Estudio de la Propagación de la Luz en Materiales con Índice de Refracción Negativo

por

Juan Carlos Juárez Morales

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE ÓPTICA

en el

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Octubre 2007

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff, INAOE

Dr. Javier Muñoz López, INAOE

RESUMEN

Se entiende por metamateriales a materiales construidos artificialmente que poseen propiedades electromagnéticas que no se encuentran normalmente en la naturaleza, y estos operan en las regiones del espectro correspondientes desde los microondas hasta el infrarrojo lejano. Los metamateriales fueron propuestos en los años sesenta por el profesor V. Veselago. Debido a su interesante comportamiento, en la actualidad existen muchos grupos de investigación que están trabajando con estos materiales en aplicaciones tales como sistemas ópticos, electronicós entre otros.

En el presente trabajo se desarrollo el estudio del comportamiento del campo óptico en un metamaterial, una propiedad física importante que tiene un metamaterial es tener el índice de refracción negativo, esto trae importantes cambios en diferentes efectos físicos como podrian ser cambios en las expresiones para las ecuaciones de Fresnel y el ángulo crítico. Además, de modificar los principios básicos de la óptica. Por ejemplo, la ley de Snell. en este trabajo se desarrolla un método utilizando plasmones superficiales para la obtención del comportamiento de los índices de refracción negativa y se propone un sistema interferométrico que permita obtener un material que genere dicha refracción.

Aprovechar materiales que tienen un índice de refracción negativa, podría hacer posible tomar imágenes ópticas de objetos que son más pequeños que la longitud de onda de la luz visible, incluyendo moléculas tales como el ADN; el desarrollo de la "fotonanolitografía"; y nuevos componentes electrónicos que usen luz en lugar de corrientes eléctricas para trasmitir señales y procesar información, dando por resultado comunicaciones más rápidas.

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff y Dr. Javier Muñoz López

Por la confianza y apoyo otorgado para llevar acabo esta tesis de maestría y sobre todo por su amistad brindada en todo momento.

A mis sinodales:

Dr. Hector H. Cerecedo, Dr. Julio C. Ramírez y Dr. Jorge Castro

Por sus valiosas sugerencias y comentarios para mejorar este trabajo de tesis.

Al CONACYT:

Por la ayuda otorgada para llevar a buen término los estudios de Maestría, sin los cuales no hubiera sido posible la realización de esta tesis.

Al Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica:

Por otorgarme todas las facilidades de realizar mis estudios de Maestría.

DEDICATORIA

A mis padres

Justino Juárez Rosas

y

Amelia Morales López

Por su apoyo, cariño y confianza que siempre me han dado.

A mi gran amor

María Elena Ruíz Méndez

Gracias por estar conmigo y apoyarme siempre, te quiero mucho.

A mis hermanas

Beatriz, Pilar y Wendy

Por su respaldo y aliento brindado durante toda mi vida.

GRACIAS ! ! !

Índice general

Capítulo 1

Introducción y planteamiento del problema

1.1. Introducción

Recientemente los materiales semiconductores han revolucionado las tecnologías y con ello han modificado drásticamente la sociedad humana. En el ámbito científico y tecnológico actual existe una creciente actividad con relación a temas que se han llamado en su conjunto nanotecnología y nanociencia, las aplicaciones de las mismas tendrán mucha importancia en las tecnologías futuras. La física de estos sistemas está en el límite de los modelos usuales utilizados en física atómica y física del estado sólido.

En el presente trabajo se desarrollará un estudio del comportamiento del campo óptico en un metamaterial, estos son compuestos estructurados cuyas propiedades físicas son distintas a la de sus constituyentes [1]. Por ejemplo, el índice de refracción de un metamaterial es negativo, esto trae importantes cambios en diferentes efectos físicos como cambios en las ecuaciones de Fresnel y el principio de Fermat. Además, uno de los principios más básicos de la óptica como es la ley de Snell también sufre un cambio. Así las ondas electromagnéticas al atravesar dicha interfaz sufren una refracción negativa. Algunos de estos metamateriales se fabrican con técnicas de nanotecnología similares a las que se usan para fabricar micromáquinados y circuitos integrados [2].

Una de las aplicaciones más importantes de estos metamateriales, radica en la fabricación de elementos ópticos no convencionales [2]. Una ventaja de los metamateriales es que se podrían fabricar elementos que permitan enfocar luz en áreas muy pequeñas (más pequeña que la longitud de onda de la luz), sin preocuparnos por su forma [2, 3].

1.2. Motivación del trabajo

Como se puede ver en la fig. (1.1), en un metamaterial el rayo de luz refractado se curvan hacia el mismo lado que el rayo incidente (medido en relación a la normal a la interfaz entre el metamaterial y el material normal).

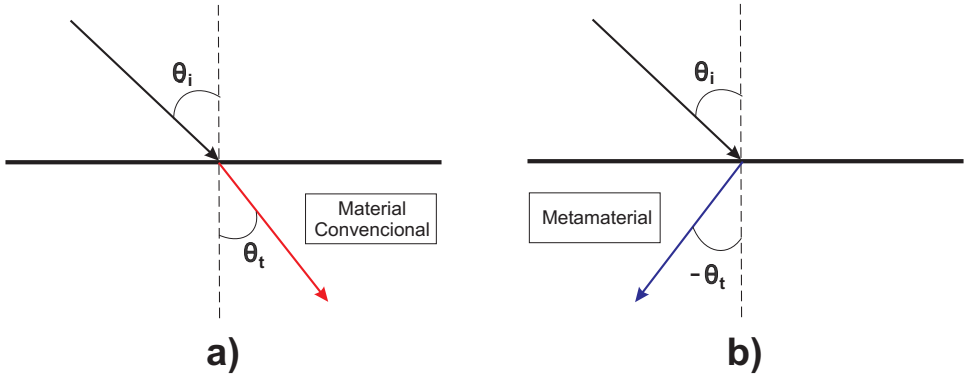

Figura 1.1: a) refracción positiva y b) refracción negativa.

En el caso de los trabajos mencionados anteriormente, la refracción negativa se ha conseguido a través de un metamaterial con estructura de malla y compuesto de plata. Concretamente, se trata de un sustrato de vidrio sobre el que se asienta una capa de plata y fluoruro de magnesio, y en la que se realizan perforaciones de $100nm$ de tamaño. Esta composición supone un gran avance en relación a intentos anteriores basados en nanobarras de oro, debido a la menor resistencia eléctrica del material. Más aún, el haber logrado esta refracción negativa en el espectro visible abre la puerta al desarrollo de superlentes (lentes que superan el límite de difracción), cuya superior resolución permitiría construir dispositivos que podrían observar el interior de una célula, o diagnosticar enfermedades a bebés aún en el útero.

También los metamateriales se utilizan en la electrónica, partícularmente en la fabricación de antenas pequeñas de móviles o de satélites en los que se quieren agrupar un gran número de antenas en un espacio mínimo. En estas áreas desarrolla su labor un grupo de investigación finlandés al que pertenece el investigador Sergei Tretiakov quien dice: Estamos trabajando en distintos proyectos relacionados con los metamateriales, que abarcan desde la física básica ¿Qué cualidades poseen estos materiales?, pasando por el diseño de los mismos hasta sus posibles aplicaciones en antenas y lentes perfectas, fig. (1.2).

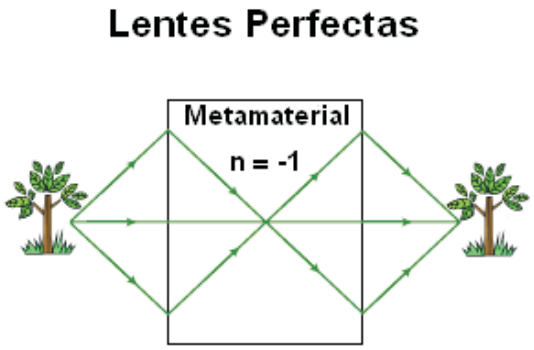

Figura 1.2: Esquema de una lente perfecta.

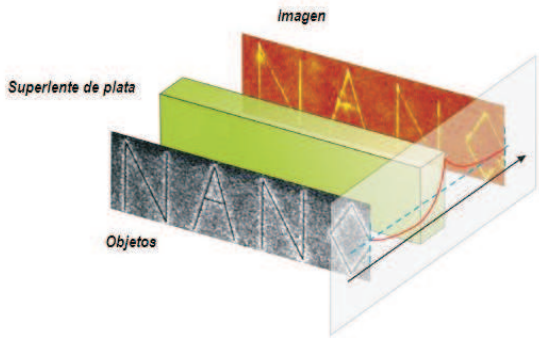

Figura 1.3: Imagen de un dibujo en escala nanométrica usando un superlente de plata que tiene una resolución más alla del limite de difracción óptico.

Finalmente, los metamateriales se encuentran aún en fase de investigación y no han llegado todavía al mercado. Resulta difícil predecir cuándo lo harán, ya que se trabaja a largo plazo en este terreno de investigación.

1.3. Estructura de la tesis

Un problema de la óptica contemporánea, consiste en la descripción de la evolución de campos ópticos en geometrías predeterminadas, así como el control de su contenido energético. Inherente a este problema, se encuentra la descripción de las características físicas que los campos ópticos eventualmente puedan presentar. En este sentido, un punto de interés radica en describir y analizar la evolución de campos ópticos en Metamateriales.

Para conseguir esto se propone un análisis del campo óptico partiendo de los conceptos fundamentales de óptica física, del análisis de plasmones superficiales y finalmente el análisis holográfico de los arreglos experimentales propuestos. De esta forma, el objetivo del presente trabajo de tesis consiste en describir las propiedades de los campos ópticos cuando la luz se propaga en materiales o medios con índices de refracción negativos y analizar sus posibles aplicaciones.

Para lograr el objetivo anteriormente descrito la tesis se divide en 6 capítulos y un apéndice. En el capítulo 2 se realiza una breve revisión bibliográfíca y se realiza una descripción de los conceptos de velocidad de fase, velocidad de grupo, se describe también el modelo de dispersión y finalmente se muestra el análisis matemático en términos del calculo variacional el cual es un concepto que permite realizar el análisis de la condición de transversalidad de los campos ópticos.

En el capítulo 3, se realiza la descripción y desarrollo matemático de la refracción en metamateriales, en donde presentamos un análisis de la Ley de Snell, la velocidad de fase y grupo, por consiguiente, se estudiará también el índice de refracción negativo y finalmente se describirán los coeficientes de reflexión y transmisión.

En el capítulo 4, se hace un estudio teórico, desde el punto de vista de la óptica física, sobre la forma de producir plasmones superficiales con métodos ópticos. Se presenta una revisión de la literatura a este respecto, finalmente se presentan posibles aplicaciones utilizando plasmones superficiales en metamateriales.

En el capítulo 5, se describe un breve análisis holográfico para un holograma de punto para así poder generar transmitancias en donde se controle el espectro de potencias en particular que contenga la frecuencia espacial necesaria para la síntesis del metamaterial. Esta dirección corresponde con la dirección de la refracción generada. Esta transmitancia se genera utilizando técnicas holográficas sobre fotoresinas, por ultimo se proponen algunos arreglos experimentales para poder comprobar lo que se menciona anteriormente.

Finalmente en el capítulo 6, se dan las conclusiones generales y se discuten posibles líneas de investigación. Por ultimo, en el apéndice se muestran los desarrollos y análisis matemáticos realizados en este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales de óptica física

2.1. Introducción

En este capitulo describiremos brevemente el concepto de onda y la terminología que se usará en este y los posteriores capítulos, se estudiarán las características de una onda electromagnética tales como su fase, y también las velocidades de fase y grupo en el marco de la óptica física. Además, definiremos la dispersión partiendo del análisis del modelo de Drude. Finalmente se revisará el tema del calculo variacional puntalizando su condición de transversalidad para problemas de difracción y para tener un funcional para la propagación de la luz en un medio con distinto índice de refracción n.

2.2. Definición de fase

Una onda es una perturbación del estado de equilibrio de un sistema que se propaga en el espacio y en el tiempo. Consideremos una onda que viaja en la dirección positiva de x con una velocidad constante v [4]. Como la onda esta en movimiento, debe representarse por una función del espacio y del tiempo.

Entonces una onda unidimensional es de la forma

$$f(x \pm vt), \tag{2.1}$$

donde f es una función arbitraria.

La fase es el argumento de la función f y es una función dada de la siguiente forma

$$\varphi(x,t) = \psi(x \pm vt). \tag{2.2}$$

La forma de la onda en cualquier instante de tiempo se encuentra manteniendo el tiempo constante, por ejemplo $t = 0$, entonces; $\varphi(x,t)_{t=0} = f(x,0) = f(x)$ que representa la forma o perfil de onda en ese momento [4].

Por lo tanto, la fase es la función que lleva la información de los parámetros estructurales de la onda. En ella estan implícitas las propiedades de coherencia parcial. Ahora se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} f(kx) &= fk(x - vt) \\ &= f(kx - kvt) \\ &= f(kx - \omega t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\omega = kv$ y además k y ω dependen del tiempo, por lo tanto la fase esta dada por

$$\varphi = (kx \pm \omega t). \tag{2.4}$$

2.3. Velocidad de fase

Si se define la función de fase como la ecuación (2.4) tenemos que la derivada parcial de la fase con respecto al tiempo esta dada por la siguiente expresión

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega. \tag{2.5}$$

De manera análoga, para la rapidez de cambio de la fase con la distancia esta se da al realizar la derivada parcial de la fase con respecto a la posición y esta definida por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k. \tag{2.6}$$

Si ahora hacemos uso de la relación

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial \varphi} = -1,$$

tenemos que [5]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \tag{2.7}$$

y utilizando las ecuaciones (2.5) y (2.6), tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{(-\omega)}{k}, \tag{2.8}$$

sustituyendo el valor de $\omega = kv$ en la ecuación (2.8), tenemos lo siguiente

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi} = v_f. \tag{2.9}$$

La velocidad de fase v_f describe la velocidad con la que se propaga un frente de onda, el cual este frente de onda tiene la siguiente forma [5].

$$kx - \omega t = cte. \tag{2.10}$$

2.4. Velocidad de grupo

La velocidad de propagación de la energía depende de la función f *(perfil)*, ya que este tiene implícitas las propiedades directivas. Para ondas planas la velocidad de fase y de grupo coinciden. Estas son diferentes cuando se tienen un conjunto de ondas.

Para este conjunto de ondas esta implícito la dispersión lo cual implica una dependencia funcional entre k y ω.

Partiendo de dos frecuencias ω diferentes, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \omega_1 &= k_1 v_1, \\ \omega_2 &= k_2 v_2, \end{aligned}$$

realizando la diferencia de estas frecuencias, se tiene

$$\omega_2 - \omega_1 = k_2 v_2 - k_1 v_1. \tag{2.11}$$

Nos interesa encontrar el valor de ω_2, k_2 y v_2, para resolver la ecuación (2.11) entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 + \Delta\omega_1 \\ k_2 &= k_1 + \Delta k_1 \\ v_2 &= v_1 + \Delta v_1. \end{aligned}$$

Ahora si sabemos que $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, sustituyendo los términos k_2 y v_2, en la ecuación (2.11), obtenemos la siguiente expresión

$$\Delta\omega = (k_1 + \Delta k)(v_1 + \Delta v_1) - k_1 v_1, \tag{2.12}$$

resolviendo la ecuación anterior, tenemos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= (k_1+\Delta k)v_1 - k_1 v_1 + (k_1+\Delta k)\Delta v_1 \\ &= \Delta k v_1 + (k_1+\Delta k)\Delta v_1, \end{aligned} \tag{2.13}$$

dividiendo la ecuación aneterior por Δk, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\omega}{\Delta k} &= v_1 + \left(\frac{k_1+\Delta k}{\Delta k}\right)\Delta v_1 \\ &= v_1 + \delta v(\Delta k), \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $\delta v(\Delta k) = \left(\frac{k_1+\Delta k}{\Delta k}\right)\Delta v_1$, ahora sacando el limite de la ecuación anterior cuando $\Delta k \to 0$, se obtiene lo siguienre

$$\lim_{\Delta k\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{2.15}$$

Por lo tanto la velocidad de grupo v_g que escrita de la siguiente forma [6, 7]

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{2.16}$$

La velocidad de grupo corresponde con la velocidad de propagación de la envolvente de la onda convergente y por lo tanto coinciden con la velocidad de propagación de energía [7].

