



INAOE

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica.**

REPORTE TÉCNICO

No. 623

COORDINACIÓN DE CIENCIAS COMPUTACIONALES

**Ejercicios de Métodos Matemáticos con Problemas
de Ciencias y Tecnologías del Espacio.**

Gustavo Mendoza Torres
*Posdoctorado en la Coodinación de Ciencias
Computacionales, INAOE*

Gustavo Rodríguez Gómez
*Investigador de la Coodinación de Ciencias
Computacionales, INAOE*

©INAOE 2015

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de este reporte técnico en su totalidad o en partes mencionando la fuente.



Índice general

1. INTRODUCCIÓN	7
2. VECTORES	9
2.1. Magnitud y dirección de un vector	9
2.1.1. Fuerza de atracción gravitacional de la Tierra	9
2.1.2. Componentes de la trayectoria parabólica de un proyectil	10
2.2. Suma de vectores	11
2.2.1. Peso de una persona en un elevador bajo diferentes aceleraciones	11
2.2.2. "Ingravidez" en la Estación Espacial Internacional	11
2.2.3. Fuerza y cantidad de movimiento	13
2.2.4. Polarización de una onda electromagnética	14
3. CAMPOS VECTORIALES	17
3.1. Vectores y líneas de fuerza para representar campos vectoriales	17
3.1.1. Campo gravitacional	17
3.1.2. Campo eléctrico	18
3.1.3. Campo magnético	19
3.2. Ejercicios para resolver	19
3.2.1. Flujo debido a un campo vectorial	19
4. INTEGRALES	21
4.1. Integrales simples	21
4.1.1. Variación de la intensidad de la luz al pasar por un medio opaco	21
4.1.2. Solución de la ecuación de transporte radiativo	22
4.1.3. Colapso a estrella de neutrones	24
4.2. Integrales simples en Coordenadas Polares	26
4.2.1. Área que recorre Plutón alrededor del Sol	26
4.2.2. Perímetro de órbitas de los planetas y los cometas	28
4.2.3. Asteroide en disco de polvo	30
4.3. Integrales múltiples en Coordenadas Cartesianas	33
4.3.1. Volumen de un prisma rectangular	33
4.4. Integrales múltiples en Coordenadas Cilíndricas	34
4.4.1. Cálculo del volumen y la masa en coordenadas cilíndricas	34
4.5. Integrales múltiples en Coordenadas Polares y Esféricas	36
4.5.1. Cálculo del volumen de una esfera	36
4.5.2. Variación de la masa de la Tierra por la caída de meteoritos	37
4.5.3. Parámetros físicos de una estrella	42
4.6. Integrales de línea	44

4.6.1.	Cálculo del trabajo realizado por una fuerza	44
4.6.2.	Cálculo del campo magnético generado por una corriente eléctrica	46
4.7.	Aplicaciones del Teorema de Green	47
4.7.1.	Uso del teorema de Green para calcular una integral de línea cerrada	47
4.7.2.	Cálculo del área de una elipse con el Teorema de Green	49
4.7.3.	Uso del teorema de Green para evaluar una integral sobre una línea no-cerrada	50
4.8.	Teorema de Stokes	52
4.8.1.	Cálculo de una integral de línea con el Teorema de Stokes	52
4.9.	Ejercicios para resolver	54
4.9.1.	Longitud de una curva que está dada mediante una función	54
4.9.2.	Masa encerrada en un volumen dado por sus valores extremos	54
4.9.3.	Trabajo realizado a lo largo de trayectorias definidas por varias funciones	55
5.	ECUACIONES DIFERENCIALES	57
5.1.	Ecuaciones diferenciales de primer orden	57
5.1.1.	Ecuación de transporte radiativo	57
5.1.2.	Estrella en equilibrio hidrostático	59
5.1.3.	Viento Solar y fuerza de gravedad	60
5.1.4.	Distancia recorrida por un objeto en caída libre	61
5.1.5.	Cálculo de la velocidad en caída libre	62
5.2.	Ecuaciones diferenciales de segundo orden	63
5.2.1.	Velocidad de escape de Marte	63
5.2.2.	Cambio de una órbita alrededor de Marte a una en torno a Júpiter	65

