Inversor ingenuo y Concurrencia para un Sistema Qutrit Entrelazado

Por

José Delfino Huerta Morales
LFA, buap

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en la especialidad de Óptica

en el

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica
Agosto 2015
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara
Investigador titular del INAOE

©INAOE 2015
Derechos reservados
El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes

Abstract

We have characterized the quantum entanglement of bipartite qutrit systems using concurrence. We intended to construct a naïve inverter that flips the spin of a qutrit with the help of Gell-Mann matrices. However, this works for just a type of states. Therefore, we defined a better way to get the spin-flipped density operator under the action of superoperators, also given in terms of Gell-Mann matrices.

We show that the naïve inverter can deliver equivalent information to that given by the formal inverter just in certain cases.

Resumen

Se caracteriza el entrelazamiento cuántico en un sistema bipartita de qutrits usando la medida de concurrencia. Para ello, pretendemos construir un inversor ingenuo que gira el espín del qutrit, con ayuda de las matrices de Gell-Mann. Sin embargo, se presentan problemas en la caracterización de cierto tipo de estados. Por lo tanto, proponemos una mejor forma de obtener la matriz de densidad del espín girado bajo la acción de súper operadores definidos a partir de las mismas matrices.

Comparamos los resultados para obtener la concurrencia, mostrando que el inversor ingenuo entrega información equivalente al inversor exacto sólo en algunos casos.

Agradecimientos

A dios que representa para mí, fe y esperanza. La fe que me impulsa a levantarme día a día y luchar por lo que anhelo y la esperanza en la vida, y la mejor manera de vivirla.

A mi más grande motivo que mi impulsa a levantarme de las derrotas y seguir adelante por nuevos triunfos, ustedes son sinónimo de todo, mi familia.

A ti mi luz y alegría que has estado en las buenas y sobre todo en las malas, porque me has enseñado a valorar las cosas y sobre todo a disfrutarlas. Porque eres mi motivación y ahora mi único yo.

En particular le agradezco a mis padres: Javier Méndez Robles y Francisca Huerta Morales por cada palabra de aliento, apoyo, confianza y muestras de amor. Ustedes son mi soporte, gracias por siempre estar conmigo.

A mi hermano Francisco Javier Méndez Huerta por ser mi amigo siempre dispuesto a escucharme, porque siempre estas cuando quiero hablar de lo que me apasiona, gracias porque cada vez que veía ese brillo en tus ojos me motivaba para seguir haciendo lo que me gusta, te quiero mucho Javi.

A mis hermanas, porque son un reflejo de lo importante que es la familia y cada uno de sus integrantes, en mi vida.

A la luz de mis ojos que pese a los malos momentos siempre has estado a mi lado permitiéndome compartir todos los matices de la vida. Gracias Ana porque siempre has sido parte de mi vida y ahora eres mi vida.

A mi asesor, el Dr. Blas Rodríguez Lara por todo lo que representaste en este proyecto y por tantas enseñanzas, un amigo, un profesor, un guía. Pero sobre todo gracias por la confianza y paciencia.

A mis sinodales, el Dr. Héctor Manuel Moya Cessa, Dr. Francisco Soto Eguibar y el Dr. Arturo Zuñiga Segundo, por su apreciable tiempo, comentarios y sugerencias que tuvieron con un servidor para crecer y aprender en cada momento durante la estancia en el programa de maestría culminada con este trabajo.

Finalmente, un agradecimiento especial al Consejo Nacional De Ciencia y Tecnología

(conacyt), por el apoyo financiero brindado en la realización de mis estudios en el instituto.

Dedicatoria

A todas las personas que son parte de mi vida, que tengo la dicha de tenerlas a mi lado y aquellas que ya no están de cuerpo presente pero siguen estando en mi mente.

Índice general

Abstract iii

Resumen v

Agradecimientos vii

Dedicatoria ix

1. Entrelazamiento cuántico 1
- 1.1. Formalismo de un estado entrelazado . . . 3
  - 1.1.1. Sistema bipartita . . . 3
  - 1.1.2. Sistema bipartita entrelazado . . . 4
- 1.2. Concurrencia de Wootters para sistemas bipartita de qubits . . . 4
  - 1.2.1. Súper operador; giro de espín de un qubit . . . 6
  - 1.2.2. Ejemplo de estado entrelazado de un sistema bipartita . . . 7
- 1.3. Concurrencia de Wootters para sistemas bipartita de qudits . . . 9

2. Sistema Qutrit Entrelazado 11
- 2.1. Estados bipartita qutrit . . . 11
- 2.2. Método exacto . . . 12
- 2.3. Inversor ingenuo y concurrencia para el sistema qutrit entrelazado . . . 13
- 2.4. Matriz de densidad del espín girado bajo la acción de los súper operadores $S_\mu[\rho]$ y $S_\nu[\rho]$ . . . 15
- 2.5. Concurrencia para diferentes estados entrelazados qutrit . . . 15
  - 2.5.1. Estado prueba simple . . . 16
  - 2.5.2. Estados prueba propagados . . . 17
- 2.6. Resultados numéricos . . . 19
  - 2.6.1. Estado Entrelazado . . . 19
  - 2.6.2. Estado Separable . . . 22

3. Conclusiones 25

A. Inversor universal 27

B. Hamiltoniano efectivo en la interacción campo: divisor de haz 31

C. Acción del operador de evolución $e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t}$ sobre los operadores de creación $\hat{a}_1^\dagger$ y $a_2^\dagger$ 33

Capítulo 1

Entrelazamiento cuántico

Cuando hablamos de mecánica cuántica, comúnmente lo primero que nos preguntamos es, ¿cuál es la diferencia con la mecánica clásica? La respuesta inmediata es que la mecánica clásica estudia el comportamiento de objetos macroscópicos y la mecánica cuántica el de objetos microscópicos. Sin embargo, existen otras propiedades que muestran una clara diferencia entre nuestra descripción del mundo clásico y el cuántico; un ejemplo de ello es algo tan cotidiano como el acto de realizar una medición.

Clásicamente, las propiedades físicas de cualquier objeto tienen una existencia independiente de la observación. Sin embargo, la medición es un tema trascendental en la mecánica cuántica, aquí las propiedades físicas de un objeto surgen como consecuencia de las mediciones realizadas al sistema. En otras palabras, cuando medimos en un sistema cuántico interferimos con el mismo. Es así que la observación es una de las características más sobresalientes de la teoría. Un ejemplo de la importancia de la medición, es la llamada paradoja del gato de Schrödinger, donde suponemos que un gato se encuentra encerrado en una caja junto con un mecanismo que puede liberar una toxina, que claramente mata al gato, si existe un decaimiento atómico. Entonces, el estado que describe al sistema será una superposición de estados: El gato muerto si la toxina es liberada y con la misma probabilidad el gato vivo si la toxina no es liberada, esto es,

$$|\Psi\rangle_{\text{toxina,gato}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\text{ liberada}\rangle_{\text{toxina}}|\text{muerto}\rangle_{\text{gato}} + |\text{no liberada}\rangle_{\text{toxina}}|\text{ vivo}\rangle_{\text{gato}}\Big). \tag{1.1}$$

Schrödinger construyó el "experimento mental" (*gedanken experiment*) descrito arriba para poder visualizar el comportamiento no clásico. La esencia del gato de Schrödinger es que mientras un objeto cuántico no sea medido, por lo general, puede estar en una superposición de estados, como si pudiera tener diferentes estados posibles al mismo tiempo. Esto se denomina superposición cuántica, en el gato de Schrödinger, el estado que describe al sistema es un gato vivo y muerto a la vez. Esta paradoja tenía como objetivo mostrar lo absurdo de las implicaciones de la teoría cuántica. Puesto que, tanto para Schrödinger como para Albert Einstein, todos estos comportamientos inusuales parecían intrigantes desde el punto de vista clásico. Einstein, expresó su inconformidad ante la indeterminación de las predicciones cuánticas, es decir, el problema con la medición y la no localidad de la teoría, que tiene que ver con lo que hoy se conoce como entrelazamiento cuántico. En un principio, esto fue descrito por Einstein como la superposición de dos o más alternativas clásicamente excluyentes.

Tal inconformidad, llevó a Einstein a ser uno de los más grandes defensores del argumento que la mecánica cuántica era una teoría incompleta. Al punto de desarrollar otro "*gedanken experiment*" que intentaba demostrar que la mecánica cuántica no describía adecuadamente el comportamiento de la naturaleza, este experimento mental resultó paradójico de tal forma hoy se le conoce como la paradoja EPR.

La paradoja EPR propuesta por Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen [1], está basada en lo que llamaban elementos de la realidad, que se refiere a lo siguiente: si una variable se puede predecir con certeza sin afectar el estado del sistema, entonces, la misma variable corresponde a un elemento de la realidad. Esto claramente no se cumple en la teoría cuántica. El objetivo de esta paradoja era mostrar que la teoría cuántica no es una teoría física completa, ya que no se incluyen elementos de la realidad en la misma. Para que la teoría fuera válida, se tenía que introducir una serie de elementos, que Einstein denominó variables ocultas, que permitían elaborar predicciones deterministas arribando irremediablemente a efectos no locales en la teoría cuántica. El experimento planteado por Einstein, Podolsky y Rosen consistió en tomar un par de partículas, A y B, que interactúan en el pasado encontrándose en un estado superpuesto, tal que, ahora que están separadas por una gran distancia son medidas por un par de observadores. El primer observador mide la partícula A, determinando así su estado, el concepto clave es que al realizar la medición en A también se está determinando el estado de la partícula B. Para Einstein esto era inaceptable, ¿Cómo era posible que medir algo en A afectara algo que está muy lejos? A este comportamiento no local de la teoría cuántica Einstein lo denominó "fantasmagórica acción a distancia". Más tarde, Erwin Schrödinger es quien acuñó el término *Verschänkung* [2] palabra alemana, traducida al inglés como *Entanglement*, es decir, entrelazamiento o enredamiento cuántico. Para Einstein era inaceptable que la teoría cuántica tuviera predicciones de efectos no locales, es por ello que el objetivo principal de la paradoja EPR era mostrar que la idea de la fantasmagórica acción a distancia sólo eran pruebas que la mecánica cuántica carecía de realismo físico, siendo una teoría incompleta.

El experimento mental propuesto por Einstein y sus colegas constituyó uno de los cuestionamientos más fuertes que recibió la mecánica cuántica, pero a la vez funcionó como un poderoso estimulante para la comunidad científica que profundizó en tales fenómenos poco explorados y no del todo entendidos. Posterior a la paradoja EPR, le siguieron una serie de publicaciones entre ellas las de D. Bohm y J. S. Bell [3–5], que llegaron a demostrar que ninguna teoría determinista local de variables ocultas es consistente con la mecánica cuántica. Lo cual implica que la teoría cuántica no necesariamente tiene que ser local, en consecuencia, es válido pensar en el fenómeno de entrelazamiento cuántico. Tales aseveraciones se conocen como el teorema de Bell, fundamento del desarrollo de las desigualdades definidas con el mismo nombre.

Las violaciones a las desigualdades de Bell son las primeras pruebas de entrelazamiento, por ejemplo, los trabajos de Alain Aspect, Philippe Grangier y Gerard Roger [6–9], demuestran experimentalmente violaciones a las desigualdades de Bell, es decir, la existencia del entrelazamiento cuántico. En esta serie de artículos miden correlaciones entre las polarizaciones lineales de pares de fotones mismos que son emitidos en una cascada radiactiva de átomos de calcio [6, 7]. Los experimentos de Alain Aspect y sus colegas establecieron que

tales fenómenos cuánticos pueden ser medidos en el laboratorio, difíciles de imaginar y encontrarles sentido pero al final de cuentas posibles. Se comprueba que la teoría cuántica es una descripción, al parecer, adecuada de la realidad. Es así como se da paso a una teoría de la naturaleza totalmente nueva y prometedora para el desarrollo y creación de nuevas tecnologías.