2.5. Modelo de Drude

En un material los electrones, están unidos a el núcleo por fuerzas de tipo resorte *(resonancias)* y por lo tanto satisfacen una ecuación diferencial de la forma

$$m\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + kr = 0, \tag{2.17}$$

si tenemos que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, entonces la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \omega_0^2 r = 0. \tag{2.18}$$

Cuando el material se ilumina con una onda de naturaleza armónica temporalmente el campo incidente perturba al electrón modificando el tipo de oscilación y la ecuación diferencial es

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m}E. \tag{2.19}$$

Si se tiene que $E = E_o \cos\omega t$ es un campo armónico y el principal resultado es que se induce un *momento dipolar*, entonces la ecuación ((2.19)), es de la forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m}E_o \cos\omega t. \tag{2.20}$$

Debido a que la carga oscilante es poco masiva, esta puede seguir las oscilaciones del campo eléctrico incidente; esto es, se propone como solución $x = x_0 \cos\omega t$, de donde x_o es la amplitud de la vibración, entonces

$$\begin{aligned} x' &= -x_0\omega \sin\omega t \\ x'' &= -x_0\omega^2 \cos\omega t. \end{aligned}$$

Sustituyendo x'', en la ecuación (2.20) se tiene

$$-\omega^2 x_0 \cos\omega t + \omega_0^2 x_0 \cos\omega t = \frac{q}{m}E_0 \cos\omega t, \tag{2.21}$$

despejando x_0 de la ecuación (2.21), se tiene

$$x_0 = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{2.22}$$

Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial es

$$x = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \tag{2.23}$$

Se define el momento dipolar como $p = qx = (\epsilon - \epsilon_0)E$, sustituyendo x del momento dipolar en la solución de la ecuación diferencial (2.23), se tiene

$$E(\epsilon - \epsilon_0) = \frac{q^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \tag{2.24}$$

despejando ϵ de la ecuación (2.24), obtenemos

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{2.25}$$

Si se consideran N dipolos por unidad de volumen se tiene

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{Nq^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{2.26}$$

dividiendo la ecuación anterior por ϵ_0, tenemos lo siguiente

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} = n^2(\omega). \tag{2.27}$$

Un plasma se define como un conjunto de cargas eléctricas, la frecuencia del plasma o también llamada *frecuencia de resonancia* se define como

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}, \tag{2.28}$$

relacionando la ecuación (2.27) con la ecuación (2.28), tenemos

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{2.29}$$

De esta última ecuación tenemos que el índice de refracción depende de la frecuencia y esto se conoce como dispersión.

2.6. Conceptos básicos de cálculo variacional

Dada una función de distancia (métrica) en un plano $x - y$. Se quiere conocer cual es la función que conecta 2 puntos tales que su distancia es un extremal. El problema geométrico se ve en la fig. (2.1)

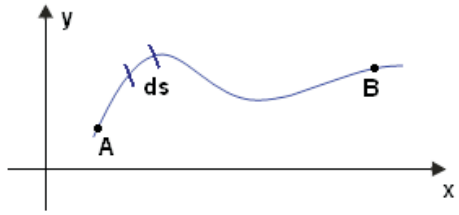

Figura 2.1: Problema extremal con fronteras fijas, donde A y B son puntos fijos.

Realizando una aproximación paraxial para ds vista en la fig. (2.2), se tiene

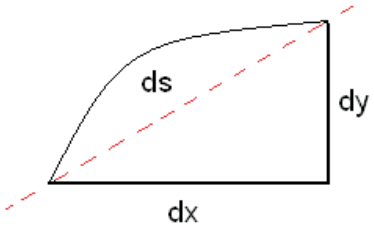

Figura 2.2: Aproximación de una curva.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + dy'^2}$$

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + dy'^2} dx, \tag{2.30}$$

donde L es la distancia de la trayectoria, consideremos los siguientes conceptos sabemos que una función definido como $f(x)$ depende solo de la variable x y un funcional definido como $L(y(x))$ depende de la función $y(x)$.

El cálculo de variaciones implica los problemas en que la variable por ajustar se representa de manera general en forma de una ecuación integral. Como caso mas simple se tiene el funcional definido como

$$L(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')dx. \tag{2.31}$$

En este caso, L es el funcional que adquiere un valor extremo. Bajo el operador integral, F se conoce como función de variables indicadas x, y, y', pero la dependencia de y en x no es fija, es decir, $y(x)$ es desconocida. Esto significa que a un cuando la integral es de a a b la trayectoria de integración no es conocida. Por la tanto, un funcional es una función que depende de una función. Ahora, el problema consiste en encontrar la función que hace que L sea un extremal. Ahora tenemos la siguiente ecuación

$$L(y_n(x)) = \int_a^b F(x, y_n(x), y_n'(x))dx. \tag{2.32}$$

La ecuación (2.32) es para n curvas. Supongamos que $y(x)$ es la curva que buscamos, la idea es comparar $y_n(x)$ con $y(x)$, ver fig. (2.3)

Entonces de lo anterior mencionado se tiene lo siguiente,

$$y_n(x) = y(x) + \alpha_n \delta(y_n) \tag{2.33}$$

$$y_{n-1}(x) = y(x) + \alpha_{n-1} \delta(y_n), \tag{2.34}$$

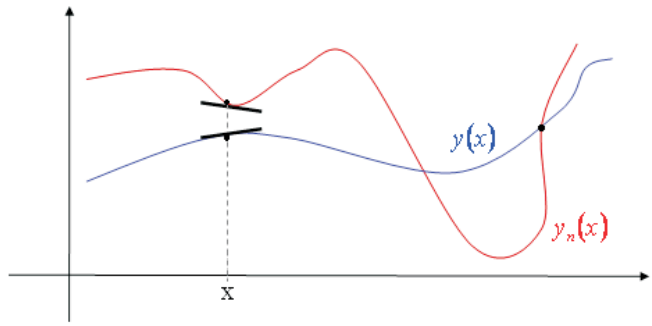

Figura 2.3: Pendientes distintas.

pero si las pendientes son distintas, se tiene que

$$y_n'(x) = y'(x) + \alpha_n \delta(y_n'). \tag{2.35}$$

Ahora si la función de distancia L se puede pensar como una función del punto α, dado como $L(y(x), \alpha)$, entonces

$$\delta L = L(y_\alpha(x), \alpha) - L(y(x)), \tag{2.36}$$

donde δL es el incremento, entonces ahora se tiene que

$$\delta L = \int_a^b [F(x, y_\alpha(x), y_\alpha'(x)) - F(x, y, y')]dx. \tag{2.37}$$

Entonces considerando la ecuacion (2.37) se tiene lo siguiente

$$\delta L = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx, \tag{2.38}$$

la ecuación (2.38) cambia con respecto a la curva o a la pendiente. Si tenemos la siguiente condición extremal $\delta L = 0$. Entonces la propuesta es modificar la segunda integral, para escribir $\delta y'$ en función de δy, entonces

$$\delta L = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx. \tag{2.39}$$

Integrando por partes, se tiene que $u = \frac{dF}{dy}$, entonces $dv = \delta y' dx$, por lo tanto $\frac{dv}{dx} = \delta y'$, entonces $v = \int dv = \int \delta(y')dx = \delta \int y' dx = \delta y$. Por lo que se tiene

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right] dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y - \int \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) dx. \tag{2.40}$$

Sustituyendo en la variación δL ecuación (2.39), tenemos

$$\delta L = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx = 0, \tag{2.41}$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b = 0$$

$$\delta L = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\delta y dx - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx = 0 \tag{2.42}$$

$$\delta L = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y dx, \tag{2.43}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0, \tag{2.44}$$

de donde esta ultima ecuación se le conoce como la condición de extremo o también se le conoce como la ecuación de Euler [10] y es la ecuación fundamental del calculo variacional.

2.6.1. Condición de transversalidad

Un problema de gran importancia práctica por sus aplicaciones en difracción consiste en analizar el problema variacional con fronteras libres fig. (2.4). Como punto de partida se comparan dos funcionales extremales dados por

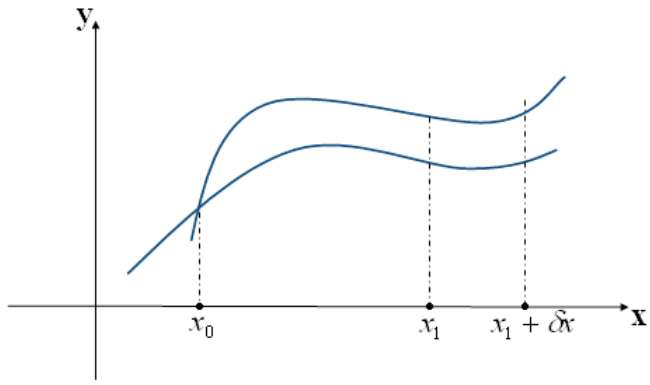

Figura 2.4: Condición de Transversalidad.

$$\triangle h = \int_{x_o}^{x_1+\delta x} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')dx. \tag{2.45}$$

La primera integral se puede escribir:

$$\int_{x_o}^{x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')dx, \tag{2.46}$$

desarrollando

$$\int_{x_o}^{x_1} (F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y'))dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx = 0, \tag{2.47}$$

de donde de la segunda integral se tiene que es el teorema de muestreo. Ahora se tiene lo siguiente

$$\int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) + F(x, y, y') dx = 0, \tag{2.48}$$

de la ecuación (2.48) tomamos la siguiente integral

$$\int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) = 0. \tag{2.49}$$

Realizando una integración por partes de la ecuación (2.49), obtenemos lo siguiente

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_o}^{x_1} - \int_{x_o}^{x_1} \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = 0. \tag{2.50}$$

Sustituyendo la ecuación (2.50) en la ecuación (2.48) se tiene lo siguiente

$$\int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_o}^{x_1} + F(x, y, y') \Big|_{x=x_1} dx = 0, \tag{2.51}$$

de la ecuación (2.51) tenemos que la primera integral

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) = 0. \tag{2.52}$$

Y si $\delta L = 0$, entonces $\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_o}^{x_1} + F(x, y, y') dx = 0$, que es la condición fundamental a cumplir.

Nos interesa la evolución de los extremales se puede buscar la relación entre δy y las pendientes, esto nos debe dar la condición de tangencias sobre las curvas extremales esto se muestra en la fig. (2.5).

Observando la fig. (2.5), ahora se tiene que la pendiente esta dada por

$$y'(x_1) = \frac{\delta y \Big|_{x_1 + \delta x} - \delta y \Big|_{x = x_1}}{\triangle x} \tag{2.53}$$

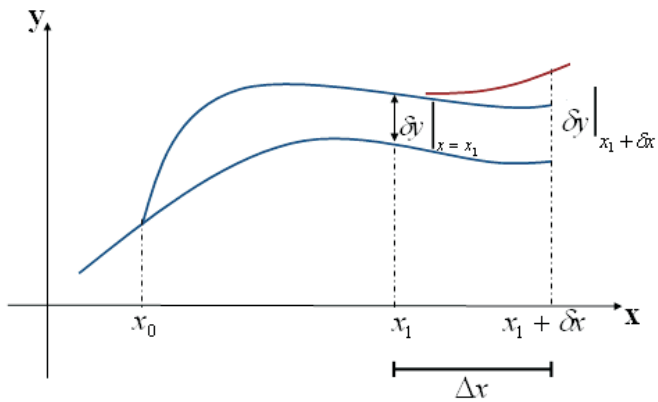

Figura 2.5: Condición de tangencias sobre la curva.

$$\delta y\Big|_{x_1+\triangle x} - \delta y\Big|_{x_1} = y'(x_1)\triangle x \tag{2.54}$$

$$\delta y\Big|_{x_1} = \delta y\Big|_{x_1+\triangle x} - y'(x_1)\triangle x. \tag{2.55}$$

Sustituyendo en δy, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1}(\delta y - y'(x_1)\triangle x) + F(x, y, y')dx = 0, \tag{2.56}$$

de esta forma reescribiendo obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + \left(F(x, y, y') - \frac{\partial F}{\partial y'}y'(x_1)\right)dx = 0. \tag{2.57}$$

Si existe una relación funcional entre x y y, $y(x) = \phi(x)$, además $dy = \phi'(x)dx$,entonces se tiene

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}[\phi'(x) - y'(x)] + F(x, y, y')\right)dx = 0, \tag{2.58}$$

o de manera equivalente

$$\frac{\partial F}{\partial y'}[\phi'(x) - y'(x)] + F(x, y, y') = 0 \tag{2.59}$$

Esta ultima ecuación se conoce en la literatura de cálculo de variaciones como condición de transversalidad [11], nos indica como se acomodan las pendientes con esta curva y tiene implicaciones importantes en el contexto óptico ya que nos permite resolver una gran variedad de problemas de difracción. Esto es, los rayos de difracción deben ser perpendiculares a la función de transmitancia.

Nosotros podemos tener un funcional para la propagación de luz [10], esta se expresa en la siguiente ecuación

$$L = \int n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}dx, \tag{2.60}$$

donde la función de variables esta definida como

$$F = n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}. \tag{2.61}$$

Realizando su derivada obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = n(x, y)\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{2.62}$$

Sustituyendo la ecuación (2.62) en la ecuación de transversalidad (2.59), se tiene

$$n(x, y)\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}(\phi'(x) - y'(x)) + n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}. \tag{2.63}$$

desarrollando, tenemos

$$\frac{n(x, y)y'(\phi'(x) - y'(x)) + n(x, y)(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \tag{2.64}$$

$$n(x,y)(y'\phi' - y'^2 + 1 + y'^2) = 0. \tag{2.65}$$

Ahora si $n(x,y)(y'\phi' + 1) = 0$, entonces $y'\phi' + 1 = 0$. Por lo tanto se tiene que

$$\phi' = \frac{1}{y'}. \tag{2.66}$$

Se tiene que la condición de transversalidad nos indica que las trayectorias son ortogonales, es decir, que se tiene que la ecuación de transversalidad se convierte en una condición de ortogonalidad.

En este Capitulo se han establecido los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de los objetivos planteados en el presente trabajo de tesis. Este último análisis del modelo de drude será utilizado en el capitulo 4 para la síntesis de metamaterilales.

Capítulo 3

Refracción en metamateriales

3.1. Introducción

Metamateriales se entienden por materiales construidos artificialmente que poseen propiedades electromagnéticas que no se encuentran normalmente en la naturaleza. El estudio de estos materiales con propiedades electromagneticas particulares ha cobrado gran interes en los ultimos años. A finales de los $60s$, Víctor Veselago [16], predijo la existencia de dichos materiales que tuviesen de manera simultanea valores negativos de la constante dieléctrica y de permeabilidad magnética. Este tipo de medios presenta una serie de propiedades electromagnéticas interesantes como son:

- presentan una velocidad de fase y una velocidad de grupo antiparalelas,
- presentan un índice de refracción negativa,
- tienen un comportamiento diferente las ecuaciones de Fresnel,
- y exhibe un comportamiento el ángulo crítico diferente.

A pesar del interés por este tipo de materiales, estos no se encuentran de manera directa en la naturaleza. En este capítulo se realizará un análisis de los puntos anteriormente mencionados.

3.2. Antecedentes

Victor Veselago, propuso las consecuencias de una interacción de las ondas electromagnéticas con un hipotético material que posee una constante dieléctrica eléctrica ϵ, y una permeabilidad magnética μ, simultáneamente negativa, como ningún material o compuesto natural posee estas características, Veselago se preguntaba si esta asimetría evidente en las características de los materiales se cumplía [1]. Concluyó que tales materiales serian posibles, si se descubren, exhibirían características notables, que modifican todos los parámetros electromagnéticos.

Aunque no es común en materiales con características positivas, los materiales negativos se pueden encontrar en la naturaleza, materiales con ϵ negativos incluye los metales tales como la plata, el oro y el aluminio, a frecuencias ópticas, mientras que materiales con μ negativo, incluyen resonancia ferromagnética o sistemas antiferromagneticos.

Los materiales con parámetros negativos que ocurran cerca de la resonancia tiene dos consecuencias importantes, primero los materiales con parámetros negativos exhiban una dispersión de frecuencia, segundo, el ancho de banda de estos materiales será estrecho comparado con los materiales de parámetros positivos. La resonancia en los materiales existentes, que aumentan la polarización eléctrica, típicamente ocurren a muy altas frecuencias, en frecuencias ópticas, para los metales, en el rango de tera hertz (THz) a el infrarrojo para semiconductores y aisladores. Por el contrario, los sistemas de resonancia magnética ocurren a bajas frecuencias, es decir los fenómenos electrónicos y magnéticos no ocurren en el mismo rango de frecuencia.

Ultimamente, se penso en la idea de sintetizar estos materiales para mejorar la respuesta electromagnética. Para obtener estos materiales se repitieron elementos diseñados para que tuvieran una fuerte respuesta a los campos electromagnéticos, a medida que el tamaño y el espacio que ocupan se reduce en comparación con la longitud de onda de la radiación electromagnética de interés, esta radiación incidente no distingue entre esta colección de elementos de un material homogéneo, entonces conceptualmente podemos reemplazar este sistema no homogéneo por un material continuo con propiedades de ϵ y

μ determinadas. A baja frecuencia o longitud de onda grandes, los conductores son excelentes candidatos, para fabricar estos materiales.

