalores de $\hat{\Lambda}$,
- 3) Obtener los eigenvectores ortonormales de $\hat{\Lambda}$.

Los eigenvectores ortonormales de $\hat{\Lambda}$ son los \vec{r}_n necesarios para definir los \hat{A}_n (las columnas de \hat{P} son los \vec{r}_n), mientras que los eigenvalores μ_n son los que definen la combinación lineal $\hat{H} = \sum_m \mu_m \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m$.

3.3. TRES CAMPOS

Como un ejemplo sobre el método expuesto en la sección anterior buscaremos la solución para el caso de tres campos.

Sea un sistema de tres campos descrito por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{n}_1 + \omega_2 \hat{n}_2 + \omega_3 \hat{n}_3 + \lambda_{12} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) + \lambda_{23} \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger \right), \quad (3.33)$$

$$\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i. \quad (3.34)$$

Aplicando la transformación

$$\hat{V} = \exp \{ -i\omega_2 (\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \hat{n}_3) t \}, \quad (3.35)$$

obtenemos

$$\hat{H} = \Delta \hat{n}_1 + \Delta \hat{n}_3 + \lambda_{12} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) + \lambda_{23} \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger \right) \quad (3.36)$$

con la matriz del sistema

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Delta & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

La ecuación característica para (3.37) es

$$|\hat{\Lambda} - \mu| = -\mu^3 + (\Delta^2 + 2\lambda^2) \mu = 0, \quad (3.38)$$

con eigenvalores

$$\mu_1 = R, \mu_2 = 0, \mu_3 = R, R^2 = \Delta^2 + 2\lambda^2, \quad (3.39)$$

y sus eigenvectores ortonormales

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\Delta+R}{2R} \\ \frac{\lambda}{R} \\ -\frac{\Delta+R}{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{Q} \\ -\frac{\Delta}{\lambda Q} \\ -\frac{1}{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} \frac{R-\Delta}{2R} \\ -\frac{\lambda}{R} \\ \frac{\Delta+R}{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$Q^2 = 2 + \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^2. \quad (3.41)$$

Ahora tomaremos como condición inicial tres campos en estados coherentes

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_1\rangle_{a1} |\alpha_2\rangle_{a2} |\alpha_3\rangle_{a3} = \hat{D}_{a1}(\alpha_1) \hat{D}_{a2}(\alpha_2) \hat{D}_{a3}(\alpha_3) |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{a3}. \quad (3.42)$$

El estado de los tres campos en cualquier instante posterior se obtiene aplicando el operador de evolución $\hat{U}(t) = \exp\left(-it \sum_j \mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j\right)$,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left(-it \sum_1^3 \mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j\right) |\psi(0)\rangle \\ &= \exp\left(-it \sum_1^3 \mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j\right) \hat{D}_{a1}(\alpha_1) \hat{D}_{a2}(\alpha_2) \hat{D}_{a3}(\alpha_3) \otimes \\ &\quad \otimes |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{a3}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Los estados iniciales están dados en la representación de \hat{a}_i , mientras que el operador de evolución está en la representación de \hat{A}_i ; por lo tanto debemos pasar los vectores del estado inicial de \hat{a}_i a \hat{A}_i .

A continuación definimos

$$\vec{A}_i = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_i = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

que son vectores de operadores, y como se vio anteriormente, la matriz \hat{P} que

diagonaliza ortogonalmente a (3.37) es

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

cuyas columnas son los eigenvectores (3.40) de (3.37).

Usando (3.44) y (3.38), los $\hat{A}_n = \sum_i r_{ni} \hat{a}_i$ se expresan en forma matricial como

$$\vec{\hat{A}} = \hat{P}^\dagger \vec{\hat{a}}, \quad \vec{\hat{a}} = \hat{P} \vec{\hat{A}}, \quad (3.46)$$

donde se usó la propiedad $\hat{P}^{-1} = \hat{P}^\dagger$, ya que \hat{P} es ortogonal.

Retomando la ecuación (3.43) y usando la ecuación (3.46) para pasar de la representación \hat{a}_i a la \hat{A}_i , obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left(-it \sum_j^3 \mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j\right) \hat{D}_{a1}(\alpha_1) \hat{D}_{a2}(\alpha_2) \hat{D}_{a3}(\alpha_3) |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{a3} \\ &= \exp\left(-it \sum_j^3 \mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j\right) \hat{D}_{A1}(\beta_1) \hat{D}_{A2}(\beta_2) \hat{D}_{A3}(\beta_3) |0\rangle_{A1} |0\rangle_{A2} |0\rangle_{A3}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Para un campo coherente se tiene

$$\begin{aligned} \{\exp(-i\omega\hat{n}t)\} |\alpha\rangle &= \{\exp(-i\omega\hat{n}t)\} \hat{D}_a(\alpha) |0\rangle = \hat{D}_a(\alpha \exp(-i\omega t)) |0\rangle \\ &= |\alpha \exp(-i\omega t)\rangle, \end{aligned} \quad (3.48)$$

manteniéndose el campo coherente girando en el espacio fase.

Usando la propiedad expresada en (3.48) y aplicando la exponencial en (3.47) reescribimos (3.47) como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{D}_{A1}(\beta_1 \exp(-i\mu_1 t)) \hat{D}_{A2}(\beta_2 \exp(-i\mu_2 t)) \hat{D}_{A3}(\beta_3 \exp(-i\mu_3 t)) \otimes \\ &\quad \otimes |0\rangle_{A1} |0\rangle_{A2} |0\rangle_{A3}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 r_{11} + \alpha_2 r_{12} + \alpha_3 r_{13}, \quad (3.50)$$

$$\beta_2 = \alpha_1 r_{21} + \alpha_2 r_{22} + \alpha_3 r_{23}, \quad (3.51)$$

$$\beta_3 = \alpha_1 r_{31} + \alpha_2 r_{32} + \alpha_3 r_{33}. \quad (3.52)$$

Ahora recurrimos una vez más a la ecuación (3.46) para pasar de la repre-

sentación \hat{A}_i a \hat{a}_i , y aplicando la transformación en (3.49) finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \hat{D}_{a1}(r_{11}\beta_1 \exp(-i\mu_1 t) + r_{21}\beta_2 \exp(-i\mu_2 t) + r_{31}\beta_3 \exp(-i\mu_3 t)) \otimes \\
&\quad \hat{D}_{a2}(r_{12}\beta_1 \exp(-i\mu_1 t) + r_{22}\beta_2 \exp(-i\mu_2 t) + r_{32}\beta_3 \exp(-i\mu_3 t)) \otimes \\
&\quad \hat{D}_{a3}(r_{13}\beta_1 \exp(-i\mu_1 t) + r_{23}\beta_2 \exp(-i\mu_2 t) + r_{33}\beta_3 \exp(-i\mu_3 t)) \otimes \\
&\quad |0\rangle_{a1}|0\rangle_{a2}|0\rangle_{a3} \\
&= |r_{11}\beta_1 \exp(-i\mu_1 t) + r_{21}\beta_2 \exp(-i\mu_2 t) + r_{31}\beta_3 \exp(-i\mu_3 t)\rangle_{a1} \otimes \\
&\quad |r_{12}\beta_1 \exp(-i\mu_1 t) + r_{22}\beta_2 \exp(-i\mu_2 t) + r_{32}\beta_3 \exp(-i\mu_3 t)\rangle_{a2} \otimes \\
&\quad |r_{13}\beta_1 \exp(-i\mu_1 t) + r_{23}\beta_2 \exp(-i\mu_2 t) + r_{33}\beta_3 \exp(-i\mu_3 t)\rangle_{a3}, \quad (3.53)
\end{aligned}$$

y los campos se mantienen coherentes con amplitud variable.

3.4. INTERACCIÓN CAVIDAD-RESERVORIO

Como se vio anteriormente, dos y tres campos con estados iniciales coherentes en todos ellos evolucionan manteniendo su carácter coherente, con sus amplitudes variando periódicamente en función del tiempo. Esto puede generalizarse a un número arbitrario de campos.

La solución a la ecuación de Schrödinger sujeta al hamiltoniano (3.21) con todos los campos inicialmente en estados coherentes, $|\psi(0)\rangle = |\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle\dots|\alpha_n\rangle$, es simplemente el producto directo de estados coherentes

$$|\psi(t)\rangle = |\vec{r}_1 \cdot \vec{\beta}(t)\rangle_1 |\vec{r}_2 \cdot \vec{\beta}(t)\rangle_2 \dots |\vec{r}_n \cdot \vec{\beta}(t)\rangle_n, \quad (3.54)$$

con $\vec{\beta}(t) = (\vec{r}_1 \cdot \vec{\alpha} \exp(-i\mu_1 t), \vec{r}_2 \cdot \vec{\alpha} \exp(-i\mu_2 t), \dots, \vec{r}_n \cdot \vec{\alpha} \exp(-i\mu_n t))$ y el vector $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ está compuesto por las amplitudes coherentes de la función de onda inicial.

Ahora aplicaremos el resultado anterior para describir el sistema cavidad-reservorio, con el estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_c\rangle|0_1\rangle|0_2\rangle\dots|0_n\rangle \quad (3.55)$$

donde α es la amplitud de campo coherente, el subíndice c se refiere al campo

de cavidad y los subíndices 1, 2, ...,n se refieren a los campos que forman el reservorio. Dado que el estado de vacío es un estado coherente de amplitud cero, cuando aplicamos el operador de evolución al estado inicial dado en la expresión (3.55) obtenemos un vector de estado de la forma dada en la expresión (3.54), por lo que el campo de la cavidad y los campos del reservorio mantienen su carácter coherente con sus amplitudes oscilando periódicamente.

Retomaremos el caso de tres campos como bloque básico para describir el sistema cavidad-reservorio. La figura 3.1 ilustra la evolución para el campo $|1_c\rangle$ en un sistema de tres campos con estados iniciales

$$|\psi(0)\rangle = |1_c\rangle|0_1\rangle|0_2\rangle, \quad (3.56)$$

con $|1_c\rangle$ siendo un campo coherente de amplitud uno. Aun cuando la gráfica en la figura 3.1 está hecha para un campo de amplitud uno, puede ser representativa para cualquier amplitud si la tomamos normalizada. En nuestro caso el vector $|1_c\rangle$ corresponde al campo de cavidad y $|0_1\rangle|0_2\rangle$ forman el reservorio. De la figura observamos que inicialmente toda la energía está en la cavidad; debido a la interacción parte de esa energía pasa al reservorio y la cavidad alcanza un mínimo. Si aumentamos el número de campos que forman el reservorio (estos campos tienen estados iniciales de vacío) el mínimo de la cavidad se aproximará a cero (estado de vacío). Cuando el número de campos que forman el reservorio sea infinito, el campo de la cavidad llegará al vacío.

Este es el comportamiento que observamos en el capítulo 2 , pero aquí no hemos usado ecuaciones maestras ni aproximación Born-Markov; hemos llegado a la misma conclusión sin recurrir a tales aproximaciones usando un enfoque más simple. Además en nuestro modelo, una vez que la cavidad alcanza su estado de vacío, el reservorio comienza a regresarle energía hasta recuperar el estado inicial, tras lo cual el proceso se repite.

