



INAOE

Medición de la Función de Wigner para Campos Electromagnéticos en Cavidades

por

M.C. José Luis Escudero Jiménez

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Junio 2010
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa

© INAOE 2010

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en
partes de esta tesis.



INSTITUTO NACIONAL DE
ASTROFISICA, OPTICA Y
ELECTRONICA

**Medición de la Función de Wigner
para Campos Electromagnéticos
en Cavidades**

Por:

M.C. José Luis Escudero Jiménez

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el
grado de Doctor en Ciencias en la especialidad
de Óptica en el Instituto Nacional de
Astrofísica, Óptica y Electrónica.

Supervisada por:

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa
INAOE

Tonantzintla, Puebla, México

Junio de 2010

Resumen

En este trabajo se desarrolló un método para obtener información completa mas exacta de un sistema debido a que el proceso de “desplazamiento” del campo electromagnético se realiza mientras el átomo pasa por la cavidad y no como el método ya existente que consiste en que primero se “desplaza” el campo electromagnético y después se pasa a los átomos por la cavidad. Esto es posible gracias a la existencia de la función de Wigner porque con ella podemos caracterizar un sistema.

Prefacio

En el mundo de la cuántica, así como el de la física en general, siempre se quiere caracterizar a un sistema o que es lo mismo, se requiere de una función que nos proporcione toda la información de un sistema. Para el caso de la cuántica, lo ideal es tener la función de onda para un estado del sistema. Por otra parte, no siempre es fácil obtener dicha función debido a que existen caminos matemáticos muy complejos y por tanto difíciles de calcular. Al paso de los años, se ha buscado formas alternas para poder tener resultados satisfactorios en todos los ámbitos de la ciencia.

La óptica cuántica es una ciencia que no es la excepción para buscar formas alternas a los métodos ya existentes en sus teorías. Por eso, el objetivo principal del presente trabajo es contribuir a una forma alterna y mas exacta de la medición de la función de onda del campo electromagnetico, la cual se quedara implícita por medio de la función de Wigner.

Para que se lograra el objetivo final de la tesis fue necesario hacer una documentación acerca de los fundamentos de la mecánica cuántica, así como también de óptica cuántica. Después presentar el modelo existente en los artículos científicos, luego documentarme para saber cuales eran las posibilidades de obtener un nuevo esquema de medición para la función de onda y por ultimo calcularla implícitamente por medio de la función de Wigner que es análoga a la función de onda para un estado del sistema.

La organización de este trabajo comienza por dos capítulos de documentación, el capítulo 1 es la revisión de mecánica cuántica por medio del oscilador armónico cuantico simple y luego también la parte óptica de la cuántica por medio de la cuantización del campo.

En el capítulo 2 se hace un repaso de las matrices de Pauli y se analiza el sistema átomo-campo por medio del modelo de Jaynes-Cummings, como parte de la documentación y se analiza de forma similar al sistema átomo-campo inmerso en un campo coherente externo.

El capítulo 3 hace referencia a la necesidad que se tuvo para construir funciones semejantes a las de probabilidad que hay en mecánica clásica. La analogía a esas funciones de probabilidad de la mecánica clásica son las llamadas funciones de cuasi-probabilidad y una de ellas es la función de Wigner. La función de Wigner se define en este capítulo y se hace hincapié que es una función que contiene información completa del sistema.

En el capítulo 4 se calcula la función de Wigner para el campo cuantizado del interior de una cavidad, la función de onda de este campo esta desplazada por acción de un campo coherente intenso externo a la cavidad y que se considera clásico.

El capítulo 5 se obtiene el Hamiltoniano Efectivo para un átomo de dos niveles interactuando con dos campos, uno clásico y uno cuántico.

Por último, en el capítulo 6 se presenta las conclusiones de los resultados obtenidos en el presente trabajo.

Agradecimientos

Al **Doctor Héctor Manuel Moya Cessa** por haber dirigido y asesorado para hacer posible la elaboración de esta tesis.

A los Doctores: **Gabriel Martínez Niconoff y Arturo Olivares Pérez, Doctor Julio Cesar Ramírez Sanjuan, Doctor Javier Muñoz López y Doctor Raúl Juárez Amaro,** por haber revisado y aportado sugerencias para este trabajo.

Al **Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica** y al **CONACYT** por haberme dado todo el apoyo material y económico sin el cual este trabajo hubiera sido posible.

Dedicatoria

A mi Padre *José del Carmen Escudero Domínguez* y a mi madre *Josefina Jiménez Cadena* por todo el apoyo y cariño que me han hecho sentir, además por creer en mí y en mis metas.

A mi esposa *Patricia Lorena Hernández Cadenas*, a mi hija *Alondra Elisa Escudero Hernández* y a mi hijo *Luis Damián Escudero Hernandez* por todo el amor, comprensión, apoyo y dedicación que me han hecho sentir y poder terminar todas mis metas.

A mis hermanos: *Roberto, Walter, Mariano y Beatriz Eugenia Escudero Jiménez.*

A todos mis *compañeros de generación* por todos los momentos buenos y malos que hemos pasado juntos.

Índice general

Capítulo 1	Cuantización del campo electromagnético.....	1
1.1.	El oscilador armónico cuántico.....	1
1.2.	Energía en un resonador.....	3
1.3.	Cuantización del campo electromagnético.....	16
1.4.	Estados coherentes.....	18
Capítulo 2	Interacción átomo-campo con un campo externo extra.....	23
2.1.	Matrices Spin de Pauli.....	23
2.2.	Análisis del sistema átomo-campo.....	25
2.3.	Interacción átomo-campo con un campo externo extra.....	30
Capítulo 3	Función de cuasi-probabilidad de Wigner.....	34
3.1.	Espacio fase.....	34
3.2.	Operador de densidad.....	36
3.3.	Definición de la función de Wigner.....	38

Capítulo 4	Representación Fresnel de la función de Wigner del sistema átomo-campo con un campo externo extra.....	40
4.1.	La solución del modelo de Jaynes-Cummings en término de los operadores V y V^+	40
4.2.	Probabilidad del estado excitado del átomo.....	42
4.3.	Representación de Fresnel de la función de Wigner para el sistema átomo-campo con un campo externo extra.....	44
Capítulo 5	Hamiltoniano Efectivo para un Átomo de Dos Niveles Interactuando con dos Campos.....	46
5.1.	Hamiltoniano Efectivo del átomo-campo.....	46
5.2.	Caso con Dos Campos.....	48
5.3.	Colapsos y Avivamientos.....	52
Capítulo 6	Conclusiones.....	53
REFERENCIAS.....		54

CAPÍTULO 1

CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMANGÉTICO

Este capítulo comienza con un repaso del oscilador armónico cuántico simple, para luego mostrar que cada modo del campo de una cavidad obedece las mismas leyes físicas de éste. Se presenta a los estados coherentes y su relación con el operador de aniquilación, además de verlos como estados desplazados del estado de vacío.

1.1. El oscilador armónico cuántico simple

El Hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico simple de frecuencia Ω y masa unitaria es [1]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \Omega^2 \hat{q}^2), \quad 1.1.1$$

con p y q que obedecen el conmutador [1]

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar, \quad 1.1.2$$

donde p y q son el operador de momento y de desplazamiento, respectivamente.

El operador de momento p se define de la siguiente forma [1]

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dq}. \quad 1.1.3$$

Ahora, se introducen dos nuevos operadores en término de los operadores de momento p y de desplazamiento q [1]

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad 1.1.4$$

y

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega\hat{q} - i\hat{p}), \quad 1.1.5$$

que obedecen la regla de conmutación [1]

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad 1.1.6$$

De las ecuaciones 1.1.4 y 1.1.5 se ve que p y q se pueden describir como

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \quad 1.1.7$$

y

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+). \quad 1.1.8$$

Al sustituir 1.1.7 y 1.1.8 en el Hamiltoniano 1.1.1 y con ayuda del conmutador 1.1.6 se obtiene

$$\hat{H} = \hbar\Omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad 1.1.9$$

El producto $\hat{a}^+ \hat{a}$ es llamado el operador de número del oscilador y se denota por

$$\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}, \quad 1.1.10$$

más adelante, se ve que n está relacionado con el número de excitaciones del oscilador.

Hay que tener en cuenta que la ecuación de eigenvalores para este sistema [2]

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad 1.1.11$$

donde $|n\rangle$ es el eigenestado del oscilador armónico cuántico simple con eigenvalor E_n . Para encontrar los eigenvalores E_n , se comienza por usar el resultado [1]

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \quad 1.1.12$$

para obtener los conmutadores

$$[\hat{H}, \hat{a}^+] = \hbar\Omega \hat{a}^+ \quad 1.1.13$$

y

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\Omega \hat{a}. \quad 1.1.14$$

Se llamará $E_0 \geq 0$ la energía más baja del oscilador, es decir, cuando el oscilador armónico cuántico simple está en su estado base. Se denota el estado base con el eigenvector $|0\rangle$ y su correspondiente eigenvalor E_0 , esto es

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle. \quad 1.1.15$$

Con las ecuaciones 1.1.14 y 1.1.15 se puede obtener

$$\hat{H}\hat{a}|0\rangle = (E_0 - \hbar\Omega)\hat{a}|0\rangle, \quad 1.1.16$$

pero hay que recordar que E_0 es la energía más baja del sistema y aquí aparece $E_0 - \hbar\Omega$ para un eigenvector $\hat{a}|0\rangle$, así que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad 1.1.17$$

Si se multiplica por a^+ a la ecuación 1.1.17 por la izquierda y se usa la expresión 1.1.9 se encuentra

$$0 = \hat{a}^+\hat{a}|0\rangle = \frac{1}{\hbar\Omega} \left(\hat{H} - \frac{\hbar\Omega}{2} \right) |0\rangle, \quad 1.1.18$$

esta ecuación se puede arreglar para tener la forma

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2}|0\rangle. \quad 1.1.19$$

De las ecuaciones 1.1.15 y 1.1.19 se deduce que la energía del estado base es

$$E_0 = \frac{\hbar\Omega}{2}. \quad 1.1.20$$

Para obtener otro nivel de energía se desarrolla 1.1.13 y con ayuda de 1.1.15 se llega a

$$\hat{H}\hat{a}^+|0\rangle = (E_0 + \hbar\Omega)\hat{a}^+|0\rangle. \quad 1.1.21$$

La ecuación 1.1.21 indica que $E_0 + \hbar\Omega$ es el eigenvalor del Hamiltoniano \hat{H} que corresponde al eigenvector $\hat{a}^+|0\rangle$.

