



**I
N
A
O
E**

**Modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas:
Estudio espectral**

Por

Cinthia Huerta Alderete
Lic. en Física, BUAP

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en la especialidad en Óptica

en el

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica

Agosto 2016

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara
Investigador titular del INAOE

©INAOE 2016

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes



Abstract

We introduce the cross-cavity quantum Rabi model describing the interaction of a single two-level system with two orthogonal boson fields and propose its quantum simulation by two-dimensional, bichromatic, first-sideband driving of a single trapped ion. Like a first try of provide an analytical solution to our model, we solved the model in the weak coupling regime with Schwinger two-boson representation of $SU(2)$. We introduce the Fulton-Gouterman approach to diagonalize the CCQRM in the two-level system basis, We provide an introductory survey of the model, including its diagonalization in the two-level system basis, numerical spectra and its characteristics in the weak, ultra strong and deep strong coupling regimes are included. We also show that the particular case of degenerate field frequencies and balanced couplings allows us to cast the model as two parity deformed oscillators in any given coupling regime.

Resumen

Presentamos el modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas que describe un único sistema de dos niveles que interactúa con dos campos ortogonales de bosones y proponemos su simulación cuántica utilizando dos pares de campos biocromáticos ortogonales, sintonizados en la primera banda de transición de un sólo ion atrapado. Como primer intento para dar una solución analítica a nuestro modelo, estudiamos el régimen de acoplamiento débil en la representación de Schwinger de $SU(2)$ de dos bosones. Y, para el caso más general, introducimos el formalismo de Fulton-Gouterman para diagonalizar el Hamiltoniano en la base del qubit, lo que nos permite estudiar numéricamente espectro y sus características en los regímenes de acoplamiento débil, ultra-fuerte y fuerte-profundo. También mostramos que el caso particular de campos degenerados en frecuencia y acoplamientos iguales nos permite ver el modelo como dos osciladores con paridad deformada en cualquier régimen de acoplamiento.

Agradecimientos

Se me escapan las palabras para decir gracias a todas las personas que han acompañado en este camino. Agradezco:

A mis padres, *Jacinta Alderete Galán* y *Julián Huerta Vázquez* por su confianza ciega en mi; y a mis hermanos: *Jordan, Axell, Aldo y Diana* quienes siempre me han brindado su apoyo y su cariño incondicional.

A mis sinodales: Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich, Dr. Francisco Soto Eguibar y Dr. Julio César García Melgarejo por tomarse el tiempo para leer este trabajo de tesis.

A mi asesor, Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara, por dejarme ser parte de *su pedacito de grupo*, porque aún cuando nos hemos topado con uno que otro bache en el camino, no ha dejado de andar con nosotros, siempre impulsándonos a seguir adelante, pero sobre todo gracias a Blas, el amigo.

A todos mis amigos, sin ellos hubiera sido bastante complicado mi andar.

A *CONACyt*, por el apoyo económico.

CINTHIA HUERTA ALDERETE
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
Coordinación de Óptica
Puebla, Pue, 11 de agosto de 2016

Dedicatoria

A mi familia.

Índice general

Abstract	III
Resumen	v
Agradecimientos	VII
Dedicatoria	IX
Introducción	1
1. Simulación cuántica con iones atrapados	5
2. Acoplamiento débil	9
2.1. Modelo con campos degenerados en frecuencia	12
2.2. Modelo fuera de resonancia	16
3. Espectro del ccQRM	21
3.1. Caso excepcional	23
3.2. Régimen de acoplamiento débil	25
3.3. Régimen de acoplamiento fuerte-profundo	27
Conclusión	29
A. Métodos	31
A.1. Métodos matemáticos	31
A.1.1. Cambio de marcos de referencia	31
A.1.2. Transformaciones unitarias	32

Introducción

El modelo de Rabi cuántico [1], (QRM, por sus siglas en inglés) es uno de los modelos más importantes en óptica cuántica, usado para describir la interacción más fundamental de luz y materia cuánticas a través del acoplamiento entre un sistema de dos niveles con un campo bosónico. A pesar de su simplicidad, los primeros intentos por resolver analíticamente el QRM se redujeron a un pequeño régimen, el régimen de acoplamiento débil (*weak-coupling*), donde el parámetro de acoplamiento es pequeño comparado con la frecuencia del campo, de manera que es posible usar una aproximación de onda rotante (RWA) sobre el modelo de Rabi dando lugar a uno de los modelos más significativos en óptica cuántica, el modelo de Jaynes-Cummings [2]. Sin embargo, cuando la interacción crece, hasta llegar a los regímenes ultra-fuerte (*ultra-strong coupling*) y fuerte-profundo (*deep-strong coupling*), la RWA deja de ser válida. La necesidad de conocer de manera detallada el espectro y la dinámica del QRM más allá de RWA se hizo evidente debido a la posibilidad de alcanzar experimentalmente estos regímenes en plataformas de electrodinámica cuántica de circuitos (circuit-QED) [3, 4] y simulaciones cuánticas en átomos neutros y iones atrapados [5]. Fue hasta 2011, que se propuso la primer solución analítica para resolver completamente el espectro del QRM [6].

En este sentido, la dinámica del QRM ha sido bien estudiada en los regímenes más relevantes; en los regímenes weak-coupling (WC), $g \ll \omega$, ultra-strong (USC), $g \gtrsim 0.1\omega$, y deep-strong coupling (DSC), $g > \omega$ [5], así como algunas extensiones del QRM, donde el número de qubits [7–12] o de campos [13–15] incrementa. También se han estudiado generalizaciones del modelo donde se incluye algún término extra [6, 16, 17]. En este trabajo de tesis, estamos interesados en una configuración que podría resultar interesante, imaginemos un átomo de dos niveles interactuando con los campos de dos cavidades en una configuración ortogonal, Fig. 1, bajo acoplamiento mínimo y aproximación de onda larga, de manera que llegamos a lo que hemos llamado *Modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas* (ccQRM), el Hamiltoniano que describe el modelo se puede escribir como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^2 \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \sum_{j=1}^2 g_j \left(\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j \right) \hat{\sigma}_j, \quad (1)$$

donde ω_0 es la diferencia de energía entre los niveles energéticos del qubit y es descrito por las matrices de Pauli, $\hat{\sigma}_j$ con $j = 0, 1, 2$, los campos bosónicos, con frecuencias ω_j , están descritos por los operadores de creación y aniquilación \hat{a}_j^\dagger y \hat{a}_j , con $j = 1, 2$ y g_j

los acoplamientos átomo-campo.

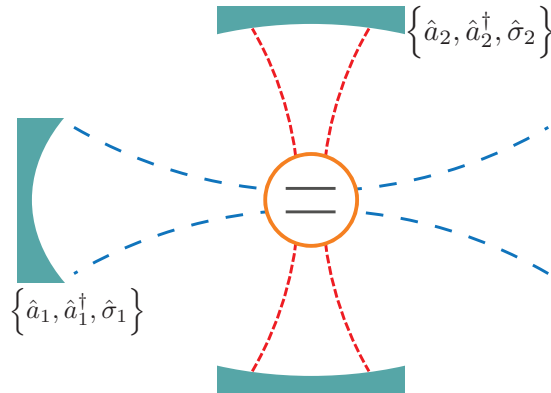


Figura 1: Representación esquemática del ccQRM, donde dos modos de campo ortogonales son acoplados a un sistema de dos niveles.

Este modelo puede ser relacionado con el movimiento vibracional de una molécula poliatómica interactuando con un campo externo, con acoplamiento lineal del tipo *Jahn-Teller* [18,19], en sólo dos dimensiones, o bien con un modelo de bombeo adiabático de Ramman de un sólo átomo de cuatro niveles acoplado a dos campos cuantizados [20]. Este tipo de modelos, cuando son estudiados bajo acoplamiento débil y con campos de la misma frecuencia, pueden exhibir una distribución de fotones de manera similar a la distribución de fotones obtenida con divisores de haz [21,22].

El trabajo de tesis esta organizado en 3 capítulos: en el primero, a manera de motivación, se propone una simulación cuántica en una plataforma de iones atrapados para el ccQRM. La posibilidad de realizar una simulación cuántica del ccQRM da pie a explorar la solución de este modelo, así en el Capítulo 2, guiados por la intuición, con ayuda de la aproximación de onda rotante y la representación de Schwinger de $SU(2)$, escribimos de manera más sencilla el Hamiltoniano del ccQRM. En este punto, se sugieren dos regímenes de interacción con acoplamiento débil, el primero, con campos degenerados en frecuencia, $\omega_1 = \omega_2$, de manera que no hay contribución de la interacción entre campos. Este sistema, al igual que el de un átomo interactuando con una cavidad, es completamente soluble, la dinámica del sistema se obtiene resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, de manera que es sencillo conocer la inversión de población y la población en cada uno de los modos. El segundo régimen de relevancia en acoplamiento débil, es aquel donde las frecuencias son del mismo orden, $\omega_0 \sim \omega_j$ para $j = 1, 2$, de manera que la interacción entre ambos campos es pequeña y es posible considerarla como una perturbación al sistema. Recientemente, nuevos regímenes han sido explorados en el campo de la interacción coherente entre un sistema de dos niveles y un único campo bosónico, para lo cual RWA ya no es aplicable y es necesario abandonar el modelo de Jaynes-Cummings, así con la intención de explorar que sucede con éste modelo en los regímenes lejos de la RWA, en el Capítulo 3, se introduce el formalismo de Fulton-Gouterman para diagonalizar el Hamiltoniano en la base del qubit, se demuestra

que, en el caso de campos degenerados y acoplamientos iguales, éste se reduce al estudio de dos osciladores con paridad deformada para cualquier acoplamiento dado. Por último, se presenta una simulación numérica para los tres regímenes de interés, USC usando el caso excepcional, el régimen WC donde, de manera tradicional, se describe el sistema bajo la RWA y finalmente, el régimen DSC donde se hace simulación por fuerza bruta. Por último, se dan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Simulación cuántica con iones atrapados

Los sistemas con iones atrapados resultan ser un buen candidato para la implementación de un simulador de sistemas cuánticos, ya que pueden ser controlados y manipulados con alta precisión; de tal forma que una gran variedad de interacciones pueden diseñarse. Así, con la intención de dejar atrás la imagen mental que se propuso y motivar el desarrollo experimental del modelo, se proporciona una simulación cuántica simple para el ccQRM mediante la ampliación de la reciente propuesta para simular el QRM estándar con iones atrapados [5], utilizando dos pares de campos biocromáticos ortogonales, en lugar de uno sólo,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^2 \left\{ \nu_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \sum_{k=r,b} \Omega_{j,k} \cos \left[\eta_{j,k} \left(\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j \right) - \omega_{j,k}t + \phi_{j,k} \right] \hat{\sigma}_j \right\}. \quad (1.1)$$

aquí, el ion atrapado de dos niveles es descrito por la frecuencia de transición interna, ω_0 , y las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_j$ con $j = 0, 1, 2$, los modos de vibración cuantizados del centro de masa por las frecuencias de oscilación mecánica, ν_j , y los operadores de aniquilación (creación) \hat{a}_j (\hat{a}_j^\dagger) con $j = 1, 2$ y tenemos dos pares de láseres de bombeo clásico, cada par con desintonía rojo y azul, $k = -1$ y $k = 1$ respectivamente, con frecuencia sintonizada en la primera banda lateral más algún pequeño desfase $\delta_{j,k}$,

$$\omega_{j,k} = \omega_0 + k\nu_j + \delta_{j,k}, \quad (1.2)$$

éstos campos clásicos tienen asociados parámetros de Lamb-Dicke $\eta_{j,k}$, y fases $\phi_{j,k}$, y son acoplados a sus correspondientes componentes dipolares con frecuencia $\Omega_{j,k}$. El Hamiltoniano (1.1), después de ser escrito en términos de las potencias de los operadores de creación y aniquilación, es llevado a un nuevo marco de rotante definido por,