3.5. CONCLUSIONES

Hemos mostrado que un sistema de n osciladores armónicos interactuando, inicialmente en estados coherentes, permanecen coherentes durante la interacción. En particular, si consideramos un campo (oscilador armónico) interac-

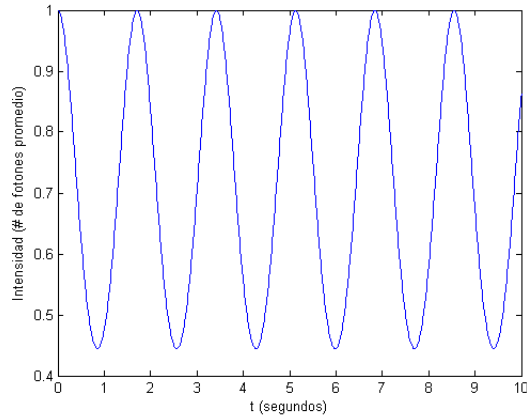


Figura 3.1: Número de fotones para un campo coherente ($\omega_1 = 3$, 1 fotón inicial) en interacción con otros dos campos también coherentes ($\omega_2 = \omega_3 = 2,5$, estos campos empiezan con cero fotones). Los acoplamientos son $\lambda_{12} = \lambda_{23} = 0,2$.

tuando con muchos campos (osciladores armónicos), y además consideramos solamente $\lambda_{1j} \neq 0$ y $\lambda_{j1} \neq 0$ para $j > 2$, y todas las demás λ_{ij} ceros, podemos modelar la interacción no markoviana sistema-reservorio. Si consideramos al sistema (campo) en estado inicial coherente y todos los campos que forman el ambiente en estado de vacío (estados coherentes con amplitud cero), al evolucionar, la amplitud del campo coherente disminuirá, cuando un fotón pase a otro modo, manteniendo su naturaleza coherente. Si el número de modos que forman el ambiente es muy grande, el evento de un fotón regresando al sistema es poco probable. El siguiente evento probable es precisamente la pérdida de otro fotón por el sistema, etc. hasta que el sistema llega a un estado cercano al vacío. En el caso en que el número de modos interactuando con el sistema es infinito, el vacío sería el estado final del sistema. En otras palabras, el sistema total sigue la transición

$$|\alpha\rangle_{a1}|0\rangle_{a2}\dots|0\rangle_{an} \rightarrow |\delta_1\rangle_{a1}|\delta_2\rangle_{a2}\dots|\delta_n\rangle_{an}, \quad (3.57)$$

con las amplitudes coherentes $\delta_k \rightarrow 0$, conforme $n \rightarrow \infty$.

En conclusión, hemos obtenido una solución algebraica completa al problema de n osciladores interactuando, sin usar las aproximaciones Born-Markov.

Capítulo 4

REALIZACIÓN ÓPTICA DE UN DIVISOR DE HAZ CUÁNTICO

Los modelos de sistemas en mecánica cuántica con óptica clásica es un tópico que ha generado interés recientemente. A lo largo de estas líneas Man'ko et al. propusieron realizar computación cuántica usando sistemas “tipo cuánticos” [14], y Crasser et al. [15] resaltaron las similitudes entre la mecánica cuántica y la óptica de Fresnel en el espacio fase. Siguiendo estas aplicaciones entrecruzadas, nos gustaría mostrar como un divisor de haz cuántico puede ser modelado en óptica clásica. La posibilidad de generar formas específicas (ingeniería de estados) del campo electromagnético clásico es también estudiada. Para describir los estados del campo electromagnético usaremos el método del operador de evolución, del cual hemos expuesto en el capítulo 3.

4.1. DIVISOR DE HAZ CUÁNTICO

Un divisor de haz cuántico es un componente óptico que combina dos modos de campo electromagnético en otros modos propagándose. La figura 4.1 muestra el arreglo que produce este efecto para un divisor 50:50. Dos campos \hat{a}_x y \hat{a}_y entran al divisor, y dos campos salen de él, correspondiendo a una combinación de los campos que entraron. En óptica cuántica el divisor de haz es modelado por la interacción entre dos campos [11] con el Hamiltoniano dado

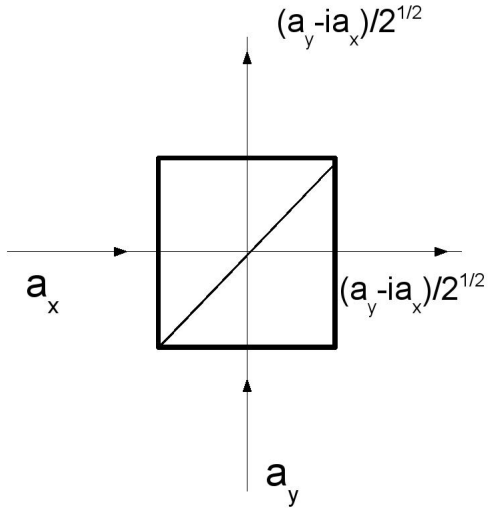


Figura 4.1: Divisor de haz

por

$$\hat{H} = \omega_x \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \omega_y \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + \chi (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger), \quad (4.1)$$

donde ω_x, ω_y son las frecuencias, χ es la constante de interacción y $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$ ($j = x, y$) los operadores de creación y aniquilación de fotones.

Si consideramos $\omega_x = \omega_y$, usando la transformación

$$\hat{\Gamma} = \exp [-i\omega_x (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y) t], \quad (4.2)$$

en (4.1) pasamos al marco de interacción

$$\hat{H}_{bs} = \hat{\Gamma} \hat{H} \hat{\Gamma}^{-1} = \chi (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger), \quad (4.3)$$

ahora podemos obtener el operador de evolución del divisor de haz [16]

$$\hat{B} = \exp [-i\chi t (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger)]. \quad (4.4)$$

Los campos de salida \hat{c} , \hat{d} en el divisor de haz están dados por

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \hat{B}\hat{a}_x\hat{B}^\dagger = \cos(\chi t)\hat{a}_x + i\text{sen}(\chi t)\hat{a}_y, \\ \hat{d} &= \hat{B}\hat{a}_y\hat{B}^\dagger = \cos(\chi t)\hat{a}_y + i\text{sen}(\chi t)\hat{a}_x,\end{aligned}\tag{4.5}$$

tal que $\cos(\chi t)$ y $\text{sen}(\chi t)$ pueden relacionarse directamente con los coeficientes de reflexión (r) y transmisión (t). Una de las propiedades interesantes del divisor de haz cuántico es que si solo hay un haz entrando por uno de los brazos del divisor, entonces siempre debemos considerar un campo de vacío entrando por el otro brazo. Es bien sabido que este sistema produce enredamiento [17, 18].

Por ejemplo, si consideramos el divisor de haz 50:50, y entonces, si establecemos $\chi t = \pi/4$ (ver figura 4) y en cada brazo del divisor introducimos el primer estado de número excitado, representado como $|\psi_I\rangle = |1\rangle_x |1\rangle_y$, como el estado inicial, obtenemos como estado final

$$|\psi_F\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|2\rangle_x|0\rangle_y + |0\rangle_x|2\rangle_y).\tag{4.6}$$

Este es un estado enredado que indica que ambos fotones viajan juntos.

4.2. IMPLEMENTACIÓN ÓPTICA DEL DIVISOR DE HAZ CUÁNTICO

En óptica clásica hay sistemas que exhiben el comportamiento denominado “guía de onda” para haces ópticos y que puede ser descrito por la ecuación paraxial de onda

$$2ik_0\frac{\partial E}{\partial z} = \nabla_{\perp}^2 E + k^2(x, y)E,\tag{4.7}$$

la cual tiene una forma análoga a la ecuación de Schrödinger, siendo $k_0 = 2\pi n_0/\lambda$ el número de onda para el haz de luz propagándose, λ es la longitud de onda y n_0 es el índice de refracción homogéneo. La función $k^2(x, y)$ describe un medio no homogéneo responsable de ser la guía de onda para el campo eléctrico E . Tal medio es, por ejemplo, una fibra óptica con gradiente de índice.

Recientemente [19] se ha propuesto otra forma de realizar experimental-

mente esta función no homogénea $k^2(x, y)$ mediante la propagación de dos haces en un medio Kerr no lineal. Uno de estos, el “haz prueba”, induce un índice de refracción de la forma $n = n_0 + n_2 I_p$, con n_0 y n_2 los índices de refracción lineal y no lineal del medio e I_p la intensidad del haz prueba; el subíndice p denota el “haz prueba”. El campo del “haz señal” E , encuentra un índice de refracción inducido por el haz prueba. En un sentido estricto, este sistema debe ser descrito por un par de ecuaciones de Schrödinger acopladas, pero usualmente se asume que la intensidad del haz señal es muy débil comparada con la del haz prueba tal que el último no es afectado por la presencia del primero y el sistema puede ser descrito por la ecuación (4.7).

Ahora asumiendo que el haz prueba tiene un perfil gaussiano,

$$E_p = E_{p0} \exp \left[-r^2 / (2\omega_p^2) \right]$$

y que el área de su mancha es muy grande comparada con la del haz señal (figura 4.2), podemos expandir en serie de potencias la expresión para el índice de refracción, tomado hasta primer orden, dando

$$n \approx n_0 + n_2 |E_{p0}|^2 - (n_2 |E_{p0}|^2 / \omega_p^2) r^2. \quad (4.8)$$

Si el haz de prueba es elíptico (astigmático) y ligeramente inclinado con respecto al marco de referencia del haz señal (figura 4.3) [19], en la expresión (4.8) el término r^2/ω_p^2 será modificado por la existencia de los ejes mayor y menor de la mancha elíptica y aparecerá un término de la forma χxy , con el parámetro χ dependiendo del ángulo de rotación θ y la longitud de los ejes mayor y menor del haz elíptico. El haz elíptico inclinado puede ser expresado en términos de las coordenadas del marco de referencia del haz señal por la transformación de rotación

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde los subíndices s y p denotan señal y prueba.

En forma general, la función no homogénea será de la forma

$$k^2(x, y) = k_0^2 - (\alpha_x x^2 + \alpha_y y^2) + \chi xy, \quad (4.10)$$

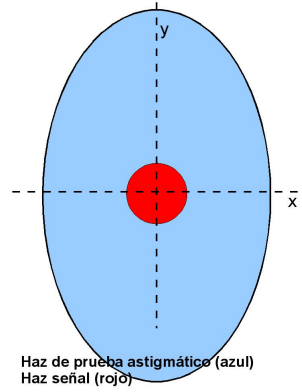


Figura 4.2: Vista transversal de los haces

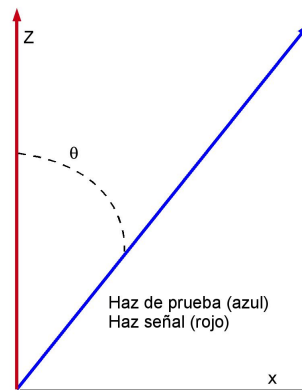


Figura 4.3: Dos haces propagándose con un pequeño ángulo entre ellos; el haz de prueba generará la guía de onda para el haz señal.

donde las longitudes de los ejes mayor y menor del haz elíptico y el ángulo de inclinación pueden ser elegidos tal que $\chi \ll \alpha_x, \alpha_y$.

