



**INAOE**

**Descripción dipolar de la  
interacción entre  
nanopartículas metálicas:  
Análisis de los efectos de  
resonancia**

por

**Armando Pérez Leija**

Tesis sometida como requisito parcial para  
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Julio 2007

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff

Dr. Javier Muñoz López

© INAOE 2007

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en  
partes de esta tesis



## Resumen

En los últimos años, las propiedades ópticas de nano-partículas (NPs) metálicas han sido motivo de gran interés para la comunidad científica, debido a sus aplicaciones tales como codificación óptica, biosensores y para crear nuevos dispositivos y materiales plasmónicos.

A frecuencias ópticas, los electrones libres de las partículas metálicas pueden ser colectivamente excitados dando lugar a la resonancia plasmónica que está fuertemente acoplada a la radiación electromagnética incidente. Bajo iluminación con luz blanca, las partículas plasmónicas resonantes (PPRs) se ven como fuentes puntuales de colores brillantes [1]. El espectro de la resonancia plasmónica de las NPs es muy sensible a su forma, tamaño, composición, constante dieléctrica del medio y a las interacciones entre las mismas.

Las señales Raman superficiales amplificadas (Surface-enhanced Raman Signals -SERS-) se generan a partir de las excitaciones plasmónicas superficiales de nano-estructuras, es decir, produciendo campos electromagnéticos concentrados en las superficies de las nano-estructuras. En el presente trabajo de tesis, nos enfocamos a describir la interacción dipolar entre dos nanopartículas al considerar sus parámetros como función del tiempo. Se establece una analogía mecánica, donde surge la ecuación diferencial de Mathieu para describir esta interacción dipolar. También se muestra que es posible establecer un índice de refracción efectivo dependiente del tiempo y que tiene la posibilidad de tomar valores negativos, lo cual ofrece la posibilidad de tener aplicaciones en el campo de los metamateriales.

---

## Acknowledgements

I am thankful to God for his guidance through the early years of chaos and confusion. I would like to thank Dr. Gabriel Martínez Niconoff and Dr. Javier Muñoz López, my supervisors, for their many suggestions and constant support during this work.

Professors Julio César Ramirez San Juan, Maximino Luis Arroyo Carrasco and Francisco Soto Eguibar expressed their interest in my work and supplied me with advices and suggestions, which gave me a better perspective on my own results.

I am grateful to Miss Martha Aurora Olmos y Flores she is a woman with a high human quality that redeems many people in the world.

I had the pleasure of meeting Sayde Alcántara Santiago she is wonderful woman, her support made this possible and for changing my life from worse to bad.

I should also mention that my graduate studies were supported by the INAOE.

Of course, I am grateful to my parents for their patience and *love*. Without them this work would never have come into existence (literally).

Finally, I wish to thank the following: Ludwig van Beethoven (and he knows why); *and* my brother and sisters (because they asked me to). My friends (for all the good and bad times we had together).

Tonantzintla, Puebla.

Armando Pérez Leija.

July 5, 2007.

---

*To Zyanya*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.1.1. Plasmones . . . . .	4
1.1.2. Aplicaciones plasmónicas y contracción de la longitud de onda	4
1.2. Objetivo . . . . .	10
<b>2. Fundamentos Teóricos:</b>	
<b>Radiación Electromagnética</b>	<b>12</b>
2.1. Introducción . . . . .	12
2.2. Radiación de fuentes localizadas oscilantes . . . . .	13
2.3. Radiación debida a un dipolo eléctrico . . . . .	17
2.4. Dipolo magnético . . . . .	21
<b>3. Esparcimiento de ondas EM con longitudes de onda largas</b>	<b>27</b>
3.1. Esparcimiento en pequeños espesores . . . . .	27
3.2. Esparcimiento debido una pequeña esfera dieléctrica . . . . .	30
3.3. Esparcimiento debido una pequeña esfera conductora . . . . .	33
<b>4. Descripción de plasmones dipolares</b>	<b>36</b>
4.1. Introducción . . . . .	36
4.2. Resonancia plasmónica superficial en una esfera metálica . . . . .	38
4.3. Descripción de plasmones dipolares . . . . .	40
4.4. Tiempo de vida de un dipolo lineal . . . . .	43
4.5. Expansión multipolar de la energía . . . . .	45

4.5.1. Interacción Dipolo-Dipolo . . . . .	47
<b>5. Analogía mecánica de la interacción entre nanopartículas</b>	<b>50</b>
5.1. Justificación . . . . .	50
5.2. Analogía mecánica de la interacción entre nanopartículas . . . . .	51
<b>6. Conclusiones Generales y trabajos futuros</b>	<b>63</b>
6.1. Conclusiones Generales . . . . .	63
6.2. Trabajos futuros . . . . .	64
<b>Apéndices</b>	<b>65</b>
<b>A. Ondas Esféricas como Solución a la Ecuación de Onda Escalar.</b>	<b>65</b>
<b>B. Esfera Conductora en un Campo Eléctrico Uniforme.</b>	<b>70</b>
<b>C. Esfera Dieléctrica en un Campo Eléctrico Uniforme</b>	<b>73</b>
<b>D. Expansión Multipolar</b>	<b>78</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La tecnología de los últimos años nos ha habilitado para hacer observaciones de fenómenos que no son directamente accesibles para los sentidos humanos. En la actualidad, hemos aceptado (en física moderna por ejemplo) que las pruebas científicas son verificadas midiendo indirectamente y que las leyes establecidas, a menudo, son fundamentadas mediante observaciones indirectas.

Hoy encontramos una fuerte tendencia hacia la nanociencia y la nanotecnología, la cual fue originada por los beneficios adquiridos de la miniaturización e integración de circuitos electrónicos. Conforme nos movemos hacia escalas más y más pequeñas, nuevos efectos físicos se hacen dominantes y pueden ser explotados en futuras aplicaciones tecnológicas. Los avances en la nanociencia (y nanotecnología) son posibles gracias a los avances en nuestra habilidad de medir, fabricar, manipular y comprender los fenómenos ocurrientes en estructuras con escala nanométrica.

Un objetivo central de la nano-óptica es extender el uso de las técnicas ópticas a escalas que están más allá del límite de la difracción<sup>1</sup>. Las aplicaciones tecnológicas que surgen al romper la barrera de la difracción pueden encontrarse en la microscopía de super resolución y la ultra-alta densidad de almacenamiento de datos.

En la naturaleza hallamos nanoestructuras que muestran efectos ópticos únicos, por ejemplo:

---

<sup>1</sup>Debido a que el límite de la difracción no nos permite enfocar luz en dimensiones menores que media longitud de onda (200nm), no era posible interactuar ópticamente con objetos a escalas nanométricas.

- Las estructuras difractivas usadas por insectos (mariposas) y otros animales para producir colores atractivos.
- Las estructuras que son utilizadas como película antireflejante en la retina de varios insectos.
- La formación de bandas prohibidas en piedras preciosas como los opalos.

En años recientes, el hombre ha creado estructuras nanofotónicas artificiales. La figura 1.1 muestra algunos ejemplos de estas nanoestructuras.

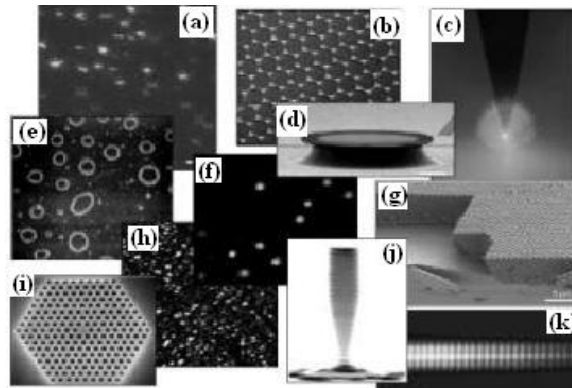


Figura 1.1: Ejemplos de nanoestructuras hechas por el hombre. (a) Moléculas fuertemente fluorescentes, (b) Nanoesferas fabricadas con litografía, (c) Fuente fotónica localizada, (d) Microdisco resonador, (e) Nano-estructuras semiconductoras, (f) Partículas plasmónicas, (g) Cristal fotónico, (h) Materiales nanocompositos, (i) Microcavidades láser, (j) Fuentes de un solo fotón, (k) Guía de onda plasmónica. [2]

Todas estas nanoestructuras están siendo creadas y usadas para proveer propiedades y fenómenos útiles en el desarrollo de nueva tecnología, necesaria para la ciencia moderna.

## 1.1. Antecedentes

En los siglos XVIII y XIX, el desarrollo de la teoría de la propagación y la naturaleza de la luz (polarización, difracción y esparcimiento) ayudó significativamente



al avance de la tecnología e instrumentación óptica. En ese tiempo se pensó que la resolución óptica no podía ser mejorada arbitrariamente y que la cota inferior era el límite de la difracción. Diferentes técnicas, tales como la microscopía confocal, fueron desarrolladas con el objetivo de superar este límite. Hoy en día, la microscopía de fluorescencia confocal es una tecnología clave en la investigación biomédica. También se han sintetizado moléculas altamente fluorescentes que pueden ser unidas a entidades biológicas específicas tales como lípidos, fibras musculares y organelos celulares. Estas *etiquetas* y el uso de diferentes tintes basados en la fluorescencia permite visualizar el interior de las células y estudiar reacciones bioquímicas. La invención del láser pulsado impulsó el campo de la óptica no-lineal y propició la creación de la microscopía multifotónica, la cual está lentamente reemplazando a la microscopía de fluorescencia confocal lineal. La generación de segundo y tercer armónico y la microscopía de dispersión Raman anti-Stokes coherente son otros ejemplos de técnicas para visualizar procesos con una alta resolución espacial.

Un camino diferente para impulsar la resolución espacial de imágenes ópticas es provisto por la microscopía óptica de campo cercano. En principio, esta técnica está restringida a observar las características cerca de la superficie de la muestra y provee información similar a la microscopía de fuerza atómica. Un reto de la microscopía de campo cercano, es el acoplamiento de la fuente (o del detector) y la muestra a observar. Este obstáculo no está presente en la microscopía estándar, donde la luz de la fuente (por ejemplo, luz láser) no se ve afectada por las propiedades de la muestra.

En el transcurso del tiempo se han propuesto muchas técnicas para observar objetos con dimensiones menores que las de una longitud de onda, tales como: el microscopio de túnele, microscopio de reflexión de campo cercano, microscopios basados en interacciones electrónicas localizadas y microscopios basados en el esparcimiento localizado de luz. Todas estas técnicas proveen un flujo de fotones confinado entre las puntas de prueba y la muestra. Además, para poder detectar el flujo de fotones es necesario tener una intensidad mínima. Estos dos requerimientos crean un compromiso, entre el confinamiento de la luz y el rendimiento del procesamiento de este flujo, que tiene que ser satisfecho.

### 1.1.1. Plasmones

En 1980, científicos confirmaron experimentalmente que luz incidente en una interfaz dieléctrico-metal, bajo las condiciones correctas, puede inducir interacciones resonantes entre las ondas de luz y los electrones libres en la superficie del metal. En otras palabras, las oscilaciones de los electrones en la superficie se acoplan al campo electromagnético incidente [3]. El resultado es la generación de *Plasmones superficiales*: ondas de densidad electrónica que se propagan a lo largo de la interfaz. Una analogía a este fenómeno son las ondulaciones que se propagan a través de un lago después de arrojarle una piedra.

### 1.1.2. Aplicaciones plasmónicas y contracción de la longitud de onda

En la década pasada se encontró que en una interfaz dieléctrico-metal se pueden generar plasmones superficiales con la misma frecuencia del campo incidente pero con una longitud de onda más corta [3]. Este fenómeno podría ayudar a los plasmones a viajar a través de nanoalambres que conecten componentes electrónicos en un circuito integrado. En este sentido, los plasmones pueden ayudar a los diseñadores a mejorar los dispositivos electrónicos. En última instancia es posible emplear componentes plasmónicos en una amplia variedad de instrumentos y usarlos para ampliar la resolución de los microscopios, la eficiencia de los diodos emisores de luz (LED's) y la sensibilidad de los detectores químicos y biológicos. También se han considerado aplicaciones medicas. Por ejemplo, el diseño nanopartículas cuya resonancia plasmónica es usada para eliminar tejido canceroso.

La investigación formal sobre plasmones empezó en 1980 mediante los estudios químicos que usaron espectroscopia Raman, la cual involucra observaciones de la luz láser fuera de una muestra para determinar su estructura a través de vibraciones moleculares. En 1989 el Dr. Thomas Ebbesen del Instituto de investigaciones Japones NEC, encontró que cuando iluminaba una película de oro con millones de agujeros microscópicos, de alguna manera la hoja transmitía más luz de la que se esperaba [4]. Nueve años después Ebbesen y sus colegas concluyeron que los

plasmones superficiales sobre la película intensificaban la transmisión de energía electromagnética.

El incremento en el poder de procesamiento de las computadoras nos ha habilitado para simular los efectos electromagnéticos generados por los plasmones. Los métodos desarrollados para construir nanoestructuras han hecho posible construir y probar dispositivos plasmónicos. Con esto se ha acelerado el progreso en el campo de los plasmones. A primera vista, el uso de nanoestructuras metálicas para transmitir señales de luz no parece práctico [5], debido a que en los procesos ópticos los metales tienen altas pérdidas. Los electrones oscilantes en un campo electromagnético sufren colisiones con los átomos de las redes cristalinas vecinas, disipando así la energía del campo. Pero las pérdidas plasmónicas son menores en la interfaz de una película metálica y un dieléctrico que dentro del cuerpo del metal. Ésto se debe a que el campo en un medio no conductor, donde no hay electrones libres que oscilen, no hay disipación de energía debida a colisiones. Naturalmente esta propiedad confina a los plasmones a las superficies metálicas; en una configuración metal-dieléctrico-metal, por ejemplo, los plasmones superficiales se propagan en un delgado plano en la interfaz, figura 1.2. Debido a que las estructuras plasmónicas planas actúan como una guía de onda direccionando a las ondas electromagnéticas sobre la frontera de metal-dieléctrico, éstas podrían ser útiles para encaminar señales en un circuito integrado. Aunque una señal óptica sufre más pérdidas en un metal que en un dieléctrico un plasmón puede viajar varios centímetros antes de desaparecer. La longitud de propagación puede ser maximizada si la guía emplea un modo antisimétrico, iluminando arriba y abajo del metal, el cual empuja una porción de la energía electromagnética disminuyendo así las pérdidas. Esto ocurre porque los campos electromagnéticos en la superficie y en la base de la película metálica interactúan entre sí, las frecuencias y las longitudes de onda de los plasmones puede ser ajustada cambiando el grosor de la película.

Para generar plasmones que puedan propagarse en nanoalambres, los investigadores han explorado guías de onda con geometrías más complejas que contraen la longitud de onda de las señales al introducirlas a lugares más angostos. En la década de los 90, Hary A. Atwater del Caltech y un equipo dirigido por Joachim Krenn de la Universidad de Graz en Australia produjeron las primeras guías de onda

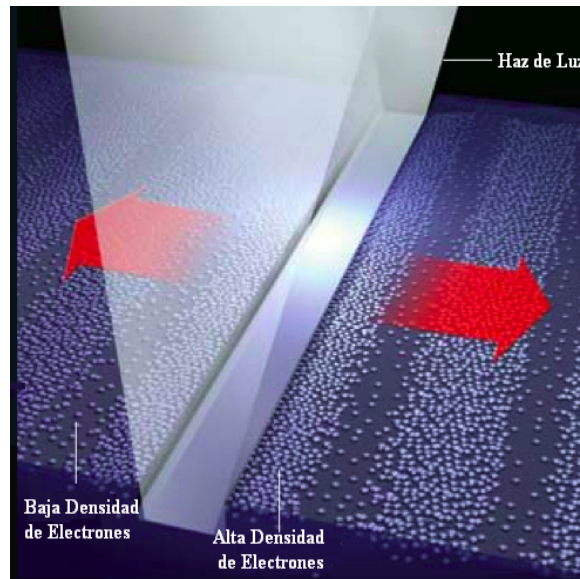


Figura 1.2: Guía de onda plana: los plasmones siempre fluyen a lo largo de la frontera entre un metal y un dieléctrico. [5]

plasmónicas superficiales de *sublongitudes de onda* [6]. Estos dos equipos también produjeron cadenas de esferas de oro, cada esfera con un diámetro menor a 100nm. En estas cadenas al ser iluminadas con un haz de luz visible de longitud de onda de 570nm (luz verde) se produjeron plasmones que se propagaron a lo largo de las cadenas. En estos experimentos se encontró que los plasmones se propagaban una distancia que iba desde unos cientos de nanómetros hasta unas cuantas micras. Así, estas guías de onda pueden ser útiles para hacer conexiones muy cortas. Otro dispositivo creado por estos dos grupos es la *guía de onda de ranura*, figura 1.3, donde un núcleo dieléctrico es envuelto por metal. En este dispositivo al cambiar el grosor del núcleo se cambia la longitud de onda de los plasmones. Además con esta guía se logró propagar a los plasmones decenas de micras. Hideki Miyazaki del Instituto de Ciencias de Materiales de Japón logró introducir luz roja (651nm) en una guía de onda plasmónica de ranura que tenía solo 3 nm de altura y 55 nm de ancho. Hideki encontró que la longitud de onda del plasmón que se propagaba a través de esta guía tenía una longitud de onda de 51 nm, alrededor del 8 por ciento de la longitud de onda en el espacio libre [7].