La ecuación 1.1.21, usando a 1.1.20, se puede escribir así

$$\hat{H}\hat{a}^+|0\rangle = \hbar\Omega\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^+|0\rangle. \quad 1.1.22$$

La forma más general del conmutador 1.1.13 es

$$[\hat{H}, (\hat{a}^+)^n] = n\hbar(\hat{a}^+)^n, \quad 1.1.23$$

este nuevo conmutador sirve para generalizar la expresión que se obtuvo en 1.1.23.

Al desarrollar el conmutador 1.1.23 y usando 1.1.20 se llega a

$$\hat{H}(\hat{a}^+)^n|0\rangle = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right)(\hat{a}^+)^n|0\rangle. \quad 1.1.24$$

Debido a que son aplicaciones sucesivas del operador \hat{a}^+ sobre el estado de vacío los que crean todos los eigenvalores con sus respectivos eigenvectores, \hat{a}^+ se conoce como el operador de creación. Al aplicar \hat{a}^+ a un estado, se obtiene un nuevo estado con un fotón más de excitación.

Al observar las ecuaciones 1.1.20, 1.1.22 y 1.1.24 se tiene que el n-ésimo eigenvalor E_n se calcula con

$$E_n = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad 1.1.25$$

y el eigenvector correspondiente $|n\rangle$ debe ser proporcional al eigenvector $(\hat{a}^+)^n|0\rangle$, es decir

$$|n\rangle = c_n(\hat{a}^+)^n|0\rangle, \quad 1.1.26$$

donde c_n es la constante de proporcionalidad y normalización, la cual vale $c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ [3].

Ahora, para saber el efecto que tiene el operador \hat{a} sobre los eigenestados $|n\rangle$, se aplica \hat{a} sobre la ecuación 1.1.26 por la izquierda

$$\hat{a}|n\rangle = c_n\hat{a}(\hat{a}^+)^n|0\rangle, \quad 1.1.27$$

también se tiene el resultado

$$\hat{a}(\hat{a}^+)^n = [\hat{a}, \hat{a}^+](\hat{a}^+)^{n-1} + \hat{a}^+\hat{a}(\hat{a}^+)^{n-1}. \quad 1.1.28$$

La ecuación 1.1.28 se aplica n-veces en la ecuación 1.1.27, además, se recuerda el resultado de 1.1.17 para llegar a

$$\hat{a}|n\rangle = c_n n (\hat{a}^+)^{n-1} |0\rangle. \quad 1.1.29$$

Si se toma en cuenta la ecuación 1.1.26 y se arreglan los términos de 1.1.29, se consigue que

$$\hat{a}|n\rangle = \frac{c_n}{c_{n-1}} n [c_{n-1} (\hat{a}^+)^{n-1} |0\rangle] = n \frac{c_n}{c_{n-1}} |n-1\rangle, \quad 1.1.30$$

o también

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad 1.1.31$$

por lo que el operador \hat{a} se le conoce como el operador de aniquilación.

Al usar las ecuaciones 1.1.9, 1.1.10 y 1.1.25, se tiene

$$\hat{a}^+ \hat{a}|n\rangle = \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad 1.1.32$$

donde se ve que los eigenvalores del operador de número son iguales al número de excitaciones del oscilador.

Ahora, se combinan 1.1.31 con 1.1.32 para tener

$$\hat{a}^+ |n-1\rangle = \sqrt{n} |n\rangle, \quad 1.1.33$$

pero si se cambia n por n-1, se llega a la forma conocida

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad 1.1.34$$

Como ya se había mencionado, \hat{a}^+ es el operador de creación y la ecuación 1.1.34 lo muestra claramente.

Al hacer la diferencia entre dos niveles de energía consecutivos, se obtiene que la energía del oscilador está distribuida en escalones igualmente espaciados por $\hbar\Omega$, al conjunto de escalones se le conoce como espectro de energía; la cantidad $\hbar\Omega$ es igualmente la energía de un fotón [1]. Para concluir, por acción de \hat{a}^+ los estados del oscilador ascienden al estado inmediato de mayor energía, mientras que por acción de \hat{a} descienden al estado inmediato de menor energía.

1.2. Energía en un resonador

La ecuación de onda para el potencial vectorial en el espacio libre, es decir, en ausencia de cargas y de corrientes es [4]

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad 1.2.1$$

con la solución obtenida por el método de separación de variables [4], en el cual se propone

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \gamma q(t) \nu(\vec{r}), \quad 1.2.2$$

para llegar finalmente a

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V_l}} q_l(t) \vec{u}_l(\vec{r}), \quad 1.2.3$$

donde

$$V_l = \frac{V}{8} \quad 1.2.4$$

y

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V_l}} \vec{u}_l(\vec{r}). \quad 1.2.5$$

V_l es el volumen de modo efectivo, V el volumen de la cavidad y $\vec{v}_l(\vec{r})$ son las funciones de modo. Además, se cumple la condición de ortonormalidad

$$\frac{1}{\sqrt{V_l V_{l'}}} \int d^3 r \vec{u}_l \cdot \vec{u}_{l'} = \delta_{ll'}. \quad 1.2.6$$

Para calcular la energía de un resonador se necesita el campo eléctrico y el campo magnético que hay dentro de la cavidad. Al tener el potencial vectorial, se pueden calcular los campos eléctrico y magnético a partir de él, esto es

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V_l}} \dot{q}_l(t) \vec{u}_l(\vec{r}), \quad 1.2.7$$

y

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V_l}} q_l \vec{\nabla} \times \vec{u}_l(\vec{r}), \quad 1.2.8$$

donde \dot{q} indica la derivada temporal de la variable q .

La densidad de energía electromagnética es [1]

$$U = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right), \quad 1.2.9$$

con el correspondiente Hamiltoniano (o energía del sistema, porque es un sistema conservativo)

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 r \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \quad 1.2.10$$

Si se sustituye el campo eléctrico 1.2.7 y el campo magnético 1.2.8 en 1.2.10, el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{l,l'} \dot{q}_l \dot{q}_{l'} \frac{1}{\sqrt{V_l V_{l'}}} \int d^3 r \vec{u}_l \cdot \vec{u}_{l'} + \frac{c^2}{2} \sum_{l,l'} q_l q_{l'} \frac{1}{\sqrt{V_l V_{l'}}} \int d^3 r (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}), \quad 1.2.11$$

y por la condición de ortonormalidad 1.2.6, la expresión 1.2.11 se reduce a

$$H = \frac{1}{2} \sum_l \dot{q}_l^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{l,l'} q_l q_{l'} \frac{1}{\sqrt{V_l V_{l'}}} \int d^3 r (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_{l'}). \quad 1.2.12$$

Si se aplica la siguiente identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}), \quad 1.2.13$$

además de considerar las definiciones

$$\vec{f} \equiv \vec{u}_l, \quad 1.2.14$$

y

$$\vec{g} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}_l, \quad 1.2.15$$

se tiene que el integrando de la ecuación 1.2.12 se puede escribir de la forma

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{u}_l \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l)] + \vec{u}_l \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l)], \quad 1.2.16$$

lo cual hace que la ecuación 1.2.11 se pueda escribir como

$$H = \frac{1}{2} \sum_l \dot{q}_l^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{l,l'} \frac{1}{\sqrt{V_l V_{l'}}} q_l q_{l'} \left\{ \int d^3 r \vec{\nabla} \cdot [\vec{u}_l \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l)] + \int d^3 r \vec{u}_l \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l)] \right\}. \quad 1.2.17$$

Por el teorema de Gauss [5], la primera integral de la ecuación 1.2.17 es

$$\int d^3 r \vec{\nabla} \cdot [\vec{u}_l \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l)] = \int d\vec{s} \cdot [\vec{u}_l \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l)]. \quad 1.2.18$$

Nótese de las ecuaciones 1.2.7 y 1.2.8, que \vec{u}_l es proporcional a la parte espacial de \vec{E} y $\vec{\nabla} \times \vec{u}_l$ es proporcional a la parte espacial de \vec{B} ; además, la integral se realiza sobre las paredes de la cavidad. Esto hace que el integrando sea un vector ortogonal al vector $d\vec{s}$, por lo que esta integral vale cero, este resultado permite que el Hamiltoniano se pueda ver como

$$H = \frac{1}{2} \sum_l \dot{q}_l^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{l,l'} \frac{1}{\sqrt{V_l V_{l'}}} q_l q_{l'} \int d^3 r \vec{u}_l \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l)]. \quad 1.2.19$$

También se tiene la condición de Coulomb [5]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad 1.2.20$$

se utiliza cuando no hay cargas presentes en el campo.

De la ecuación 1.2.19, la ecuación de Helmholtz [6] y la ecuación 1.2.20 se tiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_l) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_l) - \nabla^2 \vec{u}_l = \frac{\Omega_l}{c} \vec{u}_l. \quad 1.2.21$$

Con la expresión 1.2.21 y la condición de ortonormalidad 1.2.6, se tiene finalmente la forma del Hamiltoniano del sistema resonador

$$H = \sum_l H_l = \frac{1}{2} \sum_l \left(\dot{q}_l^2 + \Omega_l^2 q_l^2 \right), \quad 1.2.22$$

también podemos llamar a la expresión 1.2.22, la energía del campo electromagnético total, es decir, la suma de las energías de los osciladores armónicos asociados con cada modo etiquetados con l .