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^2 \nu_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad (1.3)$$

de manera que se obtiene un Hamiltoniano efectivo de interacción

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \sum_{j,k} \frac{(-i)^{j-1}}{2} \Omega_{j,k} e^{-\frac{1}{2}|\eta_{j,k}|^2} \times \\ & \left[\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(-i\eta_{j,k})^p (-i\eta_{j,k})^q}{p!q!} \hat{a}_j^{\dagger p} \hat{a}_j^q e^{i[2\omega_0 + (p-q+k)\nu_j + \delta_{j,k}]t} e^{-i\phi_{j,k} +} \right. \\ & \left. \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(i\eta_{j,k})^r (i\eta_{j,k})^s}{r!s!} \hat{a}_j^{\dagger r} \hat{a}_j^s e^{i[(r-s-k)\nu_j - \delta_{j,k}]t} e^{i\phi_{j,k}} \hat{\sigma}_+ + \text{h.c.} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Típicamente, la diferencia energética entre niveles del ion se encuentra en la región óptica y es grande comparada con los parámetros restantes, $\omega_0 \gg \nu_j, \delta_{j,k}, \Omega_{j,k}$, de manera que la contribución de los términos que oscilan a frecuencias ópticas, $2\omega_0 + (q - p + k)\nu_j + \delta_{j,k} - \phi_{j,k}$, en promedio son cero para cualquier escenario realista de medición. Esto nos permite centrarnos en un Hamiltoniano efectivo de interacción aproximado,

$$\hat{H}_I \approx \sum_{j,k,r,s} \frac{(-i)^{j-1}}{2} \Omega_{j,k} e^{-\frac{1}{2}|\eta_{j,k}|^2} \frac{(i\eta_{j,k})^r (i\eta_{j,k})^s}{r!s!} \hat{a}_j^{\dagger r} \hat{a}_j^s e^{i[(r-s-k)\nu_j - \delta_{j,k}]t} e^{i\phi_{j,k}} \hat{\sigma}_+ + \text{h.c.} \quad (1.5)$$

Después de esta RWA-óptica, podemos implementar una segunda RWA, ahora mecánica, donde los términos que oscilan a frecuencias proporcionales a ν_j en promedio serán cero, si y sólo si la frecuencia mecánica de vibración es más grande que las desintonías y acoplamientos de la primera banda, $\nu_j \gg \delta_{j,k}, e^{-\frac{1}{2}|\eta_{j,k}|^2} \Omega_{j,k}$, de manera que podemos reescribir,

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & i \frac{\eta_{1,-1}}{2} \Omega_{1,-1} e^{-\frac{1}{2}|\eta_{1,-1}|^2} \left[\frac{\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1!}{(\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + 1)!} L_{\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1}^{(1)} (|\eta_{1,-1}|^2) \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta_{1,-1}t} e^{i\phi_{1,-1}} + \text{h.c.} \right] + \\ & + i \frac{\eta_{1,1}}{2} \Omega_{1,1} e^{-\frac{1}{2}|\eta_{1,1}|^2} \left[\hat{a}_1^{\dagger} \frac{\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1!}{(\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + 1)!} L_{\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1}^{(1)} (|\eta_{1,1}|^2) \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta_{1,1}t} e^{i\phi_{1,1}} + \text{h.c.} \right] + \\ & + \frac{\eta_{2,-1}}{2} \Omega_{2,-1} e^{-\frac{1}{2}|\eta_{2,-1}|^2} \left[\frac{\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2!}{(\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 + 1)!} L_{\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2}^{(1)} (|\eta_{2,-1}|^2) \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta_{2,-1}t} e^{i\phi_{2,-1}} + \text{h.c.} \right] + \\ & + \frac{\eta_{2,1}}{2} \Omega_{2,1} e^{-\frac{1}{2}|\eta_{2,1}|^2} \left[\hat{a}_2^{\dagger} \frac{\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2!}{(\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 + 1)!} L_{\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2}^{(1)} (|\eta_{2,1}|^2) \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta_{2,1}t} e^{i\phi_{2,1}} + \text{h.c.} \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde la función $L_n^{(m)}(x)$ esta asociada a los polinomios generalizados de Laguerre. Además, vamos a considerar que la amplitud de oscilación del ion es mucho más pequeña que la frecuencia del láser, esto es, $\eta_{j,k} \sqrt{\langle \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j \rangle} \ll 1$, en otras palabras, suponemos que estamos trabajando en el régimen de Lamb-Dicke, con éstas consideraciones y una

adecuada elección de parámetros,

$$\begin{aligned}\phi_{1,-1} = \phi_{1,1} = \phi_{2,1} = -\frac{\pi}{2}, \quad \phi_{2,-1} = \frac{\pi}{2}, \\ \eta_{j,\pm 1}\Omega_{j,\pm 1}e^{-\frac{1}{2}|\eta_{j,\pm 1}|^2} = \eta_{j,\mp 1}\Omega_{j,\mp 1}e^{-\frac{1}{2}|\eta_{j,\mp 1}|^2},\end{aligned}\tag{1.7}$$

el Hamiltoniano (1.6) se reduce a

$$\begin{aligned}\hat{H}_I \approx g_1 \left[\hat{a}_1^\dagger e^{\frac{i}{2}(\delta_{1,-1}-\delta_{1,1})t} + \hat{a}_1 e^{-\frac{i}{2}(\delta_{1,-1}-\delta_{1,1})t} \right] \left[\hat{\sigma}_+ e^{-\frac{i}{2}(\delta_{1,-1}+\delta_{1,1})t} + \hat{\sigma}_- e^{\frac{i}{2}(\delta_{1,-1}-\delta_{1,1})t} \right] + \\ + g_2 \left[\hat{a}_2^\dagger e^{\frac{i}{2}(\delta_{2,-1}-\delta_{2,1})t} + \hat{a}_2 e^{-\frac{i}{2}(\delta_{2,-1}-\delta_{2,1})t} \right] \left[\hat{\sigma}_+ e^{-\frac{i}{2}(\delta_{2,-1}+\delta_{2,1})t} + \hat{\sigma}_- e^{\frac{i}{2}(\delta_{2,-1}+\delta_{2,1})t} \right].\end{aligned}\tag{1.8}$$

Este último Hamiltoniano, Eq. (1.8), corresponde a la imagen de interacción del ccQRM con respecto al Hamiltoniano desacoplado,

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{4}(\delta_{1,-1} + \delta_{1,1})\hat{\sigma}_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^2(\delta_{j,1} - \delta_{j,-1})\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j,\tag{1.9}$$

con parámetros,

$$\omega_0 = -\frac{1}{2}(\delta_{1,-1} + \delta_{1,1}) = -\frac{1}{2}(\delta_{2,-1} + \delta_{2,1}),\tag{1.10}$$

$$\omega_j = \frac{1}{2}(\delta_{j,-1} - \delta_{j,1}),\tag{1.11}$$

$$g_j = \eta_{j,\pm 1}\Omega_{j,\pm 1}e^{-\frac{1}{2}|\eta_{j,\pm 1}|^2}.\tag{1.12}$$

Es importante hacer notar que la definición de la frecuencia de transición del qubit, ω_0 , impone la restricción de que la suma de las desintonías de cada modo deben ser iguales $\delta_{1,-1} + \delta_{1,1} = \delta_{2,-1} + \delta_{2,1}$, que, a pesar de restringirnos, da libertad suficiente para realizar el ccQRM en un amplio rango de parámetros.

Capítulo 2

Acoplamiento débil

La posibilidad de realizar de una simulación cuántica del modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas, da pie a explorar la solución de este modelo. Si regresamos la vista atrás, la intuición nos dice que podemos analizar las soluciones al ccQRM, cómo en el modelo de Rabi, en el régimen donde el acoplamiento entre cada uno de los modos bosónicos y el qubit es pequeño comparado con las frecuencias de los modos bosónicos, $g_j \ll \omega_j$, y las frecuencias de los modos bosónicos se encuentran cerca de resonancia a la transición del qubit, $\omega_j \sim \omega_o$ para $j = 1, 2$. Para hacer esto, podemos transformar el Hamiltoniano de Rabi para dos cavidades cruzadas, Eq.(1), a un marco rotante definido por el Hamiltoniano libre,

$$\hat{H}_f = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_0 + \omega_1 \hat{n}_1 + \omega_2 \hat{n}_2, \quad (2.1)$$

con el operador de número $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ para $j = 1, 2$, de tal forma que en este nuevo marco podemos escribir,

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_f t} |\varphi(t)\rangle, \quad (2.2)$$

que, sustituyendo en la ecuación de Schrödinger,

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (2.3)$$

nos lleva a una expresión, al parecer, más compleja,

$$i\partial_t |\varphi(t)\rangle = \sum_{j=1}^2 -(i)^{j+1} g_j \left[\hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_+ e^{i\Delta_j t} + \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_- e^{i\delta_j t} + \hat{a}_j \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta_j t} + \hat{a}_j \hat{\sigma}_- e^{-i\Delta_j t} \right] |\varphi(t)\rangle, \quad (2.4)$$

donde hemos definido parámetros de sintonía entre las frecuencias de los campos y la del qubit,

$$\Delta_j = \omega_j + \omega_0, \quad (2.5)$$

$$\delta_j = \omega_j - \omega_0. \quad (2.6)$$

En este punto, podemos recordar que nos interesa el régimen donde $g_j \ll \omega_j$ y $\omega_j \sim \omega_o$ para $j = 1, 2$, es decir,

$$\Delta_j \gg \delta_j, \quad (2.7)$$

$$\Delta_j \gg g_j, \quad (2.8)$$

que son, básicamente, las condiciones que necesitamos para hacer una aproximación de onda rotante. Es decir, si tomamos g_j como nuestra escala de evolución temporal, la contribución de los términos oscilando a altas frecuencias, Δ_j , es, en promedio, nula, comparada con la contribución de los términos que oscilan a frecuencias dadas por las desintonías, δ_j . Para este argumento estamos considerando $g_1 \sim g_2$ pero esto no es estrictamente necesario. De tal forma que la aproximación de onda rotante para este modelo nos entrega una ecuación de Schrödinger con un Hamiltoniano dependiente del tiempo,

$$i\partial_t |\varphi(t)\rangle \simeq \left[g_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_- e^{i\delta_1 t} + \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta_1 t} \right) + ig_2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_- e^{i\delta_2 t} - \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta_2 t} \right) \right] |\varphi(t)\rangle, \quad (2.9)$$

que, efectuando otro cambio de marco de referencia,

$$|\varphi(t)\rangle = e^{i(\delta_1 \hat{n}_1 + \delta_2 \hat{n}_2)t} |\phi(t)\rangle, \quad (2.10)$$

podemos escribir como una ecuación de Schrödinger con un Hamiltoniano independiente del tiempo,

$$i\partial_t |\phi(t)\rangle = \left[\delta_1 \hat{n}_1 + \delta_2 \hat{n}_2 + g_1 (\hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+) + ig_2 (\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+) \right] |\phi(t)\rangle. \quad (2.11)$$