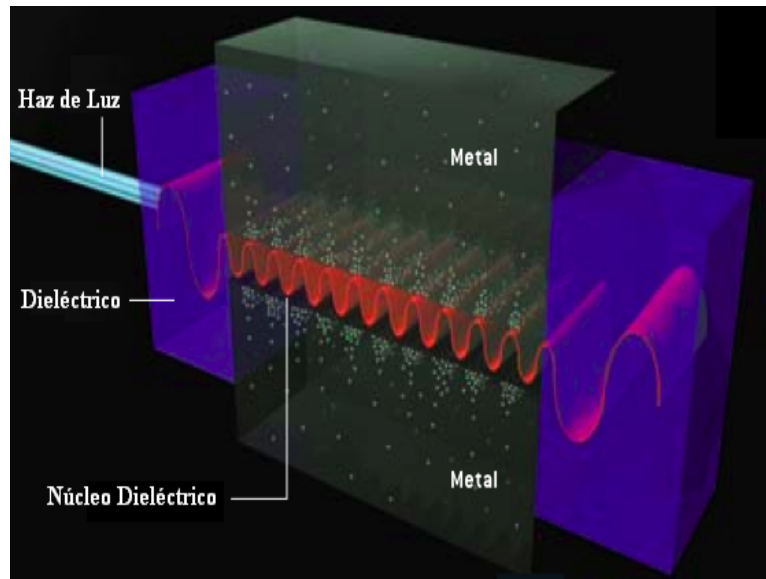


Figura 1.3: Guía de onda de ranura. [5]

Por lo tanto, estas guías de onda pueden generar señales en el rango de las longitudes de onda de los rayos  $X$  (entre los 10 y los 100nm) a partir de excitar al material con luz visible. La longitud de onda puede ser reducida por más de un factor de 10 relativo a su valor en el espacio libre, manteniendo la misma frecuencia de la señal con que se excito<sup>2</sup>. Esta habilidad para contraer la longitud de onda abre el camino a las nanoestructuras plasmónicas para reemplazar a los circuitos puramente electrónicos. Se puede usar la litografía para producir dispositivos plasmónicos con tiras de dieléctricos muy angostas. Estos arreglos podrían guiar las ondas de cargas positivas y negativas sobre la superficie del metal. Las densidades de carga alternas se podrían utilizar de forma similar a las señales de corriente alterna que viajan a lo largo de alambres ordinarios. Debido a que la frecuencia de las señales ópticas es mucho más alta que la de una señal eléctrica, los circuitos plasmónicos serían capaces de transportar muchos más datos. Por otra parte, debido a que las cargas eléctricas con diferente signo no viajan hacia extremos opuestos del circuito plasmónico (ya que los electrones y las cargas positivas se agrupan separadas más o menos por la

<sup>2</sup>La relación fundamental  $v = \lambda\nu$  se preserva porque las ondas electromagnéticas son lentas cuando viajan sobre la interfaz.

misma distancia) el dispositivo no está sujeto a resistencia y efectos capacitivos que limitan la capacidad de transportar datos de los circuitos integrados en los que se usan alambres para conectar sus componentes.

Harry A. Atwater y su grupo en el Caltech han desarrollado un dispositivo plasmónico con tres terminales muy similar a un transistor al que llamaron *interruptor plasmonster*, el cual se proponen mejorar para obtener un dispositivo que sea el núcleo de un sistema procesador de señales ultrarápido que revolucione a la electrónica [6].

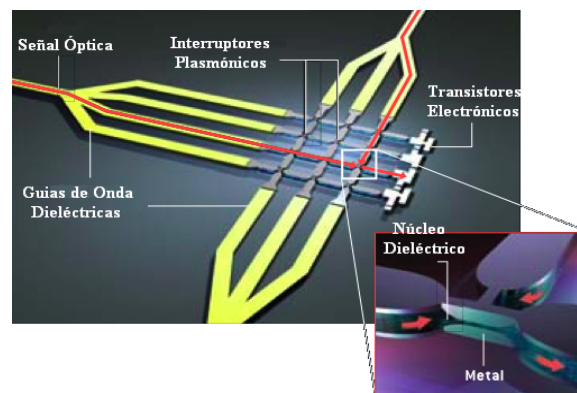


Figura 1.4: Interruptor Plasmonster esta compuesto de guías de onda de ranura que miden 100 nm en sus partes más anchas y 20 nm en las intersecciones. [5]

## Aplicaciones de los plasmones superficiales en nanoesferas

Los usos potenciales de los dispositivos plasmónicos van más allá de las aplicaciones en electrónica. Naomi Halas y Peter Nordlander de la Universidad Rice, han construido nanoesferas de silicio con 100 nm de diámetro, las cuales cubrieron con una delgada capa de oro de 10 nm de grosor. Con la exposición de estas nanoesferas a luz se generan oscilaciones electrónicas en la capa de oro. Variando el tamaño de la partícula y el grosor de la capa de oro se puede cambiar la longitud de onda a la cual resonantemente absorbe energía. En esta forma, se pueden construir nanoesferas con el objetivo de absorber selectivamente longitudes de onda tan cortas como unos cuantos centenas de nanómetros (la orilla del azul en

el espectro visible) o tan grandes como 10 micras (infrarojo cercano) [8].

Este fenómeno ha colocado a las nanoesferas como una prometedora herramienta en el tratamiento del cáncer. En el año 2004, Halas junto con Jennifer West inyectaron nanoesferas en el torrente sanguíneo de un ratón con tumores cancerosos y encontraron que las partículas no son tóxicas. Debido a que la sangre fluye más rápido hacia el tumor del ratón, las partículas tendieron a envolver al tejido canceroso del roedor. Además, las nanoesferas fueron embebidas por los anticuerpos y estos las transportaron hasta las células enfermas.

Ya que los tejidos biológicos del ser humano y los animales son transparentes a la radiación en infrarrojo cercano, cuando Halas y West dirigieron un láser en el infrarrojo cercano hacia el tumor, la absorción de energía de las nanoesferas aumentó la temperatura de las células cancerosas de 37 a 45 grados Celsius. El calentamiento fototérmico eliminó a las células enfermas y a las sanas las dejó ilesas. Todos los signos de cáncer desaparecieron del ratón en un periodo de 10 días.

Algunos científicos están trabajando en un dispositivo plasmónico análogo a un láser. Mark Stockman de la Universidad de Georgia y David Bergman de la Universidad de Tel Aviv, describieron físicamente tal dispositivo, al cual ellos llamaron SPASER (Surface Plasmon Amplification of Stimulated Emission of Radiation) [9]. Aunque hasta el momento el SPASER solo existe en la teoría, los investigadores han sugerido algunas formas para fabricarlo usando puntos cuánticos semiconductores y nanopartículas metálicas. En este método propuesto la energía radiada por los puntos cuánticos es transformada en plasmones, los cuales se amplificarán en un resonador plasmónico. Debido a que los plasmones generados por un SPASER serán mucho más localizados que el haz de un láser convencional, este dispositivo podrá operar a muy poca potencia y excitará selectivamente objetos muy pequeños. Un SPASER podría hacer más sensitiva a la espectroscopía y marcar el camino para hacer detectores de materiales peligrosos ya que con éste se podrían identificar diminutas cantidades de elementos químicos o algunos virus.

En el transcurso de la historia, el hombre ha encontrado diversas aplicaciones al observar y manipular objetos con dimensiones menores que la longitud de onda. Sin embargo, en los trabajos reportados hasta el momento, poco se ha dicho sobre un modelo que explique y reproduzca los resultados y observaciones experimentales

a esas escalas. Por consiguiente, es importante estudiar, comprender y proponer un modelo adecuado para las interacciones entre nanopartículas, con el fin de mejorar y crear tecnología.

## 1.2. Objetivo

Recientemente y debido a las aplicaciones descritas anteriormente, muchos esfuerzos se han orientado a la descripción de los efectos de resonancia y fluorescencia entre nanopartículas metálicas. Estas interacciones han sido reportadas en muchas configuraciones experimentales [10] [1]. Sin embargo, el modelo teórico para describirlas no está bien comprendido. Uno de los modelos que describe la interacción entre nanopartículas se basa en la generación de una densidad de ondas superficiales conocida como *plasmón dipolar*, donde el promedio temporal de dicha densidad genera un momento dipolar.

El objetivo del presente trabajo es describir la interacción entre dos nanopartículas metálicas (NPM's), considerando sus parámetros como funciones que dependen del tiempo, para dos estados de polarización. Se parte del modelo teórico de *Plasmón Dipolar* y se propone un modelo mecánico (sistema masa-resorte) que facilita la visualización y el entendimiento de las interacciones entre las nanopartículas. Además, se muestra que en la configuración correspondiente a la polarización tipo *S* se obtiene una ecuación diferencial tipo Mathieu, cuya solución nos conduce a expresiones matemáticas para un índice de refracción efectivo dependiente del tiempo y que en algunos instantes toma valores negativos.

Al predecir que las nanopartículas pueden tener, durante ciertos períodos de tiempo, un índice de refracción negativo se hace posible la síntesis de metamateriales. Estos podrían usarse, por ejemplo, en la fabricación de lentes planas que permitan enfocar luz en áreas muy pequeñas y poder tomar imágenes de objetos que son más pequeños que la longitud de onda de la luz visible, incluyendo moléculas tales como el ADN. Además, se haría posible el desarrollo de la *nanofotolitografía* y nuevos componentes electrónicos que usen luz en lugar de corrientes eléctricas para transmi-



tir señales y procesar información, dando por resultado comunicaciones más rápidas.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera, en el capítulo 1 se presenta una breve introducción y se describen algunas aplicaciones tecnológicas de los plasmones superficiales reportadas recientemente. En el capítulo 2 se presenta un estudio electromagnético que muestra el comportamiento de los campos radiados por dipolos puntuales, en el capítulo 3 se realiza una descripción del esparcimiento debido a dipolos inducidos en pequeños esparsores. Además, en el capítulo 4 se efectúa el desarrollo teórico descrito en el objetivo y se dan las conclusiones de este trabajo. Por último, en el capítulo 6 se proponen trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos: Radiación Electromagnética

### 2.1. Introducción

Entender el mecanismo de interacción entre el campo electromagnético y las nano-partículas es fundamental para la interpretación de fenómenos ocurrentes en la vecindad, en puntos intermedios y puntos alejados de las nano-partículas. La interacción electromagnética, es también el origen de la absorción y emisión de radiación en estos sistemas. Además, el estudio de la luz absorbida y emitida provee una fuente esencial de información acerca de la estructura y dinámica de los sistemas en cuestión. Finalmente, también es posible usar fotones interactuando con los átomos constituyentes de las nano-partículas, pero nos enfocaremos a una descripción clásica debido a su cercanía con nuestra percepción.

Todo esto nos permite usar la teoría electromagnética clásica para describir los fenómenos de radiación y esparcimiento que se producen durante la interacción del campo electromagnético con un sistemas que son pequeños comparados con la longitud de onda. La importancia de tales fenómenos reside en su aparición constante en los procesos nano-ópticos.

## 2.2. Radiación de fuentes localizadas oscilantes

Para un sistema de cargas y corrientes variantes en el tiempo podemos hacer un análisis de Fourier con dependencia temporal. Por lo tanto, no perdemos generalidad si consideramos los potenciales, los campos y la radiación de un sistema de cargas y corrientes localizadas que varían en forma senoidal en el tiempo:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{exp}(-i\omega t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{exp}(-i\omega t) \quad (2.1)$$

También debemos asumir que los potenciales y los campos tienen la misma dependencia temporal y que las fuentes están localizadas en el vacío.

El potencial vectorial bajo la norma de Lorenz es [12]

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right) dt', \quad (2.2)$$

en donde no hemos considerado superficies frontera. La función Delta de Dirac asegura el comportamiento causal de los campos.

La integral de la ecuación (2.2) se puede resolver haciendo uso de las propiedades de la función Delta de Dirac

$$\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0),$$

con esto

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{exp}(-i\omega t) \mathbf{exp}(i\omega \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}) d^3x',$$

pero como se asume la misma dependencia temporal, es decir,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{exp}(-i\omega t),$$

finalmente obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{exp}(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d^3x', \quad (2.3)$$

donde  $k = \frac{\omega}{c}$  es el número de onda. El campo magnético está dado por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.4)$$

mientras que afuera de las fuentes podemos usar la ecuación de Ampere-Maxwell (sin fuentes, es decir, sin corrientes) para calcular el campo eléctrico

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t})}{\partial t} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}.$$

Si se usa  $z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , que es la impedancia del espacio libre, se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{iz_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}. \quad (2.5)$$

Dada una densidad de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ , los campos pueden ser determinados calculando la integral (2.3). Ahora deseamos establecer propiedades simples pero generales de los campos en el límite en que las fuentes de corriente son confinadas a regiones muy pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación incidente. Si las dimensiones de las fuentes son del orden  $\mathbf{d}$ , la longitud de onda es  $\lambda = 2\pi c/\omega$  y si  $d \ll \lambda$ , entonces tenemos tres regiones de interés

- La zona cercana (estática)  $\mathbf{d} \ll r \ll \lambda$
- La zona intermedia (inducción)  $\mathbf{d} \ll r \sim \lambda$
- La zona lejana (radiación)  $\mathbf{d} \ll \lambda \ll r$

donde  $r = |\mathbf{x}|$  es el punto de observación.

### Zona cercana

En la zona cercana, los campos tienen el carácter de los campos estáticos con componentes radiales y variación con la distancia que depende en detalle de las propiedades geométricas de las fuentes. Por otro lado, en la zona lejana los campos son transversales al radio vector ( $\mathbf{k}$ ) y decaen como  $r^{-1}$ , típico de los campos de radiación.

Para la zona cercana donde  $r \ll \lambda$  (ó  $kr \ll 1$ ) la exponencial en (2.3) puede ser reemplazada por la unidad. Entonces el potencial toma la forma estática

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (2.6)$$

El inverso de la distancia puede ser expandido de la siguiente forma

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi),$$

donde  $Y_{lm}^*(\theta', \phi')$  y  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos y  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) es el menor (mayor) de las  $r$ .

Entonces en el límite cuando  $kr \rightarrow 0$

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') d^3 x'. \quad (2.7)$$

Tenemos que los campos cercanos son cuasi-estacionarios espacialmente y que oscilan armónicamente como  $\mathbf{exp}(-i\omega t)$  (si se considera un campo con esa variación temporal de lo contrario, los campos tienen carácter estático).

## Zona lejana

Para la zona lejana ( $kr \gg 1$  ó  $2\pi r \gg \lambda$ ), la exponencial oscila rápidamente y determina el comportamiento del potencial vectorial. Para ver qué sucede con los campos en esta región consideremos la figura (2.1), en donde  $\mathbf{x}$  ubica el punto de observación y  $\mathbf{x}'$  a las fuentes localizadas. Se tiene que la proyección del vector  $\mathbf{x}'$  sobre el  $\mathbf{x}$  es  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal en la dirección de  $\mathbf{x}$ , y como el punto de observación  $\mathbf{x}$  es mucho mayor que  $\mathbf{x}'$ , la distancia entre las fuentes y el punto de observación se puede aproximar mediante la expresión

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}', \quad (2.8)$$

donde  $r = |\mathbf{x}|$ . Además, cuando  $kr \rightarrow \infty$ , el inverso de la distancia en (2.3) puede ser reemplazado por " $r$ ". Por lo tanto, el potencial vectorial en esta zona queda como

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \mathbf{exp}(-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') d^3 x'. \quad (2.9)$$

Esto demuestra que en la zona lejana el potencial vectorial se comporta como una onda esférica con un coeficiente con dependencia angular. Es apropiado expandir la ecuación (2.9) en potencias de " $k$ ", haciendo uso de la expresión

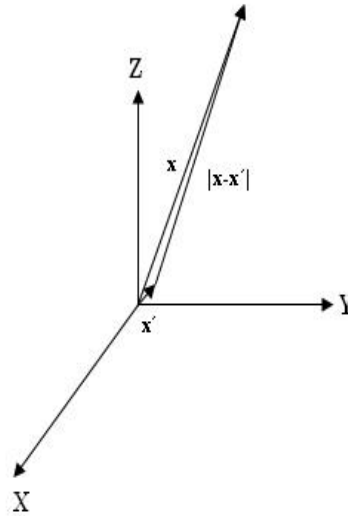


Figura 2.1: Imagen auxiliar para hacer evidente la aproximación (2.8)

$$\exp(-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^n,$$

se obtiene

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^n d^3x'. \quad (2.10)$$

La magnitud del n-ésimo término está dada por

$$\frac{1}{n!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^n d^3x' \quad (2.11)$$

Ya que el orden de magnitud de  $\mathbf{x}'$  es " $d$ " y " $kd$ " es pequeño comparado con uno, los términos de la expansión de (2.10) decaen conforme  $n$  aumenta. Consecuentemente la radiación emitida por las fuentes será generada principalmente por los primeros términos de la expansión (2.10).

### Zona intermedia

En la zona intermedia (zona de inducción) todas las potencias de " $kr$ " deben considerarse. En la siguiente sección se obtiene el potencia general válido para las

tres zonas.

## 2.3. Radiación debida a un dipolo eléctrico

Si sólo tomamos el primer término en la ecuación (2.10), es decir, para  $n=0$  el potencial queda de la siguiente manera

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' \quad (2.12)$$

La integral en (2.12) puede ser escrita en términos más familiares, integrando por partes tomando  $u = \mathbf{J}(\mathbf{x}')$  y  $dv = d^3x'$

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') - \int \mathbf{x}' (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')) d^3x' = - \int \mathbf{x}' (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')) d^3x', \quad (2.13)$$

el término  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')$  es cero por tratarse de corrientes localizadas. Ahora de la ecuación de continuidad se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') \mathbf{exp}(-i\omega t) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t)}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho(\mathbf{x}') \mathbf{exp}(-i\omega t))}{\partial t} = i\omega \rho(\mathbf{x}') \mathbf{exp}(-i\omega t)$$

Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = i\omega \rho(\mathbf{x}')$$

Así, la ecuación (2.13) se transforma en

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' = -i\omega \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x' \quad (2.14)$$

Por lo tanto, el potencial vectorial es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = - \frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \mathbf{p} \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \quad (2.15)$$

donde

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3x' \quad (2.16)$$

es el *momento dipolar eléctrico*, el cual es perpendicular al potencial vectorial  $\mathbf{A}$ .

Los campos dipolares eléctrico y magnético pueden ser calculados de las ecuaciones (2.4) y (2.5). Primero se calcula el campo magnético. Sustituyendo (2.15) en (2.4) se obtiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\frac{-i\omega}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \mathbf{p} \right)$$

Haciendo uso de la identidad vectorial

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{F}) = \Phi \nabla \times \mathbf{F} + \nabla(\Phi) \times \mathbf{F}$$

y ya que  $\nabla \times \mathbf{p} = 0$ , se tiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{-i\omega}{4\pi} \left( \nabla \left( \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \right) \times \mathbf{p} \right)$$

En esta última ecuación se tiene que calcular el gradiente de una onda esférica, y como el gradiente se obtiene la dirección de máximo cambio, es decir, la dirección normal a la esfera, entonces se puede utilizar la siguiente identidad

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \right) = \left| \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \right) \right| |\mathbf{n}| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$$

donde  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  es el coseno del ángulo formado por  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{r}$  y  $\frac{\partial}{\partial n}$  denota la derivada normal. Nótese que la derivada puede ser efectuada con respecto a  $r$ , debido a que la normal y  $r$  tienen la misma dirección por lo que  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = 1$ . Así

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \right) = ik \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right).$$

Por lo tanto el campo magnético debido a un dipolo eléctrico es

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (2.17)$$

Por otra parte, sustituyendo (2.17) en (2.5) se obtiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{ck^2}{4\pi} \left( \frac{iz_0}{k} \right) \nabla \times \left( (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \left[ 1 - \frac{1}{ikr} \right] \right).$$

Realizando las operaciones indicadas obtenemos que el campo eléctrico es de la siguiente forma



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ k^2 [(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n}] \frac{\exp(ikr)}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \exp(ikr) \right]. \quad (2.18)$$

Se observa que el campo magnético es transversal al vector de propagación a cualquier distancia, pero el campo eléctrico tiene componentes paralelas y perpendiculares a  $\mathbf{n}$ .