Insertando la ecuación (4.10) en (4.7) tenemos

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\nabla_{\perp}^2}{2k_0} E + \left[\frac{k_0}{2} - \frac{1}{2} (k_0 \alpha_x^2 x^2 + k_0 \alpha_y^2 y^2) + \chi xy \right] E, \quad (4.11)$$

con $k_0 \alpha_q^2, q = x, y$ los parámetros relacionados a la no homogeneidad del medio responsable por el gradiente de índice [19].

Ahora definimos los operadores de aniquilación (\hat{a}_q) y creación (\hat{a}_q^\dagger) de fotones [20]

$$\hat{a}_q = \sqrt{\frac{k_0 \alpha_q}{2}} q + \frac{1}{\sqrt{2k_0 \alpha_q}} \frac{d}{dq}, \quad (4.12)$$

$$\hat{a}_q^\dagger = \sqrt{\frac{k_0 \alpha_q}{2}} q - \frac{1}{\sqrt{2k_0 \alpha_q}} \frac{d}{dq}, \quad (4.13)$$

que al actuar sobre una función

$$|m\rangle = u_m(q) = \left(\frac{k_0 \alpha_q}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} H_m \left(\sqrt{k_0 \alpha_q} q \right) \exp(-k_0 \alpha_q q^2 / 2), \quad (4.14)$$

siendo $H_m(q)$ el polinomio de Hermite, obtenemos

$$\hat{a}_q u_m(q) = \sqrt{m} u_{m-1}(q), \quad (4.15)$$

$$\hat{a}_q^\dagger u_m(q) = \sqrt{m+1} u_{m+1}(q), \quad (4.16)$$

con $[\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger] = 1, q = x, y$.

Usando lo anterior podemos reescribir la ecuación (4.11) como

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = \left[\alpha_x \left(\hat{n}_x + \frac{1}{2} \right) + \alpha_y \left(\hat{n}_y + \frac{1}{2} \right) + \chi xy + \frac{k_0}{2} \right] E, \quad (4.17)$$

con $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ para $j=x,y$. Definiendo

$$\psi = (\exp[-iz(\alpha_x + \alpha_y + k_0)/2]) E, \quad (4.18)$$

transformamos la ecuación (4.17) en

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = [\alpha_x \hat{n}_x + \alpha_y \hat{n}_y + \phi (\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger) (\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)] \psi, \quad (4.19)$$

con $\phi = \chi/2k_0\sqrt{\alpha_x\alpha_y}$.

La ecuación (4.19) ha sido ampliamente estudiada en óptica cuántica. Usando la aproximación de onda rotante (apéndice 2 y [7]) podemos despreciar la contribución de los términos $\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger$ y $\hat{a}_x \hat{a}_y$ para obtener

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = [\alpha_x \hat{n}_x + \alpha_y \hat{n}_y + \phi (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger)] \psi. \quad (4.20)$$

Esta ecuación es equivalente a la interacción campo-campo [12] en óptica cuántica, tal como la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano dado por (3.3)

$$\hat{H} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger).$$

Hacemos una última transformación

$$\varphi = \exp \{-iz\alpha_x (\hat{n}_x + \hat{n}_y)\}, \quad (4.21)$$

para obtener

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = [\Delta \hat{n}_y + \phi (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger)] \varphi = \hat{H} \varphi, \quad (4.22)$$

con $\Delta = \alpha_y - \alpha_x$.

Retomaremos los operadores del modo normal [12] dados anteriormente por (3.5)

$$\hat{A}_1 = \delta \hat{a}_x + \gamma \hat{a}_y, \quad \hat{A}_2 = \gamma \hat{a}_x - \delta \hat{a}_y, \quad (4.23)$$

con

$$\delta = \frac{2\phi}{\sqrt{2\Omega(\Omega - \Delta)}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\Omega - \Delta}{2\Omega}}, \quad \delta^2 + \gamma^2 = 1, \quad (4.24)$$

con $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + 4\phi^2}$ la frecuencia de Rabi.

Usando lo expuesto en el capítulo 3, sección 3.1 escribimos la solución para (4.22) usando el operador de evolución y los operadores del modo normal (recordemos que $[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = [\hat{A}_1, \hat{A}_2^\dagger] = 0$)

$$\hat{U}(z) = \exp(-i\hat{H}z), \quad (4.25)$$

$$\hat{H} = \mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2, \quad (4.26)$$

$$\mu_{1,2} = (\Delta \pm \Omega) / 2. \quad (4.27)$$

Eligiendo la fase convenientemente, puede expresarse el estado base en la nueva representación como [12]

$$u_0(x) u_0(y) = U_0^1(x, y) U_0^2(x, y). \quad (4.28)$$

4.3. FUNCIÓN INICIAL $u_1(x) u_1(y)$

Una vez tenemos el operador de evolución para el sistema de dos campos solo tenemos que aplicarlo a la condición inicial para saber el estado del sistema en cualquier instante posterior. A continuación examinaremos algunos ejemplos de estados que pueden generarse usando el modelo del divisor de haz cuántico. Si consideramos el estado inicial

$$\varphi(z=0; x, y) = u_1(x) u_1(y) = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger u_0(x) u_0(y), \quad (4.29)$$

la función propagada es

$$\varphi(z; x, y) = \left[\exp -iz \left(\mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \right) \right] \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger u_0(x) u_0(y). \quad (4.30)$$

Escribiendo los operadores $\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y^\dagger$ en términos de los $\hat{A}_1^\dagger, \hat{A}_2^\dagger$ (4.23), obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(z; x, y) = & \left[\exp \left(-iz\mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \right) \right] \left[\exp \left(-iz\mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \right) \right] \left(\delta \hat{A}_1^\dagger + \gamma \hat{A}_2^\dagger \right) \otimes \\ & \left(\gamma \hat{A}_1^\dagger - \delta \hat{A}_2^\dagger \right) U_0^1(x, y) U_0^2(x, y). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ahora usamos las propiedades

$$\left[\exp \left(-iz\mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \right) \right] \hat{A}_j^\dagger \left[\exp \left(iz\mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \right) \right] = \hat{A}_j^\dagger \exp(-iz\mu_j), \quad (4.32)$$

$$\left[\exp \left(-iz\mu_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \right) \right] U_0^j(x, y) = U_0^j(x, y), \quad (4.33)$$

para obtener

$$\begin{aligned} \varphi(z; x, y) = & \left(\delta \hat{A}_1^\dagger [\exp(-iz\mu_1)] + \gamma \hat{A}_2^\dagger [\exp(-iz\mu_2)] \right) \otimes \\ & \left(\gamma \hat{A}_1^\dagger [\exp(-iz\mu_1)] - \delta \hat{A}_2^\dagger [\exp(-iz\mu_2)] \right) \otimes \\ & U_0^1(x, y) U_0^2(x, y), \end{aligned} \quad (4.34)$$

que en la representación de los \hat{a}_x, \hat{a}_y se escribe como

$$\begin{aligned} \varphi(z; x, y) = & [\eta(z) \beta(z) \hat{a}_x^{\dagger 2} + \varepsilon(z) \beta(z) \hat{a}_y^{\dagger 2}] \\ & + \beta^2(z) + \varepsilon(z) \eta(z) \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger [u_0(x) u_0(y)], \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\eta(z) = \delta^2 [\exp(-iz\mu_1)] + \gamma^2 [\exp(-iz\mu_2)], \quad (4.36)$$

$$\beta(z) = \gamma \delta (\exp(-iz\mu_1) - \exp(-iz\mu_2)), \quad (4.37)$$

$$\varepsilon(z) = \delta^2 \exp(-iz\mu_2) + \gamma^2 \exp(-iz\mu_1). \quad (4.38)$$

El término que multiplica $\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger$ en (4.35) puede ser reescrito como

$$\beta^2(z) + \varepsilon(z) \eta(z) = [\exp(-i\Delta z)] \left[(\gamma^2 - \delta^2)^2 + 4\gamma^2 \delta^2 \cos(\Omega z) \right], \quad (4.39)$$

el cual oscila, cruzando cero periódicamente. Fijándonos en el campo propagado en uno de esos ceros ($\beta^2(z_0) + \varepsilon(z_0) \eta(z_0) = 0$), obtenemos el estado,

$$\varphi(z_0; x, y) = \eta(z_0) \beta(z_0) u_2(x) u_0(y) + \varepsilon(z_0) \beta(z_0) u_0(x) u_2(y), \quad (4.40)$$

que es semejante a la expresión (4.6)

$$|\psi_F\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_x |0\rangle_y + |0\rangle_x |2\rangle_y).$$

Resumiendo lo anterior, hemos partido de la ecuación paraxial de onda para un medio con índice de refracción no homogéneo en el que un haz de prueba muy intenso induce la no homogéneidad que produce el efecto de guía de onda para el haz señal de baja intensidad; a continuación definiremos los operadores de creación y aniquilación para cuantizar la energía del campo, con lo que obtenemos la ecuación de Schrödinger para el sistema de dos campos, y este último es usado para modelar el divisor de haz, con el que se generan

estados enredados como los mostrados en las expresiones (4.6) y (4.40). Lo anterior ilustra una idea muy interesante, que consiste en aprovechar un fenómeno bien conocido en óptica clásica (propagación de haces) para describir un fenómeno en óptica cuántica (generación de estados enredados). En las dos secciones siguientes examinaremos como generar otras formas del campo electromagnético ajustando el estado inicial.

4.4. ESTADOS COHERENTES SU(2)

Es posible generar superposiciones determinadas de las funciones dadas en (4.14). Como ejemplo de esto, si tomamos como condición inicial en $z = 0$

$$\varphi(z = 0; x, y) = u_m(x) u_0(y) = \frac{\hat{a}_x^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} u_0(x) u_0(y), \quad (4.41)$$

después de aplicar el operador de evolución $\exp\left(-iz\left[\mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2\right]\right)$ obtenemos

$$\varphi(z; x, y) = \frac{(\eta(z) \hat{a}_x^\dagger + \beta(z) \hat{a}_y^\dagger)}{\sqrt{m!}} u_0(x) u_0(y), \quad (4.42)$$

que puede ser reescrito como el estado coherente SU(2) [21, 22]

$$\varphi(z; x, y) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n}^{1/2} \eta^{m-n} (z)^n \beta(z) u_{m-n}(x) u_n(y). \quad (4.43)$$

Ahora una breve explicación sobre el adjetivo SU(2). Para un sistema de dos campos el operador desplazamiento [22]

$$\hat{D}(\theta) = \exp\left(\theta \hat{S}_+ - \theta^* \hat{S}_-\right), \quad (4.44)$$

tiene factorización de la forma

$$\begin{aligned} \hat{D}(\theta) &= \exp\left(\theta \hat{S}_+ - \theta^* \hat{S}_-\right) \\ &= \left[\exp\left(\varepsilon \hat{S}_+\right)\right] \left[\exp\left(\varphi \hat{S}_z\right)\right] \left[\exp\left(\varepsilon^* \hat{S}_-\right)\right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}\right), \quad \hat{S}_+ = \hat{a}^\dagger \hat{b}, \quad \hat{S}_- = \hat{b}^\dagger \hat{a}, \quad (4.46)$$

donde los operadores $\hat{S}_z, \hat{S}_+, \hat{S}_-$ son generadores de un algebra SU(2), las cantidades ε, φ son funciones de la amplitud coherente θ . Por lo anterior, en la literatura a los estados dados por la expresión (4.43) se les denomina estados coherentes SU(2).