Es sencillo darse cuenta que una rotación de $\pi/2$ alrededor de \hat{n}_2 , a través de la transformación unitaria $e^{i\frac{\pi}{2}\hat{n}_2}$, nos entrega un Hamiltoniano efectivo de tipo Jaynes-Cummings para cada uno de los modos,

$$\hat{H}_{JC2} = \delta_1 \hat{n}_1 + \delta_2 \hat{n}_2 + g_1 (\hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+) + g_2 (\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a}_2 \hat{\sigma}_+). \quad (2.12)$$

Tomamos ahora, la representación de Schwinger de $SU(2)$ de dos bosones para movernos a un nuevo marco rotante definido por $\theta/2$, a través de la transformación unitaria,

$$\hat{D}_{\hat{J}_y}(\theta) = e^{\frac{\theta}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger)} \quad (2.13)$$

con $\tan \theta/2 = g_2/g_1$, de manera que se obtiene,

$$\hat{H}_{RWA} = \sum_{j=1}^2 \bar{\Omega}_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + g(\hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-) + \lambda(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \quad (2.14)$$

donde hemos definido las frecuencias y acoplamientos efectivos:

$$g = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \quad (2.15)$$

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{\delta_1 g_1^2 + \delta_2 g_2^2}{g^2}, \quad (2.16)$$

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{\delta_1 g_2^2 + \delta_2 g_1^2}{g^2}, \quad (2.17)$$

$$\lambda = (\omega_2 - \omega_1) \frac{g_1 g_2}{g^2}. \quad (2.18)$$

A manera de ilustración se presentan a continuación los espectros numéricos del modelo original y del modelo bajo la RWA en el mismo marco de referencia para acoplamientos pequeños. Para ello es considerado un campo con un número máximo de fotones $N = 35$ y acoplamientos $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1.00088$, $\omega_2 = 1.00085$, $g_1 = 1.5 \times 10^{-6}$ y $g_2 = 1.7 \times 10^{-6}$ y se comparan ambos espectros, Fig. 2.1(a), con la intención de resaltar que la aproximación resulta adecuada. En la Fig. 2.1(b), se muestra el logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos,

$$\Delta\epsilon_j = E_j^{ccQRM} - E_j^{RWA}. \quad (2.19)$$

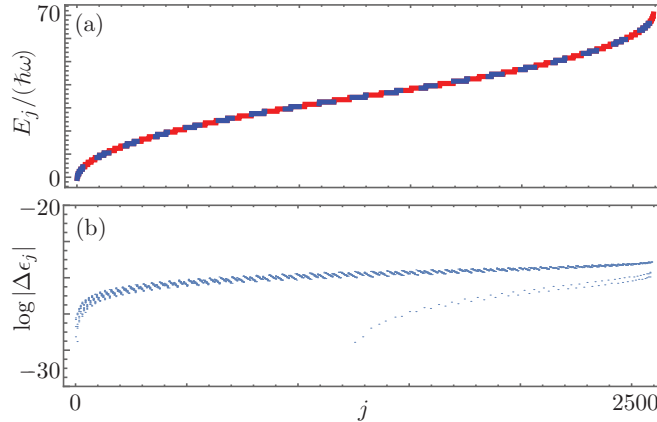


Figura 2.1: Espectro de energías en el régimen de acoplamiento débil. (a) Se comparan las soluciones numéricas del Hamiltoniano original (rojo) con las de la RWA (azul) para un campo con un número máximo de fotones $N = 35$ y acoplamientos $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1.00088$, $\omega_2 = 1.00085$, $g_1 = 1.5 \times 10^{-6}$ y $g_2 = 1.7 \times 10^{-6}$ (b) logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos, $\log |\Delta\epsilon_j|$.

Note que el parámetro λ definido en la Eq. (2.18), sugiere dos regímenes de interacción, el primero de ellos, tratado en la Secc. 2.1, un modelo con campos degenerados en frecuencia, $\omega_1 = \omega_2$, de manera que al estar los campos en resonancia, generan una λ efectiva igual a cero, esto es, no hay contribución de la interacción entre campos. El

segundo régimen, tratado en la Secc. 2.2, es aquel en que $\omega_0 \sim \omega_j$ para $j = 1, 2$. Considerar que las frecuencias son del mismo orden produce una λ efectiva pequeña comparada con la unidad, de manera que esta pueda ser considerada como una perturbación al sistema.

2.1. Modelo con campos degenerados en frecuencia

Cuando en el modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas, bajo la aproximación de onda rotante y escrito en la representación de SU(2) de Schwinger para dos bosones, Eq. (2.14), son considerados campos degenerados en frecuencias (DFF), esto es $\omega_1 = \omega_2$, obtenemos una λ efectiva igual a cero, de manera que no aparece el término de interacción entre campos,

$$\hat{H}_0 = \bar{\Omega}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \bar{\Omega}_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + g(\hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.20)$$

en otras palabras, el análisis del Modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas con DFF, se reduce a trabajar con un Hamiltoniano del tipo Jaynes-Cummings para uno de los modos más el Hamiltoniano libre del segundo modo. Cabe mencionar que, aún cuando la versión simplificada del ccQRM ha sido recientemente estudiada [21, 22], aquí se discuten, de manera formal, las soluciones al mismo. La base adecuada para éste sistema, Eq. (2.20), está dada por:

$$\{ |N\rangle_2 |0, g\rangle, |N-n\rangle_2 |n, e\rangle, |N-n\rangle_2 |n+1, g\rangle \}, \quad (2.21)$$

de manera que se producen los eigenestados,

$$|\phi_{0,g}^0\rangle = |N\rangle_2 |0, g\rangle, \quad (2.22)$$

$$|\phi_{\pm n}^0\rangle = |N-n\rangle_2 |\pm n\rangle, \quad (2.23)$$

donde,

$$|+n\rangle = \sin \theta_n |n, e\rangle + \cos \theta_n |n+1, g\rangle, \quad (2.24)$$

$$|-n\rangle = \cos \theta_n |n, e\rangle - \sin \theta_n |n+1, g\rangle, \quad (2.25)$$

con,

$$\sin \theta_n = \frac{g\sqrt{n+1}}{\sqrt{g^2(n+1) + (\chi_+ - \bar{\Omega}_1 n)^2}}, \quad (2.26)$$

$$\cos \theta_n = \frac{\chi_+ - \bar{\Omega}_1 n}{\sqrt{g^2(n+1) + (\chi_+ - \bar{\Omega}_1 n)^2}}, \quad (2.27)$$

$$\chi_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\bar{\Omega}_1 (2n+1) \pm \sqrt{\bar{\Omega}_1^2 + 4g^2(n+1)} \right). \quad (2.28)$$

Las eigenenergías asociadas a cada eigenestado están dadas cómo:

$$E_{0,g}^0 = 0, \quad (2.29)$$

$$E_{\pm n}^0 = \bar{\Omega}_2 (N-n) + \chi_{\pm}. \quad (2.30)$$

2.1. Modelo con campos degenerados en frecuencia

Las Eqs. (2.29)-(2.30), describen de manera analítica al espectro del Hamiltoniano bajo la RWA en el régimen de acoplamiento débil con campos degenerados en frecuencia, Eq. (2.20). Para comparar adecuadamente estos resultados con el espectro del marco original, se escriben los eigenvalores obtenidos en el marco original en términos de los eigenvalores del sistema rotado, así, las Eqs. (2.29)-(2.30) en el marco original se leen,

$$E_{0,g}^{MO} = E_{0,g}^0 + \omega_0(N - \frac{1}{2}), \quad (2.31)$$

$$E_{\pm}^{MO} = E_{\pm n}^0 + \omega_0(N + \frac{1}{2}). \quad (2.32)$$

Con éstas expresiones, es posible comparar el espectro obtenido de manera analítica exacta con su símil numérico, Fig. 2.2, en el marco original, en particular, es considerando un campo con un número máximo de fotones $N = 35$ y acoplamientos $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$, $g_1 = 1.5 \times 10^{-6}$ y $g_2 = 1.7 \times 10^{-6}$.

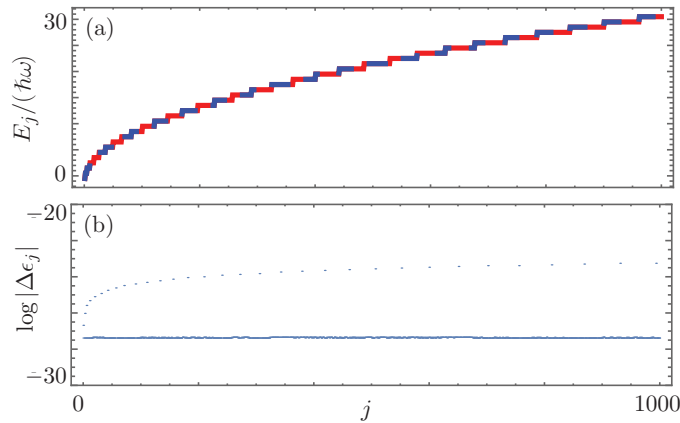


Figura 2.2: Soluciones en el régimen de acoplamiento débil con DFF. (a) Se comparan, en el mismo marco de referencia, las soluciones numéricas exactas del Hamiltoniano original (rojo) con las soluciones analíticas obtenidas para campos degenerados en frecuencia (azul) para un campo con un número máximo de fotones $N = 35$ y acoplamientos $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$, $g_1 = 1.5 \times 10^{-6}$ y $g_2 = 1.7 \times 10^{-6}$ (b) logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos, $\log |\Delta \epsilon_j|$.

Es importante remarcar que el modelo descrito en la Eq. (2.20) es soluble completamente, sin importar si estamos, o no, en resonancia con uno de los campos, puesto que únicamente tenemos el acoplamiento entre el qubit y uno de los modos más el Hamiltoniano libre del otro y, las soluciones a problemas del tipo Jaynes-Cummings son bien conocidas, en este sentido, es sencillo obtener una expresión para el propagador así como información de interés para un experimentalista. Para facilitar el cálculo del operador de evolución de \hat{H}_0 , podemos movernos a un nuevo marco de referencia definido por la transformación,

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i(\bar{\Omega}_1 \hat{n}_1 + \bar{\Omega}_2 \hat{n}_2 + \frac{\bar{\Omega}_1}{2} \hat{\sigma}_0)} |\vartheta(t)\rangle, \quad (2.33)$$

el Hamiltoniano (2.20) es reescrito como,

$$\hat{H}_{eff} = g \left(\hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_- \right) - \frac{\bar{\Omega}_1}{2} \hat{\sigma}_0, \quad (2.34)$$

que escrito en términos de las matrices de Pauli, se lee:

$$\hat{H}_{eff} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\Omega}_1}{2} & g\hat{a}_1 \\ g\hat{a}_1^\dagger & \frac{\bar{\Omega}_1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Dado que éste Hamiltoniano satisface la ecuación de Schrödinger, Eq. (2.3), para un estado $|\vartheta(t)\rangle$, y además, es independiente del tiempo, podemos escribir una solución en términos del operador de evolución para un estado inicial dado,

$$|\vartheta(t)\rangle = \hat{U}(t) |\vartheta(0)\rangle, \quad (2.36)$$

con,

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}_{eff}t} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

donde:

$$\begin{aligned} U_{11} &= \cos \zeta(\hat{n}_1 + 1)t + i \frac{\bar{\Omega}_1}{2\zeta(\hat{n}_1 + 1)} \sin \zeta(\hat{n}_1 + 1)t, \\ U_{12} &= -ig\hat{a}_1 \frac{1}{\zeta(\hat{n}_1)} \sin \zeta(\hat{n}_1)t, \\ U_{21} &= -ig \frac{1}{\zeta(\hat{n}_1)} \sin \zeta(\hat{n}_1)t \hat{a}_1^\dagger, \\ U_{22} &= \cos \zeta(\hat{n}_1)t - i \frac{\bar{\Omega}_1}{2\zeta(\hat{n}_1)} \sin \zeta(\hat{n}_1)t, \end{aligned}$$

y,

$$\zeta(\hat{n}_1) = \sqrt{\frac{\bar{\Omega}_1^2}{4} + g^2 \hat{n}_1}, \quad (2.38)$$

una frecuencia del tipo Rabi. Ahora estamos en posición de aplicar el operador de evolución, Eq. (2.37), a un estado inicial dado para encontrar la evolución del sistema. Con frecuencia es de interés calcular el promedio de algunos de los operadores, en particular, podemos calcular la inversión de población, definida como la diferencia de poblaciones entre el estado base y el estado excitado ó el número promedio de fotones en cada uno de los modos. La Eq. (2.36) nos permite describir cualquier estado en el modelo con campos degenerados en frecuencia en términos del operador de evolución, en particular, hemos obtenido $\langle \sigma_0 \rangle$, $\langle \hat{n}_1 \rangle$ y $\langle \hat{n}_2 \rangle$ para diferentes acoplamientos, tomando como estado inicial: estados de Fock $|N - n\rangle_2 |n, e\rangle$ en la Fig. 2.3 y, estados coherentes, $|\beta\rangle_2 |\alpha, e\rangle$, en la Fig. 2.4.

