



**INAOE**

# **Análisis del cómputo de alta precisión de los momentos radiales**

por

**César Joel Camacho Bello**

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el  
grado de **Doctorado en Ciencias en la especialidad de  
Óptica** en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica

Agosto 2015

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. José Javier Báez Rojas, INAOE**

**Dr. Alfonso Padilla Vivanco, UPT**

©INAOE 2015

Todos los derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias  
impresas o electrónicas de esta tesis en su totalidad o en partes





# Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo para realizar mis estudios de Doctorado a través de la Beca 423493.

Autor: M. C. O. César Joel Camacho Bello.

Nombre de la Tesis: Análisis del cómputo de alta precisión de los momentos radiales.

Asesores: Dr. José Javier Báez Rojas y Dr. Alfonso Padilla Vivanco.

Periodo comprendido: Agosto 2011 - Agosto 2015.

Al Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) por los años de enseñanza y apoyo en mi vida profesional.

A mis asesores: el Dr. José Javier Báez Rojas y el Dr. Alfonso Padilla Vivanco, por su invaluable apoyo.

Al mis sinodales los Drs. Alejandro Cornejo Rodríguez, Gonzalo Urcid Serrano, Fermín Granados Agustín, Carina Toxqui Quitl y Manuel Isidro Martín Ortiz por sus valiosas sugerencias que ayudaron a mejorar este trabajo.

# Prefacio

La teoría de momentos radiales ha llegado a ser una disciplina establecida en la caracterización y evaluación de información con mínima redundancia. Sin embargo, las dificultades técnicas relacionadas con su cómputo ha determinado el desarrollo de nuevas aplicaciones. Además, los errores existentes tienen un impacto tan negativo, que pierden las propiedades que los hacen distintivos. Por tal motivo, el estudio y mejoramiento del cómputo numérico de los momentos radiales es de relevancia en términos de sus aplicaciones.

El objetivo del presente trabajo de tesis consiste en analizar los principales factores que intervienen en el cómputo de los momentos radiales, así como desarrollar las posibles soluciones para cada uno de estos factores. Para lograrlo, se realiza un análisis comparativo de los métodos utilizados en el cómputo de los momentos radiales con la finalidad de conocer sus fortalezas y debilidades. Tomando en cuenta el análisis llevado a cabo, se propone un novedoso método que mejora el cómputo de los momentos radiales en términos de su exactitud y tiempo.



# Resumen

Se presenta una breve introducción sobre los aspectos involucrados en el cómputo de momentos radiales. Entre estos factores, los más importantes son: 1) cómputo de alta precisión, 2) cómputo rápido, 3) estabilidad numérica y 4) diferentes familias de momentos. También, se realiza un análisis comparativo en términos de la reconstrucción de imágenes, error de reconstrucción y tiempos de cómputo para los métodos de ortogonalización de Gram-Schmidt, la aproximación por mínimos cuadrados, aproximación numérica y el esquema de píxeles polares. Para solucionar los problemas de la inestabilidad numérica y de búsqueda de una mejor familia de momentos radiales, se propone una relación de recurrencia de los polinomios genéricos de Jacobi, los cuales facilitan la búsqueda de un momento radial supremo. Por otra parte, con la experiencia adquirida se propone un novedoso método con el esquema de píxeles polares y la familia del momento radial supremo. Finalmente, se presentan las conclusiones y las aportaciones realizadas.





# Abstract

A brief introduction about aspects that are involved in the computation of radial moments is presented. Among the most important factors are: 1) high-precision computing, 2) fast computation, 3) numerical stability, and 4) different families of radial moments. Also, a comparative analysis was done in terms of image reconstructions, reconstruction error and computational times for the methods of Gram-Schmidt orthogonalization, the least squares approximation, numerical approximation and scheme of polar pixels. To solve the problems of numerical instability and of seeking a better family of radial moments, it was proposed a recurrence relation of generic Jacobi polynomials, these polynomials have the ability to generate different families of radial moments changing the parameters  $\alpha$  and  $\beta$ , which makes it easy to search a supreme radial moments. Finally, the conclusions and the contributions are presented.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>X</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XVI</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema . . . . .	4
1.2 Objetivos . . . . .	5
1.3 Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2 Teoría de momentos</b>	<b>7</b>
2.1 Momentos geométricos . . . . .	8
2.1.1 Momentos invariantes . . . . .	8
2.2 Momentos complejos . . . . .	11
2.3 Momentos ortogonales . . . . .	12
2.3.1 Momentos rectangulares . . . . .	13
2.3.2 Momentos radiales . . . . .	14
<b>3 Revisión del cómputo de los momentos radiales</b>	<b>17</b>
3.1 Cómputo de momentos radiales . . . . .	18
3.1.1 Aproximación de orden cero . . . . .	21
3.1.2 Ortogonalización de Gram-Schmidt . . . . .	24
3.1.3 Aproximación por mínimos cuadrados . . . . .	28
3.1.4 Aproximación numérica . . . . .	32
3.1.5 Esquema de pixeles polares . . . . .	35

3.2	Análisis comparativo . . . . .	42
3.2.1	Error de reconstrucción normalizado . . . . .	45
3.2.2	Gráfica de los momentos radiales . . . . .	45
3.2.3	Tiempos de cómputo . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Momentos genéricos de Jacobi-Fourier</b>	<b>49</b>
4.1	Polinomios genéricos de Jacobi . . . . .	50
4.2	Momentos radiales genéricos en pixeles polares . . . . .	52
4.3	Búsqueda de los mejores valores de $\alpha$ y $\beta$ . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Cómputo de alta precisión de los momentos radiales</b>	<b>63</b>
5.1	Nueva configuración de pixeles polares . . . . .	65
5.2	Momentos Exactos de Legendre-Fourier (MELF) . . . . .	66
5.3	Análisis de la configuración propuesta . . . . .	68
5.3.1	Mejora en la reconstrucción de imágenes . . . . .	68
5.3.2	Reconstrucción de imágenes ruidosas . . . . .	71
5.3.3	Mejora en la invariancia a la rotación y escala . . . . .	73
5.3.4	Comparación con otras familias de momentos radiales . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>77</b>
6.1	Detección de las fases de la marcha humana usando momentos radiales . . . . .	77
6.2	Estimación de ángulos usando momentos radiales . . . . .	80
6.3	Momentos cuaternión . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Lista de trabajos relacionados</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

# Índice de figuras

3.1	Aproximación de la matriz con puntos de una región circular. . . . .	18
3.2	Función de prueba. . . . .	20
3.3	Imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises Cameraman. (b) Imagen binaria E. . . . .	20
3.4	Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción con la aproximación de orden cero. (b) Reconstrucción con los valores reales. . . . .	23
3.5	Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” con la aproximación de orden cero para distintos ordenes $L$ . . . . .	23
3.6	Reconstrucción de la imagen binaria “E” con la aproximación de orden cero para distintos ordenes $L$ . . . . .	23
3.7	Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. (b) Reconstrucción con los valores reales. . . . .	27
3.8	Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para distintos ordenes $L$ . . . . .	27
3.9	Reconstrucción de la imagen binaria “E” por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para distintos ordenes $L$ . . . . .	27
3.10	Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir de la aproximación por el método de mínimos cuadrados. (b) Reconstrucción con los valores reales. . . . .	30
3.11	Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” por la aproximación con mínimos cuadrados para distintos ordenes $L$ . . . . .	30
3.12	Reconstrucción de la imagen binaria “E” por la aproximación con mínimos cuadrados para distintos ordenes $L$ . . . . .	31

3.13 Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir de la aproximación por aproximación numérica. (b) Reconstrucción con los valores reales. . . . . 34

3.14 Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” por la aproximación numérica para distintos ordenes  $L$ . . . . . 34

3.15 Reconstrucción de la imagen binaria “E” por la aproximación numérica para distintos ordenes  $L$ . . . . . 34

3.16 Sector concéntrico  $\Omega_{uv}$ , el cual representa un pixel polar para  $(r_u, \theta_{uv})$ , donde  $r_u = (r_u^{(s)} + r_u^{(e)})/2$  y  $\theta_{uv} = (\theta_{uv}^{(s)} + \theta_{uv}^{(e)})/2$ . . . . . 36

3.17 Configuración de pixeles polares. . . . . 37

3.18 Imagen de Lena: (a) pixeles cuadrados, (b) pixeles polares. . . . . 39

3.19 Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir del esquema de píxeles polares. (b) Reconstrucción con los valores reales. . . . . 40

3.20 Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” con el esquema de píxeles polares para distintos ordenes  $L$ . . . . . 41

3.21 Reconstrucción de la imagen binaria “E” con el esquema de píxeles polares para distintos ordenes  $L$ . . . . . 41

3.22 Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” para  $L=8$ ,  $L=30$ , y  $L=60$  con distintos métodos de cómputo de los momentos radiales. . . . . 43

3.23 Reconstrucción de la imagen binaria “E” para  $L=8$ ,  $L=30$ , y  $L=60$  con distintos métodos de cómputo de los momentos radiales. . . . . 44

3.24 Error de reconstrucción : (a) imagen en escala de grises “Cameraman” (b) imagen binaria “E” . . . . . 46

3.25 Valores de los momentos de Zernike ( $m = J, n = 3J$ ) para: (a) imagen binaria “E” (b) imagen en escala de gris “Camaraman”. . . . . 47

3.26 Tiempos de cómputo de los distintos métodos para el cálculo de los momentos radiales de imagen de  $256 \times 256$  píxeles. . . . . 48

4.1 Corrección de la inestabilidad numérica de los polinomios de Jacobi cuando  $\alpha = \beta = 4$  para los ordenes: (a)  $n = 21$ , (b)  $n = 23$ , y  $n = 26$ . . . . . 53

4.2	Primeros seis polinomios para distintas familias: (a) Legendre, (b) Chebyshev, (c) Mellin, (d) Pseudo-Jacobi, (e) Zernike, (f) Pseudo-Zernike. . . . .	55
4.3	Reconstrucción de las imágenes de prueba con los coeficientes de la función hipergeométrica y las relaciones de recurrencia. . . . .	57
4.4	<i>NIRE</i> de las imágenes de prueba con los coeficientes de la función hipergeométrica y las relaciones de recurrencia. . . . .	58
4.5	Imágenes de prueba. (a) Imagen del iris. (b) Imagen de la retina. (c) Imagen del Ronchigrama. . . . .	59
4.6	Resultados usando una imagen del iris. (a) Espacio de búsqueda para encontrar los mejores valores de $\alpha$ y $\beta$ . (b) <i>NIRE</i> de los mejores parámetros. (c) La reconstrucción de la imagen del iris con $\alpha = 10$ y $\beta = 8$ . . . . .	60
4.7	Resultados usando una imagen de la retina. (a) Espacio de búsqueda para encontrar los mejores valores de $\alpha$ y $\beta$ . (b) <i>NIRE</i> de los mejores parámetros. (c) Reconstrucción imagen retina con $\alpha = \beta = 1$ . . . . .	61
4.8	Resultados usando una imagen del Ronchigrama. (a) Espacio de búsqueda para encontrar los mejores valores de $\alpha$ y $\beta$ . (b) <i>NIRE</i> de los mejores parámetros. (c) Reconstrucción imagen del Ronchigrama con $\alpha = \beta = 1$ . . . . .	61
5.1	Diferentes configuraciones en la distribución de píxeles polares: (a) Configuración de Xin et al. [6], (b) Configuración de Singh et al. [7], (c) Configuración de Liu et al. [8]. . . . .	64
5.2	(a) Anillos concéntricos en la distribución de píxeles. (b) Nuestra configuración de píxeles polares. . . . .	66
5.3	Imágenes de prueba reconstruidos con los MELF y $L = 100$ para diferentes configuraciones de los píxeles polares. . . . .	69
5.4	<i>NIRE</i> de las imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises. “Cameraman”, (b) Imagen binaria “E”. . . . .	70
5.5	<i>NIRE</i> de las imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises. “Cameraman”, (b) Imagen binaria “E”. . . . .	72
5.6	<i>NIRE</i> de las imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises. “Cameraman”, (b) Imagen binaria “E”. . . . .	74

5.7	Las imágenes de prueba reconstruidas por diferentes familias de momentos radiales con nuestra configuración de píxeles polares . . . . .	75
5.8	NIRE de imágenes de prueba para diferentes familias de momentos radiales con nuestra configuración de píxeles polares. . . . .	76
6.1	Ciclos de la marcha: golpe de talón derecho (GTD), despegue de los dedos derechos (DDD), golpe de talón izquierdo (GTI), despegue de los dedos izquierdos (DDI), postura media (PM), balanceo medio (BM). . . . .	78
6.2	Ciclo de la marcha asociado a los MELF. . . . .	79
6.3	Tres casos diferentes de imágenes que forman ángulos a partir de un punto de referencia. . . . .	81
6.4	Conjunto de entrenamiento de los tres casos propuestos. . . . .	82
6.5	Estimación de los ángulos usando: (a) imágenes libres de degradación, (b) imágenes degradadas con ruido, (c) imágenes con cambios de escala, (d) imágenes degradadas con ruido y con cambios de escala. . . . .	83
6.6	Reconstrucción de la imagen estándar de Lena de $512 \times 512$ píxeles con diferentes métodos para $L = 20, 50, 100$ . . . . .	89
6.7	Reconstrucción de la imagen estándar de Lena de $512 \times 512$ píxeles con diferentes métodos. . . . .	90
6.8	Tiempo de cómputo de la imagen estándar de Lena con el tamaño de $512 \times 512$ píxeles para diferentes métodos. . . . .	91

# Índice de tablas

3.1	Valores aleatorios de los primeros 28 momentos de Zernike . . . . .	19
3.2	Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos con la aproximación de orden cero. . . . .	22
3.3	Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. . . . .	26
3.4	Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por la aproximación por Mínimos Cuadrados . . . . .	29
3.5	Pesos y ubicación para $t \times t$ puntos de la cuadratura Gaussiana. . . . .	33
3.6	Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por la aproximación numérica . . . . .	33
3.7	Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por el esquema de píxeles polares . . . . .	40
4.1	Parámetros de las relaciones de recurrencia genérica para diferentes polinomios conocidos. . . . .	54
4.2	Pesos ( $\eta_k$ ) y la ubicación de puntos de muestreo ( $z_k$ ) para cuadratura Gaussiana de 10 puntos. . . . .	56
6.1	Parámetros temporales del ciclo de la marcha. . . . .	80
6.2	Comparación de los resultados de los conjuntos de prueba para distintos métodos. . . . .	84
6.3	Error porcentual de la Tabla 6.2 . . . . .	85



# Capítulo 1

## Introducción

Es bien conocido que en álgebra lineal, una base ortogonal en un espacio vectorial, contiene una gran cantidad de propiedades numéricas favorables. Esto aplica también a las bases de polinomios ortogonales, y en consecuencia a los momentos. Los momentos de una imagen, representan la similitud entre la función imagen y una serie de patrones formados por una función kernel de cada familia de momentos[1]. En consecuencia los momentos ortogonales de una imagen digital son funciones intrínsecas definidas en dos dimensiones, las cuales pueden cumplir la condición de ortogonalidad en un rectángulo o en un círculo. Los momentos ortogonales definidos en un círculo son también llamados momentos circulares o radiales. A diferencia de los momentos rectangulares, los momentos radiales son sumamente atractivos por ser invariantes naturales a la rotación, reflexión y escala.

La aplicación de los momentos definidos en un círculo tienen sus orígenes en ingeniería óptica. La función de aberración del frente de onda en sistemas ópticos puede ser expandida en series de potencias o en polinomios ortogonales, en particular los polinomios de Zernike. Estos momentos son utilizados para representar las aberraciones de tercer orden de un sistema óptico y comúnmente están equilibradas con varianza mínima. Esta idea fue retomada para el análisis de imágenes por Teague en 1980 [2]. En este trabajo, se propone a los polinomios de Zernike para el análisis de imágenes a través de la teoría general de momentos y los nombra como momentos de Zernike. Estos momentos solucionan el problema de la redundancia de información de los momentos invariantes de Hu [3]. Sin embargo al aplicar los momentos radiales, la imagen debe ser asignada a un disco unitario que crea ciertos problemas de remuestreo y de aproximación en su cómputo. En los últimos años se han propuesto nuevos enfoques para mejorar el cómputo

de los momentos radiales. Los enfoques más representativos son señalados a continuación:

### **Cómputo exacto**

En años recientes se ha demostrado [4, 5, 6] que hay dos errores inherentes en el cómputo de los momentos radiales. En primer lugar, existe error geométrico debido a la naturaleza circular del dominio de la imagen. En segundo lugar el error numérico, el cual se produce cuando se involucra integración en 2D. Se han desarrollado varias propuestas en la literatura para minimizar ambos tipos de errores. Los errores geométricos se reducen al mínimo mediante la aplicación de técnicas de mapeo del espacio de la imagen a las coordenadas radiales y angulares. [6]. A partir de esta idea se han realizado estudios para la disposición de los píxeles más apropiadas [7, 8]. Los errores de integración numérica se reducen mediante la aplicación de las fórmulas analíticas [6] o algoritmos de integración numérica como las reglas de Simpson [4] o de Gauss [9],[10]. En ingeniería óptica, este problema se soluciona mediante la aproximación por mínimos cuadrados o la ortonormalización de Gram-Schmidt [11]. Desafortunadamente, estos métodos generan un sobreajuste en el cómputo de los momentos radiales[12]. Actualmente, mediante el uso de las técnicas antes mencionadas los momentos obtenidos están muy cerca de sus valores teóricos y por lo tanto, el nivel de precisión alcanzado es satisfactorio.

### **Cómputo rápido**

Debido a que el cálculo de los momentos radiales consiste en evaluar los momentos base en cada punto de la función de intensidad, todo el proceso toma mucho tiempo. Además, cuando se aumenta el número de momentos o se incrementa la resolución de la imagen, el tiempo de cómputo crece exponencialmente. Por lo tanto, el desarrollo del cómputo rápido ha sido el objetivo de muchas investigaciones durante los últimos años. Los algoritmos que garantizan velocidades razonables en el cálculo de los momentos de la imagen, tienen dos enfoques diferentes: hacer más eficiente el cómputo de los polinomios ortogonales y la reducción del número de píxeles donde los polinomios son evaluados. Algunos de estos enfoques se han aplicado para el cómputo de los momentos de Zernike [13],[14],[15],[16],[17],[18],[19] y los momentos ortogonales de Fourier-Mellin [20],[21],[22],[23],[24].

---

## Estabilidad numérica

Además de los errores de cómputo de los momentos radiales, causados al aplicar las fórmulas sobre una imagen digital, el cálculo de los momentos revela algunas inestabilidades numéricas adicionales. Una de las causas es el desbordamiento, el cual se debe a la existencia de grandes valores numéricos y la gran cantidad de operaciones entre ellos [18],[25]. El cálculo de factoriales sólo es preciso para cantidades menores de 21 con números de precisión doble. Por otra parte, el cálculo de la  $n$ -ésima potencia de la variable radial en altos órdenes causa inestabilidad numérica, esto para valores alrededor de 1 dentro del disco unidad. La otra inestabilidad numérica que ocurre durante el cálculo de los momentos radiales son los errores de truncamiento o también llamados errores de precisión finita, los cuales se producen en los algoritmos recursivos al aumentar las iteraciones hasta causar el colapso del algoritmo [67],[27]. Estos errores son generados por operaciones aritméticas específicas, tales como: la resta y la división. Las inestabilidades numéricas son responsables de limitar el cómputo de los momentos radiales de alto orden junto con el tamaño de la imagen.

## Familias de momentos

Existen una gran cantidad de familias de momentos radiales. Bhatia y Wolf [28] mencionaron que existe un número infinito de polinomios ortogonales radiales que pueden ser invariantes a la rotación, traslación y escala. Entre los más representativos están: los momentos de Zernike [2], momentos de Pseudo-Zernike [29], momentos de Pseudo-Jacobi-Fourier [31], momentos de Jacobi-Fourier [30], momentos de Chebyshev-Fourier [32], momentos ortogonales de Fourier-Mellin [33], momentos radiales armónicos-Fourier [34], momentos de Bessel-Fourier [35] y momentos radiales ponderados desplazados de Legendre-Fourier [36]. La idea principal es encontrar una familia de momentos radiales que supere a todas las demás en términos del error de reconstrucción e invariancia.

La capacidad de los momentos radiales para capturar información del contenido de una imagen en una forma compacta y con redundancia mínima, los hace apropiados para describir la distribución de píxeles de la imagen. Debido a estas importantes propiedades se han utilizado con éxito en la marca de agua multimedia [37], [38], estimación de ángulo de rotación [39],[40],

coincidencia de imágenes [41], recuperación de imágenes [42], [43]. Otra de las principales propiedades de los momentos radiales es la invariancia a la rotación, reflexión, traslación y escala. Estas propiedades hacen que sean utilizadas en reconocimiento de patrones y aplicaciones de clasificación, donde los momentos de una imagen tienen que ser diferentes respecto de los momentos de otra imagen. Son normalmente utilizados en el reconocimiento de la marcha [44], reconocimiento de objetivos [45], reconocimiento del iris [46], reconocimiento de gestos de mano [47], reconocimiento de rostros en infrarojo [48] entre otras aplicaciones. Desafortunadamente, la mayoría de las aplicaciones utilizan aproximaciones simples con tiempos de cómputo altos.

## 1.1. Planteamiento del problema

La característica más importante de los momentos radiales es su invariancia a la rotación, reflexión, escala y ruido. En teoría los valores momento no cambian al sufrir las alteraciones mencionadas. Dependiendo la manera de calcular los momentos radiales el margen de error cambia. Por esta razón, el análisis del cómputo de los momentos radiales toma importancia. La finalidad es reducir el margen de error, para que los momentos radiales tengan una mayor capacidad descriptiva. En general, el estudio del cómputo de los momentos radiales sigue cuatro enfoques:

- Cómputo rápido.
- Cómputo exacto.
- Estabilidad numérica.
- Nuevas familias de momentos radiales.

En la actualidad, no existe la unificación y estandarización de todos los enfoques. Esto hace que las aplicaciones que están en desarrollo solo utilizan las aproximaciones más sencillas con tiempos de cómputo razonables y los conjuntos de polinomios ortogonales base más comunes. Por otra parte, no toman en cuenta como parte primordial, el cómputo exacto de los momentos radiales, siendo este el que garantiza que los momentos sean linealmente independientes y que no exista información redundante.

## 1.2. Objetivos

El objetivo general de este trabajo de tesis es desarrollar un método para el cómputo de momentos radiales el cual sea rápido y exacto con el polinomio ortogonal supremo. Para lograrlo, este trabajo de tesis está enfocado al estudio del cómputo de los momentos radiales y su mejoramiento. De manera particular, las tareas descritas son:

- Realizar un análisis comparativo de los distintos métodos de cómputo de momentos radiales más conocidos en términos del error de reconstrucción y tiempos de cómputo.
- Realizar un análisis del kernel de los momentos radiales en términos de su inestabilidad numérica.
- Realizar una búsqueda del kernel de los momentos radiales óptimos que mejor se adapten a una imagen de estudio.
- Desarrollar un método de alta precisión para el cómputo de los momentos radiales, con la experiencia adquirida de las distintas problemáticas.

Aunque existen estudios que proponen nuevos métodos para el cómputo de momentos radiales, desafortunadamente sólo son comparadas con la aproximación más sencilla sin tener en cuenta los diferentes enfoques; por esta razón, en este trabajo de tesis se realiza un análisis comparativo con diversos métodos. Por otra parte, en los últimos 35 años se han propuesto una gran variedad de conjuntos de polinomios ortogonales como base de los momentos radiales, sin seleccionar un conjunto óptimo, por lo que su estudio también es relevante para esta investigación.

### 1.3. Estructura de la tesis

El trabajo de tesis está estructurado de la siguiente manera:

**Capítulo 2:** Se realiza una revisión matemática de distintos tipos de momentos, tales como: los momentos geométricos, los momentos complejos y los momentos ortogonales.

**Capítulo 3:** Se realiza una revisión de cuatro métodos para el cómputo de los momentos radiales y se comparan en términos de la reconstrucción de la imagen, error de reconstrucción y tiempos de cómputo. Con la finalidad de conocer las debilidades y fortalezas de cada método.

**Capítulo 4:** Se realiza una revisión de los momentos genéricos de Jacobi-Fourier. También, se presenta una nueva relación de recurrencia con respecto al orden  $n$  de los polinomios de Jacobi, libre de inestabilidad numérica. Por otra parte, se realiza la búsqueda de los mejores polinomios ortogonales que se ajusten a imágenes específicas.

**Capítulo 5:** Se presenta una nueva configuración de píxeles polares libre de interpolación, la cual presenta mejores resultados que las configuraciones existentes. Además, se presenta los momentos exactos de Legendre calculados con dicha configuración.

**Capítulo 6:** Se presenta las siguientes aplicaciones: detección de las fases de la marcha humana usando momentos, estimación de ángulos usando momentos radiales y momentos cuaternión.

**Capítulo 7:** Se presentan las conclusiones generales del trabajo de tesis y el trabajo a futuro. Además, se muestran las investigaciones publicadas a lo largo del desarrollo de la tesis.

## Capítulo 2

### Teoría de momentos

Los momentos son cantidades escalares utilizadas para describir una imagen y capturar sus características más importantes. También, son ampliamente utilizados en estadística, para la descripción de la forma de una función de densidad de probabilidad y en la mecánica de cuerpos rígidos para medir la distribución de la masa de un cuerpo. Desde el punto de vista matemático, los momentos son "proyecciones" de una función, en una base polinomial. En general, los momentos  $M_{pq}^{(f)}$  de una imagen  $f(x, y)$ , donde  $p, q$  son enteros no negativos y  $k = p + q$  es el orden de los momentos, están definidos como

$$M_{pq}^{(f)} = \iint_D P_{pq}(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (2.1)$$

donde  $P_{pq}(x, y)$  son funciones de base polinomial definidas en  $D$ . Dependiendo de la base polinomial utilizada, se pueden formar distintos sistemas de momentos, tales como los momentos geométricos, los momentos complejos y los momentos ortogonales.

## 2.1. Momentos geométricos

La opción más común, es una base de potencia estándar  $P_{pq}(x, y) = x^p y^q$ , que conduce a los momentos geométricos [49],

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy. \quad (2.2)$$

Los momentos geométricos de bajo orden tienen un significado intuitivo. Por ejemplo,  $m_{00}$  es el área de una imagen binaria,  $m_{10}/m_{00}$  y  $m_{01}/m_{00}$  definen el centroide de la imagen. Los momentos de segundo orden  $m_{20}$  y  $m_{02}$  describen la distribución de intensidad de la imagen con respecto a los ejes de coordenadas, en mecánica se les conoce como momentos de inercia. Por otra parte, si  $f(x, y)$  se considera como una función de densidad probabilística, es decir, sus valores se normalizan de tal manera que  $m_{00} = 1$ , se pudieran considerar como  $m_{10}$  y  $m_{01}$  como los valores medios. En caso de que fueran cero,  $m_{20}$  y  $m_{02}$  serían las proyecciones horizontal y vertical, y  $m_{11}$  sería la covarianza entre ellos. De esta manera, los momentos de segundo orden definen la orientación de la imagen. A partir de los momentos geométricos se puede construir una base de momentos que sean invariantes a la escala, traslación y rotación.

### 2.1.1. Momentos invariantes

La traslación, rotación y escala son las transformaciones más simples de coordenadas espaciales. En general, éstas se pueden describir como [49],

$$\mathbf{x}' = s\mathbf{R} \times \mathbf{x} + \mathbf{t}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{t}$  es el vector de traslación,  $s$  es un factor de escala, y  $\mathbf{R}$  es la matriz de rotación

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de rotación. Los invariantes a la traslación y escala se pueden derivar de una manera intuitiva. Sin embargo, la derivación de los invariantes a la rotación es mucho más complicada.



La invariancia a la traslación puede lograrse simplemente desplazando el objeto de tal manera que su centroide coincide con el origen del sistema de coordenadas o desplazando la base del polinomio en el centroide del objeto. Los momentos geométricos invariantes a la traslación tienen el nombre de momentos geométricos centrales y están dados de la siguiente manera,

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^p (y - y_c)^q f(x, y) dx dy, \quad (2.4)$$

donde

$$x_c = m_{10}/m_{00}, \quad y_c = m_{01}/m_{00}, \quad (2.5)$$

son las coordenadas del centroide. Note que el objeto siempre mantiene  $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$ , y  $\mu_{00} = m_{00}$ .

La invariancia a la escala se obtiene mediante la normalización adecuada de cada momento. En principio, cualquier momento se puede utilizar como un factor de normalización con la condición de que sea distinto de cero para todas las imágenes. Los momentos de orden inferior son más estables al ruido y más fáciles de calcular, por esta razón, es común usar el momento geométrico  $m_{00}$ . Así que la normalización está dada como

$$v_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^w}, \quad (2.6)$$

donde

$$w = \frac{p+q}{2} + 1. \quad (2.7)$$

El momento  $v_{pq}$ , se llama momento geométrico central normalizado. Después de escalar por un factor  $s$ , los momentos centrales en las nuevas coordenadas, toman la siguiente forma,

$$\mu'_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x'_c)^p (y' - y'_c)^q f(x', y') dx' dy', \quad (2.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^p (x - x_c)^p s^q (y - y_c)^q f(x, y) s^2 dx dy = s^{p+q+2} \mu_{pq}, \quad (2.9)$$

con

$$x' = sx, \quad y' = sy, \quad dx' dy' = s^2 dx dy. \quad (2.10)$$

En particular, cuando  $p = 0$  y  $q = 0$ , se tiene que

$$\mu'_{00} = s^2 \mu_{00}, \quad (2.11)$$

en consecuencia,

$$v'_{pq} = \frac{\mu'_{pq}}{(\mu'_{00})^w} = \frac{s^{p+q+2} \mu_{pq}}{(s^2 \mu_{00})^w} = v_{pq}, \quad (2.12)$$

de ésta manera se demuestra la invarianza a la escala de los momentos normalizados. Por otra parte, los momentos invariantes a la rotación se introdujeron por primera vez en 1962 por Hu [3], que emplea los resultados de la teoría de los invariantes algebraicos y deriva sus siete famosos invariantes, los cuales están dados por

$$\begin{aligned} \phi_1 &= v_{20} + v_{02}, \\ \phi_2 &= (v_{20} + v_{02})^2 + 4(v_{11})^2, \\ \phi_3 &= (v_{30} - 3v_{12})^2 + (3v_{21} - v_{03})^2, \\ \phi_4 &= (v_{30} + v_{12})^2 + (v_{21} + v_{03})^2, \\ \phi_5 &= (v_{30} - 3v_{12})(v_{12} + v_{03}) [(v_{30} + v_{12})^2 - 3(v_{21} + v_{03})^2] \\ &\quad + (3v_{21} + v_{03})(v_{21} + v_{03}) [3(v_{30} + v_{12})^2 - (v_{21} + v_{03})^2], \\ \phi_6 &= (v_{20} - v_{02},) [(v_{30} + v_{12})^2 - (v_{21} + v_{03})^2] \\ &\quad + 4v_{11}(v_{30} + v_{12})(v_{12} + v_{03}), \\ \phi_7 &= (3v_{12} - v_{03})(v_{12} + v_{03}) [(v_{30} + v_{12})^2 - 3(v_{21} + v_{03})^2] \\ &\quad - (v_{30} - 3v_{12})(v_{21} + v_{03}) [3(v_{30} + v_{12})^2 - (v_{21} + v_{03})^2]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 2.2. Momentos complejos

Los momentos complejos  $c_{pq}$  de una función imagen están definidos como [50],

$$c_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + jy)^p (x + jy)^q f(x, y) dx dy. \quad (2.14)$$

El momento complejo puede ser fácilmente expresado en coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \theta & \theta &= \arctan(y/x). \end{aligned}$$

Entonces la Ec. (2.14) toma la forma,

$$c_{pq} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^{p+q+1} \exp^{j(p-q)\theta} f(r, \theta) dr d\theta. \quad (2.15)$$

A partir de la Ec. (2.15) podemos construir el invariante a la rotación. Sea  $f'(r, \theta)$  una versión rotada de  $f(r, \theta)$ , es decir,  $f'(r, \theta) = f(r, \theta + \alpha)$  donde  $\alpha$  es el ángulo de rotación, por consiguiente

$$c'_{pq} = \exp^{-j(p-q)\alpha} c_{pq}. \quad (2.16)$$

La idea es cancelar la fase  $(p - q)\alpha$  mediante la multiplicación de potencias de momentos adecuados. La construcción de los momentos complejos invariantes a la rotación, está dada por

$$\begin{aligned} \Phi(k, 0) &= c_{k,0} c_{q_0,p_0}^k, \\ \Phi(k-1, 1) &= c_{k-1,1} c_{q_0,p_0}^{k-2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $p_0$  y  $q_0$  son índices arbitrarios de tal manera que  $p_0 + q_0 < k$ ,  $p_0 - q_0 = 1$  y  $c_{p_0,q_0} \neq 0$ . Los momentos invariantes de Hu pueden tener una representación con los momentos complejos,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= c_{11} &= \Phi(1, 1), \\
\phi_2 &= c_{20}c_{02} &= \frac{|\Phi(2, 0)|^2}{\Phi(2, 1)^2}, \\
\phi_3 &= c_{30}c_{03} &= \frac{|\Phi(3, 0)|^2}{\Phi(2, 1)^3}, \\
\phi_4 &= c_{21}c_{12} &= \Phi(2, 1), \\
\phi_5 &= \operatorname{Re}(c_{30}c_{12}^3) &= \operatorname{Re}(\Phi(3, 0)), \\
\phi_6 &= \operatorname{Re}(c_{20}c_{12}^2) &= \operatorname{Re}(\Phi(2, 0)), \\
\phi_7 &= \operatorname{Im}(c_{30}c_{12}^3) &= \operatorname{Im}(\Phi(3, 0)).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Los momentos complejos sólo son invariantes a la rotación; no son invariantes al desplazamiento, ni están normalizados en la escala.

### 2.3. Momentos ortogonales

Los momentos ortogonales fueron introducidos por vez primera por Teague en 1980, quien propone los momentos de Legendre definidos en un rectángulo y los momentos de Zernike definidos en un círculo de radio unidad. Estos tienen la capacidad de caracterizar información con mínima redundancia a diferencia de los momentos que no tienen una base ortogonal. Los momentos ortogonales constan de una base ortogonal  $P_{n,m}(x, y)$ , es decir, sus elementos satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\iint_{\Omega} P_{n,m}(x, y) P_{p,q}(x, y) = \delta_{n,p} \delta_{m,q}, \tag{2.19}$$

donde  $\delta_{n,p}$  es el símbolo de Kronecker,

$$\delta_{n,p} = \begin{cases} 0, & n \neq p \\ 1, & n = p \end{cases}.$$

Los momentos ortogonales están definidos como

$$Q_{n,m} = \iint_{\Omega} P_{n,m}(x,y) f(x,y) dx dy, \quad (2.20)$$

donde  $\Omega$  es el área de ortogonalidad. El dominio puede estar definido en un rectángulo o en un círculo. Por otra parte, tienen una diferencia significativa cuando se considera la estabilidad y problemas computacionales en un dominio discreto. La mayoría de los polinomios ortogonales pueden ser calculados con mayor estabilidad numérica mediante relaciones de recurrencia, a diferencia de los momentos geométricos, que utiliza potencias, las cuales aumentan su inestabilidad mientras los ordenes aumentan.

