



INAOE

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica.**

**Representación Modal de Campos
Ópticos de Auto-Imágenes.**

Por

Angel Sinue Cruz Félix.

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de **Maestro en Ciencias** con especialidad en **Óptica** en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica.

Supervisada por:

Dr. Julio César Ramírez San Juan
INAOE.

Agosto, 2008.
Sta. Ma. Tonantzintla, Pue.

©INAOE 2008

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes.



RESUMEN.

A los campos ópticos que presentan periodicidad a lo largo de la coordenada de propagación, se les llama auto-imágenes. Tales campos dan origen a los bien conocidos efectos Talbot y Lau, los cuales han recibido atención los últimos años debido a las aplicaciones asociadas a ellos. Algunos autores definen un campo de auto-imagen parcialmente coherente como aquél campo cuya función de densidad espectral mutua es la misma en dos planos separados por un múltiplo entero de alguna distancia d . En este trabajo y dentro del marco de la teoría espectral de coherencia formulada por Wolf, hallamos la representación en modos coherentes de campos ópticos de auto-imágenes, hemos demostrado que en el caso en el que se considera coherencia completa, es decir, cuando el campo consiste de un solo modo entonces se obtiene la expresión general para auto-imágenes y en el caso en el que se tiene la superposición de un número infinito de modos coherentes entonces se obtiene la expresión para el efecto Lau.

ABSTRACT.

Optical fields that presents periodicity through the axis of propagation are called “self-imaging” fields. Such fields give rise to the well-known Talbot and Lau effects, which have had a lot of attention these last years due to the applications associated to them. Some authors define a partially coherent self-imaging field as that which its cross-spectral density function is the same for two planes separated by a distance d . We have found the coherent mode-representation of self-imaging fields within the frame of the coherence spectral theory formulated by Wolf, we have proven that when we consider complete coherence of the field, we obtain the general expression for self-imaging fields and in the case when we have the superposition of an infinite numbers of coherent modes then we obtain the expression for the Lau effect.

Agradecimientos.

Quiero agradecer a mi Madre y a mi Padre que confiaron en mí y siempre me brindaron su ayuda.

A mi asesor Julio César Ramírez San Juan por su paciencia y su dedicación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT por el apoyo recibido para concluir los estudios de Maestría.

A Marianne... mi bella esposa, por su amor incondicional.

A mi hija Astrid... por ser mi luz y mi fuerza.

CONTENIDO.

	<i>Pág.</i>
RESUMEN.	<i>i</i>
ABSTRACT.	<i>ii</i>
AGRADECIMIENTOS.	<i>iii</i>
DEDICATORIAS.	<i>iv</i>
CONTENIDO.	<i>v</i>
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN GENERAL.	<i>1</i>
CAPÍTULO 2. AUTO-IMÁGENES.	<i>3</i>
2.1. <i>Efecto Talbot.</i>	<i>4</i>
2.2. <i>Anillos de Montgomery.</i>	<i>8</i>
2.3 <i>Efecto Lau.</i>	<i>14</i>
2.3.1 <i>Descripción del Efecto Lau.</i>	<i>14</i>
2.4. <i>Conclusiones.</i>	<i>17</i>
CAPÍTULO 3. TEORÍA ESPECTRAL DE COHERENCIA PARCIAL.	<i>19</i>
3.1. <i>Funciones de Coherencia.</i>	<i>20</i>
3.2. <i>Densidad Espectral Mutua del Campo Ondulatorio.</i>	<i>24</i>
3.3. <i>Representación Modal de la Densidad Espectral Mutua.</i>	<i>29</i>
3.4. <i>Propagación de la Densidad Espectral Mutua.</i>	<i>31</i>

3.5. <i>Solución Exacta de la ecuación paraxial de la función de densidad espectral mutua.</i>	35
3.6. <i>Conclusiones.</i>	39
CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA EN MODOS COHERENTES DE CAMPOS DE AUTO-IMÁGENES.	40
4.1. <i>Estructura Modal General de Auto-Imágenes.</i>	40
4.2 <i>Casos Particulares.</i>	46
4.2.1. <i>Expresión General para Campos de Auto-Imágenes Completamente Coherentes.</i>	46
4.2.2. <i>Efecto Lau.</i>	48
4.3. <i>Conclusiones.</i>	52
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES GENERALES.	53
LISTA DE FIGURAS.	55
REFERENCIAS.	56

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCIÓN GENERAL.

A los campos ópticos que presentan periodicidad a lo largo de la coordenada de propagación, se les llama *auto-imágenes*. Tales campos dan origen a los bien conocidos efectos Talbot y Lau, los cuales han estado recibiendo atención los últimos años debido a las aplicaciones asociadas a ellos.

En la década de los ochenta, E. Wolf desarrolla una nueva teoría de coherencia parcial [1] en el dominio espacio-frecuencia y un punto importante dentro de ésta teoría es el concepto de expansión modal de la función de densidad espectral mutua, el cual es pieza fundamental para el desarrollo de este trabajo. Por otro lado, Turunen *et al* [2], definen un campo de auto-imagen parcialmente coherente como aquél campo cuya función de densidad espectral mutua es la misma en dos planos separados por un múltiplo entero de alguna distancia d .

Establecido lo anterior y dentro del marco de la teoría de coherencia parcial, el objetivo principal de ésta tesis es hallar la estructura en modos coherentes de campos ópticos de auto-imágenes parcialmente coherentes resolviendo la ecuación diferencial

paraxial que describe la propagación de los modos coherentes bajo la condición de auto-imagen definida por Turunen [2], y a partir de este resultado, mostrar que en el caso en el que se considera coherencia completa, es decir, cuando el campo consiste de un solo modo entonces se obtiene la expresión general para auto-imágenes y en el caso en el que se tiene la superposición de un número infinito de modos coherentes entonces se obtiene la expresión para el efecto Lau.

En seguida se describe a grandes rasgos la estructura de la tesis:

En el capítulo 2 se hace un breve repaso de los conceptos fundamentales correspondientes al tema de auto-imágenes tales como efecto Talbot, distancia de Talbot, anillos de Montgomery y efecto Lau. Luego, en el capítulo 3, se estudian los principios básicos de la teoría espectral de coherencia parcial y se describe la expansión modal de la función de densidad espectral mutua así como la propagación en el espacio libre de dichos modos, también se presenta la solución exacta para la ecuación paraxial que describe la propagación de la función de densidad espectral mutua, y posteriormente en el capítulo 4 se le aplica la ya conocida condición de auto-imagen para así hallar la estructura modal general para éstos campos ópticos. Una vez desarrollada esta representación en modos, se muestran dos casos particulares; primero se analiza el caso para cuando se presenta coherencia completa del campo y se llega a la expresión general de auto-imágenes, en el segundo caso se contempla la incoherencia completa del campo y se llega a que el resultado obtenido da lugar al efecto Lau. Por último en el capítulo 5 se presentan las conclusiones generales y posibles trabajos a futuro.

CAPÍTULO 2.

AUTO-IMÁGENES.

Es conocido que el campo difractado por un objeto periódico bajo iluminación coherente y monocromática resulta también ser periódico tanto transversal como longitudinalmente. Este fenómeno fue observado por primera vez en 1836 por H. F. Talbot [3] y ahora se conoce como *efecto Talbot* o *fenómeno de auto-imágenes*.

El efecto Talbot da origen a la aparición de réplicas del objeto, separadas entre sí por una distancia característica a lo largo del eje óptico, las cuales son llamadas auto-imágenes, donde el valor de la distancia entre auto-imágenes sucesivas depende solamente de la longitud de onda de iluminación y de cierta periodicidad del objeto. Lord Rayleigh en 1881 dio una primera explicación de tipo analítica a éste problema con base en el estudio de la interferencia de rayos difractados y como una consecuencia natural de la difracción de Fresnel. Rayleigh demostró la periodicidad longitudinal del campo difractado por el objeto periódico y obtuvo la expresión analítica para la separación entre las auto-imágenes sucesivas de una red unidimensional.

El fenómeno de auto-imágenes requiere de iluminación coherente, y se observa que desaparece cuando las dimensiones laterales de la fuente de luz son incrementadas. Por otra parte, cuando se cuenta con una fuente extendida de luz blanca y ésta es puesta a una distancia adecuada frente a una estructura periódica, se puede observar que un patrón de franjas se forma detrás de la estructura. El primer experimento de este tipo fue realizado por Ernst Lau en 1948, quién uso dos rejillas de amplitud del mismo periodo espacial iluminadas incoherentemente. Bajo estas condiciones se observaron patrones de franjas con alto contraste para ciertos valores discretos de distancias de separación entre las rejillas, la observación se hizo en el plano focal posterior de una lente convergente. Ahora este efecto lleva por nombre “*efecto Lau*”.

Los efectos Talbot y Lau tienen en común una periodicidad a lo largo del eje de propagación. Sin embargo, difieren en sus respectivas formas de iluminación. En el primer caso la iluminación es coherente y en el segundo, la iluminación es incoherente.

2.1 EFECTO TALBOT.

Consideremos una rejilla de difracción con periodo d a lo largo del eje x , iluminada normalmente por una onda plana monocromática, de longitud de onda λ . La transmitancia en amplitud, $t(\vec{x})$, de este objeto se puede representar como una serie de Fourier de la siguiente forma [4]:

$$t(\vec{x}) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} C_m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right). \quad (2.1)$$

La distribución de amplitudes que se genera en un plano situado una distancia z de la rejilla, $t_z(\vec{x})$, viene dada, suponiendo que nos encontramos en una región donde la aproximación paraxial es válida y de acuerdo con la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff [4], por

$$t_z(\vec{x}) = \exp(ikz) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} C_m \exp\left(-i\pi m^2 \frac{\lambda}{d^2} z\right) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right). \quad (2.2)$$

La Ec. (2.2) describe una distribución de amplitudes periódica en la dirección de propagación, con periodo igual al de la rejilla objeto, aunque con un perfil distinto al de ésta.

Si se cumple que la distribución de amplitudes es la misma que la del objeto, entonces se debe satisfacer que $(\pi/d^2)\lambda z = 2\pi n$, con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ y si el plano de observación se sitúa a una distancia z múltiplo de la distancia $z_T \equiv 2d^2/\lambda$, es decir, si se verifica que [5]:

$$z = nz_T = n \frac{2d^2}{\lambda}, \quad \text{con } n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.3)$$

entonces la distribución de amplitudes obtenida va a ser una réplica, *auto-imagen*, de la rejilla objeto.