Si se considera que  $r$  es muy grande (zona de radiación), los campos toman la forma límite

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = z_0 \mathbf{H} \times \mathbf{n} \quad (2.20)$$

Se muestra así el comportamiento típico de los campos de radiación (campos transversales al radio vector  $\mathbf{k}$  que decaen como  $r^{-1}$ ).

Recordando que  $\mathbf{n}$  define la dirección de observación del campo,  $\mathbf{H}$  es máxima cuando  $\mathbf{n} \perp \mathbf{p}$  y mínimo cuando  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{p}$ , de esta forma la radiación emerge principalmente en la dirección perpendicular al momento dipolar como puede deducirse de (2.19).

En la zona cercana ( $kr \ll 1$  ó  $2\pi r \ll \lambda$ ) el término  $\frac{1}{ikr} = \frac{\lambda}{i2\pi r} \rightarrow \infty$ , en la ecuación (2.17); así que el campo magnético se aproxima a

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{i\omega}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{1}{r^2}. \quad (2.21)$$

Además en esta zona, el término  $\frac{1}{r^3}$  es el dominante en la ecuación (2.18), por lo que es claro que el campo eléctrico se aproxima a

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \frac{1}{r^3}. \quad (2.22)$$

El campo magnético por  $z_0$  es un factor  $kr$  menor que el campo eléctrico en la región donde  $kr \ll 1$ . Entonces en la naturaleza encontramos que en la zona cercana los

campos eléctricos son dominantes. El campo magnético se hace cero en el límite estático ( $k \rightarrow 0$ ) y por lo tanto en este límite la zona cercana se extiende a infinito.

Para calcular la potencia temporal radiada por unidad de ángulo sólido, debida a un momento dipolar oscilante, usaremos el teorema de Poynting complejo

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (2.23)$$

Un diferencial de la potencia es calculado de la expresión

$$dP = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da,$$

y como en términos de ángulo sólido un diferencial de área se define como

$$da = r^2 d\Omega,$$

el diferencial de potencia toma la forma

$$dP = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega,$$

por consiguiente

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \text{Re}(r^2 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)), \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  están dados por (2.19) y (2.20).

Sustituyendo (2.19) y (2.20) se puede expresar (2.24) de la siguiente manera

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 z_0}{32\pi^2} k^4 |(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n}|^2. \quad (2.25)$$

El estado de polarización de la radiación está dada por el vector que se encuentra dentro de valor absoluto. Si las componentes de  $\mathbf{p}$ , todas, tienen la misma fase, la distribución angular es el patrón típico de un dipolo

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 z_0}{32\pi^2} k^4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta, \quad (2.26)$$

donde el ángulo  $\theta$  es medido desde la dirección de  $\mathbf{p}$ . La potencia total radiada independiente de las fases relativas de  $\mathbf{p}$  es

$$P = \frac{c^2 z_0 k^4}{8\pi} |\mathbf{p}|^2. \quad (2.27)$$

## 2.4. Dipolo magnético

En esta sección se obtienen las expresiones para los campos ( $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ ) producidos por un dipolo magnético y se verá que su contribución es pequeña comparada con los campos producidos por un dipolo eléctrico. Así que esta sección solo se da por razones de completos y debe tomarse en cuenta solo cuando los campos producidos por el dipolo magnético no sean despreciables.

Se sabe que un potencial vectorial con dependencia senoidal es de la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (2.28)$$

Del *apéndice A* se tiene que la función de Green

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

puede ser expandida de la forma

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_{<}) h_l^1(kr_{>}) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.29)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.28) obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 ik \sum_{l,m} h_l^1(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \phi') d^3x'. \quad (2.30)$$

Esta ecuación es válida para todas las zonas (cercana, lejana e intermedia). Calculemos el potencial para  $l = 0$  y  $l = 1$ .

- Para  $l = 0$  se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 ik h_0^1(kr) Y_{00}(\theta, \phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') j_0(kr') Y_{00}^*(\theta', \phi') d^3 x', \quad (2.31)$$

donde [12]

$$h_0^1 = \frac{\exp(ikr)}{k} \left( \frac{1}{ik} \right),$$

$$j_0(kr') = 1,$$

$$Y_{00}(\theta, \phi) = Y_{00}^*(\theta', \phi') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 \exp(ikr)}{4\pi r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x', \quad (2.32)$$

se observa que es la misma expresión que (2.12).

- Para  $l = 1$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 ik h_1^1(kr) \sum_{m=-1}^1 Y_{1,m}(\theta, \phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') j_1(kr') Y_{1,m}^*(\theta', \phi') d^3 x', \quad (2.33)$$

pero [12]

$$h_1^1 = \exp(ikr) \left( -\frac{1}{kr} - \frac{i}{(kr)^2} \right)$$

$$j_1(kr') = \frac{(kr')}{3}$$

por lo que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 ik \exp(ikr) \left[ -\frac{1}{kr} - \frac{i}{(kr)^2} \right] \left\{ Y_{1,-1}(\theta, \phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{(kr')}{3} Y_{1,-1}^*(\theta', \phi') d^3 x' + \right.$$

$$\left. Y_{1,0}(\theta, \phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{(kr')}{3} Y_{1,0}^*(\theta', \phi') d^3 x' + Y_{1,1}(\theta, \phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{(kr')}{3} Y_{1,1}^*(\theta', \phi') d^3 x' \right\}$$

de [12] se sabe que

$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta Y_{1,0}^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1,1}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \exp(i\phi)$$

$$Y_{1,-1}(\theta, \phi) = (-1)^{-1} Y_{1,1}^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \exp(-i\phi)$$

sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0 i k^2 \exp(ikr) \left[ -\frac{1}{kr} - \frac{i}{(kr)^2} \right] & \left\{ \frac{1}{8\pi} \sin \theta \exp(-i\phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' \sin \theta' \exp(i\phi) d^3 x' + \right. \\ & \left. \frac{1}{4\pi} \cos \theta \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' \cos \theta' d^3 x' + \frac{1}{8\pi} \sin \theta \exp(i\phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' \sin \theta' \exp(-i\phi) d^3 x' \right\} \end{aligned}$$

en la primera y tercera integral de esta última expresión está implícita la integral

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\phi) d\phi = 0$$

ó

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i\phi) d\phi = 0,$$

por lo que esas integrales valen cero, entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} - ik \right] \frac{\exp(ikr)}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' \cos \theta \cos \theta' d^3 x'.$$

Usando la identidad trigonométrica  $\cos(\theta \pm \theta') = \cos \theta \cos \theta' \mp \sin \theta \sin \theta'$  y recordando que  $\theta$  ( $\theta'$ ) es el ángulo que forma  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x}'$ ) con el eje  $\mathbf{z}$ ; además si se define  $\gamma = (\theta \pm \theta')$  como el ángulo entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$ , se escribe el potencial como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' [\cos \gamma \pm \sin \theta \sin \theta'] d^3 x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \left\{ \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' \cos \gamma d^3 x' \pm \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' \sin \theta \sin \theta' d^3 x' \right\} \end{aligned}$$

todo el tiempo se asume que el tamaño de las fuentes es muy pequeño, por consiguiente, el término  $\sin \theta' \approx 0$  y así podemos despreciar dicha integral, obteniendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' \cos \gamma d^3 x'$$

Además, si  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{x}$ , se puede escribir

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') = r' \cos \gamma,$$

con lo que se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') d^3 x'. \quad (2.34)$$

Usando la identidad vectorial,  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}$ , se encuentra

$$(\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\mathbf{x}'$$

ó

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\mathbf{x}' + (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n},$$

entonces

$$2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\mathbf{x}' + (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n},$$

con lo que se escribe el término  $((\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J})$  como

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J} = \frac{1}{2} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\mathbf{x}'] + \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n}. \quad (2.35)$$

Sustituyendo (2.35) en (2.34) se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{1}{2} \left\{ \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\mathbf{x}'] d^3 x' + \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n} d^3 x' \right\}. \quad (2.36)$$

Se observa que se ha escrito el integrando de (2.34) como la suma de una parte simétrica y una antisimétrica en  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{x}'$ . En el segundo término, es decir, en la parte antisimétrica podemos reconocer a la magnetización debida a la corriente  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}), \quad (2.37)$$

entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \int (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) d^3x'. \quad (2.38)$$

El momento dipolar magnético se define como

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} d^3x' = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) d^3x', \quad (2.39)$$

por lo tanto

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right) \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r}. \quad (2.40)$$

Cabe notar que el potencial vectorial (2.40) es proporcional al campo magnético obtenido en la sección 2.2 para un dipolo eléctrico (ecuación (2.17)), esto significa que el campo magnético será igual al campo eléctrico debido a un dipolo multiplicado por  $(1/z_0)$  y con la sustitución  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}/c$ , es decir

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}] \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \mathbf{exp}(ikr) \right\}. \quad (2.41)$$

Similarmente, el campo eléctrico producido por una fuente dipolar magnética es igual al campo magnético debido a un dipolo eléctrico por  $-z_0$  con la sustitución ( $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}/c$ )

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{z_0}{4\pi} k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (2.42)$$

Todos los argumentos concernientes al comportamiento de los campos en la zona cercana y lejana son los mismos que para el dipolo eléctrico, con los intercambios,

$$\mathbf{E} \rightarrow z_0 \mathbf{H},$$

$$z_0 \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$$

y

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}/c.$$

Con esto, los campos para la zona lejana son

$$\mathbf{E} = -\frac{z_0 c k^2}{4\pi} \left( \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{m}}{c} \right) \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{r} \quad (2.43)$$

y

$$\mathbf{H} = -z_0 \mathbf{E} \times \mathbf{n}. \quad (2.44)$$

Y para la zona cercana

$$\mathbf{E} = \frac{\omega z_0}{i4\pi} \left( \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{m}}{c} \right) \frac{1}{r^2} \quad (2.45)$$

y

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z_0} \left( 3\mathbf{n} \left( \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{m}}{c} \right) - \frac{\mathbf{m}}{c} \right) \frac{1}{r^3} \quad (2.46)$$

Similarmente los patrones de radiación son los mismos para los dos dipolos, la única diferencia está en la polarización. Para un dipolo eléctrico, el vector eléctrico varía en el plano definido por  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{p}$ ; mientras que para un dipolo magnético éste es perpendicular al plano definido por  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{m}$ .

De las ecuaciones (2.43), (2.44), (2.45) y (2.46), es evidente que estos campos contribuyen muy poco a la radiación electromagnética producida por los dos dipolos, ya que el término  $\mathbf{m}/c$  es prácticamente cero.



# Capítulo 3

## Esparcimiento de ondas EM con longitudes de onda largas

### 3.1. Esparcimiento debido a dipolos inducidos en pequeños esparsos

Es común en la naturaleza el esparcimiento de ondas electromagnéticas debido a sistemas cuyas dimensiones individuales son pequeñas comparadas con una longitud de onda. En tales interacciones es conveniente pensar en el campo de radiación incidente como el que induce los multipolos eléctricos y magnéticos que oscilan con una fase definida con la onda incidente y radian energía en direcciones diferentes a la dirección de incidencia. La forma exacta de la distribución angular de energía radiada es gobernada por la *superposición* de multipolos inducidos por los campos incidentes y en general depende de los estados de polarización de dichos campos. Si la longitud de onda de la radiación es grande comparada con el tamaño de los esparsos, solamente los primeros multipolos, por lo regular los dipolos eléctrico y magnético, son los importantes y en campo lejano se pueden considerar como radiadores puntuales. Además en estas circunstancias los dipolos inducidos pueden ser calculados a partir de los problemas con condiciones de frontera estáticas o cuasiestáticas (Apéndices B y C).

La situación más simple es para una onda monocromática plana incidente sobre

un esparsor. Por simplicidad el medio envolvente se toma tal que  $\mu = \epsilon = 1$ . Si la dirección de incidencia está definida por el vector unitario  $\mathbf{n}_0$  y el vector de polarización de la onda incidente es  $\xi_0$ , los campos incidentes son

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \xi_0 E_0 \exp(ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_0 \times \frac{\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{z_0}, \quad (3.2)$$

donde  $k = \omega/c$  y la dependencia temporal es  $\exp(-i\omega t)$ . Estos campos inducen momentos dipolares  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{m}$  en el pequeño esparsor y estos dipolos radian energía en todas direcciones. Lejos del esparsor, se sabe que el campo eléctrico esparcido (radiado) es:

$$\mathbf{E}_{\text{sc}} = \mathbf{E}_{\text{DE}} + \mathbf{E}_{\text{DM}}$$

donde  $\mathbf{E}_{\text{DE}}$  es el campo producido por un dipolo eléctrico y  $\mathbf{E}_{\text{DM}}$  el campo producido por un dipolo magnético. Sustituyendo la ecuación (2.19) en la (2.20) se calcula  $\mathbf{E}_{\text{DE}}$

$$\mathbf{E}_{\text{DE}}(\mathbf{x}) = z_0 \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \frac{z_0 c k^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n}. \quad (3.3)$$

Por otra parte, el término  $\frac{1}{ikr}$  de la ecuación (2.42) tiende a cero, ya que  $r \rightarrow \infty$ , y por consiguiente

$$\mathbf{E}_{\text{DM}}(\mathbf{x}) = -\frac{z_0}{4\pi} k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (3.4)$$

Por lo tanto, los campos esparcidos por ambos dipolos tienen la forma

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \left[ (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{m}}{c} \right] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{H}_{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{x})}{z_0}, \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección del punto de observación y  $r$  es la distancia del esparsor al punto de observación ( $r$  es muy grande).

La potencia esparcida en la dirección  $\mathbf{n}$  con polarización  $\xi$  por unidad de ángulo sólido es<sup>1</sup>

$$\frac{dP_{sc}}{d\Omega} = \frac{r^2}{2z_0} |\xi^* \cdot \mathbf{E}|^2. \quad (3.7)$$

De manera análoga, la potencia incidente en la dirección  $\mathbf{n}_0$  con polarización  $\xi_0$  por unidad de área es

$$\frac{dP_{inc}}{dA} = \frac{1}{2z_0} |\xi_0^* \cdot \mathbf{E}|^2 = |\mathbf{S}|. \quad (3.8)$$

Recordando que el vector de Poynting tiene unidades de potencia por unidad de área, entonces si se toma la relación

$$\frac{dP_{sc}}{d\Omega} / \frac{dP_{inc}}{dA},$$

es claro que obtenemos unidades de área por unidad de ángulo sólido, y así podemos definir la *sección diferencial transversal de esparcimiento* ( $d\sigma/d\Omega$ ) como: la potencia radiada en la dirección  $\mathbf{n}$  con polarización  $\xi$  por unidad de ángulo sólido entre potencia por unidad de área en la dirección  $\mathbf{n}_0$  con polarización  $\xi_0$ , es decir,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{r^2}{2z_0} |\xi^* \cdot \mathbf{E}_{sc}|^2}{\frac{1}{2z_0} |\xi_0^* \cdot \mathbf{E}_{inc}|^2}. \quad (3.9)$$

Sustituyendo  $\mathbf{E}_{sc}$  y  $\mathbf{E}_{inc}$  en (3.9) se obtiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} \left| \xi^* \cdot \mathbf{p} + [\mathbf{n} \times \xi^*] \cdot \frac{\mathbf{m}}{c} \right|^2. \quad (3.10)$$

La dependencia de la sección transversal de  $\mathbf{n}_0$  y  $\xi_0$  está contenida implícitamente en los momentos dipolares  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{m}$ . La variación de la sección transversal con el número de onda como  $k^4$  (o  $\lambda^{-4}$ ) es casi una característica universal del esparcimiento de radiación con longitudes de onda grandes, debido a sistemas finitos. Lo que significa esta dependencia es que la radiación electromagnética con longitudes cortas (por ejemplo, la luz azul,  $\lambda \simeq 440 - 490nm$ ) se esparcera con una una sección transversal por unidad de ángulo sólido mayor que la de la radiación con longitudes

---

<sup>1</sup>La conjugación compleja de los vectores de polarización  $\xi_0$  y  $\xi$  es importante para la correcta dirección de la polarización circular.

de onda larga (por ejemplo, luz roja  $\lambda \simeq 625 - 750nm$ ), figura (3.1).

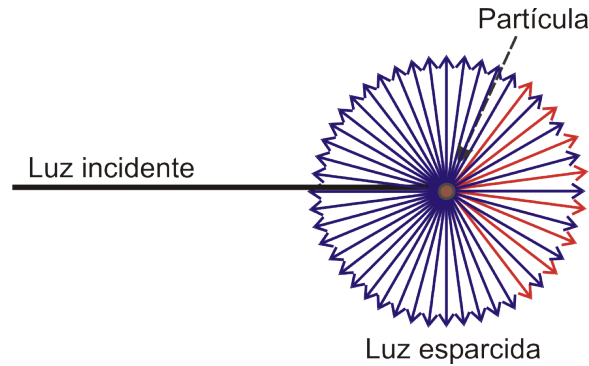


Figura 3.1: Esparcimiento debido a una partícula cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación incidente.

Esta dependencia de la frecuencia es conocida como *la ley de Rayleigh*; algunas veces al esparcimiento dipolar se le llama *esparcimiento Rayleigh*, pero usualmente este término es reservado para el esparcimiento debido a una colección de esparsores dipolares.

### 3.2. Esparcimiento debido una pequeña esfera dieléctrica

Si se considera una pequeña esfera dieléctrica de radio  $a$ , con  $\mu = 1$  y constante dieléctrica uniforme e isotrópica  $\epsilon_r(\omega)$ . Del *apéndice C* sabemos que el momento dipolar eléctrico de una esfera dieléctrica ubicada en un campo eléctrico uniforme es

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} a^3 \mathbf{E}_{\text{inc}} \right). \quad (3.11)$$

Al sustituir (3.11) en (3.10) y si se considera que no existe momento dipolar magnético tenemos que la sección diferencial de esparcimiento

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r - 2} \right|^2 |\xi^* \cdot \xi_0|^2. \quad (3.12)$$

La radiación esparcida es linealmente polarizada en el plano definido por la dirección del momento dipolar (es decir  $\xi_0$ ) y el vector unitario  $\mathbf{n}$  (vector unitario en la dirección del punto de observación).