1.3 Cuantización del campo electromagnético

Para cuantizar el campo electromagnético se le asocia un oscilador armónico cuántico a cada uno de los modos l del campo de radiación. Se referirá a un modo indicando el subíndice, así \hat{a}_l^+ y \hat{a}_l son los operadores que crean y destruyen un cuanto de energía $\hbar\Omega_l$ en el modo de vector de onda \vec{k} . Los cuantos son los fotones de vector de onda \vec{k} , así, el número de fotones excitados se determina por $|n_l\rangle$, que son los eigenvectores del operador que intencionalmente se denomina $\hat{n}_l = \hat{a}_l^+ \hat{a}_l$, con $\hat{n}_l = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

De esta forma, los eigenestados $|n_l\rangle$, determinan el nivel de excitación de un modo. Por otro lado, los operadores de creación y aniquilación aplicados a $|n_l\rangle$ para algún modo en particular obedecen

$$\hat{a}_l |n_l\rangle = \sqrt{n_l} |n_{l-1}\rangle \quad 1.3.1$$

y

$$\hat{a}_l^+ |n_l\rangle = \sqrt{n_l + 1} |n_{l+1}\rangle. \quad 1.3.2$$

El Hamiltoniano obtenido en la ecuación 1.2.22, muestra no tener términos que involucren productos de variables de distintos modos, es decir, los diferentes modos son independientes, pues la energía total del campo está dada como la suma de las energías de los osciladores correspondientes a cada modo. Así, el estado total del campo es un producto de los estados de los modos individuales

$$|n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle = \prod_l |n_l\rangle. \quad 1.3.3$$

Cuando un operador se refiere a un modo específico, solo afectará a los fotones de ese modo, por ejemplo

$$\hat{a}_l |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle = \sqrt{n_l + 1} |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle. \quad 1.3.4$$

Con las ecuaciones 1.3.1, 1.3.2, 1.2.3 y 1.2.7 se escriben el potencial vectorial y el campo eléctrico, respectivamente de la siguiente forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V_l \Omega_l}} (\hat{a}_l + \hat{a}_l^+) \cdot \vec{u}_l(\vec{r}) \quad 1.3.5$$

y

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \Omega_l}{2\varepsilon_0 V_l}} (\hat{a}_l - \hat{a}_l^+) \cdot \vec{u}_l(\vec{r}). \quad 1.3.6$$

Al utilizar nuevamente las ecuaciones 1.1.4 y 1.1.5, el Hamiltoniano 1.2.22 se puede describir como

$$H = \sum \hbar \Omega_l \left(\hat{a}_l^+ \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right), \quad 1.3.7$$

además

$$\dot{\hat{a}}_l(t) = \frac{\partial \hat{a}_l}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, \hat{a}_l] = -i \Omega_l \hat{a}_l, \quad 1.3.8$$

entonces $\hat{a}_l(t)$ debe tener la forma

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0) e^{-i \Omega_l t}, \quad 1.3.9$$

que al sustituir 1.3.9 en el campo eléctrico de la ecuación 1.3.6 se llega a

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \Omega_l}{2\varepsilon_0 V_l}} \left[\hat{a}_l(0) e^{-i \Omega_l t} + \hat{a}_l^+(0) e^{i \Omega_l t} \right] \vec{u}_l(\vec{r}), \quad 1.3.10$$

de esta forma, como se muestra en ésta última ecuación, se considera como una descomposición al campo eléctrico en dos partes; el primer término corresponde a la parte positiva de la frecuencia y el segundo término corresponde a la parte negativa de la frecuencia.

1.4. Estados coherentes

Los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación [1]

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad 1.4.1$$

el operador \hat{a} es no Hermitiano, esto es, sus eigenvalores α son complejos. Además, \hat{a} es proporcional a la parte positiva de la frecuencia del campo eléctrico, por tanto, los estados coherentes también.

Para obtener una forma explícita de $|\alpha\rangle$ en término de los estados ortonormales de número $|n\rangle$ se usa

$$I = \sum_n |n\rangle\langle n|, \quad 1.4.2$$

con

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle, \quad 1.4.3$$

por lo que se tiene

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle 0|\frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}}|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad 1.4.4$$

La condición de normalización para estados coherentes, permite tener

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = \langle 0|\alpha\rangle^2 e^{|\alpha|^2} = 1, \quad 1.4.5$$

con lo que se obtiene

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad 1.4.6$$

La ecuación 1.4.4 es la representación de un estado coherente en término de los estados de número y con ayuda de la ecuación 1.4.6, obtenemos

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad 1.4.7$$

La probabilidad de encontrar n fotones en el estado coherente es [1]

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}, \quad 1.4.8$$

la cual es la distribución de Poisson, donde el número medio de fotones es

$$\bar{n} = |\alpha|^2 = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle. \quad 1.4.9$$

Por otra parte, los estados coherentes no son un conjunto ortogonal y lo muestra

$$|\langle \beta|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}, \quad 1.4.10$$

aunque forman un conjunto continuo bidimensional de estados no ortogonales, sí son un conjunto sobre-completo que cumple la relación de completos

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = 1, \quad 1.4.11$$

con la cual se puede expandir un operador A en términos de estados coherentes de la forma

$$\hat{A} = \frac{1}{\pi} \iint \langle\alpha|\hat{a}|\beta\rangle |\alpha\rangle\langle\beta| d^2\alpha d^2\beta; \quad 1.4.12$$

la representación integral de \hat{A} en 1.4.12 incluye elementos de matriz fuera de la diagonal.

Los estados coherentes se pueden generar mediante una transformación unitaria del estado del vacío. Las transformaciones unitarias simplifican la mayor parte de los problemas dinámicos al cambiar el marco de referencia.

Por otra parte, una transformación unitaria cumple que su adjunta debe ser igual a su inversa. Al suponer en un primer sistema, que el estado $|X\rangle$ obedece la ecuación de evolución de Schrödinger [1]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |X\rangle = H |X\rangle, \quad 1.4.13$$

por lo que en el nuevo sistema, el estado se considera

$$|Y\rangle = \hat{T} |X\rangle, \quad 1.4.14$$

donde \hat{T} es la transformación unitaria.

En el nuevo sistema, la ecuación de Schrödinger 1.4.13 toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |Y\rangle = H' |Y\rangle \quad 1.4.15$$

Al usar 1.4.13 y 1.4.14 se puede encontrar la forma de H' en término de H , es decir, la forma de H en un nuevo sistema, esto es

$$H' = \hat{T} H \hat{T}^{-1}. \quad 1.4.16$$

Una opción para \hat{T} es

$$\hat{T} = e^{\hat{A}}, \quad 1.4.17$$

como \hat{A} es un operador, se escoge

$$\hat{A} = i\hat{p}\alpha, \quad 1.4.18$$

donde α es un número complejo y \hat{p} es el operador de momento en la dirección x ; al aplicar la transformación \hat{T} al operador de posición \hat{X} se tiene

$$\hat{X}' = \hat{T}\hat{X}\hat{T}^{-1} = \hat{X} + \alpha \quad 1.4.19$$

Para obtener el resultado de la ecuación 1.4.19, se desarrolla la exponencial en su respectiva serie y se usa la relación de conmutación 1.1.2 Análogamente, si se escoge

$$\hat{A} = i\hat{x}\alpha, \quad 1.4.20$$

el operador de momento cambia al nuevo sistema como

$$\hat{p}' = \hat{T}\hat{p}\hat{T}^{-1} = \hat{p} - \alpha. \quad 1.4.21$$

El operador usado por Glauber [1], en parte es una combinación de los operadores de las ecuaciones 1.4.18 y 1.4.20, basada en trasladar a los operadores de aniquilación y creación, esto es

$$\hat{T} = D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}, \quad 1.4.22$$

donde α^* es el conjugado de α .

El operador de desplazamiento transforma a los operadores de aniquilación y creación respectivamente de la forma

$$D^{-1}(\alpha)\hat{a}D(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad 1.4.23$$

y

$$D^{-1}(\alpha)\hat{a}^+D(\alpha) = \hat{a}^+ + \alpha. \quad 1.4.24$$

Por otro lado, al hacer uso del operador de creación en la ecuación 1.4.7 se obtiene

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha\hat{a}^+)^n}{n!} |0\rangle = \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^+} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^+} e^{-\alpha^*\hat{a}} |0\rangle. \end{aligned} \quad 1.4.25$$

La relación de Baker-Hausdorff es

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}, \quad 1.4.26$$

siempre que se cumpla

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \quad 1.4.27$$

Como los operadores de la ecuación 1.4.25 cumplen con la condición 1.4.27, se aplica 1.4.26 para obtener

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}} |0\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad 1.4.28$$

esto demuestra que el estado coherente es generado por la aplicación del operador $D(\alpha)$ al estado de vacío.

Hasta aquí, se examinaron algunas de las propiedades de los estados coherentes representados en término de estados de número, también se expresó a los estados coherentes como estados desplazados del vacío. Sabemos que los estados coherentes obedecen una relación de completos, por eso forman una base para representar operadores y a otros estados. Los estados coherentes de esta sección no se refieren a algún estado en específico y sirven para analizar algunas de sus propiedades más importantes.

CAPÍTULO 2

INTERACCIÓN ÁTOMO-CAMPO CON UN CAMPO EXTERNO EXTRA

En este capítulo se comienza recordando las matrices de spin de Pauli y se da la definición de otras matrices, las cuales son matrices de 2×2 y son herramienta básica para el transcurso de éste trabajo porque la descripción de los sistemas que se analizan más adelante estarán en término de estas matrices. Después, sigue el tratamiento del sistema átomo-campo que consiste en un átomo de dos niveles sumergido en un campo cuantizado; para el análisis de este sistema se usa el modelo de Jaynes-Cummings. El modelo de James-Cummings se usa en los sistemas que tienen una interacción de intercambio exacto o muy aproximado de energía entre los niveles energéticos del átomo y el campo. Por ejemplo, si un átomo de dos niveles está inicialmente en el estado base, el átomo pasará al siguiente nivel excitado y podrá ser objeto de estudio del modelo de James-Cummings solo si absorbe del campo la cantidad exacta o aproximada de energía que hay entre los escalones energéticos del átomo. Por último, se presenta el modelo donde se aplica un campo coherente externo al campo de la cavidad, lo que hace que se desplace la función de onda característica del campo interno y después se hace pasar a los átomos de dos niveles. Se vuelve a usar el modelo de James-Cummings para este sistema y se obtiene el operador de evolución temporal de la misma forma que en la sección anterior.

2.1. Matrices Spin de Pauli

Al tratarse de átomos de dos niveles es conveniente usar matrices de 2×2 . Así, las eigenfunciones $|e\rangle$ y $|b\rangle$, pueden ser representadas por los vectores columna [1]

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.1.1$$

y

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad 2.1.2$$

Al multiplicar adecuadamente 2.1.1 con 2.1.2 se consigue

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2.1.3$$

y

$$\hat{\sigma}_- = |b\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2.1.4$$

donde las matrices 2.1.3 y 2.1.4 no son Hermitianas. El operador $\hat{\sigma}_+$ hace que el átomo pase del nivel base al nivel excitado, que es lo mismo decir que el átomo absorbió un fotón. El operador $\hat{\sigma}_-$ indica que el átomo deja el nivel excitado y pasa al estado base, esto es debido a la liberación de un fotón de energía. Lo que hace a las matrices representadas en 2.1.3 y 2.1.4, como las apropiadas para representar las transiciones causadas por la energía de interacción entre el átomo de dos niveles y el campo cuantizado.