Índice de figuras

2.1. Vectores de la trayectoria parabólica de un proyectil lanzado en presencia de un campo gravitacional	10
2.2. El elevador que viaja con diferentes aceleraciones, incluyendo caída libre.	12
2.3. Impulso y vectores de velocidad al aplicar una fuerza	13
2.4. Propagación de una onda electromagnética	14
2.5. Vectores del campo eléctrico de una onda electromagnética circularmente polarizada	15
2.6. Componente eléctrica E_R de una onda electromagnética circularmente polarizada	16
3.1. Campo eléctrico de una carga positiva	18
3.2. Campo magnético debido a una barra	19
4.1. Trayectoria elíptica de la órbita de los planetas alrededor del Sol	27
4.2. Coordenadas para el punto P(x,y) en coordenadas polares del Ejercicio 4.2.2	29
4.3. Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas	35
4.4. Región de integración del elemento de volumen definido en la Figura 4.3	36
4.5. Elemento de volumen en coordenadas esférica	36
4.6. Trayectoria usada para realizar una integración de línea	44
4.7. Diagrama de la trayectoria de una partícula para calcular el trabajo realizado sobre ella	45
4.8. Línea de conducción por la que circula una corriente eléctrica I	47
4.9. Elemento de alambre dr para calcular el campo magnético que se genera cuando circula una corriente I	48
4.10. Campo magnético debido a la corriente que circula por un conductor lineal infinito	49
4.11. Triángulo con vértices (0,0), (1,0) y (1,3), el cual delimita la región D sobre la que se va a calcular la integral de línea usando el Teorema de Green.	50
4.12. Curva abierta C para la cual se quiere calcular la longitud. Debido a que, para usar el teorema de Green, se requiere de una curva cerrada, entonces se usa una línea horizontal C' que va desde (1,1) hasta (-1,1) para generar una curva cerrada $C \cup C'$ la cual limita a la región D	51
4.13. Trayectoria cerrada para usar el Teorema de Stokes	52
4.14. Representación de la curva C , sobre ella se muestran los puntos $t = 0$ y $t = \pi/2$ que corresponden a los extremos del segmento para el cual se va a medir la longitud de C	54
5.1. Radiación que al pasar a través de un medio se ve atenuada	57
5.2. Misión espacial que pasa de un órbita en torno a Marte a otra en torno a Júpiter	66

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En este reporte se presentan ejemplos del uso de herramientas de matemáticas, como de Cálculo en una y varias variables, Ecuaciones Diferenciales y otros, en la solución de diversos problemas, procurando mostrar de una manera ilustrativa, como se aplican dichas herramientas. En la medida de lo posible se incluyen temas del curso de Métodos Matemáticos de la Maestría en CyTE del INAOE.

Un cantidad importante de los ejercicios se diseñaron para estas notas, otros son reformulados de algunos textos [1], [2] y [3] o se les incluyeron descripciones adicionales. En la solución de los problemas se hace notar cuales son los métodos que se aplican y, cuando es conveniente, se hace referencia a las bases teóricas [4], [5], [6] y [7]. En algunos ejercicios se incluye al final un texto explicativo dentro de un recuadro, con el objetivo de resaltarlo. En algunos pasos del proceso de solución se indica el método específico que se está aplicando. En la bibliografía también se incluyen referencias con otros ejercicios [7], [8], [9] y [10] que no se abordan en las presentes notas, pero que podrían ser de utilidad para los estudiantes.

Hemos procurado dividir el material por temas. En el Segundo Capítulo se presentan ejercicios de Vectores, en el Tercer Capítulo, de Integrales y en el Cuarto Capítulo, de Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, muchos ejercicios involucran tanto vectores, como ecuaciones diferenciales y diversos métodos para resolver integrales. Esto es algo común en muchos problemas de Ciencia y Tecnología. Debido a lo anterior, los ejercicios de algún capítulo dado también pueden servir para los temas abordados en otros capítulos. En la medida de lo posible, mencionamos las diversas herramientas que se aplican en un solo problema o hacemos referencias cruzadas entre diferentes ejercicios.