2.1. Modelo con campos degenerados en frecuencia

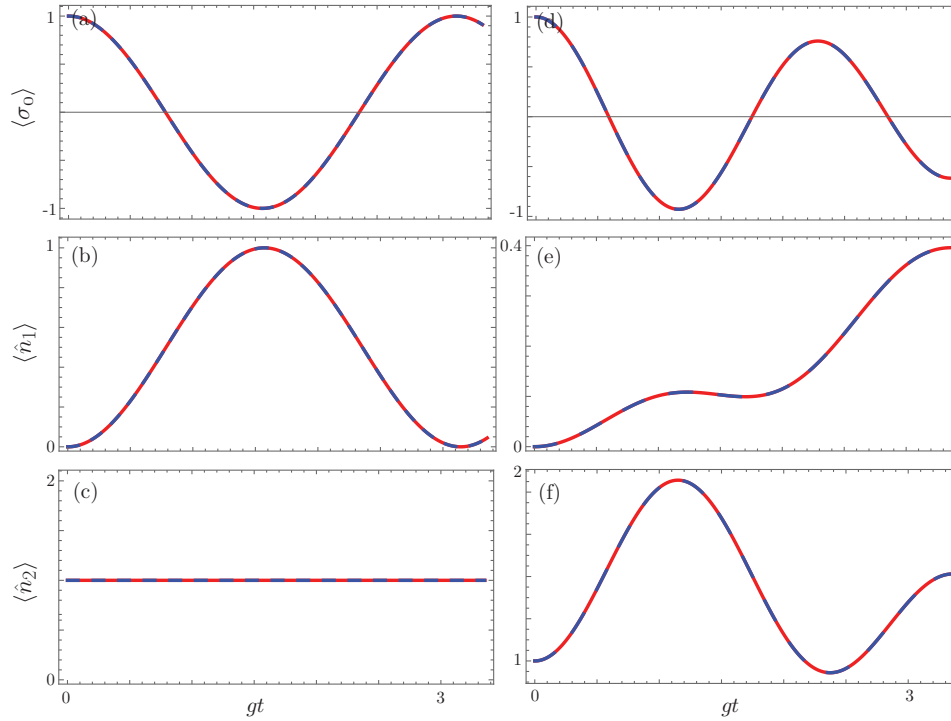


Figura 2.3: (a)-(b) Dinámica de la inversión de población $\langle \sigma_0 \rangle$, número promedio de fotones en (c)-(d) la cavidad uno $\langle \hat{n}_1 \rangle$ y (e)-(f) en la cavidad dos $\langle \hat{n}_2 \rangle$ como función de gt para estados de Fock con un estado inicial $|1\rangle_2|0, e\rangle$ y $N = 10$. Es simulado un campo con acoplamientos $\omega_0 = 1 = \omega_1 = \omega_2 = 1$, $g_1 = 0.001$ y $g_2 = 0.002$. Se muestran la dinámica en el marco rotado (izquierda) y en el marco original (derecha).

Para estados de número, Fig. 2.3, es tomando como estado inicial $|1\rangle_2|0, e\rangle$. Del lado izquierdo se muestran las dinámicas que exhibe el sistema en el marco rotado, como es de esperarse, este marco de referencia no me permite ver la dinámica del sistema completo, no hay acoplamiento aparente con el segundo modo, por ello resulta más conveniente visualizar la dinámica del sistema, para el mismo set de valores, en el marco original. Para cada caso, se a elegido dejar vacía una de las cavidades. Cuando escogemos dejar la cavidad 1 vacía, al estar sólo la cavidad 1 acoplada al campo en el marco rotado vemos que $\langle \hat{n}_1 \rangle$ toma como valor inicial cero y éste valor se modifica conforme evoluciona el sistema, mientras que $\langle \hat{n}_2 \rangle$ tiene un valor constante. Análogamente, cuando se escoge la cavidad 2 vacía, al tiempo $gt = 0$, $\langle \hat{n}_1 \rangle$ toma un valor máximo que depende del número de excitaciones en el sistema y éste valor se modifica conforme evoluciona el sistema, mientras $\langle \hat{n}_2 \rangle$ se mantiene igual a cero.

Cuando usamos como estado inicial $|0\rangle_2|2, e\rangle$ en la base de estados coherentes, Fig. 2.4, encontramos un comportamiento similar, en el sentido de que el el marco rotado tenemos la dinámica que ya conocemos del JCM para $\langle \sigma_0 \rangle$ y $\langle \hat{n}_1 \rangle$, y no vemos acoplamiento con la segunda cavidad en el marco rotado.

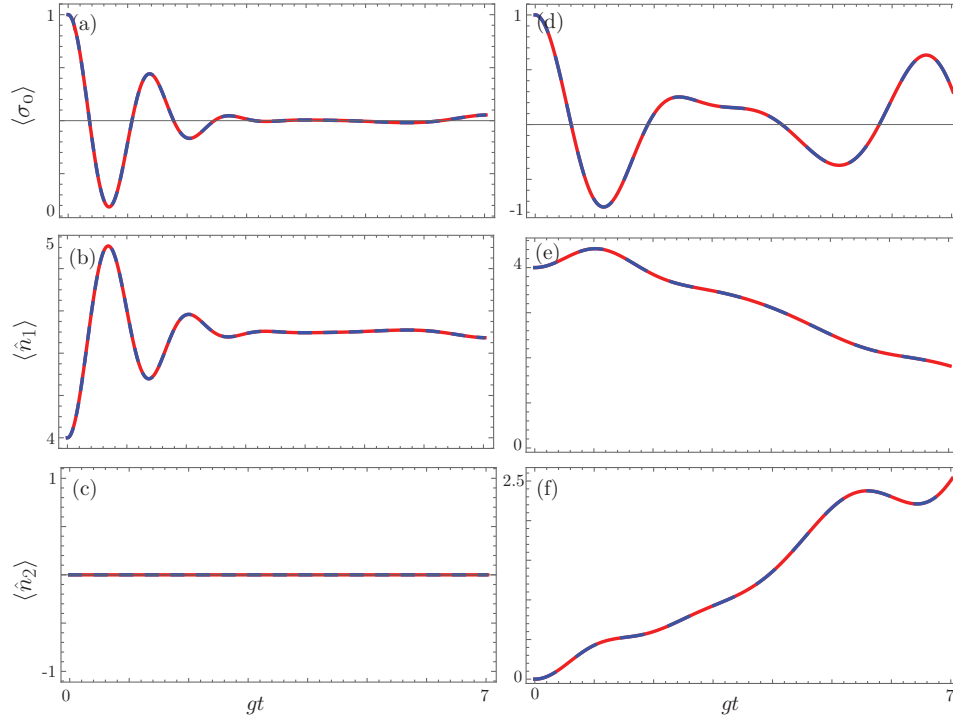


Figura 2.4: (a)-(b) Dinámica de la inversión de población $\langle \sigma_0 \rangle$, número promedio de fotones en (c)-(d) la cavidad uno $\langle \hat{n}_1 \rangle$ y (e)-(f) en la cavidad dos $\langle \hat{n}_2 \rangle$ como función de gt para estados Coherentes con un estado inicial $|0\rangle_2 |2, e\rangle$. Es simulado un campo coherente con acoplamientos $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$, $g_1 = 0.001$ y $g_2 = 0.002$. Se muestran la dinámica en el marco rotado (izquierda) y en el marco original (derecha).

2.2. Modelo fuera de resonancia

La mayoría de los problemas encontrados en la mecánica cuántica no se pueden resolver con exactitud. Existen soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger sólo para algunos sistemas idealizados. Para resolver los problemas generales, hay que recurrir a métodos de aproximación y el Modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas no es la excepción.

Suponiendo que los campos bosónicos se encuentran cerca de resonancia a la transición del qubit, $\omega_0 \sim \omega_j$ con $j = 1, 2$, la aproximación de onda rotante, Eq. (2.14), da como resultado que la interacción entre ambos campos sea muy pequeña, $\lambda \ll 1$, de manera que teoría de perturbaciones es de utilidad para atacar dicho problema, en este sentido, decimos que,

$$\hat{H}_{RWA} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_p, \quad (2.39)$$

con,

$$\hat{H}_p = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \quad (2.40)$$

2.2. Modelo fuera de resonancia

una pequeña perturbación al sistema.

La teoría de perturbaciones nos permite conocer soluciones aproximadas al sistema perturbado (\hat{H}_{RWA}) a través de soluciones exactas del sistema sin perturbar (\hat{H}_0), para ello se escribe a E_n ($|\phi_n\rangle$) como una serie de potencias en términos de λ :

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots, \quad (2.41)$$

$$|\phi_n\rangle = |\phi_n^0\rangle + \lambda |\phi_n^1\rangle + \lambda^2 |\phi_n^2\rangle + \dots, \quad (2.42)$$

donde E_n^j ($|\phi_n^j\rangle$) es la j -ésima corrección a la energía (función de onda) debido a la perturbación del sistema, cuando la ecuación de eigenvalores para \hat{H}_{RWA} es escrita en términos de las ecuaciones (2.41) y (2.42) podemos determinar la forma que toman las correcciones para cualquier orden j , en particular, para la corrección de la energía a primer y segundo orden se tiene,

$$E_n^1 = \langle \phi_n^0 | \hat{H}_p | \phi_n^0 \rangle, \quad (2.43)$$

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \phi_m^0 | \hat{H}_p | \phi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}, \quad (2.44)$$

mientras que para la función de onda tenemos que,

$$|\phi_n^1\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^0 | \hat{H}_p | \phi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\phi_m^0\rangle, \quad (2.45)$$

$$|\phi_n^2\rangle = \sum_{l \neq n} \left\{ \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^0 | \hat{H}_p | \phi_n^0 \rangle \langle \phi_l^0 | \hat{H}_p | \phi_m^0 \rangle}{(E_n^0 - E_m^0)(E_n^0 - E_l^0)} - \frac{\langle \phi_l^0 | \hat{H}_p | \phi_n^0 \rangle \langle \phi_n^0 | \hat{H}_p | \phi_l^0 \rangle}{(E_n^0 - E_l^0)^2} \right\} |\phi_l^0\rangle, \quad (2.46)$$

aquí, nos quedaremos con la corrección hasta segundo orden.