### 2.3.1. Momentos rectangulares

La expresión de los momentos ortogonales definidos en un rectángulo para una función imagen  $f(x,y)$  de tamaño  $N \times M$  está dado por,

$$q_{n,m} = \int_0^N \int_0^M f(x,y) P_{n,m}(x,y) dx dy,$$

donde  $P_{n,m}(x,y)$  es el kernel de transformación, el cual consiste en dos polinomios ortogonales  $A_n(x)$  y  $A_m(y)$ , expresados como

$$P_{n,m}(x,y) = A_n(x) A_m(y). \quad (2.21)$$

Por lo general, las dos funciones  $A_n(x)$  y  $A_m(y)$  corresponden a una misma familia de polinomios ortogonales; sin embargo, existen trabajos donde combinan diferentes familias de polinomios ortogonales [51],[52],[53]. El kernel  $P_{n,m}(x,y)$  puede estar compuesto por polinomios ortogonales continuos o discretos. En el caso discreto, tienen un mejor desempeño debido a que la imagen está definida en un espacio discreto, por lo que no requieren aproximaciones en su cálculo como el caso continuo [54].

Por otra parte, de acuerdo con la teoría ortogonal, podemos recuperar la imagen original a partir de un número infinito de sus momentos. La reconstrucción de la imagen está dada por

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L q_{n,m} A_n(x) A_m(y), \quad (2.22)$$

donde  $\tilde{f}(r, \theta)$  es la versión reconstruida de  $f(r, \theta)$ , y  $L$  es el máximo orden de momentos rectangulares utilizados en la reconstrucción.

En la actualidad, existe una gran cantidad de momentos ortogonales definidos en un rectángulo, tales como los momentos de Tchebichef [54], los momentos de Krawtchouk [55], los momentos de Hahn [56], y los momentos Gauss–Hermite [57]. Lamentablemente, no se han desarrollado invariantes eficientes para los momentos rectangulares [55],[58].

### 2.3.2. Momentos radiales

La expresión general para los momentos radiales de orden  $n$  y repetición  $m$  para una función imagen  $f(r, \theta)$  en coordenadas polares está dada por

$$\phi_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) P_{n,m}(r, \theta) r dr d\theta, \quad (2.23)$$

donde  $P_{n,m}(r, \theta)$  es la función kernel separable, la cual consiste en el producto de dos funciones: una de ellas es una familia de polinomios ortogonales  $A_n(r)$  en la coordenada radial y la otra es una función exponencial compleja  $\exp(jm\theta)$  en la coordenada angular, la función  $P_{n,m}(r, \theta)$  es expresada como

$$P_{n,m}(r, \theta) = A_n(r) \exp(jm\theta), \quad (2.24)$$

donde  $n$  y  $m$  son enteros. Además, la función kernel es ortogonal dentro del círculo de radio unidad,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La propiedad de ortogonalidad queda expresada mediante la expresión,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 P_{n,m}(r, \theta) P_{k,l}(r, \theta) r dr d\theta = \delta_{n,m} \delta_{k,l}, \quad (2.25)$$

donde  $\delta_{n,m}$  es el símbolo de Kronecker. Por otra parte, de acuerdo con la teoría ortogonal, la imagen original puede ser reconstruida por un número infinito de momentos radiales. La distribución discreta reconstruida de la imagen está dada por

$$\tilde{f}(r, \theta) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L \phi_{n,m} A_n(r) \exp(jm\theta), \quad (2.26)$$

donde  $\tilde{f}(r, \theta)$  es la versión reconstruida de  $f(r, \theta)$ , y  $L$  es el máximo orden de momentos radiales utilizados en la reconstrucción de la imagen. La reconstrucción de la imagen ayuda a determinar que tan bien una imagen puede ser caracterizada por un número finito de sus momentos.

Las características más importantes de los momentos radiales son la invariancia a la rotación, a la reflexión y a la escala. Si consideramos una imagen  $f(r, \theta - \gamma)$  que es rotada  $\gamma$  grados, esto da como resultado los momentos  $\phi_{n,m}^{(\gamma)}$ , los cuales están relacionado con  $\phi_{n,m}$  de la siguiente manera

$$\phi_{n,m}^{(\theta-\gamma)} = \phi_{n,m} \exp(-jm\gamma). \quad (2.27)$$

Por lo tanto, obteniendo el módulo de los momento radiales,

$$|\phi_{n,m}^{(\theta-\gamma)}| = |\phi_{n,m}|,$$

se prueba la invariancia a la rotación. De la misma manera, si consideramos el caso general de la reflexión a través de una línea que pasa por el origen, que gira a través de un ángulo positivo  $\gamma$  con respecto al eje  $y$ . La imagen puede ser representada como  $f(r, 2\gamma - \theta)$ , el hecho de que esta transformación depende  $2\gamma$ , se debe a que la línea de reflexión no tiene dirección única: sin cambios para  $180^\circ$  de rotación. La relación de los momentos radiales afectada por reflexión está dada por

$$\phi_{n,m}^{(2\gamma-\theta)} = \phi_{n,m} \exp(-j2m\gamma), \quad (2.28)$$

y por lo tanto, el módulo

$$|\phi_{n,m}^{(2\gamma-\theta)}| = |\phi_{n,m}|,$$

es invariante a la reflexión. En cuanto a la escala, los momentos radiales son invariantes naturales debido a que el radio unidad donde se define la imagen tiene que ser remapeado dependiendo de las dimensiones de la imagen. En otras palabras, sin importar el tamaño de la imagen, siempre va a estar definida dentro de un radio unitario. Sin embargo, esto se cumple siempre y cuando no se utilicen aproximaciones en el cálculo de los momentos radiales. Además, los momentos radiales no tienen información redundante como los momentos geométricos y los momentos complejos. Por otra parte, aunque los momentos rectangulares no tienen redundancia en la información, no son invariantes naturales a la rotación y escala.



## Capítulo 3

# Revisión del cómputo de los momentos radiales

Los momentos radiales tiene la habilidad de caracterizar, evaluar y manipular información visual con mínima información redundante. Sin embargo, existen algunas dificultades técnicas relacionadas con el cálculo de estos momentos, especialmente las cuestiones de exactitud y eficiencia, han obstaculizado el uso más amplio de esta clase de momentos en el desarrollo de aplicaciones [59]. Sin la precisión apropiada, algunas propiedades atractivas de los momentos radiales se ven comprometidas. Además, los errores existentes tienen un impacto tan negativo en el análisis de imágenes y su reconstrucción, que cuando el orden del momento alcanza un valor crítico, el error se convierte en intolerable. En general, la aplicación de un conjunto de funciones momento definidas en un círculo a un plano cartesiano, es propenso a errores; especialmente, cuando los cálculos están relacionados con los píxeles a lo largo de la frontera del círculo unidad y las aproximaciones numéricas requeridas por la discretización de los píxeles en las imágenes digitales.

En años recientes, aspectos importantes como el cómputo exacto de los momentos radiales han sido estudiados, debido a que las imágenes digitales están representadas en píxeles. En la Fig. 3.1 se muestra la unión de los píxeles cuyos centros caen dentro del círculo unitario. Note que algunos píxeles no están enteramente dentro del círculo unitario; por otra parte, algunas partes del círculo unitario no están cubiertas por los píxeles. En el problema de la exactitud se ha demostrado que existen dos errores inherentes en el cómputo de los momentos radiales [4]. El primero, el error geométrico existe debido a que la función imagen está definida dentro

del radio unidad, la integral de la Ec. 2.23, sólo toma en cuenta los píxeles cuyos centros caen por completo dentro del círculo unitario. En segundo lugar, el error numérico es causado por la necesidad de calcular integrales en dos dimensiones, las cuales aparecen en la definición de  $\phi_{n,m}$ . Vale la pena señalar que el error geométrico es inherente e inevitable, siempre y cuando uno emplee los métodos de cálculo basados en coordenadas cartesianas convencionales.

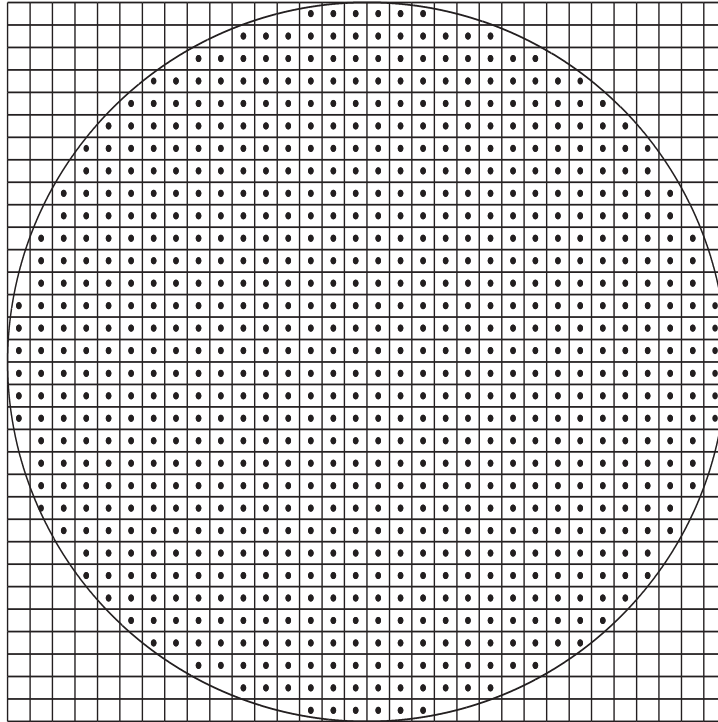


Figura 3.1: Aproximación de la matriz con puntos de una región circular.

Para solucionar este problema, se han desarrollado distintos métodos para el cómputo de momentos radiales, entre los que destacan: la aproximación de orden cero, ortogonalización de Gram-Schmidt [12], aproximación por mínimos cuadrados [11], aproximación numérica [4] y esquema de píxeles polares [6]. En este trabajo de tesis se analizan los métodos mencionados mediante la reconstrucción de imagen y el error de reconstrucción con imágenes de prueba estándar y una función imagen creada a partir de momentos conocidos.

### 3.1. Cómputo de momentos radiales

Existen diferentes enfoques para el cálculo de los momentos radiales para distintas aplicaciones. La ortogonalización de Gram-Schmidt y el método de mínimos cuadrados son utilizados

$Z_0^0$	-7.2885	$Z_3^{-1}$	3.2097	$Z_6^2$	-11.2890	$Z_4^{-4}$	-15.6910
$Z_2^0$	1.2042	$Z_5^1$	-0.5224	$Z_6^{-2}$	18.9240	$Z_6^4$	12.4780
$Z_4^0$	5.2112	$Z_5^{-1}$	-12.8200	$Z_3^3$	-0.4560	$Z_6^{-4}$	13.4510
$Z_6^0$	6.6405	$Z_2^2$	-2.2890	$Z_3^{-3}$	11.2950	$Z_5^5$	0.3959
$Z_1^1$	0.5856	$Z_2^{-2}$	7.2254	$Z_5^3$	10.8380	$Z_5^{-5}$	6.8843
$Z_1^{-1}$	8.3501	$Z_4^2$	12.4150	$Z_5^{-3}$	-10.9090	$Z_6^6$	-11.7060
$Z_3^1$	-10.1930	$Z_4^{-2}$	-8.8662	$Z_4^4$	-10.5630	$Z_6^{-6}$	6.6928

Tabla 3.1: Valores aleatorios de los primeros 28 momentos de Zernike

para expresar las aberraciones del frente de onda en un sistema óptico a partir de los polinomios de Zernike. Sin embargo, no han sido utilizados para el cálculo de momentos de una imagen digital. Posiblemente, esto se deba a que los artículos de investigación en el área de momentos buscan el comportamiento invariante a transformaciones y la reconstrucción de imágenes para distintas familias con la aproximación de orden cero. Recientemente han surgido nuevos métodos para cómputo de los momentos radiales en el área de reconocimiento de patrones, los cuales consideran la exactitud como eje principal para mejorar la invariancia y el error de reconstrucción, tal es el caso del uso de aproximaciones numéricas y la reconfiguración de la imagen a un esquema de píxeles polares. En esta subsección se realiza una revisión de los métodos para el cómputo de los momentos radiales, tales como: aproximación de orden cero, ortogonalización de Gram-Schmidt, aproximación por mínimos cuadrados, aproximación numérica y esquema de píxeles polares. Para comparar cada método se utiliza como kernel los polinomios de Zernike para tres datos de prueba:

**Datos 1:** Consiste de un conjunto de momentos de Zernike como los que se muestran en la Tabla 3.1. En la Fig. 3.2 se observa la reconstrucción de la función de prueba con los datos de la Tabla 3.1. La idea consiste en calcular los momentos de Zernike a partir de la función de prueba (Fig. 3.2) y compararlos con la Tabla 3.1.

**Datos 2** Se utiliza la imagen estandar en escala de grises “Cameraman” con un tamaño de  $256 \times 256$ . La imagen de prueba se muestra en la Fig. 3.3(a).

**Datos 3:** Se utiliza la imagen binaria sintética de la letra “E” con un tamaño de  $128 \times 128$ . La imagen de prueba se muestra en la Fig. 3.3(b).

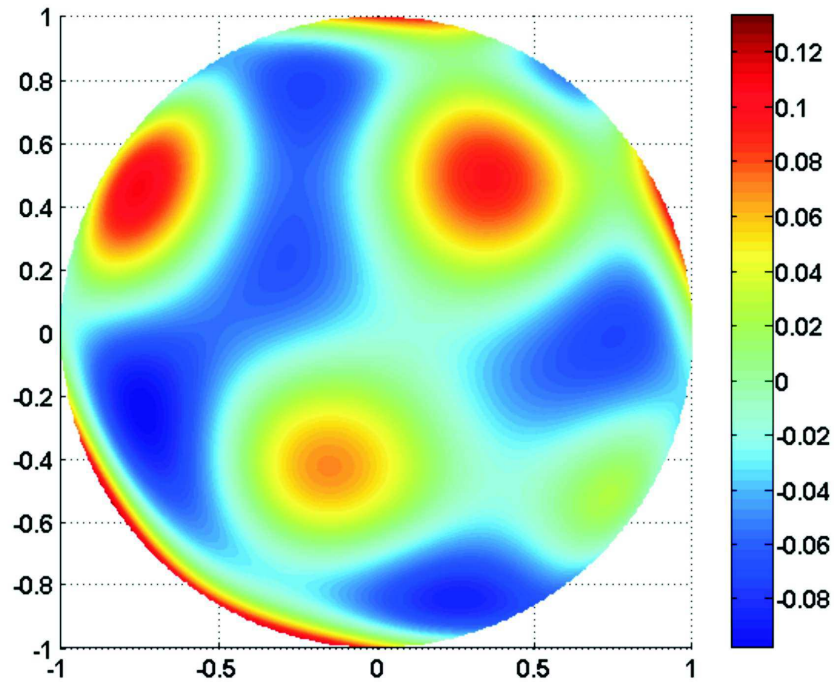
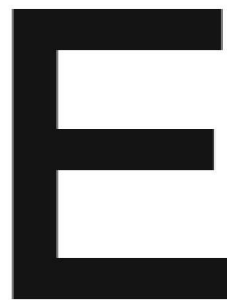


Figura 3.2: Función de prueba.



(a)



(b)

Figura 3.3: Imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises Cameraman. (b) Imagen binaria E.

### 3.1.1. Aproximación de orden cero

En la práctica, los momentos radiales pueden ser calculados a partir de una muestra de datos discretos como es el caso de las imágenes digitales; por lo tanto, la Ec. (2.23) no puede ser aplicada directamente. Sea  $f(r_{i,j}, \theta_{i,j})$  una imagen digital con dimensiones espaciales  $M \times N$ . Los momentos radiales discretizados  $\phi_{n,m}$  están dados por

$$\tilde{\phi}_{n,m} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(r_{i,j}, \theta_{i,j}) \tilde{P}_{nm}(r_{i,j}, \theta_{i,j}) \quad (3.1)$$

donde las coordenadas polares discretas están expresan por

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \sqrt{x_i^2 + y_j^2} \quad r_{i,j} \leq 1, \\ \theta_{i,j} &= \arctan\left(\frac{y_j}{x_i}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

y las coordenadas son transformadas de la siguiente forma

$$x_i = -1 + \frac{2i}{M-1}, \quad y_j = -1 + \frac{2j}{N-1}, \quad (3.3)$$

donde  $i = 0, \dots, M-1$ , y  $j = 0, \dots, N-1$ . Cuando las integrales de Ec. (2.23) se sustituyen por sumatorias y la imagen se normaliza dentro del disco unidad, es conocido como aproximación de orden cero o método directo. A pesar de esto, existen una gran cantidad de momentos ortogonales calculados con la aproximación de orden cero, tales como: los momentos de Zernike [2], momentos Pseudo-Zernike [29], momentos de Pseudo-Jacobi-Fourier [31], momentos de Jacobi-Fourier [30], momentos de Chebyshev-Fourier [32], momentos ortogonales de Fourier-Mellin [33], momentos radiales harmonicos-Fourier [34], momentos de Bessel-Fourier [35] y momentos radiales ponderados desplazados de Legendre-Fourier [36]. La implementación de la aproximación de orden cero con los datos de prueba se muestra a continuación:

$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %	$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %
$Z_0^0$	-7.2885	-7.291	0.03 %	$Z_6^2$	-11.2890	-14.7166	30.36 %
$Z_2^0$	1.2042	1.9735	63.89 %	$Z_6^{-2}$	18.9240	24.8215	31.16 %
$Z_4^0$	5.2112	11.4305	119.35 %	$Z_3^3$	-0.4560	-0.4944	8.41 %
$Z_6^0$	6.6405	17.2544	159.84 %	$Z_3^{-3}$	11.2950	11.2588	0.32 %
$Z_1^1$	0.5856	0.423	27.78 %	$Z_5^3$	10.8380	13.155	21.38 %
$Z_1^{-1}$	8.3501	5.8828	29.55 %	$Z_5^{-3}$	-10.9090	-13.2822	21.75 %
$Z_3^1$	-10.1930	-10.1269	0.65 %	$Z_4^4$	-10.5630	-11.8647	12.32 %
$Z_3^{-1}$	3.2097	3.2043	0.17 %	$Z_4^{-4}$	-15.6910	-17.467	11.32 %
$Z_5^1$	-0.5224	-0.6045	15.72 %	$Z_6^4$	12.4780	16.2871	30.53 %
$Z_5^{-1}$	-12.8200	-15.6191	21.83 %	$Z_6^{-4}$	13.4510	17.7149	31.7 %
$Z_2^2$	-2.2890	-1.9072	16.68 %	$Z_5^5$	0.3959	0.4744	19.82 %
$Z_2^{-2}$	7.2254	6.186	14.39 %	$Z_5^{-5}$	6.8843	8.3476	21.26 %
$Z_4^2$	12.4150	13.9294	12.2 %	$Z_6^6$	-11.7060	-15.177	29.65 %
$Z_4^{-2}$	-8.8662	-9.9426	12.14 %	$Z_6^{-6}$	6.6928	8.7826	31.22 %

Tabla 3.2: Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos con la aproximación de orden cero.

**Datos 1:** Los momentos obtenidos con la aproximación de orden cero se muestran en la Tabla 3.2, también se muestra el error relativo porcentual de la aproximación con los valores reales. El valor del error promedio es de un 24 %. Por otra parte, en la Fig. 3.4 se muestra la reconstrucción con la aproximación de orden cero y los valores reales. A pesar de que los valores obtenidos se acercan a los valores reales, la aproximación de orden cero no es capaz de reconstruir la función original; esto se puede ver a simple vista en la Fig. 3.4.

**Datos 2:** La Fig. 3.5 muestra la reconstrucción de la imagen “Cameraman” a partir de la aproximación de orden cero con distintos ordenes  $L$ . El error de la reconstrucción aumenta cuando el orden  $L$  es incrementado y esto ocasiona que la imagen reconstruida se oscurezca.

**Datos 3:** La Fig. 3.6 muestra la reconstrucción de la imagen binaria “E” a partir de la aproximación de orden cero con distintos ordenes  $L$ . De la misma manera que la imagen “Cameraman”, el error de la reconstrucción aumenta cuando  $L$  se incrementa y ésta se empieza a oscurecer.

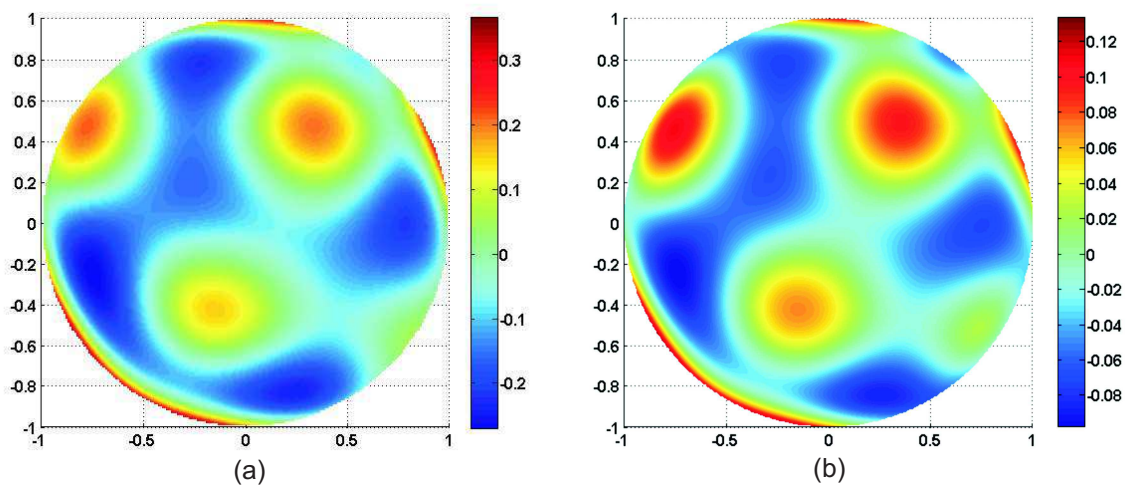


Figura 3.4: Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción con la aproximación de orden cero. (b) Reconstrucción con los valores reales.

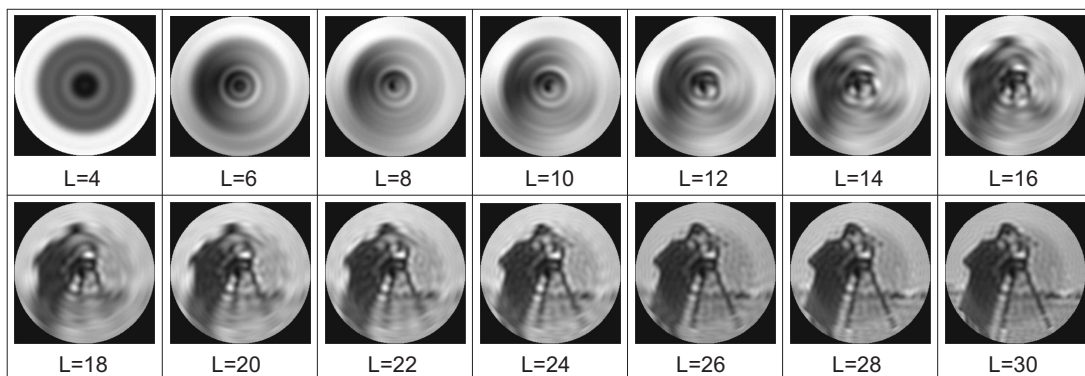


Figura 3.5: Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” con la aproximación de orden cero para distintos ordenes  $L$ .

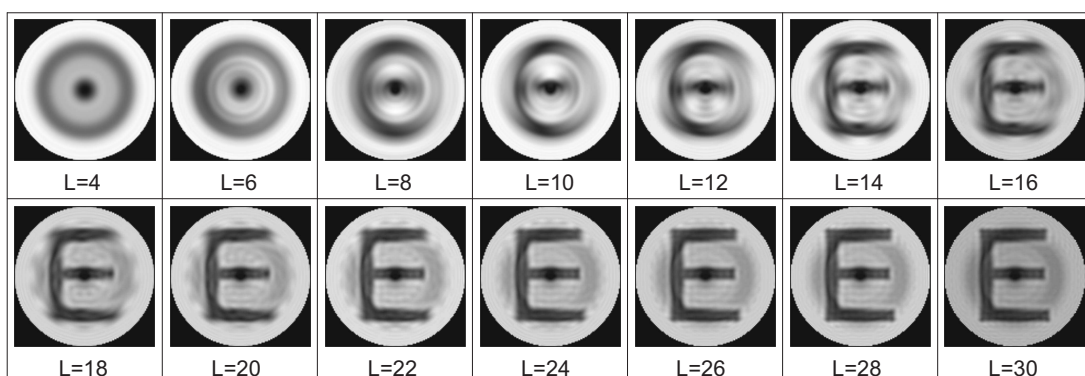


Figura 3.6: Reconstrucción de la imagen binaria “E” con la aproximación de orden cero para distintos ordenes  $L$ .

### 3.1.2. Ortogonalización de Gram-Schmidt

La base ortogonal de la Ec. (2.24) no cumple la condición de ortogonalidad para la aproximación de orden cero de la Ec. (3.1), la cual está basada sobre datos discretos. Los polinomios ortogonalizados  $F_{l,s}$  para datos discretos definidos en un radio unidad pueden ser obtenidos a partir de una familia de polinomios ortogonales  $P_{l,s}$  por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt [12]. Sea

$$G_{1,s} = P_{1,s} = 1 \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots, N \times M, \quad (3.4)$$

$$G_{l+1,s} = \sum_{k=1}^l c_{l+1,k} F_{k,s} + P_{l+1,s}, \quad l = 1, 2, \dots, L-1, \quad (3.5)$$

$$F_{l+1,s} = \frac{G_{l+1,s}}{\|G_{l+1,s}\|} = \frac{G_{l+1,s}}{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G_{l+1,n}^2\right)^{1/2}}, \quad (3.6)$$

donde

$$c_{l+1,k} = -\frac{1}{N \times M} \sum_{s=1}^{N \times M} P_{l+1,s} F_{k,s}. \quad (3.7)$$

Una expresión general para los polinomios  $G$  puede ser escrita en la forma

$$G_{l,s} = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{l-i} c_{l,l-j} U_{l-j,i} P_{i,s} P_{l,s}, \quad (3.8)$$

donde

$$U_{l,i} = \frac{1}{\|G_{l+1,s}\|} \sum_{j=1}^{l-i} c_{l,l-1} U_{l-j,i}. \quad (3.9)$$

Los polinomios  $G_{l,s}$  y  $F_{l,s}$  son una combinación lineal del kernel de los momentos. También, pueden ser escritos en un forma de matriz de acuerdo a

$$F_{l,s} = \sum_{k=1}^l U_{l,k} P_{k,s} \quad \text{con} \quad U_{l,l} = \frac{1}{\|G_{l,s}\|}, \quad (3.10)$$

donde  $F_{l,s}$ , cumple la condición de ortogonalidad



$$\sum_{s=1}^{N \times M} F_{i,s} F_{j,s} = \delta_{i,j}, \quad (3.11)$$

donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker. Por otra parte, los elementos diagonales de la matriz  $U_{l,l}$  son simplemente iguales a la constante de normalización de los polinomios  $G_{l,s}$ , por encima de la diagonal no hay elementos de la matriz. Por lo tanto, esta es una matriz triangular y los elementos que faltan pueden tomar el valor de cero. La matriz  $U_{l,l}$  es también llamada matriz de inversión. Además, sustituyendo la Ec. (3.10) en la Ec. (3.1), obtenemos los momentos radiales ortonormalizados  $\phi_l$ , los cuales están dados por

$$\phi_l = \sum_{s=1}^{N \times M} \left[ f_s \sum_{k=1}^l U_{l,k} P_{l,s} \right]. \quad (3.12)$$

Finalmente, los momentos radiales ortonormalizados en términos  $P_{l,s}$  pueden ser reescritos de la forma

$$\tilde{\phi}_l = \sum_{k=1}^l U_{l,k} \phi_l. \quad (3.13)$$

Dado que los polinomios  $P_{l,s}$  no son ortogonales sobre el espacio donde se encuentra la imagen digital, los momentos radiales  $\tilde{\phi}_l$  no son independientes el uno del otro, y los valores de los momentos radiales cambian cuando  $L_{m\acute{a}x}$  es modificada. Por lo tanto, cuando uno o más momentos radiales son agregados al cálculo, los momentos  $\tilde{\phi}_l$  cambian.

La implementación de la aproximación por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt con los datos de prueba se muestra a continuación:

**Datos 1:** Los momentos obtenidos con la aproximación por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se muestran en la Tabla 3.3, también se muestra el error relativo porcentual de la aproximación con los valores reales. Los valores obtenidos son prácticamente los mismos que los valores reales cuando se comparan solo cuatro valores significativos, el error promedio es de tan solo  $3.2E - 12\%$ . Por otra parte, la Fig. 3.7 muestra la reconstrucción con la aproximación y los valores reales, los cuales son idénticos.

$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %	$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %
$Z_0^0$	-7.2885	-7.2885	$3.7E - 14 \%$	$Z_6^2$	-11.2890	-11.2890	$1.4E - 12 \%$
$Z_2^0$	1.2042	1.2042	$5.6E - 12 \%$	$Z_6^{-2}$	18.9240	18.9240	$2.6E - 12 \%$
$Z_4^0$	5.2112	5.2112	$6.6E - 12 \%$	$Z_3^3$	-0.4560	-0.4560	$2.0E - 12 \%$
$Z_6^0$	6.6405	6.6405	$1.7E - 12 \%$	$Z_3^{-3}$	11.2950	11.2950	$3.1E - 13 \%$
$Z_1^1$	0.5856	0.5856	$3.6E - 11 \%$	$Z_5^3$	10.8380	10.8380	$9.5E - 13 \%$
$Z_1^{-1}$	8.3501	8.3501	$5.2E - 12 \%$	$Z_5^{-3}$	-10.9090	-10.9090	$5.8E - 13 \%$
$Z_3^1$	-10.1930	-10.1930	$8.5E - 13 \%$	$Z_4^4$	-10.5630	-10.5630	$1.5E - 12 \%$
$Z_3^{-1}$	3.2097	3.2097	$3.2E - 12 \%$	$Z_4^{-4}$	-15.6910	-15.6910	$7.9E - 13 \%$
$Z_5^1$	-0.5224	-0.5224	$1.4E - 12 \%$	$Z_6^4$	12.4780	12.4780	$3.5E - 12 \%$
$Z_5^{-1}$	-12.8200	-12.8200	$2.9E - 12 \%$	$Z_6^{-4}$	13.4510	13.4510	$4.6E - 13 \%$
$Z_2^2$	-2.2890	-2.2890	$1.6E - 12 \%$	$Z_5^5$	0.3959	0.3959	$2.9E - 12 \%$
$Z_2^{-2}$	7.2254	7.2254	$1.6E - 12 \%$	$Z_5^{-5}$	6.8843	6.8843	$1.1E - 12 \%$
$Z_4^2$	12.4150	12.4150	$4.0E - 13 \%$	$Z_6^6$	-11.7060	-11.7060	$4.2E - 12 \%$
$Z_4^{-2}$	-8.8662	-8.8662	$4.0E - 14 \%$	$Z_6^{-6}$	6.6928	6.6928	$1.0E - 12 \%$

Tabla 3.3: Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

**Datos 2:** La Fig. 3.8 muestra la reconstrucción de la imagen “Cameraman” a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt con distintos ordenes  $L$  y una  $L_{máx} = 1652$ . Existe un sobre ajuste para los momentos que se acercan a  $L_{máx}$ , lo cual provoca una mejor reconstrucción cuando  $L = 30$  a diferencia de los valores menores a 30.

**Datos 3:** La Fig. 3.9 muestra la reconstrucción de la imagen binaria “E” por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt con distintos ordenes  $L$ . De la misma manera que la imagen “Cameraman”, existe un sobre ajuste para los momentos cercanos a  $L_{máx}$ , mejorando sólo cuando  $L = 30$ .

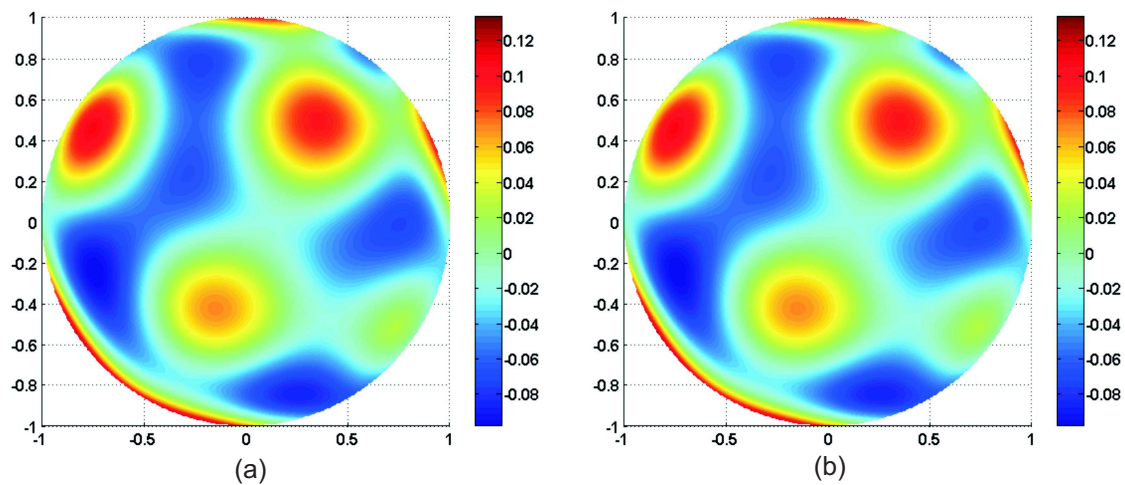


Figura 3.7: Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. (b) Reconstrucción con los valores reales.

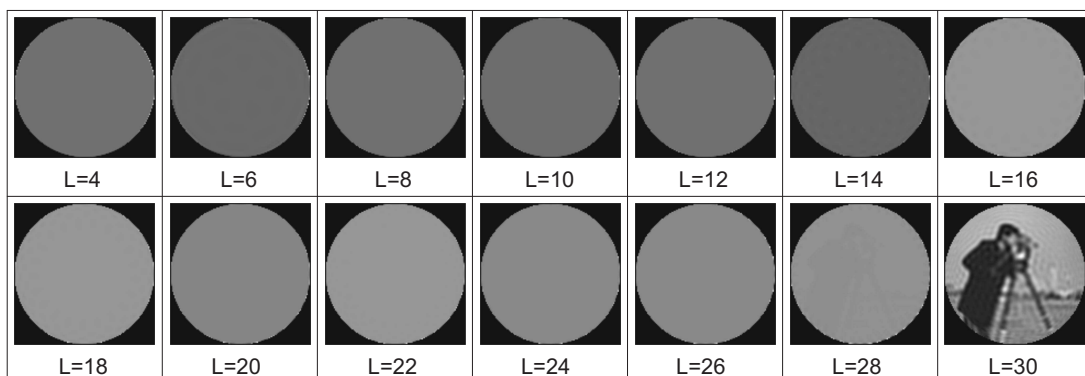


Figura 3.8: Reconstrucción de la imagen en escala de grises "Cameraman" por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para distintos ordenes  $L$ .

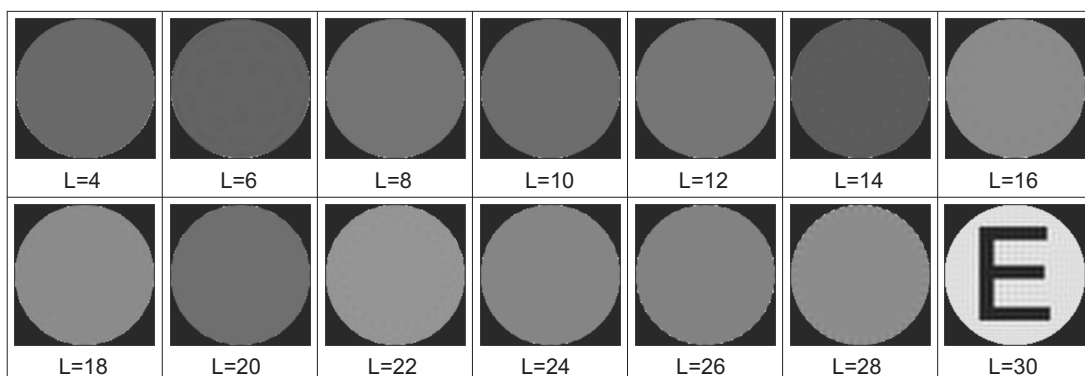


Figura 3.9: Reconstrucción de la imagen binaria "E" por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para distintos ordenes  $L$ .