También se tiene a las matrices

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2.1.5$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad 2.1.6$$

y

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |b\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2.1.7$$

donde $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ y $\hat{\sigma}_z$ definidas en las ecuaciones 2.1.5, 2.1.6 y 2.1.7 respectivamente, son las conocidas como matrices de spin de Pauli. Estas matrices servirán, como se verá más adelante, para representar a los operadores de dipolo eléctrico y de energía. El conjunto de matrices mostrado hasta aquí cumple con los conmutadores

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm \quad 2.1.8$$

y

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z. \quad 2.1.9$$

2.2. Análisis del sistema átomo-campo

El Hamiltoniano total del sistema átomo-campo para interacciones de resonancia cercana es [1]

$$H = \hbar\Omega\hat{n} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-), \quad 2.2.1$$

donde se está considerando un solo modo para el campo. Los dos primeros términos son conocidos, el primero es el Hamiltoniano de un modo del campo libre sin la energía del punto cero y el segundo es el Hamiltoniano sin perturbaciones del átomo de dos niveles. Ahora, el término $\hat{a}\hat{\sigma}_+$ corresponde a la pérdida de un fotón de energía por parte del campo y que lo absorbe el átomo, con eso, el átomo pasa del estado base $|b\rangle$ al estado excitado $|e\rangle$. De igual forma, $\hat{a}^+\hat{\sigma}_-$ corresponde a la emisión de un fotón por parte del átomo, el cual baja del estado excitado $|e\rangle$ al estado base $|b\rangle$.

El Hamiltoniano 2.2.1 cumple con la ecuación de Schrödinger nombrada en 1.4.13, donde su eigenestado se representa por

$$|\Psi\rangle = \hat{T}|\varphi\rangle, \quad 2.2.2$$

donde

$$\hat{T} = e^{-i\Omega\left(\hat{n} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2}\right)t}. \quad 2.2.3$$

Se analiza de la misma forma como se hizo en la ecuación 1.4.13 hasta la ecuación 1.4.16, la nueva representación de la ecuación de Schrödinger es

$$H\hat{T}|\varphi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\hat{T}|\varphi(t)\rangle] \quad 2.2.4$$

y su forma desarrollada es

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle &= \hat{H}'|\varphi(t)\rangle = \\ &= \hat{T}^+ \left[\frac{1}{2}\hbar\delta\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-) \right] \hat{T}|\varphi(t)\rangle, \end{aligned} \quad 2.2.5$$

donde $\delta = \omega - \Omega$ es la desintonía en el sistema átomo-campo.

El Hamiltoniano de la ecuación 2.2.5 es

$$H' = \frac{1}{2} \hbar \delta \hat{\sigma}_z + \hbar \lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+ \hat{\sigma}_-), \quad 2.2.6$$

esto es posible porque el operador \hat{T} o \hat{T}^+ no afecta a $\hat{\sigma}_z$, además en el segundo término de 2.2.5 se utiliza el resultado del conmutador

$$\left[\hat{n} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2}, \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+ \hat{\sigma}_- \right] = 0. \quad 2.2.7$$

Si el sistema átomo-campo está en sintonía, es decir, $\delta = 0$ ó $\omega = \Omega$, el Hamiltoniano que se obtiene es el del modelo de Jaynes-Cummings, esto es [7]

$$H_{JCM} = \hbar \lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+ \hat{\sigma}_-). \quad 2.2.8$$

Los posibles estados de un átomo de dos niveles son $|e\rangle$ y $|b\rangle$. Los estados del campo mono-modo son $|n\rangle$ y $|n+1\rangle$ para un determinado valor de n. Los estados que se acaban de mencionar se mezclan en el sistema átomo-campo, respetando la conservación de la energía, lo que significa que son $|n\rangle|e\rangle$ y $|n+1\rangle|b\rangle$. Por lo tanto, a partir de las posibles combinaciones de estos dos eigenestados mezclados se pueden construir los eigenestados para el sistema átomo-campo; dos ejemplos de estas combinaciones son

$$|\varphi^+\rangle = |n\rangle|e\rangle + |n+1\rangle|b\rangle \quad 2.2.9$$

y

$$|\varphi^-\rangle = |n\rangle|e\rangle - |n+1\rangle|b\rangle. \quad 2.2.10$$

Si se recuerda a las definiciones hechas en 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.7, además de aplicar el Hamiltoniano 2.2.6 a los eigenestados 2.2.9 y 2.2.10, se obtiene

$$H' |\varphi^+\rangle = \frac{1}{2} \hbar \delta (|n\rangle|e\rangle - |n+1\rangle|b\rangle) + \hbar \lambda \sqrt{n+1} (|n\rangle|e\rangle + |n+1\rangle|b\rangle) \quad 2.2.11$$

y

$$H' |\varphi^-\rangle = \frac{1}{2} \hbar \delta (|n\rangle|e\rangle + |n+1\rangle|b\rangle) + \hbar \lambda \sqrt{n+1} (|n+1\rangle|b\rangle - |n\rangle|e\rangle). \quad 2.2.12$$

Por otro lado, se tiene que la solución más general posible para la ecuación 2.2.5 es una combinación lineal de los estados mezclados, esto es

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n(t)|n\rangle|e\rangle + D_n(t)|n+1\rangle|b\rangle], \quad 2.2.13$$

con la condición que el átomo está excitado cuando comienza el sistema, es decir, cuando $t=0$, entonces $|\varphi_A\rangle = |e\rangle$ y el campo en estas mismas condiciones es descrito por

$$|\varphi_c(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n|n\rangle, \quad 2.2.14$$

donde $Q_n=C_n(0)$, $D_n(0)=0$ y $|\varphi_c(0)\rangle$ es el estado inicial del campo.

Se ocupan las ecuaciones 2.2.11 y 2.1.13 en la ecuación 2.2.5 para obtener después de varios arreglos

$$i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{dC_n(t)}{dt} |n\rangle|e\rangle + \frac{dD_n(t)}{dt} |n+1\rangle|b\rangle \right] = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n(t) \left(\frac{1}{2} \delta |n\rangle|e\rangle + \lambda \sqrt{n+1} |n+1\rangle|b\rangle \right) + D_n(t) \left(-\frac{1}{2} |n+1\rangle|b\rangle + \lambda \sqrt{n+1} |n\rangle|e\rangle \right) \right]. \quad 2.2.15$$

A través de la igualación de estados mezclados semejantes entre ambos lados de la igualdad 2.2.15, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$i\dot{C}_n(t) = \frac{1}{2} \delta C_n(t) + \lambda \sqrt{n+1} D_n(t) \quad 2.2.16$$

$$i\dot{D}_n(t) = \lambda \sqrt{n+1} C_n(t) - \frac{1}{2} \delta D_n(t). \quad 2.2.17$$

Otra forma de ver el sistema de ecuaciones diferenciales es por medio de la forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_n(t) \\ D_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta & \lambda \sqrt{n+1} \\ \lambda \sqrt{n+1} & -\frac{1}{2} \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n(t) \\ D_n(t) \end{pmatrix}, \quad 2.2.18$$

ésta ecuación tiene como solución [8]

$$\begin{pmatrix} C_n(t) \\ D_n(t) \end{pmatrix} = e^{-iMt} \begin{pmatrix} C_n(0) = Q_n \\ D_n(0) = 0 \end{pmatrix}, \quad 2.2.19$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta & \lambda\sqrt{n+1} \\ \lambda\sqrt{n+1} & -\frac{1}{2}\delta \end{pmatrix}. \quad 2.2.20$$

El exponencial de la ecuación 2.2.19, en su forma desarrollada es

$$e^{-iMt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2k}}{(2k)!} M^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2k+1}}{(2k+1)!} M^{2k+1}. \quad 2.2.21$$

De acuerdo con la matriz M de 2.2.20, se tiene

$$M^{2k} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\delta^2 + \lambda^2(n+1)} \right)^{2k} \hat{I} \quad 2.2.22$$

y

$$\begin{aligned} M^{2k+1} &= M \times \left(\sqrt{\frac{1}{4}\delta^2 + \lambda^2(n+1)} \right)^{2k} \hat{I} = \\ &= M \times \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4}\delta^2 + \lambda^2(n+1)} \right)^{2k+1} \hat{I}}{\sqrt{\frac{1}{4}\delta^2 + \lambda^2(n+1)}}, \end{aligned} \quad 2.2.23$$

donde \hat{I} es la matriz identidad y está definida por

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 2.2.24$$

Otra forma de la expansión 2.2.21 es utilizar las expresiones 2.2.22 y 2.2.23, esto es

$$\begin{aligned}
e^{-iMt} = & \hat{I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2k}}{(2k)!} \left[t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)} \right]^{2k} - \\
& -i \frac{M}{\sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(2k+1)!} \left[t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)} \right]^{2k+1}, \tag{2.2.25}
\end{aligned}$$

cada una de las sumatorias de la expansión 2.2.25 corresponden a la de las funciones trigonométricas coseno y seno respectivamente. El desarrollo de la exponencial se puede escribir ahora como

$$\begin{aligned}
e^{-iMt} = & \begin{pmatrix} \cos\left(t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}\right) \end{pmatrix} - \\
& -i \frac{\sin\left(t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}\right)}{t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta & \lambda \sqrt{n+1} \\ \lambda \sqrt{n+1} & -\frac{1}{2} \delta \end{pmatrix}. \tag{2.2.26}
\end{aligned}$$

Con lo anterior, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales 12.2.18 finalmente es

$$C_n(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}\right) - i \frac{\delta}{2} \frac{\sin\left(t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}} \\ \frac{\sin\left(t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}} \end{bmatrix} Q_n \tag{2.2.27}$$

y

$$D_n(t) = -\frac{i \lambda \sqrt{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}} \sin\left(t \sqrt{\frac{1}{4} \delta^2 + \lambda^2(n+1)}\right) Q_n. \tag{2.2.28}$$

Los coeficientes $C_n(t)$ y $D_n(t)$ que se muestran en las ecuaciones 2.2.27 y 2.2.28 determinan completamente la solución 2.2.13.

La probabilidad de encontrar al átomo resonante ($\delta=0$) en el nivel excitado $|e\rangle$ es [2]

$$P_e = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2 \cos^2(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad 2.2.29$$

y la probabilidad de encontrar el átomo resonante en el nivel base $|b\rangle$ es

$$P_b = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2 \sin^2(\lambda t \sqrt{n+1}). \quad 2.2.30$$

Las ecuaciones 2.2.29 y 2.2.30 se resta para mostrar, por medio de la probabilidad, la variación entre el nivel excitado y el nivel base del átomo dentro de un campo

$$P_{eb} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2 [\cos^2(\lambda t \sqrt{n+1}) - \sin^2(\lambda t \sqrt{n+1})], \quad 2.2.31$$

Si el campo es coherente, entonces la ecuación 2.2.31 toma la forma

$$P_{eb} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}), \quad 2.2.32$$

donde se utilizó

$$Q_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} \quad 2.2.33$$

debido a que se considera un campo coherente dentro de la cavidad y también se usó la identidad

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta. \quad 2.2.34$$

2.3. Interacción átomo-campo con un campo externo extra

El sistema que aquí se analiza, se basa en el mostrado en la sección anterior, el sistema átomo-campo. El átomo es de dos niveles sumergido en una cavidad de calidad alta Q, la cual proporciona un campo mono-modo. Además, a este sistema se le hace incidir un campo coherente externo; el campo coherente externo está en resonancia con el sistema primario.