1.1. Formalismo de un estado entrelazado

El entrelazamiento cuántico es un fenómeno considerado como la esencia misma de lo cuántico. Consiste en fuertes correlaciones entre estados, de tal modo, que no pueden ser representados como productos de estados cuánticos. Dicho lo anterior, queda claro que el entrelazamiento cuántico se manifiesta a partir de sistemas bipartita, es decir, únicamente tiene sentido hablar de dos o más sistemas cuánticos entrelazados. Para visualizar lo anterior en una expresión matemática, comencemos por dar el formalismo de la mecánica cuántica usando el lenguaje de vectores de estados y operadores de densidad.

1.1.1. Sistema bipartita

En un sistema bipartita consideramos dos subsistemas A y B asociados al espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ respectivamente. Ahora bien, sea $\{|i\rangle\,, \quad i = 0, 1, 2, 3, ...\}$ una base para el subsistema A y $\{|j\rangle\,, \quad j = 0, 1, 2, 3, ...\}$ la base correspondiente para el subsistema B. Ambas bases son ortonormales y pertenecen al espacio de Hilbert correspondiente $\mathcal{H}_A$ o $\mathcal{H}_B$ dependiendo del sistema. Entonces, cualquier estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ puede ser escrito como un sistema compuesto de la forma,

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B. \tag{1.2}$$

Por lo tanto, el operador de densidad de un estado puro para el sistema bipartita puede ser representado en términos de las bases, tal que,

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{ijkl} C_{ij} C^*_{kl} |i\rangle_A \langle k| \otimes |j\rangle_B \langle l| \\ &= \sum_{ijkl} \rho_{ij,kl} |i\rangle_A \langle k| \otimes |j\rangle_B \langle l|\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Las matrices parciales se pueden definir como:

$$\rho_A = Tr_B\{\rho\} = \sum_j \langle j|\rho|j\rangle = \sum_{i,j,k} \rho_{ij,kj} |i\rangle_A \langle k|\,, \tag{1.4}$$

$$\rho_B = Tr_A\{\rho\} = \sum_i \langle i|\rho|i\rangle = \sum_{i,j,l} \rho_{ij,il} |j\rangle_B \langle l|\,. \tag{1.5}$$

Al obtener las matrices parciales estamos trazando sobre uno de los subsistemas quitándonos información fuera de la diagonal que corresponde a las coherencias del sistema.

1.1.2. Sistema bipartita entrelazado

Observemos la superposición de estados del sistema bipartita Ec. 1.2. Para el caso de estados separables, estos se pueden representar como un producto de estados cuánticos de la forma,

$$|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle \,. \tag{1.6}$$

Donde $|\Psi_A\rangle$ describe al estado del subsistema A y $|\Psi_B\rangle$ describe al estado del subsistema B. Es decir, algunos vectores de estado $|\Psi\rangle$ se pueden descomponer en un producto tensorial de estados de cada subsistema.

Para un estado entrelazado esto no es posible. La representación matemática de un estado entrelazado por medio del vector de estado la podemos visualizar en el caso más sencillo de un sistema bipartita de dos niveles. Consideramos dos partículas que pueden estar en cualquiera de los dos estados o subsistemas, los estados posibles son,

$$\begin{array}{ll} \left|\Psi_A^1\right\rangle, & \text{Partícula 1 en el estado A} \\ \left|\Psi_B^1\right\rangle, & \text{Partícula 1 en el estado B} \\ \left|\Psi_A^2\right\rangle, & \text{Partícula 2 en el estado A} \\ \left|\Psi_B^2\right\rangle, & \text{Partícula 2 en el estado B} \end{array}$$

El estado que describe al sistema está dado por la superposición de estados,

$$|\Psi\rangle = C_1 \left|\Psi_A^1\right\rangle \otimes \left|\Psi_B^2\right\rangle + C_2 \left|\Psi_A^2\right\rangle \otimes \left|\Psi_B^1\right\rangle, \tag{1.7}$$

donde $|C_1|^2 + |C_2|^2$ con $C_1, C_2 \neq 0$.

Se trata de un estado entrelazado porque el estado no se puede factorizar en un producto tensorial de estados de los subsistemas.

La definición general de un estado cuántico entrelazado se da en términos del operador de densidad, donde un sistema cuántico bipartita es separable si la matriz de densidad puede ser escrita como [5],

$$\rho = \sum_i P_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \tag{1.8}$$

donde ρ_i^A y ρ_i^B son las matrices de densidad para cada subsistema y la cantidad P_i satisface $\sum_i P_i = 1$. La expresión anterior nos dice que un estado separable ocurrirá cuando se pueda representar como una mezcla de matrices de densidad separables.

1.2. Concurrencia de Wootters para sistemas bipartita de qubits

La necesidad de cuantificar y caracterizar el grado de entrelazamiento de un sistema es importante e indispensable. Conocer el grado de enredo de los estados estudiados es tras-

cendental para el avance hacia nuevas tecnologías como: computación cuántica, criptografía cuántica, y en general, la información cuántica. La idea principal es que un estado con mayor entrelazamiento es mejor que un estado de menor enredo para lograr ciertos objetivos, como los enlistados arriba. Es decir, se busca crear y estudiar estados entrelazados lo más posible caracterizados. Es así, como se llega a lo que se conoce como medidas de entrelazamiento cuántico.

Existen diversas medidas de entrelazamiento cuántico como lo son: la descomposición Schmidt o negatividad, la medida geométrica de enredo, la entrópia Von Neuman, por mencionar algunas [5, 10, 11]. Por otro lado, se encuentran las medidas de entrelazamiento basadas en relaciones de incertidumbre como puede ser la colectividad [12]. La gran mayoría de medidas de entrelazamiento cuántico usan el criterio más válido para conocer la información de un sistema, como lo es el operador de densidad. En particular para un sistema de dos niveles la medida más conocida y estudiada es la concurrencia, definida a partir del operador de densidad y su complejo conjugado bajo la acción de un inversor.

La concurrencia de Wootters es la más utilizada y, quizás, la más importante medida de entrelazamiento cuántico para sistemas bipartitas de qubits.

Scott Hill y William K. Wootters definen a la concurrencia en términos de un súper operador que gira el espín del qubit. En palabras concretas Hill y Wootters [13–16] precisan la concurrencia de dos qubits, como sigue,

$$C_2\left(\Psi\right) \equiv \sqrt{Tr\left(\rho\tilde{\rho}\right)}. \tag{1.9}$$

De tal manera que, para un estado cuántico ρ de un sistema de dos qubits el operador de densidad para el espín girado, denotado por una tilde es,

$$\tilde{\rho} = S_2 \otimes S_2(\rho) = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

siendo S_2 un súper operador cuya acción sobre un qubit del operador de densidad ρ es girar el espín, es decir,

$$S_2(\rho) = \sigma_y \rho^* \sigma_y. \tag{1.11}$$

Por otro lado, la concurrencia de Wootters para un estado puro, en términos del súper operador S_2 queda,

$$\begin{aligned} C_2\left(\Psi\right) &= \sqrt{\sum \langle\Psi|\Psi\rangle \langle\Psi| S_2 \otimes S_2 \left(|\Psi\rangle \langle\Psi|\right) |\Psi\rangle} \\ &= \sqrt{\langle\Psi| S_2 \otimes S_2 \left(|\Psi\rangle \langle\Psi|\right) |\Psi\rangle} \\ &= \sqrt{\langle\Psi| \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi^*\rangle \langle\Psi| \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi^*\rangle^*} \\ &= \left|\langle\Psi| \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi^*\rangle\right|. \end{aligned} \tag{1.12}$$

1.2.1. Súper operador; giro de espín de un qubit

La principal característica del súper operador S_2 es girar el espín del qubit. En lo que sigue se usara la matriz identidad I que corresponde a una matriz 2×2 para el sistema de dos niveles. Los vectores de espín corresponden a:

$$\text{espín up} \rightarrow |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{espín down} \rightarrow |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Entonces el qubit,

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle\,; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{1.14}$$

Ahora bien, girar el espín del qubit $|\Psi\rangle$ significa que mediante una transformación los vectores de espín del qubit cambian de espín up a espín down y viceversa. Pero sobre todo, se debe cumplir que el valor esperado de las matrices pertenecientes a la base propia del sistema qubit cumplan la siguiente ecuación,

$$\langle\sigma_j\rangle_{girado} = -\langle\sigma_j\rangle_{original}; \quad j = x, y, z. \tag{1.15}$$

La única transformación que cumple con la condición 1.15 para girar el espín de un sólo qubit $\tilde{\rho} = S_2(\rho) = \sigma_y \rho^* \sigma_y$ es,

$$|\Psi\rangle_f = \sigma_y C\,|\Psi\rangle\,. \tag{1.16}$$

Para el cual, se aplica el siguiente vector anti unitario,

$$\sigma_y C = -C\sigma_y, \tag{1.17}$$

donde, C denota el complejo conjugado, es decir, $C\,|\psi\rangle = |\psi^*\rangle$. A continuación, se demuestra como la transformación 1.16 gira el espín del qubit,

$$|\Psi\rangle_f = \sigma_y C\,|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = i\alpha^*\,|\downarrow\rangle - i\beta^*\,|\uparrow\rangle\,. \tag{1.18}$$

Mientras tanto, los valores esperados son:

$$\langle\sigma_x\rangle_{girado} = Tr\,(\sigma_x\tilde{\rho}) = \langle\Psi^*|\,\sigma_y\sigma_x\sigma_y\,|\Psi^*\rangle = -\alpha\beta^* - \beta\alpha^* = -\langle\sigma_x\rangle_{original} \tag{1.19}$$

$$\langle\sigma_y\rangle_{girado} = Tr\,(\sigma_y\tilde{\rho}) = \langle\Psi^*|\,\sigma_y\,|\Psi^*\rangle = 2\,\mathrm{Im}\,(\alpha\beta^*) = -\langle\sigma_y\rangle_{original} \tag{1.20}$$

$$\langle\sigma_z\rangle_{girado} = Tr\,(\sigma_z\tilde{\rho}) = \langle\Psi^*|\,\sigma_y\sigma_z\sigma_y\,|\Psi^*\rangle = -|\alpha|^2 + |\beta|^2 = -\langle\sigma_z\rangle_{original} \tag{1.21}$$

Por lo tanto, queda demostrado que la Ec. 1.16 es una transformación adecuada para girar el espín del qubit.

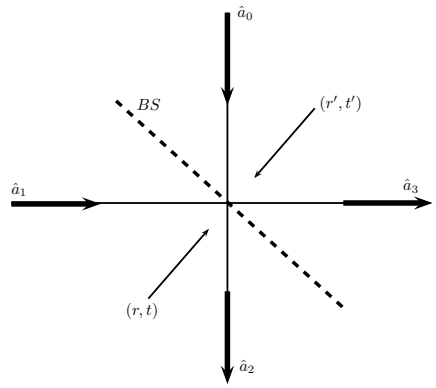

Figura 1.1: Descripción cuántica de un divisor de haz.

1.2.2. Ejemplo de estado entrelazado de un sistema bipartita

Una forma fácil de obtener un estado entrelazado en el laboratorio es usando un divisor de haz y la incidencia de pocos fotones. A continuación, se presenta uno de los ejemplos más simples de estados entrelazados y la forma de obtenerlo. Para esto, se considera una descripción cuántica correcta para el divisor de haz [17], como se muestra en la figura 1.1.

Los modos de entrada y salida están gobernados por las transformaciones del divisor de haz,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

los cuales cumplen las relaciones de conmutación: $\left[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger\right] = 1$ y $\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0$. Se considera que es un divisor 50:50 y por ende $|r| = |t| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. También, se tiene que considerar el cambio de fase que sufre el haz reflejado en $\pi/2$, por tal motivo se tiene el factor $\exp\left(\pm i\frac{\pi}{2}\right) = i$.