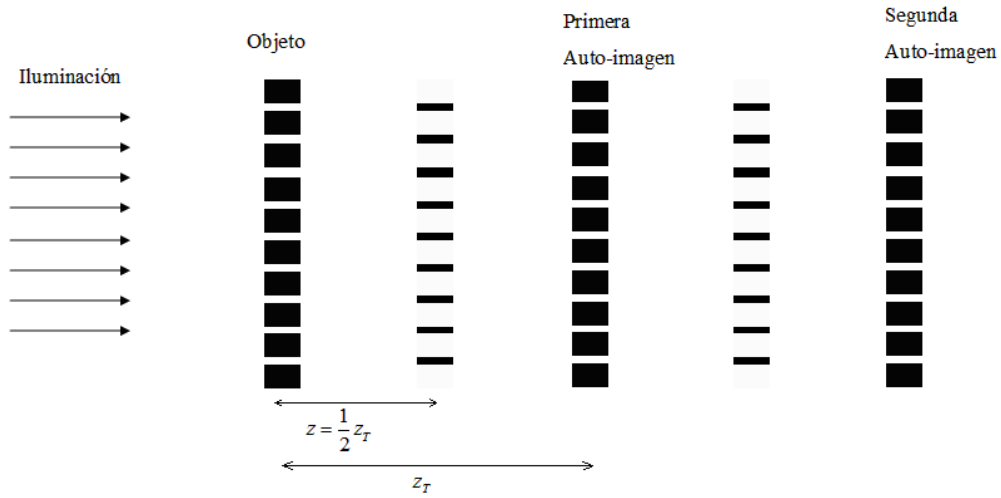


Fig. 2.1.- Representación del efecto Talbot. Cuando se ilumina un objeto periódico con una onda plana monocromática, delante de él se observan replicas exactas del objeto las cuales son llamadas *auto-imágenes* y están situadas justo en múltiplos de la distancia de Talbot. Además existen planos intermedios a los planos de auto-imagen a una distancia z , donde se obtienen replicas del objeto desplazadas por medio periodo.

La distancia z_T que define el periodo de las réplicas en la dirección de propagación, del campo difractado por la rejilla recibe el nombre de *distancia de Talbot* y el número entero n es el número de orden o índice de la auto-imagen.

Es conveniente expresar la distancia z en términos de z_T como

$$z = (n + q)z_T, \quad (2.4)$$

donde n es un número entero y q un número real comprendido entre 0 y 1. En términos de estos parámetros, el patrón de difracción de Fresnel $t_z(\bar{x})$ se expresa como

$$\begin{aligned}
 t_z(\vec{x}) &= \exp(ik(n+q)z_T) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} C_m \exp(-i2\pi m^2 q) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) \\
 &\equiv \exp(ik(n+q)z_T) t_q(\vec{x}).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se puede ver que ésta distribución de amplitudes, depende solamente del parámetro q . Este hecho demuestra la periodicidad transversal del campo difractado por la rejilla.

Si consideramos ahora, los patrones de Fresnel de índice $q = 0.5$ (es decir, aquellos patrones que se localizan justo en la mitad de la distancia de dos auto-imágenes consecutivas) tenemos que

$$\begin{aligned}
 t_{q=0.5}(\vec{x}) &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} C_m \exp(-i\pi m^2) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} C_m (-1)^{m^2} \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) \equiv t\left(x \pm \frac{d}{2}, y\right)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

y, por tanto, se obtiene así un patrón idéntico al de la rejilla salvo por un desplazamiento lateral de medio periodo respecto a ésta. Estos patrones se denominan *auto-imágenes negativas* ya que, por ejemplo, para una rejilla binaria cuadrada (también conocida como rejilla Ronchi), desplazarla medio periodo equivale a obtener su negativo. La localización del conjunto de auto-imágenes generadas por la rejilla, incluyendo entre ellas las negativas, viene determinado por

$$z = Qz_T, \quad Q = \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots \tag{2.7}$$

donde el índice Q toma, como vemos, valores medios. Cuando Q es un número impar medio, se tiene una auto-imagen negativa, en caso contrario, se tiene una auto-imagen *normal* (también llamadas *positivas*). Entre dos auto-imágenes positivas

siempre hay una negativa y a la inversa y la separación entre dos auto-imágenes sucesivas es $z_T/2 = d^2/\lambda$.

Las distribuciones de amplitud generadas por rejillas de difracción de baja frecuencia no son las únicas capaces de replicarse periódicamente por propagación libre, de hecho, éstas son un subconjunto de otra clase de objetos, denominados *objetos de Montgomery*, que proporcionan auto-imágenes.

2.2 ANILLOS DE MONTGOMERY.

El objetivo de la investigación que Montgomery realizó en 1967 [6] fue el de establecer las propiedades de un campo que es capaz de repetirse por sí mismo a lo largo de la dirección de propagación (fenómeno de auto-imágenes); Montgomery fue el primero en preguntarse si la periodicidad lateral del objeto era una condición necesaria o suficiente para que ocurriera el efecto Talbot. En esta sección se hará una revisión breve del análisis que Montgomery hizo y se discutirán sus resultados.

En términos de la teoría escalar de difracción, el campo $u(x, y, z)$ que se genera delante del objeto debe satisfacer la ecuación de onda reducida (ec. de Helmholtz):

$$\nabla^2 u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0 \quad (2.8)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$, y λ es la longitud de onda de la luz incidente.

Si $u(x, y, z)$ representa una función de campo tridimensional que es periódico a lo largo de la dirección del eje z con un periodo Δz , entonces puede ser descrito en forma de una serie de Fourier [5]:

$$u(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y) \exp\left(\frac{i2\pi mz}{\Delta z}\right) \quad (2.9)$$

donde los términos con $m < 0$ serán descartados ya que representan ondas evanescentes. Si $f(x, y)$ es la transmitancia del objeto, la ecuación anterior debe satisfacer la relación

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y) = f(x, y). \quad (2.10)$$

Cuando el campo $u(x, y, 0)$ se introduce en la Ec. (2.8) se debe cumplir con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \left[1 - \left(\frac{m\lambda}{\Delta z} \right)^2 \right] v_m(x, y) = 0. \quad (2.11)$$

Existen varias soluciones para ésta ecuación las cuales dependen del signo del término en corchetes [7]. Si suponemos que $\left[1 - (m\lambda/\Delta z)^2 \right] < 0$ se obtienen ondas que divergen para valores de $\pm\infty$ para x e y , lo cual no es de nuestro interés. Si se toma $\left[1 - (m\lambda/\Delta z)^2 \right] = 0$ se obtienen ondas planas propagándose en la dirección z . Por lo tanto, solo se tomará en cuenta el caso que corresponde a la condición $\left[1 - (m\lambda/\Delta z)^2 \right] > 0$, o lo que es lo mismo $\Delta z/\lambda > m \geq 1$.

La condición anterior establece que aunque se considere un objeto periódico infinito con periodo d , existe un valor límite de réplicas del objeto dado por m_{\max} y debido a que el efecto Talbot se verifica para un periodo $\Delta z = 2d^2/\lambda$, entonces

$$m_{\max} = \frac{2d^2}{\lambda^2}, \quad (2.12)$$

esto implica que la distancia máxima de verificación será:

$$Z_{\max} = m_{\max} \frac{2d^2}{\lambda}. \quad (2.13)$$

Ahora, si utilizamos la representación en el espacio de frecuencias del campo se tiene que $\tilde{v}_m(u, v) = \mathcal{F}\{v_m(x, y)\}$, entonces:

$$v_m(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_m(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)] dudv, \quad (2.14)$$

donde la integración se lleva a cabo sobre el plano $\xi = (u, v)$, en el dominio de las frecuencias espaciales.

Sustituyendo la Ec. (2.14) en la Ec. (2.8) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_m(u, v) \times \exp[i2\pi(ux + vy)] \times \left\{ -4\pi^2(u^2 + v^2) + k^2 \left[1 - \left(\frac{m\lambda}{\Delta z} \right)^2 \right] \right\} dudv = 0. \quad (2.15)$$

La Ec. (2.15) se puede cumplir de varias formas, si el término entre llaves es igual a 0, o si $\tilde{v}_m = 0$, y si las dos condiciones anteriores se cumplen

simultáneamente. Cuando el término entre llaves es igual a 0, entonces esto significa que

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{m}{\Delta z} \right)^2 = \rho_m^2. \quad (2.16)$$

En otras palabras, la función de transmitancia de los objetos que producen auto-imágenes deberá ser tal que sus frecuencias espaciales sean discretas y también deben estar localizadas sobre anillos de radio ρ_m los cuales son llamados *anillos de Montgomery*.

Existen ciertos aspectos de la Ec. (2.16) de los cuales vale la pena hacer énfasis, ésta ecuación describe los anillos de Montgomery para el caso en el que las frecuencias espaciales de un objeto para el cual $|\xi| > 1/\lambda$ son fuertemente atenuadas tan sólo a unas cuantas longitudes de onda de distancia del objeto y por lo tanto no se podrán observar en el plano $z = \Delta z \gg \lambda$. A ésta condición se le conoce como condición fuerte de auto-imagen (*strong imaging*) [6]. Por lo tanto esto significa que se producirán imágenes fieles solo para frecuencias espaciales de hasta $1/\lambda$, pero $\mathcal{F}(\xi) = 0$ será sustituido por aquellas frecuencias espaciales para las cuales $|\xi| > 1/\lambda$.

Ahora, si consideramos objetos para los cuales $\mathcal{F}(\xi) = 0$ cuando la frecuencia espacial ξ yace fuera de un círculo de radio $N \ll 1/\lambda$ entonces estaremos hablando de la condición débil de auto-imagen (*weak imaging*) [6], en otras palabras, esta condición establece que el espectro de Fourier del objeto deberá tomar valores distintos de cero exclusivamente en un conjunto de anillos concéntricos cuyos radios varían con la raíz cuadrada de los números naturales y su valor estará dado por

$$\rho_m = \left(\frac{2|m|}{\lambda \Delta z} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

La Ec. (2.17) es de mucha importancia en este trabajo y se retomará en el capítulo 4 cuando se hable de la estructura en modos coherentes de campos de auto-imagen.

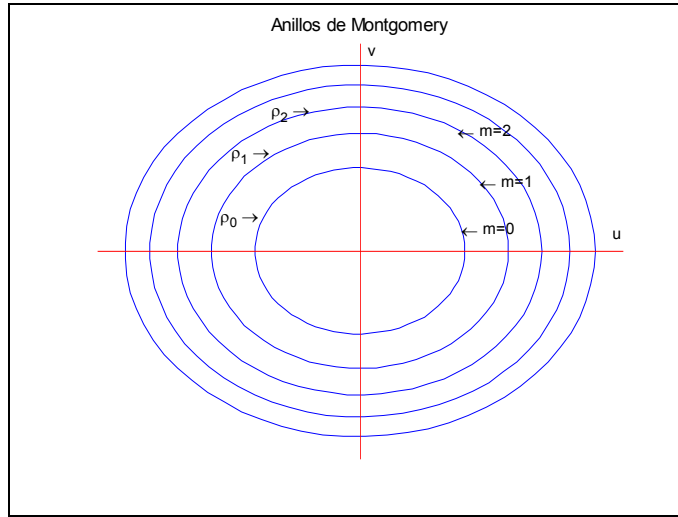


Fig. 2.2.- Anillos de Montgomery. Los anillos indican las regiones en el espacio de frecuencias en las que el espectro de Fourier de un objeto capaz de proporcionar auto-imágenes puede ser no nulo.