### 3.1.3. Aproximación por mínimos cuadrados

Podemos considerar el cálculo de los momentos como un método inverso a partir de la reconstrucción de la imagen de la Ec. (2.26), la cual puede ser expresada en su forma matricial de la siguiente manera

$$P_{l,s}\widehat{\phi}_l = f_s, \quad (3.14)$$

donde  $P_{l,s}$  es el kernel ortogonal,  $\widehat{\phi}_l$  son los momentos, y  $f_s$  es la función imagen. En general, esta ecuación representa un sistema sobredeterminado de ecuaciones, en el que hay más ecuaciones que incógnitas. Estos coeficientes de expansión pueden ser elegidos para dar el mejor ajuste a  $f$  con el método de mínimos cuadrados; es decir, se intenta minimizar

$$\Delta = \sum_s \left( f_s - P_{l,s}\widehat{\phi}_l \right)^2. \quad (3.15)$$

La ecuación resultante puede escribirse en la forma

$$P_{l,s}^T P_{l,s} \widehat{\phi}_l = P_{l,s}^T f_s, \quad (3.16)$$

y los coeficientes deseados se pueden obtener por inversión directa

$$\widehat{\phi}_l = \left( P_{l,s}^T P_{l,s} \right)^{-1} P_{l,s}^T f_s. \quad (3.17)$$

El cómputo de los momentos mediante la ortonormalización de Gram-Schmidt puede ser comparado con el método de mínimos cuadrados. Sustituyendo la Ec. (3.10) dentro de la Ec. (3.16) y utilizando las Ecs. (3.11) y (3.12), uno puede convertir la relación de la Ec. (3.16) a

$$\widehat{\phi}_l = \sum_{k=1}^l U_{l,k} \phi_k. \quad (3.18)$$

La ecuación anterior es la misma que la Ec. (3.13) para el cálculo de los momentos con la ortonormalización de Gram-Schmidt. Por otra parte, J. Y. Wang y D.E. Silva [11] mencionan que los resultados numéricos a partir del método de la ortogonalización de Gram-Schmidt son prácticamente idénticos que los obtenidos por el método de mínimos cuadrados.

$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %	$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %
$Z_0^0$	-7.2885	-7.2885	$1.3E - 12 \%$	$Z_6^2$	-11.2890	-11.2890	$8.0E - 13 \%$
$Z_2^0$	1.2042	1.2042	$1.2E - 12 \%$	$Z_6^{-2}$	18.9240	18.9240	$1.9E - 12 \%$
$Z_4^0$	5.2112	5.2112	$6.0E - 12 \%$	$Z_3^3$	-0.4560	-0.4560	$9.7E - 12 \%$
$Z_6^0$	6.6405	6.6405	$3.2E - 12 \%$	$Z_3^{-3}$	11.2950	11.2950	$1.8E - 12 \%$
$Z_1^1$	0.5856	0.5856	$7.4E - 13 \%$	$Z_5^3$	10.8380	10.8380	$3.6E - 13 \%$
$Z_1^{-1}$	8.3501	8.3501	$1.7E - 12 \%$	$Z_5^{-3}$	-10.9090	-10.9090	$7.9E - 13 \%$
$Z_3^1$	-10.1930	-10.1930	$2.4E - 13 \%$	$Z_4^4$	-10.5630	-10.5630	$1.2E - 12 \%$
$Z_3^{-1}$	3.2097	3.2097	$2.9E - 12 \%$	$Z_4^{-4}$	-15.6910	-15.6910	$1.4E - 12 \%$
$Z_5^1$	-0.5224	-0.5224	$1.1E - 12 \%$	$Z_6^4$	12.4780	12.4780	$7.1E - 13 \%$
$Z_5^{-1}$	-12.8200	-12.8200	$1.7E - 12 \%$	$Z_6^{-4}$	13.4510	13.4510	$1.1E - 13 \%$
$Z_2^2$	-2.2890	-2.2890	$4.0E - 13 \%$	$Z_5^5$	0.3959	0.3959	$2.3E - 12 \%$
$Z_2^{-2}$	7.2254	7.2254	$4.0E - 13 \%$	$Z_5^{-5}$	6.8843	6.8843	$2.5E - 12 \%$
$Z_4^2$	12.4150	12.4150	$5.6E - 13 \%$	$Z_6^6$	-11.7060	-11.7060	$5.2E - 13 \%$
$Z_4^{-2}$	-8.8662	-8.8662	$1.8E - 13 \%$	$Z_6^{-6}$	6.6928	6.6928	$9.3E - 14 \%$

Tabla 3.4: Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por la aproximación por Mínimos Cuadrados

La implementación de la aproximación por mínimos cuadrados con los datos de prueba se muestra a continuación:

**Datos 1:** Los momentos obtenidos con la aproximación por mínimos cuadrados se muestran en la Tabla 3.4, también se muestra el error relativo porcentual de la aproximación con los valores reales. De la misma manera que la aproximación por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, los valores obtenidos son prácticamente los mismos que los valores reales cuando se muestran sólo cuatro valores significativos, el error promedio es de tan solo de  $2.1E - 12 \%$ . Por otra parte, en la Fig. 3.10 se muestra la reconstrucción con la aproximación y los valores reales, los cuales son idénticos.

**Datos 2:** La Fig. 3.11 muestra la reconstrucción de la imagen “Cameraman” a partir de la aproximación por mínimos cuadrados con distintos ordenes  $L$ . y una  $L_{m\acute{a}x} = 1652$ . De la misma forma que en la aproximación por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, existe un sobre ajuste para los momentos cercanos a  $L_{m\acute{a}x}$ , lo cual provoca una mejor reconstrucción cuando  $L = 30$  a diferencia de los valores menores a 30.

**Datos 3:** La Fig. 3.12 muestra la reconstrucción de la imagen binaria “E” por la aproximación por mínimos cuadrados con distintos ordenes  $L$ . De la misma manera que la imagen

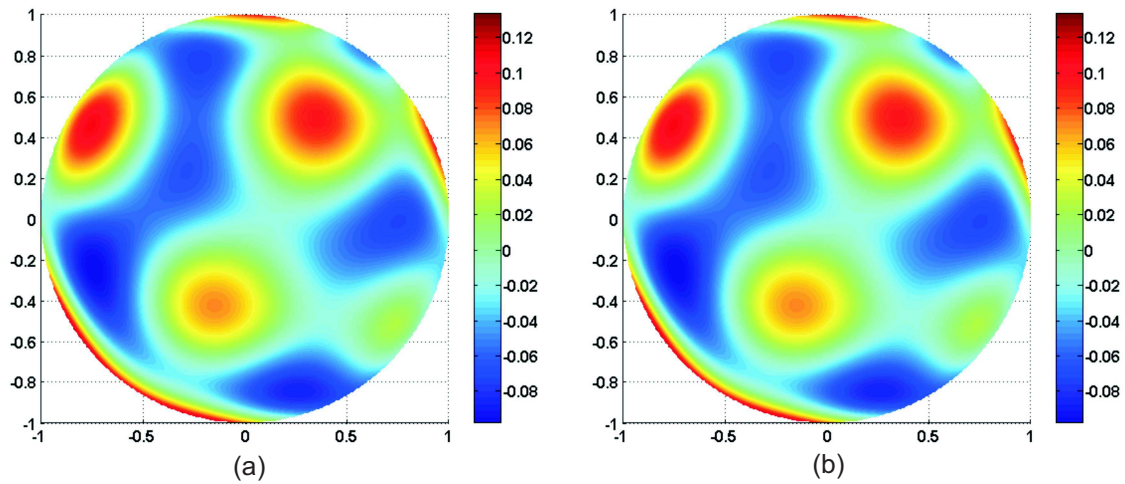


Figura 3.10: Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir de la aproximación por el método de mínimos cuadrados. (b) Reconstrucción con los valores reales.

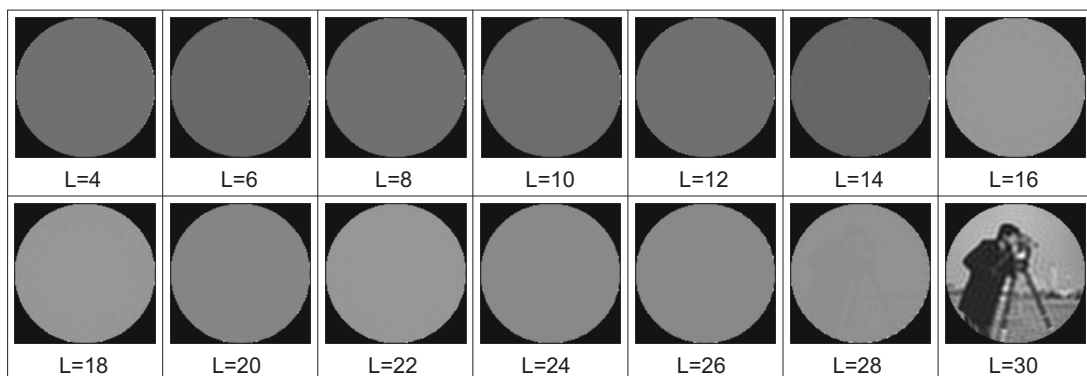


Figura 3.11: Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” por la aproximación con mínimos cuadrados para distintos ordenes  $L$ .

“Cameraman”, existe un sobre ajuste para los momentos cercanos a  $L_{m\acute{a}x}$  mejorando solo cuando  $L = 30$ .

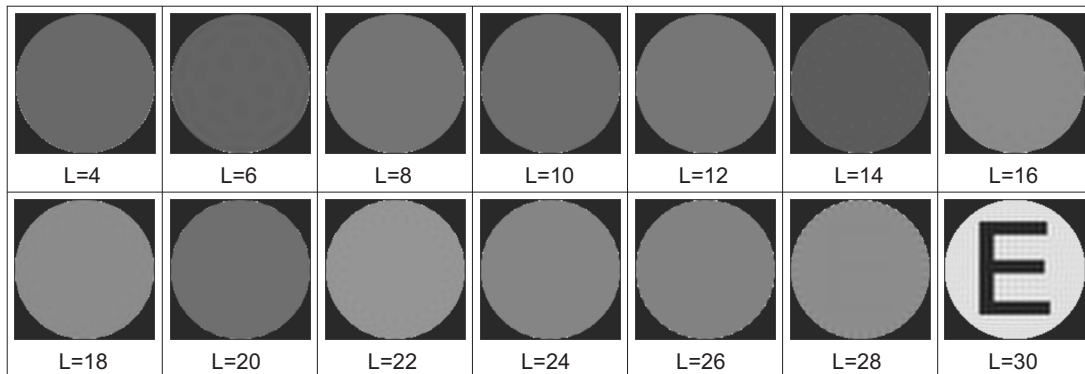


Figura 3.12: Reconstrucción de la imagen binaria “E” por la aproximación con mínimos cuadrados para distintos ordenes  $L$ .

### 3.1.4. Aproximación numérica

Liao y Pawlak [4] proporcionan un extensivo análisis de errores geométricos y de integración. Además, sugieren un método de integración numérica del kernel utilizando diferentes órdenes de la reglas de Simpson. Posteriormente, Singh C. et al [9],[10] proponen la integración numérica por el método de cuadratura Gaussiana mejorando en gran medida la exactitud del cálculo de los momentos radiales. Para el cálculo de los momentos radiales es necesario modificar la Ec. 2.23 de la siguiente manera,

$$\bar{\phi}_{n,m} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(r_{i,j}, \theta_{i,j}) \int_{r_{i,j}-\frac{\Delta r_{i,j}}{2}}^{r_{i,j}+\frac{\Delta r_{i,j}}{2}} \int_{\theta_{i,j}-\frac{\Delta \theta_{i,j}}{2}}^{\theta_{i,j}+\frac{\Delta \theta_{i,j}}{2}} A_n(r) \exp(jm\theta) dr d\theta \quad (3.19)$$

A partir de esta última ecuación podemos implementar la aproximación discreta usando la cuadratura Gaussiana de dimensión  $t \times t$ , la cual está dada por

$$\bar{\phi}_{n,m} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ f(r_{i,j}, \theta_{i,j}) \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t w_p w_q A_n \left( \frac{\Delta r_{i,j}}{2} k_p + r_{i,j} \right) \times \exp \left( jm \left( \frac{\Delta \theta_{i,j}}{2} k_q + \theta_{i,j} \right) \right) \right]. \quad (3.20)$$

Algunos de los valores de  $w_t$  y  $k_t$  se dan en la Tabla 3.5 para  $t \leq 6$ . Se puede observar a partir de la Ec. (3.20) para  $t \times t$  puntos para la cuadratura Gaussiana, se requiere que los polinomios radiales y la exponencial compleja sean evaluados en  $N$  lugares en la cuadrícula, por lo que la precisión de los momentos mediante la aproximación numérica se logran a partir de un alto costo de computación.

La implementación del método por aproximación numérica con los datos de prueba se muestra a continuación:

**Datos 1:** Los momentos obtenidos se pueden observar en la Tabla 3.6, también se muestra el error relativo porcentual de la aproximación con los valores reales. El valor del error promedio es de 6 % con una desviación estándar 21.1. Por otra parte, en la Fig. 3.13 observamos la reconstrucción con la aproximación y los valores reales.



$t$	$w_t$	$k_t$
1	2.0	0.0
2	1.0	$\pm 0.5773502692$
3	0.5555555556	$\pm 0.7745966692$
	0.8888888889	0.0
4	0.3478548451	$\pm 0.8611363116$
	0.6521451549	$\pm 0.3399810436$
5	0.2369268851	$\pm 0.9061798459$
	0.4786286705	$\pm 0.5384693101$
	0.5688888889	0.0
6	0.1713244924	$\pm 0.9324695142$
	0.3607615730	$\pm 0.6612093865$
	0.4679139346	$\pm 0.2386191861$

Tabla 3.5: Pesos y ubicación para  $t \times t$  puntos de la cuadratura Gaussiana.

**Datos 2:** La reconstrucción de la imagen “Cameraman” a partir de la aproximación numérica con distintos ordenes  $L$ , es visualizada en la Fig. 3.14.

**Datos 3:** La reconstrucción de la imagen binaria “E” por el método de aproximación numérica con distintos ordenes  $L$ , es desplegada en la Tabla de la Fig. 3.15.

$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %	$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %
$Z_0^0$	-7.2885	-7.3481	0.82 %	$Z_6^2$	-11.2890	-11.4465	1.39 %
$Z_2^0$	1.2042	1.1882	1.32 %	$Z_6^{-2}$	18.9240	18.5636	1.90 %
$Z_4^0$	5.2112	5.1422	1.32 %	$Z_3^3$	-0.4560	-0.5703	25.09 %
$Z_6^0$	6.6405	6.3057	5.04 %	$Z_3^{-3}$	11.2950	11.2823	0.11 %
$Z_1^1$	0.5856	0.6611	12.91 %	$Z_5^3$	10.8380	10.5829	2.35 %
$Z_1^{-1}$	8.3501	8.3823	0.38 %	$Z_5^{-3}$	-10.9090	-11.0705	1.48 %
$Z_3^1$	-10.1930	-10.0526	1.38 %	$Z_4^4$	-10.5630	-10.5056	0.54 %
$Z_3^{-1}$	3.2097	3.1174	2.87 %	$Z_4^{-4}$	-15.6910	-15.5558	0.86 %
$Z_5^1$	-0.5224	-0.0965	81.52 %	$Z_6^4$	12.4780	12.6378	1.28 %
$Z_5^{-1}$	-12.8200	-12.8830	0.49 %	$Z_6^{-4}$	13.4510	13.8297	2.81 %
$Z_2^2$	-2.2890	-2.2401	2.13 %	$Z_5^5$	0.3959	0.3277	17.20 %
$Z_2^{-2}$	7.2254	7.0659	2.20 %	$Z_5^{-5}$	6.8843	6.7023	2.64 %
$Z_4^2$	12.4150	12.1384	013 %	$Z_6^6$	-11.7060	-11.3157	3.33 %
$Z_4^{-2}$	-8.8662	-9.8662	3.07 %	$Z_6^{-6}$	6.6928	6.6236	1.03 %

Tabla 3.6: Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por la aproximación numérica

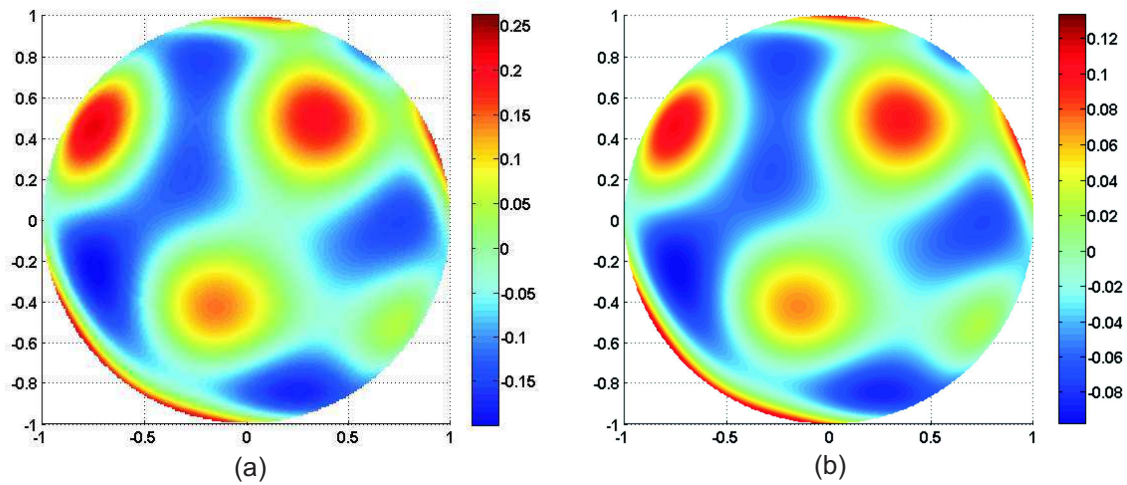


Figura 3.13: Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir de la aproximación por aproximación numérica. (b) Reconstrucción con los valores reales.

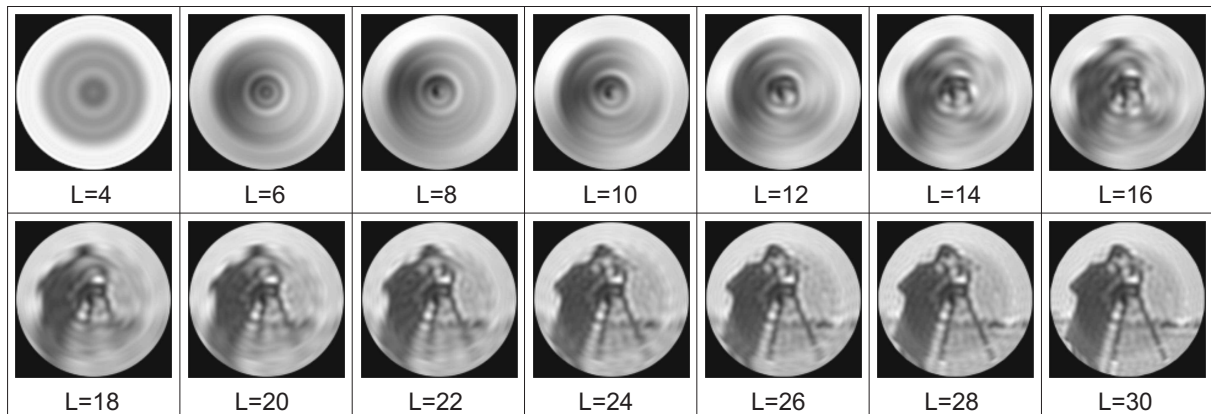


Figura 3.14: Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Cameraman” por la aproximación numérica para distintos ordenes  $L$ .

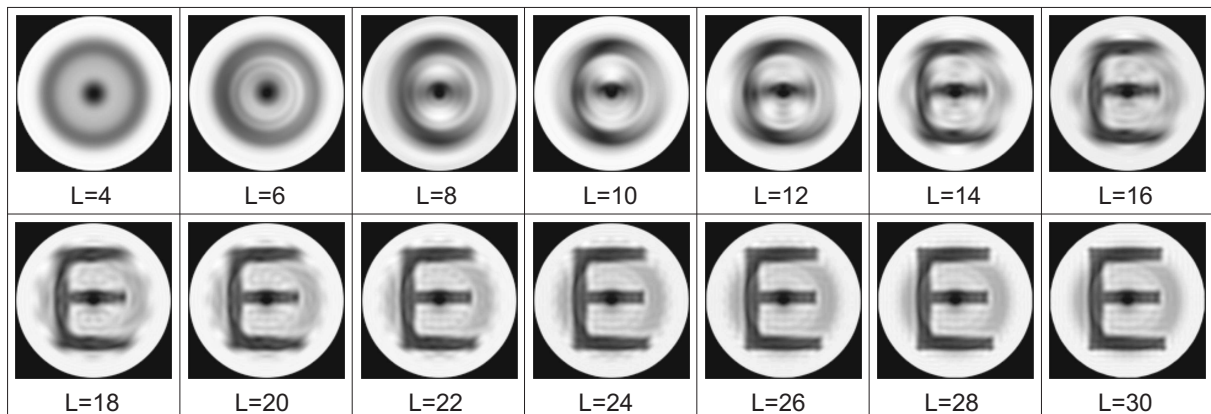


Figura 3.15: Reconstrucción de la imagen binaria “E” por la aproximación numérica para distintos ordenes  $L$ .

### 3.1.5. Esquema de píxeles polares

Xin Y. et al [6] , proponen un algoritmo para el cálculo de alta precisión numérica de los momentos radiales. El algoritmo, está basado en un esquema de píxeles polares, los cuales no exhiben el error geométrico y de integración numérica que son inherentes en los métodos convencionales basados en coordenadas cartesianas. La causa de error, en el cálculo de los momentos radiales a través de la Ec. 2.26 se encuentra en el uso de coordenadas cartesianas, donde es justificado por el hecho de que las imágenes digitales son representadas por píxeles cuadrados. Sin embargo, esta práctica no tiene en cuenta la naturaleza circular de los momentos radiales. En esta sección se presenta un algoritmo para el cálculo de los momentos radiales en coordenadas polares, en el que ni el error geométrico, ni el error de integración numérica están presentes.

Es intuitivo que el error geométrico puede ser evitado mediante el uso de píxeles no cuadrados, cuyas áreas se suman a la del disco unidad. Además, podemos utilizar un método analítico en vez de aproximaciones numéricas para la integración. Con este fin, volvemos a escribir la definición de momentos radiales de la Ec. (2.23) en su forma equivalente, basada en el esquema de píxeles polares

$$\hat{\phi}_{nm} = \sum_u \sum_v \hat{f}(r_u, \theta_{uv}) \omega_{nm}(r_u, \theta_{uv}), \quad (3.21)$$

donde  $\hat{f}(r_u, \theta_{uv})$  es una aproximación de la función  $f(r_{i,j}, \theta_{i,j})$  definida sobre los sectores concéntricos  $\Omega_{uv}$  y el factor  $\omega_{nm}(r_u, \theta_{uv})$  el que está dado por

$$\begin{aligned} \omega_{nm}(r_u, \theta_{uv}) &= \int \int_{\Omega_{uv}} A_n(r) \exp(jm\theta) dr d\theta \\ &= \int_{r_u^{(s)}}^{r_u^{(e)}} A_n(r) dr \int_{\theta_{uv}^{(s)}}^{\theta_{uv}^{(e)}} \exp(jm\theta) d\theta \\ &= I_1 \times I_2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde  $(r_u^{(s)}, \theta_{uv}^{(e)})$ ,  $(r_u^{(s)}, \theta_{uv}^{(s)})$ ,  $(r_u^{(e)}, \theta_{uv}^{(e)})$  y  $(r_u^{(e)}, \theta_{uv}^{(s)})$  denotan los puntos iniciales y finales del sector  $\Omega_{uv}$ , donde  $(r_u, \theta_{uv})$  representan el radio y el ángulo de cada sector  $\Omega_{uv}$ . En la Fig. 3.16 se introducen las variables. El cálculo de la integral para los polinomios ortogonales radiales,

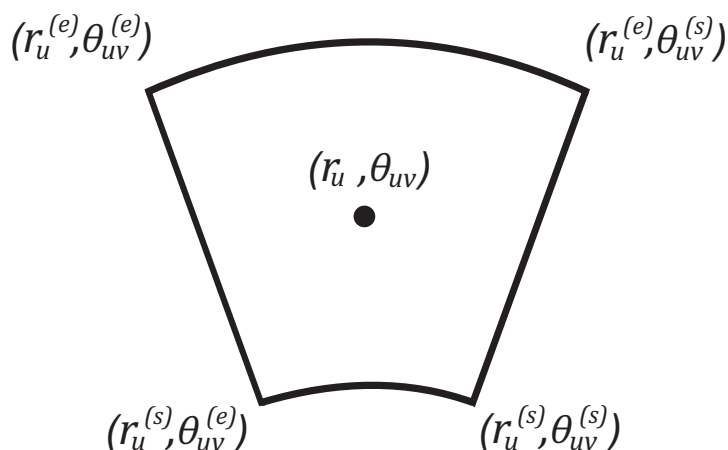


Figura 3.16: Sector concéntrico  $\Omega_{uv}$ , el cual representa un píxel polar para  $(r_u, \theta_{uv})$ , donde  $r_u = (r_u^{(s)} + r_u^{(e)})/2$  y  $\theta_{uv} = (\theta_{uv}^{(s)} + \theta_{uv}^{(e)})/2$ .

puede ser calculada analíticamente como

$$I_1 = \sum_{i=0}^n \left[ a_{n,i} \frac{\left[ \left( r_u^{(e)} \right)^{n+1} - \left( r_u^{(s)} \right)^{n+1} \right]}{n+1} \right], \quad (3.23)$$

donde  $a_{n,i}$  son los coeficientes de  $A_n(r)$  y la integral de la exponencial compleja está dada por

$$I_2 = \begin{cases} \frac{j}{m} \left[ \exp(-jm\theta_{uv}^{(e)}) - \exp(-jm\theta_{uv}^{(s)}) \right], & m \neq 0 \\ \theta_{uv}^{(e)} - \theta_{uv}^{(s)}, & m = 0 \end{cases}. \quad (3.24)$$

Como ya se ha señalado, con el fin de eliminar el error de geometría y errores de integración podemos representar  $\hat{f}(r_u, \theta_{uv})$  en sectores  $\Omega_{uv}$ , tomando en cuenta los siguientes criterios para obtener un esquema de particiones adecuada.

- Todas las áreas del sector deben ser iguales, lo que corresponde al hecho de que una imagen cartesiana tiene un tamaño de píxel uniforme.
- El tamaño de los píxeles polares no debe ser mayor que el de los píxeles cartesianos, de modo que la resolución de imagen debe ser mantenida.
- Los píxeles polares deben ser lo más cuadrados que sea posible, es decir, la longitud de los bordes de un sector deben estar lo suficientemente cerca para que la distorsión de la imagen debido a la conversión de coordenadas pueda mantenerse a un nivel bajo.

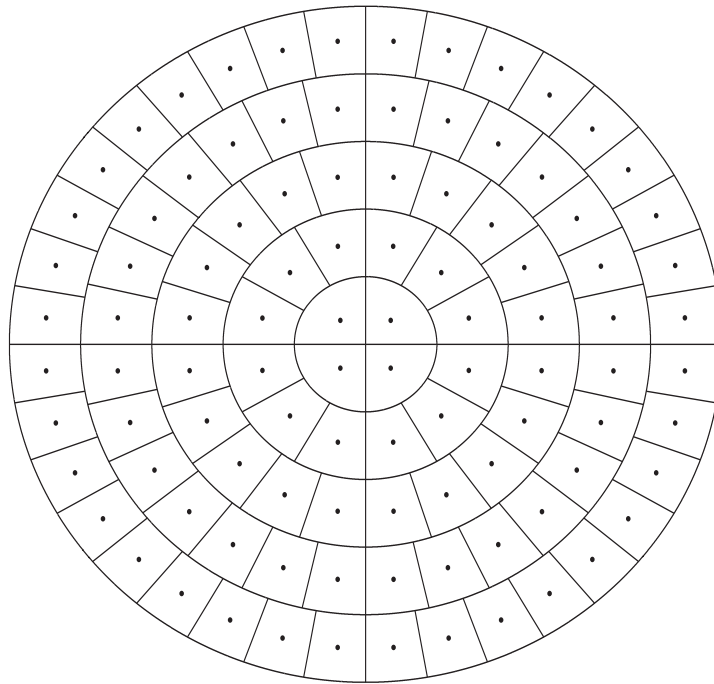


Figura 3.17: Configuración de píxeles polares.

- El arreglo de píxeles polares debe ser tan regular como sea posible, para facilitar su almacenamiento y cálculo.

Siguiendo esta guía, se propone un esquema de píxeles polares como se ilustra en la Fig. 3.17.

- El radio unidad se divide uniformemente en  $U$  secciones a lo largo de la dirección radial, con separaciones circulares localizadas en  $\{(k/U), k = 1, \dots, U\}$ .
- La sección formada por el anillo de orden  $k$  es dividido en  $(2k - 1)V$  sectores por radios que comienzan desde el origen, con ángulos

$$(i - 1) (2\pi) / ((2k - 1) V), \quad i = 1, \dots, (2k - 1) V,$$

donde  $V$  es el número de sectores que están en la sección más interna.

El disco unidad está dividido en  $VU^2$ , cada una tiene una superficie de  $(\pi/VU^2)$ . Los valores de  $U$  y  $V$  deben de configurarse correctamente. Un valor pequeño de  $VU^2$  es ventajoso en términos del cálculo y aplicación, pero puede representar desigualdad de la información.

Además, un valor grande de  $VU^2$  es benéfico para la representación de la imagen, pero implica una pesada carga de trabajo. Xin Y. et al. [6] recomienda un valor de  $V = 4$  y  $(N/2) \leq U \leq N$  para una imagen de  $N \times N$ .

Por otra parte, la imagen digital está definida por un conjunto de píxeles cuadrados, por lo que se puede verificar fácilmente que las ubicaciones de los píxeles cartesianas no coinciden con los píxeles polares, como se muestra en la Fig. 3.18. Por lo tanto, tenemos que derivar una contraparte polar de una imagen cartesiana antes de calcular los momentos radiales. Este problema se puede resolver mediante la interpolación bicúbica de tercer orden, introducido por Keys [60]. La interpolación bicúbica es una nueva técnica para el remuestreo de datos discretos, donde su núcleo de interpolación está dada por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x|^3 - \frac{5}{2}|x|^2 + 1 & 0 < |x| < 1 \\ -\frac{1}{2}|x|^3 + \frac{5}{2}|x|^2 - 4|x| + 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & 2 < |x| \end{cases} . \quad (3.25)$$

El valor de la imagen para  $\Omega_{uv}$  puede ser estimado a través de la función de interpolación bicúbica bidimensional, esta función está expresada por

$$\hat{f}(r_{uv}, \theta_{uv}) = \sum_{i=k-1}^{k+2} \sum_{j=l-1}^{l+2} f(i, j) u(k-i) u(l-j), \quad (3.26)$$

donde  $u$  es el kernel de interpolación de la Ec.(3.25) donde  $k = \frac{N}{2}r_{uv} \cos \theta_{uv} + \frac{N}{2} + 1$ , y  $l = \frac{N}{2}r_{uv} \sin \theta_{uv} + \frac{N}{2} + 1$ . En la Fig. 3.18 se muestra la imagen de *Lena* de  $64 \times 64$  píxeles y su representación en píxeles polares con parámetros  $V = 4$  y  $U = 32$ . Los valores de los píxeles polares se obtuvieron mediante la interpolación bicúbica de la Ec. (3.26).

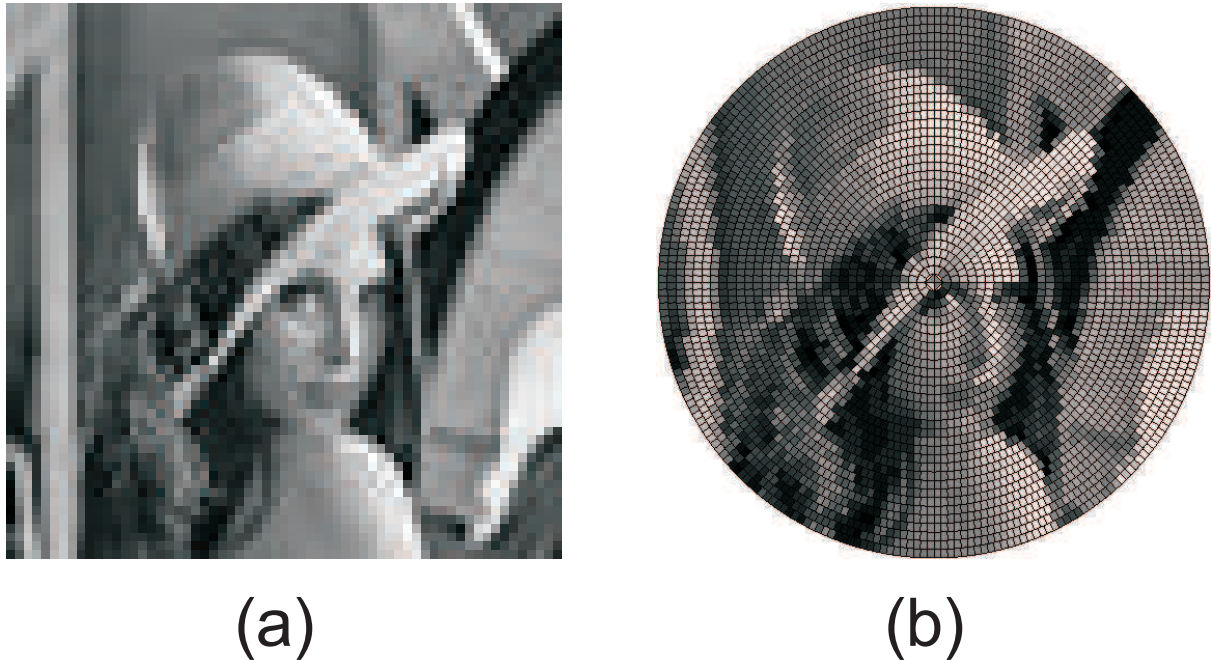


Figura 3.18: Imagen de Lena: (a) píxeles cuadrados, (b) píxeles polares.

La implementación de la aproximación por el esquema de píxeles polares con los datos de prueba se observa a continuación:

**Datos 1:** Los momentos obtenidos con el esquema de píxeles polares se muestran en la Tabla 3.7, también se puede ver el error relativo porcentual de la aproximación con los valores reales. El valor del error promedio es de 5% con una desviación estándar de 2.1. Por otra parte, en la Fig. 3.19 se observa la reconstrucción con la aproximación y los valores reales.

**Datos 2:** La reconstrucción de la imagen “Cameraman” a partir del esquema de píxeles polares con distintos ordenes  $L$ , se muestra en la Fig. 3.20.

**Datos 3:** En la Fig. 3.21 se puede ver la reconstrucción de la imagen binaria “E” con el esquema de píxeles polares con distintos ordenes  $L$ .