Por lo tanto, los modos de entrada y salida del divisor de haz están sujetos a las siguientes transformaciones,

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(i)\,\hat{a}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1)\,\hat{a}_0 \quad , \qquad \hat{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1)\,\hat{a}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(i)\,\hat{a}_0,$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(i\hat{a}_1 + \hat{a}_0) \quad , \qquad \hat{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{a}_1 + i\hat{a}_0)\,. \tag{1.23}$$

Entonces, si consideramos un único fotón incidiendo en una de las entradas del divisor de haz tendremos como estado de entrada $|0\rangle_0|1\rangle_1$, como se muestra en la figura 1.2. Observemos, que el estado de entrada se puede escribir como una potencia del operador de creación en el vacío,

$$|0\rangle_0|1\rangle_1 = \hat{a}_1^\dagger|0\rangle_0|1\rangle_1. \tag{1.24}$$

$|0\rangle_0$ nos representa el modo 0 de uno de los puertos de entrada teniendo cero fotones, mientras

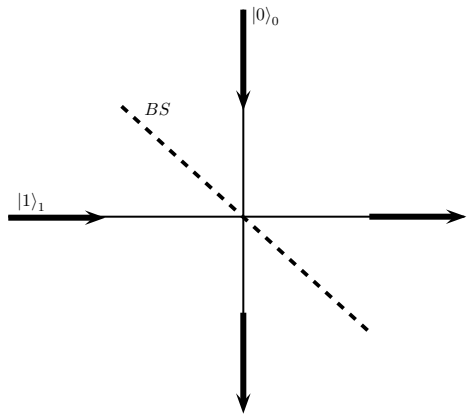

Figura 1.2: Estado de entrada: único fotón en el modo 1 y vacío en el modo 0

que en el modo 1 se tiene un único fotón representado por $|1\rangle_1$. Es importante, considerar que un vacío de entrada se transforma en un vacío de salida,

$$|0\rangle_0|0\rangle_1 \overset{BS}{\rightarrow} |0\rangle_2|0\rangle_3. \tag{1.25}$$

De tal forma, el estado de entrada al interactuar con el divisor de haz BS da como estado de salida,

$$|0\rangle_0|1\rangle_1 = \hat{a}_1^\dagger|0\rangle_0|0\rangle_1 \overset{BS}{\rightarrow} \hat{a}_1^\dagger|0\rangle_2|0\rangle_3. \tag{1.26}$$

Sin embargo, usando las transformaciones cuánticas correctas Ecs. 1.23, se tiene,

$$\hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger\right). \tag{1.27}$$

Por lo tanto, podemos escribir,

$$|0\rangle_0|1\rangle_1 \overset{BS}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger\right)|0\rangle_2|0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\hat{a}_2^\dagger|0\rangle_2|0\rangle_3 + \hat{a}_3^\dagger|0\rangle_2|0\rangle_3\right). \tag{1.28}$$

Se llega a un estado entrelazado,

$$|0\rangle_0|1\rangle_1 \overset{BS}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3\right). \tag{1.29}$$

La ecuación anterior nos dice que para describir al sistema se tiene que considerar un estado global, lo que ocurre en una de las salidas del divisor afectará en el otro puerto de salida, siendo imposible verlo como estados independientes de tal modo se tiene un estado entrelazado. Lo anterior, concuerda perfectamente con los resultados reportados por P. Grangier, G. Roger y A. Aspect [9]. El experimento llevado a cabo por Grangier y sus colegas muestra una fuerte anticorrelación en la detección de fotones en ambos lados de un divisor de haz. De esta manera, se confirma la esencia de un estado entrelazado como aquel que describe al sistema, explicando la inexistencia de recuentos simultáneos en la detección de fotones en ambas salidas del divisor de haz. El otro experimento reportado en el mismo artículo es aún más interesante, ya que se observa interferencia en las salidas del divisor de haz,

considerando, la incidencia de pocos fotones en un arreglo interferometrico. Grangier y sus colaboradores reportan la existencia de un patrón de interferencia, como parte de un estado entrelazado. Haciéndose presente la naturaleza, aún no del todo entendida, de los fotones. Hablamos de la dualidad onda partícula de la luz, para mayor análisis consultar la referencia [9].

Pares de fotones entrelados

Otro ejemplo de estado entrelazado, bastante interesante se obtiene haciendo incidir fotones individuales en ambos puertos de entrada del divisor. En este caso, el estado que describe al sistema está dado por [17],

$$|1\rangle_0|1\rangle_1 \overset{BS}{\rightarrow} \frac{i}{2}\left(i|2\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|2\rangle_3\right). \tag{1.30}$$

Distinguimos el enredo al observar que el estado de salida no puede ser escrito como un producto de estados individuales, ya que, existe una anticorrelación en la detección de fotones esto implica que los fotones emerjan juntos. Por lo tanto, los fotones son detectados en pares ya sea en el modo 2 o en el modo 3, de ninguna manera son detectados por separado, lo cual implicaría recuentos simultáneos cosa que experimentalmente no ocurre. El análisis y explicación del comportamiento en éste experimento fue hecho por C. K. Hong, Z. Y. Ou y L. Mandel [18]. Mandel y Hong exhiben el estado entrelazado que describe al sistema del cual sobresale la característica fundamental de un bosón cuya naturaleza describe a los fotones. Los fotones son gobernados por la estadística de Bose-Einstein, ya que, se encuentran dentro de la familia de bosones, tienen espín entero y por ende no están restringidos por el principio de exclusión de Pauli. Significa que los fotones pueden vivir en un mismo estado cuántico, concordando con los resultados experimentales.

1.3. Concurrencia de Wootters para sistemas bipartita de qudits

Hasta este punto, se ha trabajado con el súper operador S_2 definido en términos de la matriz de Pauli σ_y, para el caso de un sistema bipartita de qubits. Sin embargo, para poder generalizar la concurrencia de Wootters para pares de sistemas cuánticos de dimensión arbitraria es necesario definir un súper operador adecuado denominado inversor universal, es definido de la siguiente forma,

$$S_D\left(\rho\right) = \nu_D\left(I - \rho\right). \tag{1.31}$$

En el apéndice A se explica el porqué de la elección de 1.31. El inversor universal S_D será válido para un sistema cuántico de dimensión D el cual puede ser llamado qudit. La Ec. 1.31 representa la acción del inversor universal que actúa sobre un qudit de ρ, donde υ_D es una constante positiva e I es la matriz unitaria.

Análogamente al sistema qubits la concurrencia de Wootters para un estado puro de dimensión arbitraria estará definida de la siguiente manera,

$$C_D\left(\Psi\right) = \sqrt{Tr\left(\rho\tilde{\rho}\right)}. \tag{1.32}$$

En este caso el operador de densidad para el espín girado está dado por el producto tensorial del súper operador inversor universal, esto es,

$$\tilde{\rho} = S_{D_1} \otimes S_{D_2}. \tag{1.33}$$

Por lo tanto, usando la expresión anterior podemos encontrar la correspondiente generalización de la concurrencia para el sistema de un par de qudits. De tal forma, para un estado puro conjunto $|\Psi\rangle$ de un sistema $D_1 \otimes D_2$, la concurrencia queda,

$$\begin{aligned} C\left(|\Psi\rangle\right) &= \sqrt{\langle\Psi| S_{D_1} \otimes S_{D_2} \left(|\Psi\rangle \langle\Psi|\right) |\Psi\rangle} \\ &= \sqrt{2\nu_{D_1}\nu_{D_2}\left[1 - Tr\left(\rho_A^2\right)\right]}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

La expresión anterior es análoga a la concurrencia para qubits Ec. 1.12, siendo una elección adecuada $\upsilon_D = 1$. También, observemos que la concurrencia en el caso de sistemas arbitrarios está relacionada con la pureza de los operadores de densidad.

De igual forma, a partir del inversor universal se encuentra la expresión para la matriz de densidad del sistema girado para un estado puro de dimensión arbitraria,

$$\tilde{\rho} = S_{D_1} \otimes S_{D_2}\left(\rho_{AB}\right) = \nu_{D_1}\nu_{D_2}\left[I \otimes I - I \otimes \rho_B - \rho_A \otimes I + \rho_{AB}\right], \tag{1.35}$$

en términos de la matriz de densidad del sistema bipartita y sus respectivas trazas parciales. Por lo tanto, la expresión 1.35 corresponde al método exacto para calcular $\tilde{\rho}$. El desarrollo para obtener la Ec. 1.35 se presenta en el apéndice A.

Capítulo 2

Sistema Qutrit Entrelazado

Definimos la concurrencia para un sistema bipartita qutrit en términos de un inversor ingenuo $S_3(\rho)$ propuesto de tal modo que gire el espín del qutrit dada la acción de una matriz S_y definida como la superposición de algunas matrices de Gell-Mann. La propuesta específica para la matriz S_y consiste en la superposición de las matrices λ_2, λ_5 y λ_7 de las matrices de Gell-Mann. Nuestra propuesta surge de identificar una matriz análoga a la matriz de Pauli σ_y que gira el espín, en este caso del qutrit.

Sin embargo, se presentan algunos problemas con la caracterización de ciertos estados, además de encontrar que la propuesta del inversor ingenuo no gira el espín del qutrit. Lo que nos lleva a proponer, una mejor forma de obtener la matriz de densidad del espín del qutrit girado $\tilde{\rho}$, bajo la acción de ciertos súper operadores, también definidos en términos de las matrices de Gell-Mann λ_2, λ_5 y λ_7. Finalmente, los resultados de la caracterización del entrelazamiento, obtenidos con los dos métodos antes expuestos se comparan con los resultados del cálculo de concurrencia a partir del método exacto. Se observa una reducción en el tiempo de cálculo para concurrencia usando de manera directa el inversor ingenuo. Mejor aún, con el uso de los súper operadores se obtienen resultados idénticos al método exacto en menor tiempo de cálculo en comparación con los dos otros métodos.

2.1. Estados bipartita qutrit

Comencemos por considerar un sistema bipartita qutrit dado por,

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij=0}^{2} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B, \tag{2.1}$$

siendo A y B los subsistemas del vector de estado $|\Psi\rangle$ pertenecientes al espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. La ecuación anterior es un caso particular de la Ec. 1.2 para $i, j = 0, 1, 2$ concerniente a un sistema de dimensión tres, como puede ser un átomo de tres niveles, denominado sistema qutrit.

Entonces es conveniente definir los vectores de la base de tal sistema,

$$|2\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad y \quad |0\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Por otro lado, la estructura algebraica definida sobre el espacio vectorial de dimensión tres está asociado al grupo de Lie $SU(3)$ [19]. Es decir, el álgebra de Lie del grupo unitario $SU(3)$ es quien describirá el espacio vectorial del estado qutrit. Así mismo, las matrices de Gell-Mann constituyen una base vectorial de tal grupo unitario. Tales matrices se enlistan a continuación,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \\
\lambda_5 &= \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora bien, puede existir entrelazamiento cuántico entre sistemas bipartita qutrit. Un ejemplo, es el estado general que representa todos los posibles estados bipartita qutrit,

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij=0}^{2} C_{ij}\,|ij\rangle = C_{00}\,|00\rangle + C_{10}\,|10\rangle + C_{01}\,|01\rangle + C_{20}\,|20\rangle + C_{11}\,|11\rangle + C_{02}\,|02\rangle\,, \tag{2.4}$$

dependiendo de los valores de los coeficientes C_{ij} podemos tener diferentes estados entrelazados para el sistema de dos qutrits.

2.2. Método exacto

Iniciamos por el cálculo exacto que consistirá en determinar la matriz de densidad del sistema girado por medio de la siguiente ecuación,

$$\tilde{\rho} = S_3 \otimes S_3\,(\rho) = \nu_3\nu_3\,[I \otimes I - I \otimes \rho_B - \rho_A \otimes I + \rho]\,, \tag{2.5}$$

donde I es la matriz unitaria para este caso de dimensión 3×3. Esta ecuación se obtiene del resultado general Ec. 1.35 que corresponde al caso de dimensiones arbitrarias.