Como cada $v_m(u, v)$ debe ser nulo excepto en un anillo particular m de radio ρ_m , tendrá una expresión en coordenadas polares del tipo [8]:

$$v_m(u, v) = v_m(\rho, \theta) = C_m \delta(\rho - \rho_m) \phi_m(\theta), \quad (2.18)$$

donde $\rho_m = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $\theta = \arctan(u/v)$, o $u = \rho \cos \theta$ y $v = \rho \sin \theta$, y $\phi_m(\theta)$ es una función de modulación angular. Reemplazando esto en la Ec. (2.14) se obtiene

$$v_m(x, y) = C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\theta) e^{i2\pi\rho[x\cos\theta + y\sin\theta]} d\theta. \quad (2.19)$$

Utilizando coordenadas cilíndricas se obtiene

$$v_m(x, y) = v_m(r, \varphi) = C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\theta) e^{i2\pi r \cos(\theta - \varphi)} d\theta. \quad (2.20)$$

Con la expresión anterior, la función periódica de la Ec. (2.9) puede representarse como:

$$u(x, y, z) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\theta) e^{i2\pi[\rho r \cos(\theta - \varphi) + mz/\Delta z]} d\theta. \quad (2.21)$$

Luego, todos los objetos capaces de generar auto-imágenes tendrán una función de transmitancia de la forma [9]:

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\theta) e^{i2\pi r \cos(\theta - \varphi)} d\theta, \quad (2.22)$$

donde $m_{\max} \leq \frac{\Delta z}{\lambda}$.

Se puede demostrar que en el caso de anillos equidistantes en un plano de frecuencias, característicos de rejillas de difracción que son circulares, o los puntos equidistantes que son característicos de rejillas de difracción lineales, corresponden a anillos de Montgomery con el número $n = 0, 1, 4, 9, \dots m^2$. Por lo tanto, los objetos con periodicidad lateral representan un subconjunto de todos los objetos capaces de generar auto-imágenes. En otras palabras, la periodicidad lateral del objeto es suficiente pero no necesaria para obtener auto-imágenes [8].

2.3 EFECTO LAU.

El efecto Lau se refiere a cierto fenómeno de interferencia que involucra a un sistema de doble rejilla [10]. En 1948, Lau examinó el patrón de interferencia producido por dos rejillas de difracción gruesas lineales e idénticas, posicionadas una detrás de la otra y siendo iluminadas por una fuente de luz blanca extendida (ver fig. 2.3). Se observaron franjas de color en infinito para diferentes distancias de separación z_0 . Estas separaciones dependen de la longitud de onda utilizada y del periodo de las rejillas. Si se filtra el ancho de banda de la fuente de luz blanca extendida entonces se podrán observar franjas con mayor contraste para rejillas que tengan un ancho estrecho en la separación entre líneas. Lau encontró que esto se observa cuando $z_0 = nd^2/2\lambda$, donde d es el periodo de la rejilla, y λ es la longitud de onda media.

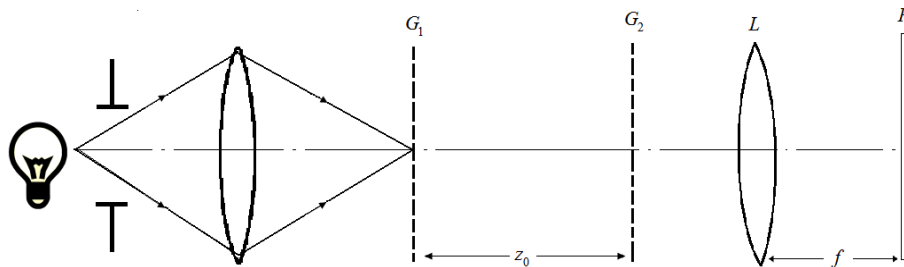


Fig. 2.3.- Experimento de Lau. Las dos rejillas G_1 y G_2 , son iluminadas por una fuente de luz extendida. La observación toma lugar en el plano focal posterior F de una lente convergente L (f : longitud focal de L).

2.3.1 DESCRIPCIÓN DEL EFECTO LAU.

Ahora se desea describir el arreglo del experimento de Lau más a fondo. Para proveer iluminación incoherente, una fuente de luz extendida iluminará a la primera rejilla G_1 , y así, se podrá considerar como un objeto auto-luminiscente. Para un primer

entendimiento se hace la siguiente simplificación, se asume que el ancho de la separación entre líneas o rendijas de cada una de las rejillas debe ser muy pequeño en comparación con la distancia de separación d de las rendijas. Entonces una línea S perteneciente a G_1 actuará como una fuente lineal de la cual emerge una onda cilíndrica (fig. 2.4). Esta onda creará fuentes secundarias de luz en las rendijas P_0, P_1, \dots que pertenecen a la rejilla G_2 .

Éstas fuentes secundarias de luz irradiarán con fases iguales, solo si la longitud de camino $(\overline{SP_0}), (\overline{SP_1}), \dots$ difieren por múltiplos enteros de λ . Esto es posible si la separación entre las dos rejillas es $z_0 = d^2/2\lambda$.

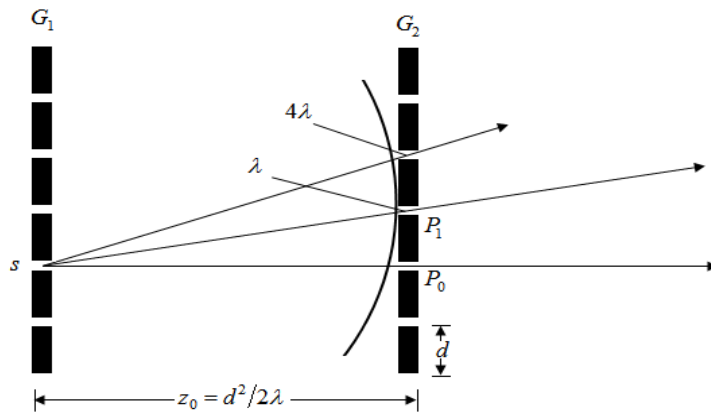


Fig. 2.4.- Explicación Geométrica del efecto Lau. La distancia de una de las rendijas en G_1 hacia varias de las rendijas en G_2 difieren por múltiplos enteros de λ , si es que las rejillas están separadas por una distancia de $z_0 = d^2/2\lambda$.

Para la longitud de onda específica λ , una rendija de G_1 producirá franjas de interferencia en infinito. Dado que la iluminación es incoherente, los patrones de interferencia generados por todas las rendijas de G_1 serán la suma de sus intensidades. Para $z_0 = d^2/2\lambda$ el máximo de todos los patrones de franjas coinciden, de tal forma que se obtendrán franjas de alto contraste. También se podrán observar

patrones de franjas para cualquier $z_0 = nd^2/2\lambda$ con $(n = 1, 2, 3, \dots)$. En el caso de que se utilice luz blanca como iluminación, el mayor contraste de franjas se presentará para la longitud de onda que satisfaga la ecuación anterior. Entonces observaremos un patrón de franjas alternadas de dos colores formado por franjas de longitud de onda λ y su color complementario.

Consideraremos dos transparencias arbitrarias h y g en los planos $z = 0$ y $z = z_0$, respectivamente (ver Fig. 2.5). Se desea calcular la intensidad monocromática $I_\lambda(x)$ en el plano focal posterior de la lente L . Para esto, primero se obtendrá la amplitud compleja $u_\lambda(x, x_1)$ en el plano de observación debido a una fuente puntual localizada en $x' = x_1$, en el plano $z = 0$. El objeto $h(x')$ puede ser considerado como un conjunto de fuente puntuales. Ya que la iluminación es incoherente, la intensidad monocromática $I_\lambda(x)$ se obtiene sumando las contribuciones de todas las intensidades:

$$I_\lambda(x) = \int |h(x_1)|^2 |u_\lambda(x, x_1)|^2 dx_1. \quad (2.23)$$

La fuente puntual en $x' = x_1$, en el plano $z = 0$ puede ser representada por una función delta.

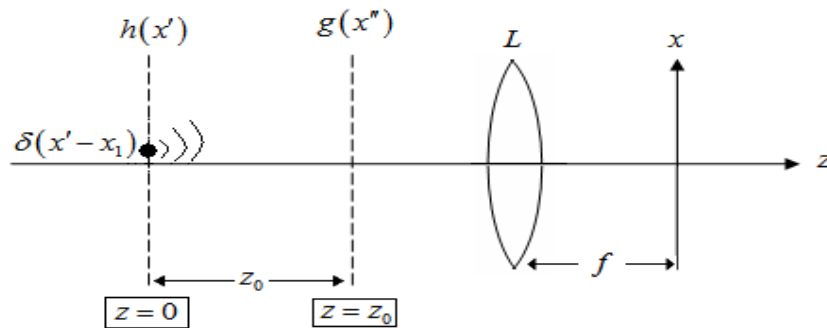


Fig. 2.5.- Arreglo utilizado para nuestro análisis.

La amplitud compleja justo antes del objeto $g(x'')$ en el plano $z = z_0 - 0$ se obtiene mediante una transformación de Fresnel y después, la lente L efectúa una transformación de Fourier [10], lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} u_\lambda(x, x_1) &= \int g(x'') \exp\left\{i\pi \left[x'' - (x_1 + z_0 f^{-1}x)\right]^2 / \lambda z_0\right\} dx'' \\ &= \hat{g}(x_1 + z_0 f^{-1}x). \end{aligned} \quad (2.24)$$

El término $\hat{g}(x)$ significa la transformación de Fresnel de g calculada en el punto x . De acuerdo a la Ec. (2.23) se obtiene el resultado final integrando sobre todas las contribuciones de todas las fuentes puntuales en $z = 0$

$$I_\lambda(x) = \int |h(x_1)|^2 |\hat{g}(x_1 + z_0 f^{-1}x)|^2 dx_1. \quad (2.25)$$

2.4 CONCLUSIONES.

Talbot encontró que el campo difractado por un objeto que es periódico en su coordenada lateral, va a ser periódico en su coordenada longitudinal z . A esto se le conoce como efecto Talbot o fenómeno de auto-imágenes. Talbot concluyó que la periodicidad lateral del objeto es condición suficiente para la periodicidad longitudinal del campo.

Montgomery se dio cuenta que no solo los objetos periódicos presentan la periodicidad longitudinal y después del análisis que hizo en su investigación llegó a la conclusión que la periodicidad lateral del objeto era suficiente pero no necesaria para que se presentará el fenómeno de auto-imágenes.

Por otra parte Lau investigó lo que sucedía si se iluminaba un objeto periódico con luz espacialmente incoherente. Examinó la luz en el campo lejano y encontró que era periódica a lo largo de la coordenada de propagación.