$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %	$Z_n^m$	Real	Obtenido	Error %
$Z_0^0$	-7.2885	-7.2006	1.20 %	$Z_6^2$	-11.2890	-11.2889	0.01 %
$Z_2^0$	1.2042	1.2560	4.30 %	$Z_6^{-2}$	18.9240	18.3679	2.93 %
$Z_4^0$	5.2112	5.2970	1.64 %	$Z_3^3$	-0.4560	-0.4919	7.87 %
$Z_6^0$	6.6405	6.4543	2.80 %	$Z_3^{-3}$	11.2950	11.0651	2.03 %
$Z_1^1$	0.5856	0.6134	4.75 %	$Z_5^3$	10.8380	10.4603	3.48 %
$Z_1^{-1}$	8.3501	8.1575	2.30 %	$Z_5^{-3}$	-10.9090	-10.4069	4.60 %
$Z_3^1$	-10.1930	-9.9149	2.72 %	$Z_4^4$	-10.5630	-10.4285	1.27 %
$Z_3^{-1}$	3.2097	2.9538	7.97 %	$Z_4^{-4}$	-15.6910	-15.4615	1.46 %
$Z_5^1$	-0.5224	-0.5466	4.63 %	$Z_6^4$	12.4780	12.4092	0.55 %
$Z_5^{-1}$	-12.8200	-12.7556	0.50 %	$Z_6^{-4}$	13.4510	13.5448	2.81 %
$Z_2^2$	-2.2890	-2.33	1.92 %	$Z_5^5$	0.3959	0.6608	6.91 %
$Z_2^{-2}$	7.2254	7.048	2.44 %	$Z_5^{-5}$	6.8843	6.6933	2.77 %
$Z_4^2$	12.4150	12.2563	1.27 %	$Z_6^6$	-11.7060	-11.5356	1.45 %
$Z_4^{-2}$	-8.8662	-9.0687	2.28 %	$Z_6^{-6}$	6.6928	6.4366	3.82 %

Tabla 3.7: Error porcentual entre los momentos base y los momentos obtenidos por el esquema de píxeles polares

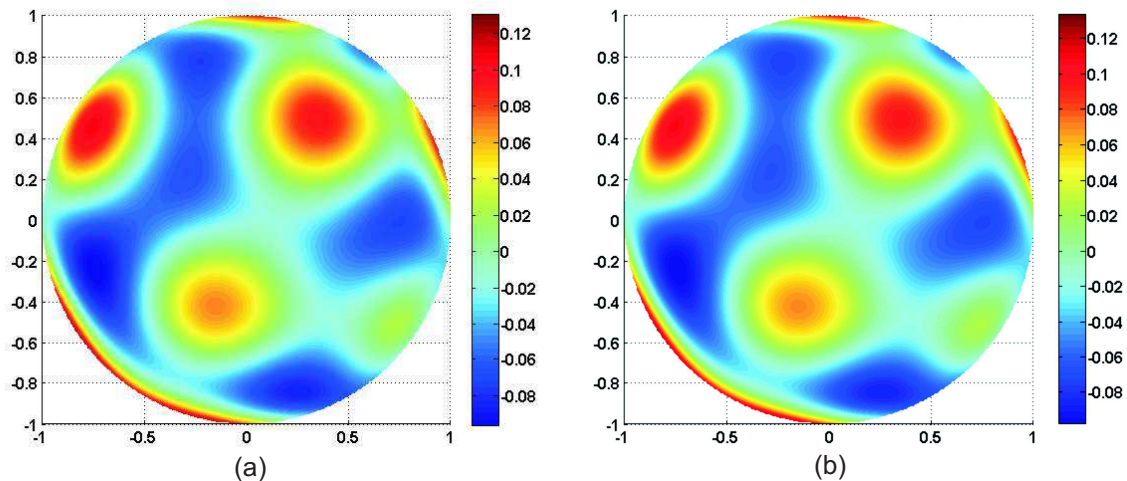


Figura 3.19: Reconstrucción de la función de prueba: (a) Reconstrucción a partir del esquema de píxeles polares. (b) Reconstrucción con los valores reales.



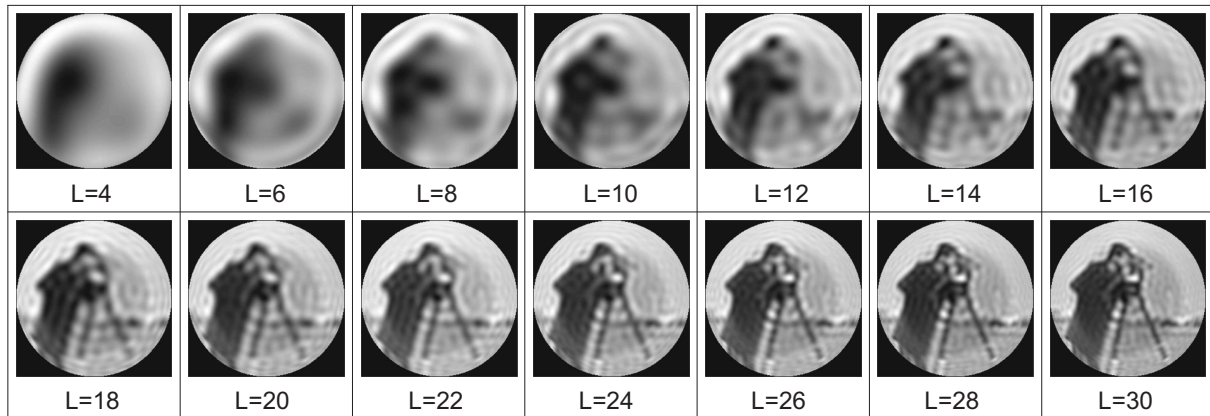


Figura 3.20: Reconstrucción de la imagen en escala de grises "Cameraman" con el esquema de píxeles polares para distintos ordenes  $L$ .

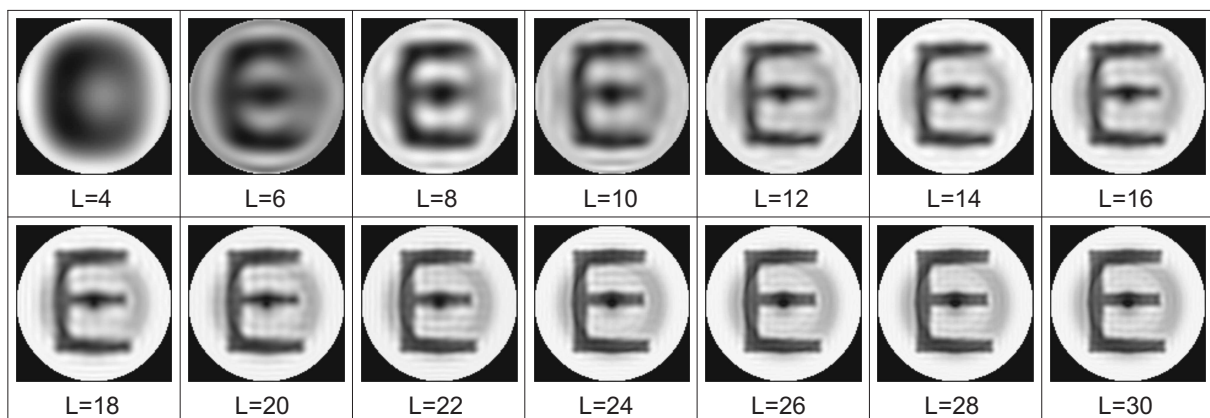


Figura 3.21: Reconstrucción de la imagen binaria "E" con el esquema de píxeles polares para distintos ordenes  $L$ .

## 3.2. Análisis comparativo

La reconstrucción de imágenes ayuda a determinar que tan bien una imagen puede ser caracterizada por un conjunto finito de momentos ortogonales. En las Figs. 3.22 y 3.23 se muestra la reconstrucción de las imágenes de prueba de la Fig. 3.3 con distintos métodos de cómputo. A partir de los resultados, se realiza una comparación cualitativa de la reconstrucción de imágenes de los distintos métodos, la cual es presentada a continuación:

**Aproximación de orden cero:** al aumentar los órdenes de reconstrucción, la imagen se obscurece perdiendo el contraste. Además, no se llega a reconstruir el contorno del radio unidad debido a la aproximación de orden cero.

**Aproximación numérica:** para ordenes bajos la reconstrucción tiene una simetría radial muy marcada, la cual no permite visualizar la información de la imagen a diferencia de los ordenes altos. A diferencia de la aproximación de orden cero, la integración numérica de cada pixel permite una mejor reconstrucción en el contorno del radio unidad.

**Esquema de pixeles polares:** a diferencia de los dos métodos anteriores, para ordenes bajos se puede recuperar la forma de la imagen de prueba e incrementar el detalle de la imagen cuando aumentan el número de momentos utilizados en la reconstrucción sin perder el contraste.

**Ortonormalizacion de Gram-Schmidt :** genera un sobre ajuste para los momentos cercanos a  $L_{máx}$ , esto ocasiona una mala reconstrucción para ordenes bajos. Por otra parte, para ordenes muy altos ya no es capaz de reconstruir la imagen en su totalidad.

**Aproximación por mínimos cuadrados:** de la misma manera que la ortonormalización de Gram-Schmidt genera un sobre ajuste para los ordenes cercanos a  $L_{máx}$ . Sin embargo, es capaz de reconstruir la imagen para ordenes altos.

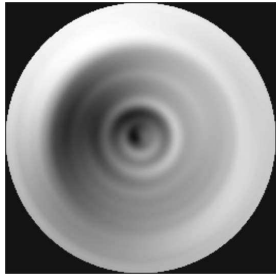
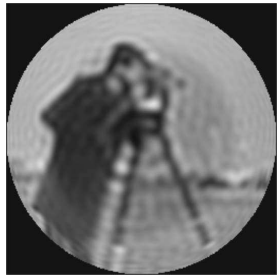

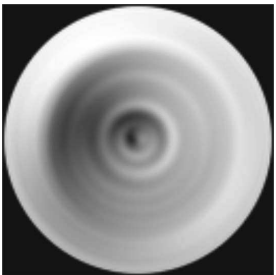
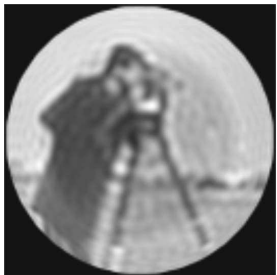

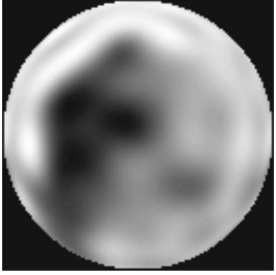
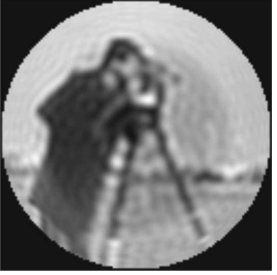



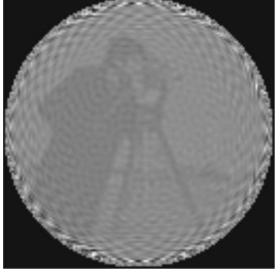

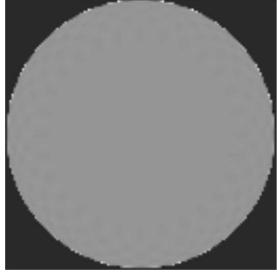

	L=8	L=30	L=60
Aproximación de orden cero			
Aproximación numérica			
Esquema de pixeles polares			
Ortonormalización de Gram-Schmidt			
Aproximación por mínimos cuadrados			

Figura 3.22: Reconstrucción de la imagen en escala de grises “Camerman” para  $L=8$ ,  $L=30$ , y  $L=60$  con distintos métodos de cómputo de los momentos radiales.

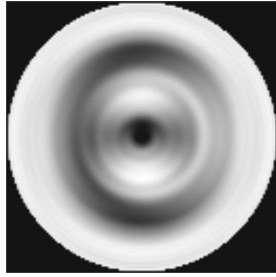
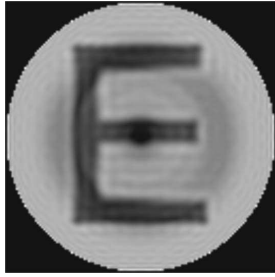
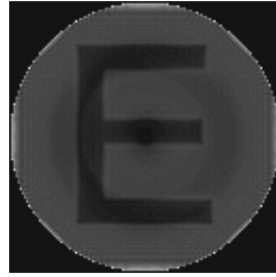
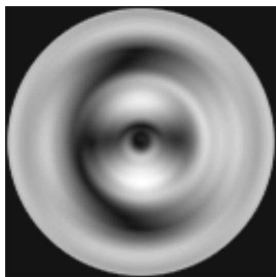
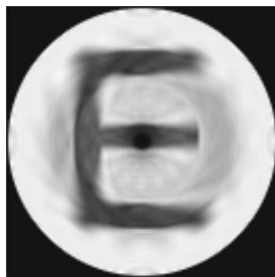
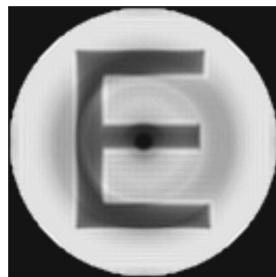
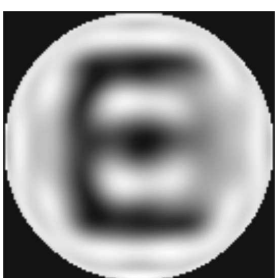
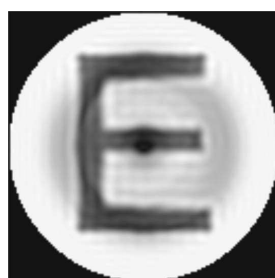
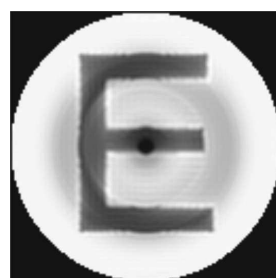
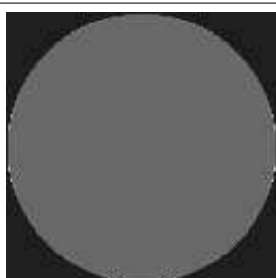
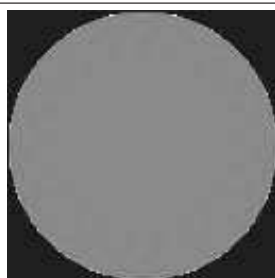
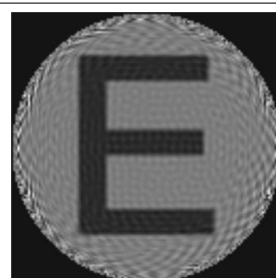
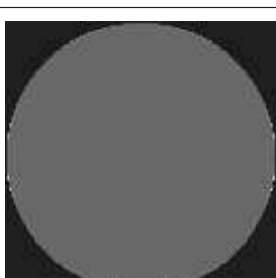
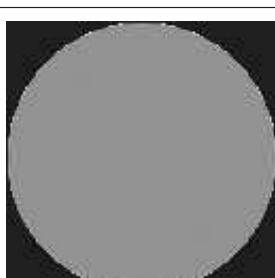
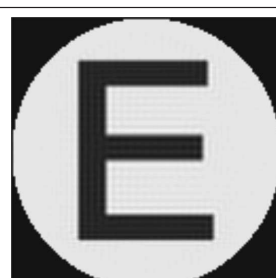
	L=8	L=30	L=60
Aproximación de orden cero			
Aproximación numérica			
Esquema de pixeles polares			
Ortonormalización de Gram-Schmidt			
Aproximación por mínimos cuadrados			

Figura 3.23: Reconstrucción de la imagen binaria “E” para  $L=8$ ,  $L=30$ , y  $L=60$  con distintos métodos de cómputo de los momentos radiales.

### 3.2.1. Error de reconstrucción normalizado

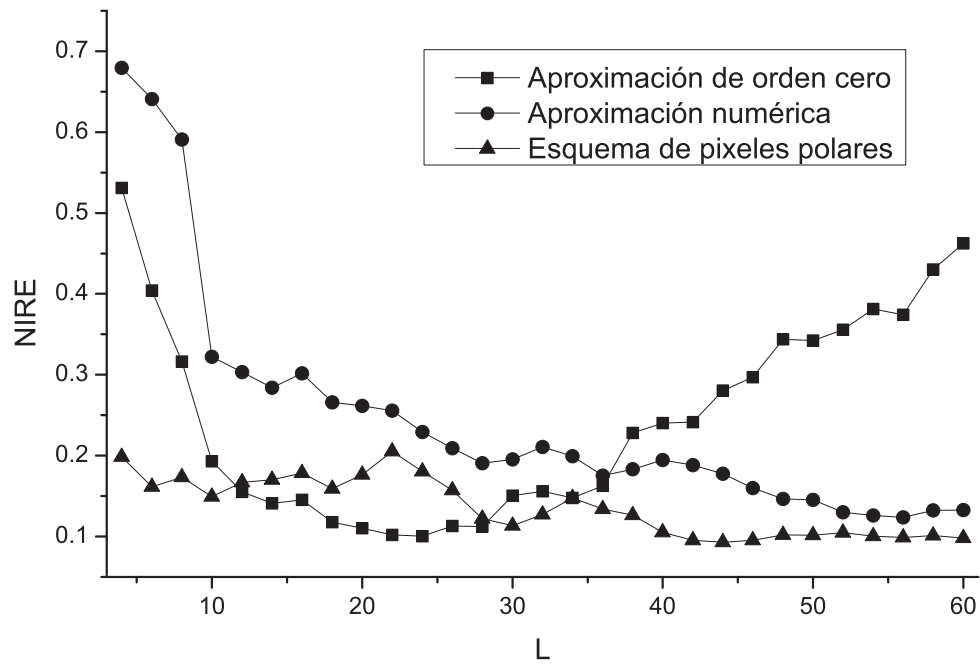
El error de la imagen reconstruida normalizado conocido como *NIRE* por sus siglas en inglés, el cual es calculado mediante el error cuadrático medio normalizado de la imagen original  $f(i, j)$  y la imagen reconstruida  $\tilde{f}(i, j)$ , y es normalmente utilizada para medir el desempeño de los momentos radiales. Su definición discreta está dada de la siguiente manera

$$NIRE = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} [\tilde{f}(i, j) - f(i, j)]^2}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f^2(i, j)}. \quad (3.27)$$

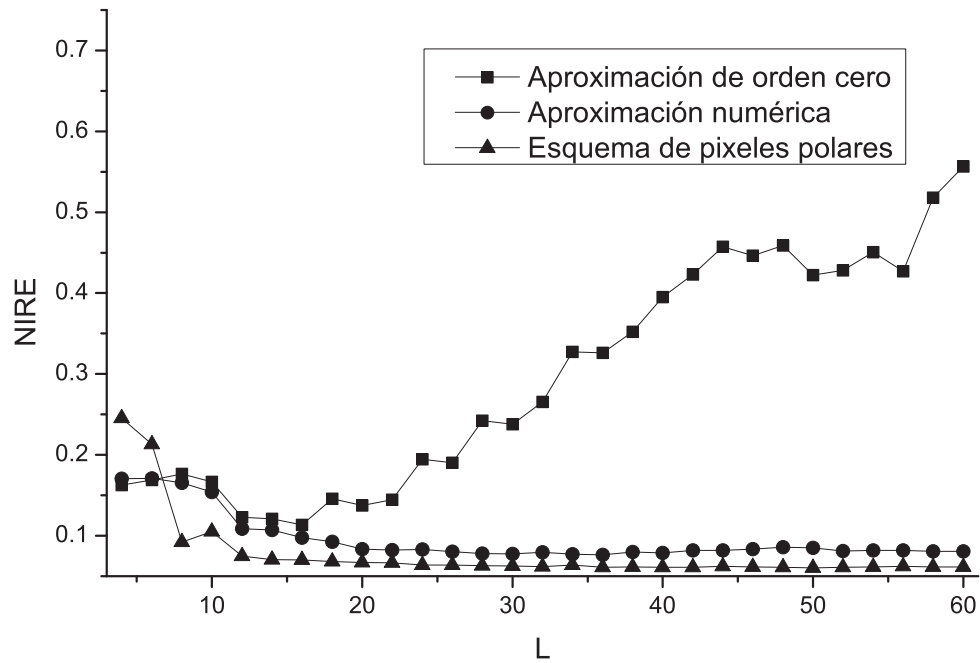
El NIRE es utilizado como métrica para conocer el método de cómputo que tenga un mejor desempeño en la reconstrucción de una imagen, a partir de un número finito de sus momentos. Los resultados de los métodos de la *aproximación de orden cero*, la *aproximación numérica*, y el *esquema de pixeles polares*, son mostrados en la Fig. 3.24. Las imágenes reconstruidas con los métodos de la *aproximación por mínimos cuadrados* y la *ortonormalización de Gram-Schmidt* para ordenes menores al  $L_{m\acute{a}x}$  generan inestabilidad numérica ocasionando valores altos del NIRE. Aunque en los resultados de las Figs. 3.22 y 3.23 se pueden observar ciertas similitudes a simple vista, entre el enfoque de pixeles polares y el método numérico; sin embargo el NIRE demuestra una gran ventaja para el esquema de pixeles polares. Por otra parte, el NIRE de la *aproximación de orden cero* aumenta cuando se incrementan los momentos radiales.

### 3.2.2. Gráfica de los momentos radiales

El módulo de los momentos radiales proporciona la información necesaria para caracterizar una imagen digital, dependiendo de del método para calcular los momentos radiales los valores tienen variaciones. En la Fig. 3.25 se muestra los valores de los momentos con distintos valores de  $J$ , donde  $m = J$ ,  $n = 3J$ . Los valores están normalizados a la unidad. Por otra parte, podemos observar que los valores de los métodos de Gram-Schmidt y la aproximación por mínimos cuadrados son iguales. También, los valores tienden a disminuir para los últimos ordenes, donde se encuentra el sobreajuste de ambos métodos. Para los demás métodos existe una gran variación de sus valores.

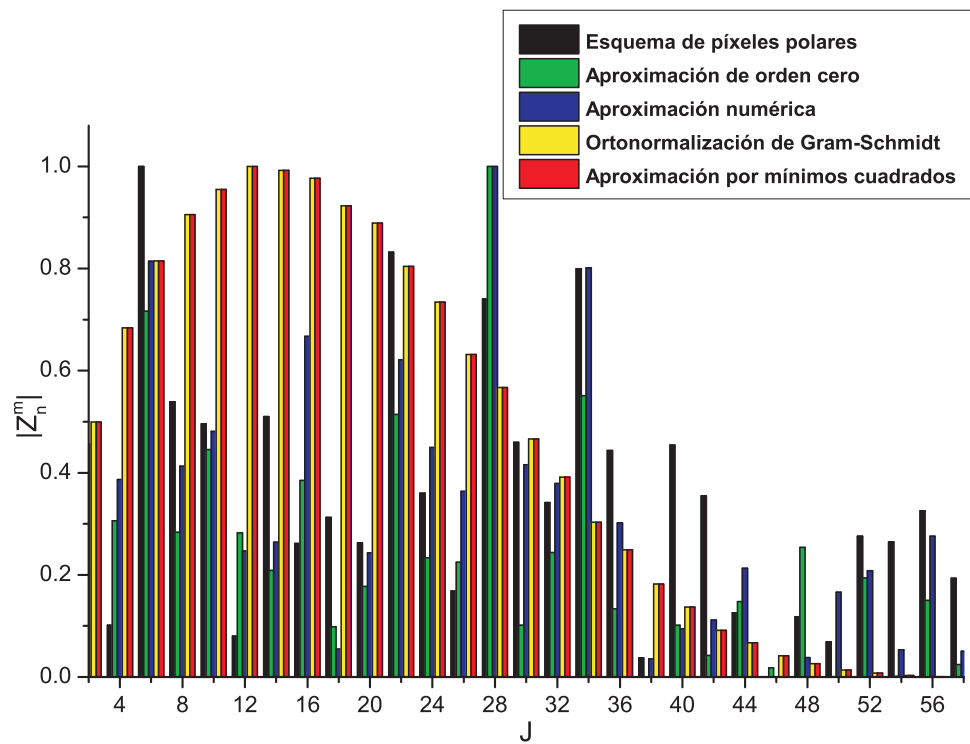


(a)

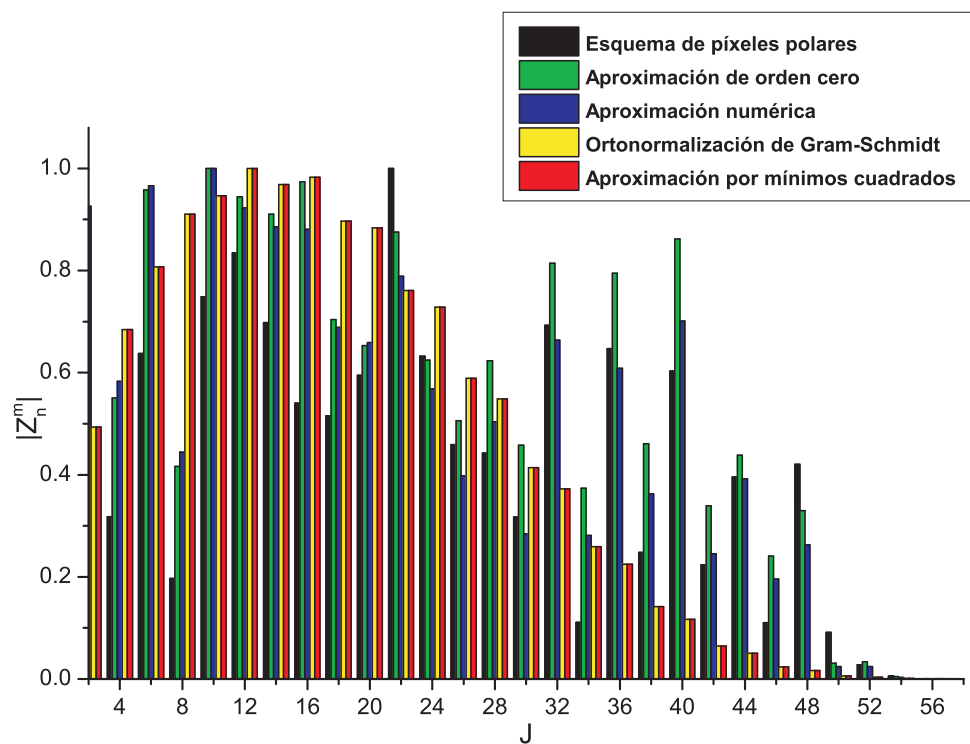


(b)

Figura 3.24: Error de reconstrucción : (a) imagen en escala de grises “Cameraman” (b) imagen binaria “E”



(a)



(b)

Figura 3.25: Valores de los momentos de Zernike ( $m = J$ ,  $n = 3J$ ) para: (a) imagen binaria “E” (b) imagen en escala de gris “Camaraman”.

### 3.2.3. Tiempos de cómputo

Dado que el tiempo de cálculo no depende del contenido de la imagen, sólo una imagen es considerada para el análisis. Para realizar las simulaciones se utiliza una imagen de  $256 \times 256$  píxeles, un ordenador Sony Electronics Inc. modelo VAIO®Notebook PC con procesador Intel®Core™i5-2430M CPU@, procesador de 2.40 GHz, con 4 GB de RAM, el código es implementado en Matlab. En la Fig. 3.26 se muestran los tiempos de cómputo de los diferentes métodos. Se pueden observar que los métodos del esquema de píxeles polares y la *aproximación de orden cero* son más rápidos que los otros métodos. Más aún, el *esquema de píxeles polares* es el que presenta un menor tiempo de cómputo.

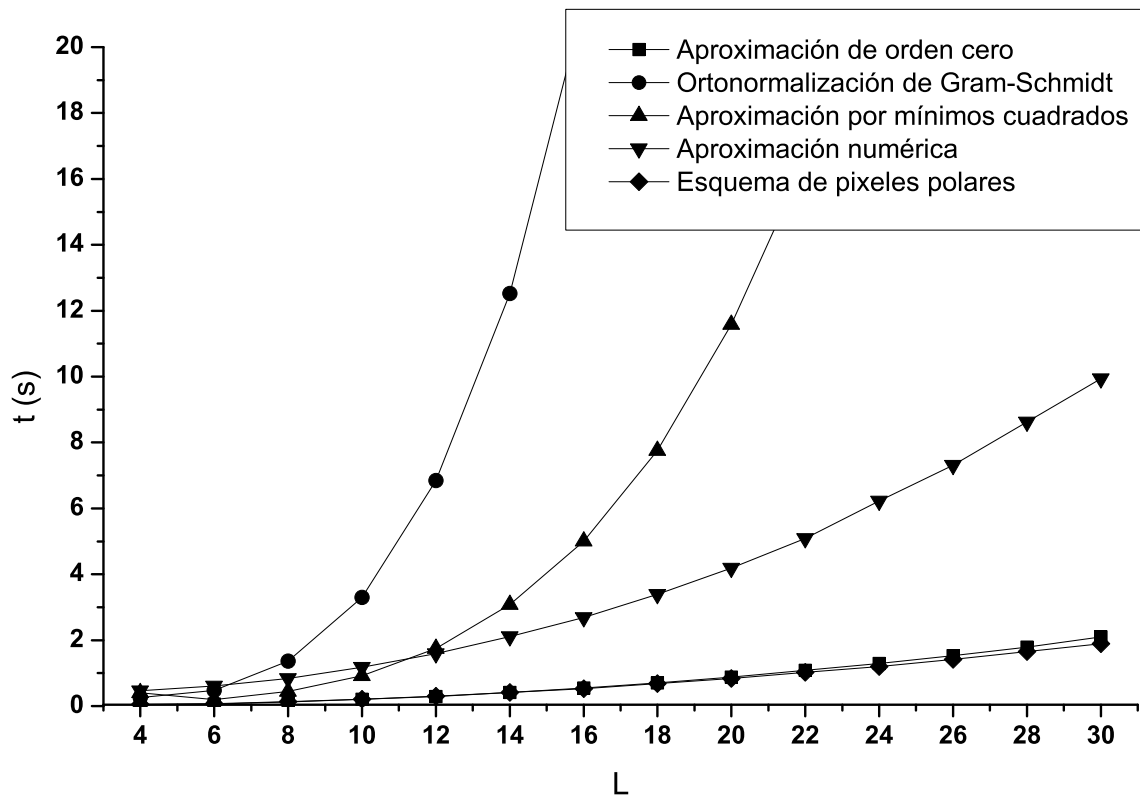


Figura 3.26: Tiempos de cómputo de los distintos métodos para el cálculo de los momentos radiales de imagen de  $256 \times 256$  píxeles.



## Capítulo 4

# Momentos genéricos de Jacobi-Fourier

Bhatia y Wolf [28] mencionaron que existe un número infinito de polinomios ortogonales radiales que se pueden obtener a partir de los polinomios genéricos de Jacobi. La variación de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de los polinomios de Jacobi puede producir diferentes conjuntos de momentos ortogonales conocidos [63][30], tales como: *los momentos ortogonales de Fourier–Mellin* ( $\alpha = \beta = 2$ ) [33], *momentos de Chebyshev–Fourier* ( $\alpha = 2, \beta = 3/2$ ) [32], *momentos pseudo-Jacobi–Fourier* ( $\alpha = 4, \beta = 3$ ) [31], *momentos de Legendre–Fourier* ( $\alpha = \beta = 1$ ), *momentos de Zernike* ( $J_s(m + 1, m + 1, r^2)$ ) [2], y *momentos de pseudo-Zernike* ( $J_s(2m + 2, m + 2, r)$ ,  $n = m + s$ ) [29]. Ping et al. [30] nombra a los momentos de Jacobi-Fourier como momentos radiales genéricos y sugiere que la formulación de los momentos radiales a través de los polinomios de Jacobi será un beneficio en su rendimiento y la búsqueda de un momento radial supremo, es decir, que tenga buenos resultados para cualquier tipo de imágenes. Por otra parte, existen pocos resultados que muestren reconstrucciones de imágenes a partir de sus momentos para imágenes mayores a  $128 \times 128$  píxeles [10][21] [61]. Esto debido a los errores inherentes al cómputo de los momentos radiales y los altos costos computacionales.

En esta sección se propone una relación de recurrencia para los polinomios ortogonales genéricos de Jacobi desplazados, esto con la finalidad de reducir la inestabilidad numérica. Para el análisis experimental se utilizan imágenes con simetría radial, tales como el iris, retina del ojo, e imagen de un Ronchigrama. El análisis tiene como objetivo entender la capacidad de descripción de una imagen dependiendo de su forma, con el fin de determinar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que mejor se adapten a aplicaciones específicas.

## 4.1. Polinomios genéricos de Jacobi

Ping et al. [30] fué el primero en utilizar los polinomios ortogonales de Jacobi desplazados como kernel de los momentos radiales, los cuales tienen la habilidad de generar diferentes familias de polinomios ortogonales variando los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Los polinomios de Jacobi  $J_n(\alpha, \beta, r)$  son ortogonales en el intervalo  $0 \leq r \leq 1$  y cumplen con la condición de ortogonalidad,

$$\int_0^1 J_n(\alpha, \beta, r) J_k(\alpha, \beta, r) r dr = \delta_{nk}, \quad (4.1)$$

donde  $\delta_{nk}$  es el símbolo de Kronecker. Estos están definidos de la siguiente manera

$$J_n(\alpha, \beta, r) = \sqrt{\frac{w(\alpha, \beta, r)}{b_n(\alpha, \beta) r}} G_n(\alpha, \beta, r), \quad (4.2)$$

donde  $G_n(\alpha, \beta, r)$  son los polinomios de Jacobi,  $b_n(\alpha, \beta)$  es la constante de normalización, y  $w(\alpha, \beta, r)$  es la función peso [62]. Estas expresiones son calculadas de la siguiente manera [63],

$$G_n(\alpha, \beta, r) = {}_2F_1(-n, \alpha + n; \beta; z), \quad (4.3)$$

$$= \frac{n! \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + n)}$$

$$\times \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{\Gamma(\alpha + n + s)}{(n-s)! s! \Gamma(\beta + s)} r^s,$$

$$b_n(\alpha, \beta) = \frac{n! \Gamma^2(\beta) \Gamma(\alpha - \beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + n) \Gamma(\alpha + n) (\alpha + 2n)}, \quad (4.4)$$

$$w(\alpha, \beta, r) = (1-r)^{\alpha-\beta} r^{\beta-1}, \quad (4.5)$$

donde  ${}_2F_1(-n, b; c; z)$  es la *función hipergeométrica ordinaria*,  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma,  $\alpha - \beta > -1$  y  $\beta, \alpha > 0$ . Al expresar los polinomios ortogonales de Jacobi con *funciones hipergeométricas* tiene una importancia más teórica que práctica. Puede que nos proporcione una idea relativa de la complejidad de los polinomios ortogonales; sin embargo, las relaciones de recurrencia son más eficientes. Los cálculos de los factoriales y función gamma en la Ec. (4.3), aumentan el tiempo de cómputo y sólo es precisa para factoriales menores de 21. Por otra parte, el cálculo de la enésima potencia de  $r$  para altos ordenes, causa inestabilidad numérica en valores cercanos a 1. Por tal motivo, en este trabajo de tesis se propone la relación de recurrencia con respecto a  $n$  para el cómputo de los polinomios de Jacobi desplazados [64][65], los cuales están dados por

$$A_n J_n(\alpha, \beta, r) = (2r - 1 - B_n) J_{n-1}(\alpha, \beta, r) - A_{n-1} J_{n-2}(\alpha, \beta, r), \quad (4.6)$$

donde  $r \in [0, 1]$ ,  $\alpha - \beta > -1$ ,  $\beta, \alpha > 0$  y los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  son calculados de la siguiente manera

$$A_n = \sqrt{\frac{4n(n + \alpha - \beta)(n + \beta - 1)(n + \alpha - 1)}{(2n + \alpha - 1)^2(2n + \alpha)(2n + \alpha - 2)}}, \quad (4.7)$$

$$B_n = \frac{(\alpha - 1)(2\beta - \alpha - 1)}{(2n + \alpha - 1)(2(n - 1) + \alpha - 1)}. \quad (4.8)$$

Para el cálculo numérico inicial, los polinomios de Jacobi de orden cero y primero normalizados están dadas por

$$J_0(\alpha, \beta, r) = \sqrt{\frac{w(\alpha, \beta, r)}{b_0(\alpha, \beta)}}, \quad (4.9)$$

$$J_1(\alpha, \beta, r) = J_0(\alpha, \beta, r) \sqrt{\frac{(\alpha + 2)\beta}{\alpha - \beta + 1}} \left( \frac{\alpha + 1}{\beta} r - 1 \right). \quad (4.10)$$

En la Fig. 4.1 se muestra una comparación entre las relaciones de recurrencia con las *funciones hipergeométricas*. Por otro lado, el cambio de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  genera relaciones de recurrencia para distintas familias de polinomios ortogonales conocidos, tal como se muestra en la Tabla 4.1. Por otra parte, la Fig. 4.2 muestra los primeros 6 ordenes de polinomios radiales de la Tabla 4.1.