Las soluciones al sistema no perturbado son las obtenidas en el modelo con campos degenerados en frecuencia (Secc. 2.1), con la diferencia de que ahora nos restringimos a las interacciones cerca de resonancia, $\omega_0 \sim \omega_j$. Dado que se tienen tres eigenestados para el sistema sin perturbar $\{|\phi_{0,g}^0\rangle, |\phi_{+n}^0\rangle, |\phi_{-n}^0\rangle\}$, debemos obtener, para cada uno de ellos, correcciones para la energía y la función de onda, de tal forma que;

$$E_{0,g} = E_{0,g}^0 + \lambda E_{0,g}^1 + \lambda^2 E_{0,g}^2 + \dots, \quad (2.47)$$

$$E_{\pm n} = E_{\pm n}^0 + \lambda E_{\pm n}^1 + \lambda^2 E_{\pm n}^2 + \dots, \quad (2.48)$$

$$|\phi_{0,g}\rangle = |\phi_{0,g}^0\rangle + \lambda |\phi_{0,g}^1\rangle + \lambda^2 |\phi_{0,g}^2\rangle + \dots, \quad (2.49)$$

$$|\phi_{\pm n}\rangle = |\phi_{\pm n}^0\rangle + \lambda |\phi_{\pm n}^1\rangle + \lambda^2 |\phi_{\pm n}^2\rangle + \dots, \quad (2.50)$$

y finalmente, la corrección al eigensistema cuando es usada teoría de perturbaciones es el conjunto solución de todas las correcciones hechas, es decir,

$$E_{total} = \{E_{0,g}, E_{\pm n}\}, \quad (2.51)$$

$$|\phi\rangle_{total} = \{|\phi_{0,g}\rangle, |\phi_{\pm n}\rangle\}. \quad (2.52)$$

Es sencillo determinar las contribuciones que dan las correcciones a primer y segundo orden la energía y la función de onda a partir de las Eqs. (2.43)-(2.46), de tal manera que las correcciones a las energías a primer orden resultan,

$$E_{0,g}^1 = 0, \quad (2.53)$$

$$E_{\pm n}^1 = 0, \quad (2.54)$$

mientras que para las energías a segundo orden se tiene,

$$E_{0,g}^2 = 0, \quad (2.55)$$

$$E_{+n}^2 = \frac{|A \sin \theta_{n+1} \sin \theta_n + B \cos \theta_{n+1} \cos \theta_n|^2}{\Omega_2 + \chi_{+n} - \chi_{+(n+1)}} + \frac{|A \cos \theta_{n+1} \sin \theta_n - B \sin \theta_{n+1} \cos \theta_n|^2}{\Omega_2 + \chi_{+n} - \chi_{-(n+1)}}, \quad (2.56)$$

$$E_{-n}^2 = \frac{|A \sin \theta_{n+1} \cos \theta_n - B \cos \theta_{n+1} \sin \theta_n|^2}{\Omega_2 + \chi_{-n} - \chi_{+(n+1)}} + \frac{|A \cos \theta_{n+1} \cos \theta_n + B \sin \theta_{n+1} \sin \theta_n|^2}{\Omega_2 + \chi_{-n} - \chi_{-(n+1)}}, \quad (2.57)$$

donde $A = \sqrt{(n+1)(N-n)}$ y $B = \sqrt{(n+2)(N-n)}$. De esta manera, el espectro de energía en el régimen perturbativo esta dado por las Eqs. (2.53)-(2.57). Recordemos que éstas soluciones están dadas en el marco rotado y que se deben comparar de manera adecuada con las obtenidas en el modelo original, las Eqs. (2.31)-(2.32) nos permiten escribir los eigenvalores obtenidos en el marco original el términos de los eigenvalores del sistema rotado. Ahora debemos incluir en estas expresiones las correcciones a primero y segundo orden:

$$E_{0,g}^{MO} = E_{0,g} + \omega_0(N - \frac{1}{2}), \quad (2.58)$$

$$E_{\pm}^{MO} = E_{\pm n} + \omega_0(N + \frac{1}{2}). \quad (2.59)$$

Cuando $\omega_1 = \omega_2$, las expresiones obtenidas en el régimen perturbativo, Eqs. (2.58)-(2.59) son las mismas que se obtuvieron en el régimen de campos degenerados en frecuencia, Eqs. (2.31)-(2.32).

2.2. Modelo fuera de resonancia

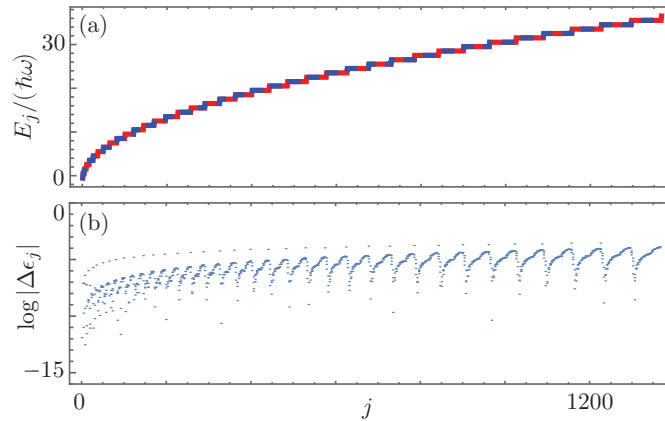


Figura 2.5: Soluciones con acoplamiento débil en el régimen perturbativo. (a) Se comparan las soluciones numéricas del Hamiltoniano original (rojo) con las de la RWA usando teoría de perturbaciones (azul) para un campo con un número máximo de fotones $N = 35$ y acoplamientos $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1.00088$, $\omega_2 = 1.00085$, $g_1 = 1.5 \times 10^{-6}$ y $g_2 = 1.7 \times 10^{-6}$ (b) logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos, $\log |\Delta\epsilon_j|$.

Nos restringimos ahora, a las interacciones cerca de resonancia, con acoplamientos $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1.00088$, $\omega_2 = 1.00085$, $g_1 = 1.5 \times 10^{-6}$ y $g_2 = 1.7 \times 10^{-6}$ en un campo de fotones con $N = 35$. En la Fig. 2.5 se muestran los resultados numéricos obtenidos para el espectro del Hamiltoniano bajo la RWA en el régimen perturbativo y, al igual que en el caso de campos degenerados en frecuencia, se compara con los resultados analíticos para el espectro de \hat{H} . Uno debe tener cuidado en escribir ambos resultados en el mismo marco de referencia y ordenar los espectros combinados dados por las Eqs. (2.58)-(2.59).

Capítulo 3

Espectro del ccQRM

Diagonalizar el ccQRM en la base del qubit resulta una tarea sencilla cuando se sigue el enfoque de Fulton-Gouterman. Para ello, es necesario escribir el Hamiltoniano del ccQRM, Eq. (1), en términos de los operadores de escalera del qubit,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^2 \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \left[g_1 (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1) - ig_2 (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2) \right] \hat{\sigma}_+ + h.c., \quad (3.1)$$

con la intención de evitar acoplamientos imaginarios, se realiza una rotación de $\pi/2$ alrededor del número de fotones del segundo campo, $\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$,

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^2 \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \left[g_1 (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1) + g_2 (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2) \right] \hat{\sigma}_+ + h.c. \quad (3.2)$$

Cómo en el capítulo anterior, usamos la representación de Schwinger de $SU(2)$ de dos bosones y nos movemos al marco rotante definido por $\theta/2$, a través de la transformación (2.13) de manera que,

$$\begin{aligned} \hat{H}_D &= \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left[g_1^2 (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1) - g_1 g_2 (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2) \right] \hat{\sigma}_1 + \\ &+ \frac{i}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left[g_2^2 (\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1) + g_1 g_2 (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2) \right] \hat{\sigma}_2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde se ha usado $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_1 \pm i\hat{\sigma}_2)/2$ y se definen las frecuencias efectivas

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 g_1^2 + \omega_2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2}, \quad (3.4)$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega_2 g_1^2 + \omega_1 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2}, \quad (3.5)$$

$$\gamma = \frac{g_1 g_2}{g_1^2 + g_2^2} (\omega_2 - \omega_1). \quad (3.6)$$

Una rotación de $\pi/4$ alrededor de $\hat{\sigma}_2$ produce un Hamiltoniano del tipo Fulton-Goutherman [23, 24],

$$\hat{H}_{FG} = \hat{A}\hat{\mathbb{1}} + \hat{B}\hat{\sigma}_1 + \hat{C}\hat{\sigma}_2 + \hat{D}\hat{\sigma}_0, \quad (3.7)$$

con operadores auxiliares para el ccQRM,

$$\hat{A}_D = \Omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \Omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \gamma \left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger \right), \quad (3.8)$$

$$\hat{B}_D = -\frac{1}{2}\omega_0, \quad (3.9)$$

$$\hat{C}_D = \frac{i}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left[g_2^2 \left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 \right) + g_1g_2 \left(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2 \right) \right], \quad (3.10)$$

$$\hat{D}_D = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left[g_1^2 \left(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \right) - g_1g_2 \left(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \right) \right]. \quad (3.11)$$

Con la intención de diagonalizar en la base del sistema de dos niveles, se necesita un operador \hat{R} tal que,

$$\left[\hat{R}, \hat{A} \right] = \left[\hat{R}, \hat{B} \right] = \left\{ \hat{R}, \hat{C} \right\} = \left\{ \hat{R}, \hat{D} \right\} = 0. \quad (3.12)$$

En particular, se ha escogido al operador de paridad de campo

$$\hat{R} = \hat{\Pi}_{12} = e^{i\pi \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j}. \quad (3.13)$$

para escribir una transformación unitaria,

$$\hat{U}_{FG} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(1 + \hat{R} \right) \left(\hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_1 \right) + \left(1 - \hat{R} \right) \left(\hat{\mathbb{1}} - i\hat{\sigma}_2 \right) \right], \quad (3.14)$$

que diagonaliza al Hamiltoniano ccQRM en la base del qubit,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{FG}^{(D)} &= \hat{U}_{FG} \hat{H}_{FG} \hat{U}_{FG}^\dagger, \\ &= \left(\hat{A} + \hat{D} \right) \hat{\mathbb{1}} + \left(\hat{B} - i\hat{C} \right) \hat{R}\hat{\sigma}_0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Así, la forma diagonal del Hamiltoniano en la base del qubit es

$$\hat{H}_D^{(D)} = \hat{H}_D^{(+)} |e\rangle\langle e| + \hat{H}_D^{(-)} |g\rangle\langle g|, \quad (3.16)$$

con los Hamiltonianos auxiliares escritos únicamente en términos de los modos de campo,

$$\begin{aligned} \hat{H}_D^{(\pm)} &= \Omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \Omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \gamma \left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger \right) \mp \frac{1}{2}\omega_0\hat{\Pi}_{12} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left[\hat{a}_1^\dagger \left(g_1^2 \pm g_2^2\hat{\Pi}_{12} \right) + \left(g_1^2 \pm g_2^2\hat{\Pi}_{12} \right) \hat{a}_1 \right] + \\ &- \frac{g_1g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left[\hat{a}_2^\dagger \left(1 \mp \hat{\Pi}_{12} \right) + \left(1 \mp \hat{\Pi}_{12} \right) \hat{a}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Estos hamiltonianos describen dos campos de bosones interactuando a través de un divisor de haz y un bombeo no lineal dependiente de la paridad del sistema.