No fue si no hasta que Wolf introdujo su teoría de coherencia parcial y encontró que la función de coherencia debía satisfacer un par de ecuaciones de onda, entonces los resultados de Talbot y Montgomery pueden basarse en la ecuación de Helmholtz y justamente en el capítulo siguiente nos encargaremos de dar una breve explicación de cómo es que se llega a ésta conclusión introduciendo conceptos fundamentales de la teoría de Wolf y dando una solución a la ecuación paraxial de la función de densidad espectral mutua.

CAPÍTULO 3.

TEORÍA ESPECTRAL DE COHERENCIA PARCIAL.

La teoría de coherencia parcial se ocupa de los aspectos estadísticos del fenómeno electromagnético, se refiere al estudio de la función de correlación entre dos puntos arbitrarios en el espacio la cual es generada por la propagación de un campo óptico emergente de una fuente primaria.

En la teoría clásica de coherencia parcial, se sabe que un proceso aleatorio estacionario puede describirse en el dominio de la frecuencia [11] y debido a que un campo ondulatorio, el cual es descrito en el *dominio espacio-tiempo* (la función de coherencia mutua depende de las coordenadas espaciales x_1 , x_2 y del tiempo de retraso τ), también representa un proceso aleatorio al menos en el sentido amplio, nos lleva a la conclusión de que la teoría de coherencia parcial puede ser formulada en el dominio *espacio-frecuencia*. Tales ideas fueron propuestas por Emil Wolf en los años ochenta y a ésta teoría se le conoce como *teoría espectral de coherencia parcial*. En seguida se hace una breve revisión de la misma introduciendo conceptos básicos y algunas definiciones que son importantes para este trabajo.

3.1 FUNCIONES DE COHERENCIA.

Se sabe que una señal analítica representa un proceso aleatorio estacionario [11], entonces su descripción en un punto del espacio \mathbf{r} , estará dada por la función de correlación

$$\Gamma_U(\mathbf{r}; \tau) = E[U(\mathbf{r}, t)U^*(\mathbf{r}, t + \tau)], \quad (3.1)$$

donde τ es una variable independiente y \mathbf{r} es un parámetro vectorial. En el contexto de este trabajo la función de correlación $\Gamma_U(\mathbf{r}; \tau)$ será llamada *función de coherencia*. Cuando $\tau = 0$, la función (3.1) toma la forma

$$\Gamma_U(\mathbf{r}; 0) = E[|U(\mathbf{r}, t)|^2] = I_U(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

donde la cantidad $I_U(\mathbf{r})$ es conocida como *intensidad óptica* (media).

Para obtener la descripción de un campo luminoso en todo el espacio se puede utilizar la función de correlación mutua definida para todos los pares posibles de puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , es decir,

$$\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = E[U(\mathbf{r}_1, t)U^*(\mathbf{r}_2, t + \tau)]. \quad (3.3)$$

La función $\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$ se conoce como *función de coherencia mutua*. Cuando $\tau = 0$, la función (3.3) toma la forma

$$\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) = E[U(\mathbf{r}_1, t)U^*(\mathbf{r}_2, t)] = J_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (3.4)$$

donde la cantidad $J_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ es conocida como *intensidad óptica mutua* (media).

Ahora cuando $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$,

$$J_U(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = I_U(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Usando la noción que se tiene por señal óptica [12], es posible reescribir las ecuaciones (3.3) - (3.5) de la siguiente forma

$$\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \Gamma_V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \exp(-i2\pi\nu_0\tau), \quad (3.6)$$

$$J_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0), \quad (3.7)$$

$$I_U(\mathbf{r}) = \Gamma_V(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) = I_V(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

donde

$$\Gamma_V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = E[V(\mathbf{r}_1, t)V^*(\mathbf{r}_2, t + \tau)] \quad (3.9)$$

es la función de coherencia mutua de la señal óptica $V(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) \exp[-i2\pi\nu_0 t]$.

Se puede ver de la Ec. (3.6), que la función $\Gamma_V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$ representa la envolvente compleja de la función $\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$.

Usando algunas propiedades de la función de correlación mutua [11], se pueden escribir las siguientes relaciones para la función de coherencia mutua:

$$\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; -\tau) = \Gamma_U^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau), \quad (3.10)$$

$$|\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \leq [I_U(\mathbf{r}_1)I_U(\mathbf{r}_2)]^{1/2}. \quad (3.11)$$

La desigualdad (3.11) permite definir la función de coherencia normalizada

$$\gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)}{[I_U(\mathbf{r}_1)I_U(\mathbf{r}_2)]^{1/2}}, \quad (3.12)$$

que se conoce como el *grado complejo de coherencia mutua*. Por tanto de las Ecs. (3.11) y (3.12) se sigue que

$$0 \leq |\gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \leq 1. \quad (3.13)$$

La propiedad anterior sirve para dar una definición del concepto de coherencia de la luz. Se dice que la luz es:

completamente coherente si

$$|\gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| = 1, \quad (3.14)$$

completamente incoherente si

$$|\gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| = 0, \quad (3.15)$$

parcialmente coherente si

$$0 < |\gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| < 1. \quad (3.16)$$

A partir de aquí se hace una distinción entre dos tipos de coherencia: la *coherencia temporal* y la *coherencia espacial*. La coherencia temporal se refiere a que las oscilaciones luminosas son correlacionadas entre sí en dos diferentes momentos del tiempo, y la coherencia espacial significa que éstas son correlacionadas entre sí en dos diferentes puntos del espacio.

La coherencia temporal puede ser evaluada cuantitativamente por el ancho efectivo τ_c de la función

$$\gamma_U(\mathbf{r}; \tau) = \frac{\Gamma_U(\mathbf{r}; \tau)}{I_U(\mathbf{r})}, \quad (3.17)$$

llamada *grado complejo de coherencia*. El valor de τ_c , llamado *tiempo de coherencia*, se determina por [11]:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |\gamma_U(\mathbf{r}; \tau)|^2 d\tau. \quad (3.18)$$

Cuanto más grande es τ_c , tanto más coherente es la luz en el tiempo y viceversa.

Podemos evaluar cuantitativamente la coherencia espacial por medio del ancho efectivo $r_c = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ de la función

$$\mu_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) = \frac{J_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{[I_U(\mathbf{r}_1)I_U(\mathbf{r}_2)]^{1/2}}, \quad (3.19)$$

llamada *coeficiente complejo de coherencia*. El valor de r_c llamado *longitud de coherencia*, se determina como [12]:

$$r_c = \int_0^{\infty} |\mu_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 dr. \quad (3.20)$$

Cuanto más grande es r_c , tanto más coherente es la luz en el espacio y viceversa.

El tiempo de coherencia τ_c y la longitud de coherencia r_c están relacionados con el ancho de banda de frecuencias $\Delta\nu$ y la dimensión angular α de la fuente de la siguiente manera:

$$\tau_c \approx 1/\Delta\nu, \quad (3.21)$$

$$r_c \approx 1/\alpha. \quad (3.22)$$

Se concluye que la onda plana monocromática representa un campo luminoso completamente coherente en el tiempo y en el espacio.

3.2 DENSIDAD ESPECTRAL MUTUA DEL CAMPO ONDULATORIO.

Ahora consideremos un campo ondulatorio representado por la señal analítica aleatoria $U(\mathbf{r}, t)$ en el dominio finito D . Tal campo puede ser descrito por la función de coherencia mutua

$$\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = E[U(\mathbf{r}_1, t)U^*(\mathbf{r}_2, t + \tau)], \quad \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in D. \quad (3.23)$$

Usando el teorema de Wiener-Khinchin [11], se puede expresar la *función de densidad espectral mutua* del campo ondulatorio como la transformada de Fourier de la función de coherencia mutua $\Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$:

$$W_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \quad (3.24)$$

La función $W_U(r_1, r_2; \nu)$ describe el comportamiento del campo ondulatorio en el dominio del *espacio*(r) - *frecuencia*(ν) y juega un papel fundamental en la teoría espectral de coherencia parcial. A partir de la función $W_U(r_1, r_2; \nu)$, se define la *intensidad óptica espectral* en el punto r a la frecuencia ν como

$$I_U(r; \nu) = W_U(r, r; \nu). \quad (3.25)$$

Por analogía de la definición del *grado complejo de coherencia mutua* (3.12), es posible definir el *coeficiente complejo de coherencia espacial a la frecuencia* ν mediante la fórmula:

$$\mu_U(r_1, r_2; \nu) = \frac{W_U(r_1, r_2; \nu)}{[I_U(r_1; \nu)I_U(r_2; \nu)]^{1/2}} \quad (3.26)$$

La normalización de la Ec. (3.26) garantiza que, para todos los valores de los argumentos r_1 y r_2 ,

$$0 \leq |\mu_U(r_1, r_2; \nu)| \leq 1. \quad (3.27)$$

En el caso extremo, cuando $|\mu_U(r_1, r_2; \nu)| = 0$, representa la incoherencia espacial completa; el otro caso extremo, cuando $|\mu_U(r_1, r_2; \nu)| = 1$, representa la coherencia espacial completa.

Ahora consideremos algunas otras de las propiedades importantes de la densidad espectral mutua que van a ser de gran ayuda para nuestro análisis.

La función de densidad espectral mutua se puede expresar como una función de correlación, entonces de forma análoga a la Ec. (3.3), se tiene

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = [V(\mathbf{r}_1, \nu)V^*(\mathbf{r}_2, \nu)], \quad (3.28)$$

Donde el promedio es tomado sobre un ensamble de campos monocromáticos $V(\mathbf{r}, \nu)\exp(-i2\pi\nu t)$, todos de la misma frecuencia ν . Partiendo de la Ec. (3.28), es posible generalizar la representación del espectro angular a campos de cualquier estado de coherencia que se propagan en el semi-espacio $z > 0$ [11]. Para este propósito expresamos cada miembro $V(\mathbf{r}, \nu)$ del ensamble, el cual representa un campo parcialmente coherente en la forma de un espectro angular de ondas planas, es decir:

$$V(\mathbf{r}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} a(p, q; \nu) \exp[ik(px + qy + mz)] dpdq, \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} m &= (1 - p^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{cuando } p^2 + q^2 \leq 1, \\ &= i(p^2 + q^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{cuando } p^2 + q^2 > 1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ y $k = 2\pi\nu/c$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Sustituyendo la Ec. (3.29) en la Ec. (3.28) e intercambiando el orden del promedio e integración se obtiene la siguiente representación del espectro angular doble del campo, en los puntos $[\mathbf{r}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1 \geq 0), \mathbf{r}_2 \equiv (x_2, y_2, z_2 \geq 0)]$, en el semi-espacio $z \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(p_1, q_1; p_2, q_2; \nu) \\
 &\quad \times \exp\left[ik(p_2x_2 + q_2y_2 + m_2z_2 - p_1x_1 - q_1y_1 - m_1^*z_2)\right] \\
 &\quad \times dp_1 dq_1 dp_2 dq_2,
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde

$$\mathcal{A}(p_1, q_1; p_2, q_2; \nu) = E\left[a^*(p_1, q_1; \nu)a(p_2, q_2; \nu)\right]. \tag{3.32}$$