En algunos casos, para obtener una expresión que represente una situación que nos interesa estudiar, partimos de una o más relaciones conocidas entre las variables involucradas. Posteriormente, con recursos de Métodos Matemáticos llegamos a una expresión que represente las condiciones de interés. En otros casos, queremos conocer una variable específica sin tener inicialmente una expresión matemática. En esos casos, se deduce una expresión que represente la situación dada a partir de su interpretación. Posteriormente, también usando Métodos Matemáticos, llegamos a otra expresión que nos permita encontrar la variable de interés.

Se muestra esquemáticamente el uso de vectores con variables físicas, como la fuerza de gravedad y la aceleración debida a ésta, incluyendo un caso sencillo relacionado a Astronáutica. También se describen los vectores de polarización del campo electromagnético, dentro de otros casos. Para describir campos vectoriales se muestran los casos de un campo electrostático y de un campo magnético. Se muestra como se expresa la variación de una variable física (como la masa, la densidad, el volumen, la fuerza de gravedad) mediante una ecuación diferencial, así como el uso de integrales en diversos problemas, incluyendo algunos de Astronomía, Astronáutica y

Electromagnetismo. Se dan ejemplos en los que algún parámetro varía como función del tiempo o de algún otro parámetro, como el caso de la variación de la masa de un planeta (y por lo tanto también de su fuerza de gravedad) debido a la caída de material o el caso de algún parámetro de la órbita de un objeto celeste alrededor de otro. Además, se resuelven integrales en diversos sistemas de coordenadas. Varios ejemplos de integrales permiten ver, como el uso de coordenadas en una geometría dada facilita el cálculo de parámetros como el volumen o la masa.

Hemos intentado describir los presentes ejercicios procurando que sean accesibles e interesantes. Con esto, esperamos motivar a los estudiantes a prepararse más en estos temas que son una valiosa herramienta para sus estudios y sus proyectos de cursos o futuros proyectos en sus actividades profesionales.

Capítulo 2

VECTORES

Un vector es una variable que además de tener magnitud tiene dirección. Para visualizar el comportamiento de un vector, a continuación vamos a ver algunos ejemplos de variables físicas que tienen magnitud y dirección, tales como la fuerza de gravedad, la cantidad de momento y la polarización de una onda electromagnética.

2.1. Magnitud y dirección de un vector

2.1.1. Fuerza de atracción gravitacional de la Tierra

La Fuerza de gravedad es expresada como un vector, ya que tiene magnitud y también dirección. Un ejemplo claro de esta Fuerza, es la que sentimos cotidianamente debido a la atracción gravitacional de la Tierra. Dicha Fuerza la podemos escribir como

$$\vec{\mathbf{F}} = m \cdot \vec{\mathbf{a}}, \quad (2.1)$$

donde $\vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza sobre un cuerpo o un objeto, m es la masa de dicho cuerpo u objeto y $\vec{\mathbf{a}}$ es la aceleración que experimenta después de que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre él. En general la aceleración es el resultado del cambio de la velocidad como vector, es decir ya sea que cambió su magnitud, su dirección o ambas.

En el caso particular de la Tierra cuando un objeto está en la superficie la aceleración que adquiere, debido a la fuerza de gravedad, será en dirección vertical ya que tiende a ir hacia el centro de la Tierra y es $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$. Podemos sentir la Fuerza de atracción ya que al estar sobre una superficie ésta nos sostiene; además dicha superficie ejerce una fuerza igual a la de la gravedad pero en sentido contrario.

Si nos situamos sobre la superficie de la Tierra y cargamos una masa, entonces la fuerza que nos jala hacia el suelo es el resultado de la suma de dos vectores, el primero de estos vectores corresponde al peso de la masa adicional y el segundo corresponde a nuestro peso. Sí la suma de los pesos es mayor, que la fuerza que ejerce la superficie, entonces la superficie se desplomará.

Cuando estamos de pie, nuestros músculos ejercen fuerza para no caer. Si una persona carga una masa grande, de tal manera que el resultado de la suma de las fuerzas (la fuerza de atracción sobre el objeto y sobre nuestro cuerpo) sea mayor a la que pueden ejercer sus músculos, entonces tenderá a caer. Pero, ¿cómo sentimos que un cuerpo realmente adquiere la aceleración g estando en la superficie de la Tierra? La respuesta a esta pregunta la podemos observar en diversas situaciones donde es fácil identificar cómo la fuerza de gravedad conduce a una aceleración, como también notamos que el comportamiento de dicha fuerza es un vector. Para corroborar esto, a continuación veremos algunos ejemplos.