## 4.2. Momentos radiales genéricos en pixeles polares

En análisis previos se ha demostrado, que existen dos tipos de errores en la aproximación de orden cero de los momentos radiales; error de geometría e integración [4]. Para incrementar la exactitud Xin et al. [6] proponen un algoritmo basado en el cambio de forma de los pixeles a un esquema de pixeles polares para los momentos de Zernike; esta misma estrategia es utilizada para el cálculo de los momentos radiales genéricos. Sin embargo, el cálculo de la integral mediante los coeficientes de los polinomios ortogonales genera inestabilidad numérica para altos órdenes [64][65]. Por lo tanto, en este trabajo de tesis se propone utilizar la regla de integración numérica de la cuadratura Gaussiana de 10 puntos con la relaciones de recurrencia de la Ec. (4.6) para la integral  $I_1$ , la cual es menos exacta, pero numéricamente más estable para ordenes mayores a 21. La composición de la regla de cuadratura Gaussiana para la integración numérica de los polinomios de Jacobi puede ser expresada como,

$$I_1 = \frac{r_{uv}^{(e)} - r_{uv}^{(s)}}{2} \sum_{k=1}^{10} \eta_k J_n \left( \alpha, \beta, \frac{r_{uv}^{(e)} - r_{uv}^{(s)}}{2} z_k + \frac{r_{uv}^{(e)} + r_{uv}^{(s)}}{2} \right), \quad (4.11)$$

donde  $\eta_k$  son los pesos  $z_k \in [-1, 1]$  y los puntos donde la función es evaluada. Los valores de  $\eta_k$  y  $z_k$  están dados en la Tabla 4.2.

Para el cómputo de los momentos genéricos radiales en pixeles polares se sigue la descripción del método de la Subsección 3.1.5, solo se requiere cambiar la Ec. 3.23 por la Ec. 4.11,

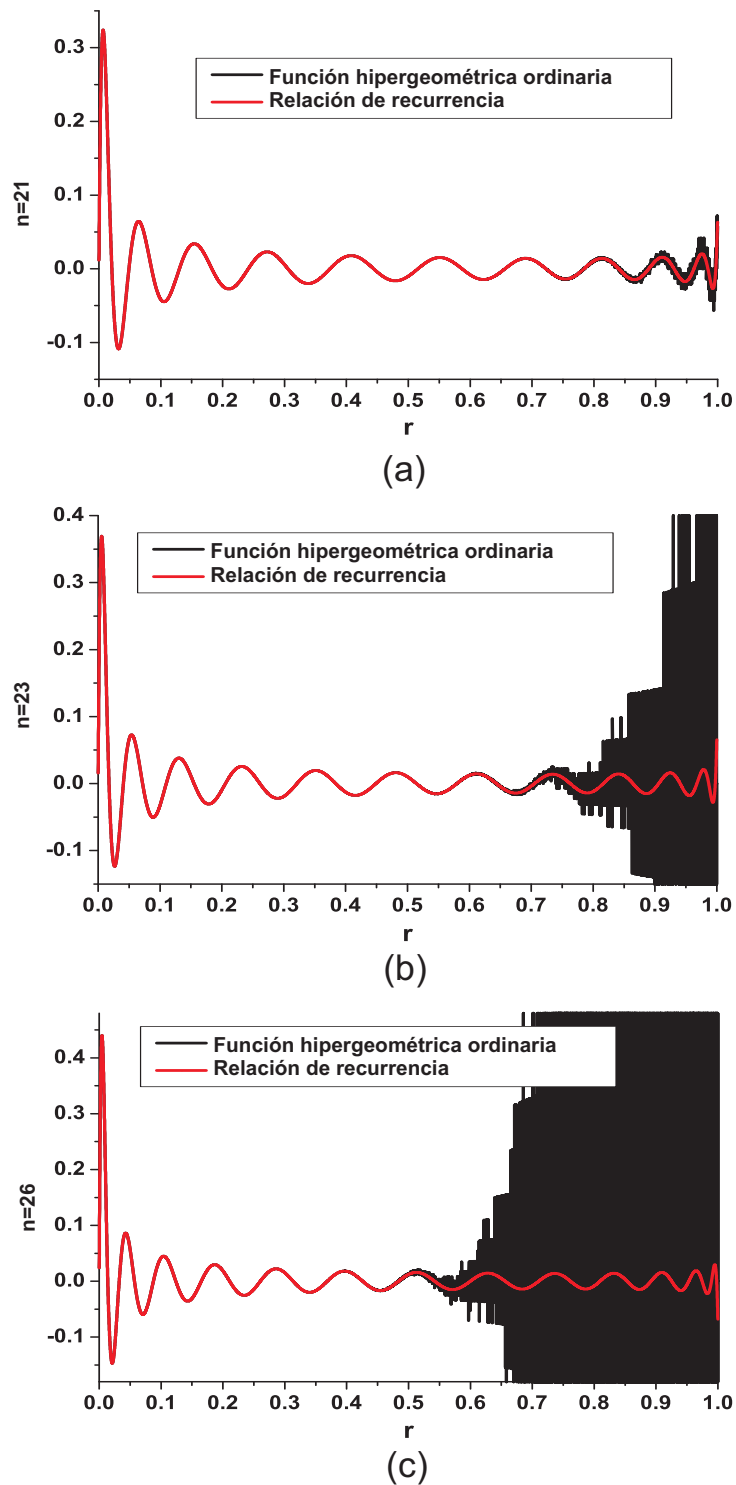


Figura 4.1: Corrección de la inestabilidad numérica de los polinomios de Jacobi cuando  $\alpha = \beta = 4$  para los ordenes: (a)  $n = 21$ , (b)  $n = 23$ , y  $n = 26$ .

Polinomios ortogonales radiales	Coefficientes	Polinomios de ordenes cero y primero
Legendre $L_n(r) = J_n(1, 1, r)$	$A_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}$ $B_n = 0$	$L_0(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}$ $L_1(r) = L_0(r) \sqrt{3}(2r-1)$
Chebyshev $C_n(r) = J_n(2, 3/2, r)$	$A_n = \frac{1}{2}$ $B_n = 0$	$C_0(r) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{1}{4}}$ $C_1(r) = C_0(r)(4r-2)$
Pseudo-Jacobi $P_n(r) = J_n(4, 3, r)$	$A_n = \frac{2n+3}{\sqrt{n(n+3)}}$ $B_n = \frac{3}{4n^2-1}$	$P_0(r) = \sqrt{r(1-r)12}$ $P_1(r) = P_0(r) \sqrt{9} \left(\frac{3}{5}r-1\right)$
Mellin $M_n(r) = J_n(2, 2, r)$	$A_n = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2n+1}$ $B_n = \frac{1}{4n^2-1}$	$M_0(r) = \sqrt{2}$ $M_1(r) = 6r-2$
Zernike $Z_n^m(r) = J_s(m+1, m+1, r^2)$ $n = 2s + m$	$A_n = \frac{(n-m)(n+m)}{2n\sqrt{(n+1)(n-1)}}$ $B_n = \frac{m^2}{n(n-2)}$	$Z_m^m(r) = \begin{cases} \sqrt{2(m+1)r^m} & m \neq 0 \\ \sqrt{(m+1)r^m} & m = 0 \end{cases}$ $Z_{m+2}^m(r) = Z_m^m(r) \sqrt{(m+3)(m+1)} \times \left(\frac{m+2}{m+1}r^2-1\right)$
Pseudo-Zernike $PZ_n^m(r) = J_s(2m+2, 2m+2, r)$ $n = s + m$	$A_n = \frac{(n-m)(n+m+1)}{(2n+1)\sqrt{(n+1)n}}$ $B_n = \frac{(2m+1)^2}{4n^2-1}$	$PZ_m^m(r) = \sqrt{2(m+1)r^m}$ $PZ_{m+1}^m(r) = PZ_m^m(r) \sqrt{(m+2)(m+1)} \times \left(\frac{2m+3}{m+1}r-2\right)$

Tabla 4.1: Parámetros de las relaciones de recurrencia genérica para diferentes polinomios conocidos.

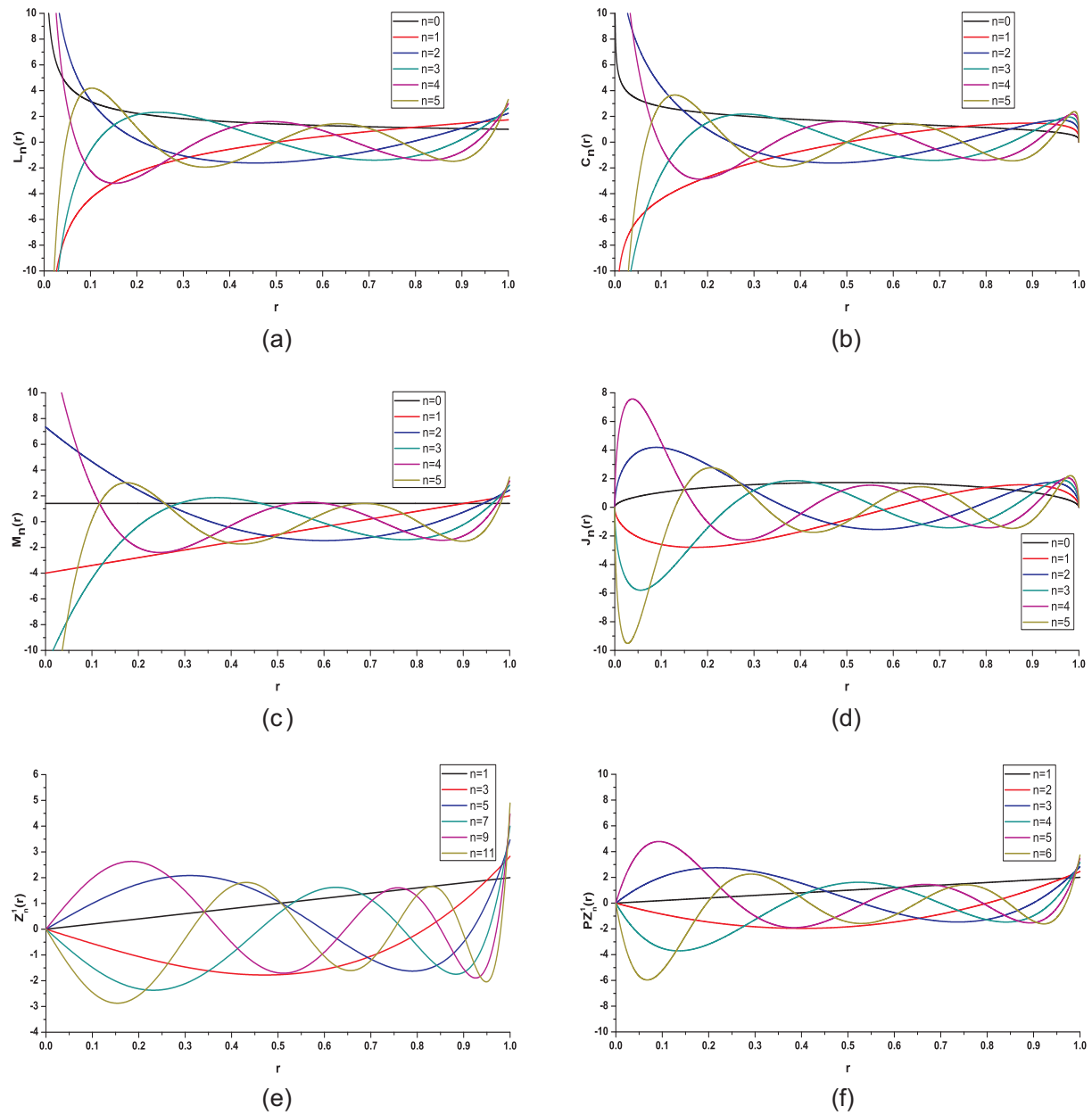


Figura 4.2: Primeros seis polinomios para distintas familias: (a) Legendre, (b) Chebyshev, (c) Mellin, (d) Pseudo-Jacobi, (e) Zernike, (f) Pseudo-Zernike.

$k$	$\eta_k$	$z_k$
1	0.0666713443	-0.9739065285
2	0.1494513492	-0.8650633667
3	0.2190863625	-0.6794095683
4	0.2692667193	-0.4333953941
5	0.2955242247	-0.1488743390
6	0.2955242247	0.1488743390
7	0.2692667193	0.4333953941
8	0.2190863625	0.6794095683
9	0.1494513492	0.8650633667
10	0.0666713443	0.9739065285

Tabla 4.2: Pesos ( $\eta_k$ ) y la ubicación de puntos de muestreo ( $z_k$ ) para cuadratura Gaussiana de 10 puntos.

para que los momentos genéricos radiales sean numéricamente más estables para órdenes mayores a 21. Como se demostró en el análisis comparativo del capítulo 1, el *esquema de pixeles polares* tiene menor tiempo de cómputo y un menor error de reconstrucción que los distintos métodos.

En años recientes, existe un gran interés en los momentos ortogonales de Fouier-Mellin. También, han demostrado tener un mejor desempeño que los momentos de Zernike en términos de la razón señal a ruido y error de reconstrucción. Por este motivo, realizamos un análisis con los momentos genéricos radiales con  $\alpha = \beta = 2$  (momentos ortogonales de Fourier-Mellin) y la relación de recurrencia de los polinomios genéricos con la integración por cuadratura Gaussiana de 10 puntos. Los resultados de las imágenes de prueba mediante los MOFM con el método de Xin et al. [6] y el método propuesto se muestran en la Fig. 4.3. Por otra parte, en la Fig. 4.4 se muestran los resultados del *NIRE* de las imágenes de prueba. Los resultados con el método propuesto tienen un mejor desempeño que el método de Xin et al. [6] en términos de la reconstrucción de imagen y el *NIRE*. La inestabilidad numérica de la integral con los coeficientes obtenidos mediante la función hipergeométrica, oscurece la imagen reconstruida debido a que genera valores de momentos erróneos.



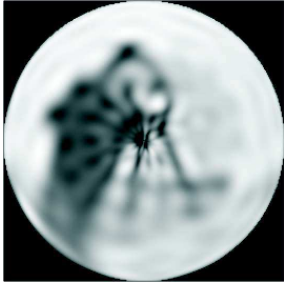
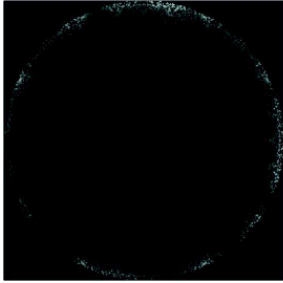
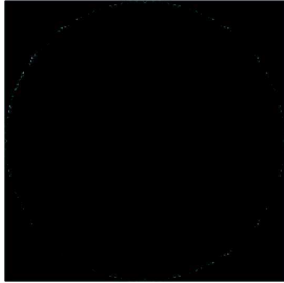
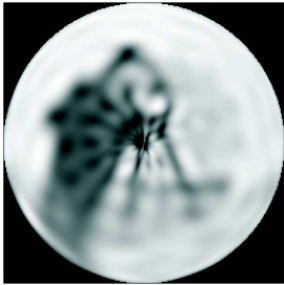
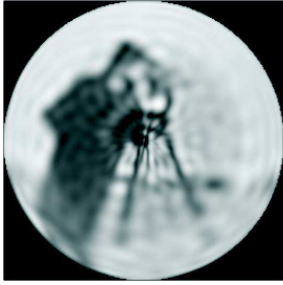

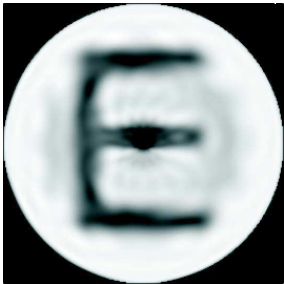
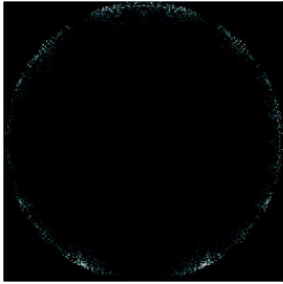
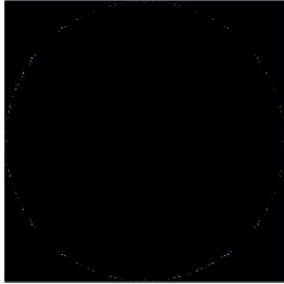
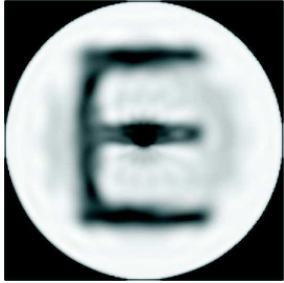
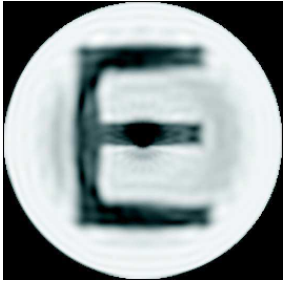
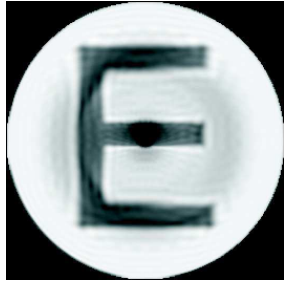
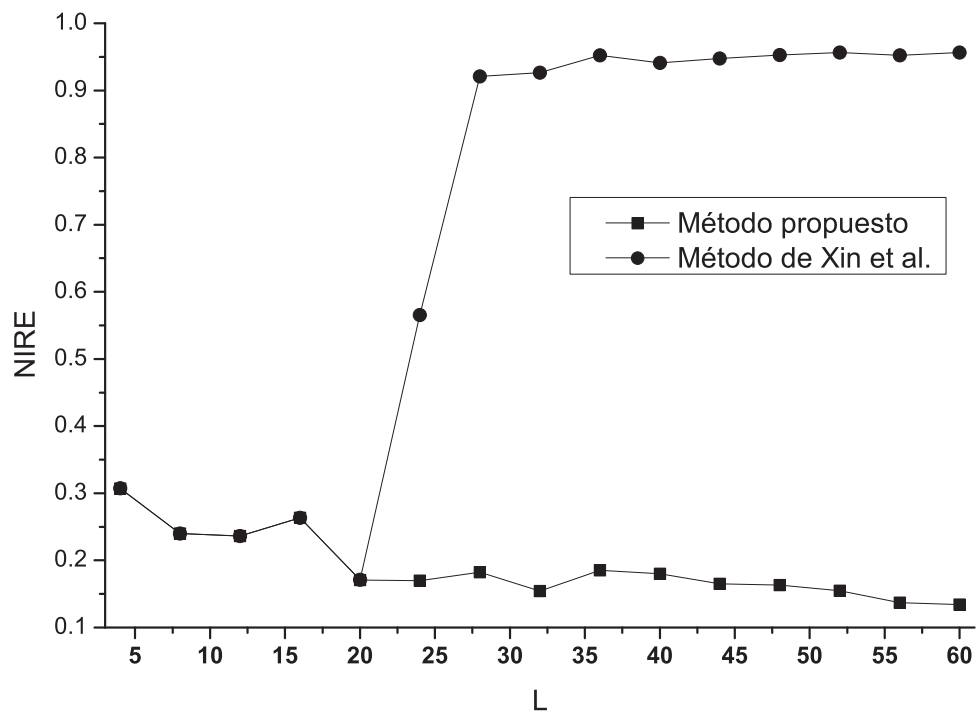
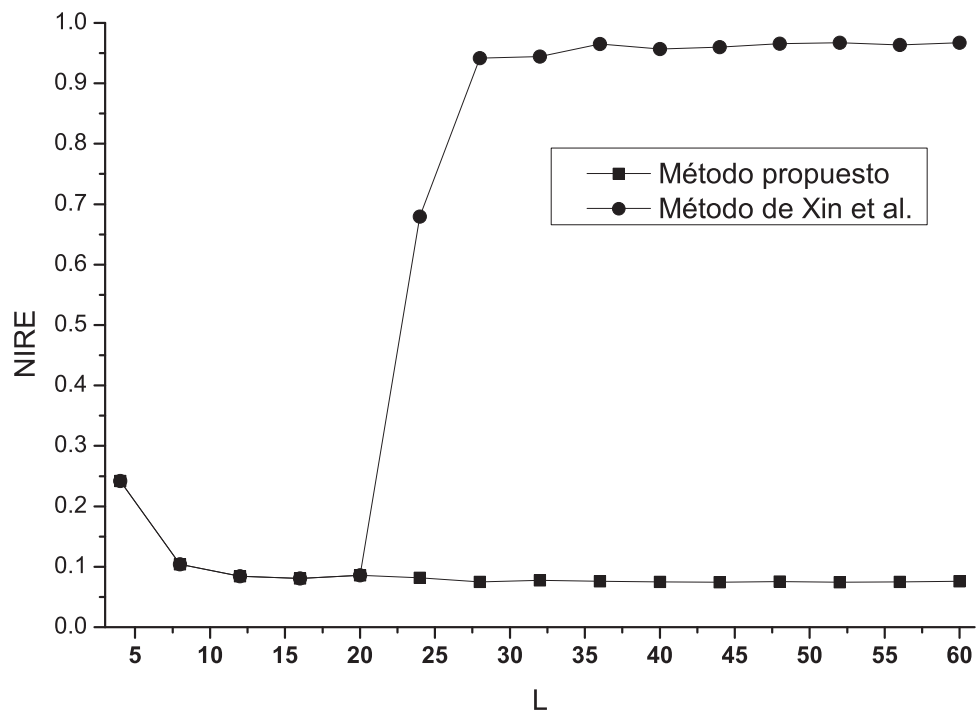
	<b>L=15</b>	<b>L=25</b>	<b>L=35</b>
<b>Píxeles polares</b>			
<b>Píxeles polares con relaciones de recurrencia</b>			
<b>Píxeles polares</b>			
<b>Píxeles polares con relaciones de recurrencia</b>			

Figura 4.3: Reconstrucción de las imágenes de prueba con los coeficientes de la función hipergeométrica y las relaciones de recurrencia.



(a)



(b)

Figura 4.4:  $NIRE$  de las imágenes de prueba con los coeficientes de la función hipergeométrica y las relaciones de recurrencia.

### 4.3. Búsqueda de los mejores valores de $\alpha$ y $\beta$

El cálculo de los momentos genéricos radiales en píxeles polares reduce los tiempos de cómputo, lo cual facilita la búsqueda para los mejores valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Definimos la media del *NIRE* como métrica para evaluar cuantitativamente las mejores combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$ . La media del *NIRE* está dada por,

$$\Psi(\alpha, \beta, p) = \frac{1}{p} \sum_{L=1}^p NIRE(L, \alpha, \beta), \quad (4.12)$$

donde  $L$  es el orden máximo de los momentos genéricos utilizados en la reconstrucción de la imagen de entrada y  $p$  es el orden de corte.

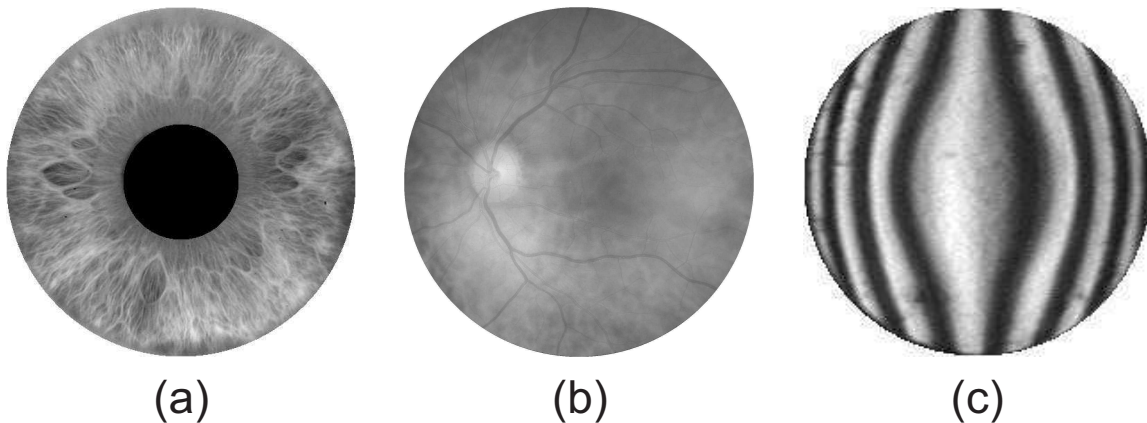


Figura 4.5: Imágenes de prueba. (a) Imagen del iris. (b) Imagen de la retina. (c) Imagen del Ronchigrama.

En esta sección se realiza un análisis comparativo en términos del error de reconstrucción para diferentes valores  $\alpha$  y  $\beta$  con imágenes de simetría radial, que pueden tener alguna aplicación, tales como el reconocimiento del iris, el análisis de retina, y análisis de Ronchigramas. La imágenes de prueba se muestran en la Fig.4.5. En este trabajo de tesis se lleva a cabo una búsqueda exhaustiva para valores  $\alpha = 1 \dots 10$  y  $\beta = 1 \dots 10$ , con el fin de encontrar la combinación óptima de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que mejor reconstruyan la imagen. Los resultados de las tres imágenes de prueba se presentan a continuación.

**Imagen del iris:** la gráfica de la Fig. 4.6(a) muestra los resultados de la Ec. 4.12, la cual presenta mínimos locales usando la siguiente relación  $\alpha = 2\beta - 2$ ; los momentos Pseudo-Jacobi-Fourier satisfacen esta relación. El valor mínimo de la vecindad de búsqueda es cuando  $\alpha = 10$  y  $\beta = 6$ . El valor mínimo del *NIRE* y algunos valores cercanos se muestran en la Fig. 4.6(b). También se muestra en la Fig. 4.6(c) la reconstrucción con los mejores parámetros  $\alpha = 10$  y  $\beta = 6$ .

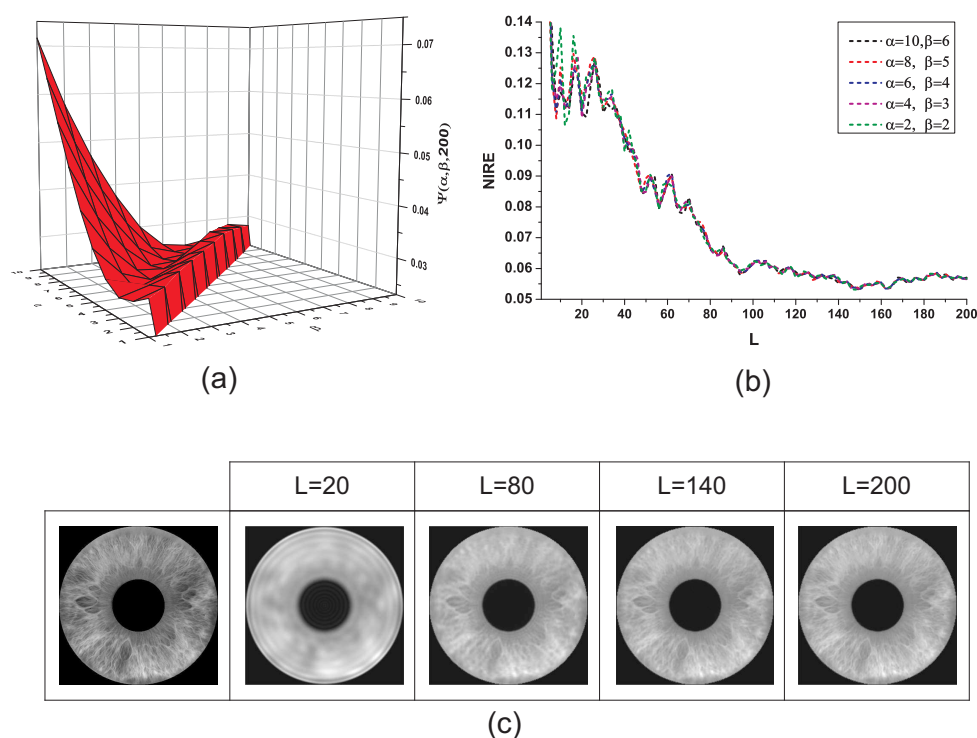


Figura 4.6: Resultados usando una imagen del iris. (a) Espacio de búsqueda para encontrar los mejores valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . (b) NIRE de los mejores parámetros. (c) La reconstrucción de la imagen del iris con  $\alpha = 10$  y  $\beta = 8$ .

**Imagen de la retina:** La Fig. 4.7(a) muestra los resultados de la vecindad de búsqueda, como se puede observar los valores mínimos están cuando  $\alpha = \beta$ ; los momentos Mellin y Legendre satisfacen esta relación. También en la Fig. 4.7(b) se muestra los resultados de NIRE para  $\alpha = \beta = 1, 2, 3, 4, 5$ . Finalmente se muestra en la Fig. 4.7(c) la reconstrucción de la imagen de la retina cuando  $\alpha = \beta = 1$ , los cuales son los mejores valores encontrados.

**Imagen del Ronchigrama :** La Fig. 4.8(a) muestra que los valores mínimos para el promedio del NIRE cuando  $\alpha = \beta$ . El NIRE de los 5 primeros valores se muestran en la Fig. 4.8(b) donde los valores que tienen un mejor rendimiento es cuando  $\alpha = \beta = 1$ . La reconstrucción de estos valores se muestra en la Fig. 4.8(c).

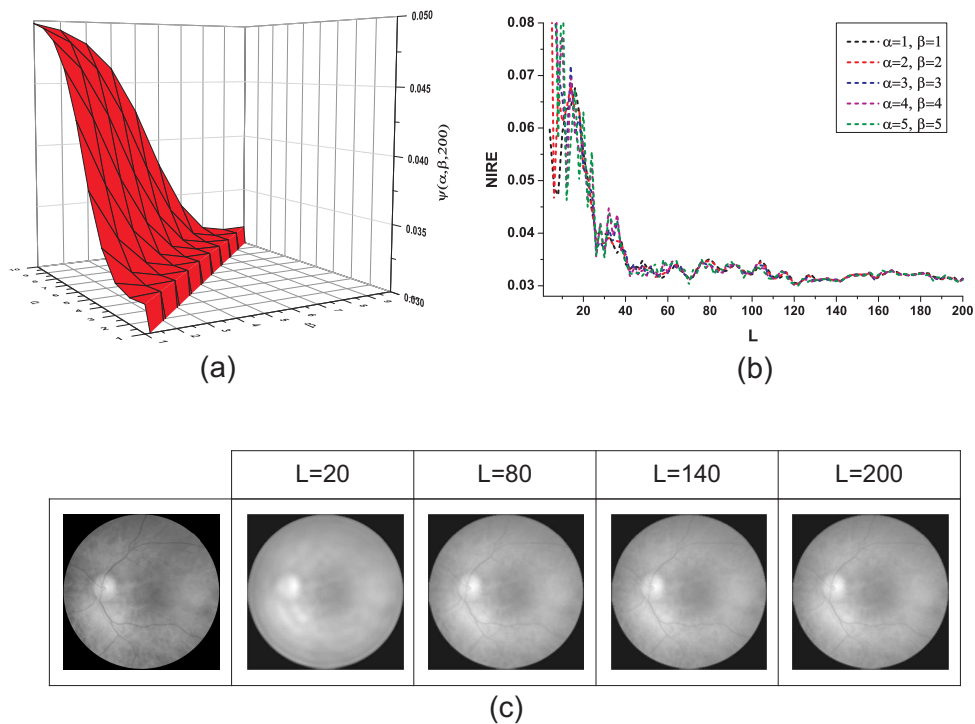


Figura 4.7: Resultados usando una imagen de la retina. (a) Espacio de búsqueda para encontrar los mejores valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . (b) NIRE de los mejores parámetros. (c) Reconstrucción imagen retina con  $\alpha = \beta = 1$ .

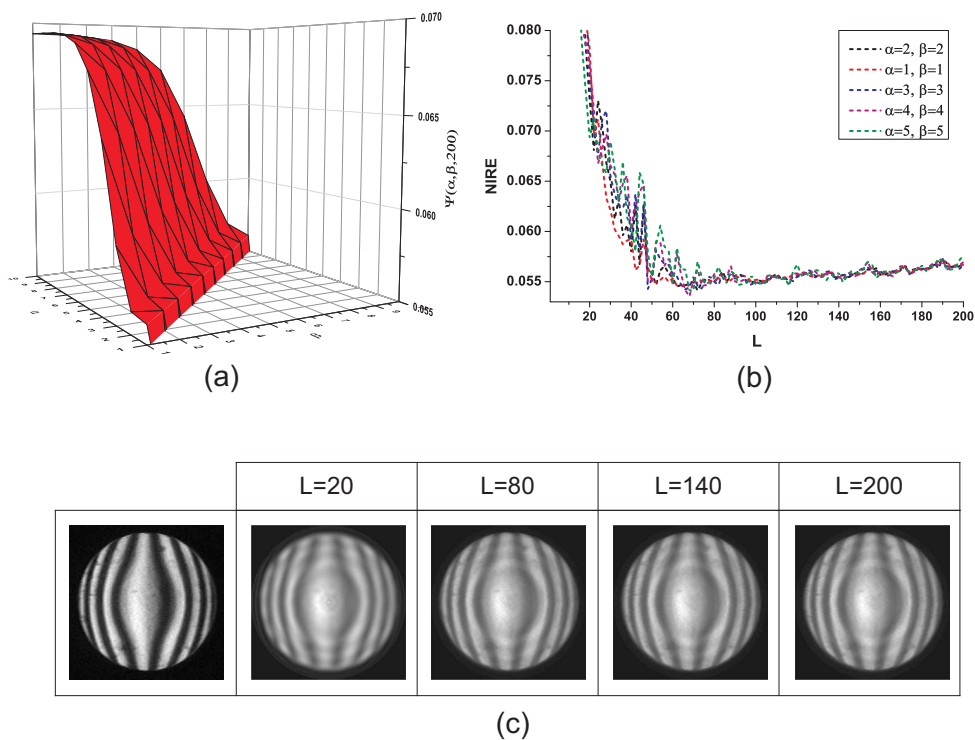


Figura 4.8: Resultados usando una imagen del Ronchigrama. (a) Espacio de búsqueda para encontrar los mejores valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . (b) NIRE de los mejores parámetros. (c) Reconstrucción imagen del Ronchigrama con  $\alpha = \beta = 1$ .

Los resultados de la búsqueda de los mejores parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  para las imágenes de prueba tiene un comportamiento particular. Por ejemplo, las imágenes del Ronchigrama y la retina tienen un mejor rendimiento cuando  $\alpha - \beta = 0$  y los peores resultados cuando  $\alpha - \beta = 9$ . Por lo tanto, a mayor diferencia de  $\alpha - \beta$ , mayor será el promedio de NIRE. En la imagen del iris, el área de la pupila tiene valores de cero, por esta razón, el mínimo de la zona de búsqueda son desplazados por la expresión  $|\alpha - 2\beta - 2|$ . También hay que tener en cuenta que los resultados de las Figs. 4.6(b), 4.7(b) y 4.8(b), no sufrirá cambios importantes en el NIRE para los valores mínimos encontrados.