La expresión para el Hamiltoniano del nuevo sistema es [9]

$$H = \hbar\omega \frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\omega\hat{b}^+\hat{b} + \hbar\lambda_1(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-) + \hbar\lambda_2(\hat{b}\hat{\sigma}_+ + \hat{b}^+\hat{\sigma}_-), \quad 2.3.1$$

donde los operadores \hat{a} y \hat{b} son los operadores de aniquilación para el modo del campo de la cavidad y el modo del campo coherente externo, respectivamente; de igual forma para los operadores de creación \hat{a}^+ y \hat{b}^+ . La frecuencia de resonancia es ω , λ_1 es la constante de acoplamiento entre el átomo y el modo de la cavidad y por último, λ_2 es la constante de acoplamiento entre el átomo y el campo coherente externo.

El Hamiltoniano 2.3.1 cumple la ecuación de Schrödinger 1.4.13, es decir

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle; \quad 2.3.2$$

si se hace

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega\hat{b}^+\hat{b}} |\phi(t)\rangle, \quad 2.3.3$$

la ecuación de Schrödinger 2.3.2 se modifica para obtener la ecuación de movimiento para $|\phi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = H' |\phi(t)\rangle, \quad 2.3.4$$

donde

$$H' = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\omega \frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \hbar\lambda_1(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-) + \hbar\lambda_2(\hat{b}e^{-i\omega t}\hat{\sigma}_+ + \hat{b}^+e^{i\omega t}\hat{\sigma}_-) \quad 2.3.5$$

El aplicar el operador de desplazamiento de Glauber definido en 1.4.22 al Hamiltoniano 2.3.5, resulta [9]

$$H'' = H + V = D^+(\varepsilon)H'D(\varepsilon), \quad 2.3.6$$

además, si el campo coherente externo que desplaza es muy intenso, se obtiene:

$$H = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda_1(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-) + \hbar\lambda_2(\varepsilon e^{-i\omega t}\hat{\sigma}_+ + \varepsilon^* e^{i\omega t}\hat{\sigma}_-), \quad 2.3.7$$

y

$$V = 0. \quad 2.3.8$$

De esta forma, la ecuación de Schrödinger 2.3.4 se convierte en

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi(t)\rangle = H'' |\varphi(t)\rangle, \quad 2.3.9$$

con

$$|\varphi(t)\rangle = D^+(\varepsilon) |\phi(t)\rangle. \quad 2.3.10$$

Se deduce de la ecuación 2.3.10 que el estado inicial del sistema está descrito por

$$|\varphi(t)\rangle = |0\rangle_b |\chi(0)\rangle, \quad 2.3.11$$

donde $|0\rangle_b$ describe el estado de vacío del campo externo y $|\chi(0)\rangle$ es el estado inicial del sistema átomo-campo que está dentro de la cavidad manipulado por el campo clásico externo ε [9].

Por otra parte, el Hamiltoniano 2.3.7 es dependiente del tiempo. Para quitar esa dependencia temporal se aplica un cuadro de interacción como se hizo en la sección 2.1 con la ayuda de la transformación 2.2.3, obteniéndose

$$H_I = \hbar\lambda_1 (\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-) + \hbar\lambda_2 (\varepsilon\hat{\sigma}_+ + \varepsilon^*\hat{\sigma}_-), \quad 2.3.12$$

el cual es independiente del tiempo. Además, si se aplica el operador de desplazamiento de

Glauber $D\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$, al Hamiltoniano 2.3.12, se obtiene el Hamiltoniano usual del modelo de

Jaynes-Cummings H_{JCM}

$$H_{JCM} = \hbar\lambda_1 (\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^+\hat{\sigma}_-), \quad 2.3.13$$

que también se mostró en 2.2.8; la solución para el Hamiltoniano 2.3.13 es el operador de evolución temporal [9]

$$U_{JCM} = e^{-i\lambda_1 (a\hat{\sigma}_+ + a^+\hat{\sigma}_-)t} \quad 2.3.14$$

Este resultado hace notar que el haber estudiado el modelo de James-Cummings en la sección 2.2 nos facilita el estudio del nuevo sistema átomo-campo-campo externo coherente. Entonces se puede caracterizar al sistema totalmente como se hace en los sistemas de un átomo de dos niveles dentro de una cavidad mono-modal.

CAPÍTULO 3

FUNCIÓN DE CUASI-PROBABILIDAD DE WIGNER

En este capítulo, se hará notar la necesidad de construir una función para la mecánica cuántica que sea análoga a la función de probabilidad. Por esta misma necesidad, hace varios años surgieron las funciones de distribución de cuasi-probabilidad. Donde las principales son: la función de Wigner, la función de distribución P y la distribución Q; en este trabajo, sólo se analizará la función de Wigner.

3.1. Espacio fase

Cuando se quiere describir el comportamiento de un sistema que tiene muchos grados de libertad, como lo es el sistema de N partículas en una caja tridimensional, se considera a las coordenadas q_1, \dots, q_N del sistema como las coordenadas de un punto en el sistema de dimensión N o espacio de configuración del sistema mecánico. El movimiento de $\{q_i\}$ describe una trayectoria en el espacio de configuración, dicho movimiento representa la evolución del sistema. Por otra parte, $\{q_i\}$ representa otras trayectorias a la vez porque el sistema puede tener cualquier velocidad $\left\{ \dot{q}_i = \frac{\partial q}{\partial t} \right\}$.

Se considera un espacio bidimensional denominado espacio fase, para describir mejor el estado dinámico unidimensional de una partícula, donde las coordenadas q y p son las abcisa y la ordenada, respectivamente [10].

La representación de una partícula en el espacio fase es por medio de las coordenadas (q,p) , esto es en mecánica clásica. En este contexto es posible determinar con precisión la posición y momento simultáneamente de una partícula, donde en mecánica cuántica eso es imposible y se ve del principio de incertidumbre de Heisenberg [2]

$$\Delta q \Delta p = \hbar . \tag{3.1.1}$$

Se puede interpretar al principio de Incertidumbre de Heisenberg 3.1.1 como el espacio fase dividido en celdas con lados Δq y Δp . En cada instante, el punto que representa a la partícula está dentro del área de alguna de las celdas de área \hbar , es decir, la mínima incertidumbre de encontrar a la partícula en el espacio fase es \hbar .

Las ecuaciones de Hamilton que relacionan a las coordenadas q y p son [10]

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \quad 3.1.2$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \quad 3.1.3$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema, para sistemas conservativos H corresponde a la energía total.

Un número grande de partículas de un sistema hace complicado obtener una solución que describa totalmente el sistema. Las coordenadas y velocidades iniciales de todas las partículas llegan a ser imposible de conocerlas y manejarlas todas a la vez. Entonces las coordenadas y momentos son ahora parte de una variable que contiene a ambos conceptos, la variable aleatoria

$$X = X(\{q_i, p_i\}), \quad 3.1.4$$

y puede indicar una variable aleatoria discreta o continua. Para seguir con el estudio del sistema representado por la variable aleatoria se asocia una densidad de probabilidad $P(X)$ en el espacio fase. La probabilidad de que una partícula se encuentre en el elemento de volumen dV es $P(X)dV$. Las propiedades físicas del sistema se calculan como promedios a lo largo de la trayectoria, en el intervalo particular $(\{q_i\}, \{p_i\})$.

Los puntos o estados deben estar en algún lugar del espacio fase, lo que sugiere

$$\int_V P(X)dV = 1, \quad 3.1.5$$

que es la condición de normalización y la integración es sobre todo el espacio.

El valor esperado o de expectación $\langle X \rangle$ es la cantidad más importante que está asociada con la variable aleatoria y se calcula con [2]

$$\langle X \rangle = \int_V XP(X)dV. \quad 3.1.6$$

La función $f(X)$ puede ser generalmente considerada como una variable aleatoria si X también lo es, así que el valor esperado también está definido de la misma forma que en 3.1.6, esto es

$$\langle f(X) \rangle = \int_V f(X)P(X)dV. \quad 3.1.7$$

Los momentos son los valores esperados de las potencias X^f y se calculan con

$$\langle X^r \rangle = \int_V X^r P(X) dV, \quad 3.1.8$$

donde $r=1,2,3\dots$

El momento de cualquier función $f(q,p)$ está determinado por

$$\langle f(q, p) \rangle = \int f(q, p) P(q, p) dq dp, \quad 3.1.9$$

por simplicidad, se considera una función de distribución $P(q, p)$ en el espacio fase que describe clásicamente a un sistema dinámico unidimensional.

En sistemas cuánticos es imposible de especificar simultáneamente la posición y la velocidad de las partículas, esta vez porque las coordenadas del espacio fase no conmutan. Por esta razón no se puede introducir una función de densidad de probabilidad directamente del espacio fase.

3.2. Operador de densidad

La información acerca de un estado cuántico la tiene el operador de densidad de probabilidad $\hat{\rho}$ igual a

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad 3.2.1$$

donde $|\psi\rangle$ es una superposición de estados de energía de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad 3.2.2$$

Sea $|\psi\rangle$ el estado en que se encuentra un sistema y su probabilidad de ocurrencia es P_i . En muchas ocasiones, la probabilidad de ocurrencia P_i puede ser conocida o medida directamente del sistema. El operador de densidad de probabilidad para este estado mezclado es

$$\hat{\rho} = \sum_{i=0}^n P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad 3.2.3$$

El operador de densidad $\hat{\rho}$ sirve para calcular los valores esperados de otros operadores con la fórmula [11]

$$\langle \hat{O} \rangle_{qm} = Tr[\hat{\rho}\hat{O}], \quad 3.2.4$$

donde

$$Tr(\hat{\rho}) = 1, \quad 3.2.5$$

es decir, la suma de las probabilidades de todos los posibles estados del sistema es igual a 1, esto asegura que el sistema debe estar en alguno de esos estados.