4.5. FUNCIÓN GAUSSIANA

Vamos a considerar que en $z = 0$ tenemos una función gaussiana desplazada como función de x y una función $u_0(y)$,

$$\begin{aligned} \varphi(z=0; x, y) &= \left(\frac{k_0 \alpha_x}{\pi}\right)^{1/4} \left(\exp\left[-\left(\alpha - x\sqrt{k_0 \alpha_x/2}\right)^2\right]\right) u_0(y) \\ &= [\exp(-\alpha^2/2)] \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} u_n(x) u_0(y). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Usando el operador de desplazamiento de Glauber [5], esta función puede ser reescrita como

$$\varphi(z=0; x, y) = \hat{D}_{a_x}(\alpha) u_0(x) u_0(y), \quad (4.48)$$

$$\hat{D}_{a_x}(\alpha) = \exp[\alpha(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x)]. \quad (4.49)$$

Después de aplicar el operador de evolución a (4.48) se tiene el campo propagado como

$$\varphi(z; x, y) = \hat{D}_{a_x}(\alpha\eta(z)) u_0(x) \hat{D}_{a_y}(\alpha\beta(z)) u_0(y). \quad (4.50)$$

El campo electromagnético serán gaussianas desplazadas en las direcciones x y y , con sus desplazamientos oscilando periódicamente.

4.6. INTERACCIÓN DE TRES CAMPOS CON UN ÁTOMO

En las secciones anteriores hemos estudiado modelos que describen la interacción entre campos electromagnéticos. Como un complemento a ese es-

tudio en esta sección veremos un ejemplo de como lograr la interacción entre campos usando un átomo. Vamos a considerar un sistema formado por tres campos y un átomo de dos niveles; los campos interactúan con el átomo, pero no interactúan explícitamente entre ellos. Este sistema es descrito por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^3 \omega_j \hat{n}_j + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_{j=1}^3 \lambda_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}_j \hat{\sigma}_+ \right). \quad (4.51)$$

Revisaremos bajo que condiciones puede obtenerse una interacción explícita entre los campos.

Una transformación de rotación con operadores tiene la expansión en serie:

$$\left(\exp \left[\varepsilon \hat{A} \right] \right) \hat{B} \left(\exp \left[-\varepsilon \hat{A} \right] \right) = \hat{B} + \varepsilon \left[\hat{A}, \hat{B} \right] + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] + \dots, \quad (4.52)$$

siendo \hat{A}, \hat{B} operadores hermitianos y ε el parámetro de rotación.

Si se cumple $\varepsilon \ll 1$ podemos hacer una aproximación a primer orden en la expresión (4.52) y escribir

$$\hat{V} \hat{B} \hat{V}^{-1} \approx \hat{B} + \varepsilon \left[\hat{A}, \hat{B} \right], \quad \hat{V} = \left(\exp \left[\varepsilon \hat{A} \right] \right). \quad (4.53)$$

Definimos los operadores

$$\hat{A}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{a}_j \hat{\sigma}_+, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.54)$$

$$\varepsilon_j = -\frac{\lambda_j}{\omega_0 - \omega_j}, \quad |\varepsilon_j| \ll 1, \quad (4.55)$$

tal que aplicamos tres transformaciones de “pequeñas rotaciones” a la expresión (4.51) con los operadores definidos en (4.54) obteniendo

$$\begin{aligned} \hat{V}_3 \hat{V}_2 \hat{V}_1 \hat{H} \hat{V}_1^{-1} \hat{V}_2^{-1} \hat{V}_3^{-1} &= \hat{H}_{ef} \approx \sum_{j=1}^3 \omega_j \hat{n}_j + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z - 2 \sum_{j=1}^3 \lambda_j \varepsilon_j \hat{n}_j \hat{\sigma}_z - 2 \sum_{j=1}^3 \lambda_j \varepsilon_j \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \\ &\quad - (\lambda_1 \varepsilon_2 + \lambda_2 \varepsilon_1) \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \hat{\sigma}_z \\ &\quad - (\lambda_1 \varepsilon_3 + \lambda_3 \varepsilon_1) \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_1 \hat{a}_3^\dagger \right) \hat{\sigma}_z \\ &\quad - (\lambda_2 \varepsilon_3 + \lambda_3 \varepsilon_2) \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger \right) \hat{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (4.56)$$

El término $\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z - 2\sum_{j=1}^3\lambda_j\varepsilon_j\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$ conmuta con todos los demás en la expresión anterior, tal que podemos removerlo y escribir

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ef} \approx & \sum_{j=1}^3\omega_j\hat{n}_j - 2\sum_{j=1}^3\lambda_j\varepsilon_j\hat{n}_j\hat{\sigma}_z \\ & - (\lambda_1\varepsilon_2 + \lambda_2\varepsilon_2) \left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger \right) \hat{\sigma}_z \\ & - (\lambda_1\varepsilon_3 + \lambda_3\varepsilon_1) \left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_3 + \hat{a}_1\hat{a}_3^\dagger \right) \hat{\sigma}_z \\ & - (\lambda_2\varepsilon_3 + \lambda_3\varepsilon_2) \left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3 + \hat{a}_2\hat{a}_3^\dagger \right) \hat{\sigma}_z.\end{aligned}\quad (4.57)$$

Esta última ecuación, resultado de aplicar el límite dispersivo (el átomo aun interactúa, pero aparenta no intercambiar energía con los campos) (4.55) con aproximación de pequeñas rotaciones (4.53) a la expresión (4.51) nos ha conducido a un sistema en el que ya no hay interacción entre los campos y el átomo, pero ahora los campos interactúan explícitamente entre ellos. En realidad, el átomo sigue interactuando con los campos, como un mediador entre ellos para intercambiar energía, pero dada las aproximaciones realizadas, desde un punto de vista global del sistema, el átomo está en un estado energético (casi) constante, pues la polarización atómica está cambiando muy rápido (esto puede lograrse si la condición inicial es una superposición de estados atómicos) y la dinámica efectiva ahora ocurre entre los campos. El operador de energía atómica $\hat{\sigma}_z$ es el recordatorio de que el átomo sigue presente, pero dado que su estado no cambia, el efecto de aplicar $\hat{\sigma}_z$ a la función de onda es igual que multiplicar al vector de estado por la energía del átomo, la cual es constante. De esto, podemos suponer que toda la dinámica ocurre entre los campos y llegamos a un modelo de interacción entre tres campos como el que vimos en el capítulo 3.

4.7. CONCLUSIONES

Hemos mostrado como modelar un divisor de haz cuántico por propagación de campos electromagnéticos. Formas específicas de campos electromagnéticos pueden ser generadas usando este modelo; en particular hemos mostrado como funciones de estados coherentes SU(2) pueden ser realizadas.

CONCLUSIONES FINALES Y PROBLEMAS ABIERTOS

Hemos mostrado que un sistema de n osciladores armónicos interactuando, inicialmente en estados coherentes, permanecen coherentes durante la interacción. Como caso particular, si consideramos un campo (oscilador armónico) interactuando con muchos campos (osciladores armónicos), y además consideramos solamente $\lambda_{1j} \neq 0$ y $\lambda_{j1} \neq 0$ para $j > 2$, y todas las demás λ_{ij} ceros, podemos modelar la interacción no markoviana sistema-reservorio. Si consideramos al sistema (campo) en estado inicial coherente y todos los campos que forman el ambiente en estado de vacío (estados coherentes con amplitud cero), al evolucionar, la amplitud del campo coherente disminuirá, cuando un fotón pase a otro modo, manteniendo su naturaleza coherente. Si el número de modos que forman el ambiente es muy grande, un evento de el fotón regresando al sistema es poco probable. Por lo tanto el siguiente evento probable es precisamente la pérdida de otro fotón por el sistema, etc. hasta llegar a un estado cercano al vacío. En el caso en que el número de modos interactuando con el sistema es infinito, el vacío sería el estado final del sistema. En otras palabras, el sistema total sigue la transición

$$|\alpha\rangle_{a1}|0\rangle_{a2}\dots|0\rangle_{an} \rightarrow |\delta_1\rangle_{a1}|\delta_2\rangle_{a2}\dots|\delta_n\rangle_{an}, \quad (4.58)$$

con las amplitudes coherentes $\delta_k \rightarrow 0$, conforme $n \rightarrow \infty$.

Hemos obtenido una solución algebraica completa al problema de n osciladores interactuando, sin usar las aproximaciones Born-Markov.

Hemos mostrado como modelar un divisor de haz cuántico usando propagación de campos electromagnéticos. Formas específicas de campos electromagnéticos como los estados coherentes SU(2) pueden ser generadas usando

este modelo. Este modelo nos permitiría usar un fenómeno de “óptica clásica” (propagación de campos) para observar un efecto “tipo cuántico” (enredamiento entre dos campos), constituyendo un ejemplo de como la óptica clásica puede ayudar a observar experimentalmente resultados de la mecánica (óptica) cuántica.

Respecto a los problemas que pueden abordarse partiendo de los resultados de esta tesis, tenemos los siguientes:

1.- Existen otras interacciones entre campos cuantizados que son descritas por Hamiltonianos de la forma

$$\hat{H} = \sum_j \omega_j \hat{n}_j + \sum_{j \neq i} \sum_i \lambda_{ij} \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_i \hat{a}_j \right),$$

cuya solución tal vez pueda ser expresada con el operador de evolución tal como se expuso en el capítulo 3.

2.- Los operadores de energía atómica ($\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-$) tienen propiedades matemáticas similares a los operadores de campo $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{n}$ tal que interacciones entre átomos descritas por Hamiltonianos como

$$\hat{H} = \sum_j \omega_j \hat{\sigma}_{zj} + \sum_{j \neq i} \sum_i \lambda_{ij} \left(\hat{\sigma}_i^+ \hat{a}_j^- + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}_j^+ \right),$$

podrían usar las ideas aquí expuestas para reescribir el Hamiltoniano en término de operadores que conmuten.

3.- Otra interrogante abierta es la posibilidad de obtener estados GHZ [23], los cuales son estados de máximo enredamiento para sistemas de tres o más subsistemas. Como ejemplo, un estado GHZ para un sistema de tres campos es de la forma $|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3$, esto es, una combinación lineal de todos los subsistemas en estado base más todos los subsistemas en estado excitado.

APÉNDICE 1: ECUACIÓN DE HEISENBERG

Haremos una breve revisión de la ecuación de Heisenberg, la cual es una formulación alternativa a la ecuación de Schrödinger para describir la evolución de sistemas físicos en mecánica cuántica. La información obtenida con ambas ecuaciones es equivalente, la diferencia entre ellas radica en la forma en que exhiben esta información, tal como veremos más adelante.