Típicamente la radiación incidente no está polarizada. Veamos qué sucede con la distribución angular de la radiación esparcida de un estado de polarización definido. La sección transversal (3.12) será promediada sobre la polarización inicial  $\xi_0$  para un  $\xi$  fijo. La figura 3.2 muestra un posible juego de estos vectores de polarización.

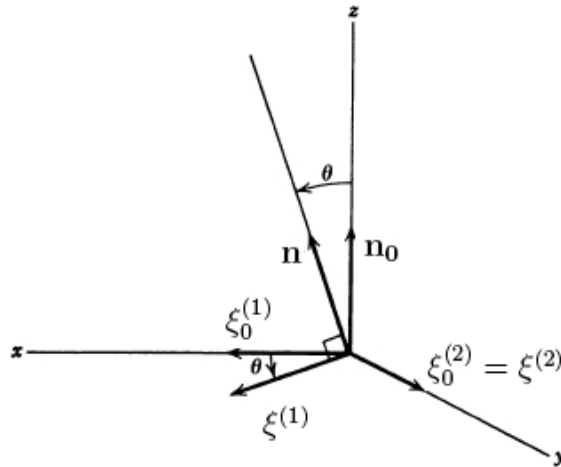


Figura 3.2: Vectores de propagación y polarización de la radiación incidente y esparcida. [12]

El plano de esparcimiento es definido por los vectores  $\mathbf{n}_0$  y  $\mathbf{n}$ . Los vectores de polarización  $\xi_0^{(1)}$  y  $\xi^{(1)}$  están en este plano, mientras que  $\xi_0^{(2)} = \xi^{(2)}$  es perpendicular a éste. La sección diferencial transversal para el esparcimiento con polarización  $\xi^{(1)}$  y  $\xi^{(2)}$ , promediadas sobre la polarización inicial son

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \cos^2 \theta \quad (3.13)$$

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \quad (3.14)$$

donde los subíndices  $\parallel$  y  $\perp$  indican polarización paralela y perpendicular, respectivamente, al plano de esparcimiento.

La polarización  $\Pi(\theta)$  de la radiación esparcida está definida por

$$\Pi(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}. \quad (3.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.13) y (3.14) en la ecuación (3.15) se encuentra que el esparcimiento (dipolar eléctrico) debido a una pequeña esfera dieléctrica es

$$\Pi(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (3.16)$$

Sumando (3.13) y (3.14) se encuentra que la sección diferencial transversal, sumada sobre la polarización esparcida, es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.17)$$

Integrando con respecto a  $\Omega$  se obtiene la sección transversal total

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2. \quad (3.18)$$

La sección diferencial transversal (3.17) y la polarización de la radiación esparcida (3.16) son mostradas como funciones del  $\cos \theta$  en la figura (2.4).

La polarización  $\Pi(\theta)$  tiene su máximo en  $\theta = \pi/2$ . A este ángulo la radiación esparcida está en su totalidad linealmente polarizada, perpendicular al plano de esparcimiento y para un apreciable rango de ángulos (a los lados de  $\theta = \pi/2$ ) es insignificanemente polarizada.

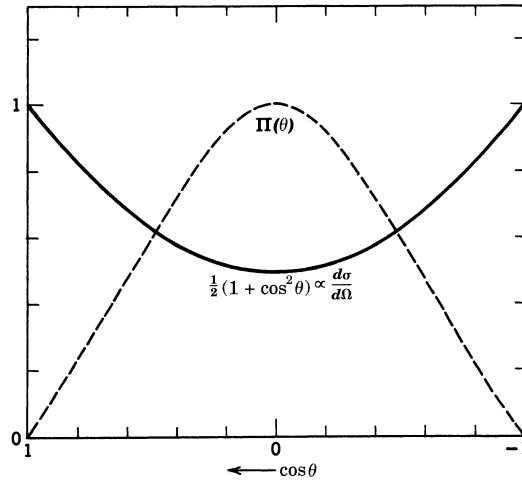


Figura 3.3: Sección diferencial transversal (3.17) y la polarización de la radiación esparcida (3.16) para una pequeña esfera dieléctrica (en la aproximación dipolar). [12]

### 3.3. Esparcimiento debido una pequeña esfera conductora

Consideremos a una pequeña esfera perfectamente conductora y de radio  $a$ . De acuerdo con el *apéndice B*, el momento dipolar eléctrico es

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}_{\text{inc}}. \quad (3.19)$$

La esfera también posee momento dipolar magnético, una de las condiciones de frontera para el campo magnético en una esfera perfectamente conductora es que la componente normal de  $\mathbf{B}$  en  $r = a$  sea cero. De [12] sabemos que la magnetización para una esfera conductora en un campo magnético externo es

$$\mathbf{M} = \frac{-3\mathbf{B}_0}{2\mu_0}, \quad (3.20)$$

y que el momento dipolar magnético de una esfera uniformemente magnetizada es

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \mathbf{M}, \quad (3.21)$$

por consiguiente, sustituyendo (3.20) en (3.21) se obtiene que el momento dipolar magnético para la esfera es

$$\mathbf{m} = -2\pi a^3 \mathbf{H}_{\text{inc}}. \quad (3.22)$$

Para una onda incidente linealmente polarizada los dos dipolos forman ángulos rectos entre ellos así como con la dirección de incidencia.

Sustituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.22) en la ecuación (3.10) se obtiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}, \xi; \mathbf{n}_0, \xi_0) = k^4 a^6 |\xi^* \cdot \xi_0 - (\mathbf{n} \times \xi^*) \cdot (\mathbf{n}_0 \times \xi_0)/2|^2. \quad (3.23)$$

Las propiedades de polarización y la distribución angular de la radiación esparcida son más complicadas que para una esfera dieléctrica. Ya que

$$(\mathbf{n} \times \xi^{(1)*}) \cdot (\mathbf{n}_0 \times \xi_0^{(1)}) = \xi^{(2)} \cdot \xi_0^{(2)} = 1$$

y

$$(\mathbf{n} \times \xi^{(2)*}) \cdot (\mathbf{n}_0 \times \xi_0^{(2)}) = (-\xi^{(1)}) \cdot (-\xi_0^{(1)}) = \cos \theta$$

La secciones transversales análogas a (3.13) y (3.14) para la polarización de la radiación esparcida, paralela y perpendicular al plano de esparcimiento, con radiación incidente no polarizada son

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left| \cos \theta - \frac{1}{2} \right|^2 \quad (3.24)$$

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{2} \left| 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \right|^2. \quad (3.25)$$

Sumando (3.24) y (3.25) se obtiene la sección diferencial total

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left( \frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta \right). \quad (3.26)$$

Mientras que la polarización (3.15) es

$$\Pi(\theta) = \frac{3 \sin^2 \theta}{5(1 + \cos^2 \theta) - 8 \cos \theta}. \quad (3.27)$$

La sección transversal y la polarización son dibujadas contra el  $\cos \theta$  en la figura (2.5). La sección transversal tiene un pico hacia abajo causado por la interferencia



*dipolo eléctrico-dipolo magnético*. La polarización alcanza  $\Pi = 1$  en  $\theta = 60^\circ$  y es positiva todo el rango angular completo. La polarización tiende a ser similar a la de una pequeña esfera dieléctrica, como se muestra en la figura (2.4), a pesar de que la distribución angular es diferente.

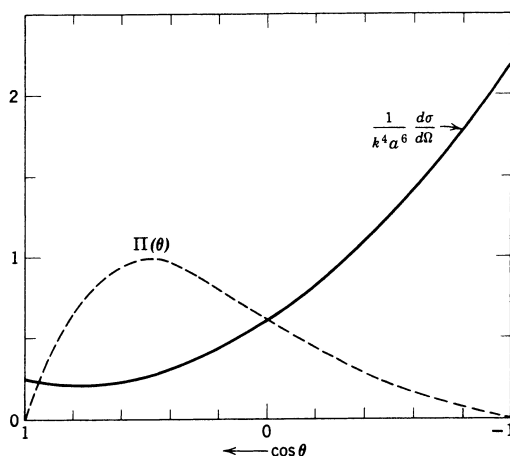


Figura 3.4: Sección diferencial transversal (3.25) y la polarización de la radiación esparcida (3.26) para una pequeña esfera conductora perfecta (aproximación dipolar eléctrica y magnética). [12]

La sección transversal de esparcimiento es

$$\sigma = \frac{10\pi k^4 a^6}{3}, \quad (3.28)$$

del mismo orden que la  $\sigma$  de la pequeña esfera dieléctrica (3.18), si es que  $(\epsilon_r - 1)$  no fuese una cantidad pequeña.

# Capítulo 4

## Descripción de plasmones dipolares

### 4.1. Introducción

Hasta aquí se ha descrito la forma de los campos electromagnéticos generados por dipolos, así como el esparcimiento debido a esparsos pequeños comparados con la longitud de onda del campo incidente. Por otro lado, sabemos que cuando incide luz sobre un objeto cuyas dimensiones son grandes comparadas con la longitud de onda, ésta se esparce y lo que se observa a campo lejano es un patrón de difracción. Por ejemplo, si colocamos una esfera metálica en una región del espacio donde está fluyendo un campo electromagnético (Luz) lo que se observa en campo lejano es un patrón de difracción como se ilustra en la figura 4.1.

Cuando las dimensiones de la esfera son menores que la longitud de onda del campo incidente, se induce una distribución de carga sobre la superficie de ésta. Estas distribuciones superficiales son de signo opuesto y por lo tanto se puede considerar a la esfera como un dipolo puntual en un campo eléctrico uniforme (figura 4.2). Así, podemos afirmar que cuando las dimensiones de la esfera son menores a  $\lambda/2$ , que es límite de la difracción, en campo lejano lo que se observa es la radiación debida al dipolo inducido sobre la esfera. En otras palabras, el esparcimiento de las ondas electromagnéticas debido a pequeños esparsos es puramente radiativo. Esto

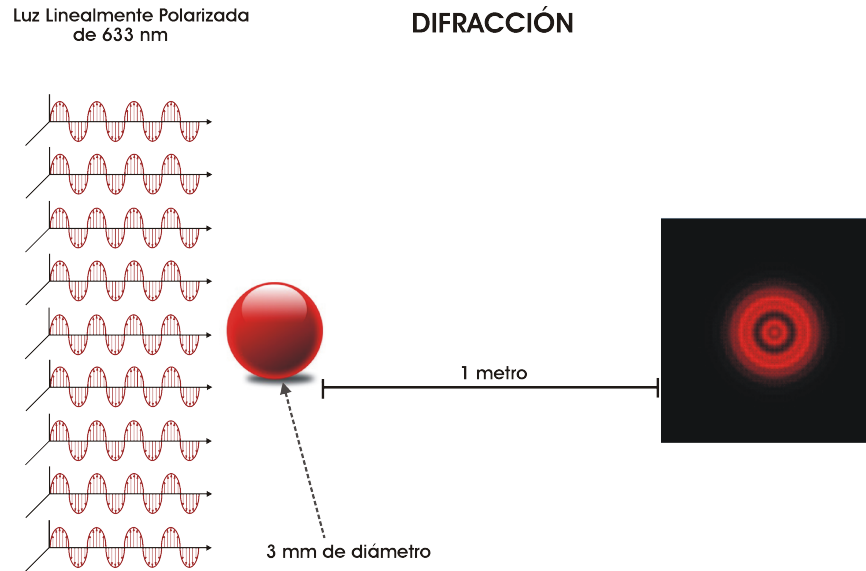


Figura 4.1: Patrón de difracción debido a una esfera cuyas dimensiones son mayores a la longitud de onda del campo incidente.

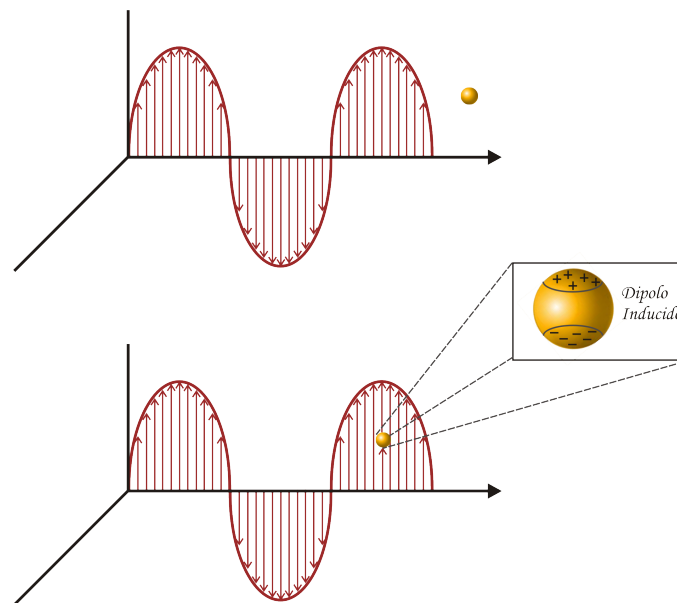


Figura 4.2: Dipolo inducido sobre una esfera metálica, cuyas dimensiones son menores que  $\lambda/2$ , colocada en una región donde fluye luz linealmente polarizada.

es lo que se conoce como la aproximación dipolar.

Empezaremos este capítulo estudiando el caso de una esfera metálica ubicada en un campo electromagnético y obtendremos la frecuencia de resonancia plasmónica de ésta. La frecuencia plasmónica es la frecuencia a la cual la esfera se polariza al máximo y es la condición necesaria para que surjan los plasmones superficiales. A estos plasmones superficiales se les conoce como plasmones dipolares ya que surgen al inducir un dipolo eléctrico sobre la esfera. Posteriormente se obtendrán las expresiones matemáticas que describan el comportamiento de dichos plasmones y se obtendrá su tiempo de vida<sup>1</sup>. Entenderemos por tiempo de vida al tiempo de decaimiento de la amplitud del dipolo en ausencia de un campo electromagnético. Finalmente, a partir de la expansión multipolar de la energía de una distribución de carga en un campo eléctrico se describe la interacción entre dos dipolos.

## 4.2. Resonancia plasmónica superficial en una esfera metálica

De los modelos electrostáticos sabemos que cuando se ubica una esfera conductora en un campo eléctrico, sobre ésta se inducen distribuciones de carga que en promedio dan lugar a un momento dipolar. Si el tamaño de la esfera es pequeño podemos pensar que la polarización de ésta es análoga a la de un dipolo puntual. Entonces, empecemos asumiendo una esfera conductora ubicada en un campo electromagnético con un estado de polarización lineal fijo. La polarizabilidad de una esfera es [14]

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{inc}}{1 + \frac{\chi}{3}}, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{E}_{inc}$  es el campo eléctrico externo y  $\chi$  es la susceptibilidad eléctrica. Esta relación fue obtenida para el caso estático, pero es útil a altas frecuencias y con partículas bastante pequeñas, donde los efectos de retardo están ausentes.

---

<sup>1</sup>El tiempo de vida es un dato importante porque es cuando el fenómeno de fluorescencia se lleva a cabo

De la ecuación del oscilador armónico clásico sabemos que la carga es desplazada de su posición de equilibrio una cantidad  $\mathbf{x}$  descrita por

$$m[\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x}] = -e\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t), \quad (4.2)$$

donde  $\gamma = \frac{2}{\tau_0}$ . Los efectos de la fuerza magnética han sido despreciados en (4.2). Haciendo una aproximación adicional, se supone que la amplitud de las oscilaciones del dipolo son bastante pequeñas para permitir la evaluación del campo en una posición promedio del electrón. Si el campo  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  varía armónicamente en el tiempo con la frecuencia  $\omega$  en la forma  $\mathbf{exp}(-i\omega t)$ , el electrón contribuye con un momento dipolar

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{x} = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}}{[\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma]}. \quad (4.3)$$

Si  $\omega \gg \omega_0$ , el momento dipolar del electrón adquiere la forma

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{x} = -\frac{e^2\mathbf{E}_{\text{inc}}}{m\omega^2}. \quad (4.4)$$

La polarización se define como el momento dipolar por unidad de volumen, y si suponemos que tenemos  $N$  electrones en el volumen de la esfera, entonces

$$\mathbf{P} = -Ne\mathbf{x} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2}\mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad (4.5)$$

por otro lado, se sabe que  $\mathbf{P}$  en términos de la susceptibilidad esta dada por la relación

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E}_{\text{inc}},$$

entonces

$$\chi = \frac{|\mathbf{P}|}{\epsilon_0|\mathbf{E}_{\text{inc}}|},$$

por consiguiente

$$\chi(\omega) = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}. \quad (4.6)$$

Comparando (4.1) y (4.6) obtenemos

$$\mathbf{P}(\omega) = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{inc}}}{1 - \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0\omega^2}} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{inc}}}{1 - \frac{\omega_p^2}{3\omega^2}}, \quad (4.7)$$

donde  $\omega_p^2$  es la llamada frecuencia de plasma del metal. La polarización diverge a la frecuencia

$$\omega_{ps} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}. \quad (4.8)$$

Ésta es la frecuencia plasmónica superficial de resonancia de la esfera. Se puede apreciar que el resultado (4.8) es independiente del tamaño de la partícula. En realidad, las propiedades ópticas dependen del tamaño de las partículas debido a los efectos de retardo en radios grandes, pérdidas y transiciones en radios pequeños.