Un metamaterial es aquel compuesto por más de dos materiales, esto implica tener un campo compuesto, como se muestra en la fig.(3.1), esta es óptima para un metamaterial. En esta estructura veremos como al hacer incidir un haz de luz sobre una rejilla acoplada a una superficie plana, se exita un plasmon, apartir de este fenómeno es posible obtener refracción negativa (haz refractado).

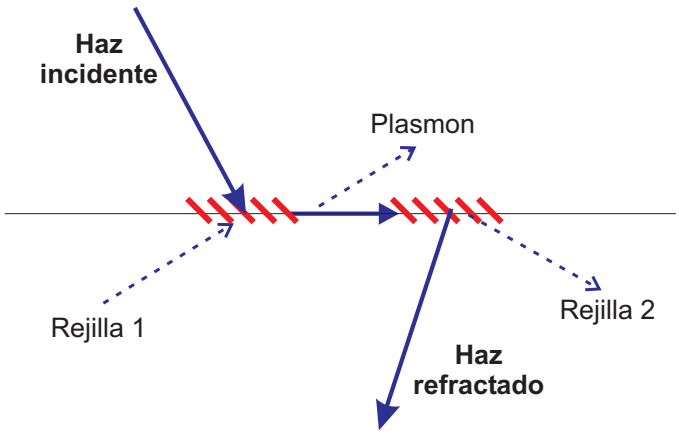

Figura 3.1: Un material compuesto.

3.3. Ley de Snell para metamateriales

Cuando un haz de luz cruza la interfase entre diferentes materiales, su dirección de propagación es alterada, este cambio depende de los índices de refracción de los materiales por donde se propaga el rayo. Cuanto mas grande es la diferencia de los índices de refracción, mayor será la refracción del rayo. En todos los materiales conocidos a este fenómeno se le conoce como *refracción positiva* [6].

En un material con índice de refracción negativo la luz se desvía hacia el otro lado de la perpendicular a la superficie que separa los medios ver fig.(3.2).

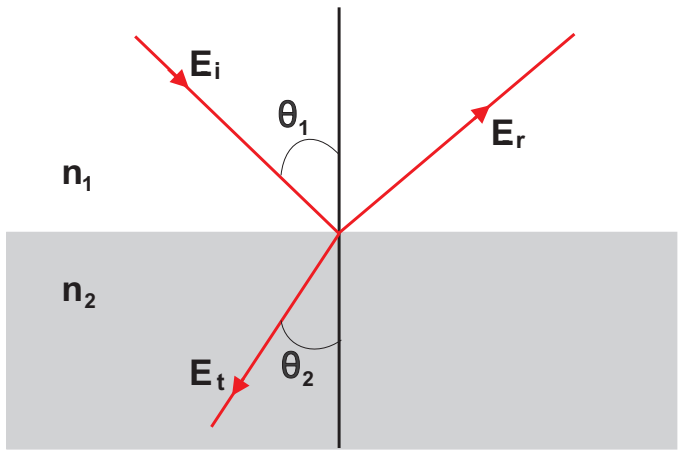

Figura 3.2: Refracción negativa.

La ley de Snell constituye la propuesta de la óptica geométrica para el cálculo de los ángulos de reflexión y refracción de la luz. La primera ley de Snell, conocida también como ley de la reflexión, simplemente manifiesta que el ángulo de incidencia de un rayo es igual al ángulo de reflexión, midiendo ambos ángulos respecto a la normal de la superficie.

Apoyandonos de la segunda ley de Snell, conocida también como ley de la refracción, nos indica que

$$n_1 \sin\theta_1 = -n_2 \sin\theta_2, \tag{3.1}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios (1) y (2), respectivamente, la deducciónde la ecuación anterior se puede ver en el apéndice (A.1). Ahora si tenemos que

$$n = \frac{c}{v}. \tag{3.2}$$

donde

n = índice de refracción del índice en cuestión

c = velocidad de la luz en el vacío $(3 \times 10^8 m/s)$

v = velocidad de la luz en el medio en cuestión

Entonces la ecuacion (3.1) queda de la siguiente manera

$$\frac{c}{\upsilon_1}\sin\theta_1 = -\frac{c}{\upsilon_2}\sin\theta_2, \tag{3.3}$$

Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad se tiene que la velocidad de fase, υ_2 debe ser negativo.

3.3.1. Velocidad de fase y grupo para un metamaterial

En esta sección se analizán las velocidades de fase y grupo en un metamaterial, comprobando así que ambas velocidades en estos medios son antiparalelas. De la fig.(3.3), tenemos lo siguiente

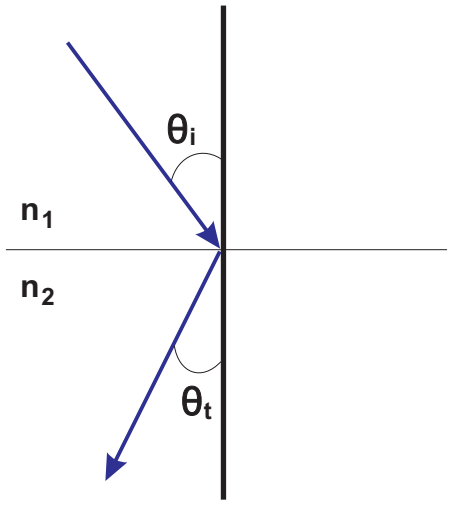

Figura 3.3: Angulo de incidencia y angulo refractado en un metamaterial.

Sea una onda, expresada de la siguiente manera

$$\phi(z,t) = A\exp\{i(kz-\omega t)\} = a\exp\{i(kz-\omega t+\delta_1)\}, \tag{3.4}$$

donde $\delta = (kz - \omega t + \delta_1)$, ahora para $t = t_0$ fijo, que es la función de fase constante, nos dice como cambia la amplitud. Si ahora tenemos las siguientes relaciones

$$\frac{d\delta}{dz} = k, \qquad \frac{d\delta}{dk} = z$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega, \qquad \frac{d\delta}{d\omega} = -t$$

.

De los cocientes obtenemos las velocidades de fase y grupo exprasadas por las siguientes ecuaciones

$$v_f = \frac{w}{k} \tag{3.5}$$

$$v_g = \frac{dw}{dk} \tag{3.6}$$

$$v_g = \nabla_k \omega(k). \tag{3.7}$$

La fase no es una observable, la velocidad de grupo esta relacionada con la velocidad de transporte de energía.

Ahora estudiaremos el comportamiento de la v_g en un metamaterial, para eso supongamos un medio homogeneo que va hacia una misma dirección esto se puede ver en la fig.(3.4).

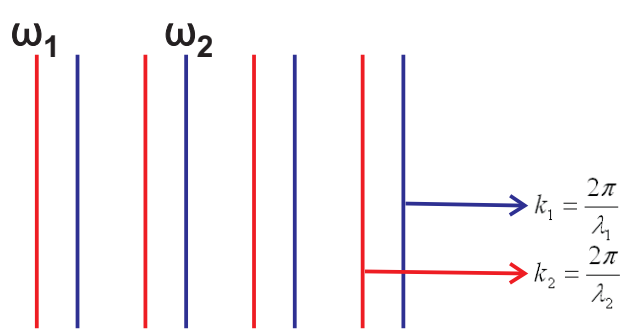

Figura 3.4: Medio homogeneo.

Ahora la velocidad de grupo esta denotada de la siguiente manera

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}, \tag{3.8}$$

por lo tanto la velocidad de grupo expresadas en las ecuaciones (3.6) y (3.7) son iguales.

Ahora de la ecuación (3.4), se tiene que para la suma de ϕ_1 y ϕ_2 tenemos

$$\phi_1(z,t) + \phi_2(z,t) = \exp\{i(k_1 z - \omega_1 t)\} + \exp\{i(k_2 z - \omega_2 t)\}, \tag{3.9}$$

donde $kz - \omega t = cte$.

Entonces tomando la ecuación (3.9)se tiene que la irradiancia esta dada como

$$I = 2 + 2Re\exp\{i[(k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t]\}, \tag{3.10}$$

Por lo tanto la v_g esta denotada como se muestra en la ecuación (3.4). Tomando la parte real de la ecuación (3.8), tenemos que las franjas de interferencia se mueven con una velocidad de grupo, y la velocidad de fase de las franjas de interferencia es igual a la velocidad de grupo.

Por último, si ahora tenemos que la irradiancia esta expresada como

$$I = 2 + 2Re\exp\{i[(k_1 - k_2)z + (\omega_1 - \omega_2)t]\}. \tag{3.11}$$

La velocidad de fase aquí no coincide con la velocidad de grupo. Entonces en las franjas de interferencia es claro que la velocidad de grupo no coincide con la velocidad de fase.

3.4. Ecuaciones de Fresnel para un metamaterial

Agustin Jean Fresnel, hace cerca de ciento cincuenta años, dedujo el conjunto de expresiones que permiten calcular la distribución de amplitudes de luz que se refleja y la que se transmite en una superficie de separación entre dos medios dieléctricos, sabemos que las leyes de reflexión y refracción indican las direcciones de las ondas electromagnéticas reflejadas y transmitidas, en función de la dirección de la onda incidente y de las propiedades ópticas de los medios involucrados [5].

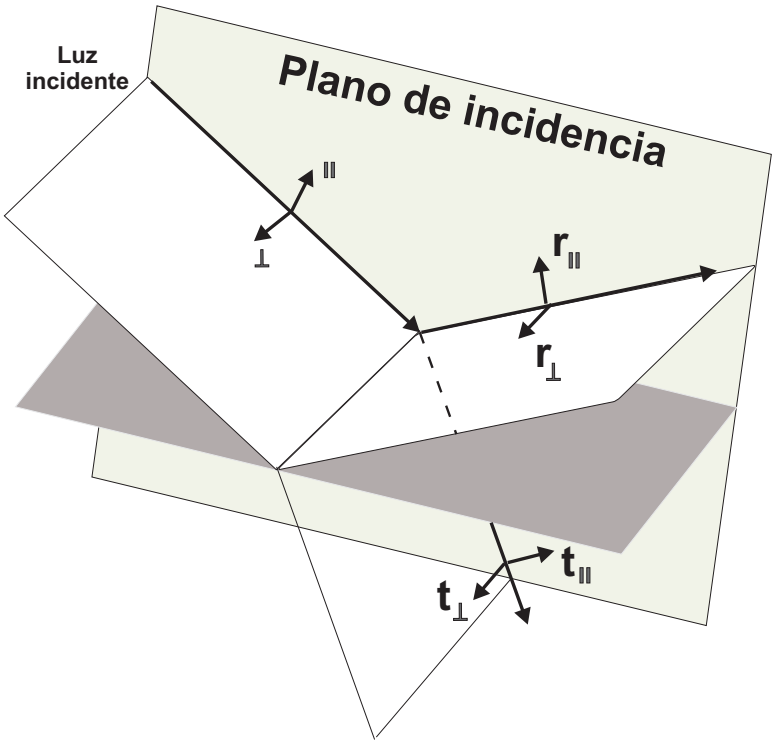

Figura 3.5: Onda incidente cuyo campo $\vec{E}$ es normal y paralelo al plano de incidencia.

En esta sección se analizará brevemente el tema de las amplitudes de los campos reflejados y transmitidos o refractados, para los casos donde primeramente el campo $\vec{E}$ es normal al plano de incidencia, y cuando el campo $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia fig.(3.5). Para 2 medios que son homogeneos e isótropicos, ahora de las ecuaciones de Fresnel, tenemos las siguientes expresiones

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} \tag{3.12}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} \tag{3.13}$$

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} \tag{3.14}$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} \tag{3.15}$$

A las expresiones anteriores se les conocen también como *los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión*. Finalmente el comportamiento de las ecuaciones de Fresnel [5], se muestran en la siguiente fig.(3.6)

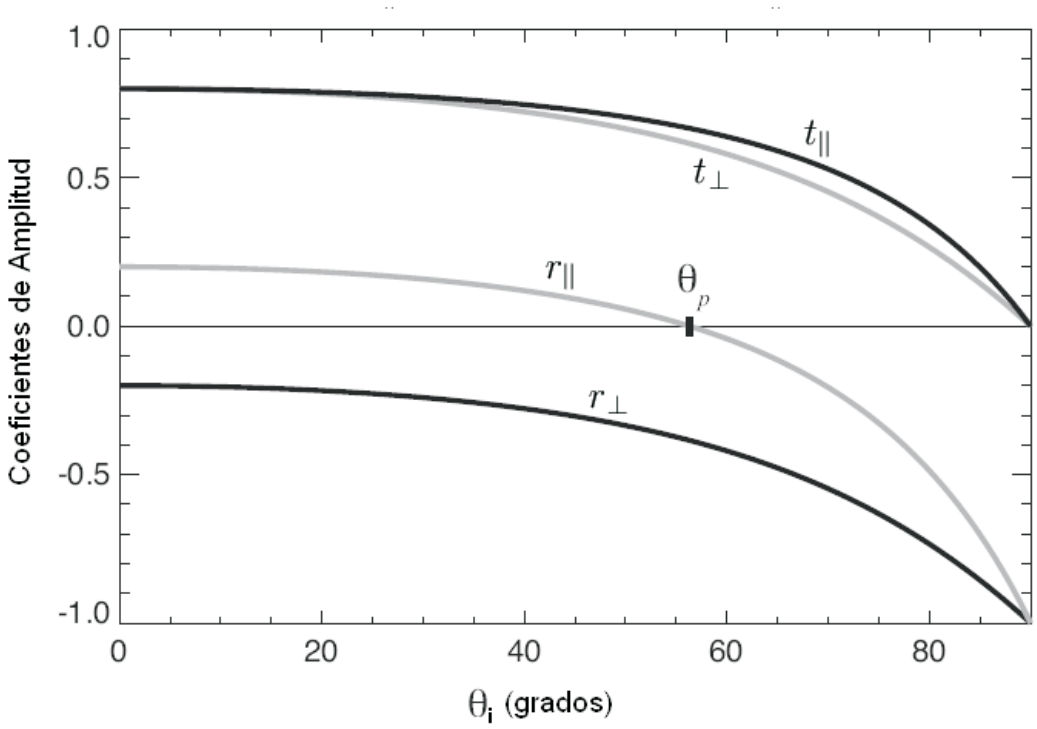

Figura 3.6: Los coeficientes de reflexión y trasmisión para la amplitud como función del ángulo de incidencia. Estos corresponden a reflexión externa $n_2 > n_1$ en una interfaz aire-vidrio $(n_2 = 1{,}5)$.

Ahora analizaremos las consecuencias de un índice de refracción negativo en las ecuaciones de fresnel. los coeficientes de transmisión y reflexión muestran diferencias físicas, esto es cambios de fase debido a que los valores de amplitud del campo son diferentes.

En la fig.(3.7), observamos que el comportamiento de los campos incidente, reflejado y transmitido cambian con respecto a medios homogéneos, por lo que las ecuaciones de fresnel deben modificarse para un metamaterial teniendo en cuenta la condición que $n_2 < 0$, de esta manera los coeficiente de amplitud de trasmisión y reflexión quedan expresados de la siguiente forma

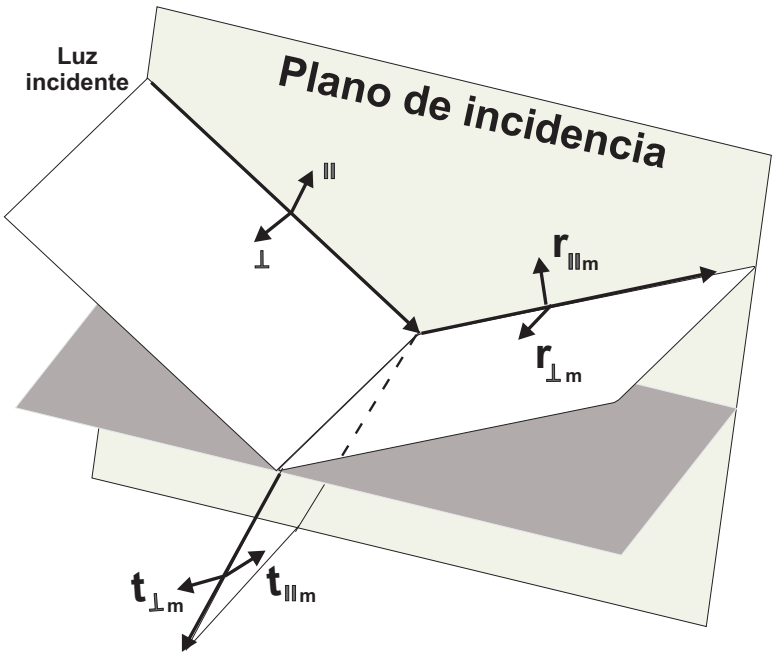

Figura 3.7: Onda incidente del campo $\vec{E}$ en un metamaterial.