## Capítulo 5

# Cómputo de alta precisión de los momentos radiales

La propiedad más importante de los momentos ortogonales es su capacidad para caracterizar, evaluar y manipular la información con mínima redundancia [2]. Sin embargo, el cálculo incorrecto de los momentos ortogonales puede afectar estas capacidades. Liao et al. [4] prueban que se producen dos tipos de errores en el cómputo de los momentos ortogonales circulares: errores de geometría y de integración numérica.

Para minimizar los errores de geometría, Xin et al. [6] propone un enfoque más preciso mediante un arreglo de píxeles polares, en el cual se mapea la imagen original a un esquema de píxeles polares a través de interpolación bicúbica de tercer orden introducida por Keys [60]. Aunque los errores de interpolación son de segundo orden de importancia en comparación con los errores de discretización, los errores de interpolación juegan un papel importante en la exactitud del método. Por otra parte, tienen un alto costo computacional porque la imagen de entrada debe ser interpolada a una nueva ubicación dentro de la disposición de píxeles polares. Además, con este enfoque se pueden buscar nuevas configuraciones en la distribución de los píxeles polares con el fin de agilizar el cálculo de los momentos ortogonales radiales en términos del error de reconstrucción y la invariancia. Singh et al. [7] proponen una mejor configuración que reduce un 27.3 % el número de píxeles polares y tiempos de cómputo. También, Liu et al. [8] proponen un esquema pixel polar mejorado que calcula sólo en una decimosexta parte del disco unitario. En la Fig. 5.1 se muestran las tres configuraciones existentes.

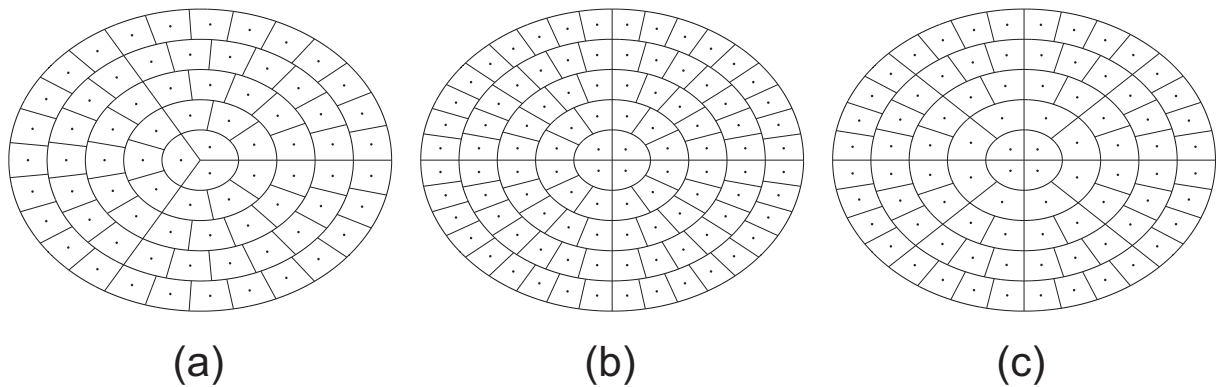


Figura 5.1: Diferentes configuraciones en la distribución de píxeles polares: (a) Configuración de Xin et al. [6], (b) Configuración de Singh et al. [7], (c) Configuración de Liu et al. [8].

Para los errores de integración numérica, Xin et al. [6] resuelven la integral analíticamente con los coeficientes de los polinomios ortogonales; sin embargo, causa inestabilidad numérica para altos órdenes. En el Capítulo 4 se reduce el error mediante el uso de relaciones de recurrencia y la integración numérica, que es menos precisa, pero numéricamente más estable para órdenes superiores. Por otra parte, se ha demostrado que los polinomios de Legendre, el núcleo de los momentos ortogonales funcionan bien para la reconstrucción de imágenes. Además, son utilizados en el cálculo preciso de momentos Cartesianos [66, 67], porque pueden calcular la integral del núcleo con precisión. Esta identidad puede ser adaptada a los polinomios desplazados de Legendre y ser utilizados para el cálculo de los momentos en píxeles polares.

En este trabajo de tesis, proponemos una novedosa configuración de píxeles polares basado en anillos concéntricos que no requiere interpolación numérica. Para poner en práctica la nueva configuración utilizamos los polinomios de Legendre desplazados para calcular el kernel de los momentos, y lo comparamos con las diferentes configuraciones de píxeles polares en términos del error de reconstrucción, invariancia a la rotación, invariancia a la escala, y su capacidad para reconstruir imágenes afectadas por ruido Gaussiano.



## 5.1. Nueva configuración de píxeles polares

En este trabajo de tesis, se propone una nueva disposición de píxeles polares que se basa en la colocación de un píxel polar en cada punto o píxel de la imagen con el fin de descartar la interpolación numérica requerida en las configuraciones anteriores. Para lograr esto, consideramos una imagen  $f(r_{ij}, \theta_{ij})$  con dimensiones espaciales  $N \times M$ , donde las coordenadas polares se expresan mediante,

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sqrt{x_i^2 + y_j^2}, & r_{i,j} \leq 1, \\ \theta_{ij} &= \arctan\left(\frac{y_j}{x_i}\right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

y son transformados por

$$x_i = -1 + \frac{2i}{N-1}, \quad y_j = -1 + \frac{2j}{M-1}, \quad (5.2)$$

donde  $i = 0, \dots, N-1$ , y  $j = 0, \dots, M-1$ . Por lo tanto, construimos la disposición de píxeles polares de las dimensiones de la imagen  $f(r_{ij}, \theta_{ij})$ . Empezamos por dividir el radio unidad en  $N/2$  anillos concéntricos, los cuales están separadas en  $\left\{\left(\frac{2u}{N}\right), u = 1, \dots, N/2\right\}$ , como se muestra en la Fig. 5.2(a). Los píxeles que están en el rango

$$\frac{2(u-1)}{N} < r_{ij} < \frac{2u}{N}, \quad (5.3)$$

forman los sectores o píxeles polares de cada anillo concéntrico  $u$ . Además, las coordenadas de la disposición propuesta de píxeles polares está dada como

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{2u-1}{N}, \\ \theta_{uv} &= \frac{\pi(2v-1)}{V_u}, \quad v = 1, 2, \dots, V_u, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $V_u$  es el número total de píxeles que se encuentran en el anillo concéntrico  $u$ . La Fig. 5.2 (b) muestra la disposición propuesta de píxeles polares para una imagen de  $20 \times 20$  píxeles.

Habrá en tener en cuenta en cuenta que los anillos conc tricos mostrados en la Fig. 5.2(a) coinciden con los píxeles polares de la Fig. 5.2(b). En consecuencia, podemos tomar los valores numéricos de la imagen para cada sector de los píxeles polares.

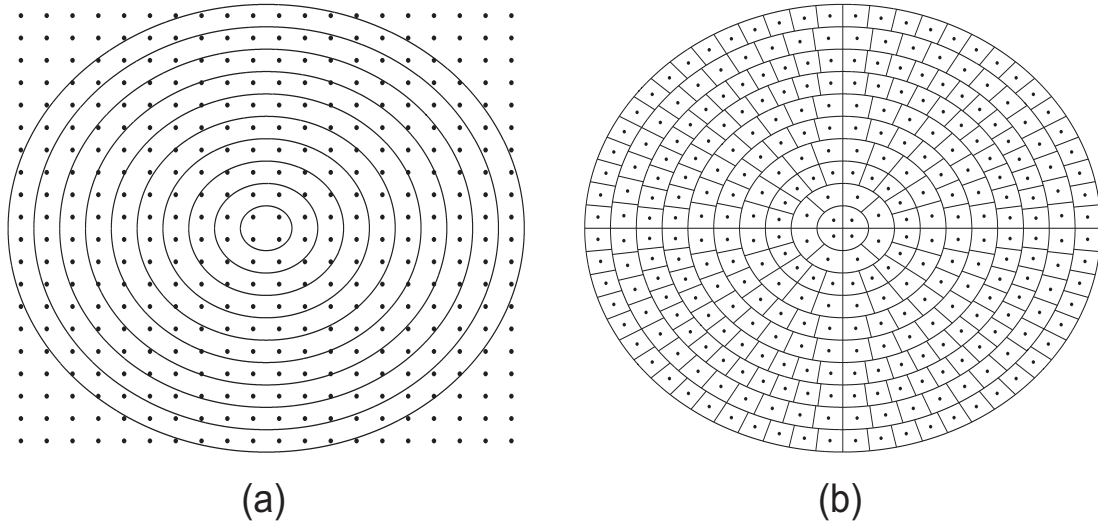


Figura 5.2: (a) Anillos conc tricos en la distribución de píxeles. (b) Nuestra configuración de píxeles polares.

## 5.2. Momentos Exactos de Legendre-Fourier (MELF)

En este trabajo de tesis, utilizamos los polinomios de Legendre desplazado como el kernel de los momentos radiales para ser aplicados a la configuración propuesta, junto con la posibilidad de calcular el kernel de la integral con exactitud. Este núcleo está dado de la siguiente manera

$$P_{nm}(r, \theta) = L_n(r) \exp(-jm\theta). \quad (5.5)$$

La relación recursiva de los polinomio ortogonales de Legendre desplazados está dado por

$$a_n L_n(r) = (2r - 1) L_{n-1}(r) - a_{n-1} L_{n-2}(r), \quad (5.6)$$

donde  $r \in [0, 1]$ , y los coeficientes  $a_n$  se calculan como

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}}. \quad (5.7)$$

Para el cálculo numérico inicial, los polinomios normalizados de orden cero y primero, están dados por

$$L_0(r) = 1, \quad (5.8)$$

$$L_1(r) = \sqrt{3}(2r - 1). \quad (5.9)$$

El cálculo de los MELF con la nueva disposición de píxeles polares es realizado por la suma de todos los sectores  $\Omega_{uv}$ . Por lo tanto, Ec.(2.23) puede ser reescrita como

$$\hat{\phi}_{nm} = \sum_{u=1}^U \sum_{v=1}^{V_u} \hat{f}(r_u, \theta_{uv}) \omega_{nm}(r_u, \theta_{uv}), \quad (5.10)$$

donde  $\hat{f}(r_u, \theta_{uv})$  es una aproximación de la función de  $f(r_{i,j}, \theta_{i,j})$  definida sobre un conjunto de sectores concéntricos  $\Omega_{uv}$  y el factor  $\omega_{nm}(r_u, \theta_{uv})$  está dado por

$$\begin{aligned} \omega_{nm}(r_u, \theta_{uv}) &= \int \int_{\Omega_{uv}} L_n(r) \exp(jm\theta) dr d\theta \\ &= \int_{r_u^{(s)}}^{r_u^{(e)}} L_n(r) dr \int_{\theta_{uv}^{(s)}}^{\theta_{uv}^{(e)}} \exp(jm\theta) d\theta \\ &= I_1 \times I_2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $(r_u^{(s)}, \theta_{uv}^{(e)})$ ,  $(r_u^{(s)}, \theta_{uv}^{(s)})$ ,  $(r_u^{(e)}, \theta_{uv}^{(e)})$  y  $(r_u^{(e)}, \theta_{uv}^{(s)})$  denotan los puntos inicial y final del sector  $\Omega_{uv}$ , y  $(r_u, \theta_{uv})$  representa el radio y el ángulo, respectivamente, de cada sector  $\Omega_{uv}$ . El cálculo propuesto para la integral de los polinomios ortogonales de Legendre desplazados de la Ec. (5.11) puede calcularse analíticamente como

$$I_1 = \frac{\left[ L_{n-1}(r_u^{(e)}) - L_{n-1}(r_u^{(s)}) \right]}{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} - \frac{\left[ L_{n+1}(r_u^{(e)}) - L_{n+1}(r_u^{(s)}) \right]}{2\sqrt{(2n+3)(2n+1)}}, \quad (5.12)$$

y la integral analítica de la componente compleja de Fourier está dada por

$$I_2 = \begin{cases} \frac{j}{m} \left[ \exp(-jm\theta_{uv}^{(e)}) - \exp(-jm\theta_{uv}^{(s)}) \right], & m \neq 0 \\ \theta_{uv}^{(e)} - \theta_{uv}^{(s)}, & m = 0 \end{cases}. \quad (5.13)$$

La integral de la Ec. (5.12) elimina los errores de aproximación numérica de la cuadratura Gaussiana del Capítulo anterior para los momentos de Legendre. Por otra parte, la configuración propuesta también puede ser utilizada para otros conjuntos de polinomios ortogonales.

### 5.3. Análisis de la configuración propuesta

En esta Subsección, se comparan las configuraciones de la Fig. 5.1 desde tres perspectivas diferentes, la reconstrucción de una imagen de  $512 \times 512$  píxeles, reconstrucción de la imagen ruidosa, e invariante a la rotación y la escala. Además, comparamos los momentos exactos de Legendre-Fourier (MELF) con otras familias de momentos radiales tales como los momentos de Zernike (MZ)[2], momentos Pseudo-Zernike (MPZ)[29], momentos de Pseudo-Jacobi-Fourier (MPJF)[30], momentos de Chebyshev-Fourier (CFMs)[32], momentos ortogonales de Fourier-Mellin (MOFM)[33], momentos radiales armónicos de Fourier(MRHF)[34], momentos de Bessel-Fourier (MBF)[35] y los momentos radiales ponderados desplazados de Legendre (WRSLMs) [36], todo está calculado en el marco de píxeles polares con nuestra configuración propuesta.

#### 5.3.1. Mejora en la reconstrucción de imágenes

La reconstrucción de la imagen puede ayudar a determinar qué tan adecuada una imagen puede ser caracterizada por un conjunto finito de sus momentos. Según la teoría ortogonal, una imagen original  $f(i, j)$  se puede reconstruir con un número infinito de los MELF. La distribución discreta de una imagen reconstruida está dada por

$$\tilde{f}(i, j) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L \hat{\phi}_{nm} L_n(r_{ij}) \exp(-jm\theta_{ij}), \quad (5.14)$$

donde  $\tilde{f}(i, j)$  es la versión reconstruida de  $f(i, j)$ , y  $L$  es el orden máximo de los MELF utilizados en la reconstrucción de la imagen. En la Fig. 5.3 se muestra reconstrucción de la imagen con la configuración propuesta y las configuraciones existentes.

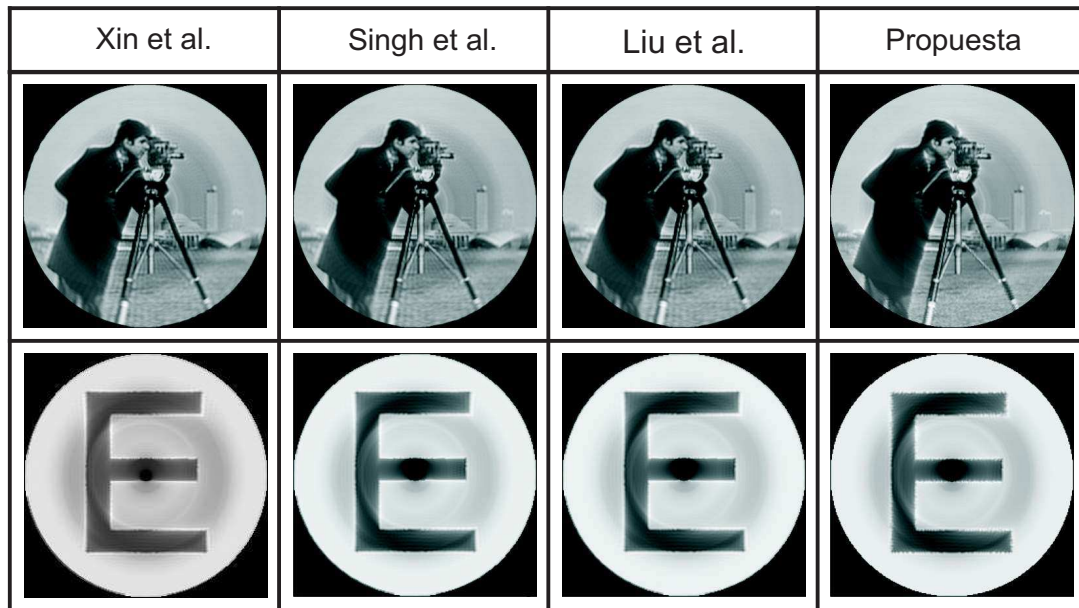
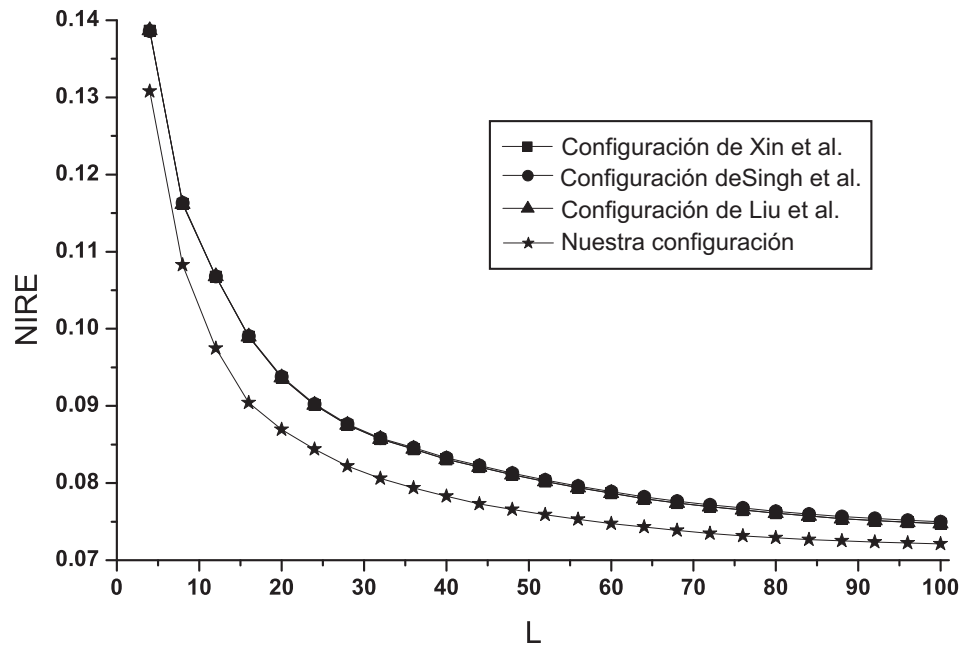
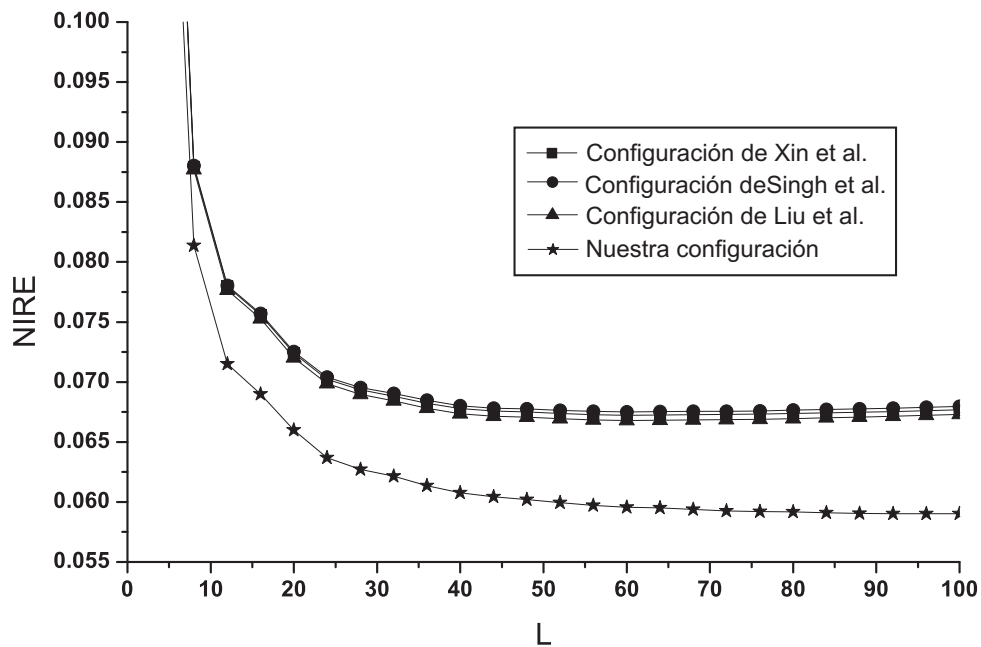


Figura 5.3: Imágenes de prueba reconstruidos con los MELF y  $L = 100$  para diferentes configuraciones de los píxeles polares.

Usando el NIRE como métrica de la reconstrucción y con la finalidad de demostrar la mejora de la configuración de píxeles polares propuesta, los resultados se muestran en la Fig. 5.4. Las mejoras en la Fig. 5.3 no son muy perceptibles a primera vista; sin embargo, el NIRE demostró la superioridad de la configuración propuesta.



(a)



(b)

Figura 5.4: NIRE de las imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises. “Cameraman ”,(b) Imagen binaria “E ”.

### 5.3.2. Reconstrucción de imágenes ruidosas

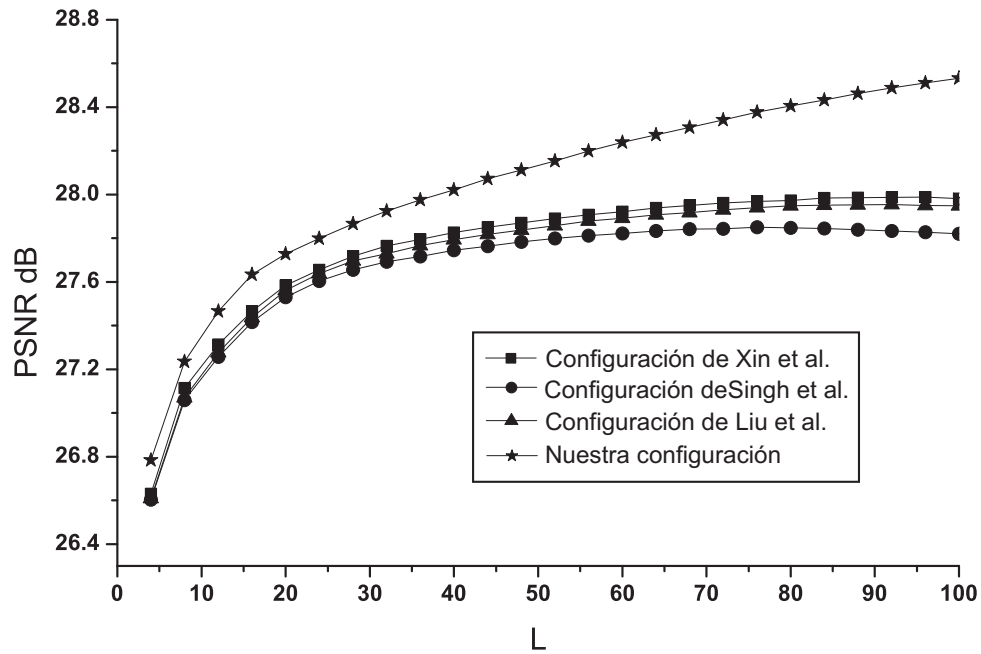
La alta resistencia al ruido es una propiedad de los momentos ortogonales de bajo orden. Comparamos las diferentes configuraciones de los píxeles polares con la relación pico señal a ruido (PSNR) y su rendimiento para la reconstrucción de imágenes degradadas por ruido Gaussiano. El PSNR es la relación entre la potencia máxima de una señal y la potencia del ruido de la señal, y por lo general se expresa en decibelios con la escala logarítmica. Se puede calcular como

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right), \quad (5.15)$$

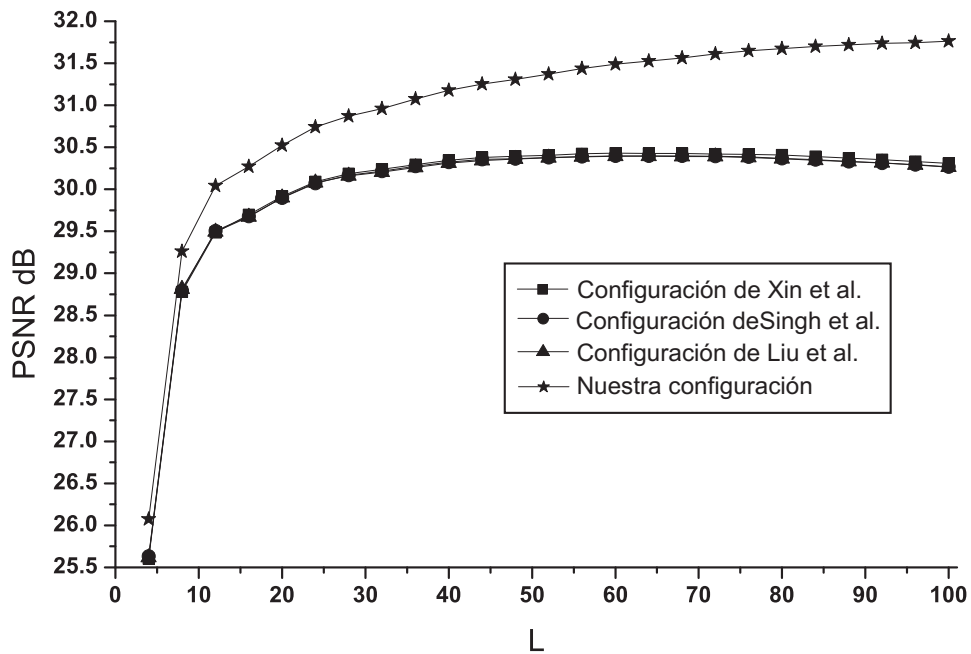
donde  $MSE$  es el error cuadrado medio, definido por

$$MSE = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} [\tilde{f}(i, j) - f(i, j)]^2. \quad (5.16)$$

La Fig. 5.5 muestra resultados de PSNR para las imágenes de prueba corrompidas por ruido gaussiano de media cero y  $\sigma^2 = 0.1$ . Como en el caso del NIRE, la configuración propuesta proporciona mejores resultados en la resistencia del ruido gaussiano que las otras configuraciones de píxeles polares.



(a)



(b)

Figura 5.5: NIRE de las imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises. “Cameraman,” (b) Imagen binaria “E”.



### 5.3.3. Mejora en la invariancia a la rotación y escala

Una de las propiedades más importantes de los momentos radiales es la representación invariante de un objeto con cambio de escala y rotada. Una medida para facilitar la comparación entre los diferentes cálculos de momentos ortogonales puede ser cuantificada por el error cuadrático medio normalizado (MSE) que viene dada por

$$NMSE \left( \left| \hat{\phi}_{nm} \right|, \left| \hat{\phi}_{nm}^{(\gamma,k)} \right| \right) = \frac{1}{L^2} \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L \frac{\left( \left| \hat{\phi}_{nm}^{(\gamma,k)} \right| - \left| \hat{\phi}_{nm} \right| \right)^2}{\left| \hat{\phi}_{nm} \right|^2}, \quad (5.17)$$

donde  $L^2$  es el número de MELF implicados en la evaluación. En la Fig. 5.6 se muestra el NMSE con ángulos de rotación de  $2^\circ$  a  $90^\circ$ , con intervalos de  $4^\circ$  y un factor de escala de 0.5. Para el ángulo de rotación y cambio de escala, los primeros 100 momentos ( $L = 10$ ) se calculan con las diferentes configuraciones de píxeles polares y la propuesta. Es evidente que la configuración de píxeles polares propuesta supera en gran medida las diferentes configuraciones en términos de su invariancia a la rotación y escala.

### 5.3.4. Comparación con otras familias de momentos radiales

En trabajos recientes se han introducido diferentes familias de momentos radiales como los ZM, WRSLMs, PZMs, PJFMs, CFM, OFMMs, RHFMs y BFM con el objetivo de encontrar los momentos radiales que mejor describan a una imagen. Sin embargo, se han calculado con la aproximación de orden cero (ZOA), la cual afecta a su habilidad de descripción. Por otra parte, la disposición de píxeles polares ha demostrado ser rápido y de alta precisión en comparación con ZOA como se demostró en el Capítulo 3. En esta subsección, los MELF se comparan con diferentes familias de momentos radiales en términos de reconstrucción de la imagen y error de reconstrucción, todos ellos son calculados con la configuración propuesta de píxeles polares. Los resultados se muestran en las Figs. 5.7 y 5.8.

Los resultados muestran que los MELF tienen una pequeña mejora con respecto a otras familias de momentos circulares; esto es debido al cálculo analítico de la integral del kernel de la Ec. (5.12). Sin embargo, no es una gran mejora con respecto a la aproximación numérica de algunos momentos circulares, tales como WRSLMs, PJFMs, CFM, MMS y RHFMs con la configuración de píxeles polares propuestas.

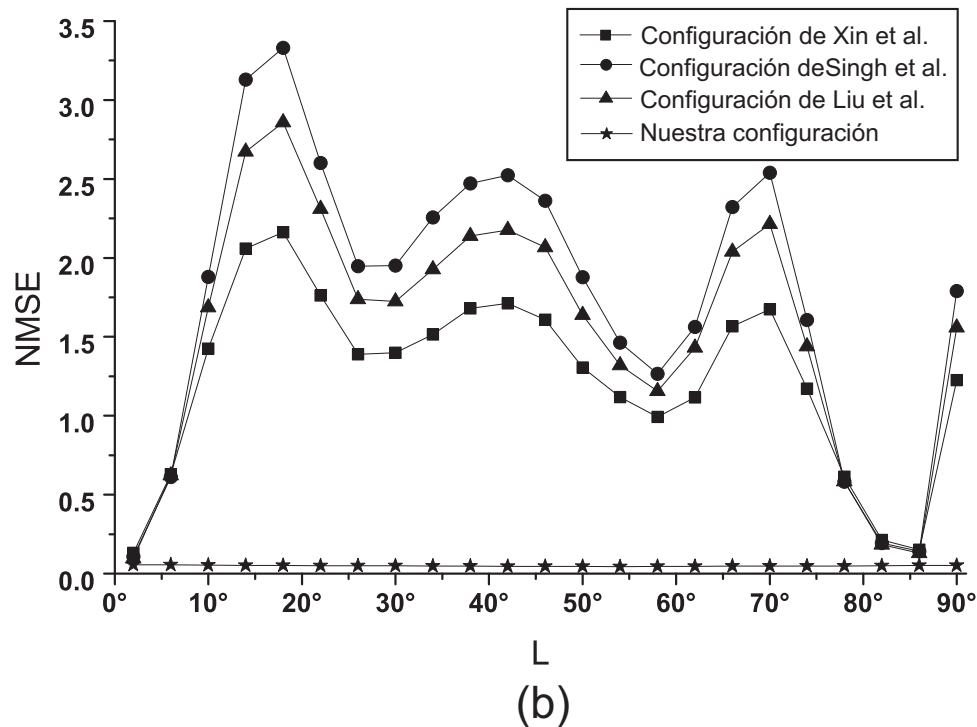
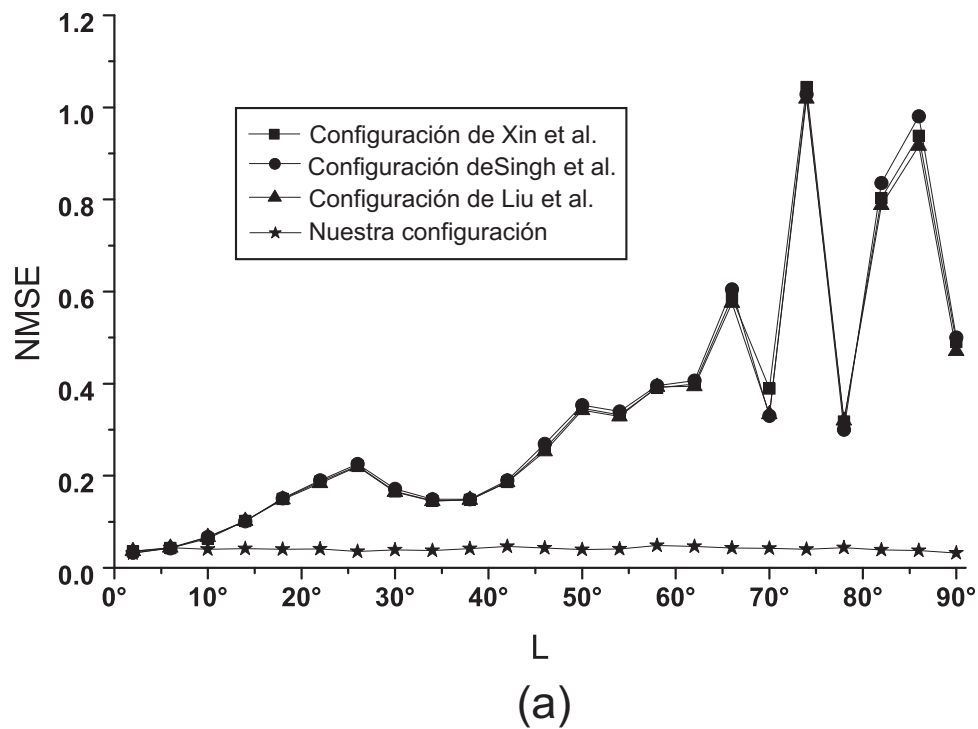


Figura 5.6: NIRE de las imágenes de prueba: (a) Imagen en escala de grises. “Cameraman “, (b) Imagen binaria ”E”.