El promedio de cualquier función $\hat{f}(\hat{q}, \hat{p})$ se determina por el operador de densidad mediante la relación

$$\langle \hat{f}(\hat{q}, \hat{p}) \rangle_{qm} = Tr[\hat{\rho}\hat{f}(\hat{q}, \hat{p})]. \quad 3.2.6$$

Si \hat{f} es una función únicamente de \hat{q} y además se calcula la traza de la ecuación 3.2.6 en la base de eigenestados $|q\rangle$ del operador \hat{q} , se tiene

$$\langle \hat{f}(q) \rangle_{qm} = \int f(q) \langle q | \hat{\rho} | q \rangle dq, \quad 3.2.7$$

donde $\langle q | \hat{\rho} | q \rangle$ juega el papel de la función de distribución de probabilidad P.

La función de distribución P(q,p) se puede expresar en términos del promedio de un conjunto completo de funciones q y p. Entonces, es posible construir un análogo cuántico de la función de distribución clásica y el promedio será cuántico también. Para esto se reescribe a P(q,p) como [6]

$$P(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{ikq} e^{ilp} \langle \Omega e^{-ikq} e^{-ilp} \rangle_{qm} dk dl, \quad 3.2.8$$

esta expresión es la analogía cuántica de la función de distribución en el espacio fase clásico. El promedio está en función del operador de densidad Ω y P nos da una representación de este operador en el espacio fase. Al seleccionar distintos ordenamientos en los operadores que conforman a Ω , se conducen a distintas P(q,p); con ciertos ordenamientos se obtienen las formas conocidas como la función de Wigner, la función de distribución P y la distribución Q. Así, las funciones que se encuentren para P (q, p) son las llamadas funciones de cuasi-probabilidad porque son una construcción matemática y no funciones reales de distribución en el espacio fase.

3.3. Definición de la función de Wigner

Las tres principales distribuciones de cuasi-probabilidad son la función de Wigner, la función de distribución P y la distribución Q. En este trabajo nos interesa sólo la función de Wigner.

Wigner introdujo en 1932 una función de distribución $W(q,p)$ conocida como la función de distribución de Wigner [12] que sirve para caracterizar el estado $|\psi\rangle$ de un sistema cuántico en el espacio fase. La distribución de Wigner en una dimensión es

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle q - \frac{1}{2}x \left| \hat{\rho} \left| q + \frac{1}{2}x \right. \right\rangle e^{-ipx} dx, \quad 3.3.1$$

donde $\hat{\rho}$ es el operador de densidad del sistema, $|q\rangle$ y $|p\rangle$ denotan un estado de posición y momento, respectivamente.

Si $|\psi\rangle$ es un estado puro y $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ cumple la ecuación de onda de Schrödinger, se tiene

$$\left\langle q - \frac{1}{2}x \left| \hat{\rho} \left| q + \frac{1}{2}x \right. \right\rangle = \psi^* \left(q - \frac{1}{2}x \right) \psi \left(q + \frac{1}{2}x \right). \quad 3.3.2$$

La distribución $W(q,p)$ definida hasta ahora es real y normalizada a la unidad. Se puede demostrar que el valor esperado de una función ordenada simétricamente $f^{(w)}(q,p)$ se calcula por medio de [13]

$$\langle f^{(w)}(q, p) \rangle = \int f^{(w)}(q, p) W(q, p) dq dp. \quad 3.3.3$$

El lado derecho de la ecuación 3.3.3 tiene la misma estructura que la de un promedio clásico, donde q y p son las variables aleatorias con la densidad de probabilidad $W(q,p)$.

$W(q,p)$ no tiene todas las características de una densidad de probabilidad y puede tener valores negativos, por lo que también es conocida como una densidad cuasi-probabilidad. Esto a pesar de la gran similitud de $W(q,p)$ con una densidad de probabilidad adjunta. Además, $W(q,p)$ no corresponde a alguna cantidad que se pueda medir directamente, hay que tener en cuenta que la probabilidad de un par de variables canónicamente conjugadas no puede ser medida. Aún así, su integral marginal es la densidad de probabilidad de q , esto es

$$\int W(q, p) dp = \frac{1}{2\pi} \int dp \int dx \left\langle q - \frac{1}{2}x \left| \rho \left| q + \frac{1}{2}x \right. \right\rangle e^{-ixp}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left\langle q + \frac{1}{2}x \left| \rho \left| q - \frac{1}{2}x \right. \right. \right\rangle \delta(x) dx \\
&= P(q) = \left| \langle q | \psi \rangle \right|^2
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

De igual forma para p

$$\int W(q, p) dq = \psi^*(p) \psi(p) = \left| \langle p | \psi \rangle \right|^2, \tag{3.3.5}$$

es la densidad de probabilidad de p, donde $\psi(p)$ es la función de onda en espacio p.

El cambio de variable $y=x/2$ y las propiedades de las eigenfunciones hacen que la función de Wigner definida en 3.3.1 se describa como

$$\begin{aligned}
W(q, p) &= \frac{1}{\pi} \int \langle -y | e^{-iq\hat{p}} \rho e^{iq\hat{p}} | y \rangle e^{-i2yp} dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int \langle -y | e^{iq\hat{p}} e^{-iq\hat{p}} \rho e^{iq\hat{p}} e^{-iq\hat{p}} | y \rangle dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int \langle y | (-1)^{\hat{n}} e^{iq\hat{p}} e^{-iq\hat{p}} \rho e^{iq\hat{p}} e^{-iq\hat{p}} | y \rangle dy,
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

se completan los exponenciales por medio de la relación de Baker-Hausdorff definida en la ecuación 1.4.26 y se obtiene la función de Wigner en termino de la traza

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left\{ (-1)^{\hat{n}} \hat{D}^+(\alpha) \rho \hat{D}(\alpha) \right\} \tag{3.3.7}$$

Como ya se mencionó, la distribución de Wigner no tiene todas las características de una densidad de probabilidad y esto refleja el hecho de que en mecánica cuántica existen estados que no tienen contraparte clásica. Pero algo muy importante es que sus integrales marginales respecto a q o p son las densidades de probabilidad respecto a q o p, según el caso; a partir de esto también se puede calcular la función de onda para este sistema. Por lo tanto, si se obtiene la función de Wigner para algún sistema, este puede ser completamente caracterizado por ella y es análogo a tener la función de onda para algún estado del sistema.

CAPÍTULO 4

REPRESENTACIÓN DE FRESNEL DE LA FUNCIÓN DE WIGNER DEL SISTEMA ÁTOMO-CAMPO CON UN CAMPO EXTERNO EXTRA

Las siguientes secciones del presente capítulo tienen información acerca del sistema átomo-campo controlado con un campo externo. La primera sección consiste en dejar la solución del modelo de Jaynes-Cummings en término de los operadores de fase que se definirán en la misma sección, esto como herramienta matemática. En la segunda sección, primero se considera al operador de evolución temporal del sistema átomo-campo pero desplazado por el operador de desplazamiento $D(\beta)$ en amplitudes controladas β del campo exterior; seguido de esto, se calcula la probabilidad del estado excitado para el átomo. En la última sección, se calcula la función de Wigner a partir de la probabilidad calculada en la segunda sección. Cabe mencionar que la función de Wigner usada en esta última sección es la representación de Fresnel de la función de Wigner. Se usó la transformada de Fresnel porque al aplicarla a la probabilidad de obtener el átomo en su estado excitado resultó ser proporcional a la función de Wigner y como se menciona anteriormente, con ella se obtiene información completa del sistema. Por último, en esta misma sección se deja a la representación de Fresnel de la función de Wigner en término de la traza.

4.1. La solución del modelo de Jaynes-Cummings en término de los operadores \hat{V} y \hat{V}^+ .

La definición de los operadores de fase [14]

$$\hat{V} \equiv \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} \quad 4.1.1$$

y

$$\hat{V}^+ \equiv \hat{a}^+ \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}, \quad 4.1.2$$

sirve para que el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings 2.3.14 se pueda escribir como

$$H_{JCM} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda\sqrt{\hat{n}+1} \\ \lambda\sqrt{\hat{n}+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{pmatrix}. \quad 4.1.3$$

El operador de evolución temporal para el sistema que tiene un Hamiltoniano descrito por 4.1.3 es

$$U(t) = e^{Mt}. \quad 4.1.4$$

El desarrollo de la serie exponencial es

$$e^{Mt} = I + Mt + \frac{1}{2!}M^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}M^k t^k + \dots, \quad 4.1.5$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda\sqrt{\hat{n}+1} \\ -i\lambda\sqrt{\hat{n}+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{pmatrix}. \quad 4.1.6$$

Al sustituir 4.1.6 en 4.1.5 y luego de separar adecuadamente las matrices con exponentes pares en un grupo y las matrices con exponentes impares en otro, se obtiene

$$\begin{aligned} e^{Mt} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \left[I - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\lambda t\sqrt{\hat{n}+1}]^2 & 0 \\ 0 & [\lambda t\sqrt{\hat{n}+1}]^2 \end{pmatrix} + \dots \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i\lambda t\sqrt{\hat{n}+1} \\ -i\lambda t\sqrt{\hat{n}+1} & 0 \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & [-i\lambda t\sqrt{\hat{n}+1}]^3 \\ [-i\lambda t\sqrt{\hat{n}+1}]^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{pmatrix}, \quad 4.1.7 \end{aligned}$$

después de sumar las matrices se agrupan los términos así

$$\begin{aligned} e^{Mt} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2!}[\lambda t\sqrt{\hat{n}+1}]^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2!}[\lambda t\sqrt{\hat{n}+1}]^2 + \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \left[\lambda t\sqrt{\hat{n}+1} - \frac{1}{3!}(\lambda t\sqrt{\hat{n}+1})^3 + \dots \right] \\ -i \left[\lambda t\sqrt{\hat{n}+1} - \frac{1}{3!}(\lambda t\sqrt{\hat{n}+1})^3 + \dots \right] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.1.8

La matriz del primer sumando de 4.1.8 tiene los elementos de la serie del coseno y la matriz del segundo sumando tiene los elementos de la serie del seno, así que

$$e^{M_t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] & -isen[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] \\ -isen[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] & \cos[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{pmatrix}. \quad 4.1.9$$

Al hacer la multiplicación de las tres matrices de 4.1.9, finalmente se obtiene la forma

$$U_{JCM} = e^{M_t} = \begin{pmatrix} \cos[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] & -isen[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] \cdot \hat{V} \\ -i\hat{V}^+ sen[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] & \hat{V}^+ \cos[\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}] \cdot \hat{V} \end{pmatrix}, \quad 4.1.10$$

El operador U_{JCM} hace referencia a la solución en el modelo de James-Cummings.