Para el coeficientes de transmisión perpendicular tenemos que esta expresado por la ecuación (3.16)

$$t_{\perp m} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t} \tag{3.16}$$

El comportamiento para este coeficiente se observa en la fig.(3.8), de donde se ve un cambio notable, la amplitud es mayor y negativa. Además, de ser el inverso con respecto

al coeficiente de transmisión perpendicular clásico.

Para el coeficientes de transmisión paralelo tenemos que esta expresado por la ecuación (3.17)

$$t_{\|m} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i} \tag{3.17}$$

El comportamiento para este coeficiente se observa en la fig.(3.9), de donde se ve un cambio notable sobre todo cuando se llega a el angulo crítico pasando de tener una amplitud negativa a una amplitud positiva siendo estas amplitudes mayores a la de el coeficiente clásico.

Para el coeficientes de reflexión perpendicular tenemos que esta expresado por la ecuación (3.18)

$$r_{\perp m} = \frac{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t} \tag{3.18}$$

El comportamiento para este coeficiente se observa en la fig.(3.10), de donde se ve un cambio el cual tiene a la amplitud mayor y negativa. Además, de ser el inverso con respecto a el coeficiente de reflexión perpendicular clásico.

Para el coeficientes de reflexión paralelo tenemos que esta expresado por la ecuación (3.19)

$$r_{\|m} = \frac{-n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i} \tag{3.19}$$

El comportamiento para este coeficiente se observa en la fig.(3.11), de donde se ve un cambio notable sobre todo cuando se llega a el angulo crítico pasando de tener una amplitud positiva a una amplitud negativa siendo estas amplitudes mayores a la de el coeficiente clásico.

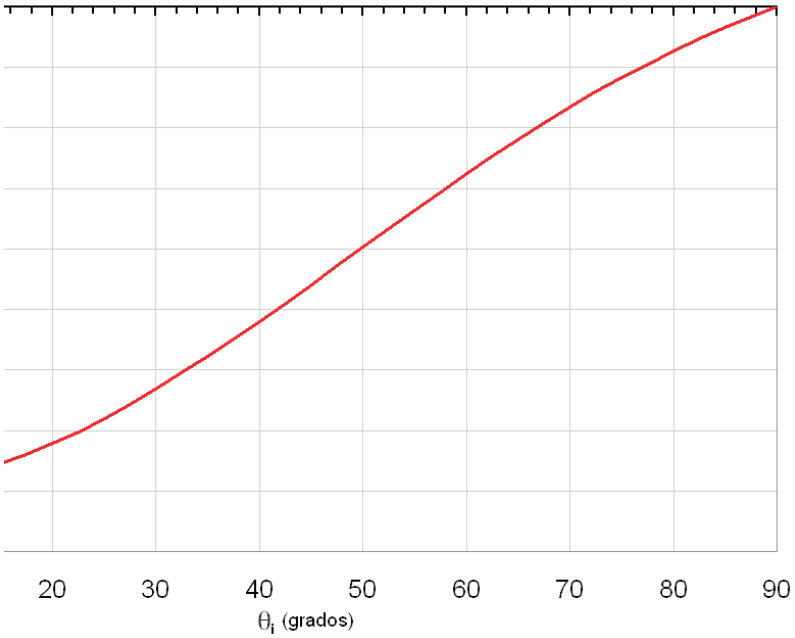

Figura 3.8: Coeficientes de transmisión perpendicular como función del ángulo de incidencia.

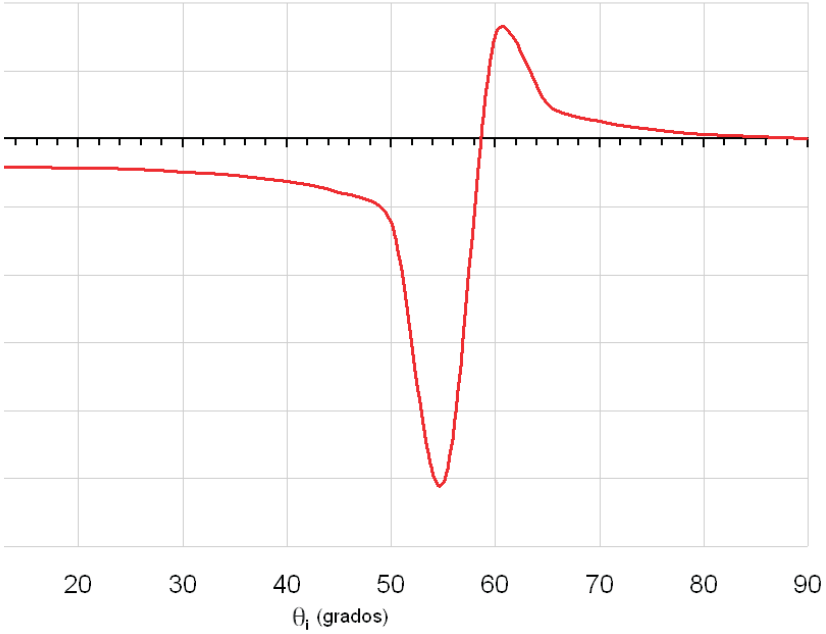

Figura 3.9: Coeficientes de transmisión paralelo como función del ángulo de incidencia.

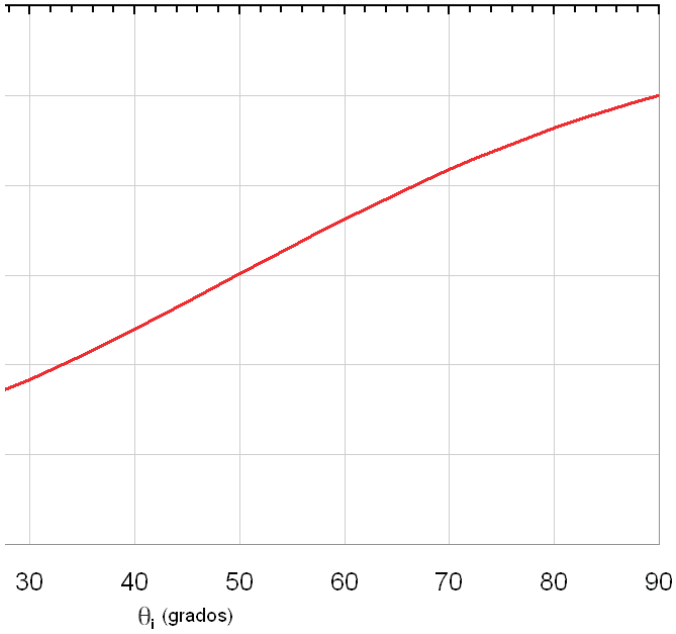

Figura 3.10: Coeficientes de reflexión perpendicular como función del ángulo de incidencia.

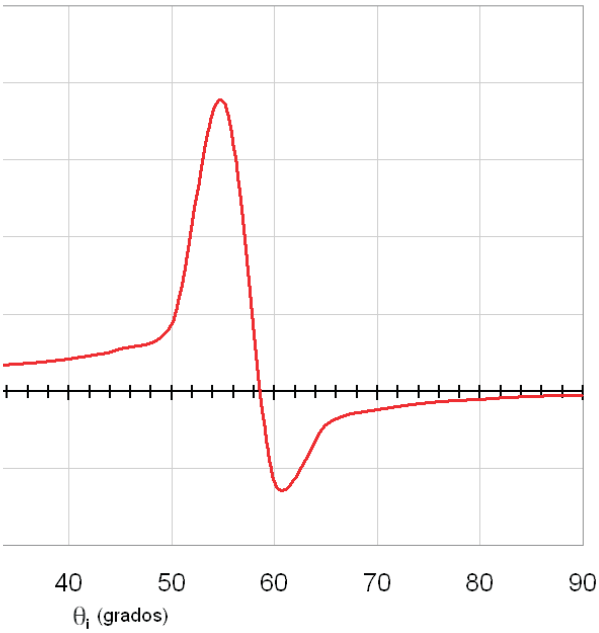

Figura 3.11: Coeficientes de reflexión paralelo como función del ángulo de incidencia.

3.5. Ángulo crítico

El ángulo crítico también conocido como el ángulo mínimo de incidencia en el cual se produce la reflexión interna total. El ángulo de incidencia se mide respecto a la normal de la separación de los medios ver fig.(3.12)

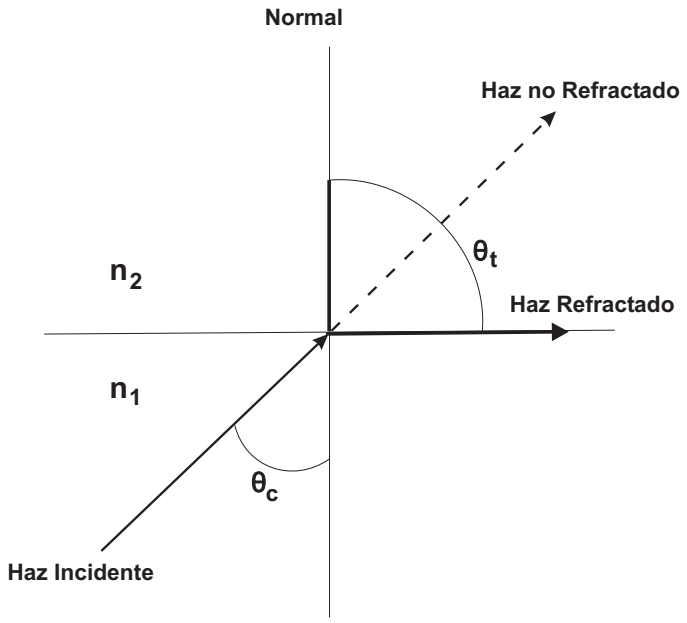

Figura 3.12: Ángulo crítico.

Ahora de la ley de Snell donde el ángulo de refracción o transmitido es $(\theta_t = 90°)$, el ángulo crítico θ_c esta dado por la siguiente expresión

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \tag{3.20}$$

Por ultimo tenemos que para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico $\theta_i > \theta_c$, el ángulo de refracción será mayor de 90º, por lo cual el rayo no será refractado, ya que no pasa de un medio a otro, y por lo tanto se produce una reflexión total interna.

Para metamateriales tenemos que la expresión para el ángulo crítico se modifica para obtener la siguiente forma

$$\theta_c = \arcsin -\frac{n_2}{n_1} \tag{3.21}$$

y su representacíón se puede ver en la siguiente fig.(3.13)

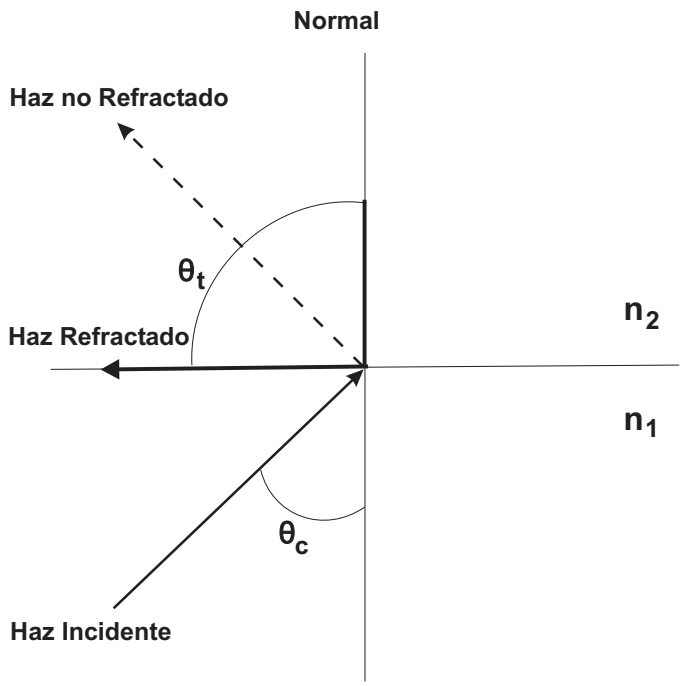

Figura 3.13: Ángulo crítico en un metamaterial.

En este capítulo se presentaron las principales características de la propagación de la luz en metamateriales o materiales con índice de refracción negativo, mostrando sus diferencias primordiales tales como la ley de snell, las velocidades de fase y grupo y finalmente las diferencias de los coeficientes de reflexión y transmisión de un medio homogeneo a un metamaterial.

Capítulo 4

Descripción de ondas plasmonicas

4.1. Introducción

Los plasmones superficiales son oscilaciones de los electrones sobre una película metálica delgada. Este campo de estudio es rico y extenso principalmente porque es un tema en el que concurren múltiples disciplinas, desde la física fundamental, la óptica, la física aplicada, la química y en los últimos años la biología. Es en estos dos últimos ámbitos en los que los plasmones han probado ser una herramienta muy importante para las investigaciones aplicadas y básicas.

El objetivo del presente capítulo es proporcionar un panorama del campo de los plasmones superficiales, en particular, la excitación de un plasmon en películas delgadas como aplicación para obtener refracción negativa, posteriormente se realizará el estudio de la relación de dispersión en dos medios semi-infinitos y en tres medios (dos semi-infinitos y una finito). Finalmente se presentan dos modelos para obtener refracción negativa; el primer modelo consiste en utilizar un arreglo de una superficie plana acoplada con una rejilla *(utilizando la excitación de un plasmon en esta superficie)* y el segundo método consiste en iluminar con un campo eléctrico partículas metálicas (nanoesferas) sobre un soporte oscilante.

4.2. Definición y características de los plasmones superficiales

Un plasma se define como un conjunto de cargas eléctricas, las cuales pueden exhibir comportamientos armónicos al ser perturbadas por un campo electromagnético. El concepto de plasmón se refiere a un plasma compuesto de electrones [3]. Para el caso de los metales, algunos electrones pueden moverse libremente, por lo que en estos materiales se pueden producir plasmones. Existen dos tipos de plasmones [18], el primero se conoce como plasmón de volumen (bulk) el cual se forma cuando los electrones pueden oscilar armónicamente a través del volumen de un metal. Estos plasmones tienen una frecuencia característica, conocida como frecuencia de plasma y que depende de la densidad volumétrica de electrones del material, está dada por

$$\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2/m_0}. \tag{4.1}$$

donde

N - es el número de cargas (positivas y negativas)

e - es la carga del electrón

m_0 - es la masa del electrón

El otro tipo de plasmones se conoce como plasmones superficiales y son ondas electromagnéticas que se acoplan en las interfaces formadas por un dieléctrico y un metal. Su frecuencia se encuentra en un rango definido como

$$\omega_{sp} \in \left[0, \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}\right]. \tag{4.2}$$

En este trabajo solo se considerarán a los plasmones superficiales. Estos tienen la propiedad de que su intensidad es máxima en la superficie que los soporta, y decaen exponencialmente en la dirección normal a la superficie. Se dice que son ondas "no radiantes", porque no se pueden propagar por el vacío. Además, si se hace una comparación entre los plasmones superficiales y la luz que los produce, se pueden apreciar dos diferencias.

La primera, se tiene que para valores típicos, la longitud de onda de los plasmones es aproximadamente un $10\,\%$ más pequeña que la de la luz a la misma frecuencia. Por lo que en términos de vector de onda significa que los plasmones tienen un vector de onda aproximadamente un $10\,\%$ mayor que el de la luz a la misma frecuencia. Los plasmones y todas las ondas están regidas por una función conocida como relación de dispersión. Esta función nos dice cuales son los valores de frecuencia permitidos para los diferentes vectores de onda. En otras palabras, indica cuáles son las ondas que van a existir en un sistema determinado.

En la fig.(4.1) se muestra una gráfica de la relación de dispersión para dos tipos de onda. La recta representa la relación de dispersión para ondas electromagnéticas que se propaguen en el vacío, conocida también como línea de luz. La otra curva representa la relación de dispersión para plasmones superficiales.

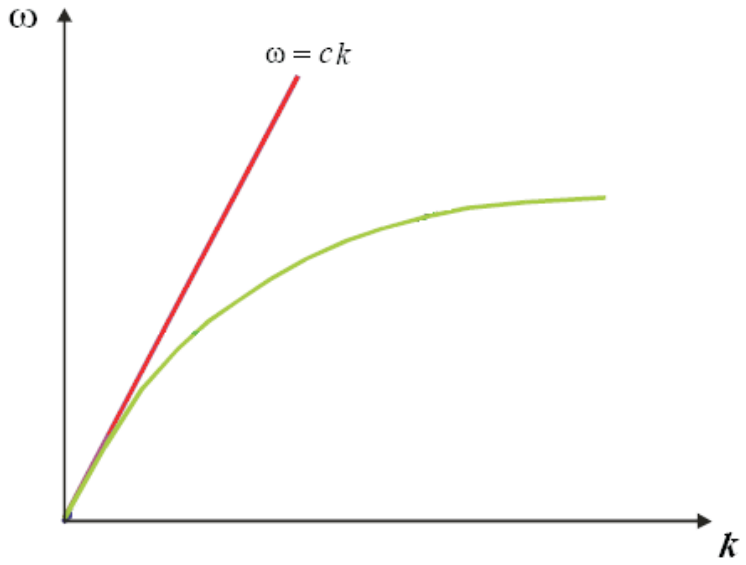

Figura 4.1: Relación de dispersión para dos tipos de onda.