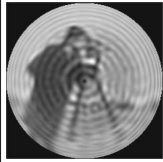


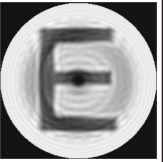
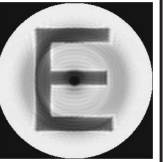
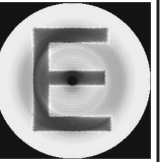
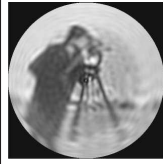


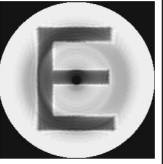
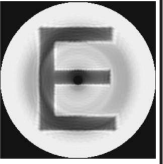
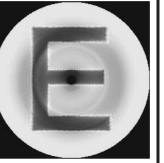
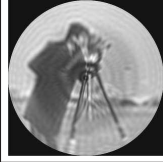


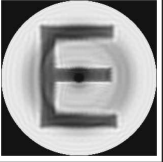
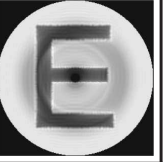
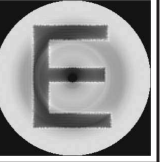
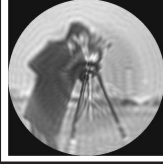



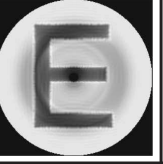
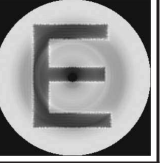
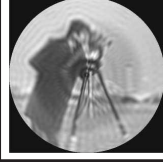



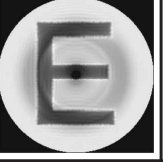
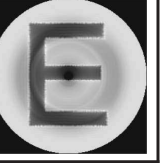
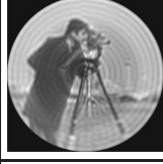


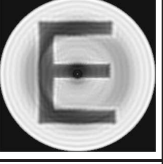
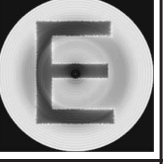
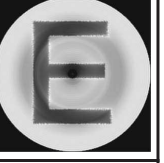
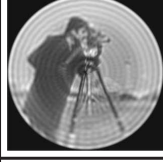


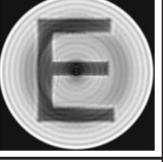
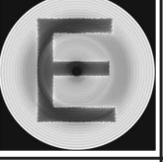
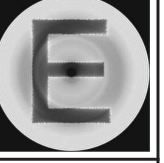
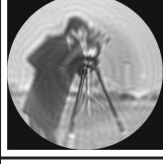


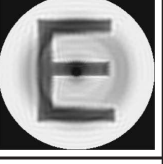
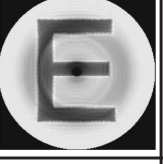
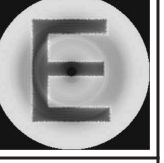
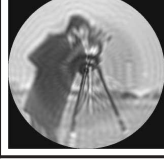


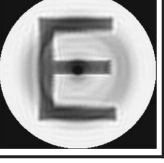
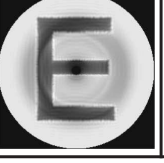
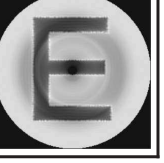
	Reconstrucción de la imagen "Camerman"			Reconstrucción de la imagen binaria "E"		
	L=40	L=60	L=80	L=40	L=60	L=80
MZ						
MPZ						
MPJF						
MCF						
MOFM						
MRHF						
MBF						
MRPDLF						
MELF						

Figura 5.7: Las imágenes de prueba reconstruidas por diferentes familias de momentos radiales con nuestra configuración de píxeles polares

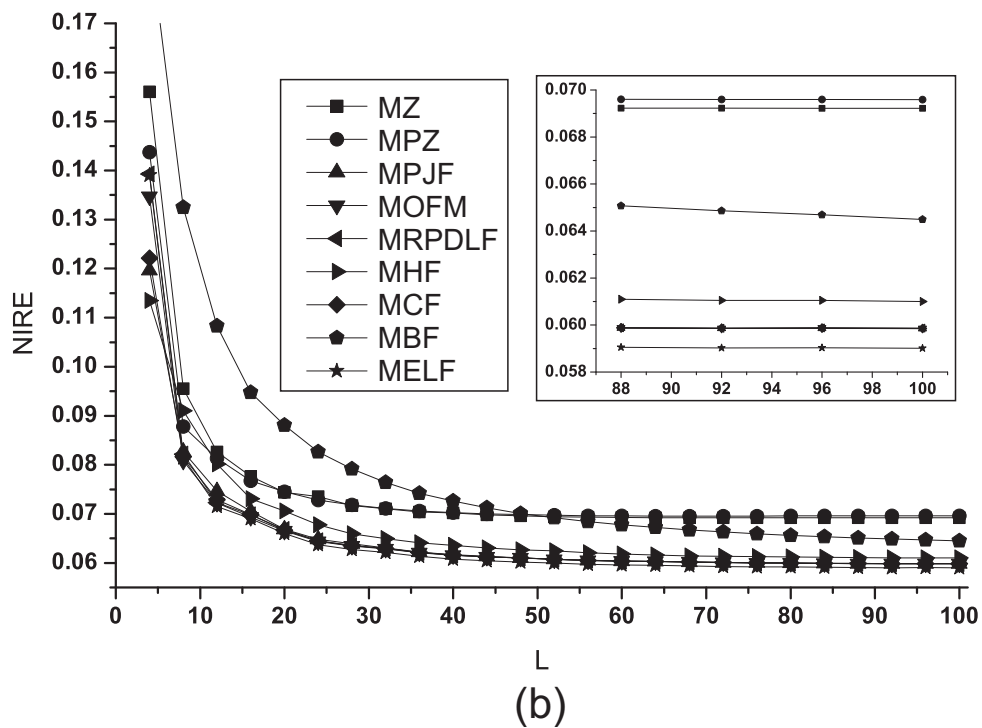
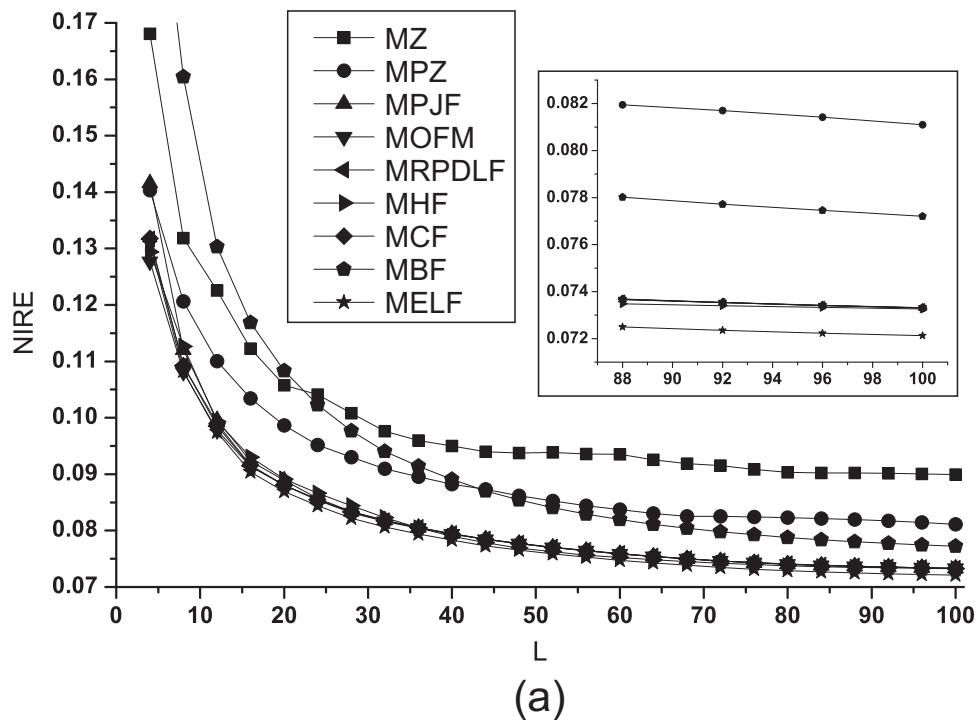


Figura 5.8: NIRE de imágenes de prueba para diferentes familias de momentos radiales con nuestra configuración de píxeles polares.

# Capítulo 6

## Aplicaciones

En el transcurso del trabajo de investigación se realizaron tres aplicaciones. La primera, pretende obtener parámetros temporales de la marcha humana de manera fácil y eficiente. En la segunda, se explora la capacidad de los momentos radiales para brindarnos información asociada a las características de la imagen, tal como el ángulo formado a partir de un punto de referencia. Finalmente, el conocimiento obtenido en el cómputo de momentos radiales se aplica a la teoría de momentos cuaternión para mejorar su capacidad descriptiva. Por otra parte, todas las aplicaciones están realizadas con los MELF.

### **6.1. Detección de las fases de la marcha humana usando momentos radiales**

La marcha humana es un mecanismo complejo en la cual una variedad de músculos trabajan en conjunto de manera coordinada para trasladarse de un lugar a otro, con poco esfuerzo y un consumo mínimo de energía. Dada la alta complejidad que se presenta para el análisis de la marcha, por lo general se describe en términos de períodos y fases para facilitar su descripción y estudio. En este sentido, el ciclo de la marcha es el período de tiempo entre dos eventos idénticos dentro del ciclo [68]. La Fig. 6.1 muestra los componentes temporales de los diferentes soportes de cada pie durante el ciclo de la marcha. En la marcha normal, el ciclo de la marcha se compone de 62 % de la fase de apoyo y 38 % la fase de impulsión, además cuenta con dos períodos de doble apoyo, el cual ocupa un total del 25 % del ciclo de la marcha.

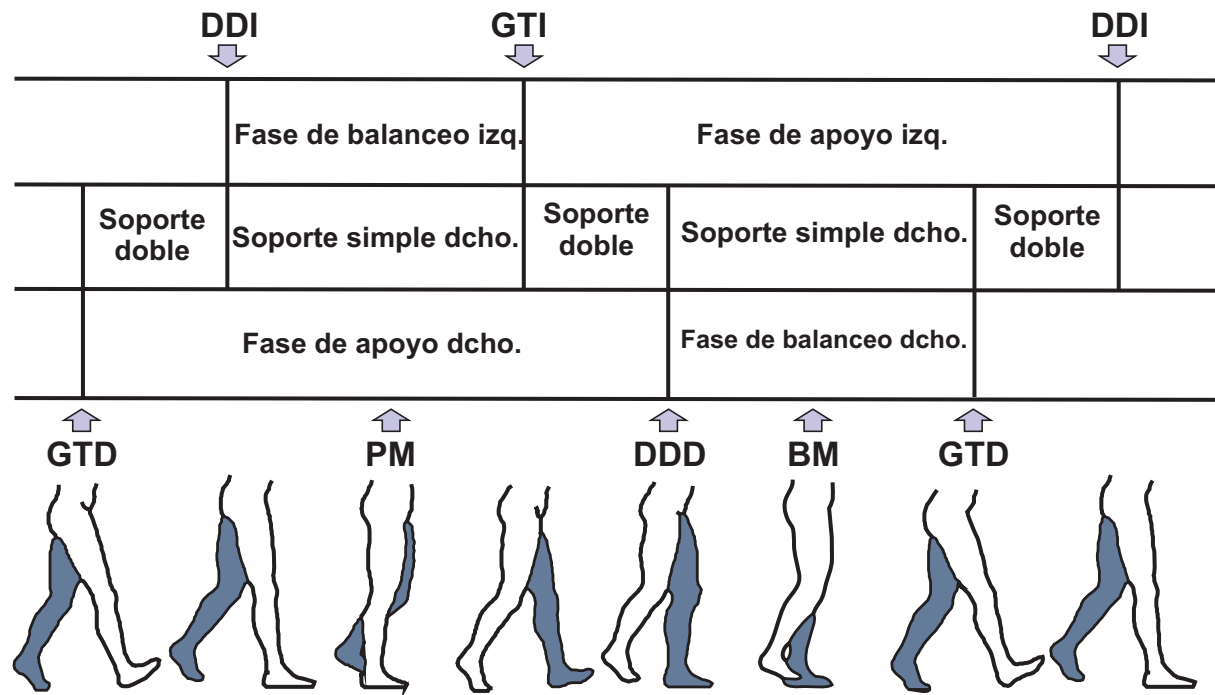


Figura 6.1: Ciclos de la marcha: golpe de talón derecho (GTD), despegue de los dedos derechos (DDD), golpe de talón izquierdo (GTI), despegue de los dedos izquierdos (DDI), postura media (PM), balanceo medio (BM).

El estudio de la marcha humana usando la técnica de momentos ortogonales ha sido estudiada en diferentes contextos, como el reconocimiento de la marcha [69][70] y reconstrucción de objetos en movimiento [71]. Una de las ventajas de usar momentos ortogonales es que requiere pocos descriptores para extraer características de la forma y el movimiento a partir de una secuencia de imágenes digitales. Por otra parte, los MELF presentan buenos resultados como se demostró en el Capítulo anterior.

Como es bien conocido momentos de bajo orden están asociados con la forma, mientras que los momentos de orden superior describen el detalle de la imagen [72]. Por lo tanto, los momentos de orden inferior se pueden utilizar para el análisis de series de tiempo a partir de un conjunto de imágenes para describir el movimiento con respecto del tiempo de un objeto o de una persona que realiza una actividad física. En el caso del análisis de la marcha humana se puede extraer información de los parámetros temporales, como la fase de oscilación, la fase de apoyo, doble apoyo y la cadencia. La Fig. 6.2 muestra el ciclo de la marcha obtenido con los MELF, de orden inferior normalizado por el momento de orden cero.

Para facilitar la localización de las fases de la marcha de la serie temporal de los MELF,

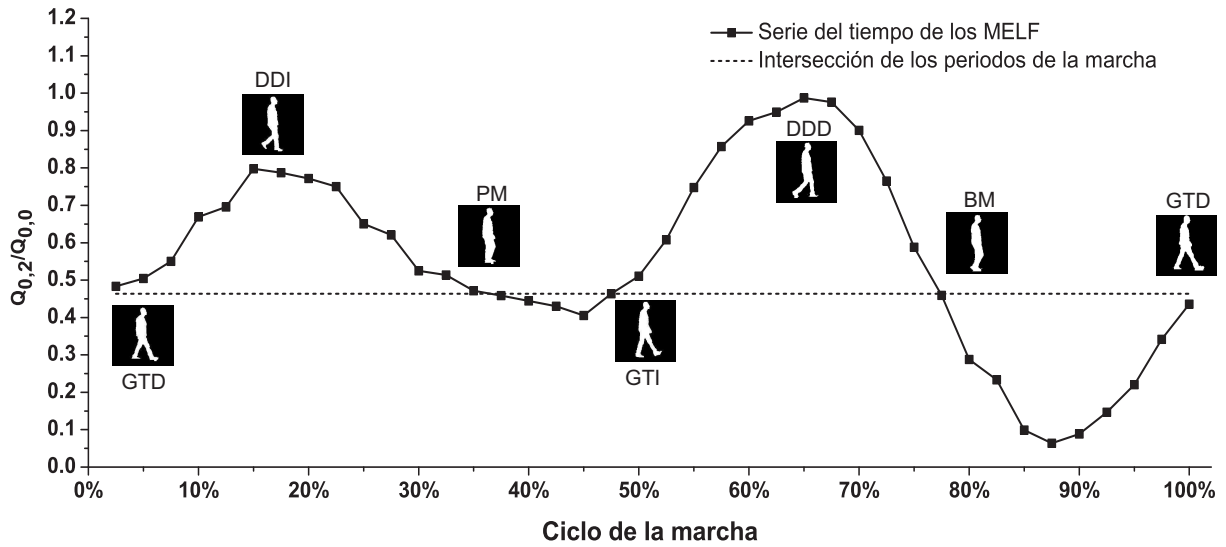


Figura 6.2: Ciclo de la marcha asociado a los MELF.

proponemos obtener estos parámetros a partir de una línea que intercepta las diferentes fases de la marcha, que está da por

$$g = \frac{\arg \max Q_{n,m}(t) - \arg \min ,Q_{n,m}(t)}{2} \quad (6.1)$$

donde  $Q_{n,m}(t)$  son los MELF de una imagen en un momento  $t$ . La línea propuesta por el valor de  $g$  cruza las fases de: golpe de talón derecho (GTD), despegue de los dedos derechos (DDD), golpe de talón izquierdo (GTI), despegue de los dedos izquierdos (DDI), postura media (PM), balanceo medio (BM), las cuales se pueden encontrar por el máximo de la serie de tiempo, todo esto puede verse en la Fig. 6.2.

El estudio experimental compara los valores medios de los parámetros temporales obtenidos de 10 sujetos de prueba con el método propuesto y el nivel de marcha normal en un adulto de sexo masculino de la población mexicana. Las imágenes fueron adquiridas con el sensor Kinect a una razón de 30 marcos por segundo, el cual puede adquirir imágenes binarizadas del contorno de las personas en tiempo real. Los participantes cumplieron con los siguientes criterios: masculino; entre 18 y 40 años; peso dentro de 65 a 82 kg. ; ausencia de cualquier patología muscular. La Tabla 6.1 muestra los valores estándar por Pérez-Orive et al. [73], los obtenidos con los momentos de Krawtchouk[74] y el calculado por los MELF.

El método propuesto es fácil de implementar y tiene un bajo costo computacional, ya que un solo descriptor puede encontrar las fases de la marcha. Los resultados obtenidos sobre la

	Perez-Orive et al. [73]		Momentos de Krawtchouk [74]		MELF	
	Media	DE	Media	DE	Media	DE
Ciclo de la marcha	1.14s	0.07s	1.23s	0.07s	1.21s	0.08
Paso	0.57s	0.04s	0.60s	0.04s	0.59s	0.06
Fase de apoyo	0.64s	0.05s	0.75s	0.06s	0.76s	0.06
Fase de balanceo	0.50s	0.03s	0.47s	0.04s	0.45s	0.05
Soporte Doble	0.07s	0.02s	0.30s	0.03s	0.29s	0.04

Tabla 6.1: Parámetros temporales del ciclo de la marcha.

duración de los parámetros de la marcha son relativamente más altos que los reportados para diferentes poblaciones, según lo informado por Pérez-Orive et al. [73]. Sin embargo, los porcentajes calculados con los MELF corresponden a los valores estándar, a diferencia de porcentajes de Perez-Orive et al. [73] y similares a los obtenidos con los momentos de Krawtchouk para la población masculina adulta mexicana. Creemos que el método propuesto servirá para el análisis de la marcha humana y los resultados presentados pueden contribuir con una nueva propuesta para analizar la forma de caminar.

## 6.2. Estimación de ángulos usando momentos radiales

Los momentos radiales son ampliamente utilizados en el reconocimiento de patrones, el análisis de imagen y visión artificial, tienen la capacidad de caracterizar, evaluar y manipular información visual con mínima redundancia. Numerosos trabajos sólo se centran en la extracción de características globales o locales, y no en la información relacionada con la forma de la imagen. Por otra parte, Hu [3] propuso los momentos centrales que pueden encontrar patrones geométricos tales como la densidad, centroide, tamaño y la orientación de la imagen. El ángulo de orientación se obtiene por el método de los ejes principales que se limita a  $|\theta| < 45^\circ$ , y patrones que no tienen simetría circular.

En esta subsección se aborda el problema de estimar el ángulo formado a partir de un punto de referencia a otro, independientemente del tipo de simetría que tenga la imagen. Para lograr esto, proponemos predecir el ángulo con la información de la imagen usando momentos radiales y un conjunto de imágenes de entrenamiento. Nuestro objetivo es construir una función que tome una matriz de momentos radiales  $\phi_{n,m}$ , y predecir el ángulo  $\theta$  relacionado con la forma de la imagen, esto se puede lograr mediante la adopción de un enfoque de aprendizaje en la que



un conjunto de momentos radiales  $I \in \{\phi_{n,m}^1, \phi_{n,m}^2, \dots, \phi_{n,m}^L\}$  llamado conjunto de entrenamiento es utilizado para ajustar los parámetros del modelo a un vector objetivo  $\theta_i$ . El modelo de regresión lineal múltiple puede referirse a una combinación lineal de descriptores de forma, que corresponden a valores de  $\theta_i$ , puede ser estimados de la siguiente manera,

$$\theta_i = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L c_{n,m} \phi_{n,m}^i, \quad (6.2)$$

donde  $L$  es el número máximo de momentos,  $c$  son los parámetros de la función lineal. Con el fin de evaluar el método propuesto, hemos considerado tres casos diferentes como se muestra en la Fig. 6.3.

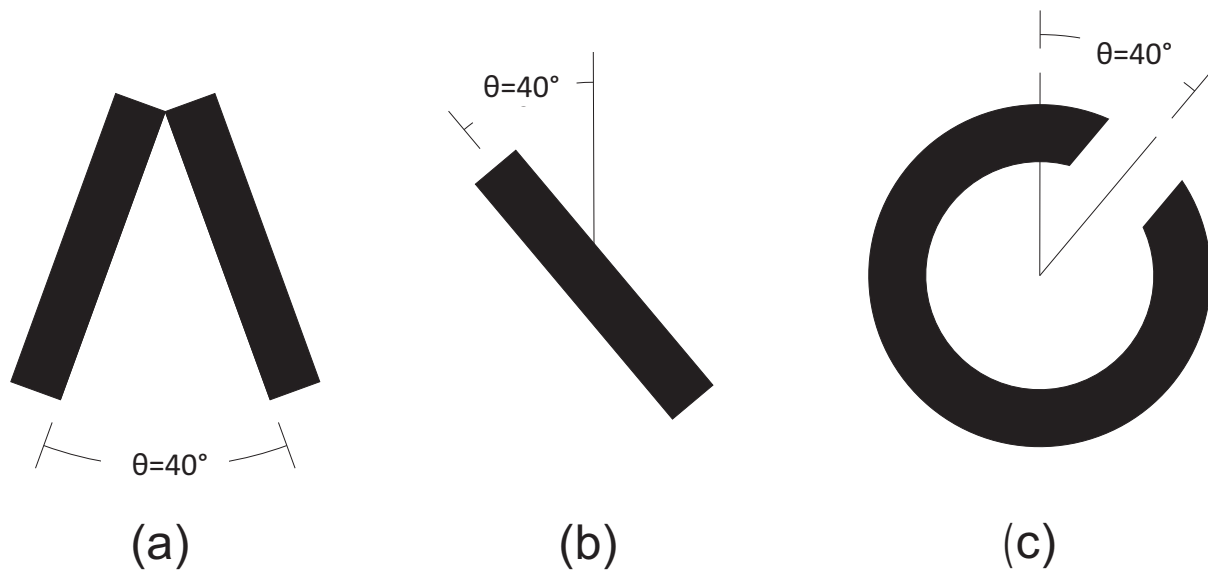


Figura 6.3: Tres casos diferentes de imágenes que forman ángulos a partir de un punto de referencia.

En muchos de los casos para determinar los coeficientes  $c$  de la Ec. 6.2 es necesario utilizar un conjunto de entrenamiento. Supongamos que tenemos un conjunto de entrenamiento  $I$ , junto con los valores de las observaciones asociadas a los valores de  $\theta$ . La Fig. 6.4 muestra un conjunto de imágenes de entrenamiento que consta de 20 imágenes con ángulos de  $2^\circ$  a  $40^\circ$ , con intervalos de  $2^\circ$ . Los coeficientes  $c_{n,m}$  se pueden resolver mediante un enfoque de mínimos cuadrados, el cual minimiza la función de error cuadrático de los momentos radiales y el ángulo asociado.

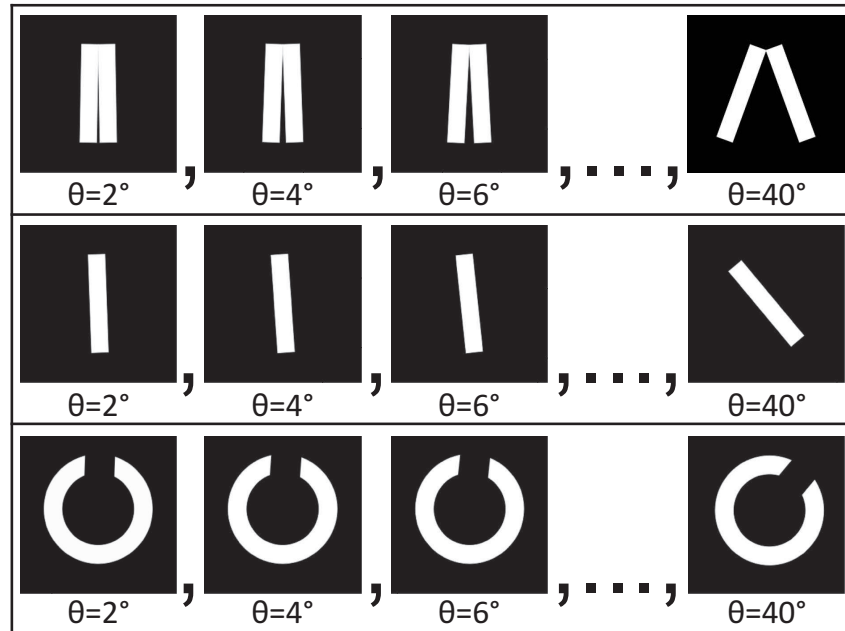


Figura 6.4: Conjunto de entrenamiento de los tres casos propuestos.

Para evaluar el ajuste de las imágenes de prueba de la Fig. 6.4 con sus momentos, utilizamos 4 series de imágenes de prueba: imágenes libres de degradación, imágenes degradadas con ruido, imágenes con cambio de escala y una combinación de ambos, estos se describen a continuación:

Conjunto 1: *imágenes libres de degradación*. El conjunto de prueba consiste en 40 imágenes libres de degradación, con tamaño  $256 \times 256$  píxeles con ángulos de  $1^\circ$  a  $39^\circ$  con intervalos de  $2^\circ$ .

Conjunto 2 : *imágenes degradadas con ruido*. El conjunto de prueba consiste en 40 imágenes degradada con ruido de sal y pimienta con densidad del 0.02 % , con tamaño de  $256 \times 256$  píxeles ángulos de  $1^\circ$  a  $39^\circ$ , en intervalos de  $2^\circ$ .

Conjunto 3 : *imágenes con cambios de escala*. El conjunto de prueba consiste en 40 imágenes con cambio de escala  $k = 0.5$ , tamaño de  $128 \times 128$  píxeles, ángulos de  $1^\circ - 39^\circ$ , en intervalos de  $2^\circ$ .

Conjunto 4: *imágenes degradadas con ruido y con cambios de escala*. El conjunto de prueba consiste en 40 imágenes degradadas con ruido sal y pimienta con densidad del 0.02 % y cambio de escala de  $k = 0.5$ , con tamaño de  $128 \times 128$  píxeles, con ángulos de  $1^\circ$  a  $39^\circ$ , en intervalos de  $2^\circ$ .

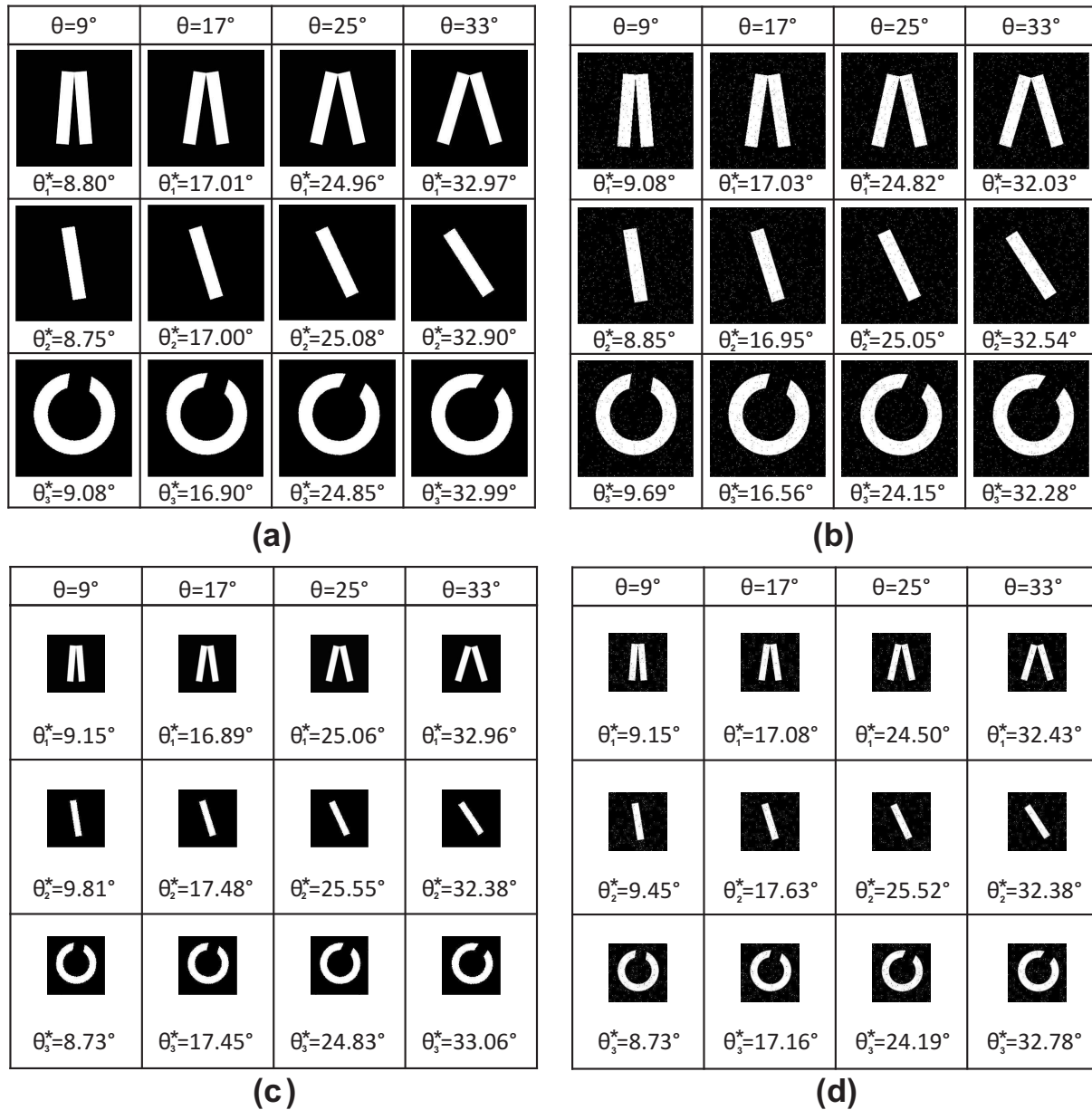


Figura 6.5: Estimación de los ángulos usando: (a) imágenes libres de degradación, (b) imágenes degradadas con ruido, (c) imágenes con cambios de escala, (d) imágenes degradadas con ruido y con cambios de escala.

En la Fig. 6.5 se presentan algunos de los resultados de los equipos de prueba. Cabe señalar que las imágenes que se muestran no son parte del conjunto de entrenamiento. En la Tabla 6.2 se muestra una comparación entre el método propuesto con el cálculo de los momentos centrales y los momentos de Hahn [75] para los 4 conjuntos de la Fig. 6.3(b). Como se puede ver, el método de Hu con los momentos centrales funciona mejor para los conjuntos que no fueron afectadas por el ruido, independientemente de los cambios de escala (conjuntos 1 y 3), y

		$\theta = 9^\circ$	$\theta = 17^\circ$	$\theta = 25^\circ$	$\theta = 33^\circ$
Conjunto 1	Momentos Hahn [75]	8.95°	17.01°	24.95°	33.06°
	Hu [3]	9.00°	17.00°	25.00°	33.00°
	<i>MELF</i>	8.75°	17.00°	25.52°	32.90°
Conjunto 2	Momentos Hahn [75]	9.65°	17.21°	25.57°	32.70°
	Hu [3]	8.26°	17.22°	25.46°	33.95°
	<i>MELF</i>	8.85°	16.95°	25.05°	32.54°
Conjunto 3	Momentos Hahn [75]	8.91°	17.29°	25.43°	33.22°
	Hu [3]	9.00°	17.00°	25.00°	33.00°
	<i>MELF</i>	9.11°	17.48°	25.55°	33.54°
Conjunto 4	Momentos Hahn [75]	9.27°	16.53°	23.93°	33.27°
	Hu [3]	9.34°	16.50°	24.83°	33.66°
	<i>MELF</i>	9.45°	17.63°	25.52°	32.38°

Tabla 6.2: Comparación de los resultados de los conjuntos de prueba para distintos métodos.

un rendimiento similar a los conjuntos afectados por el ruido (conjuntos 2 y 4). Por otra parte, los momentos radiales tiene mayor resistencia para el ruido (Conjunto 2) a diferencia de los momentos geométricos y los momentos de Hahn. El error porcental se muestra en la Tabla 6.3. En conclusión, el método propuesto muestra cómo se utilizan los momentos radiales para extraer información, tales como el ángulo que se forma en una imagen a partir de un punto de referencia. Asimismo, el método puede adaptarse a diferentes simetrías como el caso de la Fig. 6.3(a), a diferencia del cálculo con los momentos centrales, donde los ejes principales del método deben coincidir con los puntos de referencia del ángulo como en el caso de la Fig. 6.3(b). El método de ejes principales tiene un mejor rendimiento para las imágenes que giran en su centro y que no tienen simetría radial. Además, el algoritmo ha demostrado ser rápido, fiable, y puede ser implementado en los problemas asociados con la inspección visual automatizada, entre otras aplicaciones.

Conjunto 1	Momentos Hahn [75]	0.6 %	0.06 %	0.2 %	0.18 %
	Hu [3]	0 %	0 %	0 %	0 %
	<i>MELF</i>	2.8 %	0 %	2.1 %	0.3 %
Conjunto 2	Momentos Hahn [75]	7.2 %	1.2 %	2.3 %	0.9 %
	Hu [3]	8.2 %	1.3 %	1.8 %	2.9 %
	<i>MELF</i>	1.7 %	0.3 %	0.2 %	1.4 %
Conjunto 3	Momentos Hahn [75]	1 %	1.7 %	1.72 %	0.7 %
	Hu [3]	0 %	0 %	0 %	0 %
	<i>MELF</i>	1.2 %	2.8 %	2.2 %	1.6 %
Conjunto 4	Momentos Hahn [74]	3 %	16.53°	4.3 %	0.8 %
	Hu [3]	3.8 %	2.9 %	0.7 %	2 %
	<i>MELF</i>	5 %	3.7 %	2.1 %	1.9 %

Tabla 6.3: Error porcentual de la Tabla 6.2

### 6.3. Momentos cuaternión

En los últimos años, los momentos de cuaternión se han utilizado como un método novedoso para el procesamiento de imágenes en color. La ventaja de usar la teoría de cuaterniones para manejar una imagen en color, es que existe una correlación entre las componentes del color que puede ser tomada en consideración [76]. La teoría de cuaterniones se introdujo formalmente por el matemático Hamilton en 1843 [77], es una generalización de los números complejos. Un cuaternión  $q$  consiste en una parte real y tres partes imaginarias,

$$q = a + bi + cj + dk, \quad (6.3)$$

donde  $a, b, c, y d$  son números reales, y  $i, j$  y  $k$  son tres unidades imaginarias obedeciendo las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}
 i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\
 ij &= -ji = k, \\
 jk &= -kj = i, \\
 ki &= -ik = j.
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

El conjugado y el módulo de un cuaternión se definen respectivamente por

$$q^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}, |q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad (6.5)$$

Usando la representación cuaternión, una imagen RGB  $f(r, \theta)$  definida en coordenadas polares, está dado de la siguiente manera,

$$f(r, \theta) = f_R(r, \theta)\mathbf{i} + f_G(r, \theta)\mathbf{j} + f_B(r, \theta)\mathbf{k}. \quad (6.6)$$

De acuerdo con la propiedad no conmutativa de la multiplicación de cuaterniones, hay dos tipos de momentos exactos cuaternión de Legendre-Fourier (MECLF); la transformada MECLF derecha

$$\phi_{n,m}^{\text{right}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) L_n(r) \exp(-\mu m \theta) r dr d\theta, \quad (6.7)$$

y la izquierda, la cual está dada por

$$\phi_{n,m}^{\text{left}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \exp(-\mu m \theta) f(r, \theta) L_n(r) r dr d\theta, \quad (6.8)$$

donde  $\mu$  es un cuaternión puro unidad elegido como  $\mu = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) / \sqrt{3}$ . Debido a la propiedad anti-involución del cuaternión, el conjugado del lado izquierdo y del lado derecho, cumplen con la siguiente relación:

$$\phi_{n,m}^{\text{left}} = -\phi_{n,-m}^{\text{right}}. \quad (6.9)$$

Para el cálculo de los MECLF en píxeles polares de lado derecho, representamos  $\hat{f}_R$ ,  $\hat{f}_G$  y  $\hat{f}_B$  como los componentes de imagen RGB, que son transformados a un esquema de píxeles polares. Sustituyendo la Ec. (6.6) dentro de la Eq. (6.7) y usando la Ec. (6.4), podemos obtener los MECLF. La simplificación del cálculo de los momentos de cuaternión está dada por [76, 78, 79],

$$\phi_{n,m}^{\text{right}} = A_{n,m}^{\text{right}} + \mathbf{i}B_{n,m}^{\text{right}} + \mathbf{j}C_{n,m}^{\text{right}} + \mathbf{k}D_{n,m}^{\text{right}}, \quad (6.10)$$

donde

$$\begin{aligned}
A_{n,m}^{\text{right}} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_R \right) \right) + \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_G \right) \right) + \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_B \right) \right) \right] , \\
B_{n,m}^{\text{right}} &= \text{Re} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_R \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_G \right) \right) - \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_B \right) \right) \right] , \\
C_{n,m}^{\text{right}} &= \text{Re} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_G \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_B \right) \right) - \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_R \right) \right) \right] , \\
D_{n,m}^{\text{right}} &= \text{Re} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_B \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_R \right) \right) - \text{Im} \left( \widehat{\phi}_{nm} \left( \widehat{f}_G \right) \right) \right] . \quad (6.11)
\end{aligned}$$

La expresión  $\widehat{\phi}_{nm}(\cdot)$  representa los momentos exactos de Legendre en píxeles polares. Por otra parte, la reconstrucción de la imagen puede ayudar a determinar qué tan bien una imagen puede ser caracterizada por un conjunto finito de momentos cuaternión. Según la transformada inversa de los cuaterniones, una imagen de color  $f(r, \theta)$  puede ser reconstruida por un número finito de MECLF, que viene dada por

$$\widetilde{f}(r, \theta) = \widetilde{f}_A(r, \theta) + \widetilde{f}_B(r, \theta) \mathbf{i} + \widetilde{f}_C(r, \theta) \mathbf{j} + \widetilde{f}_D(r, \theta) \mathbf{k} \quad (6.12)$$

donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_A(r, \theta) &= \text{Re} \left( \widetilde{A}(r, \theta) \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widetilde{B}(r, \theta) \right) + \text{Im} \left( \widetilde{C}(r, \theta) \right) + \text{Im} \left( \widetilde{D}(r, \theta) \right) \right] , \\
\widetilde{f}_B(r, \theta) &= \text{Re} \left( \widetilde{B}(r, \theta) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widetilde{A}(r, \theta) \right) + \text{Im} \left( \widetilde{C}(r, \theta) \right) - \text{Im} \left( \widetilde{D}(r, \theta) \right) \right] , \\
\widetilde{f}_C(r, \theta) &= \text{Re} \left( \widetilde{C}(r, \theta) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widetilde{A}(r, \theta) \right) - \text{Im} \left( \widetilde{B}(r, \theta) \right) + \text{Im} \left( \widetilde{D}(r, \theta) \right) \right] , \\
\widetilde{f}_D(r, \theta) &= \text{Re} \left( \widetilde{D}(r, \theta) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \text{Im} \left( \widetilde{A}(r, \theta) \right) + \text{Im} \left( \widetilde{B}(r, \theta) \right) - \text{Im} \left( \widetilde{C}(r, \theta) \right) \right] \quad (6.13)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L A_{n,m}^{\text{right}} L_n(r) \exp(jm\theta), \\
\tilde{B}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L B_{n,m}^{\text{right}} L_n(r) \exp(jm\theta), \\
\tilde{C}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L C_{n,m}^{\text{right}} L_n(r) \exp(jm\theta), \\
\tilde{D}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L D_{n,m}^{\text{right}} L_n(r) \exp(jm\theta).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Note que  $\tilde{f}_B(r, \theta)$ ,  $\tilde{f}_C(r, \theta)$ , y  $\tilde{f}_D(r, \theta)$  representan los componentes rojo, verde y azul de la imagen de color reconstruida respectivamente, y  $L$  es el orden máximo de los MECLF utilizados en la reconstrucción. La medida para el error de reconstrucción de una imagen en color que considera los tres canales, la cual está dada por

$$\text{Media\_NIRE} = \frac{NIRE_R + NIRE_G + NIRE_B}{3}. \tag{6.15}$$

La aproximación de orden cero se utiliza comúnmente en cálculo de los momentos de cuaternion debido a que es fácil su implementación. Sin embargo, requiere reemplazar la doble integral por una doble sumatoria. Típicamente, esta aproximación crea una mala reconstrucción de imágenes RGB. Por esta razón, Karakasis et al [80] propuso una aproximación numérica que utiliza algunas relaciones de recurrencia con el fin de mejorar su rendimiento en el cálculo de los momentos cuaternión. En esta sección, se compara el enfoque de píxeles polares con aproximación de orden cero y la aproximación numérica en términos de su reconstrucción de imágenes RGB, el error de la reconstrucción y el tiempo de cómputo. En las Figs. 6.6 y 6.7 se muestra la imagen estándar de Lena reconstruida y el NIRE respectivamente.