3.1. Caso excepcional

La propuesta de Fulton-Gouterman nos ha permitido diagonalizar el sistema para cualquier valor que tomen ω_j y g_j , pero, resulta interesante detenernos en una configuración excepcional, donde consideramos que ambos campos bosónicos tienen la misma frecuencia, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, y acoplamientos idénticos, $g_1 = g_2 = g$. Siguiendo el procedimiento anterior con un ligero cambio, se introduce una rotación de ω_0 alrededor del operador,

$$\hat{\eta} = -\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_0 + 1), \quad (3.18)$$

compuesto por los operadores conservados en las dinámicas de JC y anti-JC [25]. Este pequeño cambio nos permite recuperar un Hamiltoniano efectivo donde el primer modo del campo está acoplado al qubit bajo la dinámica anti-JC y el segundo bajo la dinámica JC,

$$\hat{H}_{exc} = \sum_j \delta_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \sqrt{2}g \left[(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2) \hat{\sigma}_+ + (\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger) \hat{\sigma}_- \right], \quad (3.19)$$

con parámetros de sintonía dados por las siguientes expresiones,

$$\delta_1 = \omega + \omega_0, \quad (3.20)$$

$$\delta_2 = \omega - \omega_0. \quad (3.21)$$

Este Hamiltoniano conserva el operador $\hat{\eta}$,

$$\left[\hat{\eta}, \hat{H}_{exc} \right] = 0. \quad (3.22)$$

Note que este operador está relacionado con la representación de Schwinger de $SU(2)$ de dos bosones $\hat{J}_z = (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)/2$; en otras palabras, es la diferencia entre el qubit y la diferencia de población de dos bosones de $SU(2)$. Si escogemos el valor promedio del operador $\hat{\eta}$ para particionar el correspondiente espacio de Hilbert, tendremos subespacios con dimensión infinita para cada $\langle \hat{\eta} \rangle = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En este punto, es importante hacer notar que tanto el Hamiltoniano original del ccQRM, Eq. (1), con campos degenerados en frecuencias e igual acoplamientos como Hamiltoniano efectivo aJC-JC, Eq. (3.19), pueden ser implementados en nuestra simulación con iones atrapados.

Continuando con el esquema de la diagonalización a la Fulton-Gouterman, obtenemos operadores auxiliares,

$$\hat{A}_{exc} = \delta_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \delta_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \quad (3.23)$$

$$\hat{B}_{exc} = 0, \quad (3.24)$$

$$\hat{C}_{exc} = i \frac{1}{\sqrt{2}} g (\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2), \quad (3.25)$$

$$\hat{D}_{exc} = \frac{1}{\sqrt{2}} g (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2). \quad (3.26)$$

Aquí, la forma diagonal para nuestro Hamiltoniano excepcional en la base del qubit es

$$\hat{H}_{exc}^{(D)} = \hat{H}_{exc}^{(+)}|e\rangle\langle e| + \hat{H}_{exc}^{(-)}|g\rangle\langle g|, \quad (3.27)$$

con los Hamiltonianos de campo auxiliares

$$\hat{H}_{exc}^{(\pm)} = \sum_{j=1}^2 \delta_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + g \left(\hat{A}_{\pm j}^\dagger + \hat{A}_{\pm j} \right), \quad (3.28)$$

donde hemos definido los operadores no lineales con paridad deformada,

$$\hat{A}_{\pm,j} = -(-1)^j \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_j \left(1 \pm (-1)^j \hat{\Pi}_{12} \right), \quad (3.29)$$

$$\hat{A}_{\pm,j}^\dagger = -(-1)^j \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 \pm (-1)^j \hat{\Pi}_{12} \right) \hat{a}_j^\dagger, \quad (3.30)$$

que exhiben un álgebra de Wigner-Heisenberg para cada modo de campo bosónico [26,27],

$$\left[\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \hat{A}_{\pm,j} \right] = -\hat{A}_{\pm,j}, \quad (3.31)$$

$$\left[\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \hat{A}_{\pm,j}^\dagger \right] = \hat{A}_{\pm,j}^\dagger, \quad (3.32)$$

$$\left[\hat{A}_{\pm,j}, \hat{A}_{\pm,j}^\dagger \right] = 1 \mp (-1)^j \left(2\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + 1 \right) \hat{\Pi}_{12}, \quad (3.33)$$

Note que éstas álgebras no son mutuamente compatibles,

$$\left[\hat{A}_{\pm,1}, \hat{A}_{\pm,2} \right] = \mp 2\hat{\Pi}_{12} \hat{a}_1 \hat{a}_2, \quad (3.34)$$

$$\left[\hat{A}_{\pm,1}^\dagger, \hat{A}_{\pm,2} \right] = 0. \quad (3.35)$$

En este punto, podemos utilizar los dos osciladores no lineales auxiliares, de paridad deformada, para calcular el espectro de nuestro modelo para frecuencias de campo degenerados y acoplamiento equilibrados. En la Fig. 3.1(a) se muestran los primeros mil valores de energías escaladas, E_j/ω , en ambos marcos de referencia, obtenidas para el ccQRM con frecuencias de campo iguales y acoplamiento iguales en el régimen de acoplamiento fuerte (USC), $\omega_1 = \omega_2 = g_1 = g_2 = \omega$. En la Fig. 3.2(b) se muestra el logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos, $\Delta\epsilon_j = E_j^{ccQRM} - E_j^{FG}$.

3.2. Régimen de acoplamiento débil

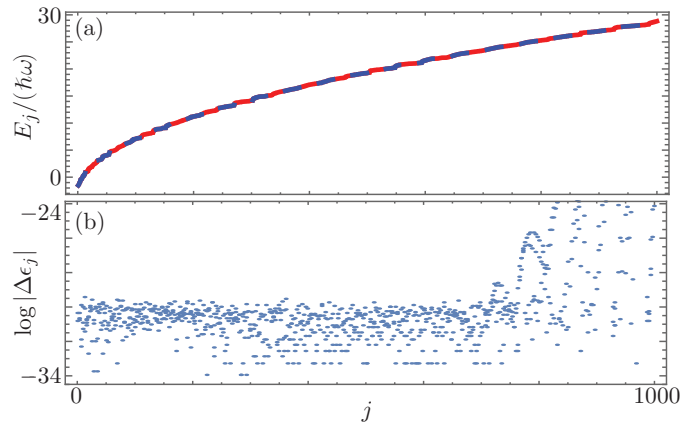


Figura 3.1: (a) Espectro de energía para el ccQRM en el marco original (rojo) y bajo el formalismo FG (azul) (b) logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos, $\Delta\epsilon_j = E_j^{ccQRM} - E_j^{FG}$, para el ccQRM en el régimen USC con $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = g_1 = g_2 = \omega$.

Dado que el Hamiltoniano efectivo del tipo JC-aJC, Eq. 3.19, comparte base con el operador $\hat{\eta}$, el valor promedio de éste operador para los eigenestados, numéricos, de los osciladores no lineales de paridad deformada, una vez escritos en el marco de referencia \hat{H}_{exc} , se forma un “arreglo” llamado *Peres lattice* [28], en el cual, para un subespacio dado, definido por un valor constante de $\langle\hat{\eta}\rangle = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ en el marco de referencia \hat{H}_{exc} , hay un número infinito de eigenestados como se ve en la Fig. 3.2.

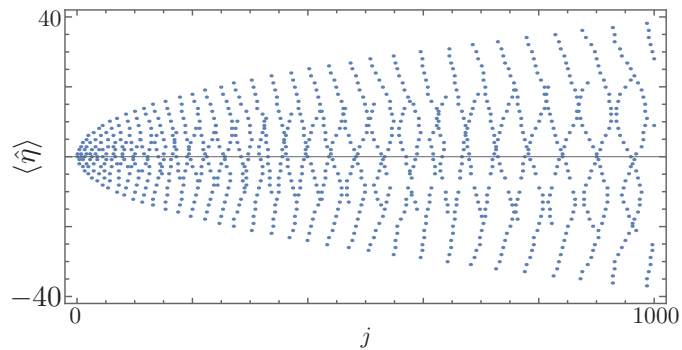


Figura 3.2: Valor promedio del operador $\hat{\eta}$, $\langle\hat{\eta}\rangle$, para los eigenestados en el marco de referencia \hat{H}_{exc} en el régimen USC, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = g_1 = g_2 = \omega$.

3.2. Régimen de acoplamiento débil

En el régimen de acoplamiento débil (WCR), partimos de uno de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, donde obtuvimos un Hamiltoniano efectivo de tipo Jaynes-Cummings para cada uno de los modos, Eq. (2.12). Otra vez, tanto el Hamiltoniano original del ccQRM, Eq. (1), con acoplamiento débil como éste Hamiltoniano

efectivo, (2.12), pueden ser implementados en nuestra simulación con iones atrapados. Llevamos este Hamiltoniano a la forma FG para obtener los operadores auxiliares,

$$\hat{A}_{JC} = \delta_1 \hat{n}_1 + \delta_2 \hat{n}_2, \quad (3.36)$$

$$\hat{B}_{JC} = 0, \quad (3.37)$$

$$\hat{C}_{JC} = \sum_j \frac{ig_j}{2} (\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger), \quad (3.38)$$

$$\hat{D}_{JC} = \sum_j \frac{g_j}{2} (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger), \quad (3.39)$$

nuevamente escogemos al operador de paridad como operador auxiliar, $\hat{R} = \hat{\Pi}_{12}$, para obtener un Hamiltoniano diagonalizado en el régimen de acoplamiento débil

$$\hat{H}_{JC}^{(D)} = \hat{H}_{JC}^{(+)} |e\rangle\langle e| + \hat{H}_{JC}^{(-)} |g\rangle\langle g|, \quad (3.40)$$

donde

$$\hat{H}_{JC}^{(\pm)} = \sum_j \delta_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} g_j \left[\hat{a}_j^\dagger (1 \mp \hat{\Pi}_{12}) + \hat{a}_j (1 \pm \hat{\Pi}_{12}) \right]. \quad (3.41)$$

De manera similar al caso excepcional, en la Fig. 3.3(a) se muestran los primeros mil valores de energías escaladas, E_j/ω , en ambos marcos de referencia, obtenidas para el ccQRM con parámetros en el régimen de acoplamiento débil (WC), así como el logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos, $\Delta\epsilon_j = E_j^{ccQRM} - E_j^{FG}$, Fig. 3.3(b).

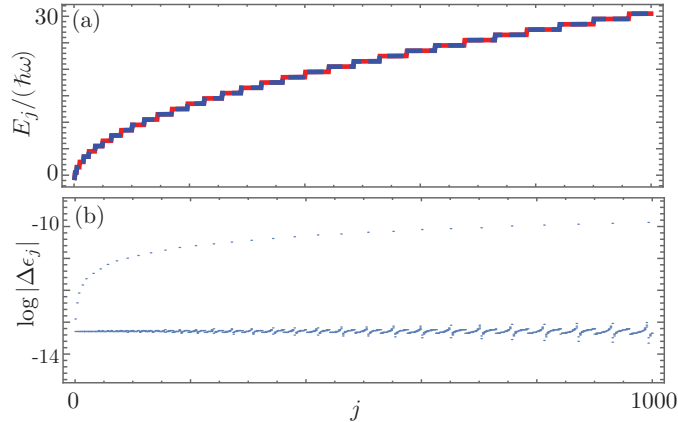


Figura 3.3: (a) Espectro de energías (b) logaritmo del valor absoluto del error relativo entre ambos resultados numéricos, $\Delta\epsilon_j = E_j^{ccQRM} - E_j^{FG}$, para el ccQRM en el régimen de acoplamiento débil, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \omega$, $g_1 = 0.001\omega$ y $g_2 = 0.002\omega$.