### 4.3. Descripción de plasmones dipolares

Al iluminarse con luz monocromática una nanoesfera metálica se induce en ésta un momento dipolar cuya amplitud promedio satisface la ecuación del oscilador armónico clásico. A través del mismo proceso una onda de densidad electrónica superficial (onda plasmónica) es generada en la superficie de la nanopartícula. Las oscilaciones colectivas de la onda de densidad son determinadas por la expresión

$$x(t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos(\omega_j t + \delta_j) = u_j(t) \cos \omega t - v_j(t) \sin \omega t. \quad (4.9)$$

Las funciones  $u$  y  $v$  corresponden al plasmón dipolar y dependen del tiempo porque en general la frecuencia natural  $\omega_j$  de  $x_j$  es diferente de la frecuencia  $\omega$  del campo incidente. Sin embargo, si la diferencia  $(\omega - \omega_j)$  es pequeña las funciones  $u_j$  y  $v_j$  varían muy lentamente en el tiempo [16]. Para asegurar que  $u_j$  y  $v_j$  son funciones envolventes que varían lentamente comparadas con  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$ , se deben cumplir las siguientes desigualdades

$$\dot{u}_j \ll \omega u_j, \quad \ddot{u}_j \ll \omega^2 u_j, \quad \dot{v}_j \ll \omega v_j, \quad \ddot{v}_j \ll \omega^2 v_j. \quad (4.10)$$

Calculando la primera y segunda derivada de la expresión (4.9), sustituyendolas en la ecuación (4.31) y al considerar las expresiones (4.10) se obtienen dos expresiones

para  $\dot{u}_j$  y  $\dot{v}_j$  con la siguiente forma

$$\dot{u}_j = -\frac{(\omega_j^2 - \omega^2)}{2\omega}v_j - \frac{u_j}{\tau_0} - \frac{1}{\omega\tau_0}\dot{v}_j \quad (4.11)$$

$$\dot{v}_j = \frac{(\omega_j^2 - \omega^2)}{2\omega}u_j - \frac{v_j}{\tau_0} - \left(\frac{eE}{m\omega x_0}\right) + \frac{1}{\omega\tau_0}\dot{u}_j. \quad (4.12)$$

Ya que  $\omega_j = \omega$ , podemos escribir

$$(\omega_j^2 - \omega^2) = (\omega_j - \omega)(\omega_j + \omega) \approx 2\omega(\omega_j - \omega),$$

entonces, las ecuaciones (4.11) y (4.12) se reducen a

$$\dot{u}_j = -(\omega_j - \omega)v_j - \frac{u_j}{\tau_0} - \frac{1}{\omega\tau_0}\dot{v}_j \quad (4.13)$$

$$\dot{v}_j = (\omega_j - \omega)u_j - \frac{v_j}{\tau_0} - \left(\frac{eE}{m\omega x_0}\right) + \frac{1}{\omega\tau_0}\dot{u}_j. \quad (4.14)$$

Como  $\omega\tau_0 \gg 1$  podemos omitir el último término de ambas ecuaciones. Además, en una situación física real el decaimiento radiativo no es el único factor que contribuye al amortiguamiento de la amplitud del dipolo. El *tiempo de vida efectivo* de un oscilador real es más corto que el tiempo de vida radiativo  $\tau_0$ , debido a interacciones aleatorias tales como las colisiones que no fueron incluidas en el Hamiltoniano. Entonces se debe reemplazar  $\tau_0$  por  $T$ , al que llamaremos tiempo de vida efectivo. Así, podemos escribir la forma más general para las ecuaciones (4.13) y (4.14) de la siguiente forma

$$\dot{u} = -(\omega_j - \omega)v - \frac{u}{T} \quad (4.15)$$

$$\dot{v} = (\omega_j - \omega)u - \frac{v}{T} + \kappa E, \quad (4.16)$$

donde

$$\kappa = \frac{e}{m\omega x_0}.$$

Escribiendo (4.15) y (4.16) en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & -(\omega_j - \omega) \\ (\omega_j - \omega) & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\kappa E}{T} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Se obtienen los eigenvalores

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{T} \pm i(\omega_j - \omega). \quad (4.18)$$

En vista de que los eigenvalores son complejos, es conveniente escribirlos en forma de exponencial

$$\lambda_{1,2} = R e^{\pm i\theta}, \quad (4.19)$$

donde

$$R = \sqrt{\frac{1}{T^2} + (\omega_j - \omega)^2} \quad y \quad \theta = \tan^{-1}[-T(\omega_j - \omega)]$$

Estos eigenvalores indican que las ondas de densidad son armónicas con una amplitud  $R$  muy grande y tiempo de vida largo, por ejemplo vease la figura 4.3. Algunas de las aplicaciones ópticas de las nanopartículas hacen uso del campo

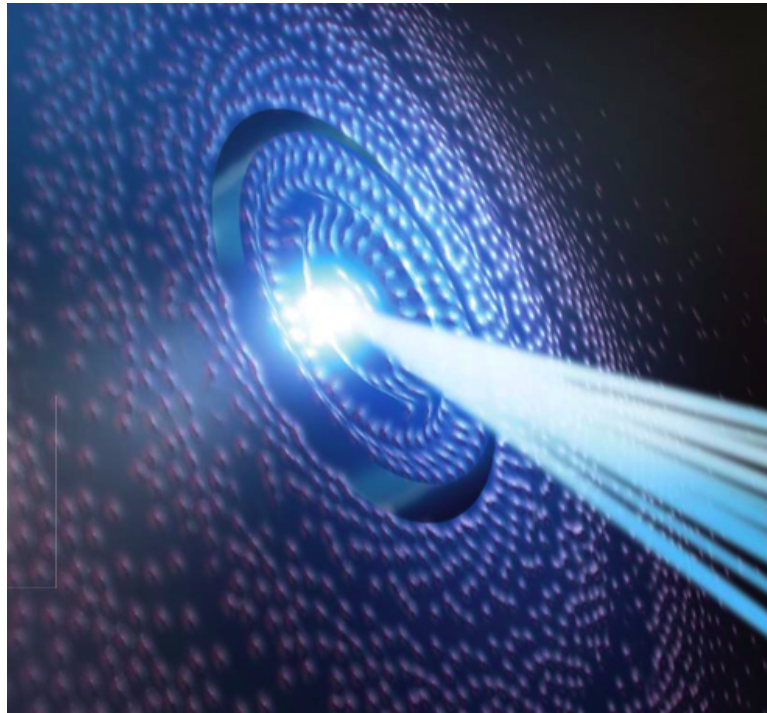


Figura 4.3: Imagen de una esfera de oro de 50nm de diámetro tomada con un microscopio de fuerza atómica (Scientific American 2007).

eléctrico intenso que se genera justo afuera de la nanopartícula, cuando ésta se



encuentra cerca de la resonancia. Las técnicas SERS (Surface Enhancement Raman Spectroscopy) o generación del segundo armónico son posibles debido a que el campo eléctrico está altamente localizado en la superficie de la partícula.

## 4.4. Tiempo de vida de un dipolo lineal

De acuerdo con el modelo de Lorentz, la mayoría de los fenómenos ópticos pueden ser analizados por la interacción de cargas eléctricas con el campo electromagnético. Empezaremos asumiendo que estas cargas están confinadas en átomos neutros y que oscilan alrededor de su posición de equilibrio con amplitudes muy pequeñas. Es decir, cada par electrón-ion se comporta como un oscilador armónico, el cual se acopla al campo electromagnético a través de su momento dipolar eléctrico. El movimiento de la colección de tales dipolos osciladores es determinada por el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \sum_j (\mathbf{P}_j^2 + \omega_j^2 m^2) - e \sum_j \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j), \quad (4.20)$$

donde  $\mathbf{P}_j$  y  $\mathbf{r}_j$  son el momento canónico y la posición del dipolo  $j$  que tiene una frecuencia natural de oscilación  $\omega_j$  y donde  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j)$  es el campo eléctrico en la posición del átomo  $j$  en el tiempo  $t$ .

La ecuación de movimiento de un solo átomo se obtiene al reconocer que una componente de  $\mathbf{r}_j$  se acopla solamente con la misma componente del campo. Supongamos que las cantidades escalares  $x_j$  y  $E$  son las que representan un par de componentes acopladas. Las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j},$$

conducen a la expresión

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j), \quad (4.21)$$

la cual es la fuerza de Lorentz para una carga no relativista.

Si el oscilador tiene un centro de oscilación fijo, la existencia de conservación de la energía para el sistema campo electromagnético más oscilador es descrito por la relación [16]

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \frac{\partial U_{mat}}{\partial t} = 0, \quad (4.22)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el vector de Poynting,  $U_{em}$  es la densidad del campo electromagnético y  $U_{mat}$  es la densidad de energía de materia. Aplicando la ecuación de interacción (4.22) sobre una esfera centrada en el oscilador se obtiene la relación referente a la energía en lugar de la densidad de energía

$$\int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da + \frac{\partial W_{em}}{\partial t} + \frac{\partial W_{osc}}{\partial t} = 0, \quad (4.23)$$

donde la integral de volumen

$$\int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3x,$$

ha sido transformada en una integral sobre la superficie de la esfera utilizando el teorema de la divergencia. Asumamos que las pérdidas de energía radiada por el dipolo son relativamente lentas comparadas con un período de oscilación del dipolo atómico ( $2\pi/\omega_j$ ). Una consecuencia de esta hipótesis es que la cantidad de energía electromagnética en el pequeño volumen  $V$  es estable en el tiempo. Esto significa que el término

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t},$$

tiene una contribución despreciable a la ecuación (4.23). Una segunda consecuencia es que las oscilaciones del dipolo son casi armónicas. Entonces la energía del  $j$ -ésimo oscilador es aproximadamente

$$W_j(t) = m\omega_j^2 \overline{x_j^2(t)}, \quad (4.24)$$

donde la barra denota un promedio sobre oscilaciones muy rápidas a la frecuencia  $2\omega_j$ . La razón de la pérdida de energía por radiación del dipolo eléctrico a través de una superficie esférica centrada en el dipolo es [16]

$$\int \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n} da = \frac{2e^2\omega_j^4}{3c^3} \overline{x_j^2(t)}. \quad (4.25)$$

Despejando  $\overline{x_j^2(t)}$  de la ecuación (4.24) y sustituyendo en (4.25) se obtiene

$$\int \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n} da = \frac{2e^2\omega_j^2}{3mc^3} W_j(t), \quad (4.26)$$

lo que significa que la razón de flujo de energía lejos del dipolo es directamente proporcional a la energía del dipolo mismo.

Incorporando la relación (4.26) en (4.23) ( $\omega_j = \omega_{osc}$ ) se obtiene una ecuación de movimiento para la energía dipolar con la forma

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = -\frac{2}{\tau_0} W_j, \quad (4.27)$$

donde

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{e^2 \omega_j^2}{3mc^3}. \quad (4.28)$$

Resolviendo la ecuación (4.27) se encuentra que la oscilación decae exponencialmente de la forma

$$W_j(t) = W_j(0) \exp(-2t/\tau_0), \quad (4.29)$$

la razón de decaimiento de energía esta dada por

$$\frac{2}{\tau_0} = \frac{2e^2 \omega_j^2}{3mc^3}. \quad (4.30)$$

Si el dipolo oscila a frecuencias ópticas ( $10^{15} Hz$  por ejemplo), el tiempo de vida que se predice es del orden de  $0.1 \mu seg$ . Entonces, se cumple que  $1/\tau_0 \ll \omega_j$  y la asunción de que la pérdida de energía del oscilador es relativamente lenta se satisface.

Este decaimiento lento de la amplitud del dipolo y su energía puede ser incorporado a la ecuación de movimiento del oscilador. Con esto la ecuación para la fuerza de Lorentz (4.21) se transforma en

$$\ddot{x}_j + \frac{2}{\tau_0} \dot{x}_j + \omega_j^2 x_j = \frac{e}{m} E, \quad (4.31)$$

donde  $E$  debe ser considerado como el campo que actúa sobre el dipolo  $j$ . Cuando  $E=0$ , la ecuación (4.31) predice un decaimiento en la amplitud del dipolo a razón  $1/\tau_0$  y la energía decae a la razón  $2/\tau_0$ .

## 4.5. Expansión multipolar de la energía de una distribución de carga en un campo externo

Para describir la interacción entre nanopartículas resonantes es necesario obtener una expresión general que describa a una distribución de carga localizada en términos

de multipolos eléctricos interactuando con un campo externo. Entonces, si una distribución de carga localizada descrita por  $\rho(\mathbf{x})$  es ubicada en un potencial externo  $\Phi(\mathbf{x})$ , la energía electrostática del sistema es

$$W = \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x. \quad (4.32)$$

Si el potencial  $\Phi(\mathbf{x})$  varia lentamente en la región donde  $\rho(\mathbf{x})$  es diferente de cero, entonces este potencial puede ser expandido en una serie de Taylor alrededor de algún origen conveniente de la siguiente manera

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla\Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \quad (4.33)$$

Utilizando la definición de campo eléctrico ( $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ), se pueden reescribir los dos últimos términos de la ecuación (4.33) para obtener

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \quad (4.34)$$

Debido a que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  para el campo externo, se puede restar del último término de la ecuación (4.34) la cantidad

$$\frac{1}{6}r^2\nabla \cdot \mathbf{E}(0),$$

sin afectar nada. Con esto se obtiene

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \quad (4.35)$$

Insertando la ecuación (4.35), la carga total, momento dipolar (ec. (D.7)) y momento cuadrupolar (ec. (D.8)) en la ecuación (4.32) (ver *Apéndice D*), la energía toma la forma

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \quad (4.36)$$

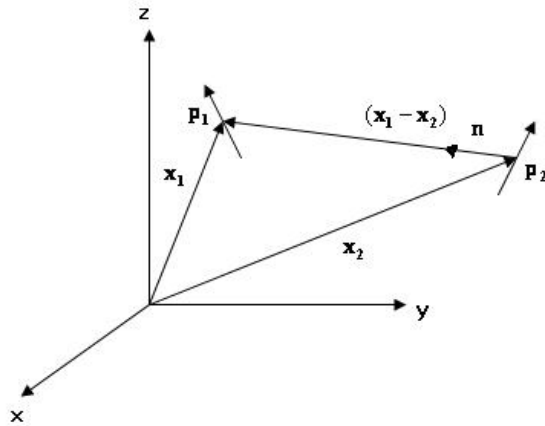


Figura 4.4:

La ecuación (4.36) muestra la forma característica en la cual varios multipolos interactúan con un campo externo (la carga total con el potencial, el dipolo con el campo eléctrico aplicado, el cuadrupolo con el campo gradiente y así sucesivamente).

#### 4.5.1. Interacción Dipolo-Dipolo

La energía de interacción entre dos dipolos  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  es determinada directamente del término de interacción dipolo-campo de la expresión (4.36), es decir,

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_1), \quad (4.37)$$

donde  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{x}_1)$  es el campo producido por el dipolo  $\mathbf{p}_2$  (ubicado sobre el punto  $\mathbf{x}_2$ ) en el punto  $\mathbf{x}_1$ , figura(4.4).

Del *Apéndice D* (ecuación (D.16)) se tiene que el campo eléctrico producido por un dipolo  $\mathbf{p}_2$  en el punto  $\mathbf{x}_1$  (punto que ubica al dipolo  $\mathbf{p}_1$ ) es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (4.38)$$

Sustituyendo (4.38) en (4.37) se obtiene la energía potencial mutua

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}, \quad (4.39)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  y se asume que  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ .

La interacción dipolo-dipolo es atractiva o repulsiva, dependiendo de la orientación de los dipolos. Si los momentos están paralelos a la línea que une a sus centros (fig. 4.5), entonces existe una atracción entre ellos y cuando están perpendiculares a dicha línea (fig. 4.6), existirá una repulsión.

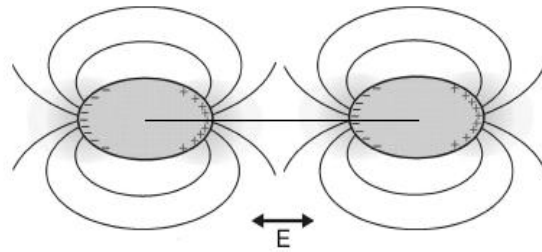


Figura 4.5: Dipolos paralelos a la línea que une a sus centros.

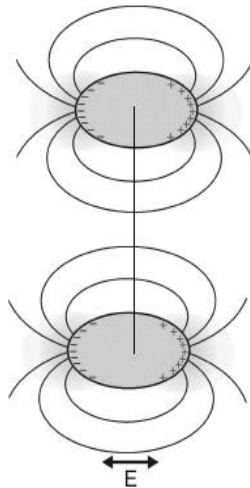


Figura 4.6: Dipolos perpendiculares a la línea que une a sus centros.

Un caso interesante surge cuando  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  oscilan armónicamente de la forma

$$p_i = \mathbf{p}_{1i} \exp(i\omega t), \quad (4.40)$$

es decir,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{n}$  están cambiando en el tiempo. Entonces, la ecuación (4.39) adquiere la forma

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2^* - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_2)}{l^3}, \quad (4.41)$$

ó

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20} - 3\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20} \cos \alpha \cos \beta \cos(2\omega t)}{l^3}, \quad (4.42)$$

donde  $l^3 = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3$ . Y la energía promedio es

$$\langle W_{12} \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20}}{l^3} - \frac{3\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20}}{4l^3} \cos \alpha \cos \beta, \quad (4.43)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos que forman el vector  $\mathbf{n}$  con  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente. En condiciones de simetría, es decir, cuando los dipolos están orientados en la misma dirección se tiene que  $\alpha = \beta$ . Bajo estas condiciones la energía promedio es

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{5}{8} \right) \frac{\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20}}{l^3} - \left( \frac{3}{8} \right) \frac{\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20}}{l^3} \cos 2\alpha \right]. \quad (4.44)$$

Si hacemos

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{5}{8} \right) \frac{\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20}}{l^3}$$

y

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{8} \right) \frac{\mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20}}{l^3},$$

se tiene que la energía es de la forma

$$W_{12} = [A - B \cos 2\alpha]. \quad (4.45)$$

Si el ángulo  $2\alpha$  cambia de manera armónica, es decir,  $2\alpha = \omega t$ , entonces la estructura de la energía es

$$W_{12} = A - B \cos \omega t. \quad (4.46)$$

# Capítulo 5

## Analogía mecánica de la interacción entre nanopartículas

### 5.1. Justificación

Se ha reportado en la literatura que el pico de resonancia obtenido al acercar dos nanopartículas metálicas depende de la distancia de separación entre éstas. Es decir, se han observado variaciones en el pico de resonancia al variar la distancia de separación de las partículas [10, 19, 20, 21, 22]. Este corrimiento se ilustra en la figura 5.1, en donde (a) muestra un corrimiento hacia longitudes de onda más largas y (b) un corrimiento hacia longitudes de onda más pequeñas, ambos conforme las nanopartículas se acercan.

Por todo esto y debido a que los campos radiados por dipolos eléctricos, descritos por las ecuaciones (2.19) y (2.20), son transversales al vector de propagación podemos establecer una analogía entre dos partículas en resonancia y el sistema mecánico *masa-resorte*.