Sea el elemento matricial

$$f_{mn} = \langle m | \hat{f} | n \rangle, \quad (4.59)$$

correspondiente a la observable (operador hermitiano) \hat{f} , siendo $|m\rangle$ y $|n\rangle$ estados del sistema bajo estudio.

La ecuación de Schrödinger para un estado genérico se escribe como

$$i\hbar \frac{d|n\rangle}{dt} = \hat{H}|n\rangle, \quad (4.60)$$

y su adjunta (para otro estado $\langle m|$) es

$$i\hbar \frac{d\langle m|}{dt} = \langle m| \hat{H}. \quad (4.61)$$

La evolución del elemento matricial f_{mn} está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_{mn} &= \frac{d}{dt} \langle m | \hat{f} | n \rangle \\ &= \langle m | \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} | n \rangle + \frac{d\langle m |}{dt} \hat{f} | n \rangle + \langle m | \hat{f} \frac{d|n\rangle}{dt}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.60) y (4.61) en (4.62) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\langle m|\hat{f}|n\rangle = \langle m|\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}|n\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle m|[\hat{f}, \hat{H}]|n\rangle. \quad (4.63)$$

Usando la hipótesis de que el elemento matricial f_{mn} evoluciona debido a que el operador \hat{f} evoluciona en el espacio de Hilbert (espacio de funciones de cuadrado integrable), y entonces $|m\rangle$ y $|n\rangle$ son constantes, reescribimos (4.63) como

$$i\hbar\langle m|\frac{d\hat{f}}{dt}|n\rangle = \langle m|\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}|n\rangle + \langle m|[\hat{f}, \hat{H}]|n\rangle. \quad (4.64)$$

Multiplicando la ecuación (4.64) a la izquierda por $\langle n|$ y a la derecha por $|m\rangle$ y sumando

$$\begin{aligned} i\hbar\sum_m\langle m|\frac{d\hat{f}}{dt}\sum_n|n\rangle\langle n| &= i\hbar\sum_m\langle m|\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\sum_n|n\rangle\langle n| + \\ &+ \sum_m\langle m|\langle m|[\hat{f}, \hat{H}]\sum_n|n\rangle\langle n|, \end{aligned} \quad (4.65)$$

los estados del sistema cumplen la relación de completitud $\sum_m|m\rangle\langle m| = 1$, por lo que finalmente obtenemos

$$i\hbar\frac{d\hat{f}}{dt} = i\hbar\frac{\partial\hat{f}}{\partial t} + [\hat{f}, \hat{H}], \quad (4.66)$$

conocida como ecuación de Heisenberg.

Si \hat{f} no depende explícitamente del tiempo la ecuación (4.66) se reduce a la conocida expresión

$$i\hbar\frac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{f}, \hat{H}]. \quad (4.67)$$

De lo anterior notamos que la ecuación de Heisenberg es la ecuación de movimiento para la observable \hat{f} . El cálculo de valores esperados conduce a los mismos resultados obtenidos usando la solución a la ecuación de Schrödinger.

APÉNDICE 2: APROXIMACIÓN DE ONDA ROTANTE

Consideremos el sistema de dos campos en interacción, descritos por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \omega \hat{n}_a + \omega \hat{n}_b + \lambda (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}); \quad (4.68)$$

por simplicidad consideramos que los campos tienen frecuencias iguales.

Usando lo expuesto en el apéndice 1, las ecuaciones de movimiento para \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{b} , \hat{b}^\dagger son

$$i \frac{d\hat{a}}{dt} = -\omega \hat{a} + \lambda (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad (4.69)$$

$$i \frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = \omega \hat{a}^\dagger + \lambda (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad (4.70)$$

$$i \frac{d\hat{b}}{dt} = -\omega \hat{b} + \lambda (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (4.71)$$

$$i \frac{d\hat{b}^\dagger}{dt} = \omega \hat{b}^\dagger - \lambda (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (4.72)$$

Definiendo los operadores de modos normales

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{b}), \quad (4.73)$$

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b} - \hat{a}), \quad (4.74)$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$i \frac{d\hat{c}}{dt} = (\lambda - \omega) \hat{c} + \lambda \hat{c}^\dagger, \quad (4.75)$$

$$i \frac{d\hat{c}^\dagger}{dt} = (\lambda - \omega) \hat{c}^\dagger + \lambda \hat{c}, \quad (4.76)$$

$$i \frac{d\hat{d}}{dt} = -(\lambda + \omega) \hat{d} - \lambda \hat{d}^\dagger, \quad (4.77)$$

$$i \frac{d\hat{d}^\dagger}{dt} = (\lambda + \omega) \hat{d}^\dagger + \lambda \hat{d}. \quad (4.78)$$

Las soluciones para $\hat{c}(t)$ y $\hat{d}(t)$ son

$$\begin{aligned} \hat{c}(t) = & \left\{ -\frac{\lambda}{2\Omega_-} \hat{c}^\dagger(0) + \frac{\Omega_- - (\lambda - \omega)}{\Omega_-} \hat{c}(0) \right\} \exp(i\Omega_- t) \\ & + \left\{ 1 - \frac{\Omega_- - (\lambda - \omega)}{\Omega_-} \hat{c}(0) + \frac{\lambda}{2\Omega_-} \hat{c}^\dagger(0) \right\} \exp(-i\Omega_- t), \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}(t) = & \left\{ \frac{\Omega_+ + (\lambda + \omega)}{\Omega_+} \hat{d}(0) + \frac{\lambda}{2\Omega_+} \hat{d}^\dagger(0) \right\} \exp(i\Omega_+ t) \\ & + \left\{ 1 - \frac{\Omega_+ + (\lambda + \omega)}{\Omega_+} \hat{d}(0) - \frac{\lambda}{2\Omega_+} \hat{d}^\dagger(0) \right\} \exp(-i\Omega_+ t), \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\Omega_\pm = \omega^2 \pm 2\lambda\omega. \quad (4.81)$$

Suponiendo que se tiene la condición $\lambda \ll \omega$, situación usual en óptica cuántica, podemos expandir las expresiones (4.79)-(4.81) en potencias de λ/ω , obteniendo las expresiones aproximadas

$$\hat{c}(t) \approx \exp \left[i \left(\omega + \lambda - \frac{\lambda^2}{2\omega} \right) t \right], \quad (4.82)$$

$$\hat{d}(t) \approx \exp \left[i \left(\omega - \lambda - \frac{\lambda^2}{2\omega} \right) t \right]. \quad (4.83)$$

Ahora consideremos que los 2 campos en interacción están descritos por

$$\hat{H} = \omega \hat{n}_a + \omega \hat{n}_b + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger), \quad (4.84)$$

que difiere de la ecuación (4.68) en que no tiene los términos $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$ y $\hat{a} \hat{b}$ (denominados contrarrotantes); en este caso obtenemos las soluciones

$$\hat{c}(t) = \exp [i(\omega + \lambda)t], \quad (4.85)$$

$$\hat{d}(t) = \exp [i (\omega - \lambda) t] . \quad (4.86)$$

Al comparar lo anterior con las ecuaciones (4.82) y (4.83) hallamos que la frecuencia natural del campo está desplazada en la cantidad $\lambda^2/2\omega$. Por simplicidad en el caso expuesto hemos considerado que los campos tienen frecuencias iguales, pero el caso general sigue el mismo desarrollo y se obtiene la misma conclusión: el efecto de los términos contrarrotantes $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$ y $\hat{a} \hat{b}$ es introducir un desplazamiento constante en la frecuencia del campo, por lo cual podemos despreciar la contribución de los procesos descritos por los operadores $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$ y $\hat{a} \hat{b}$ y usar la ecuación (4.84), condición denominada “aproximación de onda rotante”. Los términos $\hat{a}^\dagger \hat{b}$ y $\hat{a} \hat{b}^\dagger$ se denominan rotantes y los $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$ y $\hat{a} \hat{b}$ son contrarrotantes; esta denominación proviene del hecho de observar la evolución de estos operadores en el espacio fase, pues los contrarrotantes giran en sentido opuesto a los rotantes.

TRABAJOS DERIVADOS DE ESTA TESIS

Effective Hamiltonian for a Two-Level Atom Interacting with Two Fields by J. L. Escudero-Jiménez, R. Juárez-Amaro, R. Mar-Sarao, H. Moya-Cessa; International Review of PHYSICS - October 200 Copyright © 2008 Praise Worthy Prize S.r.l.

Optical realization of a quantum beam splitter, R. Mar Sarao and H. Moya-Cessa; Optics Letters 33, 1966, 2008

Aproximación dispersiva para átomo de 3 niveles; R. Mar Sarao H. Moya Cessa; Sesión simultánea 4SG03; XLIX Congreso Nacional de Física San Luis Potosí, SLP 2006

Hamiltoniano dispersivo en la interacción de 2 átomos con un campo electromagnético; R. Mar Sarao H. Moya Cessa; Sesión mural 4MD35; L Congreso Nacional de Física Universidad Veracruzana 2007

Capítulo 5

SUMMARY IN ENGLISH: “INTERACTION BETWEEN SEVERAL FIELDS: A NON-MARKOVIAN MODEL”

BASIC TOOLS OF QUANTUM MECHANICS

In quantum mechanics the Schrödinger's equation [1]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t), \quad (5.1)$$

is used to describe the evolution for the physical systems (field, atom, etc.). The solution $\psi(\vec{r}, t)$ is called wave function or state vector and \hat{H} is the Hamiltonian operator for the system.

There is a standard notation for describing quantum states in the theory of quantum mechanics composed of angle brackets and vertical bars called bracket notation. It is so called because the inner product (or dot product) of two states is denoted by a bracket $\langle \phi | \psi \rangle$, consisting of a left part, $\langle \phi |$, called the bra, and a right part, $|\psi \rangle$, called the ket. The notation was invented by Paul Dirac [1], and is also known as Dirac notation.

In Dirac notation the wave function ψ has associated the ket $|\psi \rangle$.

The ket can be viewed as a column vector

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle, \quad (5.2)$$

and the bra is

$$\langle\psi| = \sum_k c_k \langle\psi_k|, \quad (5.3)$$

where the bra is the complex conjugate transpose for the ket (the bra is a row vector).

In quantum mechanics the physical quantities (energy, momentum, etc.) are represented by operators which are specified by Hermitian matrices.

There is a quantity very important in quantum mechanics, called expectation value; for the observable \hat{A} the expectation value is

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle. \quad (5.4)$$

Other quantity very used is the commutator for two observables \hat{A} , \hat{B} defined by

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (5.5)$$

which can be non-zero for matrices.

EVOLUTION OPERATOR

For the Schrödinger's equation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}\psi, \quad (5.6)$$

the solution can be expressed by

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right) |\psi(0)\rangle, \quad (5.7)$$

where $\exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right)$ is called evolution operator. This method is useful when the Hamiltonian \hat{H} can be expressed as linear combination of commutable operators or when the operators are simple. We will use the evolution operators in the next sections.