Además, dado que el modelo efectivo JC conserva el número de excitaciones,

$$\hat{N} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_0 + 1), \quad (3.42)$$

3.3. Régimen de acoplamiento fuerte-profundo

tal que $[\hat{N}, \hat{H}_{JC}] = 0$, podemos dividir el espacio de Hilbert correspondiente en subespacios de dimensión $2\langle\hat{N}\rangle + 1$ para cada valor promedio del número de excitaciones $\langle\hat{N}\rangle = 0, 1, 2, \dots$. Esto se puede ver en la estructura *Peres lattice* para el valor promedio del número de excitaciones de los eigenestados, Fig. 3.4.

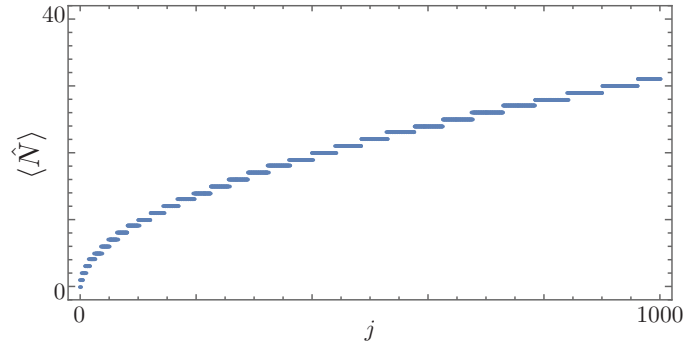


Figura 3.4: Valor promedio del número de excitaciones, $\langle\hat{N}\rangle$, para los eigenestados del ccQRM en el régimen de acoplamiento débil, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \omega$, $g_1 = 0.001\omega$ y $g_2 = 0.002\omega$.

3.3. Régimen de acoplamiento fuerte-profundo

Con el fin de proporcionar una solución para el ccQRM más allá del régimen de acoplamiento débil, se implementa la simulación por *fuerza bruta* en un subespacio de hasta un centenar de bosones en cada modo de campo. En nuestro caso, dado que se truncan dos espacios de Hilbert, tomaremos como medida de convergencia a la información contenida en la cola del eigenestado [29],

$$|\tau_j| = \sqrt{\sum_{m,n=m_{\min},n_{\min}} |c_{m,n,x}^{(j)}|^2}, \quad (3.43)$$

donde el número complejo $c_{m,n,q}^{(j)}$ es la amplitud correspondiente al estado con m fotones en el primer campo, n fotones en el segundo campo y el qubit en el estado x del j -ésimo eigenestado del Hamiltoniano expresado en la base estándar del subespacio truncado, ya sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_q$ para el ccQRM ó $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ para los dos osciladores no lineales de paridad deformada, y tomamos la cola del eigenestado como el último cuarto de las amplitudes truncadas $m_{\min} = \lceil 3 \dim \mathcal{H}_1 / 4 \rceil$ y $n_{\min} = \lceil 3 \dim \mathcal{H}_2 / 4 \rceil$ donde la operación $\lceil x \rceil$ redondea x al siguiente número entero.

En la Fig. 3.5(a) se muestran los primeros mil valores de las energías escaladas y el logaritmo de la información contenida en la cola de los eigenestados, para cada eigenestado, para el ccQRM en el régimen DSC, donde se han tomado los valores $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \omega$, $g_1 = 2\omega$, and $g_2 = 2.3\omega$. Una vez más, se debe prestar especial

atención en el orden de los eigenestados, pues el incluir un segundo espacio de Hilbert truncado podría inducir huecos en el espectro.

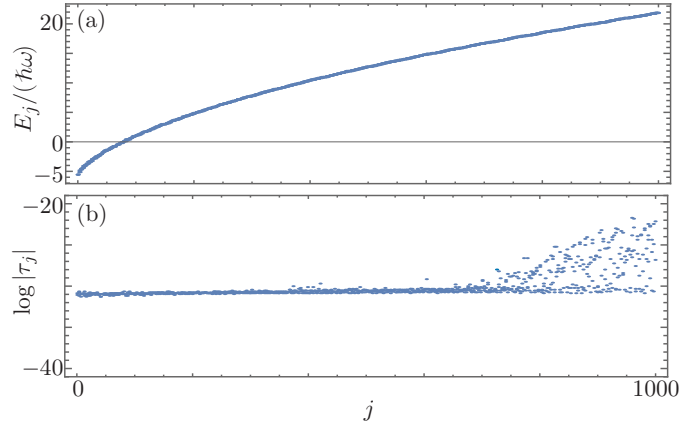


Figura 3.5: (a) Espectro de energía escalada y, (b) el logaritmo del valor absoluto de la raíz cuadrada de la suma de las colas de los correspondientes eigenestados para el ccQRM en el régimen DSC, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \omega$, $g_1 = 2\omega$ y $g_2 = 2.3\omega$.

En el régimen DSC, nos falta conocimiento acerca de las constantes de movimiento, por lo que tenemos redes desordenadas tanto para el número promedio de excitaciones Fig. 3.6(a), como para el operador $\hat{\eta}$, Fig. 3.6(b), en lugar de arreglos ordenados como los que se obtuvieron en el caso excepcional con frecuencias y acoplamientos iguales o en el régimen de acoplamiento débil.

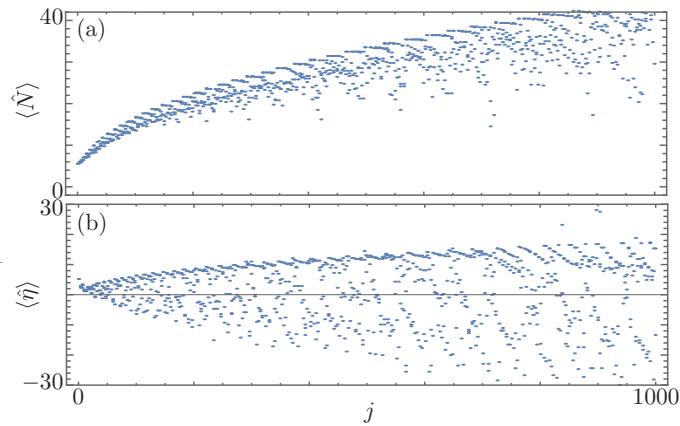


Figura 3.6: Valor promedio del (a) número de excitaciones, $\langle \hat{N} \rangle$, y (b) del operador, $\langle \hat{\eta} \rangle$, para los eigenestados del ccQRM en el régimen DSC, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \omega$, $g_1 = 2\omega$ y $g_2 = 2.3\omega$.

Conclusión

En este trabajo, como extensión al modelo de Rabi cuántico, se estudió el Modelo de Rabi cuántico en cavidades cruzadas, donde un único sistema de dos niveles interactúa con campos de bosones ortogonales bajo acoplamiento mínimo y aproximación de onda larga. Obviamente, una realización de electrodinámica cuántica de cavidades no permite explorar más allá del régimen de acoplamiento débil; por este motivo, se muestra que es posible realizar una simulación cuántica del modelo en una plataforma de iones atrapados donde todos los regímenes son accesibles.

Se resuelve de manera analítica el modelo en el régimen de acoplamiento débil. De manera natural, éste régimen se divide en dos casos, el primero, donde tenemos campos degenerados en frecuencia, de manera que el modelo se reduce a un Hamiltoniano más sencillo y se vuelve completamente soluble. En el segundo caso, donde las frecuencias son del mismo orden, usamos teoría de perturbaciones.

Hemos diagonalizado el modelo en la base del qubit usando el enfoque de Fulton-Gouterman. Este formalismo nos permite ver que es posible reducir el modelo a un Hamiltoniano donde un modo de campo es acoplado al qubit siguiendo la dinámica del modelo de Jaynes-Cummings mientras que el segundo modo se acopla bajo una dinámica del tipo anti-Jaynes-Cummings para todos los parámetros de acoplamiento, en particular, mostramos en caso excepcional, con frecuencias y acoplamientos iguales. En este régimen en particular, nuestro modelo es equivalente a dos osciladores acoplados de paridad deformada a través de un divisor de haz que conserva un operador que da el número total de excitaciones del qubit y la diferencia del número de excitaciones entre campos. Tratando de crear intuición, se calcularon numéricamente los espectros en el régimen de acoplamiento débil y en el régimen de acoplamiento fuerte-profundo.

Este trabajo de tesis resulto un ejercicio de reconocimiento sobre las posibles avenidas que puede abrir el modelo de Rabi con cavidades cruzadas. En particular, hemos notado que la diagonalización en la base del qubit provee Hamiltonianos auxiliares de campo que describen un par de osciladores con bombeo no lineal en función de la paridad. Esto nos parece lo suficientemente interesante para garantizar trabajo a futuro desde el punto de vista algebraico. Otra pregunta que queda abierta es la existencia de soluciones a este modelo por medio del formalismo de Bargmann; en este sentido el interés es tan básico como preguntarse si existe una representación de funciones enteras para más de un campo. Este son sólo un par de ejemplos de los frutos que puede traer el estudio de nuestro modelo en el futuro.

Apéndice A

Métodos

A.1. Métodos matemáticos

A.1.1. Cambio de marcos de referencia

Muchas veces, para un sistema etiquetado con un Hamiltoniano \hat{H} , es conveniente moverse a un nuevo marco de referencia que nos permita extraer información del mismo, en este sentido, si se hace un cambio de marco de referencia definido por alguna transformación unitaria,

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{f}(t)}, \quad (\text{A.1})$$

tal que un estado $|\Psi(t)\rangle$ en términos del nuevo marco de referencia puede ser expresado cómo:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\vartheta(t)\rangle, \quad (\text{A.2})$$

la evolución temporal de dichos estados puede obtenerse a través de la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{A.3})$$

de modo que en el nuevo marco de referencia,

$$i\partial_t (\hat{U}(t) |\vartheta(t)\rangle) = \hat{H} \hat{U}(t) |\vartheta(t)\rangle, \quad (\text{A.4})$$

de tal forma que,

$$i\partial_t |\vartheta(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t) \left[\hat{H} - \hat{f}'(t) \right] \hat{U}(t) |\vartheta(t)\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Ahora, se define el Hamiltoniano efectivo,

$$\hat{H}_{eff} = \hat{U}^\dagger(t) \left[\hat{H} - \hat{f}'(t) \right] \hat{U}(t). \quad (\text{A.6})$$

Cuando $\hat{U}(t)$ no depende del tiempo, es decir, $\hat{f}'(t) = \hat{\mathcal{O}}$, moverse de marco de referencia se reduce a calcular el Hamiltoniano efectivo

$$\hat{H}_{eff\hat{\mathcal{O}}} = \hat{U}^\dagger(t) \hat{H} \hat{U}(t) \quad (\text{A.7})$$