Entonces, para calcular la concurrencia con el método exacto usamos el lado derecho de la Ec. 2.5, lo que implica, calcular la matriz de densidad del espín girado $\tilde{\rho}$ por medio de determinar en su totalidad tanto la matriz de densidad del estado conjunto ρ como las matrices reducidas ρ_A y ρ_B. En seguida se sustituye $\tilde{\rho}$ en la definición de concurrencia, para este caso únicamente válida para estados puros,

$$C\,(\Psi) = \sqrt{Tr\,(\rho\tilde{\rho})}, \tag{2.6}$$

para obtener el valor exacto de la misma. Vale la pena aclarar que la definición surge de la Ec. 1.32 válida para toda dimensión arbitraria.

Usando los vectores de la base del sistema de tres niveles Ec. 2.2 podemos escribir el qutrit más sencillo,

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|2\rangle + \beta\,|1\rangle + \gamma\,|0\rangle\,; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1, \tag{2.7}$$

para el cual calculamos el valor esperado de las matrices de la base con el qutrit original,

$$\begin{aligned}
\langle\lambda_1\rangle_{original} &= \alpha\beta^* + \alpha^*\beta, \\
\langle\lambda_2\rangle_{original} &= i\alpha\beta^* - i\alpha^*\beta, \\
\langle\lambda_3\rangle_{original} &= |\alpha|^2 - |\beta|^2, \\
\langle\lambda_4\rangle_{original} &= \alpha\gamma^* + \alpha^*\gamma, \\
\langle\lambda_5\rangle_{original} &= i\alpha\gamma^* - i\alpha^*\gamma, \\
\langle\lambda_6\rangle_{original} &= \beta\gamma^* + \beta^*\gamma, \\
\langle\lambda_7\rangle_{original} &= i\beta\gamma^* - i\beta^*\gamma, \\
\langle\lambda_8\rangle_{original} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\gamma|^2\right).
\end{aligned}$$

Entonces para un sólo qutrit, al calcular la matriz de densidad de manera exacta, es imperativo que el espín del qutrit sea girado tratándose del inversor exacto el cual cumple la condición,

$$\langle\lambda_j\rangle_{exacto} = -\langle\lambda_j\rangle_{original} \quad \text{para} \quad j = 1, 2..., 8. \tag{2.8}$$

2.3. Inversor ingenuo y concurrencia para el sistema qutrit entrelazado

De manera similar al caso de qubits buscamos un inversor que gire el espín del qutrit para ello será necesario un súper operador $S_3\,(\rho)$, que lógicamente estará dado en términos de las matrices de Gell-Mann. Siguiendo un desarrollo análogo, a la manera en como es determinado el súper operador S_2 en el sistema de dos niveles, vamos a proponer que el súper operador $S_3\,(\rho)$ este definido bajo una operación anti unitaria de la forma,

$$S_3\,(\rho) = S_y \rho^* S_y. \tag{2.9}$$

Proponiendo la matriz S_y como la superposición de las matrices λ_2, λ_5, λ_7 del grupo de matrices de Gell-Mann. En específico presentamos a la matriz S_y,

$$S_y = \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i \\ i & 0 & -i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

La nueva contribución S_y, análoga a la matriz de Pauli σ_y para el caso de qubits, define al súper operador $S_3\,(\rho)$ como una propuesta permisible para girar el espín del qutrit, quedando

aún por demostrarlo. Ahora bien, considerando, que S_3 es un súper operador análogo a S_2 en el caso de qubits y al inversor universal S_D en el caso general. Para el sistema de tres niveles, al nuevo súper operador $S_3(\rho)$ lo llamaremos inversor ingenuo, ya que, es una propuesta de inversor para el sistema qutrit, aún por ver si funciona.

Probamos si en realidad se gira el espín de un sólo qutrit, bajo la propuesta del inversor ingenuo,

$$\tilde{\rho} = S_3(\rho) = S_y \rho^* S_y. \tag{2.11}$$

Para ello calculamos el valor esperado de las matrices de la base para un sólo qutrit, de la forma,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_j \rangle_{ingenuo} &= Tr(\lambda_j \tilde{\rho}) \\ &= \langle \Psi^* | S_y \lambda_j S_y | \Psi^* \rangle, \end{aligned} \tag{2.12}$$

obteniendo,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \rangle_{ingenuo} &= i\alpha\beta^* - i\alpha^*\beta, \\ \langle \lambda_2 \rangle_{ingenuo} &= -i\alpha\beta^* + i\alpha^*\beta, \\ \langle \lambda_3 \rangle_{ingenuo} &= i\alpha\beta^* - i\alpha^*\beta, \\ \langle \lambda_4 \rangle_{ingenuo} &= i\alpha\gamma^* - i\alpha^*\gamma, \\ \langle \lambda_5 \rangle_{ingenuo} &= -i\alpha\gamma^* + i\alpha^*\gamma, \\ \langle \lambda_6 \rangle_{ingenuo} &= i\beta\gamma^* - i\beta^*\gamma, \\ \langle \lambda_7 \rangle_{ingenuo} &= -i\beta\gamma^* + i\beta^*\gamma, \\ \langle \lambda_8 \rangle_{ingenuo} &= \frac{1}{3}\left(-\beta^*\alpha + \alpha^*\beta - 4\,\mathrm{Im}(\alpha\gamma^*) - 4\,\mathrm{Im}(\beta\gamma^*)\right). \end{aligned}$$

Comparando los valores esperados de cada matriz, observamos que en general se cumple,

$$\langle \lambda_j \rangle_{ingenuo} \neq -\langle \lambda_j \rangle_{original} \quad \text{para} \quad j = 1, 3, 4, 6, 8. \tag{2.13}$$

Por lo tanto tenemos un inversor ingenuo, que al no coincidir los valores esperados calculados con el qutrit original, no gira el espín del qutrit. Sin embargo, calcular la matriz de densidad por medio del súper operador es más fácil, probaremos si funciona en los cálculos numéricos.

Dicho lo anterior, obtendremos la matriz $\tilde{\rho}_3$ por medio del inversor ingenuo y por ende de la matriz propuesta S_y, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= S_3 \otimes S_3(\rho) \\ &= S_y \otimes S_y \rho^* S_y \otimes S_y, \end{aligned} \tag{2.14}$$

para calcular la concurrencia con la definición 2.6.

2.4. Matriz de densidad del espín girado bajo la acción de los súper operadores $S_\mu[\rho]$ y $S_\nu[\rho]$

Ya que el inversor ingenuo $S_3(\rho)$ no gira el espín del qutrit, proponemos una nueva forma de calcular la matriz de densidad del espín girado $\tilde{\rho}$ bajo la acción de los súper operadore$S_\mu[\rho]$ y $S_\nu[\rho]$, tal que,

$$\tilde{\rho} = S_\mu\left[S_\nu\left[\rho^*\right]\right], \tag{2.15}$$

siendo ρ^* el complejo conjugado de la matriz de densidad del sistema compuesto y los súper operadores definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_\mu[\rho] &= (\lambda_2 \otimes I)\,\rho\,(\lambda_2 \otimes I) + (\lambda_5 \otimes I)\,\rho\,(\lambda_5 \otimes I) + (\lambda_7 \otimes I)\,\rho\,(\lambda_7 \otimes I), \\ S_\nu[\rho] &= (I \otimes \lambda_2)\,\rho\,(I \otimes \lambda_2) + (I \otimes \lambda_5)\,\rho\,(I \otimes \lambda_5) + (I \otimes \lambda_7)\,\rho\,(I \otimes \lambda_7). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Vemos que los operadores auxiliares están relacionados con las mismas matrices de Gell-Mann usadas en el inversor ingenuo:

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

El resultado de la Ec. 2.15 entrega valores de $\tilde{\rho}$ equivalentes al cálculo con el inversor ingenuo y las matrices de densidad del estado entrelazado, es decir, Ec. 2.5. Por lo tanto, podemos usar la concurrencia para estados puros $C(\Psi) = \sqrt{Tr(\rho\tilde{\rho})}$ y caracterizar el entrelazamiento. Con la ventaja que con el último método dicho cálculo de $\tilde{\rho}$ y posteriormente de la concurrencia, se puede hacer de manera numérica más rápido que encontrando todas las matrices de densidad, reducidas y del estado conjunto. En este caso el espín de un sólo qutrit $\tilde{\rho} = S_\mu(\rho)$ si es girado cumpliendo con la condición,

$$\langle\lambda_j\rangle_{girado} = -\langle\lambda_j\rangle_{original} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, ..., 8. \tag{2.18}$$

2.5. Concurrencia para diferentes estados entrelazados qutrit

Reducimos el tiempo de cálculo de la medida de entrelazamiento concurrencia con el inversor ingenuo propuesto, en comparación con el cálculo exacto. Lo anterior se muestra para algunos estados bipartita qutrit entrelazados. Se prueba, que la propuesta del inversor ingenuo funciona para ciertos estados, entregado información equivalente al cálculo exacto de la concurrencia. En particular, la propuesta funciona adecuadamente para estados puros teniendo problemas en el caso de mezcla estadística. Reportamos los resultados numéricos de la caracterización de la concurrencia con el método exacto y con el inversor ingenuo, observamos que la propuesta de S_y funciona adecuadamente obteniendo información aceptable en comparación con los valores exactos, además, como ya se especificó, se invierte menor tiempo de computo. Dicho lo anterior, calcularemos la concurrencia para diferentes estados puros y mostraremos el caso de un estado mixto.

2.5.1. Estado prueba simple

El cálculo de la medida de entrelazamiento se aplicó en primera instancia al caso del estado prueba más simple de entrelazamiento cuántico para un sistema bipartita qutrit, el cual es,

$$|\Psi\rangle = \sin\theta\,|20\rangle + \cos\theta\,|02\rangle\,. \tag{2.19}$$

Es inmediato obtener la matriz de densidad del estado puro,

$$\begin{aligned}\rho &= \sin^2(\theta)\,|20\rangle\langle 20| + \cos(\theta)\sin(\theta)\,|20\rangle\langle 02| \\ &\quad + \cos(\theta)\sin(\theta)\,|02\rangle\langle 20| + \cos^2(\theta)\,|02\rangle\langle 02|\,,\end{aligned} \tag{2.20}$$

siendo las respectivas matrices reducidas:

$$Tr_B\{\rho\} = \rho_A(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

$$Tr_A\{\rho\} = \rho_B(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Introduciendo directamente la matriz de densidad en el algoritmo matemático para obtener la concurrencia con el inversor ingenuo, además de las matrices parciales para el método exacto. Se muestra como resultado la comparación de las dos distribuciones que caracterizan el entrelazamiento en un tiempo de cálculo despreciable para ambos casos,

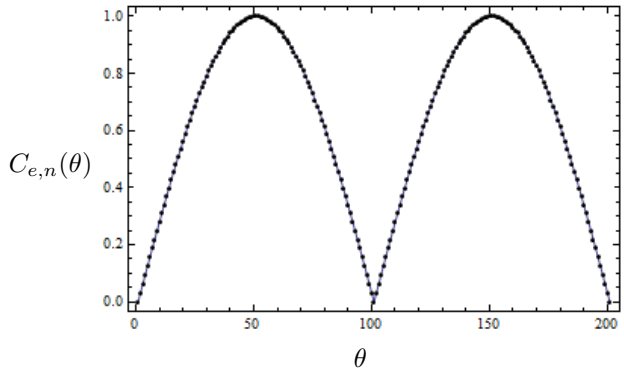

Figura 2.1: Comparación entre concurrencias, para el estado $|\Psi\rangle = \sin\theta\,|20\rangle + \cos\theta\,|02\rangle$.