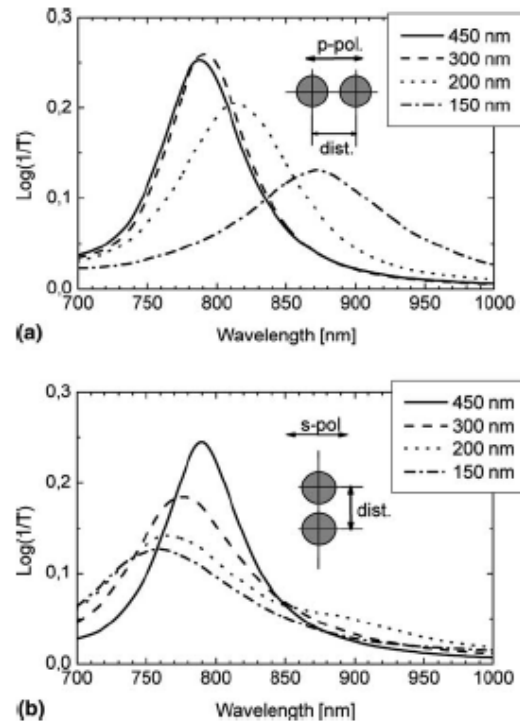


Figura 5.1: Espectro de la extinción de luz ( $=\log(1/\text{Transmisión})$ ) de un par de nanopartículas de oro. (a) La polarización de la luz incidente es paralelo al eje que une a los centros de las nanopartículas, (b) polarización ortogonal [10].

## 5.2. Analogía mecánica de la interacción entre nanopartículas

Para describir dicha analogía se consideraron los dos estados de polarización de la luz incidente que se muestran en la figura 5.2, donde la polarización de la luz es del tipo P cuando su dirección es paralela al eje que divide a ambas partículas y S cuando es perpendicular.

En la figura 5.3 se muestran los modelos mecánicos propuestos. Ya que nuestro punto de inicio consistió en el análisis de una esfera iluminada con luz monocromática y polarización lineal fija (secciones 4.3 y 4.4), también se ha incluido el modelo de una sola esfera. Cuando un campo eléctrico incide sobre una nanoesfera se generan

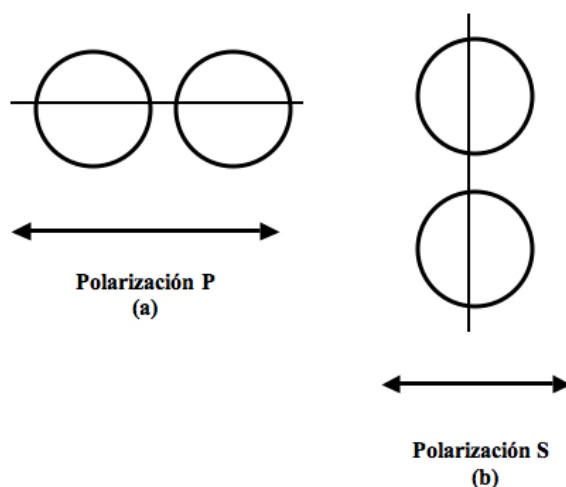


Figura 5.2: (a) Polarización P: la dirección de polarización de la luz incidente es paralela al eje que divide a las partículas, (b) Polarización S: la dirección de polarización de la luz es perpendicular al eje que divide a las partículas.

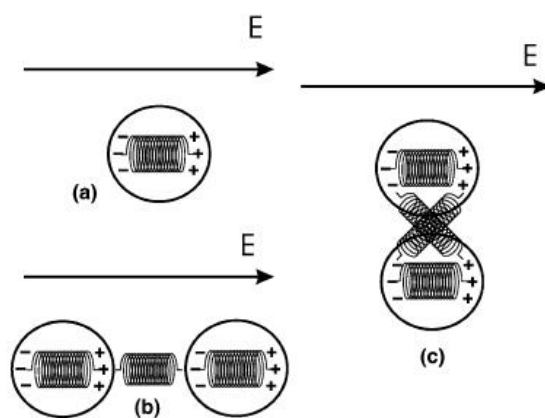


Figura 5.3: Ilustración que muestra la analogía mecánica de la interacción electromagnética entre nanopartículas cercanas, (a) partícula aislada, (b) par de partículas iluminadas con luz polarizada tipo P y (c) polarizada tipo S.

densidades de carga superficiales que sienten fuerzas repulsivas (la carga eléctrica es empujada hacia la dirección donde apunta el campo y la negativa hacia el lado

opuesto). Si colocamos otra esfera como en la figura 5.3(b) sucede que la carga positiva de la partícula izquierda queda enfrente de la carga negativa de la partícula derecha. Debido a la fuerza atractiva entre estas dos distribuciones de carga se observa que la fuerza repulsiva (fuerza generada por el campo sobre las distribuciones de carga de cada esfera) se debilita. Esto corresponde a una frecuencia de resonancia más baja (longitud de onda mayor), lo que corresponde a un corrimiento hacia el rojo del espectro observado conforme se acercan las partículas.

En contraste, cuando consideramos la configuración mostrada en la figura 5.3(c) las distribuciones de carga actúan en forma conjunta para amplificar la acción repulsiva en ambas partículas, incrementando la frecuencia de resonancia (longitud de onda menor), lo que implica un corrimiento hacia el azul al acercar las partículas.

Ahora veamos que nuestros modelos propuestos realmente describen el fenómeno en cuestión. Para dos partículas iluminadas con luz polarizada tipo  $P$  se propuso el modelo mostrado en la figura 5.4.

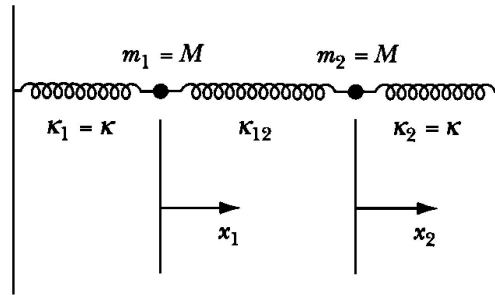


Figura 5.4: Modelo para dos nanopartículas iluminadas con luz polarizada tipo  $P$ .

La energía potencial para este sistema es

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2}\kappa x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_{12}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}\kappa x_2^2 \\
 &= \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_1^2 + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_2^2 - \kappa_{12}x_1x_2.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Y la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2. \quad (5.2)$$

Así, el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_1^2 + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_2^2 - \kappa_{12}x_1x_2, \quad (5.3)$$

donde hemos puesto  $M = 1$  por simplicidad. Este Lagrangiano conduce a las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{12})x_1 - \kappa_{12}x_2 = 0 \quad (5.4)$$

$$\ddot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{12})x_2 - \kappa_{12}x_1 = 0. \quad (5.5)$$

En vista de que el movimiento es oscilatorio, se proponen soluciones de la forma

$$x_1(t) = B_1e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = B_2e^{i\omega t}. \quad (5.6)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de movimiento, encontramos

$$-\omega^2 B_1e^{i\omega t} + (\kappa + \kappa_{12})B_1e^{i\omega t} - \kappa_{12}B_2e^{i\omega t} = 0 \quad (5.7)$$

y

$$-\omega^2 B_2e^{i\omega t} + (\kappa + \kappa_{12})B_2e^{i\omega t} - \kappa_{12}B_1e^{i\omega t} = 0 \quad (5.8)$$

Agrupando términos y suprimiendo el factor común exponencial, se obtienen las expresiones

$$(\kappa + \kappa_{12} - \omega^2)B_1 - \kappa_{12}B_2 = 0 \quad (5.9)$$

$$-\kappa_{12}B_1 + (\kappa + \kappa_{12} - \omega^2)B_2 = 0. \quad (5.10)$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución no trivial, el determinante de los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$  debe ser nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} \kappa + \kappa_{12} - \omega^2 & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

Desarrollando el determinante, resulta

$$(\kappa + \kappa_{12} - \omega^2)^2 - \kappa_{12}^2 = 0, \quad (5.12)$$

y, de aquí,

$$\kappa + \kappa_{12} - \omega^2 = \pm \kappa_{12}.$$

Al despejar  $\omega$  se obtiene

$$\omega = \pm \sqrt{\kappa + \kappa_{12} \pm \kappa_{12}}. \quad (5.13)$$

Por consiguiente, el sistema posee dos frecuencias características

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\kappa + 2\kappa_{12}} \quad y \quad \omega_2 = \pm \sqrt{\kappa} \quad (5.14)$$

La frecuencia mínima se tiene cuando  $\kappa_{12} = 0$  y por lo tanto se obtiene una longitud de onda máxima. Por el contrario, cuando  $\kappa_{12} \neq 0$  se tiene una frecuencia mayor, lo que implica una longitud de onda menor. Así podemos explicar los fenómenos reportados en [10] (figura 5.1) de la siguiente manera.

En ausencia de acoplamiento  $\kappa_{12} = 0$  (esferas juntas) las dos frecuencias características son iguales, es decir, se tiene la frecuencia mínima (lo que implica una longitud de onda grande) y un corrimiento hacia el rojo toma lugar. Cuando se tiene un acoplamiento distinto de cero, es decir,  $\kappa_{12} \neq 0$  (esferas separadas) se tienen las dos frecuencias características  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Pero la frecuencia  $\omega_1$  es la que mejor modela al sistema, esto porque en la figura 5.1(a) se observa una longitud de onda menor (frecuencia de resonancia mayor) cuando las esferas están separadas una distancia de 450nm y al acercarlas una distancia de 150nm se llega a una longitud de onda mayor (frecuencia de resonancia menor). Por lo tanto, el modelo propuesto describe satisfactoriamente, en una forma cualitativa, el comportamiento reportado en [10] para la polarización tipo  $P$ .

Para mostrar que el modelo propuesto satisface en forma cuantitativa las observaciones experimentales consideremos la gráfica mostrada en la figura 5.5, donde se observa un decaimiento en la longitud de onda observada conforme la distancia de separación entre las partículas disminuye.

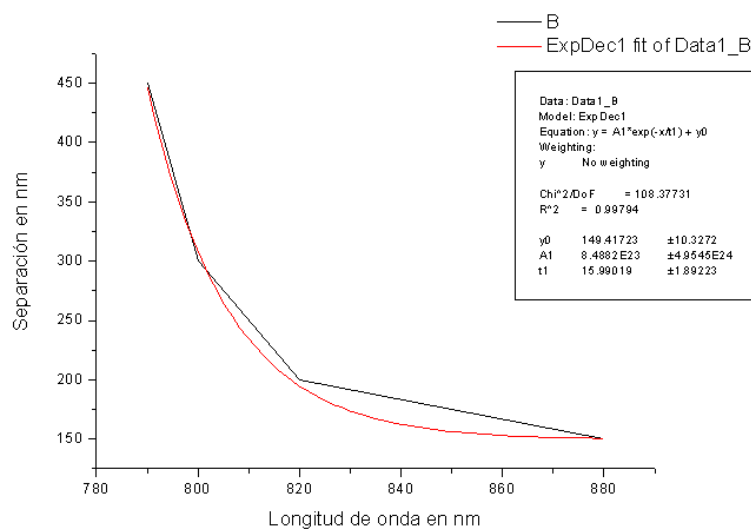


Figura 5.5: Línea Negra: Gráfica de la longitud de onda contra la distancia de separación entre nanopartículas (obtenida del experimento realizado en [10]). Línea Roja: Ajuste obtenido con Origin.

Al realizar un ajuste con el programa ORIGIN (línea roja), se encontró que la función que describe el decaimiento es

$$d = Ae^{-\frac{\lambda}{U}} + R \quad (5.15)$$

donde

$$A = 8.4882 \times 10^{23} \quad \pm 4.9545 \times 10^{24}$$

$$U = 15.99019 \quad \pm 1.89223$$

$$R = 149.41723 \quad \pm 10.3272$$

Despejando  $\lambda$  obtenemos

$$\lambda = -U \ln \left[ \frac{d - R}{A} \right] \quad (5.16)$$

La ecuación (5.16) nos da la longitud de onda como función de la distancia de separación entre las partículas. De la literatura se tiene que al acercar las nanopartículas (bajo la configuración en cuestión) una distancia de 150nm y distancias

menores hasta tocarse, se observa un espectro que no cambia abruptamente. Es decir, se observa un espectro con una longitud de onda de al rededor de 900nm. Por lo tanto, podemos obtener el valor de  $\kappa$  de la expresión para  $\omega_1$  de la ecuación (5.14) al considerar  $\kappa_{12} = 0$  y  $\lambda = 880nm$ <sup>1</sup>

$$\kappa = \left[ \frac{2\pi c}{\lambda} \right]^2 = 4.588 \times 10^{30} \quad (5.17)$$

Entonces, si consideramos que  $\omega = \omega_1$

$$\omega = \sqrt{4.588 \times 10^{30} + 2\kappa_{12}} = \frac{2\pi c}{-U \ln \left[ \frac{d-R}{A} \right]}, \quad (5.18)$$

donde hemos usado la ecuación (5.16) para dar el valor de  $\lambda$ . Despejando  $\kappa_{12}$  se tiene

$$\kappa_{12} = \frac{[2\pi c]^2}{2U^2 \ln^2 \left[ \frac{d-R}{A} \right]} - 2.294 \times 10^{30} \quad (5.19)$$

Tomando los valores para  $d$  reportados en [10], es decir, los valores mostrados en la primera columna de la siguiente tabla, y al usar la ecuación

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\sqrt{\kappa + 2\kappa_{12}}} \quad (5.20)$$

se obtienen los valores mostrados en la tercera columna.

$d$	$\kappa_{12}$	$\lambda(\text{calculada})$	$\lambda(\text{observada})$
450nm	$1.1 \times 10^{30}$	789.784nm	790nm
300nm	$951.9 \times 10^{27}$	800.837nm	800nm
200nm	$718.2 \times 10^{27}$	818.281nm	820nm
150nm	0	880nm	880nm

Nótese que se obtienen valores muy próximos a los encontrados experimentalmente. Por lo tanto, afirmamos que nuestro modelo propuesto describe satisfactoriamente los resultados experimentales reportados en la literatura óptica.

---

<sup>1</sup>Tomamos este valor de  $\lambda$  para tratar de reproducir los resultados reportados en [10]

Para el caso cuando la luz incidente tiene polarización  $S$ , figura 5.3(c), el Lagrangiano no es fácil de obtener porque el sistema presenta oscilaciones cuyas frecuencias son dependientes del tiempo. Esto se debe a que cuando las partículas se aproximan como en la figura 5.3(c), en éstas se presentan dipolos cruzados (figura 5.6). Estos dipolos cruzados perturban la frecuencia de oscilación de las dos partículas. Por lo tanto, las oscilaciones de los dipolos horizontales son afectadas por las oscilaciones de los dipolos cruzados.

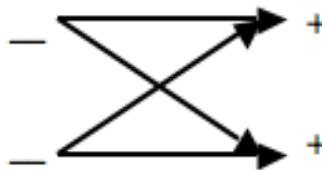


Figura 5.6: Dipolos inducidos sobre dos nanopartículas por luz con polarización tipo  $S$ .

Para simplificar este problema se propone un modelo diferente, en donde la suma vectorial de los dipolos cruzados es proyectada sobre una línea trazada en el lado izquierdo como se muestra en la figura 5.7.

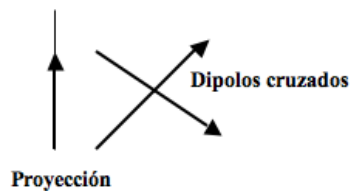


Figura 5.7: Proyección de la suma vectorial de los dipolos cruzados.

La dirección de la proyección depende de cual dipolo es mayor en cada instante de tiempo. Por ejemplo, si en un instante de tiempo dado el dipolo cruzado que apunta hacia arriba es mayor, entonces la proyección apunta hacia arriba y si el dipolo cruzado que apunta hacia abajo es mayor sucede lo contrario. Teniendo así las configuraciones mostradas en la figura 5.8.



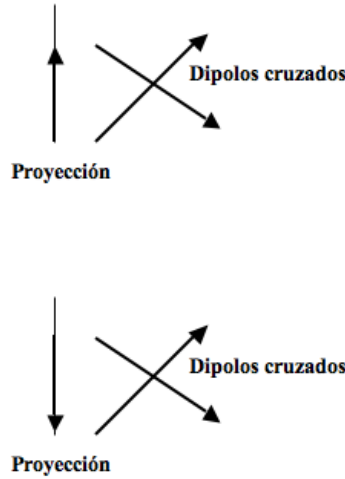


Figura 5.8: Proyecciones de los dipolos cruzados en instantes de tiempo diferentes.

La ecuación (4.21) describe el comportamiento de la proyección pero con la frecuencia  $\omega$  modificada de la siguiente manera

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a\omega_0 \cos \beta t, \quad (5.21)$$

donde  $a$  es la amplitud de las variaciones de la frecuencia y  $\omega_0$  es la frecuencia natural de los dipolos. La justificación para esta hipótesis es que si el campo que excita al sistema es periódico, entonces las variaciones en las frecuencias de los dipolos también son periódicas. Expandiendo las variaciones en una serie de Fourier, elevando al cuadrado y despreciando términos cúbicos y superiores se obtiene (5.21). Con esto es claro que la frecuencia está cambiando periódicamente alrededor de la frecuencia natural  $\omega_0$ .

Sustituyendo (5.21) en la ecuación (4.21) obtenemos

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + 2a\omega_0 \cos \beta t)x = \frac{E_0(\cos \omega t)}{m}, \quad (5.22)$$

donde hemos considerado solo la parte real. Cabe destacar que la ecuación (5.22) es una ecuación del tipo Mathieu no homogénea.

Conforme acercamos las esferas, los dipolos cruzados disminuyen su amplitud hasta llegar a un mínimo cuando éstas se tocan. Cuando los dipolos cruzados

decrecen en amplitud, implica que la fuerza que sienten las cargas que los conforman es más intensa y por consiguiente las perturbaciones que estos ejercen en la frecuencia de los dipolos horizontales aumenta. El término  $2a\omega_0 \cos \beta t$  en la expresión (5.21) nos dice como cambia la frecuencia en el tiempo. Por lo tanto, si la perturbación aumenta al disminuir la distancia de separación entre las nanopartículas esto implica que las variaciones de la frecuencia en el tiempo también se incrementan.