La segunda diferencia, tenemos que los plasmones superficiales tienen una longitud de propagación que puede variar de unas micras, a unos cuantos milímetros, dependiendo de la iluminación y de los materiales que formen la interface. Esta característica resulta muy interesante en el diseño de circuitos con estas dimensiones [18].

4.2.1. Acoplamiento óptico de plasmones superficiales

Históricamente, los plasmones fueron primero producidos mediante electrones. Al hacer incidir perpendicularmente un haz de electrones sobre una película metálica delgada. Se observa que los electrones son desviados lateralmente por la película. Por la conservación del momento, se produce una onda sobre la película.

Existen varios esquemas de acoplamiento de luz para generar plasmones, el primero fue propuesto por Otto [19]. La técnica se basa en la reflexión total interna atenuada (ATR), y consiste en un prisma reflector a $45°$ puesto en contacto con una superficie metálica.Esta configuración genera una delgada capa de aire entre el prisma y el metal. Tiene el inconveniente de que si la superficie metálica no es suficientemente paralela a la superficie del prisma, el plasmón no se puede acoplar. Por esta razón, se requiere aplicar presión sobre el prisma para mantenerlo en contacto con la superficie.

Otra técnica de acoplamiento que no requieren prisma son las que se basan en la rugosidad de la superficie metálica. El acoplamiento depende de los parámetros de rugosidad de la superficie. Por otra parte, se ha reportado el acoplamiento de plasmones si la superficie tiene un defecto o un borde. Otras técnicas de acoplamiento sin prisma consisten en recubrir una capa dieléctrica de un material cuya constante dieléctrica es menor que la del aire; iluminar con un haz de extensión finita; con un haz enfocado ó un haz Bessel a incidencia normal.

4.3. Relación de dispersión (Modos ópticos)

Son soluciones elementales exactas a la ecuación de Helmholtz y que satisfacen una ecuación de eigenvalores. Entonces partiendo de la ecuación de Helmholtz dada por

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0. \tag{4.3}$$

la cual se le propone una solución de la forma

$$\phi(x, y, z) = f(x, y) \exp\{i\beta z\}. \tag{4.4}$$

Sustituyendo la ecuación (4.4) en la ecuación (4.3), se tiene

$$\nabla_{\perp}^{2} f(x, y) + (k^2 - \beta^2) f(x, y) = 0, \tag{4.5}$$

desarrollando

$$\nabla_{\perp}^{2} f(x, y) + k^2 f(x, y) = \beta^2 f(x, y), \tag{4.6}$$

donde $f(x, y)$ es arbitraria y $\hat{A} = (\nabla_{\perp}^{2} + k^2)$ se define como un operador diferencial. Entonces se tiene la siguiente la siguiente expresión

$$\hat{A} f(x, y) = \beta^2 f(x, y), \tag{4.7}$$

ó escrito también de la siguiente forma

$$(\nabla_{\perp}^{2} + k^2) f(x, y) = \beta^2 f(x, y), \tag{4.8}$$

si esta última ecuación es de la forma de la ecuación (4.4), entonces se tiene que la definición anterior esta en el contexto escalar.

El problema es buscar soluciones modales a campos ópticos en interfaces el modo óptico debe satisfacer las condiciones de frontera del campo electromagnético asociado, en particular en un medio libre de cargas y corrientes. Sea una onda electromagnetica que se propaga en la direccion z con polarizacion p en la interface formada por dos medios con constante dielectrica ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente. La geometria considerada se muestra en la fig.(4.2)

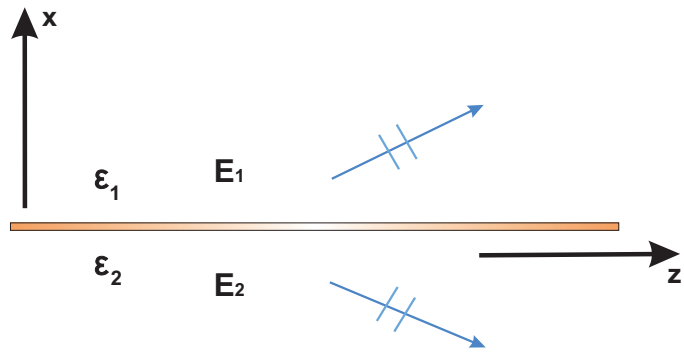

Figura 4.2: sistema de referencia y geometría considerada.

donde $E_{1T} = E_{2T}$ es la condición de frontera de las componentes tangenciales del medio (1) y medio (2) y $\epsilon_1 E_{n_1} = \epsilon_2 E_{n_2}$ es la condición de frontera de las componentes normales de los medios (1) y (2) respectivamente.

Para cumplir con las condiciones de frontera, el modo óptico debe tener un carácter vectorial y es de la forma

$$\vec{E}_1 = (\hat{i}a + \hat{k}b)\exp\{i\beta_1 z\}\exp\{-\alpha_1 x\} \tag{4.9}$$

$$\vec{E}_2 = (\hat{i}c + \hat{k}d)\exp\{i\beta_2 z\}\exp\{-\alpha_2 x\}. \tag{4.10}$$

Las condiciones de frontera se deben cumplir para $x = 0$ y para cualquier z. Entonces $b\exp\{i\beta_1 z\} = d\exp\{i\beta_2 z\}$, en particular con $z = 0$. Por lo tanto $b = d$, de la condición de frontera normal, tenemos que

$$\epsilon_1 a\exp\{i\beta_1 z\} = \epsilon_2 c\exp\{i\beta_2 z\}, \qquad \epsilon_1 a = \epsilon_2 c.$$

Esto implica que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, por lo que ahora las ecuaciones (4.9) y (4.10) quedan expresadas de la siguiente manera

$$\vec{E}_1 = (\hat{i}a + \hat{k}b)\exp\{i\beta z\}\exp\{-\alpha_1 x\} \tag{4.11}$$

$$\vec{E}_2 = \left(\hat{i}\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}c + \hat{k}b\right)\exp\{i\beta z\}\exp\{-\alpha_2 x\}. \tag{4.12}$$

Como es un medio libre de cargas, se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_2 = 0,$$

por lo que ahora se tiene la siguiente ecuación

$$-\alpha_1 a + i\beta b = 0 \tag{4.13}$$

$$-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\alpha_2 a + i\beta b = 0, \tag{4.14}$$

igualando la ecuación (4.13) y la ecuación (4.14) tenemos que $-\alpha_1 a + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\alpha_2 a = 0$, entonces $\epsilon_1\alpha_2 = \epsilon_2\alpha_1$, por lo que a estructura del modo superficial es

$$\vec{E}_1 = (\hat{i}a + \hat{k}b)\exp\{i\beta z\}\exp\{-\alpha_1 x\} \tag{4.15}$$

$$\vec{E}_2 = \left(\hat{i}\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}c + \hat{k}b\right)\exp\{i\beta z\}\exp\left\{-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\alpha_1 a x\right\}. \tag{4.16}$$

Lo que falta es encontrar el valor permitido para β. Por lo que las ecuaciones (4.15) y (4.16) deben satisfacer la ecuación de Helmholtz. Esto es

$$\nabla^2 E_1 + k^2 E_1 = 0, \qquad \nabla^2 E_2 + k^2 E_2 = 0,$$

desarrollando se tiene $(a\alpha_1^2 - a\beta^2) + ak_1^2 = 0$, despejando a tenemos $a(\alpha_1^2 - \beta^2) + ak_1^2 = 0$, por lo tanto $b(\alpha_1^2 - \beta^2) + bk_1^2 = 0$. Esto implica lo siguiente que $\alpha_1^2 - \beta^2 + k_1^2 = 0$, por lo que ahora tenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} a\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\left(\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\alpha_1\right)^2 - \beta^2 + k_2^2\right) &= 0 \\ \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \alpha_1^2 - \beta^2 + k_2^2 &= 0 \\ \beta^2 - k_2^2 &= \alpha_1^2. \end{aligned}$$

Ahora se quiere encontrar el valor de β, por lo que haciendo el desarrollo de las ecuaciones anteriores tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 (\beta^2 - k_1^2) - \beta^2 + k_2^2 &= 0 \\ \beta^2\left[\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) - 1\right] - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) k_1^2 + k_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

despejando β^2 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2}k_1^2 - k_2^2}{\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} - 1} \\ &= \frac{\frac{\epsilon_2^2 k_1^2 - \epsilon_1^2 k_2^2}{\epsilon_1^2}}{\frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}{\epsilon_1^2}} \\ &= \frac{\epsilon_2^2 k_1^2 - \epsilon_1^2 k_2^2}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}, \end{aligned}$$

pero si sabemos que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v}\delta = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}n$, entonces la expreción anterior nos queda de la siguiente forma

$$\beta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{\epsilon_2^2 n_1^2 - \epsilon_1^2 n_2^2}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}\right), \tag{4.17}$$

ahora si sabemos que

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon \mu}}},$$

entonces los valores de n_1 y n_2 obtenidos en la ecuación (4.17), son los siguientes

$$n_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}, \qquad n_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0},$$

sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (4.17), se tiene

$$\begin{aligned}
\beta^2 = &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{\epsilon_2^2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - \epsilon_1^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}\right) \\
&= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \epsilon_1 \epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}\right) \\
&= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \epsilon_1 \epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + \epsilon_1)}\right) \\
&= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

por lo tanto el parámetro β esta dado por

$$\beta = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right)^{1/2}.$$

o equivalentemente igual a

$$\beta = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right)^{1/2}. \tag{4.19}$$

La expresión anterior se conoce como la relación de dispersión y da la dependencia de la fase β con la frecuencia ω esto se observa en la fig.(4.3).

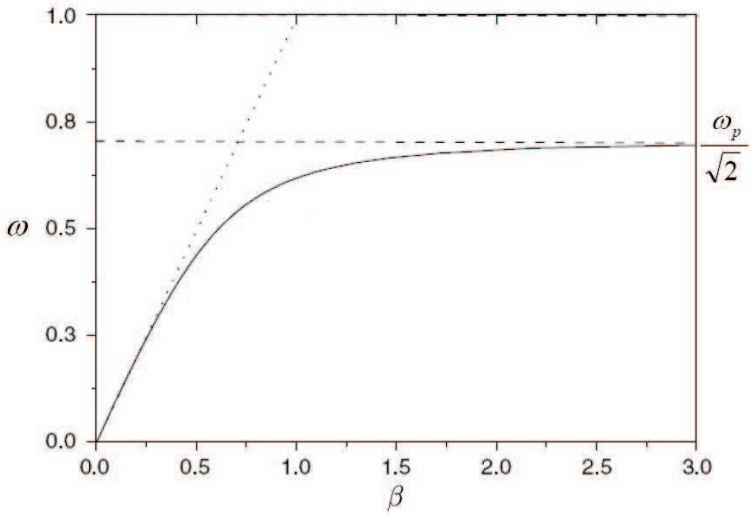

Figura 4.3: Relación de dispersión para un plasmón superficial.

De la gráfica de relación de dispersión podemos observar que cuando $\omega \rightarrow 0$, β toma el valor de k_o y cuando $\omega \rightarrow \omega_p/\sqrt{2}$, entoces $\beta \rightarrow \infty$. Por consiguiente tenemos que para este modelo la longitud del plasmon es corta, ya que tenemos dos superficies semi-infinitas.

4.4. Relación de dispersión en peliculas delgadas

En medios con condiciones semi-infinitas, la parte imaginaria del índice de refracción determina la absorción. Esto implica plasmones que se propagan a distancias cortas e implica también un control limitado en óptica de plasmones.

La idea es utilizar peliculas delgadas entre $20-40nm$ ya que estas soportan plasmones de largo alcance. Esto implica un análisis de efectos opticos superficiales despreciando absorción.

Para este caso caso la relación de dispersión cambia su forma con respecto a la obtenida en la seccion anterior. Si la película disminuye en la dirección z a tamaños del orden de $20-40nm$. El problema es encontrar el nuevo valor de β para una sola nanoestructura.

La idea es pensar en un conjunto de nanoestructuras formando una red unidimensional periódica y a está calcular su índice de refracción.

En este formalismo se muestra que es posible obtener mediante fenomenos de resonancia índices de refracción negativo. El sistema por analizar en esta sección es considerar tres medios, de los cuales dos son semi-infinitos y uno tiene un espesor d finito y lo suficientemente delgado para que el campo puede influir en las dos interfaces. La geometría considerada se muestra en la fig.(4.4)

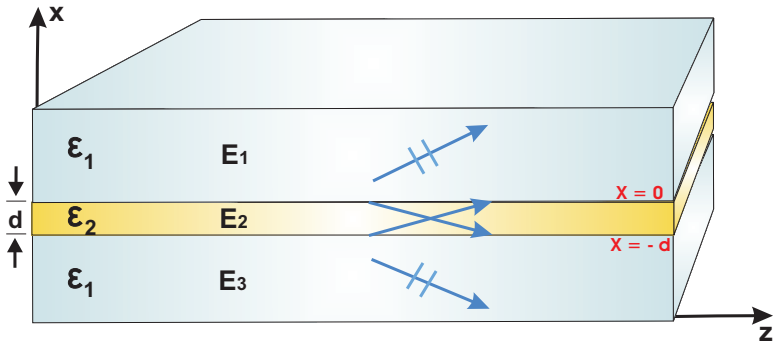

Figura 4.4: Geometría considerada para un sistema de tres medios.

De la figura anterior tenemos que los campos ópticos deben de cumplir con las condiciones de frontera junto con las ecuaciones de Maxwell, el modo óptico debe tener un carácter vectorial, por lo tanto los campos eléctricos están dados de la siguiente manera, el campo en el metal es de la forma

$$\begin{aligned} E_2 &= \left(\hat{i}a\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \hat{k}b\right)\exp\{-\alpha_2 x\}\exp\{i\beta z\} + \left(-\hat{i}a\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \hat{k}b\right)\exp\{\alpha_2 x\}\exp\{i\beta z\} \\ &= \left[\hat{i}a\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(\exp\{-\alpha_2 x\} - \exp\{\alpha_2 x\}) + \hat{k}b(\exp\{-\alpha_2 x\} + \exp\{\alpha_2 x\})\right]\exp\{i\beta z\} \end{aligned}$$

$$E_2 = \left[\hat{i}A\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\cosh(\alpha_2 x) + \hat{k}B\sinh(\alpha_2 x)\right]\exp\{i\beta z\}. \tag{4.20}$$

Por consiguiente el campo eléctrico para E_1 y E_3, cumplen con las condiciones de frontera tanto para la componente tangencial y la componente normal, por lo que tenemos las siguientes expresiones

$$E_1 = \left[\hat{i}A\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right]\exp\{-\alpha_1 x\}\exp\{i\beta z\}, \tag{4.21}$$

$$E_3 = \left[\hat{i}A\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\cosh(\alpha_2 d) + \hat{k}B\sinh(\alpha_2 d)\right]\exp\{-\alpha_1(x-d)\}\exp\{i\beta z\}. \tag{4.22}$$

De las ecuaciones anteriores se debe encontrar una expreción para β para esto se sustituye cada expresión de E en la ecuación de Helmohtz, esto es

$$\begin{aligned}
\nabla^2 E_1 + k_1^2 E_1 &= 0 \\
\nabla^2 E_2 + k_2^2 E_2 &= 0 \\
\nabla^2 E_3 + k_3^2 E_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora resolviendo las ecuaciones anteriores, se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 - \beta^2 + k_3^2 &= 0 \\
\alpha_2^2 - \beta^2 + k_2^2 &= 0 \\
\alpha_1^2 - \beta^2 + k_1^2 &= 0.
\end{aligned}$$

De estas igualdades nosotros obtenemos el valor de β_{pd}, que es la relación de dispersión en peliculas delgadas y dicho valor esta expresado de la siguiente forma.

$$\beta_{pd} = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \pm \epsilon_2\exp\{-\omega d/c\}}\right)^2, \tag{4.23}$$

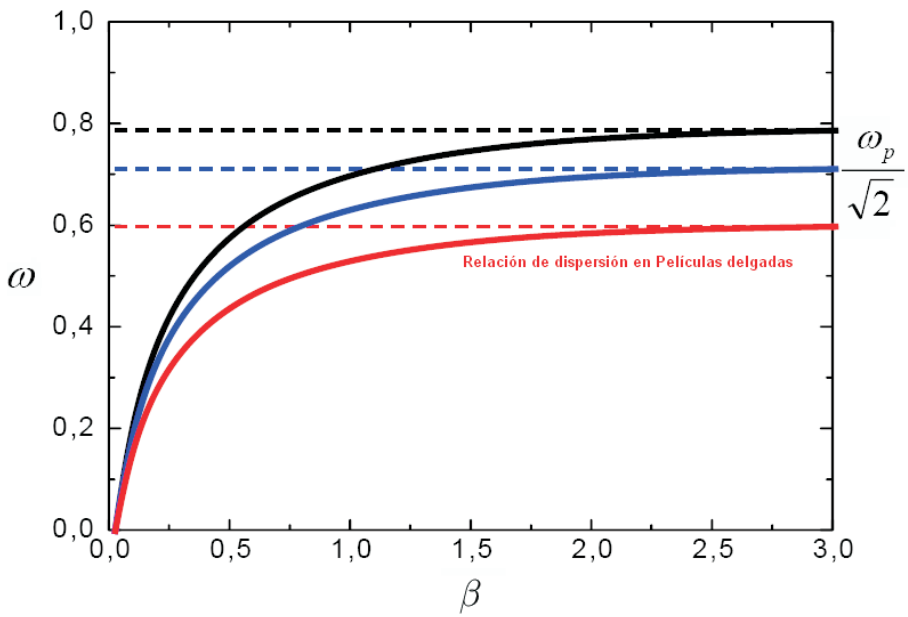

Figura 4.5: Relación de dispersión en películas delgadas.