La distribución de la concurrencia es exactamente igual para los dos casos, como vemos en la figura 2.1, la línea continua en azul que describe la concurrencia usando el inversor ingenuo S_3 reproduce idénticamente los datos de la línea punteada en negro que representa la distribución de datos de la concurrencia calculada por el método exacto. Por tal motivo, la propuesta de S_y funciona adecuadamente caracterizando en su totalidad y exactamente el

entrelazamiento cuántico del estado 2.19.

Aparte de la ya mencionada idéntica distribución de datos entre $C_e(\theta)$ y $C_n(\theta)$, que representan la concurrencia por el método exacto y usando el inverso ingenuo, respectivamente. También podemos observar de la figura 2.1, que ambas concurrencias caracterizan el entrelazamiento del estado prueba $|\Psi\rangle = \sin\theta\,|20\rangle + \cos\theta\,|02\rangle$ correctamente, ya que, para valores de $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi$, se le asocia concurrencia igual a cero, lo cual, concuerda con el estado separable que resulta de la sustitución de estos valores en el estado prueba 2.19. Por otro lado, cuando se tiene concurrencia igual a 1 corresponde a los valores de $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$. Para valores intermedios de θ la concurrencia va de 0 a 1 representando la caracterización del estado entrelazado. Cabe aclarar, que la escala que aparece en la figura 2.1 se representa en valores múltiplos de π por comodidad de análisis en la expresión 2.19.

Por lo tanto, la caracterización de la concurrencia del estado prueba 2.19 mostrado en la figura 2.1 únicamente nos representa adecuadamente la existencia de estados separables y entrelazados sin la posibilidad de llegar a tener un máximo entrelazamiento. Además tal caracterización muestra la validez del uso del inversor ingenuo, ya que, los resultados concuerdan completamente con el método exacto. Siendo una buena medida de entrelazamiento cuántico para el sistema qutrit en este primer caso prueba.

2.5.2. Estados prueba propagados

Continuamos con el cálculo de la concurrencia para estados prueba que describen un problema físico posible. El cual puede consistir, en la incidencia de luz sobre un par de guías de onda logrando el sistema bipartita; el estado qutrit es introducido en el estado inicial del sistema, que se tratará de estados entrelazados y separables. Específicamente, tendremos un par de campos electromagnéticos cuantizados propagándose en las guías de onda. Por lo tanto, estudiaremos la evolución de dos diferentes estados bajo la dinámica de un divisor de haz. Cabe aclarar, que el divisor de haz es quien caracteriza la dinámica del par de guías de onda.

El Hamiltoniano que describe al sistema corresponde a la interacción de campo electromagnético sobre el par de guías de onda,

$$H = w_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + w_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + g\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right). \tag{2.23}$$

En la expresión anterior se representan las energías correspondientes a los dos campos que se propagan en cada guía de onda, además, de la energía de acoplamiento entre los campos. Ahora bien, lo que nos interesa es quedarnos con las energías que tienen que ver únicamente con el acoplamiento, por ello, nos movemos a otro marco de referencia defino por,

$$|\xi\rangle = R(t)\,|\varphi\rangle\,, \tag{2.24}$$

siendo R el rotador representado por la siguiente exponencial imaginaria,

$$R(t) = e^{-i\left(w_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + w_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)t}. \tag{2.25}$$

En el nuevo marco de referencia encontramos el Hamiltoniano efectivo,

$$H_{eff} = g\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{i(w_1-w_2)t} + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{-i(w_1-w_2)t}\right). \tag{2.26}$$

Se representa en el apéndice B el desarrollo correspondiente para la obtención del Hamiltoniano 2.26. Finalmente, nuestro problema físico concreto se trata de un único campo electromagnético de frecuencia w iluminando ambas guías, es decir, $w = w_1 = w_2$. Por lo cual, el Hamiltoniano efectivo queda,

$$H_{eff} = g\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right). \tag{2.27}$$

En consecuencia, el operador de evolución es,

$$U(t) = e^{-iH_{eff}t} = e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t}. \tag{2.28}$$

La ecuación anterior nos dice, que la propagación de dos campos electromagnéticos cuantizados, a través de un divisor de haz estará dado por el operador de evolución 2.28. De tal forma aplicando dicho operador de evolución, también llamado propagador, a ciertos estados iniciales obtendremos el vector de estado propagado, esto es,

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)\,|\Psi(0)\rangle. \tag{2.29}$$

Los estados iniciales a considerar son precisamente los estados prueba a continuación enlistados para calcular la medida de entrelazamiento concurrencia:

- Estado puro entrelazado,

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|20\rangle + |02\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(a_1^\dagger\right)^2 + \left(a_2^\dagger\right)^2\right]|00\rangle. \tag{2.30}$$

- Estado puro separable,

$$|\Psi(0)\rangle = |20\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}\left(a_1^\dagger\right)^2|00\rangle. \tag{2.31}$$

- En general, se representa para todos los posibles estados puros bipartita qutrit $|\Psi(0)\rangle = \sum_{ij=0}^{2} C_{ij}\,|ij\rangle$. Así mismo, los únicos estados posibles que conservan energía para un estado qutrit es,

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= C_{00}|00\rangle + C_{10}|10\rangle + C_{01}|01\rangle + C_{20}|20\rangle + C_{11}|11\rangle + C_{02}|02\rangle \\ &= \left[C_{00} + C_{10}\hat{a}_1^\dagger + C_{01}\hat{a}_2^\dagger + \frac{C_{20}}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_1^\dagger\right)^2 + \frac{C_{02}}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_2^\dagger\right)^2 + C_{11}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\right]|00\rangle. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Observemos que hemos usado la propiedad de un estado de Fock, para el cual cualquier vector de estado $|n\rangle$ puede ser obtenido del vacío $|0\rangle$ aplicándole potencias del operador de creación,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle. \tag{2.33}$$

por tal motivo, nos interesa conocer la acción del operador de evolución $U(t)$ sobre $\hat{a}_1^\dagger$ y $a_2^\dagger$. Para diagonalizar la matriz del operador de evolución se optó por el caso más sencillo, que es, encontrar la acción del mismo sobre cada uno de los operadores de creación, esto es,

$$\begin{aligned} U(t)\,\hat{a}_1^\dagger U^\dagger(t) &= \hat{a}_1^\dagger \cos(gt) - i\hat{a}_2^\dagger \sin(gt)\,, \\ U(t)\,\hat{a}_2^\dagger U^\dagger(t) &= \hat{a}_2^\dagger \cos(gt) - i\hat{a}_1^\dagger \sin(gt)\,. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Las ecuaciones anteriores son fáciles de encontrar, la prueba se lleva a cabo en el apéndice C. Entonces podemos propagar cada estado inicial de prueba, conoceremos el estado propagado de los diferentes sistemas bipartita qutrit. Que es equivalente, a estudiar la evolución del campo sobre las guías de onda, con la característica que el estado inicial se trata de estados qutrit entrelazados.

Finalmente, conociendo la acción del propagador sobre los operadores de creación $\hat{a}_1^\dagger$ y $a_2^\dagger$ Ecs. 2.34 calculamos el vector de estado propagado, del estado inicial 2.32.

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= C_{00}|00\rangle + [C_{10}\cos(gt) - C_{01}i\sin(gt)]\,|10\rangle + [-C_{10}i\sin(gt) + C_{01}\cos(gt)]\,|01\rangle \\ &+ \left[C_{20}\cos^2(gt) - C_{02}\sin^2(gt) - C_{11}i\sqrt{2}\sin(gt)\cos(gt)\right]|20\rangle \\ &+ \left[-C_{20}\sin^2(gt) + C_{02}\cos^2(gt) - C_{11}i\sqrt{2}\sin(gt)\cos(gt)\right]|02\rangle \\ &+ \left[-C_{20}i\sqrt{2}\cos(gt)\sin(gt) - C_{02}i\sqrt{2}\cos(gt)\sin(gt) + C_{11}\left[\cos^2(gt) - \sin^2(gt)\right]\right]|11\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.6. Resultados numéricos

Se obtienen el valor numérico de la concurrencia para los diferentes estados puros arriba enlistados, graficando la información respecto a un grado de libertad. comparamos los resultados obtenidos entre los métodos utilizados.

2.6.1. Estado Entrelazado

El primer estado inicial prueba propagado va a estar dado por la naturaleza propia del sistema cuántico, que es el caso de incidencia de pocos fotones sobre un divisor de haz, equivalente a tener un par de guías de onda. Dicha característica ya fue estudiada en el capítulo 1, donde, vimos que a la salida del divisor tendremos un estado entrelazado dado por la Ec. 1.30. Por lo tanto, para este primer caso, el estado inicial prueba será justamente dos qutrits entrelazados,

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|20\rangle + |02\rangle\right). \tag{2.36}$$

Conociendo las Ecs. 2.34, encontramos que a cualquier tiempo el estado de dos qutrits entrelazados está dado por,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos^2(gt) - \sin^2(gt)\right]\left[|20\rangle + |02\rangle\right] - 2i\cos(gt)\sin(gt)\,|11\rangle \\ &= \left[\cos^2(gt) - \sin^2(gt)\right]|\Psi(0)\rangle - 2i\cos(gt)\sin(gt)\,|11\rangle \end{aligned} \tag{2.37}$$

Después de obtener la matriz de densidad para el estado puro 2.37 se usa en el algoritmo matemático, arrojando los siguientes resultados:

$$C_e(t) = \frac{5}{2}\cos^2(2gt) - \frac{3}{2}\cos^2(2gt)\cos(4gt), \tag{2.38}$$

$$C_n(t) = \frac{9}{2}\cos^2(2gt) - \frac{7}{2}\cos^2(2gt)\cos(4gt). \tag{2.39}$$

Los resultados del cálculo numérico son graficados en la figura 2.2, donde las expresiones $C_e(t)$ y $C_n(t)$ corresponden a la información para la concurrencia por el método exacto y usando el inversor ingenuo respectivamente, respecto del parámetro gt. Así mismo, ambos datos nos representan la distribución de la medida de entrelazamiento concurrencia, siendo propagado el campo electromagnético en el par de guías de onda y teniendo como estado inicial dos qutrits entrelazados.

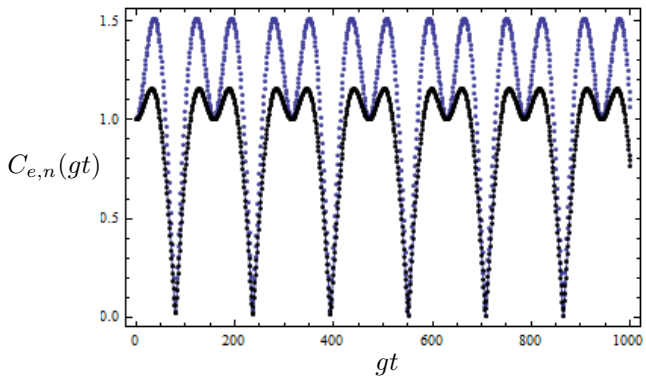

Figura 2.2: Comparación entre concurrencias: los puntos negros corresponden a la distribución con el método exacto $C_e(t)$ y los azules usando la propuesta de inversor ingenuo $C_n(t)$, para el estado inicial prueba 2.30.

En la figura 2.2 comparamos la distribución de datos de las expresiones 2.38 y 2.39, se observa que la información obtenida es equivalente entre la distribución de las concurrencias $C_e(t)$ y $C_n(t)$. Observamos coincidencia en las crestas y valles entre ambas gráficas, coincidiendo de esta manera en los puntos donde se tiene máxima concurrencia y en aquellos donde goza de mínima concurrencia. Por lo tanto, el fenómeno más característico de la mecánica cuántica entre el par de qutrits dado por 2.30 es completamente caracterizado por la concurrencia. Además, dicho entrelazamiento para este caso específico de estado puro, resultó ser caracterizado correctamente por la propuesta del inversor ingenuo como se manifiesta en la equivalencia de las gráficas de la figura 2.2, con la ventaja que $C_n(t)$ invierte menos tiempo de cálculo en comparación con el tiempo para obtener $C_e(t)$. Cabe aclarar, que en este caso el tiempo de cálculo fue bastante rápido, en ambos casos, del orden de medio segundo reportando una insignificante diferencia entre ellos.