MASTER EQUATION

In quantum mechanics the ket $|\psi\rangle$ contains all the information about the system. We extract information about the system calculating the expectation value for the observable \hat{O} ,

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle. \quad (5.8)$$

In many situations we don't know $|\psi\rangle$, we only could know the probability P_ψ associated with the system in the $|\psi\rangle$ state. In this situation we must take the quantum average over an ensemble of several systems equally prepared. Instead of the equation (5.8), the expectation value for \hat{O} is

$$\langle \langle \hat{O} \rangle_{QM} \rangle_{Ensemble} = tr \left(\hat{O} \hat{\rho} \right), \quad (5.9)$$

where tr is the matrix operation trace, with the density operator

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (5.10)$$

The motion equation for the density operator (5.10) is

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}, \hat{\rho} \right], \quad (5.11)$$

which is called Von Neumann equation or master equation. In general, for states given by the expression (5.10) they are called mixed states, while states with only one component state of the form

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (5.12)$$

are called pure states.

We can use the trace for $\hat{\rho}^2$ to distinguish between mixed and pure states. For a pure state we obtain [3]

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad (5.13)$$

$$Tr (\hat{\rho}^2) = 1, \quad (5.14)$$

while for a mixed state

$$Tr (\hat{\rho}^2) < 1. \quad (5.15)$$

QUANTIZATION FOR ELECTROMAGNETIC FIELD

The electromagnetic field is described by the Maxwell's equations

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (5.16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (5.19)$$

and the constituent relations

$$\vec{B} = \mu_0 \hat{H}, \quad (5.20)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (5.21)$$

for the electric \vec{E} and the magnetic \vec{H} fields, together with the displacement \vec{D} and induction \vec{B} vectors. Because the electric field is described by the wave equation

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.22)$$

and in similar way for the magnetic field, we have the solution for E and H [2]

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \text{sen}(k_j z), \quad (5.23)$$

$$H_y = \sum_j A_j \left(\frac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j} \right) \cos(k_j z), \quad (5.24)$$

$$A_j = \left(\frac{2\nu_j^2 m_j}{V \epsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (5.25)$$

where m_j is a constant with mass unity and V is the volume for the cavity field,

and the Hamiltonian for the electromagnetic field is

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j \nu_j^2 q_j^2 + \frac{\dot{p}_j^2}{m_j} \right), \quad (5.26)$$

where $p_j = m_j \dot{q}_j$ is the canonical momentum of the j th mode, q_j the generalized coordinate and \dot{q}_j the generalized velocity.

The quantization is used by defining the operators

$$\hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar \nu_j}} (m_j \nu_j q_j + i p_j), \quad (5.27)$$

$$\hat{a}_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar \nu_j}} (m_j \nu_j q_j - i p_j). \quad (5.28)$$

Using (5.27) and (5.28) the expression (5.26) is rewritten as

$$\hat{H} = \hbar \sum_j \nu_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right), \quad (5.29)$$

where \hat{a}_j is the annihilation operator, \hat{a}_j^\dagger is the creation operator. The solutions for the Schrödinger's equation with the Hamiltonian (5.29) are the number states or Fock states

$$|m\rangle = \phi_m(q) = \frac{1}{(2^m m!)} H_m \left(\sqrt{\frac{\nu}{\hbar}} q \right) \phi_0(q), \quad (5.30)$$

$$\phi_0(q) = \left(\frac{\nu}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\nu q^2}{2\hbar} \right), \quad (5.31)$$

where H_m is the Hermite Polynomial.

COHERENT STATES

In quantum mechanics a coherent state is a specific kind of quantum state of the quantum harmonic oscillator whose dynamics closely resemble the oscillating behavior of a classical harmonic oscillator system. Erwin Schrödinger derived it as a minimum uncertainty Gaussian wave packet in 1926 while searching for solutions of the Schrödinger's equation that satisfy the correspondence principle [4]. While minimum uncertainty wave packets were well known, they did not attract much attention until Roy J. Glauber, in 1963, provided a

complete quantum theoretic description of coherent in the electromagnetic field [5]. Here the coherent state of a field describes an oscillating field, the closest quantum state to a classical sinusoidal wave such as a continuous laser wave. The coherent state is defined as the radiation emitted by a classical current distribution. By classical we mean that the current can be described for a prescribed vector $\vec{j}(\vec{r}, t)$ which is not an operator. We consider coupling of this current to the vector potential operator [2]

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = -i \sum_k \frac{1}{\nu_k} \vec{e}_{k\varepsilon_k} \hat{a}_k \exp\left(-i\nu_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}\right) + H.C., \quad (5.32)$$

and the Hamiltonian that describes the interaction between the field and the current is [2]

$$\hat{V}(t) = \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \hat{A}(\vec{r}, t) d^3r, \quad (5.33)$$

where \hat{a}_k is the annihilation operator, \vec{e}_k is an unitary vector. The evolution operator for the Schrödinger's equation with the Hamiltonian (5.33) is [2]

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \hat{V}(t)\right] = \prod_k \exp\left(\alpha_k \hat{a}_k^\dagger - \alpha_k^* \hat{a}_k\right), \quad (5.34)$$

where the complex time depending amplitude α_k is

$$\alpha_k = \frac{1}{\hbar\nu_k} \varepsilon_k \int_0^t dt' \int d\vec{r}' \vec{e}_k \cdot \vec{j}_\nu(\vec{r}', t') \exp\left(-i\nu_k t' + i\vec{k} \cdot \vec{r}'\right). \quad (5.35)$$

The solution for the Schrödinger's equation with the Hamiltonian (5.33) is

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \hat{V}(t)\right] |\psi(0)\rangle. \quad (5.36)$$

We choose the initial state $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, the vacuum state, and the vector state (5.36) then becomes

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \prod_k \exp\left(\alpha_k \hat{a}_k^\dagger - \alpha_k^* \hat{a}_k\right) |0\rangle_k \\ &= \prod_k |\alpha_k\rangle. \end{aligned} \quad (5.37)$$

In the last expression we see that the multimode coherent state can be

expressed as a product of coherent states monomode $|\alpha_k\rangle$. The operator [5]

$$\exp\left(\alpha_k \hat{a}_k^\dagger - \alpha_k^* \hat{a}_k\right) \quad (5.38)$$

in expression (5.37) is called Glauber's displacement operator.

Other way to define the coherent states is as eigenstates of the annihilation operator \hat{a} . Formally, this reads:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (5.39)$$

MARKOVIAN MODEL FOR CAVITY-FIELD INTERACTION

We begin with the Hamiltonian in the general form

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (5.40)$$

where \hat{H}_S and \hat{H}_R are Hamiltonians for S (system) and R (reservoir), respectively, and \hat{H}_{SR} is an interaction Hamiltonian. We will let $\hat{\chi}(t)$ be the density operator for $S \oplus R$ and define the reduced density operator $\hat{\rho}(t)$ by

$$\hat{\rho}(t) = \text{tr}_R[\hat{\chi}(t)], \quad (5.41)$$

where the trace is only taken over the reservoir states R. The objective here is to solve the master equation for $\hat{\chi}$

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\chi}], \quad (5.42)$$

where \hat{H} is given by (5.40).

In the interaction picture we have

$$\tilde{\chi} = \left\{ \exp(i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\} \hat{\chi} \left\{ \exp(-i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\}, \quad (5.43)$$

and the master equation is

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}, \tilde{\chi}], \quad (5.44)$$

$$\tilde{H}_{SR} = \left\{ \exp(i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\} \hat{H} \left\{ \exp(-i/\hbar) (\hat{H}_S + \hat{H}_R) t \right\}. \quad (5.45)$$

The expression for equation (5.44) is rewritten as

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}(t), \tilde{\chi}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]]. \quad (5.46)$$

It's assumed that the interaction is turned on at $t=0$ and that no correlations

exist between S and R at this initial time. Then we have

$$\hat{\chi}(0) = \hat{\tilde{\chi}}(0) = \hat{\rho}(0) \hat{R}_0, \quad (5.47)$$

where \hat{R}_0 is the initial reservoir density operator. After tracing over the reservoir, (5.46) give us

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\rho}}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_R \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t'), \hat{\tilde{\chi}}(t') \right] \right]. \quad (5.48)$$

We have stated that $\hat{\chi}$ factorizes at $t = 0$. At later times correlations between S and R may arise due to the coupling of the system and reservoir through \hat{H}_{SR} . However, we assume that the coupling is very weak, and all times $\hat{\chi}(t)$ should only show deviations of order \hat{H}_{SR} from an uncorrelated state. Furthermore, R is a very large system whose state should be virtually unaffected by its coupling to S. With this idea is written

$$\hat{\tilde{\chi}}(t) = \hat{\tilde{\rho}}(t) + \hat{O}(\hat{H}_{SR}). \quad (5.49)$$

We now make the first approximation, called Born approximation. Neglecting terms higher than second order in \hat{H}_{SR} , we write (5.48) as

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\rho}}}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_R \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t'), \hat{\tilde{\rho}}(t') \hat{R}_0 \right] \right]. \quad (5.50)$$

The next step is using the Markov approximation, when we replace $\hat{\tilde{\rho}}(t')$ by $\hat{\rho}(t)$ (a more detailed explanation is given in [6] to obtain a master equation in the Born-Markov approximation:

$$\frac{\partial \hat{\tilde{\rho}}}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_R \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\tilde{H}}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t) \hat{R}_0 \right] \right]. \quad (5.51)$$

We want the master equation for the system cavity-reservoir, then for the Hamiltonian of the composite system $S \oplus R$ we write

$$\hat{H}_S = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (5.52)$$

$$\hat{H}_R = \sum_j \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j, \quad (5.53)$$

$$\hat{H}_{SR} = \sum_j \hbar \left(\kappa_j^* \hat{a} \hat{r}_j^\dagger + \kappa_j \hat{a}^\dagger \hat{r}_j \right). \quad (5.54)$$

The system S (cavity field) is an harmonic oscillator with frequency ω_c and creation and annihilation operators \hat{a}^\dagger and \hat{a} , respectively; the reservoir R is a collection of harmonic oscillators with frequencies ω_j , and corresponding creation and annihilation operators \hat{r}_j^\dagger and \hat{r}_j , respectively; the oscillator \hat{a} couples to the j th reservoir oscillator via a coupling constant κ (for the moment unspecified). The reservoir is taken to be in thermal equilibrium at temperature T:

$$\hat{R}_0 = \sup \prod_j \exp \left(-\frac{\hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j}{k_B T} \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{\hbar \omega_j}{k_B T} \right) \right), \quad (5.55)$$

where k_B is Boltzmann's constant.