4.2. Probabilidad del estado excitado del átomo

El operador $U(t)$ es la evolución temporal del sistema átomo-campo con un campo externo extra y se define por

$$U(t) = D^+(\beta) e^{M_t} D(\beta), \quad 4.2.1$$

esto es, $D(\beta)$ desplaza al operador de evolución temporal de Jaynes-Cummings e^{M_t} a causa del campo externo. En esta sección se tomará en cuenta e^{M_t} en su forma presentada anteriormente por 4.1.10.

Por otra parte, $|\psi(0)\rangle$ describe el estado inicial en que se encuentra el sistema átomo campo que es manipulado por el campo externo. Además, se escoge

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_A\rangle |\psi_C\rangle = |e\rangle |\psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 4.2.2$$

donde $|\psi_A\rangle = |e\rangle$ es el estado excitado para el átomo y $|\psi_C\rangle = |\psi\rangle$ es el estado que determina al campo de la cavidad.

La probabilidad de encontrar el átomo en su estado excitado es [1]

$$P_e = \langle e | e \rangle = \langle \psi_C | U^+(t) | e \rangle \langle e | U(t) | \psi_C \rangle. \quad 4.2.3$$

Se sustituye 4.2.1 y 4.2.2 en 4.2.3 para tener

$$P_e = \langle \psi | 0 \rangle [D^+(\beta) e^{Mt} D(\beta)]^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^+(\beta) e^{Mt} D(\beta) \begin{pmatrix} |\psi\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 4.2.4$$

luego se sustituye 4.1.10 en 4.2.4 y se multiplican las matrices para tener

$$P_e = \langle \psi | D^+(\beta) \cos^2(\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}) D(\beta) | \psi \rangle. \quad 4.2.5$$

Recuérdese la identidad trigonométrica

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad 4.2.6$$

la cual se usa en 4.2.5 y así llegar a

$$P_e = \langle \psi | D^+(\beta) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}) \right] D(\beta) | \psi \rangle. \quad 4.2.7$$

Obsérvese que la dependencia temporal de 4.2.7 está solamente en el argumento de la función trigonométrica, así que se puede definir

$$|A\rangle \equiv D(\beta) | \psi \rangle \quad 4.2.8$$

y

$$\langle A | \equiv \langle \psi | D^+(\beta), \quad 4.2.9$$

donde $|A\rangle$ es el estado en que se encuentra el campo de la cavidad $| \psi \rangle$ pero desplazado por acción del campo externo y se desplaza por medio de $D(\beta)$.

Por las definiciones 4.2.8 y 4.2.9, la probabilidad mostrada en 4.2.7 es finalmente

$$P_e = \langle A | \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}) \right] | A \rangle, \quad 4.2.10$$

esta es la probabilidad de encontrar el átomo en el nivel excitado con un campo cuantizado mono-modo dentro de la cavidad y que es manipulado por un campo externo. El campo cuantizado de la cavidad es desplazado a amplitudes deseadas β del campo externo extra.

4.3. Representación de Fresnel de la función de Wigner para el sistema átomo-campo con campo externo extra

Con el cambio $\lambda t = \tau$, la ecuación 4.2.10 se describe como

$$P_e = \langle A | \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\tau\sqrt{\hat{n}+1}) | A \rangle \quad 4.3.1$$

o también así

$$P_e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \langle A | \cos(2\tau\sqrt{\hat{n}+1}) | A \rangle. \quad 4.3.2$$

Si se multiplica a la ecuación 4.3.2 por el factor

$$\frac{2}{\pi\sqrt{i}} e^{i\tau^2/\pi} \quad 4.3.3$$

y se integra respecto a τ , esto es

$$\frac{2}{\pi\sqrt{i}} \int_0^\infty d\tau e^{i\tau^2/\pi} \left(P_e - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \langle A | \frac{2}{\pi\sqrt{i}} \int_0^\infty d\tau e^{i\tau^2/\pi} \cos(2\tau\sqrt{\hat{n}+1}) | A \rangle. \quad 4.3.4$$

Por otro lado, se tiene el resultado de la relación integral [15]

$$\frac{2}{\pi\sqrt{i}} \int_0^\infty d\tau e^{i\tau^2/\pi} \cos(2\tau\sqrt{\hat{n}}) = (-1)^{\hat{n}}, \quad 4.3.5$$

que si se aplica a la derecha de la igualdad de la expresión 4.3.4, se obtiene

$$\frac{2}{\pi\sqrt{i}} \int_0^\infty d\tau e^{i\tau^2/\pi} \left(P_e - \frac{1}{2} \right) = \langle A | (-1)^{\hat{n}+1} | A \rangle. \quad 4.3.6$$

Como la representación de Fresnel de la función de Wigner es [15]

$$W(A, \tau) \equiv 4 \int_0^\tau \frac{2d\tau}{\pi\sqrt{i}} e^{i\tau^2/\pi} \left(P_e - \frac{1}{2} \right). \quad 4.3.7$$

De esta manera, la ecuación 4.3.6 es multiplicada por el número cuatro en ambos lados de la igualdad y se obtiene la función de Wigner

$$W(A) = 2\langle A|(-1)^{n+1}|A\rangle \quad 4.3.8$$

o también

$$W(A) = -2\langle A|(-1)^n|A\rangle. \quad 4.3.9$$

Los valores promedios están definidos por sus trazas, por eso la función 4.3.9 queda de la forma

$$W(A) = -2Tr\{A\langle A|(-1)^n\}, \quad 4.3.10$$

donde $|A\rangle\langle A| = \hat{\rho}_D$ es la función de densidad desplazada del campo de la cavidad. Ahora, recordando las definiciones 4.2.8 y 4.2.9, con ellas se consigue rescribir a 4.3.10 de la forma

$$W(\beta) = -2Tr\{D(\beta)|\psi\rangle\langle\psi|D^+(\beta)(-1)^n\}, \quad 4.3.11$$

donde $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ es la función de densidad del campo de la cavidad, es decir

$$W(\beta) = -2Tr\{D(\beta)\hat{\rho}D^+(\beta)(-1)^n\}. \quad 4.3.12$$

Si se usa el hecho

$$Tr\{ABC\} = Tr\{BCA\}, \quad 4.3.13$$

entonces la ecuación toma la forma

$$W(\beta) = -2Tr\{\hat{\rho}D(\beta)(-1)^n D^+(\beta)\}. \quad 4.3.14$$

Ya se menciona que la función de Wigner permite conocer información completa de un sistema, la ecuación 4.3.14 es la función de Wigner para el campo cuántico interno de la cavidad. La función de onda para el campo cuántico interno de la cavidad está desplazada por el campo coherente intenso externo a la cavidad, por lo que con esta función de Wigner tenemos la información completa del sistema.

CAPÍTULO 5

HAMILTONIANO EFECTIVO PARA UN ATOMO DE DOS NIVELES INTERACTUANDO CON DOS CAMPOS

Se estudia la forma de producir los Hamiltonianos Efectivos debido a la interacción de un átomo de dos niveles y un campo cuántico y uno clásico. Se procede por el estudio de la dinámica de este sistema por medio de la función Q y las probabilidades de encontrar al átomo de dos niveles, ya sea en su estado excitado básico.

En varios problemas de la física cuántica es posible simplificar Hamiltonianos al observar que en determinadas circunstancias, los parámetros que intervienen permiten obtener el Hamiltoniano Efectivo, ya sea por el uso de la eliminación adiabática [16] o por el uso de otros enfoques como el método de pequeñas rotaciones [17]. Aquí se aplica el método de pequeñas rotaciones para obtener el Hamiltoniano Efectivo para la interacción de un átomo de dos niveles y dos campos, uno cuantizado y el otro clásico.

En la sección 5.1. se aplica el método para el caso de un átomo de dos niveles que interactúan con un campo cuántico, en la sección 5.2. se generaliza a tener en cuenta el campo clásico extra y se resuelve la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano Efectivo y el estudio de la dinámica.

5.1. Hamiltoniano Efectivo del átomo-campo

La interacción entre un átomo de dos niveles y un campo está dado por

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \lambda (a \sigma_+ + \sigma_- a^\dagger) \quad 5.1.1$$

donde:

ω , ω_0 , λ , a^\dagger , a , σ^s son la frecuencia del campo, la frecuencia de transición atómica, la constante de interacción átomo-campo, el operador de creación para el modo del campo, el operador de aniquilación igual del modo del campo y los operadores usuales de spin de Pauli, respectivamente.

El anterior Hamiltoniano se transforma por medio de un cuadro de interacción de la forma

$$T = e^{-i\alpha [a, a^\dagger + \sigma_z]} \quad 5.1.2$$

$$H_I = THT \quad 5.1.3$$

Tal que obtenemos el Hamiltoniano

$$H_I = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + \lambda(a\sigma_+ + \sigma_-a^+) \quad 5.1.4$$

con

$$\Delta = \omega_0 - \omega \quad 5.1.5$$

Si la diferencia entre la frecuencia de transición atómica y la frecuencia del campo está suficientemente grande comparada con la constante de interacción, es decir, donde

$$|\Delta| \gg \lambda \quad 5.1.6$$

se puede obtener un Hamiltoniano Efectivo de la ecuación 5.1.1 mediante la realización de una pequeña rotación para el Hamiltoniano [2,3].

Se hace

$$H_{Eff} = RH_I R, \quad 5.1.7$$

Con

$$R = e^{\eta(a\sigma_+ - \sigma_-a^+)} \quad 5.1.8$$

y

$$\eta \ll 1$$

para obtener

$$H_{Eff} = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + (\lambda + \eta\Delta)(a\sigma_+ + \sigma_-a^+) - \lambda\eta\sigma_z(2a^+a + 1) \quad 5.1.9$$

y estableciendo

$$\eta = -\frac{\lambda}{\Delta}$$

se obtiene el conocido Hamiltoniano Dispersivo:

$$H_{\text{Eff}} = \frac{\Delta_D}{2} \sigma_z + \chi \sigma_z a^+ a \quad 5.1.10$$

con

$$\chi = -\frac{2\lambda^2}{\Delta}$$

y

$$\Delta_D = \Delta - \frac{2\lambda^2}{\Delta}$$

5.2. Caso con dos campos

La interacción entre un átomo de dos niveles y dos campos, uno de ellos clásico y el otro cuantizado está dada por [19]:

$$H = \omega a^+ a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \lambda (a \sigma_+ + \sigma_- a^+) + \varepsilon e^{-i\omega t} \sigma_+ + \varepsilon^* e^{i\omega t} \sigma_- \quad 5.2.1$$

donde

ε
es la amplitud del campo clásico cuya frecuencia es
 ω

Pero siguiendo la transformación de rotación pequeña de la sección anterior, se llega al siguiente Hamiltoniano Efectivo para dos campos interactuando con el átomo de dos niveles