Nótese que la frecuencia varía a una razón que es múltiplo de ella misma, lo que significa que estas variaciones son muy rápidas para seguir las. Por tanto, al realizar las observaciones lo que se tiene es la envolvente. La envolvente del  $\cos \beta t$  para  $\beta$  cambiando muy rápido (a frecuencias ópticas en este caso) es tomar  $\cos \beta t = 1$ . Al considerar esto, se tiene una frecuencia con la forma

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2a\omega_0} \approx \omega_0 + a. \quad (5.23)$$

donde hemos realizado una expansión en serie de Taylor ya que  $a$  tiene un valor muy pequeño. Lo que significa esto es que al acercar las esferas resonantes se observa luz con una frecuencia dada por la ecuación (5.23), que evidentemente es mayor que la frecuencia de resonancia de las esferas. Es decir, se observa un corrimiento del espectro hacia longitudes de onda más cortas. Por lo tanto, el modelo propuesto satisface las observaciones experimentales llevadas a cabo en [10, 19, 20, 21, 22]. Procediendo de manera similar que en el caso anterior se encuentra que las funciones que describen a la longitud de onda como función de la distancia de separación y viceversa son

$$d = y + \frac{A}{w\sqrt{\pi/2}} e^{-2\left[\frac{\lambda - \lambda R}{w}\right]^2} \quad \lambda = \frac{\frac{w}{2} \sqrt{\ln \left[ \frac{A(d-y)}{w\sqrt{\pi/2}} \right]}}{(1-R)} \quad (5.24)$$

donde

$$\begin{aligned} y &= 1.2324 \times 10^{-7} & \lambda R &= 8.1297 \times 10^{-7} \\ w &= 4.261196 \times 10^{-8} & A &= 3.1196 \times 10^{-14} \end{aligned}$$

Estas expresiones las genera el programa ORIGIN al introducirle los datos

correspondientes al caso de polarización  $S$  y al realizar un ajuste que nos da la gráfica mostrada en la figura 5.9.

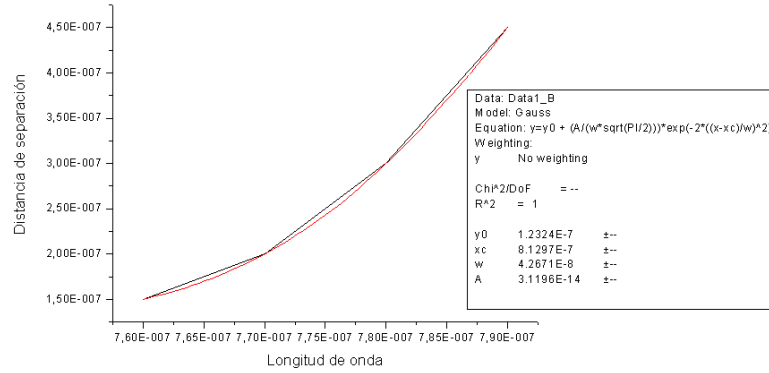


Figura 5.9: Gráfica que muestra el comportamiento de la longitud de onda observada en [10] con respecto a variaciones de la distancia de separación de las dos nanoesferas.

Ahora, consideremos que la amplitud de los momento oscila a una frecuencia muy cercana a la del campo incidente. Es decir

$$x = x_0 \cos \omega t. \tag{5.25}$$

Sustituyendo en la ecuación (5.22) se tiene

$$x_0 = \frac{eE_0}{m [\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos \beta t]}. \tag{5.26}$$

Entonces

$$x(t) = \frac{eE_0 \cos \omega t}{m [\omega_0^2 - \omega^2 + 2a\omega_0 \cos \beta t]}. \tag{5.27}$$

Con esto se tiene que

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{x} = \frac{e^2 E_0 \cos \omega t}{m [\omega^2 - \omega_0^2 - 2a\omega_0 \cos \beta t]}$$

Y recordando que

$$\mathbf{p} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$$

Se obtiene

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0(\omega^2 - \omega_0^2 - 2a\omega_0 \cos \beta t)} \quad (5.28)$$

A frecuencias ópticas  $\epsilon/\epsilon_0 = n^2$ , donde  $n$  es el índice de refracción, por lo tanto

$$n(t) = -\frac{1}{\cos \beta t} \left[ \cos^2 \beta t - \frac{Ne^2 \cos \beta t}{2a\omega_0 \epsilon_0} \right], \quad (5.29)$$

donde se ha considerado que el sistema esta en resonancia, es decir,  $\omega \approx \omega_0$  y que cada esfera contribuye con  $N$  electrones. Otra forma de obtener un índice de refracción negativo es haciendo que los momentos dipolares oscilen defasados con respecto al campo incidente de la siguiente manera

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -x_0 \sin \omega t, \quad (5.30)$$

donde surge un signo negativo de manera natural. Lo que significa esto es que hay que hacer arreglos de nanoesferas tal que la perturbación entre estas genere un defasamiento de  $90^\circ$  en las oscilaciones de los momentos dipolares.

Un resultado relevante de la ecuación (5.29) es que para algunos períodos de tiempo este índice es negativo. Con esto se muestra que es posible hacer arreglos de nanopartículas que generen a un metamaterial.

# Capítulo 6

## Conclusiones Generales y trabajos futuros

### 6.1. Conclusiones Generales

En este trabajo de tesis se calculó la frecuencia a la cual en una esfera metálica surgen los plasmones dipolares. Se describieron los plasmones dipolares como ondas de densidad, en donde su promedio temporal tiene asociado un momento dipolar el cual se obtuvo resolviendo la ecuación diferencial para el oscilador armónico. Se mostró que la predicción teórica es consistente con los resultados experimentales previamente reportados en la literatura óptica. Se encontró que el tiempo de vida de la excitación plasmónica es de  $0.1\mu s$ , sin considerar las interacciones con el medio, colisiones entre partículas y vibraciones mecánicas de la red cristalina del metal. Se puso particular interés en proponer un modelo clásico que describa, sin pérdida de percepción física, los fenómenos observados experimentalmente. El modelo que se estableció es el sistema mecánico masa-resorte y se hizo para dos estados ortogonales de polarización. En el caso donde se ilumina con luz de polarización tipo  $P$  se obtuvieron dos frecuencias características, pero solo una es consistente con el experimento. Para el caso donde se ilumina con luz de polarización tipo  $S$  se tiene un número infinito de modos de oscilación, este problema se simplificó al considerar la variación de la frecuencia como un parámetro que depende del tiempo dando así una

frecuencia característica que es consistente con las observaciones experimentales reportadas en [10, 19, 20, 21, 22]. Se encontraron las condiciones para las cuales las nanopartículas presentan índice de refracción negativo, lo cual ofrece la posibilidad de sintetizar metamateriales. Por lo tanto, se concluye que estos modelos se acoplan satisfactoriamente a los resultados que se obtuvieron en los experimentos.

## 6.2. Trabajos futuros

Un punto de interés es el de tratar de obtener un modelo clásico para describir los procesos de emisión y fluorescencia observados en nanopartículas en la etapa transitoria de excitación plasmónica. Otro punto también importante es sintetizar y modelar metamateriales utilizando nanopartículas como unidad básica.

# Apéndice A

## Ondas Esféricas como Solución a la Ecuación de Onda Escalar.

A un campo escalar que satisface la ecuación de onda libre de fuentes [12]

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.1})$$

se le hace un análisis de Fourier en el dominio del tiempo de la siguiente forma

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{exp}(-i\omega t) d\omega, \quad (\text{A.2})$$

donde cada componente debe satisfacer la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (\text{A.3})$$

donde  $k^2 = \omega^2/c^2$ . Para problemas que posean propiedades de simetría al rededor de algún origen, es conveniente tener soluciones fundamentales apropiadas para coordenadas esféricas. La representación del operador Laplaciano en coordenadas esféricas está dado como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0.$$

La separación de variables angular y radial se obtiene de la expansión

---


$$\Psi(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{l,m} f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.4})$$

donde los armónicos esféricos están definidos por la expresión

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \mathbf{exp}(im\phi). \quad (\text{A.5})$$

Las funciones radiales  $f_{lm}(r)$  satisfacen la ecuación radial, independiente de  $m$ ,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(r) = 0, \quad (\text{A.6})$$

con la sustitución,

$$f_l(r) = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} u_l(r), \quad (\text{A.7})$$

la ecuación (A.6) se transforma en

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (\text{A.8})$$

La expresión anterior es la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (\text{A.9})$$

pero con la sustitución  $\nu = l + 1/2$ . Entonces las soluciones para  $f_{lm}(r)$  son

$$f_{lm}(r) = \frac{A_{lm}}{r^{\frac{1}{2}}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + \frac{B_{lm}}{r^{\frac{1}{2}}} N_{l+\frac{1}{2}}(kr). \quad (\text{A.10})$$

Se acostumbra definir las funciones esféricas de Bessel y de Hankel, denotadas por  $j_l(x)$ ,  $n_l(x)$  y  $h_l^{(1,2)}(x)$ , como

$$j_l(x) = \left( \frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x),$$

$$n_l(x) = \left( \frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(x),$$

$$h_l^{(1,2)}(x) = \left( \frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ J_{l+\frac{1}{2}}(x) \pm i N_{l+\frac{1}{2}}(x) \right],$$



para  $x$  real,  $h_l^{(2)}(x)$  es el complejo conjugado de  $h_l^{(1)}(x)$ .

De las expansiones en serie

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x^{2j}}{2}\right) \quad (\text{A.11})$$

y

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j - \nu + 1)} \left(\frac{x^{2j}}{2}\right), \quad (\text{A.12})$$

se puede mostrar que

$$j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad (\text{A.13})$$

$$n_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\cos x}{x}\right) \quad (\text{A.14})$$

De las series (A.11) y (A.12), y la definición

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (\text{A.15})$$

es posible calcular  $j_l(x)$  y  $n_l(x)$  para  $(x \ll 1, l)$

$$j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots\right) \quad (\text{A.16})$$

$$n_l(x) \rightarrow \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \left(1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots\right), \quad (\text{A.17})$$

donde  $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3) \dots (5)(3)(1)$ .

Similarmente cuando  $x \gg 1$  se tiene

$$j_l(x) \rightarrow \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \quad (\text{A.18})$$

$$n_l(x) \rightarrow -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \quad (\text{A.19})$$

$$h_l^{(1)}(x) \rightarrow (-i)^{l+1} \frac{\exp(ix)}{x}. \quad (\text{A.20})$$

Las funciones esféricas de Bessel satisfacen las fórmulas de recursión

---


$$\frac{2l+1}{x}z_l(x) = z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x) \quad (\text{A.21})$$

$$z'_l(x) = \frac{1}{2l+1}[lz_{l-1}(x) - (l+1)z_{l+1}(x)] \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d}{dx}[xz_l(x)] = xz_{l-1}(x) - lz_l(x), \quad (\text{A.23})$$

donde  $z_l(x)$  es alguna de las funciones  $j_l(x)$ ,  $n_l(x)$ ,  $h_l^{(1)}(x)$  o  $h_l^{(2)}(x)$ .

La solución general de (A.3) en coordenadas esféricas puede ser escrita de la siguiente forma

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} [A_{lm}^1 h_l^{(1)}(kr) + A_{lm}^2 h_l^{(2)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.24})$$

donde los coeficientes  $A_{lm}^1$  y  $A_{lm}^2$  serán determinados por las condiciones de frontera.

Con el propósito de referencia presentamos la expansión en ondas esféricas para la función de Green (alejándose de la fuente),  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , la cual es apropiada para la ecuación

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{A.25})$$

en el dominio infinito. Esta función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{A.26})$$

Una expansión de la forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l,m} g_l(r, r') Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (\text{A.27})$$

sustituída en (A.25) conduce a una ecuación para  $g_l(r, r')$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_l = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (\text{A.28})$$

La solución que satisface la condición de frontera de *infinites* en el origen y que sea una onda dirigida hacia el infinito es

---

$$g_l(r, r') = A j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}), \quad (\text{A.29})$$

la correcta discontinuidad es asegurada si  $A = ik$ . Entonces la expansión de la función de Green es

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (\text{A.30})$$

Esta expresión es muy útil para calcular el potencial vectorial, en cualquier región, debido a fuentes oscilantes localizadas.

## Apéndice B

# Esfera Conductora en un Campo Eléctrico Uniforme.

El presente desarrollo se lleva acabo utilizando el Método de imágenes [11]. Consideremos una esfera conductora de radio  $a$  en un campo eléctrico uniforme  $E_0$ . Este campo puede ser producido por dos cargas, una positiva y una negativa, en el infinito. Por ejemplo, si hay dos cargas  $\pm Q$ , localizadas en  $z = \pm R$ , como se muestra en la figura (B.1). Enntonces, en una región cercana al origen, cuyas dimensiones son muy pequeñas comparadas con  $R$ , existe un campo eléctrico casi constante

$$E_0 = 2Q/4\pi\epsilon_0 R^2,$$

paralelo al eje  $Z$ . En el límite cuando  $R, Q \rightarrow \infty$ , con  $Q/R^2$  constante, esta aproximación se hace exacta.

Ahora si colocamos una esfera conductora de radio  $a$  en el origen, el potencial (en el punto  $P$ ) será producido por las cargas  $\pm Q$  en  $Z = \mp R$  y sus imágenes  $\mp \frac{Qa}{R}$  en  $Z = \mp \frac{a^2}{R}$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{aQ}{R(r^2 + \frac{a^4}{R^2} + \frac{2a^2r}{R} \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{aQ}{R(r^2 + \frac{a^4}{R^2} - \frac{2a^2r}{R} \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\Phi$  ha sido expresado en términos de las coordenadas esféricas con respecto al punto de observación. En los dos primeros términos  $R \gg r$ , por lo que sí se factoriza  $R^2$  y expandimos los radicales. Similarmente en el tercero y el cuarto término factorizamos  $r^2$  y expandimos para obtener

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2Q}{R^2} r \cos \theta + \frac{2Q}{R^2} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \right\} + \dots, \quad (\text{B.2})$$

donde los términos omitidos tienden a cero conforme  $R \rightarrow \infty$ . En ese límite el campo eléctrico uniforme que aplicamos es  $E_0 = 2Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ , así que en ese mismo límite el potencial se puede expresar de la siguiente forma

$$\Phi = -E_0 \left\{ r - \frac{a^3}{r^2} \right\} \cos \theta. \quad (\text{B.3})$$

El primer término es, por supuesto, el potencial producido por el campo eléctrico  $E_0$ . El segundo término es el potencial debido a la densidad de carga inducida o equivalentemente a las cargas imagen. Cabe observar que las cargas imagen forman un dipolo eléctrico con momento dipolar

$$\mathbf{p} = \frac{2Qa^3}{R^2}, \quad (\text{B.4})$$

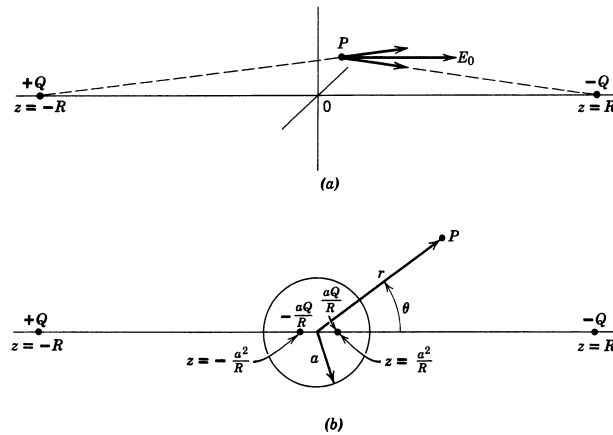


Figura B.1: (a) Forma de generar un campo eléctrico uniforme, (b) Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme.

---

si del campo eléctrico aplicado  $E_0 = 2Q/4\pi\epsilon_0 R^2$  despejamos  $2Q/R^2$  podemos escribir al momento dipolar en la siguiente forma

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3. \quad (\text{B.5})$$

La densidad de carga inducida es

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta, \quad (\text{B.6})$$

Se aprecia que la integral de superficie de esta densidad superficial de carga es cero, así que no hay diferencia entre una esfera aterrizada y una aislada.

## Apéndice C

# Esfera Dieléctrica en un Campo Eléctrico Uniforme

Una esfera de material dieléctrico lineal y homogéneo, de radio  $a$ , está ubicada en un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}_0$  (Fig. C.1).

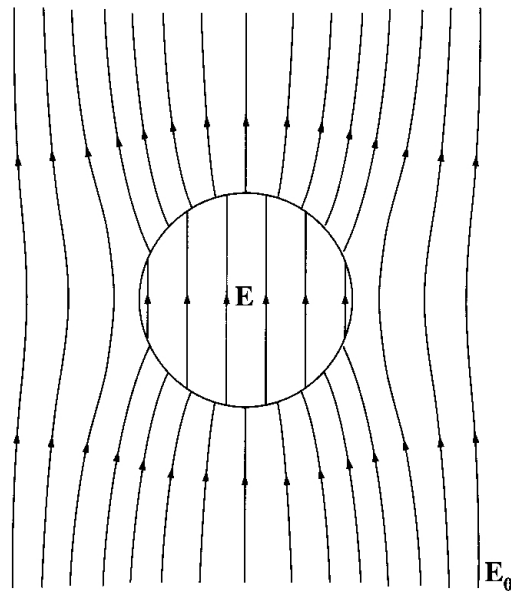


Figura C.1: Esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}_0$

Nuestro problema es resolver la ecuación de Laplace para  $\Phi_{in}(r, \theta)$  cuando  $r < a$

---

y  $\Phi_{out}(r, \theta)$  cuando  $r \geq a$ . Sujeto a las condiciones de frontera

1.  $\Phi_{in} = \Phi_{out}$  en  $r = a$
2.  $\epsilon \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r}$  en  $r = a$
3.  $\Phi_{out} \rightarrow -E_0 r \cos \theta$  para  $r \gg a$

- Dentro de la esfera, la solución general es

$$\Phi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta),$$

el segundo término entre paréntesis no se debe tomar en cuenta, ya que se indefinire en  $r = 0$ . Entonces la solución es

$$\Phi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (\text{C.1})$$

- Afuera de la esfera:

Tomemos la solución general

$$\Phi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta),$$

cuando  $r \gg a$ , el primer término entre paréntesis tiende a infinito, por lo que no se debe tomar en cuenta. Además, tomando en cuenta la condición (3), tenemos que el potencial es

$$\Phi_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{l+1} P_l(\cos \theta). \quad (\text{C.2})$$

La condición de frontera (1) requiere que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) = -E_0 a \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta). \quad (\text{C.3})$$

Desarrollando esta expresión



---


$$A_0 + A_1 a \cos \theta + A_2 a^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} + \dots = -E_0 a \cos \theta + \frac{B_0}{a} + \frac{B_1}{a^2} \cos \theta + \dots,$$

Para que esta igualdad se cumpla, los coeficientes para cada  $l$  deben ser iguales, es decir

$$A_0 = \frac{B_0}{a}$$

$$A_1 a = -E_0 a + \frac{B_1}{a^2}$$

⋮

$$A_l a^l = \frac{B_l}{a^{l+1}} \quad \text{para } l \neq 1$$

Se aprecia que las dos ecuaciones que describen a todos los términos de esta serie son

$$A_l a^l = \frac{B_l}{a^{l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \tag{C.4}$$

y

$$A_1 a = -E_0 a + \frac{B_1}{a^2}. \tag{C.5}$$

Ahora, de la condición (2) se tiene que

$$\epsilon_r \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r} \quad \text{en } r = a.$$

Calculando las derivadas, evaluándolas en  $r = a$  e igualándolas, se obtiene

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) B_l}{a^{l+2}} P_l(\cos \theta), \tag{C.6}$$

donde  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ . En este caso, las ecuaciones que describen toda esta serie son

$$\epsilon_r l A_l a^{l-1} = -\frac{(l+1) B_l}{a^{l+2}}, \quad \text{para } l \neq 1 \tag{C.7}$$

---

y

$$\epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{a^3}. \quad (\text{C.8})$$

Se han obtenido dos sistemas de ecuaciones

$$a^l A_l + \frac{B_l}{a^{l+1}} = 0, \quad \epsilon_r l a^{l-1} A_l + \frac{(l+1)}{a^{l+2}} B_l = 0 \quad (\text{C.9})$$

y

$$A_1 a - \frac{B_1}{a^2} = -E_0 a, \quad \epsilon_r A_1 + \frac{2}{a^3} B_1 = -E_0. \quad (\text{C.10})$$

Resolviendo se obtiene

$$A_l = B_l = 0, \quad \text{para } l \neq 1$$

$$A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad y \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} a^3 E_0 \quad (\text{C.11})$$

Sustituyendo en las ecuaciones (C.1) y (C.2), se tiene que los potenciales dentro y fuera de la esfera son

$$\Phi_{in}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta \quad (\text{C.12})$$

y

$$\Phi_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \cos \theta \quad (\text{C.13})$$

En esta última expresión, el primer término se debe al campo externo aplicado y el segundo a la distribución de carga de polarización en la superficie de la esfera.