A.1.2. Transformaciones unitarias

En repetidas ocasiones recurrimos a transformaciones unitarias para simplificar el problema y obtener Hamiltonianos de la forma A.6 y/o A.7; en este tipo de transformaciones es común encontrar términos de la forma:

$$e^{\xi\hat{A}}\hat{B}e^{-\xi\hat{A}}, \quad (\text{A.8})$$

con \hat{A} y \hat{B} operadores hermiticos que determinaran a los elementos grupo o representación que será usada. El Lema de Hadamard nos permite obtener una expresión para este tipo de operadores mediante el desarrollo en serie de Taylor de cada una de las exponenciales de manera que,

$$e^{\xi\hat{A}}\hat{B}e^{-\xi\hat{A}} = \hat{B} + \xi[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\xi^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{\xi^3}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots, \quad (\text{A.9})$$

donde $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ es el conmutator de los operadores \hat{A} y \hat{B} . Cuando los operadores \hat{A} y \hat{B} corresponden a las matrices de Pauli, el grupo al que hacemos referencia es el *Grupo SU(2)*. El conjunto de operadores $\{\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_\pm\}$ obedecen las relaciones de conmutación:

$$[\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm, \quad (\text{A.10a})$$

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_0. \quad (\text{A.10b})$$

Ahora estamos en posición de calcular, con ayuda del Lema de Hadamar, Eq. A.9, las acciones del grupo de Lie de SU(2) sobre cada una de las componentes del mismo,

$$e^{i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_0}\hat{\sigma}_\pm e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_0} = \hat{\sigma}_\pm e^{\pm i\theta}, \quad (\text{A.11a})$$

$$e^{i\frac{\theta}{2}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)}\hat{\sigma}_0 e^{-i\frac{\theta}{2}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)} = \hat{\sigma}_0 \cos \theta - \hat{\sigma}_2 \sin \theta, \quad (\text{A.11b})$$

$$e^{\frac{\theta}{2}(\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-)}\hat{\sigma}_0 e^{-\frac{\theta}{2}(\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-)} = \hat{\sigma}_0 \cos \theta - \hat{\sigma}_1 \sin \theta, \quad (\text{A.11c})$$

con $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$ y $\hat{\sigma}_2 = -i(\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-)$ Por otro lado, el álgebra de Lie generado por los operadores $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{n}\}$, que obedece las relaciones de conmutación,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (\text{A.12a})$$

$$[\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad (\text{A.12b})$$

$$[\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad (\text{A.12c})$$

es llamada *álgebra de Heisenberg-Weyl*. Las acciones del grupo de Lie sobre cada una de

las componentes del grupo:

$$e^{i\theta\hat{n}}\hat{a}e^{-i\theta\hat{n}} = \hat{a}e^{-i\theta}, \quad (\text{A.13a})$$

$$e^{i\theta\hat{n}}\hat{a}^\dagger e^{-i\theta\hat{n}} = \hat{a}^\dagger e^{i\theta}, \quad (\text{A.13b})$$

$$e^{i(\theta\hat{a}^\dagger + \theta^*\hat{a})}\hat{n}e^{-i(\theta\hat{a}^\dagger + \theta^*\hat{a})} = \hat{n} - i(\theta\hat{a}^\dagger - \theta^*\hat{a}), \quad (\text{A.13c})$$

$$e^{i(\theta\hat{a}^\dagger + \theta^*\hat{a})}\hat{a}e^{-i(\theta\hat{a}^\dagger + \theta^*\hat{a})} = \hat{a} - i\theta, \quad (\text{A.13d})$$

$$e^{i(\theta\hat{a}^\dagger + \theta^*\hat{a})}\hat{a}^\dagger e^{-i(\theta\hat{a}^\dagger + \theta^*\hat{a})} = \hat{a}^\dagger + i\theta^*, \quad (\text{A.13e})$$

$$e^{(\theta\hat{a}^\dagger - \theta^*\hat{a})}\hat{n}e^{-(\theta\hat{a}^\dagger - \theta^*\hat{a})} = \hat{n} - (\theta\hat{a}^\dagger + \theta^*\hat{a}), \quad (\text{A.13f})$$

$$e^{(\theta\hat{a}^\dagger - \theta^*\hat{a})}\hat{a}e^{-(\theta\hat{a}^\dagger - \theta^*\hat{a})} = \hat{a} - \theta, \quad (\text{A.13g})$$

$$e^{(\theta\hat{a}^\dagger - \theta^*\hat{a})}\hat{a}^\dagger e^{-(\theta\hat{a}^\dagger - \theta^*\hat{a})} = \hat{a}^\dagger - \theta^*. \quad (\text{A.13h})$$

Otra representación usada en este trabajo de tesis es la *Representación de Schwinger de SU(2) para dos bosones*, en esta representación tenemos dos tipos de operadores \hat{a}_1^\dagger , \hat{a}_1 y \hat{a}_2^\dagger , \hat{a}_2 tales que,

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger] = 1, \quad (\text{A.14a})$$

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = [\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2] = [\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger] = [\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger] = 0. \quad (\text{A.14b})$$

En términos de estos operadores, los generadores del álgebra de la representación de $su(2)$ se puede escribir cómo:

$$J_+ = a_1^\dagger a_2, \quad (\text{A.15a})$$

$$J_- = a_1 a_2^\dagger, \quad (\text{A.15b})$$

$$J_0 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2 a_2^\dagger), \quad (\text{A.15c})$$

tales que,

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad (\text{A.16a})$$

$$[J_+, J_-] = 2J_0. \quad (\text{A.16b})$$

de tal manera que, las acciones del grupo de Lie de SU(2) en la representación de Schwinger sobre cada una de los elementos del grupo,

$$e^{i\theta(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)}\hat{a}_1 e^{-i\theta(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)} = \hat{a}_1 \cos \theta - i\hat{a}_2 \sin \theta, \quad (\text{A.17a})$$

$$e^{i\theta(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)}\hat{a}_2 e^{-i\theta(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)} = \hat{a}_2 \cos \theta - i\hat{a}_1 \sin \theta, \quad (\text{A.17b})$$

$$e^{\theta(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)}\hat{a}_1 e^{-\theta(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)} = \hat{a}_1 \cos \theta - \hat{a}_2 \sin \theta, \quad (\text{A.17c})$$

$$e^{\theta(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)}\hat{a}_2 e^{-\theta(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)} = \hat{a}_2 \cos \theta + \hat{a}_1 \sin \theta. \quad (\text{A.17d})$$

Bibliografía

- [1] I. I. Rabi, “On the process of space quantization,” *Phys. Rev.*, vol. 49, pp. 324 – 328, 1936.
- [2] E. T. Jaynes and F. W. Cummings., “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser.,” *Proc. IEEE*, vol. 51, pp. 89 – 109, 1963.
- [3] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. García-Ripoll, E. Solano, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, “Observation of the bloch-siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 237001, Nov 2010.
- [4] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hummer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, “Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime,” *Nat Phys*, vol. 6, p. 772–776, 2010.
- [5] J. S. Pedernales, I. Lizuain, S. Felicetti, G. Romero, L. Lamata, and E. Solano, “Quantum rabi model with trapped ions,” *Sci. Rep.*, vol. 5, p. 15472, 2015.
- [6] D. Braak, “Integrability of the rabi model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, no. 03, p. 100401, 2011.
- [7] D. Braak, “Solution of the dicke model for $n=3$,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 46, p. 224007, 2013.
- [8] J. Peng, Z. Ren, G. Guo, and G. Ju, “Integrability and solvability of the simplified two-qubit rabi model,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 45, p. 365302, 2012.
- [9] S. A. Chilingaryan and B. M. Rodríguez-Lara, “The quantum rabi model for two qubits,” *J. Phys A: Math. Theor.*, vol. 46, p. 335301, 2013.
- [10] J. Peng, Z. Ren, D. Braak, G. Guo, X. Zhang, and X. Guo, “Solutions of the two-qubit quantum rabi model and its exceptional eigenstates,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 47, p. 265303, 2014.

-
- [11] L. Duan, S. He, and Q.-H. Chen, “Concise analytic solution to the quantum rabi model with two arbitrary qubits,” *Ann. Phys.*, vol. 355, pp. 121 – 129, 2015.
- [12] H. Wang, S. He, L. Duan, Y. Zhao, and Q.-H. Chen, “Solutions to the quantum rabi model with two equivalent qubits,” *Europhys. Lett.*, vol. 106, p. 54001, 2014.
- [13] Y.-Z. Zhang, “On the solvability of the quantum rabi model and its 2-photon and two-mode generalizations,” *J. Math Phys.*, vol. 54, p. 102104, 2013.
- [14] S. A. Chilingaryan and B. M. Rodríguez-Lara, “Exceptional solutions in two-mode quantum rabi models,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 48, p. 245501, 2015.
- [15] L. Duan, S. He, D. Braak, and Q.-H. Chen, “Solution of the two-mode quantum rabi model using extended squeezed states,” *Europhys. Lett.*, vol. 112, p. 34003, 2015.
- [16] A. J. Maciejewski, M. Przybylska, and T. Stachowiak, “Analytical method of spectra calculations in the bargmann representation,” *Physics Letters A*, vol. 378, no. 46, pp. 3445 – 3451, 2014.
- [17] A. L. Grimsmo and S. Parkins, “Cavity-qed simulation of qubit-oscillator dynamics in the ultrastrong-coupling regime,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 033814, Mar 2013.
- [18] H. C. Longuet-Higgins, U. Opik, M. H. L. Price, and R. A. Sack, “Studies of the jahn-teller effect. ii. the dynamical problem,” *Proc. Royal Soc. London A.*, vol. 238, pp. 425 – 447, 1957.
- [19] V. Romero-Rochín and J. A. Cina, “Time development of geometric phases in the longuet-higgins model,” *J. Chem. Phys.*, vol. 91, pp. 6103 – 6112, 1989.
- [20] J. Fan, Z. Yang, Y. Zhang, J. Ma, G. Chen, and S. Jia, “Hidden continuous symmetry and nambu-goldstone mode in a two-mode dicke model,” *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 023812, 2014.
- [21] J. C. Garcia-Melgarejo, J. J. Sánchez-Mondragón, and O. S. Magaña-Loaiza, “The jaynes-cummings model in a cross cavity,” in *The Rochester Conferences on Coherence and Quantum Optics and the Quantum Information and Measurement meeting*, p. M6.50, Optical Society of America, 2013.
- [22] J. C. Garcia-Melgarejo, J. J. Sánchez-Mondragón, and O. S. Magaña-Loaiza, “The jaynes-cummings model in a cross cavity,” *Acta Universitaria*, vol. 23, pp. 31 – 34, 2013.
- [23] R. L. Fulton and M. Gouterman, “Vibronic coupling. i. mathematical treatment for two electronic states,” *J. Chem. Phys.*, vol. 35, pp. 1059 – 1071, 1961.

- [24] A. Moroz, “Generalized rabi models: Diagonalization in the spin subspace and differential operators of dunkl type,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 113, no. 5, p. 50004, 2016.
- [25] B. M. Rodríguez-Lara, H. Moya-Cessa, and A. B. Klimov, “Combining jaynes-cummings and anti-jaynes-cummings dynamics in a trapped-ion system driven by a laser,” *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 023811, 2005.
- [26] E. P. Wigner, “Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?,” *Phys. Rev.*, vol. 77, pp. 711–712, Mar 1950.
- [27] L. M. Yang, “A note on the quantum rule of the harmonic oscillator,” *Phys. Rev.*, vol. 84, pp. 788–790, Nov 1951.
- [28] A. Peres, “New conserved quantities and test for regular spectra,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 1711 – 1713, 1984.
- [29] M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch, “Comparative quantum and semiclassical analysis of atom-field systems. i. density of states and excited-state quantum phase transitions,” *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 032101, Mar 2014.