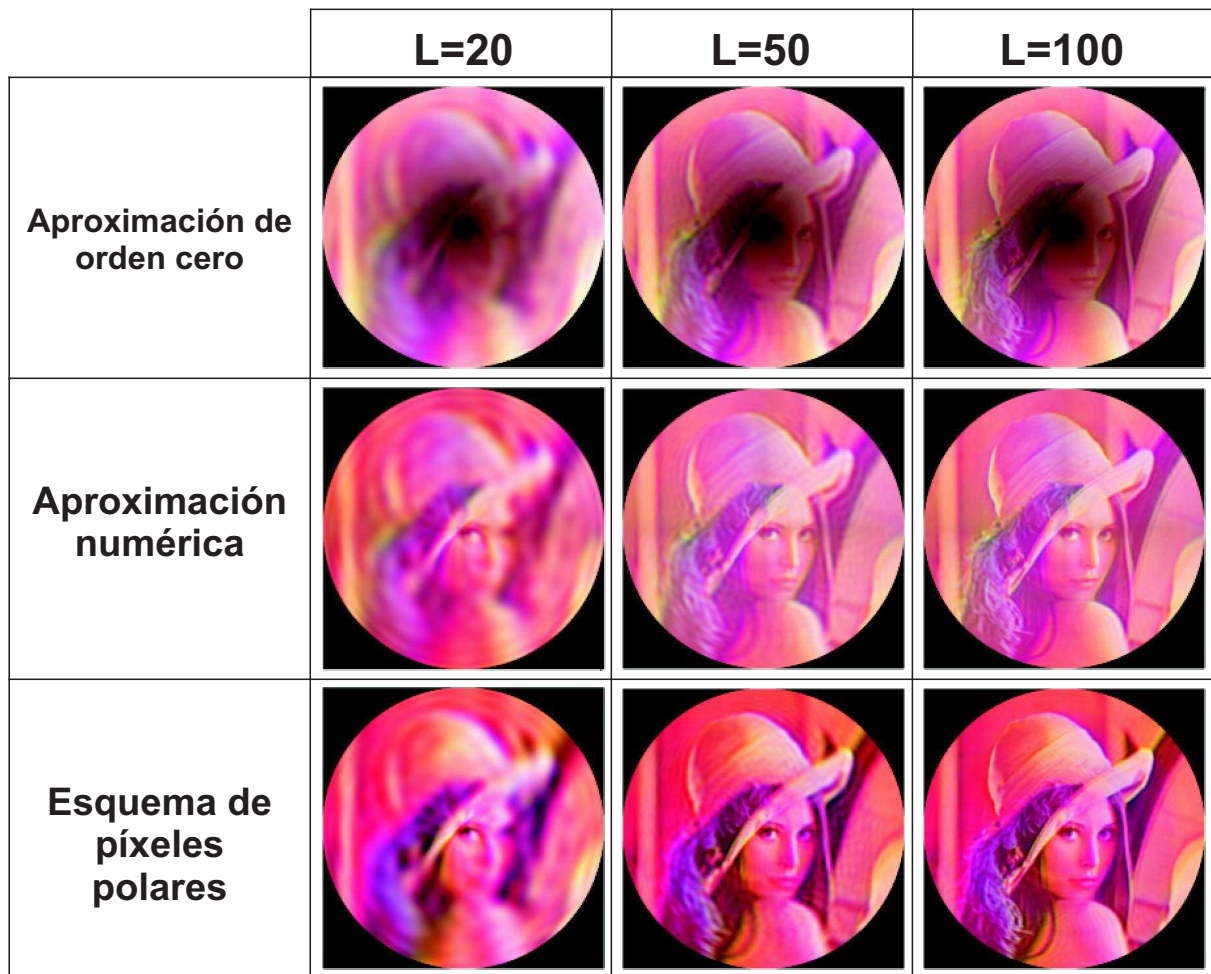


Figura 6.6: Reconstrucción de la imagen estándar de Lena de  $512 \times 512$  píxeles con diferentes métodos para  $L = 20, 50, 100$ .

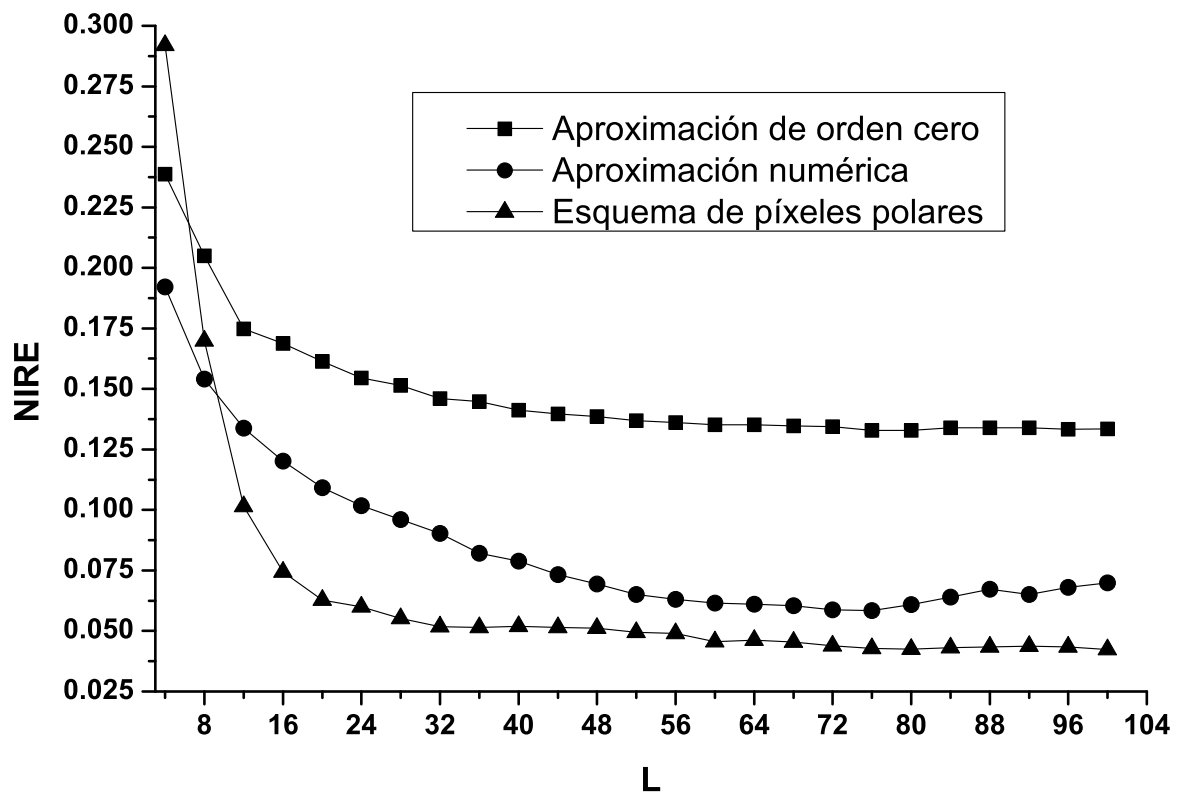


Figura 6.7: Reconstrucción de la imagen estándar de Lena de  $512 \times 512$  píxeles con diferentes métodos.

Dado que el tiempo de cálculo no depende del contenido de la imagen, sólo utilizamos una imagen estándar para el análisis. El código se implementa utilizando Matlab con una computadora Sony Electronics Inc. Modelo VAIO Computer Notebook PC con un procesador Intel Core™i5-2430M CPU 2.40-GHz, 4.00 GB de RAM. La Fig. 6.8 muestra el tiempo de cómputo de los diferentes métodos. El cálculo de aproximación de orden cero tiene tiempos de cómputo menores. Sin embargo, el esquema de píxeles polares tiene tiempos de cómputo razonables con un mínimo error de reconstrucción.

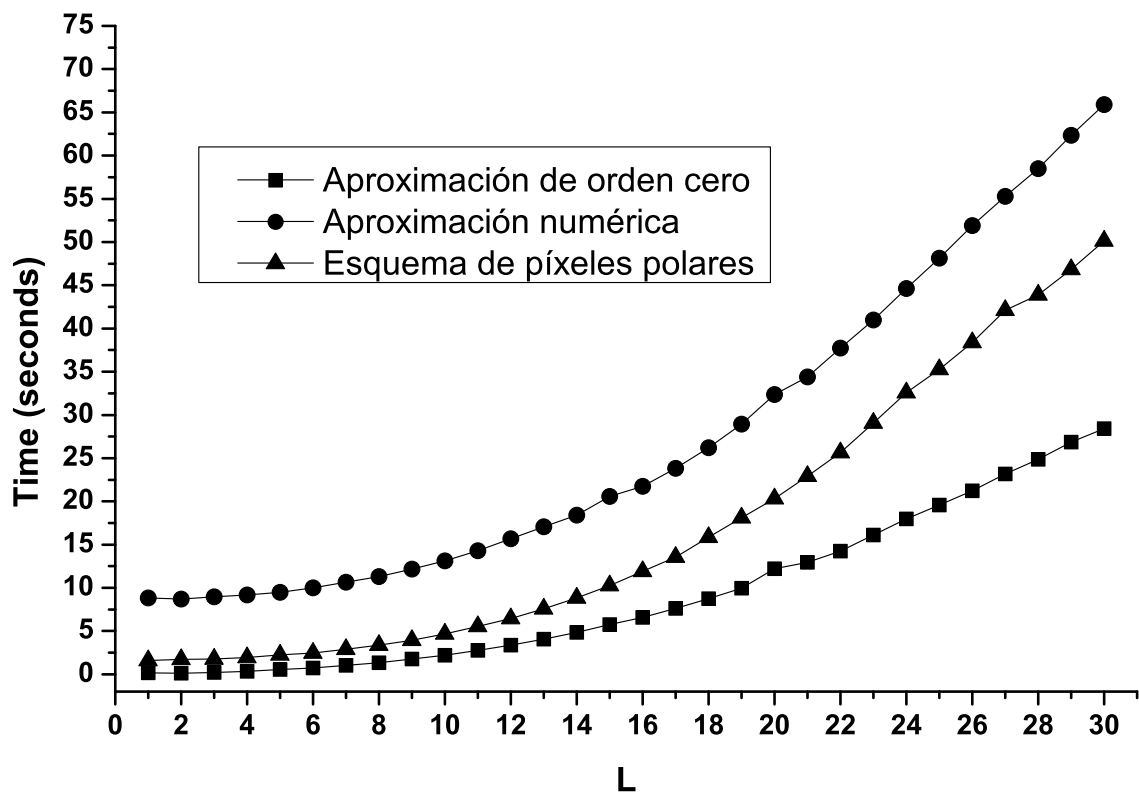


Figura 6.8: Tiempo de cómputo de la imagen estándar de Lena con el tamaño de  $512 \times 512$  píxeles para diferentes métodos.



# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajo a futuro

El trabajo de tesis propone una perspectiva general de las diferentes problemáticas en el cómputo de los momentos radiales y sus posibles soluciones. Por otra parte, la mejora en el cómputo de los momentos radiales trae como consecuencia un mejor desempeño en las aplicaciones. Las aportaciones más significativas están detalladas a continuación:

### **Análisis comparativo**

En este trabajo de tesis se realiza una revisión de las distintas maneras de calcular los momentos radiales. Entre los más conocidos, se analizan los métodos de la aproximación de orden cero, ortogonalización de Gram-Schmidt, aproximación por mínimos cuadrados, aproximación numérica y esquema de píxeles polares. El análisis realizado determina que el enfoque de píxeles polares tiene un mejor desempeño en el error de reconstrucción y tiempos de cómputo en comparación con los otros métodos. También, no tiene el problema de la redundancia de información para altos ordenes como el método de la aproximación por mínimos cuadrados y la ortonormalización de Gram-Schmidt.

### **Relaciones de recurrencia**

Los polinomios ortogonales calculados con la función hipergeométrica generan inestabilidad numérica para altos ordenes. Por tal motivo, en el *Capítulo 3* se propuso una relación de recurrencia con respecto a  $n$  para los polinomios desplazados de Jacobi, libres de inestabilidad numérica. También, se realizó la simplificación para los casos más comunes, los cuales fueron colocados en la Tabla 4.1. La relación de recurrencia propuesta mejora notablemente la reconstrucción de imágenes con momentos de alto orden.

### **Búsqueda de las mejores familias de momentos radiales**

Para realizar la búsqueda de las mejores familias de momentos radiales, se propone un novedoso enfoque para el cómputo de alta precisión con el método de píxeles polares de los momentos genéricos de Jacobi-Fourier (MGJF). Además, éste enfoque permite generar diferentes conjuntos de momentos radiales. Ping et al. [30] sugieren que la formulación común de los momentos radiales mediante los polinomios genéricos de Jacobi, puede generar un beneficio para el análisis del rendimiento de los momentos radiales y la búsqueda del momento radial supremo. Desafortunadamente, esta idea ha sido ignorada por los altos costos computacionales. Nuestro método facilita la búsqueda de los parámetros óptimos que mejor se ajustan para determinadas aplicaciones. La disposición de píxeles polares y la relación de recurrencia propuesta, mejora el tiempo de cómputo y el error de reconstrucción de imágenes de nivel de gris de gran tamaño (mayores a 128 x 128 píxeles). La estabilidad numérica y exactitud de nuestro método se demuestra a través del NIRE, como se observa en la Fig. 4.4 También, tiene una estabilidad numérica mayor que el métodos de Xin et al.[6], esto se debe a que el cómputo está libre de factoriales y de potencias de  $r$ , lo que permite el cálculo de órdenes superiores. Por último, hemos reconstruido imágenes de nivel de gris como las imágenes del iris, la retina y Ronchigrama con los MGJF. El contraste en las imágenes reconstruidas ha sido prácticamente recuperado en forma general con los parámetros  $\alpha = \beta$  en particular cuando  $\alpha = \beta = 1$ , los cuales son los parámetros para los momentos de Legendre-Fourier. Al seleccionar la mejor familia de momentos radiales ayuda a que tengan una mejor capacidad descriptiva.

### **Momentos Exactos de Legendre-Fourier**

Con la experiencia adquirida en este trabajo de investigación, se propone una nueva configuración para la distribución de los píxeles polares; la cual facilita la implementación; es eficiente en términos de reconstrucción de la imagen y es robusta al ruido. Además, se utilizaron los valores numéricos reales de la imagen original en el configuración propuesta, a diferencia de las configuraciones de Xin et al.[6], Singh et al.[7], y Liu et al.[8], que requiere una interpolación numérica para obtener los valores de cada pixel polar. El cálculo exacto de la integral de los polinomios desplazados de Legendre de la Ec. (5.12), elimina los errores de la aproximación numérica. Esto se ve en la *Sección 4* del *Capítulo 4*, donde se comparan los MELF con otras

familias de momentos circulares usando integración numérica. En general, los MELF consideran los diferentes enfoques en el cómputo de los momentos radiales. Asimismo, tienen una alta precisión en comparación con otros métodos. Se demostró que pueden ser rápidos, numéricamente más estables para altos ordenes y tienen un mejor desempeño en comparación con otras familias de momentos radiales en términos del error de reconstrucción.

Existe una gama amplia de aplicaciones que pueden ser mejoradas con el enfoque propuesto en este trabajo de tesis. Como trabajo a futuro se propone explorar los siguientes temas:

- Proponer momentos cuaternión exactos con los polinomios de Legendre y compararlo con los momentos de cuaternión existentes.
- Implementar la configuración propuesta de píxeles polares para los momentos radiales discretos introducidos por Mukundan [81] y realizar una comparación.
- Proponer un nuevo método para eliminar el sobreajuste que generan los métodos de mínimos cuadrados y la ortonormalización de Gram-Schmidt, ya que tienen buenos resultados y son de fácil implementación.





# Apéndice A

## Lista de trabajos relacionados

- C. Camacho-Bello, C. Toxqui-Quitl, A. Padilla-Vivanco, and J. J. Báez-Rojas, “High-precision and fast computation of Jacobi-Fourier moments for image description,” *J. Opt. Soc. Am. A*, 31, pp. 124–134 (2014).
- C. Camacho-Bello, C. Toxqui-Quitl, and A. Padilla-Vivanco, “Chapter 8: Generic Orthogonal Moments and Applications,” in *Moments and Moment Invariants*. Edited Book by George Papakostas, (Science Gate Publishing, Xanthi, Greece, 2014).
- C. Camacho-Bello and J. Báez-Rojas, “Angle Estimation Using Hahn Moments for Image Analysis,” in *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8827, edited by E. Bayro-Corrochano and E. Hancock (Springer International Publishing, 2014) pp. 127-134.
- C. Camacho-Bello and J. Báez-Rojas, “Krawtchouk Moments for Gait Phase Detection,” in *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8827, edited by E. Bayro-Corrochano and E. Hancock (Springer International Publishing, 2014) pp. 787-793.
- C. Camacho-Bello, J. J. Báez-Rojas, C. Toxqui-Quitl, and A. Padilla-Vivanco, “Color image reconstruction using Quaternion Legendre-Fourier moment in polar pixels,” *International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (IC-MEAE)*, pp.3-8, (2014).



# Bibliografía

- [1] G.A. Papakostas. Improving the recognition performance of moment features by selection. In U. Stanczyk and L.C. Jain, editors, *Feature Selection for Data and Pattern Recognition*. Springer-Verlag, in press.
- [2] M.R. Teague. Image analysis via the general theory of moments. *J. Opt. Soc. Am.*, 70(8):920-930, 1980.
- [3] M.K. Hu. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Transactions on Information Theory*, 8(2):179-187, 1962.
- [4] S.X. Liao and M. Pawlak. On the accuracy of Zernike moments for image analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20(12):1358-1364, 1998.
- [5] C.Y. Wee and R. Paramesran. On the computational aspects of Zernike moments. *Image and Vision Computing*, 25(6):967-980, 2007.
- [6] M. Pawlak and S.X. Liao. On the recovery of a function on a circular domain. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(10):2736-2753, 2002.
- [7] C. Singh and E. Walia, "Computation of Zernike moments in improved polar configuration" *Image Processing, IET*, vol.3, no.4, 217-227, 2009.
- [8] Liu, C.; Huang, X.-H.; Wang, M.: "Fast computation of Zernike moments in polar coordinates", *IET Image Processing*, 6, (7), 996-1004, 2012.
- [9] C. Singh, E. Walia, and R. Upneja, Accurate calculation of Zernike moments. *Information Sciences*, 233, 255-275, 2013.

- [10] C. Singh, and R. Upneja, Accurate computation of orthogonal fourier-mellin moments. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 44(3), 411-431, 2012.
- [11] J. Y. Wang, and D. E. Silva, Wave-front interpretation with Zernike polynomials. *Applied optics*, 19(9), 1510-1518, 1980.
- [12] D. Malacara, *Optical shop testing*. Vol. 59. Ed. John Wiley & Sons, 2007.
- [13] E.C. Kintner. On the mathematical properties of the Zernike polynomials. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 23(8):679 680, 1976.
- [14] A. Prata and W. Rusch. Algorithm for computation of Zernike polynomials expansion coefficients. *Appl. Opt.*, 28(4):749 754, 1989.
- [15] R. Mukundan and K.R. Ramakrishnan. Fast computation of Legendre and Zernike moments. *Pattern Recognition*, 28(9):1433 1442, 1995.
- [16] C.W. Chong, P. Raveendran, and R. Mukundan. A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, 36(3):731 742, 2003.
- [17] G.A. Papakostas, Y.S. Boutalis, D.A. Karras, and B.G. Mertzios. Modified factorial-free direct methods for Zernike and pseudo Zernike moment computation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58(7):2121-2131, 2009.
- [18] G.A. Papakostas, Y.S. Boutalis, D.A. Karras, and B.G. Mertzios. Efficient computation of Zernike and Pseudo Zernike moments for pattern classification applications. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 20(1):56 64, 2010.
- [19] C. Singh, and E. Walia, Fast and numerically stable methods for the computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, 43(7), 2497-2506, 2010.
- [20] G.A. Papakostas, Y.S. Boutalis, D.A. Karras, and B.G. Mertzios. Fast numerically stable computation of orthogonal Fourier Mellin moments. *IET Computer Vision*, 1(1):11 16, 2007.
- [21] E. Walia, C. Singh, and A. Goyal. On the fast computation of orthogonal Fourier Mellin moments with improved numerical stability. *Journal of Real-Time Image Processing*, 7(4):247 256, 2012.

- [22] K. M. Hosny, Fast and accurate method for radial moment's computation. *Pattern Recognition Letters*, 31(2), 143-150, 2010.
- [23] G. A. Papakostas, Y. S. Boutalis, D. A. Karras, and B. G. Mertzios, "Fast numerically stable computation of orthogonal Fourier–Mellin moments," *IET Computer Vision*, 1, 11-16 (2007).
- [24] K. M. Hosny, M. A. Shouman, and H. M. Abdel Salam, "Fast computation of orthogonal Fourier-Mellin moments in polar coordinates," *J. Real-Time Image Process.* 6, 73–80 (2010).
- [25] G.A. Papakostas, Y.S. Boutalis, D.A. Karras, and B.G. Mertzios. Fast numerically stable computation of orthogonal Fourier Mellin moments. *IET Computer Vision*, 1(1):11 16, 2007.
- [26] G.A. Papakostas, Y.S. Boutalis, C.N. Papaodysseus, and D.K. Fragoulis. Numerical error analysis in Zernike moments computation. *Image and Vision Computing*, 24(9):960 969, 2006.
- [27] C. Singh, E. Walia, and Poojaand R. Upneja. Analysis of algorithms for fast computation of pseudo Zernike moments and their numerical stability. *Digital Signal Processing*, 22(6):1031 1043, 2012.
- [28] A. B. Bhatia and E. Wolf, "On the circular polynomials of Zernike and related orthogonal sets," *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 50, 40–48, 1954.
- [29] T. Xia, H. Zhu, H. Shu, P. Haigron, and L. Luo, "Image description with generalized pseudo-Zernike moments," *J. Opt. Soc. Am. A* 24, 50-59, 2007.
- [30] Ping, Z., Ren, H., Zou, J., Sheng, Y., & Bo, W. (2007). Generic orthogonal moments: Jacobi–Fourier moments for invariant image description. *Pattern Recognition*, 40(4), 1245-1254.
- [31] G. Amu, S. Hasi, X. Yang, and Z. Ping, "Image analysis by Pseudo-Jacobi ( $p = 4$ ,  $q = 3$ )-Fourier moments," *Appl. Opt.* 43, 2093-2101, 2004.

- 
- [32] Z. L. Ping, R. G. Wu, and Y. L. Sheng, "Image description with Chebyshev- Fourier moments," *J. Opt. Soc. Am. A*, 19, 1748-1754, 2002.
- [33] Y. L. Sheng and L. X. Shen, "Orthogonal Fourier-Mellin moments for invariant pattern recognition," *J. Opt. Soc. Am. A*, 11, 1748-1757, 1994.
- [34] H. Ren, Z. Ping, W. Bo, W. Wu, and Y. Sheng, "Multi-distorted invariant image recognition with radial-Harmonic-Fourier moments," *J. Opt. Soc. Am. A*, 20, 631-637 (2003).
- [35] B. Xiao, J. F. Ma, and X. Wang, "Image analysis by Bessel-Fourier moments," *Pattern Recogn.* 43, 2620-2629 (2010).
- [36] B. Xiao, Guo-yin Wang, and Wei-sheng Li, "Radial Shifted Legendre Moments for Image Analysis and Invariant Image Recognition," *Image and Vision Computing*, 2014.
- [37] H.S. Kim and H.K. Lee. Invariant image watermark using Zernike moments. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 13(8),766 775, 2003.
- [38] Y. Xin, S. Liao, and M. Pawlak. Circularly orthogonal moments for geometrically robust image watermarking. *Pattern Recognition*, 40(12):3740 3752, 2007.
- [39] J. Revaud, G. Lavoue, and A. Baskurt. Improving Zernike moments comparison for optimal similarity and rotation angle retrieval. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 31(4):627 636, 2009.
- [40] W.Y. Kim and Y.S. Kim. Robust rotation angle estimator. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(8):768 773, 1999.
- [41] Z. Chen and S.K. Sun. A Zernike moment phase-based descriptor for local image representation and matching. *IEEE Transactions on Image Processing*, 19(1),205-219, 2010.
- [42] M. Novotni and R. Klein. 3D Zernike descriptors for content based shape retrieval. In *ACM Symposium on Solid Modeling and Applications (SM)*, 216-225, 2003.
- [43] C. Singh and Pooja. Improving image retrieval using combined features of Hough transform and Zernike moments. *Optics and Lasers in Engineering*, 49(12):1384-1396, 2011.

- [44] J.D. Shutler and M.S. Nixon. Zernike velocity moments for sequence-based description of moving features. *Image and Vision Computing*, 24(4),343-356, 2006.
- [45] Z. Liu, Q. Li, Z. Xia, and Q. Wang. Target recognition of ladar range images using even-order Zernike moments. *Appl. Opt.*, 51(31),7529-7536, 2012.
- [46] L. Chenhong and L. Zhaoyang. Zernike moment invariants based iris recognition. En *Advances in Biometric Person Authentication*. Springer Berlin Heidelberg, 554-561, 2005.
- [47] G. Amayeh, G. Bebis, A. Erol, and M. Nicolescu. Peg-free hand shape verification using high order Zernike moments. *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop (CVPRW)*, 40-45, 2006.
- [48] S. Farokhi, S.M. Shamsuddin, U.U. Sheikh, J. Flusser, M. Khansari, and K.J. Khouzani. Near infrared face recognition by combining Zernike moments and undecimated discrete wavelet transform. *Digital Signal Processing*, 31-13 27, (2014).
- [49] J. Flusser, B. Zitova, and T. Suk. *Moments and Moment Invariants in Pattern Recognition*, Wiley Publishing, (2009).
- [50] J. Flusser, and T. Suk, Rotation moment invariants for recognition of symmetric objects. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(12), 3784-3790, (2006).
- [51] M. Sayyouri, A. Hmimid, and H. Qjidaa, Image analysis using separable discrete moments of Charlier-Hahn. *Multimedia Tools and Applications*, 1-25, (2014).
- [52] H. Zhu, Image analysis using separable two-dimensional discrete orthogonal moments. *Image Processing (ICIP), 2011 18th IEEE International Conference on. IEEE*, (2011).
- [53] H. Zhu, Image representation using separable two-dimensional continuous and discrete orthogonal moments. *Pattern Recognition*, 45(4), 1540-1558 (2012).
- [54] R. Mukundan, S. H. Ong, and P. A. Lee, Image analysis by Tchebichef moments. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 10(9), 1357-1364, (2001).
- [55] P. T. Yap, R. Paramesran, and S. H. Ong, Image analysis by Krawtchouk moments. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 12(11), 1367-1377, (2003).

- [56] Zhou, J., Shu, H., Zhu, H., Toumoulin, C., and Luo, L. Image analysis by discrete orthogonal Hahn moments. In *Image Analysis and Recognition*, Springer Berlin Heidelberg, 524-531, (2005).
- [57] Yang, B., and Dai, M., Image reconstruction from continuous Gaussian–Hermite moments implemented by discrete algorithm. *Pattern Recognition*, 45(4), 1602-1616, (2012).
- [58] Zhu, H., Shu, H., Zhou, J., Luo, L., and Coatrieux, J. L. Image analysis by discrete orthogonal dual Hahn moments. *Pattern Recognition Letters*, 28(13), 1688-1704, (2007).
- [59] S.X. Liao, “Accuracy Analysis of Moment Functions,” *Gate to Computer Sciece and Research*, 33-56, 2014.
- [60] R. G. Keys, “Cubic convolution interpolation for digital image processing,” *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **29**, 1153–1160 (1981).
- [61] C. Toxqui-Quitl, L. Gutierrez-Lazcano, A. Padilla-Vivanco, and C. Camacho-Bello, “Gray-level image reconstruction using Bessel– Fourier moments,” *Proc. SPIE 8011*, 80112T (2011).
- [62] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, New York, (1964).
- [63] T. Hoang and S. Tabbone, “Errata and comments on generic orthogonal moments: Jacobi– Fourier moments for invariant image description,” *Pattern Recogn.* 46, 3148–3155 (2013).
- [64] C. Camacho-Bello, C. Toxqui-Quitl, A. Padilla-Vivanco, and J. J. Báez-Rojas, “High-precision and fast computation of Jacobi-Fourier moments for image description,” *J. Opt. Soc. Am. A*, 31, pp. 124–134 (2014).
- [65] C. Camacho-Bello, C. Toxqui-Quitl, and A. Padilla-Vivanco, “Chapter 8: Generic Orthogonal Moments and Applications,” in *Moments and Moment Invariants*. Edited Book by George Papakostas, (Science Gate Publishing, Xanthi, Greece, 2014).
- [66] K. M. Hosny. Exact legendre moment computation for gray level images. *Pattern Recognition*, 40(12), 3597 – 3605 (2007).



- [67] G. Papakostas, E. Karakasis, and D. Koulouriotis. Accurate and speedy computation of image legendre moments for computer vision applications. *Image and Vision Computing*, 28(3):414 – 423, (2010).
- [68] Davis R.B.: Clinical gait analysis, *IEEE Eng Med Biol Magazine*, **7**, 35–40, (1998)
- [69] Camacho-Bello C., Toxqui-Quitl C., Padilla-Vivanco A.: Gait Recognition by Jacobi-Fourier moments, In: *FIO/LS Technical Digest OSA*, (2011)
- [70] Shutler J. D., Nixon M. S.: Zernike velocity moments for sequence-based description of moving features, *Image and Vision Computing*, **24**, 343–356, (2006).
- [71] Prismall S. P., Nixon M.S., Carter N.: On moving object reconstruction by moments, In: *Proceedings of the 13th British Machine Vision Conference*, 83–82, (2002).
- [72] Padilla-Vivanco A., Urcid-Serrano G., Granados-Agustín F., Cornejo-Rodríguez A.: Comparative analysis of pattern reconstruction using orthogonal moments, *Opt. Eng.* **46**, 017002 (2007).
- [73] Pérez-Orive J. , Pichardo A. E., Chávez-Arias D.: Desarrollo de un estándar de marcha normal en hombres adultos, *Rev. Mex. Ortop. Traum.* **12**, (1998).
- [74] C. Camacho-Bello, and J. J. Báez-Rojas. "Krawtchouk Moments for Gait Phase Detection." *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*. Springer International Publishing, 787-793 (2014).
- [75] C. Camacho-Bello, and J. J. Báez-Rojas. Angle Estimation Using Hahn Moments for Image Analysis. *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*. Springer International Publishing, 127-134, (2014).
- [76] Z. Shao, H. Shu, J. Wu, B. Chen, and J. L. Coatrieux. "Quaternion besel-fourier moments and their invariant descriptors for object reconstruction and recognition". *Pattern Recognition*, 47(2):603 – 611, (2014).
- [77] W. Hamilton. ".Elements of Quaternions". Longmans, Green, & Company, 1866.

- [78] B. Chen, H. Shu, H. Zhang, G. Chen, C. Toumoulin, J. Dillenseger, and L. Luo. Quaternion zernike moments and their invariants for color image analysis and object recognition. *Signal Processing*, 92(2):308 – 318, (2012).
- [79] X.-Y. Wang, P.-P. Niu, H.-Y. Yang, C. P. Wang, and A. L. Wang. A new robust color image watermarking using local quaternion exponent moments. *Information Sciences*, 277(0):731 – 754, (2014).
- [80] E. G. Karakasis, G. A. Papakostas, D. E. Koulouriotis, and V. D. Tourassis, “A Unified Methodology for Computing Accurate Quaternion Color Moments and Moment Invariants,” *IEEE Transactions on Image Processing*, **23**, 596-611 (2014).
- [81] R. Mukundan, “Radial Tchebichef invariants for pattern recognition,” in *Proc. IEEE Region 10th Annu. Int. Conf.*, 1–6, (2005).