$$H_2 = (\delta + \chi a^+ a + \varepsilon_R a^+ + a \varepsilon_R^*) \sigma_z + \varepsilon \sigma_+ + \varepsilon^* \sigma_- \quad 5.2.2$$

con

$$\varepsilon_R = \frac{\lambda\varepsilon}{\Delta}$$

y

$$\delta = \frac{\Delta + \chi}{2}$$

Ahora se resuelve la ecuación de Schrödinger con $\hbar=1$

$$i \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H_2 |\Psi\rangle \tag{5.2.3}$$

y para lograrlo se aplica la transformación

$$|\Psi\rangle = D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) |\varphi\rangle \tag{5.2.4}$$

para simplificar aún más el Hamiltoniano de la ecuación 5.2.2, se obtiene

$$i \frac{\partial |\varphi\rangle}{\partial Y} = H_D |\varphi\rangle \tag{5.2.5}$$

con

$$H = (\delta_D + \chi a^+ a) \sigma_z + \varepsilon \sigma_+ + \varepsilon^* \sigma_- \tag{5.2.6}$$

donde

$$\delta_D = \delta - \frac{|\varepsilon|^2}{\chi}. \tag{5.2.7}$$

Recuerde que el operador de desplazamiento de Glauber es ref. [20]

$$D(\beta) = e^{(\beta a^+ - a \beta^*)}. \tag{5.2.8}$$

Ahora se puede encontrar fácilmente el operador de evolución correspondiente al Hamiltoniano Desplazado como

$$U_D = e^{-iH_D t} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad 5.2.9$$

donde se ha utilizado la forma matricial de los operadores de Pauli. Los elementos de matriz están dados por

$$U_{11} = \cos \Omega_N t - i \frac{\chi N + \delta_D}{\Omega_N} \sin \Omega_N t \quad 5.2.10.a$$

$$U_{12} = -i \frac{\varepsilon}{\Omega_N} \sin \Omega_N t \quad 5.2.10.b$$

$$U_{21} = -i \frac{\varepsilon^*}{\Omega_N} \sin \Omega_N t \quad 5.2.10.c$$

$$U_{22} = \cos \Omega_N t + i \frac{\chi N + \delta_D}{\Omega_N} \sin \Omega_N t \quad 5.2.10.d$$

Recuerde que el llamado operador de número

$$N = a^+ a \quad 5.2.11$$

y

$$\Omega_N = \left[(\delta_D + \chi N)^2 + |\varepsilon|^2 \right]^{1/2}. \quad 5.2.12$$

Si se asume una función de onda inicial de la forma

$$|\varphi(0)\rangle = |\alpha\rangle |e\rangle, \quad 5.2.13$$

es decir, el átomo en el estado excitado y el campo en un estado coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad 5.2.14$$

La evolución de la función de onda es

$$|\psi(t)\rangle = D^+\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) \times \left[U_{11} D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) |\alpha\rangle |e\rangle + U_{21} D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) |\alpha\rangle |g\rangle \right] \quad 5.2.15$$

donde g es la representación del estado base o fundamental.

Pero si se escribe

$$D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) |\alpha\rangle = D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) D(\alpha) |0\rangle = \left| \frac{\varepsilon_R}{\chi} + \alpha \right\rangle \quad 5.2.16$$

en donde se ha considerado para simplificar que ε_R y α son reales. Se encuentra entonces la probabilidad de que el átomo esté en el estado base o fundamental como

$$P_g(t) = \left\langle \frac{\varepsilon_R}{\chi} + \alpha \left| \frac{|\varepsilon_R|^2}{\Omega_N^2} \sin^2(\Omega_N t) \right| \frac{\varepsilon_R}{\chi} + \alpha \right\rangle = e^{\left| \frac{\varepsilon_R + \alpha}{\chi} \right|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(\Omega_n t)}{n!} \left| \frac{\varepsilon_R}{\chi} + \alpha \right|^2 \quad 5.2.17$$

La probabilidad de encontrar el átomo en el estado base (fundamental) en función del tiempo. Se puede observar que al contrario del modelo de dispersión descrito en la sección 5.1, el desplazamiento producido por el campo clásico hace tener reposiciones y colapsos, que sin embargo son de amplitud pequeña.

De la ecuación 5.2.15 se puede obtener la matriz de densidad total del sistema

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad 5.2.18$$

Y por el seguimiento sobre los grados de libertad del átomo se escribe la matriz de densidad del campo como

$$\begin{aligned} \rho_F(t) = & D^+\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) U_{11} D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) |\alpha\rangle\langle\alpha| D^+\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) U_{11}^+ D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) + \dots \\ & \dots + D^+\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) U_{22} D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) |\alpha\rangle\langle\alpha| D^+\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) U_{21}^+ D\left(\frac{\varepsilon_R}{\chi}\right) \end{aligned} \quad 5.2.19$$

y de ella se puede encontrar la función Q [21], como

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \rho_f(t) | \beta \rangle = \frac{1}{\pi} \left| \left\langle \beta + \frac{\varepsilon_R}{\chi} \left| U_{11} \right| \alpha + \frac{\varepsilon_R}{\chi} \right\rangle \right|^2 + \frac{1}{\pi} \left| \left\langle \beta + \frac{\varepsilon_R}{\chi} \left| U_{21} \right| \alpha + \frac{\varepsilon_R}{\chi} \right\rangle \right|^2, \quad 5.2.20$$

La interacción de dispersión tratado en la sección 5.1 produce una función Q regresa al origen del espacio fase.

El Hamiltoniano Efectivo, teniendo en cuenta el campo clásico extra, produce que el estado coherente ahora se mueva en torno a un origen desplazado.

5.3. Colapsos y avivamientos

Se ha estudiado la interacción de un átomo de dos niveles con un campo cuantizado (sección 5.1) y dos campos donde uno de ellos es clásico (sección 5.2) en el régimen de dispersión, es decir, cuando las frecuencias de los campos son muy diferentes de la frecuencia de la transición atómica.

La inyección del campo clásico muestra que la mayoría se desplaza, las variables dinámicas del campo y sólo produce pequeños efectos en la dinámica atómica: los pequeños colapsos son producidos por la inyección del campo clásico.

La pequeñez de los colapsos también se notan en la función Q, donde no hay división de los estados coherentes en partes que cuando se recombinan producen los avivamientos [22].

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En esta tesis se investigo la posibilidad de medir la información de un sistema, en particular el del campo electromagnético. Se mostró que es posible obtener una relación entre propiedades atómicas y la función de Wigner del campo electromagnético de una cavidad.

De forma precisa, para tal fin se hizo una transformada de Fresnel de la probabilidad de obtener el átomo excitado de la cual resultó ser proporcional a la función de Wigner.

Aunque esto ya se había hecho en el artículo de referencia [11], la importancia de esta tesis es que el proceso de “desplazamiento” del campo electromagnético se realiza mientras el átomo pasa por la cavidad en contraste al de la referencia [11] que primero se “desplaza” el campo electromagnético y después se pasa a los átomos por la cavidad.

Sabemos que es muy importante tener métodos alternos a los conocidos y además, si describen con más exactitud a los fenómenos, eso es más importante todavía. Esto es, porque en cuántica los tiempos son muy importantes al momento de realizar experimentos. Esta tesis hace que el método usado para obtener información completa de un sistema sea más exacto por el hecho de que el proceso de “desplazamiento” del campo electromagnético se realiza mientras el átomo pasa por la cavidad.

REFERENCIAS

[1] P. Meystre and M. Sargent, "Elements of Quantum Optics", 3rd edition, Springer-Verlag Berlin.

[2] Y. Peleg, R. Pnini and E. Zaarur (1998), "Theory and Problems of Quantum Mechanics", McGraw-HILL.

[3] F. W. JR. Byron, (1969) "Mathematics of Classical and Quantum Physics Vol. I, pag.155, Adisson-Wesley.

[4] G. B. Arfken and H. J. Weber (1966), "Mathematical Methods for Physicist", 4rd edition, Academic Press.

[5] J. R. Reitz y F. J. Milford (1981), "Fundamentos de la teoría Electromagnética", 1^a. Edición en español.

[6] J. M. Vargas (2003), "Ordenamiento Normal y Antinormal de Operadores"

[7] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEE 51, 89 (1963).

[8] S. I. Grossman (1996), "Algebra Lineal", 5a. edición en español, pag. 606-609, McGraw-Hill.

[9] S. M. Dutra, P. L. Knight and H. Moya-Cessa (1994), "Large-scale fluctuations in the driven Jaynes-Cummings model". Physical Review A 49.

[10] H. Goldstein (1988), "Mecánica Clásica", 2^a. Edición en español, Editorial Reverte, S. A

[11] W. P. Schleich "Quantum Optics in Phase Space", First Edition, pag.44, WILEY-VCH.

- [12] E. P. Wigner (1932), *Physical Review* 40, pag. 749.
- [13] M. O. Scully (1997), “Quantum Optics”, First Edition, pag. 81, Cambridge University Press.
- [14] L. Susskind and J. Glogower, *Physics* (Long Island City, N.Y.) 1, 49 (1964).
- [15] P. Lougovski, E. Solano, Z. M. Zhang, H. Walter, H. Mack and W. P. Schleich (2003), “Fresnel Representation of the Wigner Function: An Operational Approach”, *Physical Review Letters*, 91, pag. 010401-1,2.
- [16] J. Larson, S. Fernández-Vidal, G. Morigi and M. Lewenstein, Quantum Stability of Mott-insulator states of ultracold atoms in optical resonators, *New J. of Phys.*10 (2008), 045002.
- [17] A.B. Klimov, L.L. Sánchez-Soto, Method of small rotations and effective Hamiltonians in nonlinear quantum optics, *Phys. Rev. A*61 (2000), 063802.
- [18] R. Mar-Sarao, Hamiltoniano Dispersivo en la interacción de 2 átomos con un campo electromagnético, Msc dissertation, Inst. Nac. De Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, México, 2004.
- [19] P. Alsing, D.-S. Guo, and H.J. Carmichael, Dynamic Stark effect for the Jaynes-Cummings system, *Phys. Rev. A*45, (1992) 5135.
- [20] R.J. Glauber, Coherent and incoherent states of the radiation field, *Phys. Rev. A* 131 (1963), 2766.
- [21] K. Husimi, Some formal properties of the density matrix, *Proc. Phys. Math. Soc Japan*, 22 (1940), 264.
- [22] V. Buzek, H. Moya-Cessa, p.L. Kight and S.J.D. Phoenix, Schrödinger-cat status in the resonant Jaynes-Cummings Model: collapse and revival of oscillations of the photon number distribution, *Phys. Rev. A*45, (1992) 8190.