2.1.2. Componentes de la trayectoria parabólica de un proyectil

La trayectoria de un proyectil en presencia de un campo gravitacional se puede expresar mediante la suma de dos vectores, \vec{X} y \vec{Y} . Supongamos que el proyectil es lanzado desde una altura y_0 con una velocidad \vec{V}_0 y que al momento de ser lanzado, forma un ángulo θ con la horizontal. En la Figura 2.1 se muestra una trayectoria debida a tiro parabólico en la que el proyectil fue lanzado desde $y_0 = 0$.

- a) Expresa el vector \vec{V} que describe la velocidad del proyectil como la suma de dos vectores (que son las componentes del vector \vec{V}), uno en \vec{X} y otro en \vec{Y} .
- b) Expresa la trayectoria del proyectil con la suma de dos vectores \vec{X} y \vec{Y} .

Respuestas

a) La velocidad en la dirección horizontal no cambia, entonces el vector que describe la velocidad del proyectil tendrá, en la dirección \vec{X} , solo la componente de la velocidad inicial \vec{V}_0 . En la dirección \vec{Y} la velocidad va disminuyendo, debido a la fuerza de gravedad, hasta que el proyectil alcance la altura máxima. El vector velocidad se expresa de la siguiente manera

$$\vec{V}(t) = V_0 \cos(\theta) \hat{i} + (V_0 \sin(\theta) - g t) \hat{j}. \quad (2.2)$$

b) Para conocer el vector con origen en $X = 0$ y $Y = 0$ y que apunta a la posición (S) con componentes \vec{X} y \vec{Y} , tenemos que integrar en cada una de las componentes del vector $\vec{V}(t)$, lo cual resulta ser

$$\vec{S}(t) = (V_0 \cos(\theta) t) \hat{i} + (y_0 + V_0 \sin(\theta) t - \frac{g t^2}{2}) \hat{j}. \quad (2.3)$$

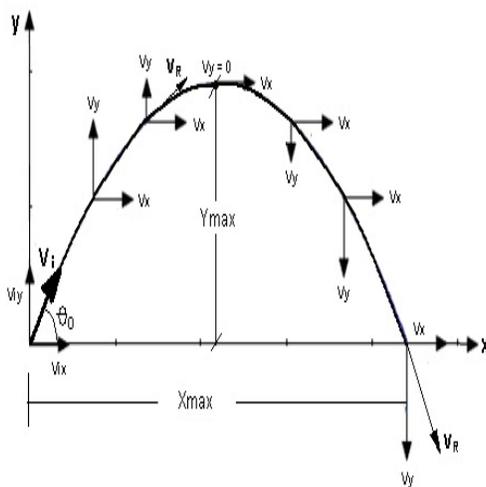


Figura 2.1: Representación de los vectores de velocidad en la trayectoria parabólica de un proyectil lanzado en presencia de un campo gravitacional que produce una aceleración g .

2.2. Suma de vectores

2.2.1. Peso de una persona en un elevador bajo diferentes aceleraciones

Un ejemplo, ilustrativo de cómo visualizar la aceleración debida a la fuerza de gravedad es el de un elevador que se suelta y cae libremente. En esa situación, dicho elevador experimentaría una aceleración $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, el cual es un vector cuya dirección apunta hacia el centro de la Tierra. Primero, vamos a suponer que el elevador funciona normalmente y que empieza a descender con una aceleración de $a_1 = 1 \text{ m s}^{-2}$ notando que a_1 es un vector que apunta hacia el centro de la Tierra. Es decir, ambos vectores apuntan en la misma dirección y mismo sentido. Si una persona se encuentra dentro de dicho elevador sentirá una fuerza neta que será

$$\vec{F} = m\vec{a}_1 + m\vec{g} = m(\vec{a}_1 + \vec{g}) = m \cdot 8,8 \text{ m s}^{-2} \hat{r}. \quad (2.4)$$