La Ec. (3.31) representa a la densidad espectral mutua del campo a través del semi-espacio $z \geq 0$ como una superposición de pares correlacionados de ondas planas, ambas homogéneas ($p^2 + q^2 \leq 1$) y evanescentes ($p^2 + q^2 > 1$). Las ondas planas formando cada par están, en general, correlacionadas y su correlación es caracterizada por la función $\mathcal{A}(p_1, q_1; p_2, q_2; \nu)$, conocida como *función de correlación angular* [11]. Si proponemos $z_1 = z_2 = z$ en la Ec. (3.31) y tomamos la transformada de Fourier inversa de la expresión resultante, se obtiene la siguiente expresión para la función de correlación angular en términos de la transformada de Fourier de la función de densidad espectral mutua del campo en el plano $z = 0$:

$$\mathcal{A}(p_1, q_1; p_2, q_2; \nu) = k^4 \tilde{W}^{(0)}(-kp_1, -kq_1; kp_2, kq_2; \nu), \tag{3.33}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}^{(0)}(u_1, v_1; u_2, v_2; \nu) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, y_1, 0; x_2, y_2, 0; \nu) \\
 &\quad \times \exp\left[-i(u_1x_1 + v_1y_1 + u_2x_2 + v_2y_2)\right] \\
 &\quad \times dx_1 dy_1 dx_2 dy_2.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Para cualquier campo ondulatorio real la intensidad óptica espectral en el punto r es finita y, por esta razón, la intensidad óptica espectral integrada sobre el dominio D es finita también, es decir [11],

$$\int_D I_U(r; \nu) d\vec{r} = \int_D W_U(r, \vec{r}; \nu) dr < \infty. \quad (3.35)$$

De la desigualdad (3.35) se sigue que la norma de la función $W_U(r_1, r_2; \nu)$ también es finita, o sea [11],

$$\iint_D |W_U(r_1, r_2; \nu)|^2 dr_1 dr_2 < \infty. \quad (3.36)$$

Aquí excluimos el caso trivial cuando la integral en la ecuación (3.36) es cero y suponemos que $W_U(r_1, r_2; \nu)$ es una función continua respecto a r_1 y r_2 en el dominio D .

De la ecuación (3.24) y de las propiedades de la función de coherencia mutua se sigue que

$$W_U(r_2, r_1; \nu) = W_U^*(r_1, r_2; \nu) \quad (3.37)$$

Finalmente, se puede mostrar de la ecuación (3.23) que

$$\iint_D W_U(r_1, r_2; \nu) f_1^*(r_1) f_2(r_2) dr_1 dr_2 \geq 0, \quad (3.38)$$

donde $f(r)$ es una función arbitraria cuadrado integrable.

Las funciones que poseen las propiedades (3.36) - (3.38) son bien conocidas en la teoría de las ecuaciones integrales [11]. En particular, la ecuación (3.36) sostiene que la densidad espectral mutua es un *núcleo de Hilbert-Schmidt*, la relación (3.37) significa que es un *núcleo Hermitiano*, y la desigualdad (3.38) muestra que es *positivamente definido*. Estas propiedades permiten dar una representación más importante a la densidad espectral mutua.

3.3 REPRESENTACIÓN MODAL DE LA DENSIDAD ESPECTRAL MUTUA.

La densidad espectral mutua $W_U(r_2, r_1; \nu)$, puede ser expresada en forma de la expansión de Mercer [11], debido a que es un núcleo de Hilbert-Schmidt, hermitiano y definido positivamente, se puede escribir de la siguiente forma:

$$W_U(r_2, r_1; \nu) = \sum_n \lambda_n(\nu) \varphi_n^*(r_1; \nu) \varphi_n(r_2; \nu), \quad (3.39)$$

la cual converge absoluta y uniformemente. En la Ec. (3.39) $\lambda_n(\nu)$ son los eigenvalores y $\varphi_n(r; \nu)$ son las eigenfunciones de la ecuación integral homogénea de Fredholm con el núcleo $W_U(r_2, r_1; \nu)$,

$$\int_D W_U(r_2, r_1; \nu) \varphi_n(r_1; \nu) dr_1 = \lambda_n(\nu) \varphi_n(r_2; \nu). \quad (3.40)$$

Debido a las propiedades (3.37) y (3.38), todos los eigenvalores son reales y positivos,

$$\lambda_n(\nu) = \lambda_n^*(\nu) \geq 0. \quad (3.41)$$

Además, los eigenvalores pueden considerarse como mutuamente ortonormales, es decir,

$$\int_D \varphi_n^*(\mathbf{r}; \nu) \varphi_m(\mathbf{r}; \nu) d\mathbf{r} = \delta_{nm}, \quad (3.42)$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker.

La Ec. (3.39) se puede escribir de la forma

$$W_U(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \nu) = \sum_n W_U^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu), \quad (3.43)$$

donde

$$W_U^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \lambda_n(\nu) \varphi_n^*(\mathbf{r}_1; \nu) \varphi_n(\mathbf{r}_2; \nu) \quad (3.44)$$

es la *densidad espectral mutua parcial*, la cual puede ser asociada con un *modo natural de oscilación del campo ondulatorio*. De las ecuaciones (3.44) y (3.26) se sigue que el coeficiente complejo de coherencia espacial de cada uno de los modos se da por [11]:

$$\mu_U^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{W_U^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)}{[I_U^{(n)}(\mathbf{r}_1; \nu) I_U^{(n)}(\mathbf{r}_2; \nu)]^{1/2}} = \frac{\varphi_n^*(\mathbf{r}_1; \nu) \varphi_n(\mathbf{r}_2; \nu)}{|\varphi_n(\mathbf{r}_1; \nu)| |\varphi_n(\mathbf{r}_2; \nu)|}. \quad (3.45)$$

La Ec. (3.45) sostiene que

$$|\mu_U^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)| = 1 \quad (3.46)$$

para todos los valores de los argumentos r_1, r_2 y ν , es decir, cada modo representa una contribución elemental completamente coherente en el espacio. De esta manera, establecemos el siguiente resultado fundamental de la teoría espectral de coherencia parcial: *la densidad espectral mutua del campo ondulatorio estacionario puede ser expresada como la superposición lineal de las contribuciones elementales (densidades espectrales mutuas parciales) asociadas con modos de oscilación que son completamente coherentes en el espacio.* Por esta razón, nos referimos a la Ec. (3.39) o a la Ec. (3.43) como la *representación modal de la densidad espectral mutua*, y denominamos a $W_U(r_1, r_2; \nu)$, la *densidad espectral mutua modal*.

En el caso particular, en que la ecuación integral (3.40) admite una sola solución $\varphi_1(r; \nu)$ con eigenvalor $\lambda_1(\nu)$, la densidad espectral mutua toma la forma

$$W_U(r_1, r_2; \nu) = W_U^{(1)}(r_1, r_2; \nu) = \lambda_1(\nu) \varphi_1^*(r_1; \nu) \varphi_1(r_2; \nu). \quad (3.47)$$

En este caso, como es posible ver de las ecuaciones (3.47), (3.46) y (3.26), el campo ondulatorio es completamente coherente en el espacio. De aquí se deduce que la Ec. (3.47) es una condición necesaria y suficiente para la coherencia espacial a la frecuencia ν , es decir, *el campo ondulatorio es completamente coherente en el espacio (a la frecuencia particular ν) si y solamente si éste consiste de un solo modo de oscilación.*

3.4 PROPAGACIÓN DE LA DENSIDAD ESPECTRAL MUTUA.

Para describir la propagación de la densidad espectral mutua en el espacio libre entre dos superficies Σ_1 y Σ_2 , (ver fig. 3.1) recordando la definición de la ley de propagación de coherencia mutua [12], será suficiente con cambiar el término

$J_U(P_1, P_2)$ en el integrando por $J_U(P_1, P_2, \nu)$ y tomando en cuenta que $W_U(r_1, r_2; \nu) = J_U(r_1, r_2; \nu)$, llegamos a la conclusión que

$$W_U(s_1, s_2; \nu) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma_1} W_U(r_1, r_2; \nu) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2)\right] \times \frac{\chi(\theta_1)}{r_1} \frac{\chi(\theta_2)}{r_2} dr_1 dr_2. \quad (3.48)$$

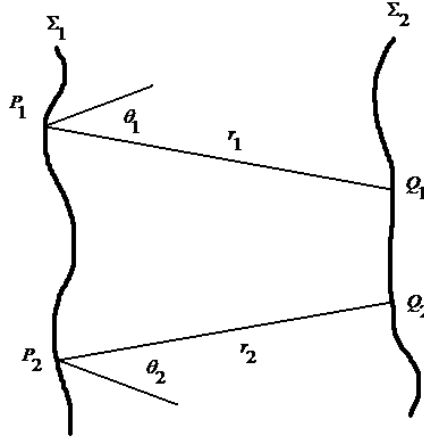


Fig. 3.1.- Geometría del proceso de propagación de la densidad espectral mutua.

Una solución más general de este problema puede ser obtenida si hacemos los mismos cambios en el par de ecuaciones de Helmholtz que la intensidad mutua satisface [12]:

$$\nabla_{r_1}^2 W_U(r_1, r_2; \nu) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 W_U(r_1, r_2; \nu) = 0, \quad (3.49)$$

$$\nabla_{r_2}^2 W_U(r_1, r_2; \nu) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 W_U(r_1, r_2; \nu) = 0. \quad (3.50)$$

Es importante investigar la propagación de la densidad espectral mutua definida en un plano transversal $z = \text{const}$. En la aproximación paraxial se puede separar la variación rápida de la fase a lo largo de la dirección de propagación y escribir la señal óptica a la frecuencia ν como

$$V(\mathbf{r}, \nu) = V'(x, z, \nu) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right), \quad (3.51)$$

donde $V'(x, z, \nu)$ es la componente que varía lentamente en la dirección z y $\mathbf{x} = (x, y)$. Como se sabe, la señal óptica satisface la ecuación de Helmholtz, es decir,

$$\left(\nabla^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)V(\mathbf{r}, \nu) = 0. \quad (3.52)$$

Representando el operador de Laplace en la forma

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.53)$$

donde ∇_{\perp}^2 es su componente transversal respecto a la variable \mathbf{x} , y usando la Ec. (3.51), tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\mathbf{r}, \nu) &= \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \\ &\times \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + i \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) V'(x, z, \nu). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Puesto que la función $V'(x, z, \nu)$ varía lentamente con z , su segunda derivada con respecto a esta variable puede ser despreciada, lo cual nos da en buena aproximación

$$\nabla^2 V(r, \nu) = \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \left(\nabla_{\perp}^2 + i \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) V'(x, z, \nu). \quad (3.55)$$