Por otro lado, observemos que existe una pequeña diferencia con la escala de la distribución, específicamente, los puntos en azul aumenta a un valor de la concurrencia hasta 1.5 mientras que con el método exacto apenas supera la unidad. Para evitar estos problemas,

recordando que el inversor ingenuo no gira el espín del qutrit, usamos la acción de los súper operadores S_μ y S_ν (Ecs. 2.16) y por ende la expresión $\tilde{\rho}_3 = S_\mu\left[S_\nu\left[\rho^*\right]\right]$ para obtener la matriz de densidad del espín girado del qutrit.

El resultado para la concurrencia, obteniendo $\tilde{\rho}$ bajo la acción de los súper operadores S_μ y S_ν coincide exactamente con el método exacto. Consecuentemente, obtenemos el mismo resultado que 2.38 para $C_s\left(gt\right)$, que representa la distribución de la concurrencia con el uso de la expresión $\tilde{\rho} = S_\mu\left[S_\nu\left[\rho^*\right]\right]$, Por lo mismo, la representación gráfica concuerda con los puntos negros de la figura 2.2. Es necesario precisar que, la concurrencia para qutrits no es acotada por los valores de 0 a 1, como lo condiciona la concurrencia para qubits. En el caso de sistemas bipartita qutrits la concurrencia puede tomar valores mayores que la unidad como hasta el momento se ha manifestado en las figuras anteriores.

Finalmente, en la siguiente figura graficamos la distribución de probabilidades del estado propagado de dos qutrits entrelazados, por lo tanto graficamos el modulo al cuadrado de las amplitudes de la Ec. 2.37. La figura 2.3, nos dice que la probabilidad de encontrar dos fotones en la primera fibra y ninguno en la segunda es la misma que la probabilidad de encontrar los dos fotones en la segunda y ninguno en la primera. Es indistinto quien sea la primera fibra y cual la segunda, el concepto en sí, nos dice que se trata de eventos correlacionados, es decir, un estado entrelazado. En cuanto a la probabilidad de encontrar un fotón en la primera fibra y el otro en la segunda, la gráfica nos dice que se trata de un hecho indiferente de los dos primeros eventos posibles. Lo cual tiene sentido con lo estudiado en el capítulo 1 donde experimentalmente se demuestra una fuerte correlación entre fotones. La distribución de probabilidades de la figura 2.3, representan el comportamiento del módulo al cuadrado de la amplitudes del vector de estado propagado en dependencia con el parámetro gt.

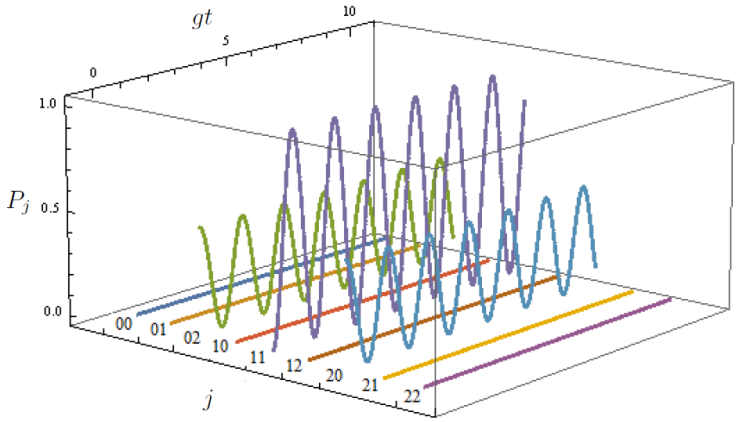

Figura 2.3: Distribución de probabilidades del estado propagado Ec. 2.37 respecto al parámetro de propagación gt.

2.6.2. Estado Separable

Ahora consideremos como estado inicial prueba un sistema separable, elegimos como ejemplo,

$$|\Psi(0)\rangle = |20\rangle . \tag{2.40}$$

Sabemos que la propagación de dos campos electromagnéticos cuantizados a través de un divisor de haz está dado por el operador de evolución $U(t) = e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t}$; conociendo como actúa dicho operador sobre los operadores de creación, encontramos el estado evolucionado sobre el estado prueba inicial 2.31,

$$|\Psi(t)\rangle = \cos^2(gt)|20\rangle - \sqrt{2}i\cos(gt)\sin(gt)|11\rangle - \sin^2(gt)|02\rangle . \tag{2.41}$$

Es sencillo calcular la matriz de densidad para el estado puro anterior, esto es,

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \cos^4(gt)|20\rangle\langle 20| + i\sqrt{2}\cos^3(gt)\sin(gt)|20\rangle\langle 11| - \cos^2(gt)\sin^2(gt)|20\rangle\langle 02| \\
&- i\sqrt{2}\cos^3(gt)\sin(gt)|11\rangle\langle 20| + 2\cos^2(gt)\sin^2(gt)|11\rangle\langle 11| \\
&+ i\sqrt{2}\cos(gt)\sin^3(gt)|11\rangle\langle 02| - \cos^2(gt)\sin^2(gt)|02\rangle\langle 20| \\
&- i\sqrt{2}\cos(gt)\sin^3(gt)|02\rangle\langle 11| + \sin^4(gt)|02\rangle\langle 02| .
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Antes de continuar, es oportuno presentar las matrices parciales de cada uno de los subsistemas del estado conjunto bipartita del operador de densidad 2.42, las cuales son:

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \cos^4(gt) & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos^2(gt)\sin^2(gt) & 0 \\ 0 & 0 & \sin^4(gt) \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

y

$$\rho_B(t) = \begin{pmatrix} \sin^4(gt) & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos^2(gt)\sin^2(gt) & 0 \\ 0 & 0 & \cos^4(gt) \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Con respecto al cálculo de la concurrencia usando el inversor ingenuo es suficiente introducir en el algoritmo matemático la matriz de densidad 2.42 del estado separable propagado. Sin embargo la distribución de concurrencia arrojada, no describe adecuadamente la caracterización de entrelazamiento cuántico descrita por el método exacto, ver figura 2.4. Dicho lo anterior, recurrimos al cálculo de la concurrencia usando la expresión 2.15 haciendo uso de los operadores S_μ y S_ν. Por otro lado, para el cálculo exacto es necesario usar las ecuaciones de las matrices parciales 2.43 y 2.44 y la matriz de densidad del estado separable 2.42.

El resultado de la distribución de concurrencia se presenta en la figura 2.4, comparando las distribuciones $C_e(t)$ que es la concurrencia obtenida con el método exacto, $C_s(t)$ por medio del uso de los súper operadores S_μ y S_ν y $C_n(t)$ a partir del inversor ingenuo. Observamos que, la distribución coincide exactamente para $C_e(t)$ y $C_s(t)$ caracterizando adecuadamente el estado separable. Por otro lado, $C_n(t)$ no describe de ninguna manera la concurrencia del estado separable al representar resultados completamente distintos al método exacto $C_e(t)$.

Por lo tanto, concluimos que la propuesta del inversor ingenuo en función de la matriz S_y tiene una limitante en el caso de estados separables. Caso distinto con el uso de los súper operadores S_μ y S_ν que entrega resultados idénticos al método exacto. Con respecto a los tiempos de cómputo, fue del orden de medio segundo para todos los casos.

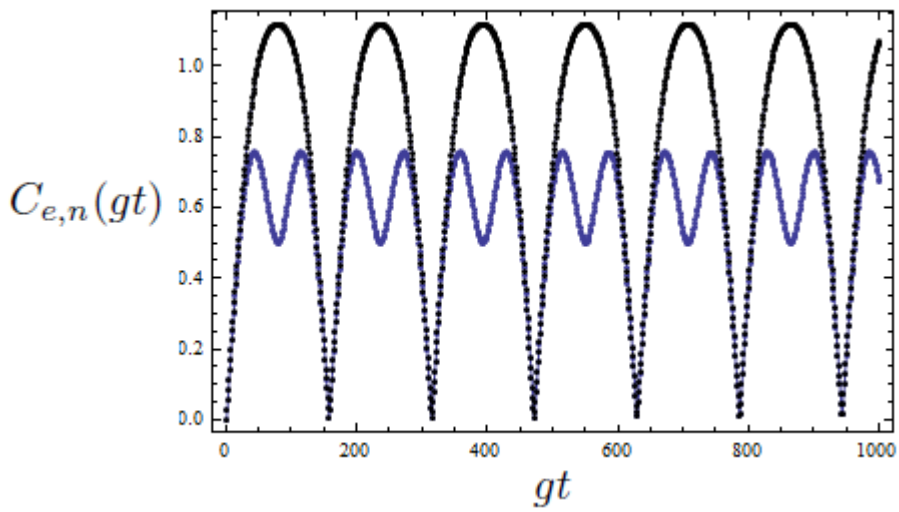

Figura 2.4: Comparación entre concurrencias: los puntos en negro corresponden a la distribución con el método exacto $C_e(t)$, que coincide exactamente con la distribución de $C_s(t)$ representada en línea azul. Por otro lado, los puntos en azul representan la distribución $C_n(t)$ usando el inversor ingenuo. Todo para el estado inicial prueba 2.31.

Las gráficas anteriores están asociadas a las siguientes expresiones, coincidiendo los resultados numéricos para $C_e(t)$ y $C_s(t)$.

$$C_e(t) = C_s(t) = \frac{13}{8}\sin^2(2gt) + \frac{3}{8}\cos(4gt)\sin^2(2gt), \tag{2.45}$$

$$C_n(t) = \frac{9}{8}\sin^2(2gt) + \frac{7}{8}\cos(4gt)\sin^2(2gt). \tag{2.46}$$

Mientras que para el inversor ingenuo el resultado numérico es expresado por la Ec. 2.46, como se especificó dicha distribución no caracteriza adecuadamente el entrelazamiento del estado separable.

Por último, presentamos la propagación respecto el parámetro gt del vector de estado propagado con el estado inicial separable. Proyectando sobre el módulo al cuadrado de las amplitudes. En otras palabras, queremos saber cómo se comportan las probabilidades, para los estados $|20\rangle$, $|11\rangle$ y $|02\rangle$ de la Ec. 2.41.

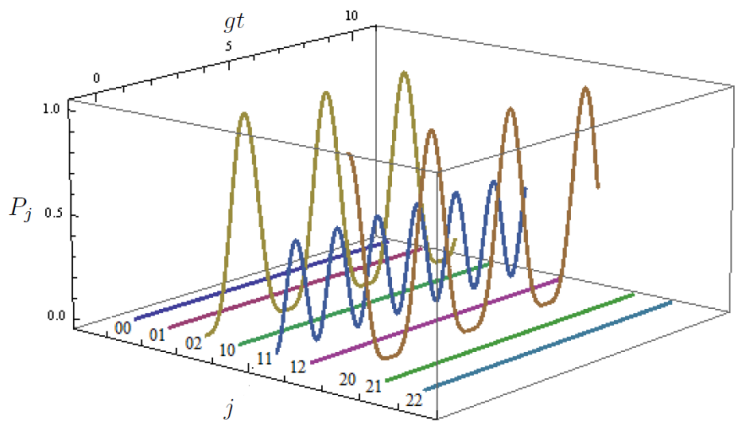

Figura 2.5: Distribución de probabilidades del estado propagado $|\Psi(t)\rangle = \cos^2(gt)|20\rangle - \sqrt{2}i\cos(gt)\sin(gt)|11\rangle - \sin^2(gt)|02\rangle$, respecto al parámetro de propagación gt.