Por último se calcula el campo eléctrico en ambas regiones.

$$\mathbf{E}_{out}(r, \theta) = -\nabla \Phi_{out}(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \cos \theta \right) \hat{r}$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \cos \theta \right) \hat{\theta}$$

---

Calculando las derivadas indicadas y evaluando en la superficie, se obtiene

$$\mathbf{E}_{\text{out}}(a, \theta) = \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \left( \epsilon_r \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \right). \quad (\text{C.14})$$

Análogamente, el campo interno, evaluado en la superficie, es

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(a, \theta) = \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \left( \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \right). \quad (\text{C.15})$$

Se observa que las componentes normales (radiales) del campo eléctrico evaluadas en la superficie son discontinuas, ya que difieren en un factor de  $\epsilon_r$ , mientras que las tangenciales (polares) son continuas.

Se ha supuesto que la esfera está hecha de un material isotrópico, homogéneo y lineal, por lo que la polarización es proporcional al campo eléctrico interno

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{\text{in}} = \epsilon_0 \chi_e \left( \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \hat{r} \right), \quad (\text{C.16})$$

pero

$$\chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 = \epsilon_r - 1.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{P} = 3\epsilon_0 E_0 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \hat{r}. \quad (\text{C.17})$$

El momento dipolar se calcula a partir de la ecuación

$$|\mathbf{p}| = \int |\mathbf{P}| dV = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} a^3 E_0 \right). \quad (\text{C.18})$$

# Apéndice D

## Expansión Multipolar

Una distribución de carga localizada está descrita por la densidad de carga  $\rho(\mathbf{x}')$ , la cual no se hace cero excepto fuera de una esfera de radio  $R$ . El potencial fuera de la esfera puede ser escrito como una expansión de armónicos esféricos

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}. \quad (\text{D.1})$$

La ecuación (D.1) es la expansión multipolar; el término con  $l = 0$  es el término *monopolar*, con  $l = 1$  es el *dipolar*, etc. El problema a resolver es la determinación de las constantes  $q_{lm}$  en términos de las propiedades de la densidad de carga  $\rho(\mathbf{x}')$ . La solución se obtiene de la expresión para el potencial

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (\text{D.2})$$

y la expansión

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (\text{D.3})$$

Ya que en este momento se tiene interés por el potencial afuera de la distribución de carga,  $r_{<} = \mathbf{x}'$ ,  $r_{>} = \mathbf{x}$ , o bien  $r_{<} = r'$ ,  $r_{>} = r$ . Sustituyendo (D.3) en (D.2) se encuentra

---


$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[ \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3x' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (\text{D.4})$$

comparando esta expresión con (D.1) se obtiene que

$$q_{lm} = \int \rho(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') d^3x'. \quad (\text{D.5})$$

Estos coeficientes son los llamados *momentos multipolares*. Para ver la interpretación física de éstos, escribamos explícitamente los primeros seis en coordenadas cartesianas.

▪  $q_{00}$

$$q_{00} = \int \rho(\mathbf{x}') r'^0 Y_{00}^*(\theta', \phi') d^3x',$$

donde

$$Y_{00}^*(\theta', \phi') = \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \right]^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

entonces

$$q_{00} = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{\sqrt{4\pi}} d^3x' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}.$$

▪  $q_{11}$

$$q_{11} = \int \rho(\mathbf{x}') r'^1 Y_{11}^*(\theta', \phi') d^3x',$$

donde

$$Y_{11}^*(\theta', \phi') = \left[ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{i\phi'} \right]^* = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{-i\phi'}.$$

Se tiene que  $\phi'$  es el ángulo que forma la proyección del vector  $\mathbf{x}'$  sobre el plano (x,y), por consiguiente en coordenadas polares se tiene

$$x' = r'' \cos \phi', \quad y' = r'' \sin \phi',$$

entonces

---

$$e^{-i\phi'} = \cos \phi' - i \sin \phi' = \frac{x'}{r''} - i \frac{y'}{r''},$$

de aquí

$$q_{11} = \int \rho(\mathbf{x}') r' \frac{(x' - iy')}{r''} \left[ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' \right] d^3 x',$$

pero

$$\sin \theta' = \frac{r''}{r'},$$

por lo tanto

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') (x' - iy) d^3 x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y).$$

▪  $q_{10}$

$$q_{10} = \int \rho(\mathbf{x}') r' Y_{10}^*(\theta', \phi') d^3 x',$$

donde

$$Y_{10}^*(\theta', \phi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta',$$

entonces

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') r' \cos \theta' d^3 x',$$

pero

$$z' = r' \cos \theta',$$

por lo tanto

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') z' d^3 x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z.$$

▪  $q_{22}$

---


$$q_{22} = \int \rho(\mathbf{x}') r'^2 Y_{22}^*(\theta', \phi') d^3 x',$$

donde

$$Y_{22}^*(\theta', \phi') = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta' e^{-i2\phi'},$$

entonces

$$q_{22} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \left[ \int 3\rho(\mathbf{x}') x'^2 d^3 x' - 2i \int 3\rho(\mathbf{x}') x' y' d^3 x' - \int 3\rho(\mathbf{x}') y'^2 d^3 x' \right],$$

si se hace

$$Q_{11} = \int 3\rho(\mathbf{x}') x'^2 d^3 x',$$

$$Q_{12} = \int 3\rho(\mathbf{x}') x' y' d^3 x'$$

y

$$Q_{22} = \int 3\rho(\mathbf{x}') y'^2 d^3 x',$$

se tiene que

$$q_{22} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} [Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}].$$

▪  $q_{21}$

$$q_{21} = \int \rho(\mathbf{x}') r'^2 Y_{21}^*(\theta', \phi') d^3 x',$$

donde

$$Y_{21}^*(\theta', \phi') = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta' \cos \theta' e^{-i\phi'},$$

entonces

$$q_{21} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \left[ \int 3z' x' \rho(\mathbf{x}') d^3 x' - i \int 3z' y' \rho(\mathbf{x}') d^3 x' \right],$$

si se hace

$$Q_{13} = \int 3z' x' \rho(\mathbf{x}') d^3 x'$$

---

y

$$Q_{23} = \int 3z'y'\rho(\mathbf{x}')d^3x'$$

se obtiene

$$q_{21} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(Q_{13} - iQ_{23}).$$

▪  $q_{20}$

$$q_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Q_{33},$$

donde

$$Q_{33} = \int (3z'^2 - r'^2)\rho(\mathbf{x}')d^3x'.$$

Por lo anterior se escribe una expresión general para las  $Q_{ij}$  de la siguiente manera

$$Q_{ij} = \int (3x'_ix'_j - r'^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')d^3x'.$$

Solamente se han dado los momentos con  $m \geq 0$ , ya que la expresión

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi),$$

muestra que para una densidad de carga real, los momentos con  $m < 0$  son relacionados a través de

$$q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*. \quad (\text{D.6})$$

En las expresiones para los momentos, es decir, en  $q_{00}$ ,  $q_1$ ,  $q_{10}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{21}$  y  $q_{20}$ ,  $q$  es la carga total o *el momento monopolar*,  $\mathbf{p}$  es *el momento dipolar eléctrico*

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3x', \quad (\text{D.7})$$

y  $Q_{ij}$  es *el tensor momento cuadrupolar*:



---


$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') d^3 x'. \quad (\text{D.8})$$

Se observa que los  $l$  coeficientes multipolares ( $[2l + 1]$  en número), son combinaciones lineales de los correspondientes multipolos expresados en coordenadas rectangulares.

Si se asume que  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ , entonces es posible expandir en serie de Taylor el inverso de la distancia como

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots,$$

insertando esta expansión en la expresión para el potencial (D.2) se obtiene

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]. \quad (\text{D.9})$$

Es importante observar que si se desarrolla la expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} &= \frac{1}{2r^5} [(Q_{11}x_1x_1 + Q_{21}x_2x_1 + Q_{31}x_3x_1) + \\ &(Q_{12}x_1x_2 + Q_{22}x_2x_2 + Q_{32}x_3x_2) + (Q_{13}x_1x_3 + Q_{23}x_2x_3 + Q_{33}x_3x_3)], \end{aligned}$$

donde  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ , se obtienen idénticamente los términos de orden superior de la serie de Taylor de  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  multiplicados por  $\rho(\mathbf{x}')$ .

También se nota que se hace incómodo (tedioso) continuar la expansión (D.9) más allá de los términos cuadrupolares.

Las componentes del campo eléctrico para un multipolo dado se expresan más fácilmente en términos de las coordenadas esféricas. El negativo del gradiente en coordenadas esféricas de un término en (D.1), con  $l, m$  definidas, tiene componentes esféricos

$$E_r = \frac{(l+1)}{(2l+1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+2}} \quad (\text{D.10})$$

$$E_\theta = \frac{1}{(2l+1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{D.11})$$

---


$$E_\phi = -\frac{1}{(2l+1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{im}{\sin\theta} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (\text{D.12})$$

Para un dipolo  $\mathbf{p}$  a lo largo del eje  $z$ , los campos de las ecuaciones (D.10), (D.11) y (D.12) se reducen a la forma

$$E_r = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{D.13})$$

$$E_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{D.14})$$

$$E_\phi = 0. \quad (\text{D.15})$$

Estos campos dipolares son escritos en forma vectorial al combinar estas tres ecuaciones ú operando directamente con el negativo del gradiente del término dipolar en (D.9). El resultado para el campo en el punto  $\mathbf{x}$  debido a un dipolo  $\mathbf{p}$  en el punto  $\mathbf{x}_0$  es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}, \quad (\text{D.16})$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario dirigido de  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}$ .

# Índice de figuras

1.1. Ejemplos de nanoestructuras hechas por el hombre. (a) Moléculas fuertemente fluorescentes, (b) Nanoesferas fabricadas con litografía, (c) Fuente fotonica localizada, (d) Microdisco resonador, (e) Nanoestructuras semiconductoras, (f) Partículas plasmónicas, (g) Cristal fotónico, (h) Materiales nanocompositos, (i) Microcavidades láser, (j) Fuentes de un solo fotón, (k) Guía de onda plasmónica. [2] . . . . .	2
1.2. Guía de onda plana: los plamones siempre fluyen a lo largo de la frontera entre un metal y un dieléctrico. [5] . . . . .	6
1.3. Guía de onda de ranura. [5] . . . . .	7
1.4. Interruptor Plasmonster esta compuesto de guías de onda de ranura que miden 100 nm en sus partes más anchas y 20 nm en las intersecciones. [5] . . . . .	8
2.1. Imagen auxiliar para hacer evidente la aproximación (2.8) . . . . .	16
3.1. Esparcimiento debido a una partícula cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación incidente. . . . .	30
3.2. Vectores de propagación y polarización de la radiación incidente y esparcida. [12] . . . . .	31
3.3. Sección diferencial transversal (3.17) y la polarización de la radiación esparcida (3.16) para una pequeña esfera dieléctrica (en la aproximación dipolar). [12] . . . . .	33

3.4. Sección diferencial transversal (3.25) y la polarización de la radiación esparcida (3.26) para una pequeña esfera conductora perfecta (aproximación dipolar eléctrica y magnética). [12] . . . . .	35
4.1. Patrón de difracción debido a una esfera cuyas dimensiones son mayores a la longitud de onda del campo incidente. . . . .	37
4.2. Dipolo inducido sobre una esfera metálica, cuyas dimensiones son menores que $\lambda/2$ , colocada en una región donde fluye luz linealmente polarizada. . . . .	37
4.3. Imagen de una esfera de oro de 50nm de diámetro tomada con un microscopio de fuerza atómica (Scientific American 2007). . . . .	42
4.4. . . . . .	47
4.5. Dipolos paralelos a la línea que une a sus centros. . . . .	48
4.6. Dipolos perpendiculares a la línea que une a sus centros. . . . .	48
5.1. Espectro de la extinción de luz ( $=\log(1/\text{Transmisión})$ ) de un par de nanopartículas de oro. (a) La polarización de la luz incidente es paralelo al eje que une a los centros de las nanopartículas, (b) polarización ortogonal [10]. . . . .	51
5.2. (a) Polarización P: la dirección de polarización de la luz incidente es paralela al eje que divide a las partículas, (b) Polarización S: la dirección de polarización de la luz es perpendicular al eje que divide a las partículas. . . . .	52
5.3. Ilustración que muestra la analogía mecánica de la interacción electromagnética entre nanopartículas cercanas, (a) partícula aislada, (b) par de partículas iluminadas con luz polarizada tipo P y (c) polarizada tipo S. . . . .	52
5.4. Modelo para dos nanopartículas iluminadas con luz polarizada tipo P.	53
5.5. Línea Negra: Gráfica de la longitud de onda contra la distancia de separación entre nanopartículas (obtenida del experimento realizado en [10] ). Línea Roja: Ajuste obtenido con Origin. . . . .	56
5.6. Dipolos inducidos sobre dos nanopartículas por luz con polarización tipo S. . . . .	58

5.7. Proyección de la suma vectorial de los dipolos cruzados. . . . . 58

5.8. Proyecciones de los dipolos cruzados en instantes de tiempo diferentes. 59

5.9. Gráfica que muestra el comportamiento de la longitud de onda observada en [10] con respecto a variaciones de la distancia de separación de las dos nanoesferas. . . . . 61

B.1. (a) Forma de generar un campo eléctrico uniforme, (b) Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme. . . . . 71

C.1. Esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}_0$  . . . . . 73

# Bibliografía

- [1] J. J. Mock, D. R. Smith, *Spectroscopic studies of individual plasmon resonant nanoparticles*. Proceeding of SPIE Vol. 5221 Plasmonics: Metallic Nanostructures and Their Optical Properties, 2003.
- [2] Lukas Novotny and Bert Hecht, *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] Stefan A. Maier, *Plasmonics: Fundamentals and Applications*. Springer Verlag, 2007.
- [4] William L. Barnes, Alain Dereux and Thomas W. Ebbesen, *Surface Plasmon Subwavelength Optics* in Nature, Vol. 424, pages 824-830; August 14, 2003.
- [5] Ekmel Ozbay, *Plasmonics: Merging Photonics and Electronics at Nanoscale Dimensions*. Science, Vol. 311, pages 189-193; January 13, 2006.
- [6] Stefan A. Maier and Harry A. Atwater, *Plasmonics: Localization and Guiding of Electromagnetic Energy in Metal/Dielectric Structures*. Journal of Applied Physics, Vol. 98, No. 1, Article No. 011101, 10 pages; July 2005.
- [7] Shigeki Saito, Hideki T. Miyazaki, Tomomasa Sato, Kunio Takahashi, and Tadao Onzawa, *Micro-object Operation Based on the Dynamic Analysis Considering the Adhesion under an SEM*, Proc. 7th International Welding Symposium, Vol.2, pp.1243-1250, Nov. 2001, Kobe, Japan.
- [8] L.R. Hirsch, A.M. Gobin, A.R. Lowery, F. Tam, R.A. Drezek, N.J. Halas, J.L. West *Metal Nanoshells* Annals of Biomedical Engineering 34(1), 15-22 (2006).

- [9] D. J. Bergman, M. I. Stockman *The spaser: a laser analog for nanotechnology*. Physical Review Letters, January 17, 2003.
- [10] W. Rechberger, A. Hohenau, A. Leitner, *Optical properties of two interacting gold nanoparticles*. Optics Communications, ELSEVIER, 2003.
- [11] Cecilia Noguez, *Optical Properties of Isolated and Supported Metal Nanoparticles*. Proceeding of LANL Server, Condensed Matter, 2004.
- [12] J. D. Jackson , *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, 1998.
- [13] Arfken and Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. John Wiley and Sons, 2005.
- [14] Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics* . John Wiley and Sons, 2005.
- [15] Cecilia Noguez, *Optical Properties of Isolated and Supported Metal Nanoparticles*. Proceeding of LANL Server, Condensed Matter, 2004.
- [16] Max Born and Emil Wolf, *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Seventh edition, 2002.
- [17] Jerry B. Marion, *Dinámica Clásica de la Partículas y Sistemas*. Reveté, Segunda edición, 1995.
- [18] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, Second Edition, 2003.
- [19] Philippe Colomban, Gwenael Gouadec , *Raman Spectroscopy of Nanostructures and Nanosized Materials*. Journal-ref: Journal of Raman Spectroscopy 38, 6 (2007) 598-603.
- [20] Z. C. Tu, Z. C. Ou-Yang, *Elastic theory of low-dimensional continua and its applications in bio- and nano-structures*. Review article for J. Comput. Theor. Nanosci.

- [21] Stephane Berciaud, Laurent Cognet, Philippe Tamarat, Brahim Lounis, *Observation of intrinsic size effects in the optical response of individual gold nanoparticles.*ournal-ref: Nano Letters 5, 3 (15/02/2005) 515.
- [22] Atif Imtiaz, Steven M. Anlage, John D. Barry, John Melngailis, *Nanometer-Scale Materials Contrast Imaging with a Near-Field Microwave Microscope.* Journal-ref: Nano Letters, 2007, Vol.7, No.4, pp.927-931.