Sustituyendo la Ec. (3.55) en la Ec. (3.52), obtenemos la siguiente aproximación paraxial de la ecuación de Helmholtz:

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + i \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) V'(x, z, \nu) = 0. \quad (3.56)$$

Usando la Ec. (3.56) y las transformaciones evidentes, es posible construir un par de ecuaciones

$$\nabla_{1\perp}^2 V'(x_1, z, \nu) V'^*(x_2, z, \nu) + i \frac{4\pi}{\lambda} V'^*(x_2, z, \nu) \frac{\partial}{\partial z} V'(x_1, z, \nu) = 0, \quad (3.57)$$

$$\nabla_{2\perp}^2 V'(x_1, z, \nu) V'^*(x_2, z, \nu) - i \frac{4\pi}{\lambda} V'^*(x_1, z, \nu) \frac{\partial}{\partial z} V'(x_2, z, \nu) = 0, \quad (3.58)$$

donde $\nabla_{1\perp}^2$ y $\nabla_{2\perp}^2$ son los operadores de Laplace transversales con respecto a las variables x_1 y x_2 , respectivamente. Restando la Ec. (3.58) de la Ec. (3.57) y tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} & V'^*(x_2, z, \nu) \frac{\partial}{\partial z} V'(x_1, z, \nu) + V'(x_1, z, \nu) \frac{\partial}{\partial z} V'^*(x_2, z, \nu) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} V'(x_1, z, \nu) V'^*(x_2, z, \nu), \end{aligned} \quad (3.59)$$

tenemos

$$\left(\nabla_{1\perp}^2 - \nabla_{2\perp}^2 + i \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) V'(x_1, z; \nu) V'^*(x_2, z; \nu) = 0, \quad (3.60)$$

o, lo que es equivalente,

$$\left(\nabla_{1\perp}^2 - \nabla_{2\perp}^2 + i \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) E[V'(x_1, z; \nu) V'^*(x_2, z; \nu)] = 0. \quad (3.61)$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.28), se tiene finalmente la expresión

$$\left(\nabla_{1\perp}^2 - \nabla_{2\perp}^2 + i \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) W_U(x_1, x_2, z; \nu) = 0, \quad (3.62)$$

que es la *ecuación de propagación de la densidad espectral mutua transversal en la aproximación paraxial*.

3.5 SOLUCIÓN EXACTA DE LA ECUACIÓN PARAXIAL DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL MUTUA.

Sabemos que la propagación de la función de densidad espectral mutua $W_U(x_1, x_2; z)$ en el espacio libre en la dirección z y dentro de los límites de la aproximación paraxial, es descrita por la Ec. (3.62)

$$\left(\nabla_{1\perp}^2 - \nabla_{2\perp}^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) W_U(x_1, x_2; z) = 0, \quad (3.63)$$

donde $\nabla_{1\perp}^2$ y $\nabla_{2\perp}^2$ son los operadores laplacianos transversales actuando sobre las coordenadas x_1 y x_2 respectivamente, y k es el número de onda asociado con la frecuencia ν . Debido a que la densidad espectral mutua de los modos coherentes del campo obedece la misma ecuación de propagación, se sigue que

$$\left(\nabla_{1\perp}^2 - \nabla_{2\perp}^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_n^*(x_1; z) \Phi_n(x_2; z) = 0. \quad (3.64)$$

Expresando la función $\Phi_n(x; z)$ a través de su espectro $\tilde{\Phi}_n(u; z)$,

$$\Phi_n(x; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_n(u; z) \exp(i2\pi u \cdot x) du, \quad (3.65)$$

e intercambiando el orden de diferenciación e integración, podemos reescribir la Ec. (3.64) como

$$\begin{aligned} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla_{1\perp}^2 - \nabla_{2\perp}^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{\Phi}_n^*(u_1; z) \tilde{\Phi}_n(u_2; z) \\ \times \exp[i2\pi(u_2 \cdot x_2 - u_1 \cdot x_1)] du_1 du_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Después de la aplicación directa de los operadores $\nabla_{1\perp}^2$ y $\nabla_{2\perp}^2$ en la Ec. (3.66) se obtiene

$$\begin{aligned} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{2\pi^2}{k} (u_1^2 - u_2^2) \right] \tilde{\Phi}_n^*(u_1; z) \tilde{\Phi}_n(u_2; z) \\ \times \exp[i2\pi(u_2 \cdot x_2 - u_1 \cdot x_1)] du_1 du_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Multiplicando ambos lados de la Ec. (3.67) por

$$\exp[-i2\pi(u'_2 \cdot x_2 - u'_1 \cdot x_1)], \quad (3.68)$$

e integrando el resultado respecto a x_1 y x_2 , se obtiene

$$\begin{aligned} & \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{2\pi^2}{k} (u_1^2 - u_2^2) \right] \tilde{\Phi}_n^*(u_1; z) \tilde{\Phi}_n(u_2; z) \\ & \quad \times \exp[i2\pi x_2 \cdot (u'_2 - u_2)] \exp[i2\pi x_1 \cdot (u'_1 - u_1)] \\ & \quad \times du_1 du_2 dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Recordando la representación integral de la función delta de Dirac:

$$\delta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm 2i\pi ux) dx, \quad (3.70)$$

podemos escribir la Ec. (3.69) como sigue:

$$\begin{aligned} & \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{2\pi^2}{k} (u_1^2 - u_2^2) \right] \tilde{\Phi}_n^*(u_1; z) \tilde{\Phi}_n(u_2; z) \\ & \quad \times \delta(u'_2 - u_2) \delta(u'_1 - u_1) du_1 du_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Realizando la integración en la Ec. (3.71) y tomando en cuenta la propiedad de desplazamiento de la función de Dirac, encontramos (salvo un cambio de notación) que:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{2\pi^2}{k} (u_1^2 - u_2^2) \right\} \tilde{\Phi}_n^*(u_1; z) \tilde{\Phi}_n(u_2; z) = 0. \quad (3.72)$$

Como es bien conocido, la solución general de la Ec. (3.72) es

$$\tilde{\Phi}_n^*(u_1; z) \tilde{\Phi}_n(u_2; z) = \tilde{\Phi}_n^*(u_1; 0) \tilde{\Phi}_n(u_2; 0) \exp \left[-i \frac{2\pi^2}{k} (u_1^2 - u_2^2) z \right]. \quad (3.73)$$

La transformada de Fourier tetra-dimensional a ambos lados de la Ec. (3.73) con respecto a u_1 y u_2 da:

$$\begin{aligned} \Phi_n^*(x_1; z) \Phi_n(x_2; z) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_n^*(u_1; 0) \tilde{\Phi}_n(u_2; 0) \exp \left[-i \frac{2\pi^2}{k} z (u_1^2 - u_2^2) \right] \\ &\quad \times \exp [i2\pi (u_2 \cdot x_2 - u_1 \cdot x_1)] du_1 du_2, \end{aligned} \quad (3.74)$$

o, empleando las coordenadas polares (r, φ) para frecuencias espaciales,

$$\begin{aligned} \Phi_n^*(x_1; z) \Phi_n(x_2; z) &= \int \int_0^{2\pi} \int \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_n^*(r_1, \varphi_1; 0) \tilde{\Phi}_n(r_2, \varphi_2; 0) \\ &\quad \times \exp \left[-i \frac{2\pi}{k} z (r_1^2 - r_2^2) \right] \\ &\quad \times \exp [i2\pi (x_2 r_2 \cos \varphi_2 + y_2 r_2 \sin \varphi_2)] \\ &\quad \times \exp [-i2\pi (x_1 r_1 \cos \varphi_1 + y_1 r_1 \sin \varphi_1)] \\ &\quad \times r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\varphi_1 d\varphi_2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

El resultado anterior fue presentado por primera vez por A. Ostrovsky [13], y describe la propagación (en el espacio libre) de la estructura en modos coherentes del campo.

3.6 CONCLUSIONES.

Se hizo un breve repaso de los conceptos fundamentales de coherencia parcial, se mostró que la función de densidad espectral mutua puede ser descrita en términos de la función de correlación angular y también que posee ciertas propiedades que permiten que sea expresada como una representación modal del campo.

También se vio que la función de densidad espectral mutua debe satisfacer un par de ecuaciones de Helmholtz y se llegó a la ecuación que describe su propagación en la aproximación paraxial.

Por último, se resolvió dicha ecuación utilizando la expansión modal de la función de densidad espectral mutua y se obtuvo como resultado la ecuación (3.75), la cual representa la propagación en el espacio libre de la estructura modal del campo.

La Ec. (3.75) representa una clara aplicación de la nueva teoría modal de Wolf la cual es de gran relevancia debido al tipo de información que nos proporciona, y también de igual importancia significa conocer la forma que los modos coherentes del campo deben de tener para presentar el fenómeno de auto-imágenes, así que en el próximo capítulo damos a conocer la forma que dicha estructura modal debe poseer.

CAPÍTULO 4.

ESTRUCTURA EN MODOS COHERENTES DE CAMPOS DE AUTO-IMÁGENES.

De gran interés resulta conocer la estructura modal de cualquier campo óptico de auto-imágenes. Utilizando la teoría modal de coherencia parcial de Wolf, en este capítulo hallamos la estructura en modos coherentes de los campos ópticos de auto-imágenes resolviendo la ecuación diferencial que describe la propagación de los modos coherentes bajo la condición de auto-imagen.

4.1 ESTRUCTURA MODAL GENERAL DE AUTO-IMÁGENES.

Ya que deseamos hallar la estructura en modos coherentes de un campo que presenta el fenómeno de auto-imágenes, regresamos a la solución de la ecuación paraxial de los modos coherentes del campo (ver Ec. (3.75)):

$$\begin{aligned}
 \Phi_n^*(\mathbf{x}_1; z) \Phi_n(\mathbf{x}_2; z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\Phi}_n^*(r_1, \varphi_1; 0) \tilde{\Phi}_n(r_2, \varphi_2; 0) \\
 &\quad \times \exp\left[-i \frac{2\pi}{k} z (r_1^2 - r_2^2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[i 2\pi (x_2 r_2 \cos \varphi_2 + y_2 r_2 \sin \varphi_2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[-i 2\pi (x_1 r_1 \cos \varphi_1 + y_1 r_1 \sin \varphi_1)\right] \\
 &\quad \times r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\varphi_1 d\varphi_2,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

y consideramos ahora que la función de densidad espectral mutua satisface la siguiente condición de auto-imagen [2]:

$$W(x_1, y_1, z + d; x_2, y_2, z + d) = W(x_1, y_1, z; x_2, y_2, z), \tag{4.2}$$

lo cual implica que la densidad espectral mutua es la misma en dos planos separados por un múltiplo entero de alguna distancia d .