Concluimos que la propuesta del inversor ingenuo es válida para caracterizar el entrelazamiento cuántico de cierto tipo de estados puros, teniendo problemas en la caracterización de otros. Sin embargo, con las mismas matrices de Gell-Mann λ_2, λ_5 y λ_7 del inversor ingenuo. Se calcula la concurrencia, por medio de la acción de los súper operadores S_μ y S_ν definidos a partir de dichas matrices, entregando resultados idénticos al cálculo exacto. De tal forma, se caracteriza el entrelazamiento cuántico de cualquier estado puro, sea entrelazado o separable. Se describe completamente cualquier estado puro, estudiando los extremos del sistema cuántico. Por un lado, un estado máximamente entrelazado y en otro extremo el estado separable. Considerando, también la región intermedia con el caso general, donde tenemos todos los estados posibles del sistema qutrit.

Capítulo 3

Conclusiones

El entrelazamiento es un fenómeno que describe la naturaleza de la mecánica cuántica, el cual matemáticamente consiste en fuertes correlaciones entre dos o más estados, de manera que no pueden ser representados como productos de estados cuánticos. La manera más sencilla de obtener un estado entrelazado ocurre en la incidencia de un único fotón en un puerto de entrada de un divisor de haz, ya que, el estado a la salida necesariamente se manejará como un estado global debido a correlación en la detención de fotones en los puertos de salida.

Es de gran importancia caracterizar el grado de entrelazamiento de un sistema cuántico. Todo dirigido al avance de nuevas tecnologías en particular información cuántica. Por lo tanto, una de las preocupaciones mayúsculas es caracterizar el grado de entrelazamiento de cualquier sistema enredado, para ello, se han desarrollado diversas medidas de enredo. En particular, la medida más conocida y flexible para sistemas bipartita de qubits es la concurrencia que caracteriza el entrelazamiento cuántico.

Calculamos el entrelazamiento de sistemas bipartita de qutrits con ayuda de la medida concurrencia generalizada a un sistema de tres niveles. Se concluye, que la definición de la concurrencia para estados puros $C(\Psi) = \sqrt{Tr(\rho\tilde{\rho})}$, funciona adecuadamente para caracterizar el enredo. Al determinar todas las componentes de la matriz de densidad del estado entrelazado así como sus matrices parciales, para obtener $\tilde{\rho}$, se caracterizaba el entrelazamiento de manera exacta. Arribando a un parámetro para comparar los resultados de la concurrencia a partir de las propuestas específicas; un inversor ingenuo y la obtención de $\tilde{\rho}$ mediante la acción de súper operadores definidos en términos de la matrices de Gell-Mann λ_2, λ_5 y λ_7 al igual que el inversor ingenuo.

Concluimos, que la propuesta del inversor ingenuo, pese a que no gira el espín del qutrit funciona adecuadamente para caracterizar el entrelazamiento cuántico en algunos estados puros. Por lo mismo, surgió la necesidad de proponer una nueva forma de calcular la matriz de densidad del espín girado $\tilde{\rho}$. Llegando a la propuesta de los súper operadores S_μ y S_ν definidos también en términos de las mismas matrices de Gell-Mann. Para este caso, los resultados de la caracterización del entrelazamiento, además de ser idénticos para cualquier estado puro redujeron el tiempo de cómputo. Por lo tanto, concluimos que la propuesta, perfectamente aceptable para caracterizar el entrelazamiento de cualquier estado puro, es el cálculo de la concurrencia con la propuesta $\tilde{\rho}_3 = S_\mu [S_\nu [\rho^*]]$ todo en función de las matrices de Gell-Mann

ya reportadas. Finalmente, se cumple el objetivo al reducir los tiempos de cómputo con las propuestas presentadas caracterizando eficientemente el entrelazamiento de cualquier estado puro.

Queda como conclusión final la evidencia de trabajo a futuro. Se pretende dar un proceso de continuidad a este tema de investigación con el fin de desarrollar y finalmente encontrar una propuesta para caracterizar el entrelazamiento de cualquier sistema bipartita qutrit incluyendo los estados mixtos.

Apéndice A

Inversor universal

El inversor universal que es una generalización del súper operador S_2 cumpliendo las siguientes propiedades:

a) S_D mapea operadores Hermiticos a operadores Hermiticos.

b) S_D conmuta con todos los operadores unitarios.

c) $\langle\Psi| S_D \otimes S_D (|\Psi\rangle\langle\Psi|) |\Psi\rangle$ es no negativo para cualquier estado puro conjunto $|\Psi\rangle$, y va hacer cero si y solo si es un estado producto.

d) S_D es un súper operador positivo.

e) S_D es un múltiplo positivo de un súper operador que conserva traza.

f) S_D mapea cualquier estado puro $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ a un múltiplo positivo del proyector sobre un espacio ortogonal a $|\Psi\rangle$.

Respecto a la última propiedad no es posible que S_D se derive de una conjugación, porque, una conjugación no puede conmutar con todos los operadores unitarios; no podría servir como base para las medidas de entrelazamiento cuántico, el caso en dos dimensiones es una excepción. Ahora bien, al respecto de las otras propiedades, Rungta et al. [16] demuestran que el único súper operador que cumple estas propiedades es,

$$S_D = \nu_D (\mathbb{I} - \mathcal{I}), \tag{A.1}$$

donde ν_D es una constante positiva.

En lo que sigue, se manejan algunas propiedades de los súper operadores, para ello, se puede consultar la referencia [16] donde se presenta a groso modo el formalismos de ellos. Continuando en la Ec. A.1, $\mathbb{I}$ es el súper operador unitario relativo a la acción izquierda derecha definido de la siguiente manera,

$$\mathbb{I} = \sum_{j,k} |j\rangle\langle k| \odot |k\rangle\langle j|. \tag{A.2}$$

Este operador es Hermitico y conserva traza, es decir, $\mathbb{I} = \mathbb{I}^\dagger = \mathbb{I}^\times$. Es un súper operador unitario relativo a la acción izquierda derecha porque $\mathbb{I}\,|A) = A$ para todo operador A. Pero

su acción ordinaria da $\mathbb{I}(A) = Tr(A)\,I$. Por otra parte, $\mathcal{I}$ es el súper operador unitario relativo a la acción ordinaria, tal que,

$$\mathcal{I} = \sum_{p,q} |p\rangle \langle q| \odot |q\rangle \langle q| \,. \tag{A.3}$$

Este súper operador también es Hermitico y conserva traza, es decir, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\dagger} = \mathcal{I}^{\times}$. Es un súper operador unitario relativo a la acción ordinaria porque $\mathcal{I}(A) = A$ para todo operador A. Pero su acción izquierda derecha da $\mathcal{I}\,|A) = Tr(A)\,I$.

Específicamente, las propiedades (a), (b), (c) son suficiente para determinar la Ec. A.1 considerando los súper operadores unitarios relativos a la acción izquierda derecha y ordinaria. Cabe aclarar, que tanto $\mathbb{I}$ como $\mathcal{I}$ son operadores especiales con características únicas en el sentido que actúan sobre un operador, la forma en que están definidos se presenta en las Ecs. A.2 y A.3 respectivamente. Sin embargo, el desarrollo para la obtención de la Ec. A.1 como el único súper operador que cumple las propiedades (a)-(f), se puede abordar en la referencia [16], para los fines y objetivos de la presente tesis no es necesario profundizar en tal demostración.

Ahora bien, observemos que si aplicamos el único súper operador que cumple las propiedades (a)-(f), Ec. A.1 a un operador A tenemos,

$$S_D(A) = \upsilon_D\left[\mathbb{I}(A) - \mathcal{I}(A)\right] = \upsilon_D\left[Tr(A)\,I - A\right]. \tag{A.4}$$

Es claro, que al aplicar la Ec. A.1 al operador A nos encontramos bajo la acción ordinaria para ambos súper operadores unitarios $\mathbb{I}$ y $\mathcal{I}$. Si A es un operador de densidad ρ, tenemos que,

$$S_D(\rho) = \nu_D(I - \rho)\,.$$

Que es, justamente la definición que se presentó en la Ec. 1.31 para el inversor universal. De hecho, de la expresión anterior para el inversor se pueden demostrar rápidamente dos propiedades. Primero al tener el término $I-\rho$, S_D es un súper operador positivo para cualquier ρ siempre que ν_D sea positivo. También, vemos S_D mapea un estado puro $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ a un múltiplo positivo el proyector ortogonal para ρ esto se ve con la misma relación para el inversor,

$$S_D(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \upsilon_D(I - |\Psi\rangle\langle\Psi|)\,. \tag{A.5}$$

Por lo tanto, se estarían cumpliendo las propiedades (d) y (f) respectivamente. De hecho, la ecuación anterior es la relación que inspira a llamar a S_D inversor universal.

Ahora bien, usando la expresión para el inversor universal $S_D = \nu_D(\mathbb{I} - \mathcal{I})$, podemos escribir el operador de densidad para el espín girado de un sistema de dimensiones arbitrarias, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_D = S_{D_1} \otimes S_{D_2} &= \nu_{D_1}(\mathbb{I} - \mathcal{I}) \otimes \nu_{D_2}(\mathbb{I} - \mathcal{I}) \\ &= \nu_{D_1}\nu_{D_2}(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} - \mathbb{I}\otimes\mathcal{I} - \mathcal{I}\otimes\mathbb{I} + \mathcal{I}\otimes\mathcal{I})\,. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Aplicando a un operador de densidad arbitrario ρ_{AB} tenemos,

$$S_{D_1} \otimes S_{D_2} (\rho_{AB}) = \nu_{D_1}\nu_{D_2} \left[(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \rho_{AB} - (\mathbb{I} \otimes \mathcal{I}) \rho_{AB} - (\mathcal{I} \otimes \mathbb{I}) \rho_{AB} + (\mathcal{I} \otimes \mathcal{I}) \rho_{AB} \right]. \tag{A.7}$$

Aparte vemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} &= \sum_{pq,rs} (|p\rangle \langle q| \odot |q\rangle \langle p|) \otimes (|r\rangle \langle s| \odot |s\rangle \langle r|) \\ &= \sum_{pq,rs} |p\rangle \langle q| \otimes |r\rangle \langle s| \odot |q\rangle \langle p| \otimes |s\rangle \langle r|. \end{aligned} \tag{A.8}$$

La ecuación anterior se aplica al operador de densidad de un estado puro bipartita ρ_{AB}, que sabemos está dado por la Ec. 1.3,

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \rho_{AB} &= \sum_{\substack{jklm \\ qp,rs}} \rho_{jklm} (|p\rangle \langle q| \otimes |r\rangle \langle s|) (|j\rangle \langle l| \otimes |k\rangle \langle m|) (|q\rangle \langle p| \otimes |s\rangle \langle r|) \\ &= \sum_{\substack{jklm \\ qp,rs}} \rho_{jklm} |p\rangle \langle q|j\rangle \langle l|q\rangle \langle p| \otimes |r\rangle \langle s|k\rangle \langle m|s\rangle \langle r| \\ &= \sum_{jk} \rho_{jkjk} \sum_{p} |p\rangle \langle q| \otimes \sum_{r} |r\rangle \langle r|. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Observemos, que la primera expresión nos representa la suma de los elementos de la matriz diagonal, que sabemos es 1. Por lo tanto, la expresión anterior queda,

$$(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \rho_{AB} = I \otimes I. \tag{A.10}$$

Ahora calculamos,

$$\mathbb{I} \otimes \mathcal{I} = \sum_{pq,ls} |l\rangle \langle s| \otimes |p\rangle \langle p| \odot |s\rangle \langle l| \otimes |q\rangle \langle q|, \tag{A.11}$$

aplicado al operador ρ_{AB},

$$(\mathbb{I} \otimes \mathcal{I}) \rho_{AB} = \sum_{pq,ls} (|l\rangle \langle s| \otimes |p\rangle \langle p|) (|j\rangle \langle i| \otimes |k\rangle \langle m|) (|s\rangle \langle l| \otimes |q\rangle \langle q|). \tag{A.12}$$

Desarrollando la expresión anterior finalmente obtenemos,

$$(\mathbb{I} \otimes \mathcal{I}) \rho_{AB} = \sum_{jkql} \rho_{jkjq} |l\rangle \langle l| \otimes |k\rangle \langle q|. \tag{A.13}$$