When the expressions (5.52) - (5.54) are substituted in (5.51) we obtain [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i\omega'_c [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}] + \kappa (2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}) \\ & + 2\kappa \bar{n} (\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (5.56)$$

that is the density operator for the cavity field with Born-Markov approximation; ω'_c and κ are constants (for the moment unspecified) and \bar{n} is the expectation value for the number of photons in the reservoir

$$\bar{n} = \frac{\exp(-\hbar\omega/(k_B T))}{1 - \exp(-\hbar\omega/(k_B T))}. \quad (5.57)$$

Now we study the evolution for a cavity field coupled to a reservoir at T=0°K and $\omega'_c = 0$, with this condition the master equation (5.56) is reduced to

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa (2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}); \quad (5.58)$$

using the evolution operator, the solution for (5.58) is

$$\hat{\rho}(t) = \left\{ \exp(\hat{L}t) \right\} \left\{ \exp\left(\hat{J} \frac{1 - \exp(-2\kappa t)}{2\kappa} \right) \right\} \hat{\rho}(0), \quad (5.59)$$

where \hat{L} and \hat{J} are superoperators given by

$$\hat{J} = 2\kappa\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger, \quad \hat{L} = -\kappa\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \kappa\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (5.60)$$

For a cavity field with an initial coherent state $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, from (5.59) we obtain

$$\hat{\rho}(t) = |\alpha \exp(-\kappa t)\rangle\langle\alpha \exp(-\kappa t)|, \quad (5.61)$$

which is the expectation behavior for a coherent state.

NON-MARKOVIAN INTERACTION FOR SEVERAL FIELDS

It is well known that a coherent state subject to dissipation keeps its form during the dynamics. This is, given master equation for a field in a lossy cavity at zero temperature

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (5.62)$$

with \hat{a} (\hat{a}^\dagger) the annihilation (creation) operator for the cavity mode, κ the decay constant and $\hat{\rho}$ the density operator, if the initial state of the cavity field is a coherent state $|\alpha\rangle$, then the dynamics shows that it will decay in time as $|\alpha \exp(-\kappa t)\rangle$ [7].

One possible answer about why the coherent states preserve its form during decay is the fact that coherent states are eigenstates of the annihilation operator, however this arguments does not hold for a dissipative two photon process [8]

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa (2\hat{a}^2\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2), \quad (5.63)$$

even though coherent states are also eigenstates of the annihilation operator squared (so do even and odd coherent states) [9].

Both equations above are obtained using Born-Markov approximations [8, 10]. In the case in which such approximations are not used, i.e. when the interaction between a harmonic oscillator and a set of harmonic oscillators (the environment) is considered, is not clear how a coherent state decays. Here we will try to answer this question.

Our first step is considering the Hamiltonian of the interaction of k fields

$$\hat{H} = \sum_j \omega_j \hat{n}_j + \sum_{j \neq i} \sum_i \lambda_{ij} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger). \quad (5.64)$$

From the Hamiltonian above, we can produce the following matrix

$$\hat{\Lambda} = \hat{P}\hat{D}\hat{P}^t = \begin{pmatrix} \omega_1 & \lambda_{21} & \dots & \dots & \lambda_{k1} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \dots & \dots & \lambda_{k2} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \dots & \dots & \lambda_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{1k} & \lambda_{2k} & \dots & \dots & \omega_k \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

We can rewrite the Hamiltonian in the form

$$\hat{H} = \sum_m \mu_m \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m, \quad (5.66)$$

such that

$$[\hat{A}_m, \hat{A}_n^\dagger] = 0, \quad (5.67)$$

where we have defined the normal-mode operators \hat{A}_n as

$$\hat{A}_n = \sum_i r_{ni} \hat{a}_i, \quad (5.68)$$

with r_{ni} a real number. Equation (5.67) implied that

$$[\hat{A}_m, \hat{A}_n^\dagger] = \sum_{i,j \neq 0} r_{ni} r_{mj} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \sum_i r_{ni} r_{mi} = 0. \quad (5.69)$$

By defining the vector

$$\vec{r}_n = \begin{pmatrix} r_{n1} \\ r_{n2} \\ \vdots \\ r_{ni} \end{pmatrix}, \quad (5.70)$$

equation (5.69) takes the form $\vec{r}_n \cdot \vec{r}_m = 0$, i.e. they are orthogonal, we will consider them also normalized, $\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n = 1$. With these vectors we can form the matrix

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \dots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1i} & r_{2i} & \dots & r_{ni} \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

If we combine equations (5.64), (5.66) and (5.68) we obtain the system of equations

$$\sum_m \mu_m r_{mi}^2 = \omega_i, \quad (5.72)$$

$$\sum_m \mu_m r_{mi} r_{mj} = \lambda_{ij}, \quad (5.73)$$

that may be re-expressed in the compact form

$$\hat{P} \hat{D} \hat{P}^t = \begin{pmatrix} \omega_1 & \lambda_{21} & \dots & \dots & \lambda_{k1} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \dots & \dots & \lambda_{k2} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \dots & \dots & \lambda_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{1k} & \lambda_{2k} & \dots & \dots & \omega_k \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

with

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_i \end{pmatrix}, \quad (5.75)$$

i.e. \hat{D} is a diagonal matrix whose elements are the eigenvalues of the matrix $\hat{\Lambda}$, defined from the Hamiltonian. The matrix \hat{P} is therefore $\hat{\Lambda}$'s eigenvectors matrix.

The solution to the Schrödinger's equation subject to the Hamiltonian (5.64) with all modes initially in coherent states, $|\psi(0)\rangle = |\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle\dots|\alpha_n\rangle$, is simply the direct product of coherent states

$$|\psi(t)\rangle = |\vec{r}_1 \cdot \vec{\beta}(t)\rangle_1 |\vec{r}_2 \cdot \vec{\beta}(t)\rangle_2 \dots |\vec{r}_n \cdot \vec{\beta}(t)\rangle_n, \quad (5.76)$$

with $\vec{\beta}(t) = (\vec{r}_1 \cdot \vec{\alpha} \exp(-i\mu_1 t), \vec{r}_2 \cdot \vec{\alpha} \exp(-i\mu_2 t), \dots, \vec{r}_n \cdot \vec{\alpha} \exp(-i\mu_n t))$ and the vector $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ is composed by the coherent amplitudes of the initial wave function. Up to here we have shown that the interaction of several modes initially in coherent states does not change the form of this states (remain coherent), but modified their amplitude. If we choose the interaction constants to be $\lambda_{1j} \neq 0$ for $1 \neq j$ and the rest as zero, we are dealing with the interaction between one field and n-1 fields. If $n \rightarrow \infty$ and the amplitudes α_j

are zero for $j > 1$, we deal with the interaction of one field with $n - 1$ one of them in a coherent state with amplitude α_1 and the rest in the vacuum. Therefore, the most likely situation we have is the coherent state decaying towards the vacuum while keeps its coherent form.

CONCLUSIONS

We have shown that a system of n interacting oscillators initially in coherent states, remain coherent during the interaction. In particular, if one considers one field (harmonic oscillator) interacting with many fields, (harmonic oscillators), i.e. consider only $\lambda_{j1} \neq 0$ and $\lambda_{j1} \neq 0$ for $j > 2$, and all the others to be zero, we can model non-Markovian cavity-reservoir interaction. If we consider the system to be in a coherent state and all the others fields that form the environment in a vacuum state (this is also a coherent state with zero amplitude), after evolution, the amplitude of the coherent state will diminish, as one photon will go to another mode, keeping its coherent nature. If the number of modes that form the environment is very large, an event of the photon going back to the system is quite unlikely. Therefore the next probable event is precisely the loss of another photon by the system, etc. until it arrives to a state close to the vacuum. In case the number of modes interacting with the system is infinite, then the vacuum would be the final state of the system. In other words, the total system perform the following transition

$$|\alpha\rangle_{a1}|0\rangle_{a2}\dots|0\rangle_{an} \rightarrow |\delta_1\rangle_{a1}|\delta_2\rangle_{a2}\dots|\delta_n\rangle_{an}, \quad (5.77)$$

where the coherent amplitudes, $\delta_k \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$.

In conclusion we have given a complete algebraic solution to the problem of n interacting harmonic oscillators, without Born-Markov approximations.

OPTICAL REALIZATION OF A QUANTUM BEAM SPLITTER

The modeling of quantum mechanical systems with classical optics is a topic that has attracted interest recently. Along these lines Man'ko et al. proposed to realize quantum computation by quantum like systems [14], and Crasser et al. [15] pointed out the similarities between the quantum mechanics and the Fresnel optics in phase space. Following these cross applications, here we would like to show how a quantum beam splitter may be modeled in classical optics. The possibility of generating specific forms (engineering) of the propagated field is also studied.

A beam splitter is an optical component that combines two propagating modes into other propagating modes. Two fields \hat{a}_x and \hat{a}_y enter the beam splitter, and two fields exit it, corresponding to a combination of the fields that entered. In quantum optics the beam splitter is modeled by the interaction of two fields [11] with the Hamiltonian given by

$$\hat{H} = \omega_x \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \omega_y \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + \chi (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger), \quad (5.78)$$

where the ω 's are the field frequencies, χ is the interaction constant, and \hat{a}_j and \hat{a}_j^\dagger ($j = x, y$) are the annihilation and creation operators of the field modes.

If we consider equal field frequencies, we can obtain the beam splitter operator

$$\hat{B} = \exp [-i\chi t (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger)], \quad (5.79)$$

with $\theta = \chi t$.

One feature of the quantum beam splitter is that if there is only one field entering by one of the arms of the beam splitter, then one always has to consider a vacuum field to be entering by the other arm. It is well known that this system produces entanglement [17, 18]. For instance, if we consider the 50:50 beam splitter, i.e., if we set $\theta = \pi/4$ and in each of the arms the first excited number state, namely, the state $|\psi_I\rangle = |1\rangle_x |1\rangle_y$ as the initial state, we have the final state

$$|\psi_F\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_x |0\rangle_y + |0\rangle_x |2\rangle_y). \quad (5.80)$$

This is an entangled state that indicates that both photons travel together.

MODELING FIELD-FIELD INTERACTION

We consider the paraxial propagation of a field that has the mathematical form [19]

$$2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} = \nabla_{\perp}^2 E + k^2(x, y) E, \quad (5.81)$$

where $k_0 = 2\pi n_0/\lambda$ is the wave-number, with λ the wavelength of the propagating light beam and n_0 the homogeneous refractive index. The function $k^2(x, y)$ describes the inhomogeneity of a medium responsible for the waveguiding of an optical field E . It was recently shown that using an astigmatic and slightly tilted probe beam produces a gradient-index-like medium with an extra cross term χxy [19]. Taking into account such inhomogeneity, the paraxial wave equation is written as

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\nabla_{\perp}^2}{2k_0} E + \left[\frac{k_0}{2} - \frac{1}{2} (k_0 \alpha_x^2 x^2 + k_0 \alpha_y^2 y^2) + \chi xy \right] E, \quad (5.82)$$

with $k_0 \alpha_q^2$, $q = x, y$ inhomogeneity parameters related to the generated gradient-index medium. Now we define the ladder operators [20]

$$\hat{a}_q = \sqrt{\frac{k_0 \alpha_q}{2}} q + \frac{1}{\sqrt{2k_0 \alpha_q}} \frac{d}{dq}, \quad (5.83)$$

$$\hat{a}_q^{\dagger} = \sqrt{\frac{k_0 \alpha_q}{2}} q - \frac{1}{\sqrt{2k_0 \alpha_q}} \frac{d}{dq}, \quad (5.84)$$

with $q = x, y$. The action of \hat{a}_q and \hat{a}_q^{\dagger} on a function

$$|m\rangle = u_m(x) = \left(\frac{k_0 \alpha_x}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} H_m \left(\sqrt{k_0 \alpha_x} x \right) \exp(-k_0 \alpha_x x^2 / 2), \quad (5.85)$$

where $H_m(x)$ are Hermite polynomials, yields

$$\hat{a}_x u_m(x) = \sqrt{m} u_{m-1}(x), \quad (5.86)$$

$$\hat{a}_x^{\dagger} u_m(x) = \sqrt{m+1} u_{m+1}(x), \quad (5.87)$$

for that reason \hat{a}_x is the annihilation operator and \hat{a}_x^{\dagger} is the creation operator.