En este caso se debe cumplir que:

$$\Phi_n^*(\mathbf{x}_1; z + d) \Phi_n(\mathbf{x}_2; z + d) = \Phi_n^*(\mathbf{x}_1; z) \Phi_n(\mathbf{x}_2; z) \tag{4.3}$$

donde d es el periodo a lo largo de la coordenada de propagación, aplicando ésta última condición a la ecuación (4.1), llegamos a la conclusión de que ésta última igualdad se satisface si

$$r_1^2 - r_2^2 = \frac{mk}{\pi d} = \frac{2m}{\lambda d}; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4.4}$$

(si $m = 0$, caemos en el caso de campos ópticos invariantes en propagación) por lo tanto

$$r_i = \sqrt{\frac{2|m|}{\lambda d} + r_n^2}, \quad i = 1, 2 \quad (4.5)$$

donde r_n es un parámetro real, ésta última relación nos indica que en el dominio de frecuencias, estas se encuentran sobre círculos de radios dados por la Ec. (4.5), y para el caso en el que $r_n = 0$, se obtiene:

$$r_i = \sqrt{\frac{2|m|}{\lambda d}}, \quad i = 1, 2 \quad (4.6)$$

la cual es la bien conocida condición débil de auto-imagen de Montgomery [6] obtenida en el capítulo 2, ver Ec. (2.17). A partir de estos razonamientos se propone:

$$\tilde{\Phi}_n(r, \varphi; 0) = Q_n(r, \varphi) \sum_{p=1}^N \delta(r - r_{np}), \quad (4.7)$$

donde Q_n es una función arbitraria compleja y

$$r_{np} = \sqrt{\frac{2p}{\lambda d} + r_n^2}, \quad (4.8)$$

sustituyendo (4.7) en la Ec. (4.1) y tomando en cuenta la Ec. (4.3), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Phi_n^*(\mathbf{x}_1; z)\Phi_n(\mathbf{x}_2; z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{\Phi}_n^*(r_1, \varphi_1; 0)\tilde{\Phi}_n(r_2, \varphi_2; 0) \\
 &\quad \times \exp\left[-i\frac{2\pi^2}{k}z(r_1^2 - r_2^2)\right] \exp\left[-i\frac{2\pi^2}{k}d(r_1^2 - r_2^2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[i2\pi(x_2r_2 \cos \varphi_2 + y_2r_2 \sin \varphi_2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[-i2\pi(x_1r_1 \cos \varphi_1 + y_1r_1 \sin \varphi_1)\right] \\
 &\quad \times r_1r_2dr_1dr_2d\varphi_1d\varphi_2 \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty Q_n^*(r_1, \varphi_1)Q_n(r_2, \varphi_2) \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \delta(r_1 - r_{np})\delta(r_2 - r_{nq}) \\
 &\quad \times \exp\left[-i\frac{2\pi^2}{k}z(r_1^2 - r_2^2)\right] \exp\left[-i\frac{2\pi^2}{k}d(r_1^2 - r_2^2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[i2\pi(x_2r_2 \cos \varphi_2 + y_2r_2 \sin \varphi_2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[-i2\pi(x_1r_1 \cos \varphi_1 + y_1r_1 \sin \varphi_1)\right] \\
 &\quad \times r_1r_2dr_1dr_2d\varphi_1d\varphi_2
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

tomando en cuenta la propiedad de desplazamiento de la función delta de Dirac [14], e intercambiando el orden de integración y de la suma en la última identidad se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Phi_n^*(\mathbf{x}_1; z)\Phi_n(\mathbf{x}_2; z) &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \int_0^{2\pi} \int_0^\infty Q_n^*(r_{np}, \varphi_1)Q_n(r_{nq}, \varphi_2) \\
 &\quad \times \exp\left[-i\frac{2\pi^2}{k}z(r_{np}^2 - r_{nq}^2)\right] \exp\left[-i\frac{2\pi^2}{k}d(r_{np}^2 - r_{nq}^2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[i2\pi(x_2r_{nq} \cos \varphi_2 + y_2r_{nq} \sin \varphi_2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[-i2\pi(x_1r_{np} \cos \varphi_1 + y_1r_{np} \sin \varphi_1)\right] r_{np}r_{nq}d\varphi_1d\varphi_2,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ahora, recordando que

$$r_{np}^2 = \left(\frac{2p}{\lambda d} + r_n^2 \right), \quad r_{nq}^2 = \left(\frac{2q}{\lambda d} + r_n^2 \right), \quad (4.11)$$

y esto a su vez implica que:

$$r_{np}^2 - r_{nq}^2 = \frac{2}{\lambda d} (p - q), \quad (4.12)$$

entonces sustituyendo (4.12) en (4.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_n^*(\mathbf{x}_1; z) \Phi_n(\mathbf{x}_2; z) &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N r_{np} r_{nq} \exp \left[-i \frac{2\pi}{d} z (p - q) \right] \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_n^*(r_{np}, \varphi_1) Q_n(r_{nq}, \varphi_2) \\ &\times \exp \left[i 2\pi (x_2 r_{nq} \cos \varphi_2 + y_2 r_{nq} \sin \varphi_2) \right] \\ &\times \exp \left[-i 2\pi (x_1 r_{np} \cos \varphi_1 + y_1 r_{np} \sin \varphi_1) \right] d\varphi_1 d\varphi_2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

empleando las coordenadas polares (ρ, θ) en el plano \mathbf{x} , y separando las sumas e integrales se sigue de la ecuación (4.13) que:

$$\begin{aligned} \Phi_n(\rho, \theta; z) &= \sum_{p=1}^N r_{np} \exp \left[i \frac{2\pi p}{d} z \right] \\ &\times \int_0^{2\pi} Q_n(r_{np}, \varphi) \exp \left[i 2\pi \rho r_{np} \cos(\varphi - \theta) \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (4.14)$$

expandiendo $Q_n(r_{np}, \varphi)$ en serie de Fourier

$$Q_n(r_{np}, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_{npl} \exp(il\varphi), \quad (4.15)$$

y recordando la representación integral de las funciones Bessel [15], podemos reescribir la Ec. (4.14) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Phi_n(\rho, \theta; z) = & 2\pi \sum_{p=1}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{np} \alpha_{npl} \exp\left(i \frac{2\pi p}{d} z\right) \exp\left(i \frac{\pi}{2} l\right) \\ & \times \exp(il\theta) J_l(2\pi\rho r_{np}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde J_l denota la función Bessel del primer tipo y de orden l . Recordemos ahora que para describir la estructura en modos coherentes de campo, las funciones $\Phi_n(\rho, \theta; z)$ deben ser ortonormales [11], es decir deben cumplir con la siguiente condición:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^a \Phi_n^*(\rho, \theta; z) \Phi_m(\rho, \theta; z) \rho dz d\rho d\theta = \delta_{nm}. \quad (4.17)$$

Sustituyendo la Ec. (4.16) en la Ec. (4.17) y realizando la integración axial y azimutal obtenemos [13, 16]

$$\delta_{nm} = d(2\pi)^3 \sum_{p=1}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{np} r_{mp} \alpha_{npl}^* \alpha_{mpl} \int_0^R J_l(2\pi\rho r_{np}) J_l(2\pi\rho r_{mp}) \rho d\rho. \quad (4.18)$$

De esta forma, se ha mostrado que las funciones $\Phi_n(\rho, \theta; z)$ dadas por la Ec. (4.16) con parámetros r_{np} y α_{npl} determinados por la función de ortonormalidad

(4.18) describen la estructura en modos coherentes de cualquier campo que exhibe el fenómeno de auto-imágenes.

4.2 CASOS PARTICULARES.

4.2.1 EXPRESIÓN GENERAL PARA CAMPOS DE AUTO-IMÁGENES COMPLETAMENTE COHERENTES.

Para mostrar algunos ejemplos de campos que presentan el fenómeno de auto-imagen a partir de la Ec. (4.16), analizaremos por el momento el caso de coherencia completa, en este caso, el campo consiste de un solo modo. Este hecho puede ser tomado en cuenta si elegimos los parámetros α_{npl} y r_{np} en la Ec. (4.16) como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_{npl} &= \begin{cases} \alpha_{0pl} & \text{para } n = 0, \\ 0 & \text{para } n \neq 0. \end{cases} \\ r_{np} &= r_{0p}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Debido a que la condición (4.18) no tiene sentido en este caso, los valores α_{0pl} y r_{0p} pueden ser arbitrarios. Por lo tanto, de la Ec. (4.16),

$$\begin{aligned} \Phi_0(\rho, \theta; z) &= 2\pi \sum_{p=1}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{0p} \alpha_{0pl} \exp\left(i \frac{2\pi p}{d} z\right) \exp\left(i \frac{\pi}{2} l\right) \\ &\times \exp(il\theta) J_l(2\pi\rho r_{0p}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

la cual es la bien conocida expresión general para campos de auto-imagen completamente coherentes [8, 16].

Ahora, en el caso particular en que

$$\alpha_{0pl} = \begin{cases} \alpha_{0p0} & \text{para } l = 0, \\ 0 & \text{para } l \neq 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

$$r_{0p} = (p-1)/d_0.$$

la ecuación (4.20) se reduce a

$$\Phi_0(\rho, \theta; 0) = \sum_{p=0}^N A_p J_0(2\pi p\rho/d_0). \quad (4.22)$$

En las referencias [8, 16] se muestra que esta ecuación se aproxima a una rejilla circular.

Como otro ejemplo particular adicional de la Ec. (4.20) podemos obtener la rejilla lineal escogiendo los parámetros de la siguiente forma:

$$\alpha_{0pl} = \beta_p \frac{1}{2\pi} [1 + \exp(il\pi)], \quad (4.23)$$

$$r_{0p} = \rho/d_0,$$

donde β_p es un parámetro constante. En este caso, la Ec. (4.20) se reduce a través de la expansión Jacobi – Anger a

$$\Phi_0(\rho, \theta; 0) = \sum_{p=-N}^N A_p \exp\left(i2\pi \frac{p}{d_0} x\right), \quad (4.24)$$

de esta forma se obtiene la expresión de una rejilla lineal de perfil arbitrario dependiente de los coeficientes A_p [8, 16].

4.2.2 EFECTO LAU.

Aquí se analiza el caso en donde se presenta incoherencia completa, en este caso, el campo consiste de un número infinito de modos. Si reescribimos la Ec. (4.16) y elegimos al parámetro α_{npl} de la siguiente forma:

$$\alpha_{npl} = \begin{cases} \alpha_{nml} & \text{para } p = n, \\ 0 & \text{para } p \neq n. \end{cases} \quad (4.25)$$

entonces cada modo del campo tendrá la siguiente forma:

$$\Phi_n(\rho, \theta, z) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{nn} \alpha_{nml} \exp\left(\frac{i2\pi n}{d} z\right) i^l \exp(il\theta) J_l(2\pi\rho r_{nn}). \quad (4.26)$$

El objetivo de haber escogido al parámetro α_{npl} como se indica en la Ec. (4.25) es el de asociar un anillo de Montgomery a cada modo del campo, de ésta forma nos estamos asegurando de que cada modo sea coherente solo consigo mismo de la misma manera que ocurre en el efecto Lau.