En esta gráfica mostrada en la fig.(4.5, observamos que cuando $\omega \rightarrow 0$, β_{pd} toma el valor de k_o y cuando $\beta_{pd} \rightarrow \infty$ entonces ω toma un valor menos a $\omega_p/\sqrt{2}$. Con este valor de β_{pd} nosotros tenemos que la longitud del plasmon es mas larga, debido a que incorporamos un espesor definido a nuestra película en donde se excita el plasmon.

4.5. Métodos de generación de plasmones superficiales

Luz incidiendo sobre una superficie plana no genera un plasmón esto se debe a que $\beta > k_0$, donde $k_0 = \omega/c$. El acoplamiento implica un elemento óptico adicional, un caso particular sería una rejilla en contacto con la superficie. Si $\beta > k_0$ entonces no se puede acoplar luz del vacío a la interface y generar así un plasmón, por lo que entonces se necesita un incremento a k_0 para generar un plasmón.

En la siguiente sección se desarrollará un análísis donde se define la velocidad de un plasmon en el arreglo mencionado anteriormente además de realizar el desarrollo matemático para la difracción de dicha rejilla, obteniendo que cuando se ilumine con luz

genere una variedad de números de onda k_n y algunos de ellos coincidan con el número de onda del plasmón descrito por la relación de dispersión y así finalmente poder excitar un plasmon para de este fenomeno obtener un índice de refracción negativo para el arreglo propuesto en la fig. (3.1).

4.5.1. Velocidad de fase de un plasmon

El análisis sobre la velocidad de la fase en un Metamaterial o velocidad de un plasmón ver fig.(4.6), se realiza tomando la ecuación (4.2), esta debe cumplir la condición de que la velocidad de fase debe coincidir con la velocidad de grupo.

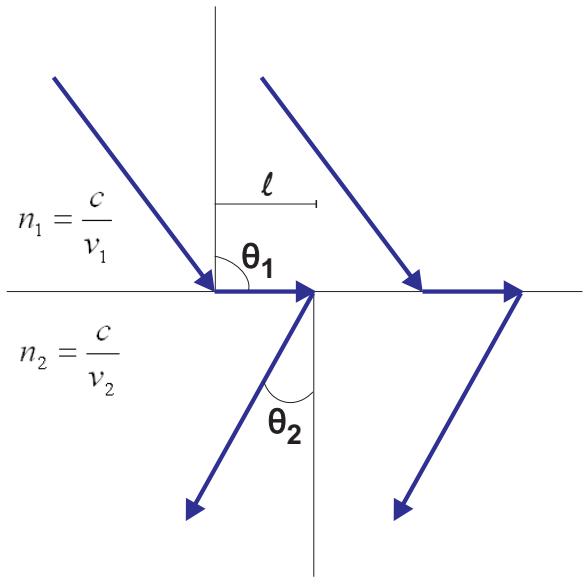

Figura 4.6: Ley de Snell para un Metamaterial.

De la figura anterior tenemos que $l = t_p v_p$ representa la longitud del plasmon sobre la superficie, ademas n_1 y n_2 están en función de la velocidad de la luz c y la velocidad de cada medio respectivamente, además de que los ángulos θ_1 y θ_2 son positivos.

Si tenemos que la $v_f = v_p \cos\theta$, entonces esta velocidad es anti-paralela a la velocidad de grupo en el medio 2, esto se puede observar en la fig. (4.2), de donde v_p es la velocidad del plasmón. La velocidad generada por un plasmon debe de cumplir lo siguiente, que el modulo de la v_p debe ser

$$\frac{c}{v_p \cos\theta} = \frac{c}{v_2}, \tag{4.24}$$

la cual es la propuesta fundamental para este trabajo. ahora si tenemos que

$$v_2 = v_p \cos\theta, \tag{4.25}$$

donde v_2 debe estar en un material muy denso, entonces

$$\frac{1}{v_p \cos\theta} = \frac{1}{v_2}, \tag{4.26}$$

ahora lo que sigue es expresar la v_p en términos de β, y además $v = \frac{\omega}{k}$, la velocidad del plasmon queda expresada de la siguiente forma

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}. \tag{4.27}$$

Sustituyendo β dada por la ecuación (4.19), en la ecuación (4.27), se tiene

$$v_p = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\left(\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\right)^{1/2}}, \tag{4.28}$$

desarrollando, obtenemos la siguiente expresión

$$v_p = c\sqrt{\epsilon_0}\left(\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{\epsilon_1\epsilon_2}\right)^{1/2}, \tag{4.29}$$

por lo tanto,tenemos que v_p esta expresado en términos β, por consiguiente tenemos que de la ecuación (4.26) obtenemos a el índice de refracción n_2, el cual toma la forma

$$n_2 = \frac{c}{v_p \cos\theta}, \tag{4.30}$$

Esta última ecuación representa el índice de refracción para materiales compuestos, es decir, que para este modelo nosotros tenemos índices de refracción negativos utilizando la excitación de un plasmon en una rejilla sobre una superficie plana, lo que queda es realizar el análisis para dicha rejilla, dicho análisis se muestra en la siguiente sección.

4.5.2. Difracción de una rejilla.

Sommerfeld definió la *difracción* como la propagación no rectilínea de la luz que no se puede interpretar a partir de las leyes de la reflexión y de la refracción. Grimaldi, en el siglo XVII, fue el primero que observó fenómenos difractivos: al hacer pasar un haz de luz a través de una abertura practicada sobre una pantalla observó que, al proyectar el haz sobre otra pantalla, el paso de la zona iluminada a la zona de sombra no era abrupto. Años después, Fresnel realizó el primer intentó serio de explicar los fenómenos de difracción (1818), basándose en unas modificaciones del principio de Huygens [7]. En 1882, Kirchhoff propuso la explicación de los fenómenos de difracción en términos de la teoría escalar.

Una rejilla de difracción es una pantalla con un número grande de rendijas de iguales tamaños y situadas a la misma distancia una de otra ver fig.(4.7).

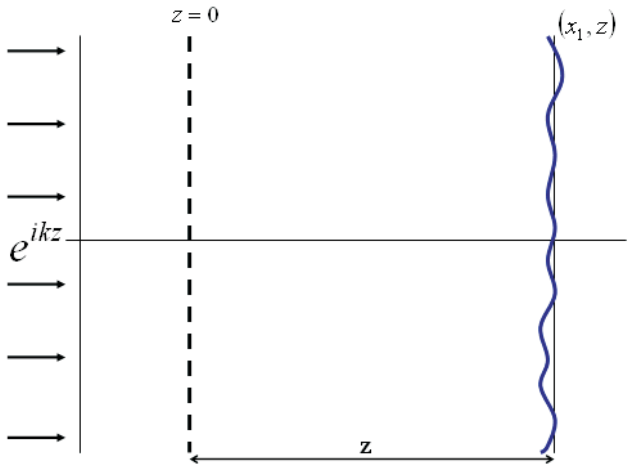

Figura 4.7: Difracción de una rejilla.

Suponemos que este campo tiene una representación matemática de la forma

$$f(x) = \sum a_n \exp\{i2\pi xn/d\}$$

$$\phi(x,z) = \sum a_n \exp\{i2\pi(xU_n + xP_n)\}. \tag{4.31}$$

Cuando $z \longrightarrow 0$ y $x_1 \longrightarrow x$, entonces se tiene

$$\phi(x, z=0) = \sum a_n \exp\{i2\pi xU_n\} = \sum a_n \exp\left\{i2\pi x\frac{n}{d}\right\}, \tag{4.32}$$

donde

$$U_n = \frac{n}{d}, \qquad k = k_x, k_z,$$

Justo en el plano de la rejilla, tenemos

$$\exp\{ik_x x\} \sum a_n \exp\left\{i2\pi x\frac{n}{d}\right\} = \sum a_n \exp\left\{i2\pi x\left(\frac{n}{d} + \frac{k_x}{2\pi}\right)\right\}. \tag{4.33}$$

Si tenemos que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, entonces $k = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha\right)$ por lo que considerando lo anterior la ecuación (4.33) se escribe como

$$\sum a_n \exp\left\{i2\pi x\left(\frac{n}{d} + \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha\right)\right\}, \tag{4.34}$$

desarrollando, se tiene

$$\sum a_n \exp\left\{i2\pi x\left(\frac{n}{d} + \frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)\right\} = \sum a_n \exp\left\{ix\left(\frac{2n\pi}{d} + \frac{\omega}{c}\cos\alpha\right)\right\}. \tag{4.35}$$

La expresión $\left(\frac{2n\pi}{d} + \frac{\omega}{c}\cos\alpha\right)$ es equivalente a tener un nuevo número de onda.

$$k_p = \frac{\omega}{c}\cos\alpha \pm \frac{2n\pi}{d} = \beta. \tag{4.36}$$

El tener una rejilla en contacto con la superficie permite acoplar el plasmón. El mismo efecto se cumple si se graba una rejilla sobre una superficie conductora esto es en una superficie periodica.

$$\frac{\omega}{c}\cos\alpha \pm \frac{2n\pi}{d} = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\right)^{1/2}. \tag{4.37}$$

El tener una rejilla en el plano $z = 0$ iluminada con luz oblicua genera una variedad de números de onda k_n y algunos de ellos coinciden con el número de onda del plasmón descrito por la relación de dispersión.

4.6. Aplicaciones de plasmones superficiales a metamateriales

Un metamaterial es un material estructurado que exhibe o presenta un índice de refracción negativo, a continuación se presenta una síntesis para metamateriales utilizando nano-partículas polarizadas con luz sobre una superficie o soporte para obtener como resultado una expresión que nos indique índices de refracción negativos.

4.6.1. Sintesís de metamateriales

El hecho de que tenga estructura implica o lo podemos asociar parametros con dependencia temporal y en particular lo modelamos como un grupo de dos nano-partículas polarizadas sobre un soporte aislante esto implica que la distancia relativa entre dos particulas se acerca/aleja de manera armónica.

Los fenomenos de interacción entre partículas se puede explicar a traves de la interacción entre plasmones. Como paso previo se describe la interacción entre dipolos fig.(4.8).

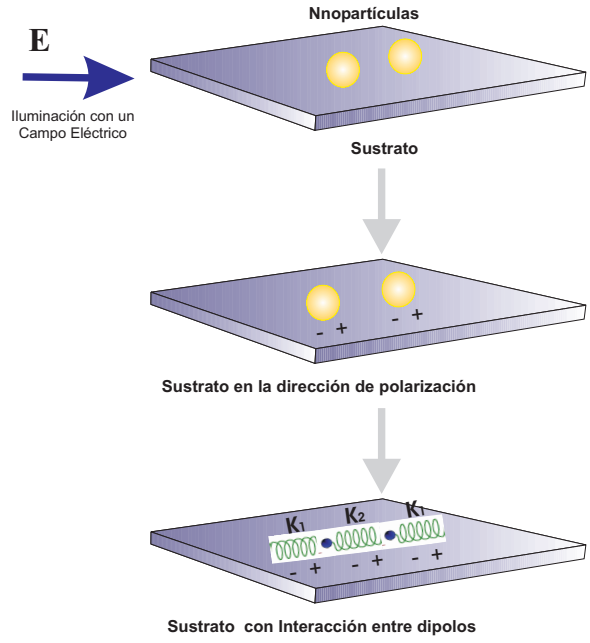

Figura 4.8: Modelo de dos nano-partículas polarizadas sobre un soporte oscilante.

.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = E, \tag{4.38}$$

donde $E = E_0 \cos \omega t$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$, además $\omega(t)$ es una función periódica, es decir

$$\omega(t) = \sum a_n \exp\{in\omega t\}.$$

Por lo que ahora se tiene definido a $\omega(t)$ de la siguiente forma

$$\omega(t) = \omega_0 + a \cos \alpha t. \tag{4.39}$$

Ahora para $\omega(t)^2$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\omega(t)^2 &= \omega_0^2 + 2a\omega_0 \cos\alpha t + a^2 \cos^2 \alpha t \\ &= \omega_0^2 + 2a\omega_0 \cos\alpha t, \end{aligned} \tag{4.40}$$

sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (4.38) se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2a\omega_0 \cos\alpha t)x = E_0 \cos\omega t. \tag{4.41}$$

A esta última ecuación se le conoce como *Resonancia Paramétrica*, ahora propondremos una solución de la forma

$$x = x_0 \cos\omega t, \tag{4.42}$$

sustituyendo en la ecuación (4.41), se tiene

$$-x_0\omega^2 \cos\omega t + x_0\omega_0^2 \cos\omega t + 2ax_0\omega_0 \cos\alpha t \cos\omega t = E_0 \cos\omega t, \tag{4.43}$$

resolviendo para x_0 tenemos

$$x_0(\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos\alpha t) = E_0, \tag{4.44}$$

despejando x_0 se tiene

$$x_0 = \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos\alpha t}, \tag{4.45}$$

por lo tanto la solución es de la forma

$$x = \frac{E_0 \cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos\alpha t}. \tag{4.46}$$

Ahora si tenemos que el momento dipolar es $p = qx = E(\epsilon - \epsilon_0)$, entonces la ecuación (4.46) toma la forma

$$\frac{qE_0 \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos \alpha t} = E_0 \cos \omega t(\epsilon - \epsilon_0), \tag{4.47}$$

ahora despejando ϵ, se tiene de la ecuación anterior

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos \alpha t}. \tag{4.48}$$

Por lo tanto para tener una expreción para el índice de refracción tenemos lo siguiente

$$n^2 = 1 + \frac{q}{\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos \alpha t)}, \tag{4.49}$$

donde α es el período de las vibraciones del sustrato, y además tenemos que el indice de refracción depende del tiempo, por lo que ahora se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} n(t) &= \left(1 + \frac{q}{\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos \alpha t)}\right)^{1/2} \\ &\approx 1 + \frac{q}{2\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos \alpha t)}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Si tenemos que para tiempos de $\frac{\pi}{\alpha}, \frac{3\pi}{\alpha}, ...$, tenemos que la expresión anterior es de la forma

$$n(t) = 1 + \frac{q}{2\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - 2a\omega_0)}. \tag{4.51}$$

Finalmente para N nano-partículas por unidad de longitud, el índice de refracción es

$$n(t) = 1 + \frac{Nq}{2\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - 2a\omega_0 \cos \alpha t)}. \tag{4.52}$$

Por lo cual de esta última ecuación tenemos que para N nano-partículas, polarizadas con luz y estando sobre un soporte o superficie obtenemos refracción negativa en ciertos

intervalos de tiempos igual que en el caso para dos nano-partículas esto lo podemos ver en la fig.(4.9).

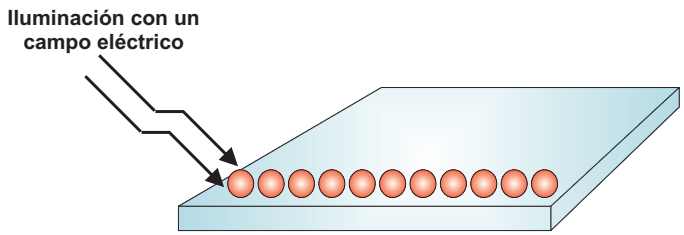

Figura 4.9: Modelo de N nano-partículas polarizadas sobre un soporte oscilante.