Aparte, sabemos que las matrices reducidas de un sistema las calculamos con la traza parcial, Para este caso nos conviene tomar,

$$\rho_B = Tr_A \{\rho_{AB}\} = \sum_{\substack{u \\ jklm}} \rho_{jklm} \langle u|j\rangle \langle l|u\rangle \otimes |k\rangle \langle m| = \sum_{jkm} \rho_{jkjm} |k\rangle_B \langle m|. \tag{A.14}$$

También,

$$I_A \otimes Tr_A \{\rho_{AB}\} = \sum_{\substack{p \\ jkm}} \rho_{jkjm} |p\rangle_A \langle p| \otimes |k\rangle_B \langle m| . \tag{A.15}$$

Comparando las Ecs. A.13 con A.15 observamos que tienen la misma estructura por lo tanto concluimos,

$$(\mathbb{I} \otimes \mathcal{I}) \rho_{AB} = I \otimes \rho_B. \tag{A.16}$$

De igual forma se puede demostrar,

$$(\mathcal{I} \otimes \mathbb{I}) \rho_{AB} = \rho_A \otimes I. \tag{A.17}$$

Por último tenemos,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} \otimes \mathcal{I}) \rho_{AB} &= \sum_{\substack{jklm \\ pqrs}} (|p\rangle \langle p| \otimes |r\rangle \langle r|) (|j\rangle \langle l| \otimes |k\rangle \langle m|) (|q\rangle \langle q| \otimes |s\rangle \langle s|) \\ &= \sum_{jkqs} \rho_{jkqs} |j\rangle \langle q| \otimes |k\rangle \langle s|. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Identificamos que esto es justamente la matriz de densidad, por lo tanto,

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{I}) \rho_{AB} = \rho_{AB}. \tag{A.19}$$

Sustituyendo, las Ecs. A.10, A.16, A.17 y A.19 en A.7, finalmente encontramos

$$\tilde{\rho}_D = S_{D_1} \otimes S_{D_2} (\rho_{AB}) = \nu_{D_1} \nu_{D_2} [I \otimes I - I \otimes \rho_B - \rho_A \otimes I + \rho_{AB}] . \tag{A.20}$$

Lo que encontramos es una expresión para determinar el producto tensorial entre los inversores universales de cada uno de los estados del sistema bipartita, para finalmente poder calcular la concurrencia del sistema de dimensiones arbitrarias. Con la gran ventaja que ahora la matriz de densidad del sistema girado está en términos de cantidades conocidas como lo son la matriz de densidad del sistema estudiado y sus respectivas trazas parciales, todo esto, válido para un sistema bipartita de dimensiones arbitrarias.

Apéndice B

Hamiltoniano efectivo en la interacción campo: divisor de haz

El Hamiltoniano que describe a un campo electromagnético incidiendo en un par de guías de onda es,

$$H = w_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + w_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right). \tag{B.1}$$

Solo nos interesa conservar las energías que tienen que ver el acoplamiento entre los campos que se propagan en las guías de onda, para ello, nos vemos al marco de referencia definido por,

$$|\xi\rangle = R(t) |\varphi\rangle, \tag{B.2}$$

teniendo la rotación,

$$R(t) = e^{-i\left(w_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + w_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2\right)t}. \tag{B.3}$$

Entonces, la ecuación de Schrödinger en el nuevo marco de referencia es,

$$i \frac{\partial \left(R(t) |\varphi\rangle \right)}{\partial t} = H |\varphi\rangle. \tag{B.4}$$

Derivando y eliminando términos semejantes,

$$i R(t) \frac{\partial |\varphi\rangle}{\partial t} = g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) R(t) |\varphi\rangle. \tag{B.5}$$

Finalmente, llegamos a la expresión,

$$i \frac{\partial |\varphi\rangle}{\partial t} = R^\dagger(t)\, g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) R(t) |\varphi\rangle. \tag{B.6}$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano efectivo es,

$$H_{eff} = R^\dagger(t)\, g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) R(t) \tag{B.7}$$

$$= g \left[R^\dagger(t)\, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 R(t) + R^\dagger(t)\, \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger R(t) \right]. \tag{B.8}$$

Introducimos, unos convenientes de la forma $R(t)\,R^{\dagger}(t) = 1$ tal que,

$$H_{eff} = g\left[R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_1^{\dagger}R(t)\,R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_2R(t) + R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_1R(t)\,R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_2^{\dagger}R(t)\right]. \tag{B.9}$$

Aparte, usando el Lemma de Hadamard [20] es fácil encontrar:

$$\begin{aligned}
R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_1^{\dagger}R(t) &= \hat{a}_1^{\dagger}e^{iw_1t}\\
R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_2R(t) &= \hat{a}_2e^{-iw_2t}\\
R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_2^{\dagger}R(t) &= \hat{a}_2^{\dagger}e^{iw_2t}\\
R^{\dagger}(t)\,\hat{a}_1R(t) &= \hat{a}_1e^{-iw_1t}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano efectivo queda,

$$H_{eff} = g\left[\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2e^{i(w_1-w_2)t} + \hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger}e^{-i(w_1-w_2)t}\right]. \tag{B.10}$$

Apéndice C

Acción del operador de evolución $e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t}$ sobre los operadores de creación $\hat{a}_1^\dagger$ y $a_2^\dagger$

Conociendo el operador de evolución,

$$U(t) = e^{-iH_{eff}t} = e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t}, \tag{C.1}$$

es sencillo saber cómo actúa sobre los operadores de creación $\hat{a}_1^\dagger$ y $a_2^\dagger$. De tal modo conoceremos,

$$U(t)\,\hat{a}_1^\dagger U^\dagger(t) \quad y \quad U(t)\,\hat{a}_2^\dagger U^\dagger(t)\,. \tag{C.2}$$

Usando el Lemma de Hadamard tenemos,

$$\begin{aligned} e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t} a_1^\dagger e^{ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t} &= a_1^\dagger + (-igt)\left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger, a_1^\dagger\right] \\ &+ \frac{(-igt)^2}{2!}\left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger, \left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger, a_1^\dagger\right]\right] + ... \end{aligned} \tag{C.3}$$

Aparte mostramos que,

$$\left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger, a_1^\dagger\right] = a_2^\dagger. \tag{C.4}$$

Entonces la Ec. C.3 ahora es,

$$e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t} a_1^\dagger e^{ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t} = a_1^\dagger + (-igt)\,a_2^\dagger + \frac{(-igt)^2}{2!}\left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger, a_2^\dagger\right] + ... \tag{C.5}$$

De igual forma,

$$\left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger, a_2^\dagger\right] = a_1^\dagger. \tag{C.6}$$

Siguiendo el desarrollo encontramos,

$$\begin{aligned} e^{-ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t} a_1^\dagger e^{ig\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + a_1 \hat{a}_2^\dagger\right)t} &= a_1^\dagger + (-igt)\, a_2^\dagger + \frac{(-igt)^2}{2!} a_1^\dagger + \frac{(-igt)^3}{3!} a_2^\dagger + \frac{(-igt)^4}{4!} a_1^\dagger + ... \\ &= a_1^\dagger \left(1 - \frac{(gt)^2}{2!} + \frac{(gt)^4}{4!} - + ...\right) \\ &- a_1^\dagger \left(igt - i\frac{(gt)^3}{3!} + i\frac{(gt)^5}{5!} - + ...\right). \end{aligned} \tag{C.7}$$

Finalmente, se llega,

$$U(t)\, \hat{a}_1^\dagger U^\dagger(t) = \hat{a}_1^\dagger \cos(gt) - i\hat{a}_2^\dagger \sin(gt). \tag{C.8}$$

Y de manera análoga,

$$U(t)\, \hat{a}_2^\dagger U^\dagger(t) = \hat{a}_2^\dagger \cos(gt) - i\hat{a}_1^\dagger \sin(gt). \tag{C.9}$$

Índice de figuras

1.1. Descripción cuántica de un divisor de haz. 7
1.2. Estado de entrada: único fotón en el modo 1 y vacío en el modo 0 8

2.1. Comparación entre concurrencias, para el estado $|\Psi\rangle = \sin\theta\,|20\rangle + \cos\theta\,|02\rangle$. 16
2.2. Comparación entre concurrencias: los puntos negros corresponden a la distribución con el método exacto $C_e\,(t)$ y los azules usando la propuesta de inversor ingenuo $C_n\,(t)$, para el estado inicial prueba 2.30. 20
2.3. Distribución de probabilidades del estado propagado Ec. 2.37 respecto al parámetro de propagación gt. 21
2.4. Comparación entre concurrencias: los puntos en negro corresponden a la distribución con el método exacto $C_e\,(t)$, que coincide exactamente con la distribución de $C_s\,(t)$ representada en línea azul. Por otro lado, los puntos en azul representan la distribución $C_n\,(t)$ usando el inversor ingenuo. Todo para el estado inicial prueba 2.31. 23
2.5. Distribución de probabilidades del estado propagado $|\Psi\,(t)\rangle = \cos^2(gt)\,|20\rangle - \sqrt{2}i\cos(gt)\sin(gt)\,|11\rangle - \sin^2(gt)\,|02\rangle$, respecto al parámetro de propagación gt. 24

Bibliografía

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?," *Physical review*, vol. 47, no. 10, p. 777, 1935.

[2] J. D. Trimmer, "The present situation in quantum mechanics: A translation of Schrödinger's "cat paradox" paper," *Proceedings of the american philophical society*, vol. 124, no. 5, p. 323, 1980.

[3] D. Bohm and Y. Aharonov, "Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen and Podolsky," *Physical Review*, vol. 108, no. 4, p. 1070, 1957.

[4] J. S. Bell, "On the Einstein- Podolsky- Rosen paradox," *Physics*, vol. 1, no. 3, pp. 195–200, 1964.

[5] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, "Quantum entanglement," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, p. 865, 2009.

[6] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem," *Physical review letters*, vol. 47, no. 7, p. 460, 1981.

[7] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities," *Physical review letters*, vol. 49, no. 2, p. 91, 1982.

[8] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, "Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers," *Physical review letters*, vol. 49, no. 25, p. 1804, 1982.

[9] P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, "Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences," *Europhys letters*, vol. 1, no. 4, pp. 173–179, 1986.

[10] C. Gerry and P. Knight, *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, New York, pp. 294–299, 2005.

[11] A. Ekert and L. Knight, Peter, "Entangled quantum systems and the Schmidt descomposition," *American Journal of Physics*, vol. 63, no. 5, p. 415, 1995.

[12] L. Rudnicki, P. Horodecki, and K. Zyczkowski, "Collective uncertainty entanglement test," *Physical review letters*, vol. 107, no. 15, p. 150502, 2011.

[13] W. K. Wootters, "Entanglement of formation and concurrence," *Quantum information and computation*, vol. 1, no. 1, pp. 27–44, 2001.

[14] S. Hill and W. K. Wootters, "Entanglement of a pair of quantum bits," *Physical review letters*, vol. 78, no. 26, p. 5022, 1997.

[15] W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits," *Physical review letters*, vol. 80, no. 10, p. 2245, 1998.

[16] P. Rungta, V. Buzek, C. M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, "Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions," *Physical review A*, vol. 64, no. 4, p. 042315, 2001.

[17] C. Gerry and P. Knight, *Introductory quantum optics-Quantum mechanics of beam splitters*. Cambridge University Press, New York, pp. 135–149, 2005.

[18] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, "Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference," *Physical review letters*, vol. 59, no. 18, p. 2044, 1987.

[19] C. M. Caves and G. J. Milburn, "Qutrit entanglement," *Optics Communications*, vol. 179, pp. 439–446, 2000.

[20] H. M. Moya-Cessa and F. Soto-Eguibar, *Differential Equations: An Operational Approach*. Rinton Press, Inc., United States of America, pp. 37–61, 2011.