Por tanto, haciendo uso de la Ec. (3.39), la representación modal de la densidad espectral mutua para el efecto Lau estará descrita por:

$$W_U(\rho_1, \theta_1, z_1; \rho_2, \theta_2, z_2) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \left[\left\{ 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{nl} \alpha_{nl}^* \exp\left(\frac{-i2\pi n}{d} z_1\right) (-i)^l \exp(-il\theta_1) J_l^*(2\pi\rho_1 r_{nl}) \right\} \times \left\{ 2\pi \sum_{l'=-\infty}^{\infty} r_{nl'} \alpha_{nl'} \exp\left(\frac{i2\pi n}{d} z_2\right) (i)^{l'} \exp(il'\theta_2) J_{l'}(2\pi\rho_2 r_{nl'}) \right\} \right] \quad (4.27)$$

Con el objetivo de conocer el espectro de frecuencias asociado al campo cuya función de densidad espectral mutua está dada por la Ec. (4.27), utilizando la Ec. (3.33) hallamos que la función de correlación angular tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{A}(r_1, \varphi_1; r_2, \varphi_2) = \sum_{n=1}^N \delta(r_{nn} - r_1) \delta(r_{nn} - r_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (4.28)$$

donde

$$r_{nn} = \sqrt{\frac{2n}{\lambda d} + r_n^2}, \quad (4.29)$$

La Ec. (4.28) nos indica que para generar el efecto Lau se requiere de una serie de anillos cuyos radios están dados por la Ec. (4.29) (radios de Montgomery), pero sobre todo nos dice que no hay correlación angular, ni radial, tal y como se esperaría para el efecto Lau.

Sustituyendo la Ec. (4.28) en la ecuación

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(p_1, q_1; p_2, q_2; \nu) \\
 &\times \exp\left[ik(p_2x_2 + q_2y_2 + m_2z_2 - p_1x_1 - q_1y_1 - m_1^*z_2)\right] \\
 &\times dp_1 dq_1 dp_2 dq_2,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

y reescribiendo el resultado anterior en coordenadas polares, se obtiene

$$\begin{aligned}
 W(\rho_1, \theta_1, z_1; \rho_2, \theta_2, z_2) &= \sum_{n=1}^N \int \int_0^{\infty} [\delta(r_{nm} - r_1) \delta(r_{nm} - r_2)] \\
 &\times \exp[-i2\pi r_1 \rho_1 \cos \theta_1] \exp[i2\pi r_2 \rho_2 \cos \theta_2] \\
 &\times \exp\left[-i2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - r_1^2\right)^{1/2} z_1\right] \exp\left[i2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - r_2^2\right)^{1/2} z_2\right] \\
 &\times r_1 r_2 dr_1 dr_2.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Aplicando la siguiente propiedad de la función Delta de Dirac [14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x'). \tag{4.32}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 W(\rho_1, \theta_1, z_1; \rho_2, \theta_2, z_2) &= \sum_{n=1}^N r_{nm}^2 \exp[-i2\pi r_{nm} \rho_1 \cos \theta_1] \exp[i2\pi r_{nm} \rho_2 \cos \theta_2] \\
 &\times \exp\left[-i2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - r_{nm}^2\right)^{1/2} z_1\right] \\
 &\times \exp\left[i2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - r_{nm}^2\right)^{1/2} z_2\right].
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Identificando $\rho_1 \cos \theta_1 = x_1$ y $\rho_2 \cos \theta_2 = x_2$, se obtiene

$$W(x_1, x_2; z_1, z_2) = \sum_{n=1}^N r_m^2 \exp[i2\pi r_m (x_2 - x_1)] \exp\left[i2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - r_m^2\right)^{1/2} (z_2 - z_1)\right]. \quad (4.34)$$

Recordando que $r_m^2 = \left(\frac{2n}{\lambda d} + r_n^2\right)$, el término entre paréntesis de la segunda exponencial de la ecuación anterior se puede aproximar (para $\lambda^2 r_m^2 \ll 1$) como

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - r_m^2\right) \approx \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} r_m^2\right), \quad (4.35)$$

entonces la Ec. (4.34) queda como

$$W(x_1, x_2; z_1, z_2) = \sum_{n=1}^N r_m^2 \exp[i2\pi r_m (x_2 - x_1)] \times \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda} (z_2 - z_1)\right] \exp\left[-\frac{i2\pi\lambda}{2} r_m^2 (z_2 - z_1)\right]. \quad (4.36)$$

Para el caso particular cuando $r_m = n/p_x$, donde p_x es un parámetro arbitrario, finalmente obtenemos

$$W(x_1, x_2; z_1, z_2) = \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda} (z_2 - z_1)\right] \times \sum_{n=1}^N \left(\frac{n}{p_x}\right)^2 \exp\left[i2\pi \frac{n}{p_x} (x_2 - x_1)\right] \exp\left[-i\pi\lambda \frac{n^2}{p_x^2} (z_2 - z_1)\right]. \quad (4.37)$$

La Ec. (4.37) es idéntica al resultado presentado por G. Indebetouw [17], el cual menciona que la densidad espectral mutua se repite con un periodo axial p_x , y esto da lugar al efecto Lau.

4.3 CONCLUSIONES.

Se halló la estructura en modos coherentes de los campos ópticos que presentan el fenómeno de auto-imágenes como solución a la ecuación diferencial que describe la propagación de los modos del campo.

Se mostró que en el caso en que se considera la coherencia completa del campo, es decir, cuando consiste de un solo modo, entonces la estructura en modos coherentes de ese campo es descrita por la expresión general para campos de auto-imagen completamente coherentes. Se tomaron en cuenta dos casos todavía más particulares y se llegó a que la rejilla circular y la rejilla lineal se derivan de nuestra teoría.

También se mostró que cuando se considera el caso en el que el campo consiste de un número infinito de modos, entonces proponiendo una función de correlación angular adecuada, llegamos a que la función de densidad espectral mutua obtenida da origen al efecto Lau.

CAPÍTULO 5.

CONCLUSIONES GENERALES.

La estructura modal general de campos de auto-imágenes parcialmente coherentes fue hallada como una solución a la ecuación diferencial paraxial que describe la propagación de la función de densidad espectral mutua, a la cual se le aplicó la condición de auto-imágenes [2]. Otra forma de hallar la estructura modal de éstos campos hubiera sido resolviendo la ecuación integral (3.40) tomando como kernel una función que tuviera la forma de la Ec. (4.30), sin embargo éste camino nos lleva a una serie de dificultades matemáticas, y por esto consideramos que la solución presentada en este trabajo es más cómoda en ese sentido.

Una vez obtenida la estructura en modos coherentes de campos ópticos de auto-imágenes se demostró que cuando se considera un solo modo del campo, la ecuación general que describe el fenómeno de auto-imágenes con iluminación coherente, es decir, la ecuación que describe al efecto Talbot [8, 16], es un caso particular de nuestra teoría, e incluso se pudieron mostrar dos ejemplos simples los cuales confirman el resultado. También se mostró que cuando se considera un campo con un

número infinito de modos, la ecuación que describe el fenómeno de auto-imágenes con iluminación incoherente, es decir la ecuación que describe al efecto Lau [17], es también otro caso particular de nuestra teoría.

Se mostró que nuestra teoría se extiende a los dos extremos de coherencia espacial, por lo tanto proponemos como trabajo a futuro demostrar que la teoría sirve para cualquier caso intermedio por así decirlo de coherencia parcial independientemente del número de modos que compongan el campo.

LISTA DE FIGURAS.

	<i>Pág.</i>
<i>Figura 2.1.- Representación del efecto Talbot.</i>	9
<i>Figura 2.2.- Anillos de Montgomery.</i>	15
<i>Figura 2.3.- Experimento de Lau.</i>	17
<i>Figura 2.4.- Explicación Geométrica del efecto Lau.</i>	18
<i>Figura 2.5.- Arreglo utilizado para nuestro análisis.</i>	19
<i>Figura 3.1.- Geometría del proceso de propagación de la densidad espectral mutua.</i>	35

REFERENCIAS.

- [1] E. Wolf, "New theory of partial coherence in the space frequency domain. Part I: spectra and cross spectra of steady-state sources", *JOSA*, Vol. 72, No. 3, pp. 343-351, 1982.
- [2] J. Turunen, "Propagation invariance and self-imaging in variable-coherence optics", *JOSA A*, Vol. 8, No. 2, pp. 282-289, 1991.
- [3] H. F. Talbot, "Facts relating to optical science. No. IV", *Philos. Mag.* 9, 401-407, 1836.
- [4] E. Tepichín, "Anillos y patrones de Lau: consonancia incoherente bidimensional", tesis de maestría en óptica, INAOE, Tonantzintla, Puebla, 1988.
- [5] K. Paturski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (North-Holland, Amsterdam), Vol. 27, pp. 6-8, 1989.
- [6] W. D. Montgomery, "Self-imaging objects of infinite aperture", *JOSA*, Vol. 57, No. 6, pp. 772 – 778, 1967.
- [7] A. W. Lohmann, "Optical information processing", Vol. I, 2nd Ed. San. Diego, CA, *Academic Press*, 1978.
- [8] P. Szwaykowski, "Self-imaging in polar coordinates", *JOSA A*, Vol. 5, No. 2, pp. 185-191, 1988.
- [9] J. Barrera, "Efecto Talbot para objetos finitos", tesis de maestría en física, Universidad de Antioquia, Medellín, 2003.
- [10] J. Jahns, A.W. Lohmann, "The Lau effect (a diffraction experiment with incoherent illumination)", *Optics Communications*, Vol. 28, No. 3, pp. 263-267, 1979.
- [11] L. Mandel, E. Wolf, "Optical coherence and quantum optics", 1st Ed. *Cambridge University Press*, 1995.
- [12] A. Ostrosky, G. Martinez, "Óptica estadística, apuntes del curso", reporte técnico, INAOE, Tonantzintla, Puebla, 2000.
- [13] A. Ostrosky, G. Martinez, J. Ramirez, "Coherent-mode structure of propagation-invariant fields", *Proceedings of SPIE*, Vol. 4419, pp. 427-430, 2001.
- [14] Arfken, Weber, "Mathematical methods for physicists", 5th Ed. *Academic Press*, 2001.
- [15] G. N. Watson, "A treatise on the theory of Bessel functions", 2nd Ed. *Cambridge University Press*, 1995.

- [16] J. Ramirez, "Representación en modos coherentes de campos ópticos invariantes en propagación", tesis de doctorado INAOE, Tonantzintla, Puebla, 2003.
- [17] G. Indebetouw, "Propagation of spatially periodic wavefields", *Optica Acta*, Vol. 31, No. 5, pp. 531-539, 1984.