.

En este capítulo se obtuvo la relación de dispersión en películas delgadas lo cual nos permite tener una longitud de largo recorrido del plasmon, además de obtener un modelo que consiste en una superficie plana acoplando un elemento óptico en este caso una rejilla para obtener como resultado refracción negativa además de realizar una síntesis de metamateriales utilizando partículas en una superficie para obtener de igual manera refracción negativa.

Capítulo 5

Propuesta de síntesis en metamateriales

En este capítulo se propone implementar un arreglo interferométrico para controlar cambios de fase en un campo óptico. El sistema permite caracterizar fluctuaciones promedio de fase y tener refracción negativa generada por una superficie rugosa, utilizando como substrato fotorresina. La descripción matemática se realiza a partir de la holografía en específico del holograma de un punto.

5.1. Análisis holográfico

5.1.1. Introducción

La holografía se puede describir en muy pocas palabras como un sistema de fotografía tridimensional, sin el uso de lentes para formar la imagen. Ésta es una de las técnicas ópticas que ya se veían teóricamente posibles antes de la invención del láser, pero que no se pudieron volver realidad antes de él.

El desarrollo de la holografía se dejo sentir con el advenimiento de la tecnología del láser, en los 60's, pero este inventó se conocía desde 13 años antes, en 1947 debido a los trabajos del húngaro Dennis Gabor, quien inventó la técnica de reconstrucción del frente de onda, usando los principios de difracción. En aquella época se veían pocas posibilidades para la holografía, debido a las grandes limitaciones que se tenían con las lámparas de mercurio, dado que la longitud de coherencia de esta fuente, es del orden de milímetros.

Pero las posibilidades de sus aplicaciones se dispararon con el advenimiento del láser que fue inventado por el ruso, Tornes Charles Hakd, con esta herramienta los ingenieros Leith y Upatnieks en los 60's desarrollaron la holografía fuera de eje obteniendo resultados sorprendentes, después de este acontecimiento, hubo en esta época una moda de hacer hologramas, creándose diferentes tipos de hologramas: como los hologramas de Fourier, Fresnel, Fraunhofer, todos estos hologramas eran de transmisión.

Después Denisyuk, en 1962 realiza por vez primera los hologramas de reflexión, empleando emulsiones gruesas, obteniendo resultados sorprendentes dado que la eficiencia de difracción es bastante alta, y los requisitos de coherencia para reconstruirlos fueron de alguna manera atenuados, abriendo la posibilidad de reconstruirlos con luz blanca.

La gente en todo el mundo empezó a realizar hologramas de reflexión, obteniendo hologramas mejores en eficiencia y ventana de visión, mediante arreglos experimentales mas complicados. Benton, en 1968, hace los primeros hologramas de imagen o hologramas de arco iris (rainbow). Estos hologramas de transmisión se hicieron atractivos rápidamente dado que no se necesitaba una fuente coherente monocromática para reconstruirlos, solo se requiere de iluminar los hologramas con luz blanca.

En los 70's la compañía RCA hace el primer intento de llevar al mercado los hologramas, para ello se llevo un intenso estudio sobre los materiales más adecuados para la replica de hologramas. Bartolini, en 1974, publica los primeros resultados sobresalientes en la replica de hologramas, los materiales que el reportó como los óptimos fueron las fotorresinas. Las fotorresinas son materiales que guardan la información por modulación de relieve, sin perdida de detalles de los hologramas, dado que la resolución de estos materiales es a nivel molecular.

5.1.2. Desarrollo teórico

Para poder hacer un análisis de holografía es necesario primero describir los conceptos fundamentales de interferencia.

La interferencia óptica es cuando dos haces de luz, con diferentes caminos ópticos y que emergen de la misma fuente se suman en un punto [12].

La teoría de interferencia óptica esta basada en el principio de superposición de ondas, esto se debe a que la ecuación de Helmholtz es lineal. En la fig.(5.1) se ilustra el esquema básico de interferencia.

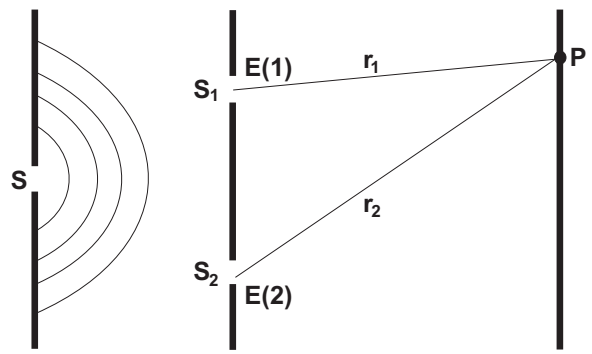

Figura 5.1: Interferencia de dos fuentes.

El campo en amplitud en el punto P es

$$E = E_{(1)} + E_{(2)}. \tag{5.1}$$

Si consideramos dos ondas planas armónicas polarizadas linealmente las expresiones para los campos son

$$E_{(1)} = E_1 \exp\{i(\vec{k_1} \cdot \vec{r_1} - \omega t + \phi_1)\}$$

$$E_{(2)} = E_2 \exp\{i(\vec{k_2} \cdot \vec{r_2} - \omega t + \phi_2)\}, \tag{5.2}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 representan la diferencia de fase entre las superficies de las dos ondas, así la ecuación (5.1) esta dada por

$$E = E_1 \exp\{i(\vec{k_1} \cdot \vec{r_1} - \omega t + \phi_1)\} + E_2 \exp\{i(\vec{k_2} \cdot \vec{r_2} - \omega t + \phi_2)\}. \tag{5.3}$$

Sabemos que la irradiancia de un punto es proporcional al cuadrado de la amplitud, así en este caso la irradiancia toma la forma

$$\begin{aligned} I &= |E|^2 \\ &= (E_{(1)} + E_{(2)})(E^*_{(1)} + E^*_{(2)}) \\ &= |E_1^2| + |E_2^2| + 2E_1E_2\cos\theta \end{aligned}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2E_1E_2\cos\theta, \tag{5.4}$$

donde $\theta = \vec{k_1} \cdot \vec{r} - \vec{k_2} \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2$.

El tercer término de la ecuación (5.4) es el llamado término de interferencia, además, si $\phi_1 - \phi_2$ es constante se dice que las superficies de las 2 ondas son mutuamente coherentes. Pero si por lo contrario $\phi_1 - \phi_2$ varia con el tiempo se dice que son mutuamente incoherentes o parcialmente coherentes. Para el caso incoherente se tiene que el valor promedio del $\cos\theta$ es cero y que no existe el término de interferencia.

De aquí se dice que las franjas de interferencia constructiva se dan cuando la diferencia de camino óptico es igual a números enteros de la longitud de onda

$$|r_2 - r_1| = n\lambda, \tag{5.5}$$

y los puntos de mínima interferencia

$$|r_2 - r_1| = (n + 1/2)\lambda, \tag{5.6}$$

donde n es un entero y se le llama *orden de interferencia*, es simplemente el número de longitudes de onda en que difieren las trayectorias de los puntos en donde ocurre la interferencia.

Se puede describir una aplicación de los modelos de interferencia, en holografia. La palabra holografía proviene del griego *Holos-Completo* y *Grama-Imagen* [13] es decir un holograma es un medio de registro el cual contiene el patrón de interferencia de un haz objeto y un haz de referencia.

La manera mas simple de generar un holograma en eje, es grabar el objeto en el mismo eje de la onda plana que lo ilumina. Esto es conocido como holograma de un punto y su análisis de realizará en la siguiente sección.

5.1.3. Análisis del holograma de un punto

De la fig.(5.2) nos muestra el esquema del holograma de un punto, en este arreglo hacemos interferir 2 ondas planas de las cuales se tienen las siguientes ecuaciones

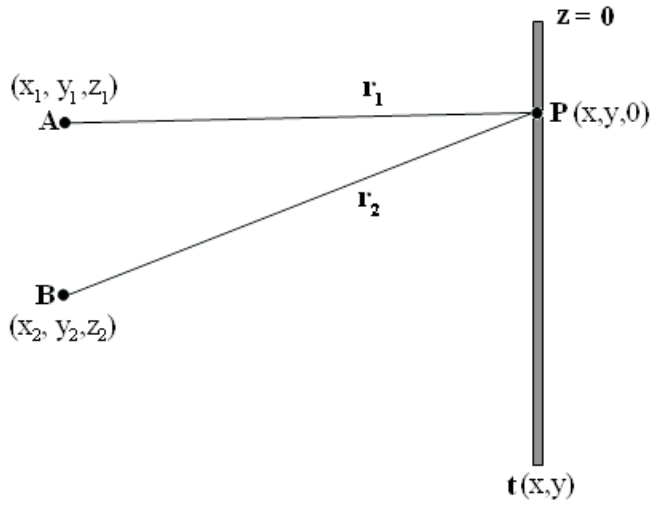

Figura 5.2: Esquema de un holograma de un punto.

$$A_1 = A\exp\{ikr_1\}$$

$$A_2 = B\exp\{ikr_2\}, \tag{5.7}$$

de la anterior figura, obtenemos los valores de r_1 y r_2 expresados de la siguiente forma

$$r_1 = \Big((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z_1)^2\Big)^{1/2}, \tag{5.8}$$

$$r_2 = \Big((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z_2)^2\Big)^{1/2}. \tag{5.9}$$

Ahora realizaremos el proceso para generar el holograma, entonces tenemos de la fig. (5.2) y de la ecuación para la irradiancía (5.4) lo siguiente

$$\phi(P) = A\exp\{ir_1k\} + B\exp\{ir_2k\},$$

$$I(P) = t(x,y),$$

$$I(P) = A^2 + B^2 + 2ReAB^*\exp\{ik(r_1-r_2)\},$$

$$I(P) = A^2 + B^2 + AB^*\exp\{ik(r_1-r_2)\} + A^*B\exp\{-ik(r_1-r_2)\}. \tag{5.10}$$

Para el proceso de reconstrucción del holograma tenemos que iluminar el patrón grabado con una onda esférica asi de esta forma tenemos lo siguiente

$$\phi(P_1) = \iint A\exp\{ikr_1\}t(x,y)\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy, \tag{5.11}$$

sustituyendo la ecuación (5.10) en la ecuación (5.11) tenemos

$$\phi(P_1) = \iint A\exp\{ikr_1\}(A^2+B^2)\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy$$

$$+\iint A\exp\{ikr_1\}(AB^*)\exp\{ik(r_1-r_2)\}\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy$$

$$+\iint A\exp\{ikr_1\}(A^*B)\exp\{-ik(r_1-r_2)\}\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy \tag{5.12}$$

de la ecuación anterior reescribiendo cada integral tenemos lo siguiente

$$a = \iint A\exp\{ikr_1\}(A^2+B^2)\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy, \tag{5.13}$$

$$b = \iint A\exp\{ikr_1\}(AB^*)\exp\{ik(r_1-r_2)\}\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy, \tag{5.14}$$

$$c = \iint A\exp\{ikr_1\}(A^*B)\exp\{-ik(r_1-r_2)\}\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy, \tag{5.15}$$

pero tenemos que la ultima integral (5.15) se puede escribir como

$$c = \iint AA^*B\exp\{ikr_2\}\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy, \tag{5.16}$$

y la segunda integral (5.14) la podemos escribir como

$$b = \iint A^2B^*\exp\{ik(2r_1-r_2)\}\frac{\exp\{ikr\}}{r}dxdy, \tag{5.17}$$

donde tenemos que si $2r_1 - r_2 > 0$, la fuente es imaginaria es decir, estará del lado izquierdo del plano holográfico, pero si $2r_1 - r_2 < 0$, entonces estaria del lado derecho. (ver fig. 5.3)

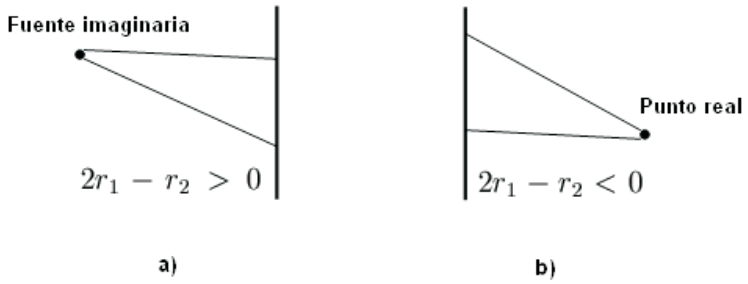

Figura 5.3: a) Fuente imaginaria, b) Punto real.

Por lo que ahora retomando la consideración donde $2r_1 - r_2 < 0$ y haciendo una aproximación paraxial para r_1, r_2 y r, tenemos lo siguiente

$$r_1 = \frac{x^2 + y^2}{2z_1} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_1} - \left(\frac{xx_1}{z_1} + \frac{yy_1}{z_1}\right),$$

$$2r_1 = 2\left(\frac{x^2 + y^2}{2z_1}\right) + 2\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_1}\right) - 2\left(\frac{xx_1}{z_1} + \frac{yy_1}{z_1}\right),$$

$$r_2 = \frac{x^2 + y^2}{2z_2} + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z_2} - \left(\frac{xx_2}{z_2} + \frac{yy_2}{z_2}\right),$$

$$r = \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0} - \left(\frac{xx_0}{z_0} + \frac{yy_0}{z_0}\right).$$

Ahora queremos que x^2 y y^2 se eliminen entonces tenemos que hacer $2r_1 - r_2 + r = 0$, sustituyendo los valores de r_2, r_1, r tenemos que obtener x_0 y y_0 donde estos términos representan el orden cero de difracción, el halo, el patrón de difracción del objeto grabado y por ultimo la imagen reconstruida de A modulada por un factor constante. Por lo tanto, estos términos están dados por

$$x_0 = z_0 \left(\frac{2x_1}{z_1} + \frac{2x_2}{z_2} \right), \tag{5.18}$$

$$y_0 = z_0 \left(\frac{2y_1}{z_1} + \frac{2y_2}{z_2} \right). \tag{5.19}$$

5.1.4. Arreglo Experimental

Lo descrito anteriormente tiene como finalidad estudiar las propiedades de un campo óptico. Para analizar las propiedades de este sistema, se propone separar cada componente del campo óptico del sistema interferométrico para estudiar las fluctuaciones de cada componente y posteriormente reunir nuevamente los haces en una placa holografica y obtener asi una superficie que nos permita tener refracción negativa. El arreglo holográfico esta esquematizado en la siguiente fig. (5.4).

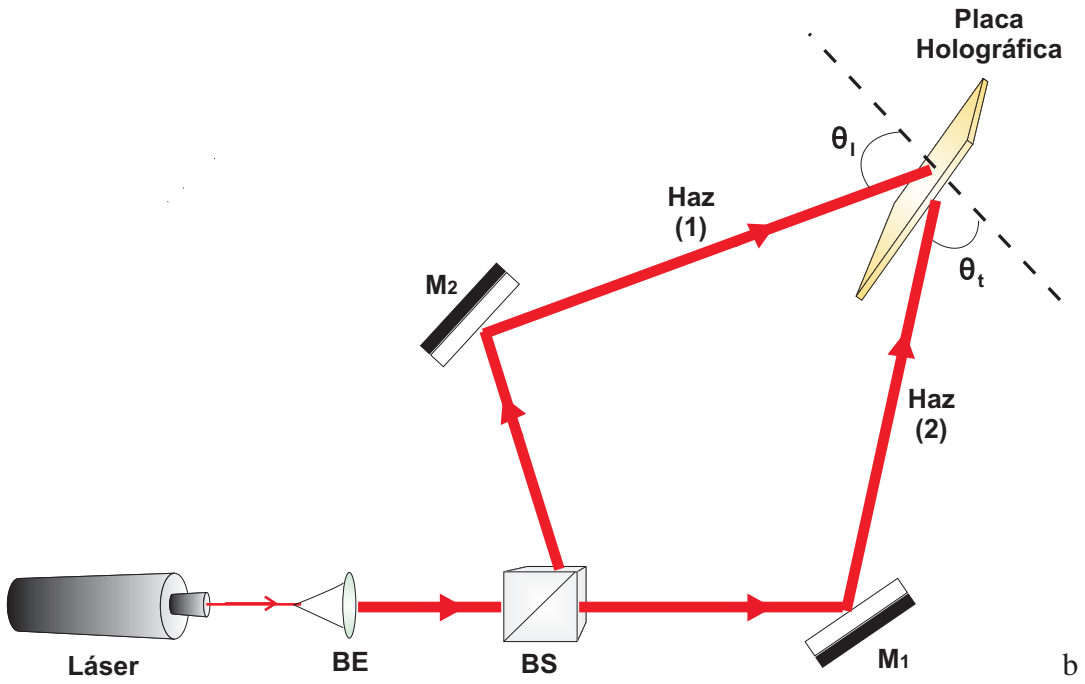

Figura 5.4: Arreglo experimental de un holograma de punto.

donde **BE** es el expansor de haz, **BS** es un divisor de haz y finalmente M_1 y M_2 son espejos. De este arreglo holográfico, se tiene que el haz (1), es considerado como el haz de referencia y el haz (2) como el haz objeto.