The above equations are also valid for the y coordinate simply with the change $y \rightarrow x$. Furthermore, note that $[\hat{a}_q, \hat{a}_q^\dagger] = 1$.

We write equation (5.81) by using equations (5.86) and (5.87), as

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = \left[\alpha_x \left(\hat{n}_x + \frac{1}{2} \right) + \alpha_y \left(\hat{n}_y + \frac{1}{2} \right) + \chi xy + \frac{k_0}{2} \right] E, \quad (5.88)$$

with $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ for $j=x,y$.

With the transformation

$$\psi = (\exp[-iz(\alpha_x + \alpha_y + k_0)/2]) E, \quad (5.89)$$

we transform the equation (5.88) and we assume that $\chi \ll \alpha_x, \alpha_y$; so we can perform the so called rotating wave approximation [7] to finally obtain

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = [\alpha_x \hat{n}_x + \alpha_y \hat{n}_y + \phi (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger)] \psi, \quad (5.90)$$

with $\phi = \chi/2k_0\sqrt{\alpha_x\alpha_y}$. This equation is equivalent to the field-field interaction in quantum optics [12].

We do a last transformation $\varphi = \exp\{-iz\alpha_x(\hat{n}_x + \hat{n}_y)\}$ and obtain

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = [\Delta \hat{n}_y + \phi (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger)] \varphi = \hat{H} \varphi, \quad (5.91)$$

with $\Delta = \alpha_y - \alpha_x$.

We define “normal-mode” operators by [12]

$$\hat{A}_1 = \delta \hat{a}_x + \gamma \hat{a}_y, \quad \hat{A}_2 = \gamma \hat{a}_x - \delta \hat{a}_y, \quad (5.92)$$

with

$$\delta = \frac{2\phi}{\sqrt{2\Omega(\Omega - \Delta)}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\Omega - \Delta}{2\Omega}}, \quad \delta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (5.93)$$

with $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + 4\phi^2}$ the Rabi frequency.

The normal-mode operators commute with each other:

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = [\hat{A}_1, \hat{A}_2^\dagger] = 0. \quad (5.94)$$

We use the normal-mode operators (5.92) to rewrite the Hamiltonian \hat{H} in

(5.91) as

$$\hat{H} = \mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2, \quad (5.95)$$

with $\mu_{1,2} = (\Delta \pm \Omega) / 2$.

Because the operators in (5.95) commute with each other we can factorize the exponential for the Hamiltonian (5.95) and we can write the solution for the Schrödinger's equation (5.91) as

$$\varphi(z; x, y) = \left[\exp \left[-iz \left(\mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \right) \right] \right] u_0(x) u_0(y), \quad (5.96)$$

where $u_0(x) u_0(y)$ is the initial state.

To have a way of transforming functions from a basis \hat{a}_1, \hat{a}_2 to basis \hat{A}_1, \hat{A}_2 , we note that the lowest functions $u_0(x) u_0(y)$ are also eigenfunctions of the normal-mode operators

$$\hat{A}_m u_0(x) u_0(y) = 0, \quad m = 1, 2; \quad (5.97)$$

i.e. they are the lowest states, up to phase, in the new basis [12]

$$u_0(x) u_0(y) = U_0^1(x) U_0^2(y). \quad (5.98)$$

Now we study some examples for initial conditions.

INITIAL FUNCTION $u_1(x) u_1(y)$

If we consider

$$\varphi(z=0; x, y) = u_1(x) u_1(y), \quad (5.99)$$

the propagation function read as

$$\begin{aligned} \varphi(z; x, y) = & [\eta(z) \beta(z) \hat{a}_x^{\dagger 2} + \varepsilon(z) \beta(z) \hat{a}_y^{\dagger 2} \\ & + \beta^2(z) + \varepsilon(z) \eta(z) \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger] [u_0(x) u_0(y)], \end{aligned} \quad (5.100)$$

with

$$\eta(z) = \delta^2 [\exp(-iz\mu_1)] + \gamma^2 [\exp(-iz\mu_2)], \quad (5.101)$$

$$\beta(z) = \gamma \delta (\exp(-iz\mu_1) - \exp(-iz\mu_2)), \quad (5.102)$$

$$\varepsilon(z) = \delta^2 \exp(-iz\mu_2) + \gamma^2 \exp(-iz\mu_1). \quad (5.103)$$

The term that multiplies $\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger$ may be written as

$$\beta^2(z) + \varepsilon(z) \eta(z) = [\exp -i\Delta z] \left[(\gamma^2 - \delta^2)^2 + 4\gamma^2 \delta^2 \cos(\Omega z) \right] \quad (5.104)$$

and oscillates, crossing zero periodically. By looking at the propagated field at one of these zeros at z_0 , a state of the form

$$\varphi(z_0; x, y) = \eta(z_0) \beta(z_0) u_2(x) u_0(y) + \varepsilon(z_0) \beta(z_0) u_0(x) u_2(y), \quad (5.105)$$

is obtained, which is similar to the entangled state (5.80)

$$|\psi_F\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_x |0\rangle_y + |0\rangle_x |2\rangle_y).$$

SU(2) COHERENT STATE

If we use the initial state

$$\varphi(z=0; x, y) = u_m(x) u_0(y) = \frac{\hat{a}_x^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} u_0(x) u_0(y), \quad (5.106)$$

after application of the propagator $\exp\left(-iz \left[\mu_1 \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \mu_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2\right]\right)$ gives the coherent states SU(2) [21, 22]

$$\varphi(z; x, y) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n}^{1/2} \eta^{m-n} (z)^n \beta(z) u_{m-n}(x) u_n(y). \quad (5.107)$$

GAUSSIAN FUNCTION

Consider now that at $z = 0$ we have a displayed Gaussian function as a

function of x and a function $u_0(y)$,

$$\begin{aligned}\varphi(z=0; x, y) &= \left(\frac{k_0\alpha_x}{\pi}\right)^{1/4} \left(\exp\left[-\left(\alpha - x\sqrt{k_0\alpha_x/2}\right)^2\right]\right) u_0(y) \\ &= [\exp(-\alpha^2/2)] \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{m!}} u_n(x) u_0(y).\end{aligned}\quad (5.108)$$

We rewrite the last equation as

$$\varphi(z=0; x, y) = \hat{D}_{a_x}(\alpha) u_0(x) u_0(y), \quad (5.109)$$

with $\hat{D}_{a_x}(\alpha) = \exp[\alpha(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x)]$ the Glauber displacement operator. The propagated field read as

$$\varphi(z; x, y) = \hat{D}_{a_x}(\alpha\eta(z)) u_0(x) \hat{D}_{a_y}(\alpha\beta(z)) u_0(y). \quad (5.110)$$

The electromagnetic field them will be displaced Gaussians in x and y dimensions. The initial Gaussians at $z=0$ will exchange displacement; i.e., the displaced Gaussian (that depends on x) will periodically diminish its displacement and come back, while the one centered at $y=0$ will periodically be displaced and come back to the origin.

CONCLUSIONS

We have shown how to model a quantum beam splitter by propagating electromagnetic fields. Specific electromagnetic fields may be engineered by using this modeling, in particular we have shown how SU(2) coherent functions may be realized.

FUTURE WORKS

1.- There is other interactions between fields described by Hamiltonians of the form

$$\hat{H} = \sum_j \omega_j \hat{n}_j + \sum_{j \neq i} \sum_i \lambda_{ij} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_i \hat{a}_j),$$

which solutions may be written in a similar way as we have done in this thesis.

2.- The atomic energy operators ($\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-$) have similar mathematics properties to the field operators $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{n}$ and the interaction between atoms described by Hamiltonians as

$$\hat{H} = \sum_j \omega_j \hat{\sigma}_{zj} + \sum_{j \neq i} \sum_i \lambda_{ij} (\hat{\sigma}_i^+ \hat{a}_j^- + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}_j^+),$$

may use the ideas used in this thesis to rewrite the Hamiltonian as linear combination of commutable operators.

3.- Other possibility is to generate GHZ states [23], which are maximum entanglement states.

Bibliografía

- [1] Quantum Mechanics, Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe;19, 20, 108-111, 121-126; Wiley-Interscience 2006
- [2] Quantum Optics, Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy; 2-6, 46-55; Cambridge University Press, 1997
- [3] Introducción a la mecánica cuántica, Luis de la Peña;677-686; Fondo de Cultura Económica, 1991
- [4] E. Schrödinger, Naturwissenschaften 14 (1926) 664
- [5] R. J. Glauber, Phys. Rev. 131, 2766 (1963)
- [6] An Open Systems Approach to Quantum Optics, Howard Carmichael;6-13; Springer-Verlag, 1993
- [7] H. Moya-Cessa, Phys. Rep. 432, 1-41 (2008)
- [8] L. Guiles, B. M. Garraway, and P. L. Knight, Phys. Rev. A 49, 2785-2799 (1994)
- [9] B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. Lett. 57 13-16 (1986)
- [10] D. F. Walls, G. J. Milburn, Quantum Optics, (Springer, New York, 1994)
- [11] F. O. Prado, N. G. de Almeida, M. H. Y. Moussa, and C. J. Villas-Bôas, Phys. Rev. A 73, 043803 (2008)
- [12] S. M. Dutra, P. L. Knight and H. Moya-Cessa, Phys. Rev. A 48, 3168-3173 (1993)
- [13] Howard Anton, Elementary Linear Algebra; 380-383; 9da. Edición, Wiley, 2005

- [14] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, and R. Vilela Mendez, *Phys. Lett. A* 288, 12 (2001)
- [15] O. Crasser, H. Mack, and W. P. Schleich, *Fluct. Noise Lett.* 4 L3 (2004)
- [16] R. A. Campos, B. E. A. Saleh, and M. C. Teich, *Phys. Rev A* 40, 1371 (1989)
- [17] M. S. Kim, W. Son, V. Buzek, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* 65, 032323 (2002)
- [18] S. Scheel and D. -G. Welsh, *Phys. Rev. A* 64, 063811 (2001)
- [19] S. Chávez-Cerda, J. R. Moya-Cessa, and H. Moya-Cessa, *J. Opt. Soc. Am. B* 24, 404 (2007)
- [20] G. Arfken, *Mathematica Methods for Physicists*, (Academic, 1985), p. 720
- [21] V. Buzek and T. Quang, *J. Opt. Soc. Am. B* 6, 2447 (1989)
- [22] K. Wodkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am. B* 2, 458 (1985)
- [23] Greenberger, D. M., Horne, M. A., and Zeilinger, A.; *Bell's theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*. Kluwer Academic Press, 1989, ch. Going beyond Bell's theorem, pp. 73–76



INAQE