La placa holográfica consiste en una fotorresina ver fig. (5.5). La fotorresina se recubre de un metal para generar ondas plasmonicas. El espesor de la película esta entre $20-40nm$ esto con la finalidad de generar plasmones de largo alcance y poder despreciar absorción, esto con la finalidad de obtener refracción negativa como se muestra en la fig. (5.6).

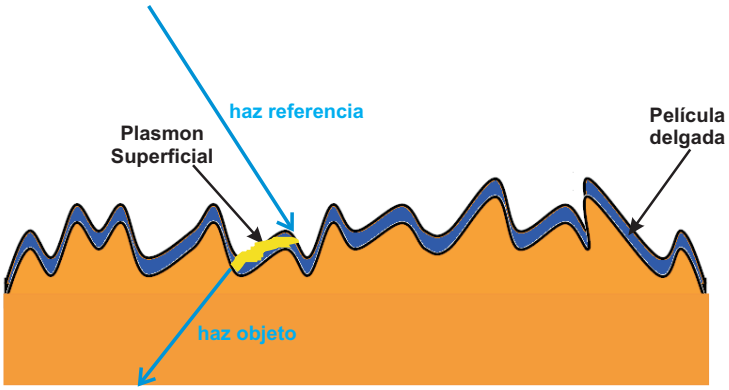

Figura 5.5: Exitación de un plasmon superficial en una superficie rugosa.

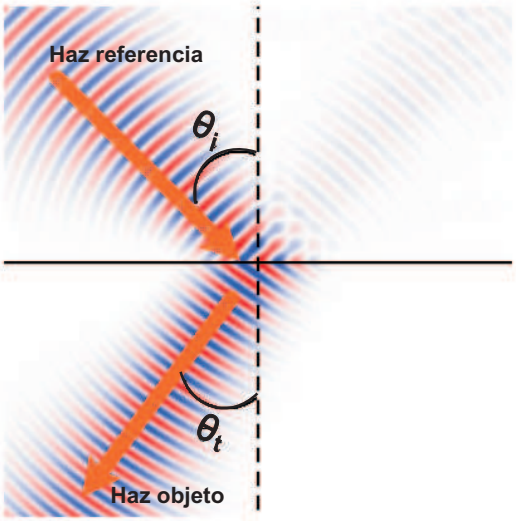

Figura 5.6: Indice de refracción negativo.

En este capítulo se describieron los conceptos fundamentales de holografía, en particular, se realizó el análisis del holograma de un punto. a partir de este análisis se establece un método utilizando un arreglo interferométrico para la obtención de índices de refracción negativa. El sistema interferométrico permite obtener un material que genere dicha refracción. Finalmente concluimos que los resultados teóricos obtenidos están en buena concordancia con las predicciones experiemntales propuestas.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones generales

Se describieron los conceptos fundamentales de la óptica física tales como la función de fase, la velocidad de fase y la velocidad de grupo. A partir de este estudio se determinaron las características de un campo óptico en un metamaterial, también se describieron los conceptos de la teoría del calculo variacional con la condición de transversalidad, en partícular se describió la generación de campos de difracción a través de principios variacionales.

Se realizó el análisis de las propiedades electromagneticas para materiales con índice de refracción negativo, comprobando que se presenta una velocidad de fase y una velocidad de grupo antiparalelas, se deduce la ley de Snell para un metamaterial, los diferentes coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión así como el ángulo crítico para medios con refracción negativo.

Se ha presentado un análisis de la propagación de ondas electromagnéticas en interfaces con el cual se obtuvo la relación de dispersión para plasmones en dos medios semi-infinitos. Se obtuvo la solución para tres medios y su correspondiente relación de dispersión. Se mostró que se puede hacer válida la expresión para dos medios semi-infinitos en el caso de tres medios haciendo que el primer y tercer medio tengan el mismo valor de su

función dieléctrica. Una cualidad a mencionar es el hecho de que este análisis puede ser aplicado a sistemas físicos con geometrías distintas de las planas, mediante la transformación conveniente de coordenadas, así como a un número mayor de interfaces además de que se tiene que para dos medios la vida del plasmon es corta su longitud de onda y para tres medios se obtuvo que la longitud del plasmon es larga por lo cual nos es de mayor interes este ultimo caso.

Se describió la síntesis de un metamaterial utilizando el modelo de drude, es decir, empleando nanoparticulas acopladas a una superficie plana, dicho análisis nos da como resultado que se puede generar un índice de refracción negativo apartir de este modelo utilizando primero 2 nano-particulas y posteriormente N nano-partículas. Finalmente se propone el arreglo experimental para lograr los objetivos anteriormente planteados usando un arreglo interferométrico y diciendo que el sustrato a usar es fotorresina, para posteriormente aplicarle una capa delgada de plata para asi excitar un plasmón.

6.2. Trabajo a futuro

6.2.1. Generación de cavidades láser aleatorias utilizando superficies rugosas.

La propuesta consiste, en la generación de cavidades láser aleatorias utilizando superficies rugosas, esto es generación de cavidades resonantes aleatorias. El esquema propuesto se muestra en la fig. (6.1)

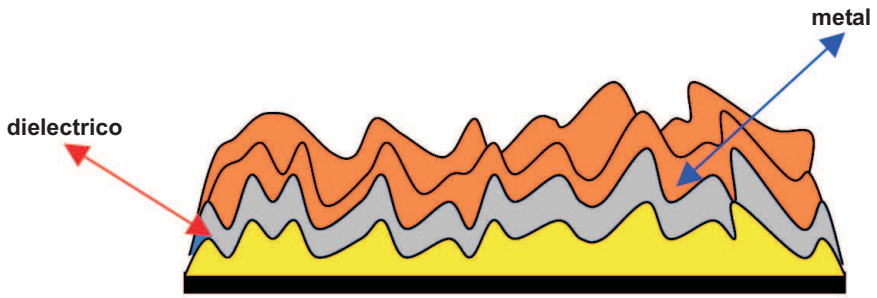

Figura 6.1: Esquema para generar cavidades resonantes aleatorias.

donde el dieléctrico puede ser de erbio u oxido de titanio, además de que el metal sea plata, para poder asi excitar el plasmón con luz láser una de sus posibles aplicaciones estaría en los sistemas de comunicaciones.

Apéndice A

Deducción de la Ley de Snell para un metamaterial.

Para un material con refracción negativa *metamaterial*, se tiene el haz de incidencia, el haz reflejado y el haz transmitido ver fig. 3.3. Por lo que se tiene que la ley de Snell estará dada de forma diferente a partir de las condiciones que se mostrarán a continuación.

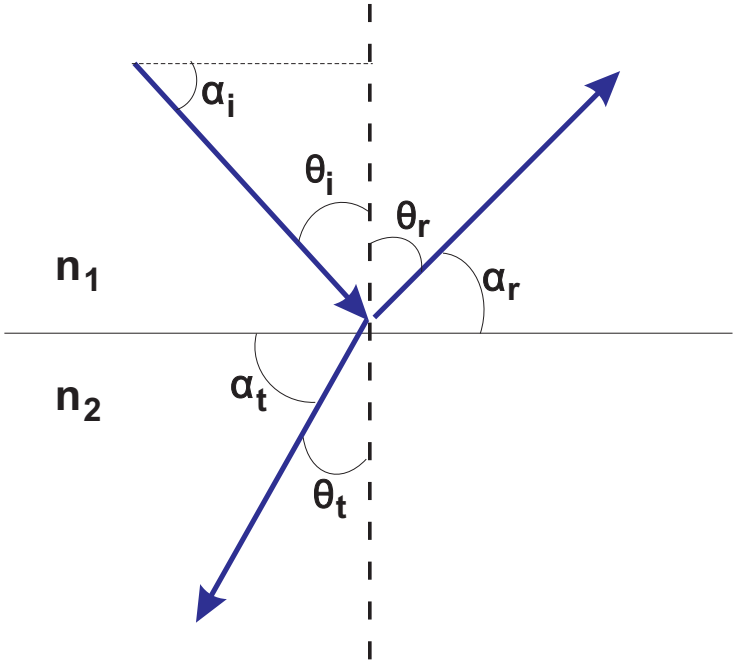

Figura A.1: Esquema de la ley de Snell para metamateriales.

De la figura anterior se tienen las siguientes expresiones

$$E_i = \phi_i = \hat{k}A_i \exp\{i(k_i \cdot r_i - \omega t)\} = A_i \exp\{i(k_{xi}x - k_{yi}y - \omega t)\} \tag{A.1}$$

$$E_r = \phi_r = \hat{k}A_r \exp\{i(k_r \cdot r_r - \omega t)\} = A_r \exp\{i(k_{xr}x + k_{yr}y - \omega t)\} \tag{A.2}$$

$$E_t = \phi_t = \hat{k}A_t \exp\{i(k_t \cdot r_t - \omega t)\} = A_t \exp\{i(-k_{xt}x - k_{yt}y - \omega t)\}, \tag{A.3}$$

donde si tenemos que $k_i = (x_{xi} - y_{yi})$,y hacemos $y = 0$, estamos en la interfaz y los campos eléctricos son los mismos. Por lo que ahora se tiene lo siguiente

$$A_i \exp\{i(k_{xi}x - k_{yi}y - \omega t)\} + A_r \exp\{i(k_{xr}x + k_{yr}y - \omega t)\} = A_t \exp\{i(-k_{xt}x - k_{yt}y - \omega t)\}. \tag{A.4}$$

Ahora para una polarización S, se tiene que $A_i = A_r = A_t$ es decir, no ahi un corrimientos de frecuencias y si además tenemos que $\omega_i = \omega_r = \omega_t$ lo que nos indica que tenemos un comportamiento lineal, pero si $k_{xi} = k_{xr} = -k_{xt}$, entonces tenemos unas expresiones de la forma

$$K_{xi} = \frac{2\pi}{\lambda_i} \cos\alpha_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin\theta_1 \tag{A.5}$$

$$K_{xr} = \frac{2\pi}{\lambda_r} \cos\alpha_r = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin\theta_r \tag{A.6}$$

Si ahora tenemos la siguiente igualdad expresada como

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} \cos\alpha_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin\theta_1 = -\frac{2\pi}{\lambda_t} \cos\alpha_t = -\frac{2\pi}{\lambda_t} \sin\theta_t$$

Tomando el segundo y cuarto termino de la expresión anterior, tenemos que

$$\frac{\sin\theta_i}{\delta\lambda_i} = -\frac{\sin\theta_t}{\delta\lambda_t}, \tag{A.7}$$

de donde $\omega = 2\pi\delta$.Por lo tanto, la expresion anterior toma la siguiente forma

$$\frac{c\sin\theta_i}{v_i} = -\frac{c\sin\theta_t}{v_t}, \tag{A.8}$$

Si sabemos que $n = \frac{c}{v}$, la ecuación (A.8) queda como

$$n_i \sin\theta_i = -n_t \sin\theta_t, \tag{A.9}$$

A la ultima ecuación se le llama *Ley de Snell para metamateriales* y solo se cumple solo si n_t es negativo, es decir, $n_t < 0$.

Apéndice B

Tabla de valores de los coeficientes de Fresnel para un metamaterial.

Los datos numéricos obtenidos de las ecuaciones de Fresnel en un metamaterial, para graficar los coeficientes de amplitud mostrados en el capítulo 3, se muestran en la siguiente tabla

θ_i	θ_t	$t_\perp$	$t_\parallel$	$t_\perp$	$r_\parallel$	θ_i	θ_t	$t_\perp$	$t_\parallel$	$t_\perp$	$r_\parallel$
0	0	-4	-4	-5	-5	46	28.65	-2.22	-8.11	-3.22	11.23
2	1.33	-3.98	-3.98	-4.96	4.96	48	29.69	-2.07	-9.5	-3.06	13.28
4	2.66	-3.98	-3.98	-4.96	4.96	50	30.71	-2	-11.63	-3	16.45
6	3.99	-3.96	-3.96	-4.96	4.96	52	31.69	-1.86	-17.57	-2.84	25.28
8	5.32	-3.96	-4.04	-4.96	5.04	54	32.63	-1.72	-29.25	-2.7	43
10	6.64	-3.92	-4.08	-4.92	5.12	56	33.55	-1.58	-50.65	-2.57	74.98
12	7.96	-3.82	-4.14	-4.8	5.21	58	34.42	-1.47	35	-2.46	-53.66
14	9.28	-3.8	-4.12	-4.8	5.17	60	35.26	-1.38	16.66	-2.38	-26
16	10.58	-3.76	-4.17	-4.76	5.26	62	36.05	-1.24	9.3	-2.22	-15
18	11.88	-3.72	-4.22	-4.72	5.31	64	36.81	-1.12	5.8	-2.11	-9.66
20	13.18	-3.52	-4.18	-4.5	5.51	66	37.51	-1.03	4.5	-2.02	-7.77
22	14.46	-3.49	-4.3	-4.47	5.46	68	38.17	-0.92	3.36	-1.92	-6.09
24	15.73	-3.43	-4.43	-4.43	5.68	70	38.78	-0.82	2.61	-1.82	-4.92
26	16.99	-3.31	-4.58	-4.29	5.87	72	39.34	-0.7	1.96	-1.69	-3.96
28	18.23	-3.25	-4.63	-4.25	5.94	74	39.85	-0.62	1.57	-1.61	-3.34
30	19.47	-3.14	-4.94	-4.12	6.37	76	40.3	-0.53	1.2	-1.53	-2.8
32	20.68	-3.01	-4.97	-4	6.47	78	40.69	-0.44	0.93	-1.43	-2.4
34	21.88	-2.89	-5.15	-3.87	6.75	80	41.03	-0.35	0.69	-1.35	-1.95
36	23.07	-2.77	-5.55	-3.75	7.34	82	41.31	-0.27	0.49	-1.26	-1.72
38	24.23	-2.7	-5.81	-3.68	7.74	84	41.53	-0.19	0.33	-1.19	-1.5
40	25.37	-2.59	-6.37	-3.57	8.5	86	41.68	-0.12	0.2	-1.11	-1.31
42	26.49	-2.46	-6.72	-3.42	9.09	88	41.77	-0.05	0.08	-1.05	-1.14
44	27.58	-2.34	-7.52	-3.32	10.26	90	41.81	0	0	-1	-1

Cuadro B.1: Coeficientes de amplitudes para un metamaterial

Índice de figuras

Bibliografía

[1] Veselago V. G. “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ,"*Sov. Phys. Usp. 10,* pp. 509-514, (1968).

[2] Weiglhofer W. S. and Lakhtakia A. “Introduction to complex mediums for optics and electromagnetics,"*SPIE Press*, (2003).

[3] Boardman A. D. “Electromagnetic surface modes,"*Wiley Interscience*, (1982).

[4] Griffiths J. D. “Introduction to electrodynamics,"*Prentice Hall*, (1998).

[5] Hecht E. and Zjac A. “Óptica,"*Fondo Educativo Interamericano S.A.*, (1974).

[6] Smith F. G. and Thompson J. H. “Óptica,"*Limusa*, (1979).

[7] Klein M. V. and Furtak T. E. “Optics,” *John Wiley and Songs Inc.*, (1986).

[8] Fowles G. R. “Introduction to modern optics,"*Dover*, (1997).

[9] Reitz J.R., Milford F.J., Christy R.W. “Fundamentos de la Teoría Electromagnética,” *Addison Wesley*, (1992).

[10] Arfken G. “Mathematical Methods for Physics,"*Mc Graw Hill*, (1975).

[11] Courant R. and Hilbert D. “Methods of mathematical physics. Volumen 1,"*Publishers, Inc., New York*, (1953).

[12] Grant R. Fowles, “Introduction to modern optics."*Dover Editorial* (1997).

[13] Hariharan P. “Basic Holography."*Academic Press Inc.* (1992).

[14] Weiglhofer W. S. and Lakhtakia A. “Introduction to complex mediums for optics and electromagnetics,"*SPIE Press*, (2003).

[15] Smith D. R., Schultz S., Markus P. and Soukoulis C. M. “Determination of effective permittivity and permeability of metamateriales from reflection and transmission coefficients,"*Phys. Rev. B. 65,* pp. 195-204, (2002).

[16] Veselago V. G. “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ,"*Sov. Phys. Usp. 10,* pp. 509-514, (1968).

[17] Barnes W. L. “Surface plasmon subwavelength optics,"*Nature, Vol. 424,* pp. 824-830, (2003).

[18] Raether H. “Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings,"*Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.*, (1988).

[19] Otto A. “Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection."*Z. Phys. 216,* p.398, (1968).