Esto significa que durante el tiempo que actúe la aceleración a_1 , la persona experimentará una disminución aparente de su peso. Ahora veamos el caso de una persona que se encuentra dentro del elevador que va en caída libre. En ese caso el piso del elevador no ejercerá una fuerza en dirección opuesta a la de la gravedad sobre la persona. Esto se debe a que ambos, elevador y persona, caen con la misma aceleración entonces no hay una superficie que ejerza una fuerza contraria al de la persona. Es decir, ninguna superficie del elevador representa el piso al que estamos acostumbrados, por lo cual la persona podría girar libremente dentro de este. (Figura 2.2)

- a) ¿Qué experimentará la persona, en relación a su peso, cuando el elevador asciende con una aceleración a_2 ?
- b) ¿Con qué aceleración debería ascender el elevador para que la persona sintiera el equivalente a que está cargando una masa igual al 20 % de su masa?

2.2.2. "Ingravedez" en la Estación Espacial Internacional

La aceleración de una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra resulta del cambio de dirección de la velocidad. Sin embargo, esto no implica que necesariamente cambie su magnitud. En un caso particular en el que un objeto esté a una misma distancia de la Tierra, puede cambiar solo la dirección de la flecha que describe dicha velocidad.

El vector de aceleración en la Tierra, debido a la fuerza de gravedad, está en función de la distancia al centro de la Tierra. A medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra la fuerza de gravedad que vamos a experimentar será menor, a continuación haremos un análisis de lo que ocurre estando en órbita alrededor de la Tierra.

Un astronauta estando en órbita en una estación espacial parece no tener peso. ¿Se debe esto a que se encuentra tan lejos de la Tierra que la fuerza de la gravedad se ha reducido a cero?

Tal vez uno piense que los astronautas experimentan ingravedez debido a que a la altura a la que se encuentran, la fuerza de gravedad es cero. La fuerza de la gravedad que actúa sobre un astronauta en la estación espacial es ciertamente menor que en la superficie de la Tierra, pero esto no explica la total ingravedez que sienten los astronautas. Vamos a analizar cuanto ha disminuido la aceleración debido a la fuerza de gravedad de la Tierra a la altura en la que está la Estación Espacial Internacional.

La estación espacial orbita a una altitud de aproximadamente 400 kilómetros sobre la superficie de la Tierra, entonces el valor de g en ese lugar será de $8,7 \text{ m s}^{-2}$. Es decir, será menor que la aceleración que siente estando en la superficie de la Tierra, que es $9,8 \text{ m s}^{-2}$. Es decir, la

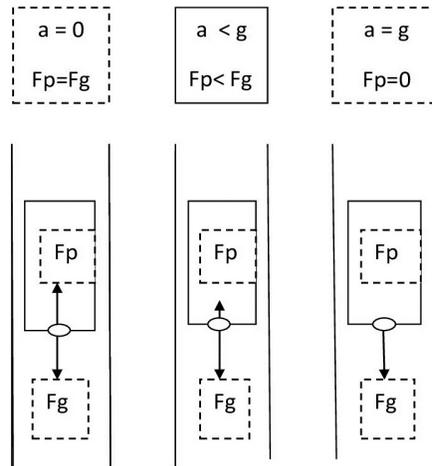


Figura 2.2: Para entender una situación de ingravidez usamos el ejemplo de un elevador en caída libre. a) El elevador no se mueve o viaja con velocidad constante. En ese caso tenemos dos fuerzas (representadas por flechas en la figura debido a que son vectores). Una de ellas es la fuerza de atracción gravitacional de la Tierra, la otra es la fuerza que ejerce el piso, que en este caso es igual a la de gravedad, pero en sentido contrario. Debido a eso, la aceleración es cero. b) El elevador desciende aceleradamente. En ese caso, la fuerza que ejerce el piso sobre una persona es menor a la de la gravedad, debido a eso la persona experimenta la sensación de una disminución de su masa. c) El elevador está en caída libre, la persona siente ingravidez, si la persona se empujara de las paredes podría girar libremente.

reducción en su peso es de aproximadamente 11 %. Esta reducción en el peso del astronauta no haría (por sí sola) que experimentara la sensación de ingravidez. La sensación de ingravidez es el resultado de no tener un suelo sobre el cual sienta la fuerza de gravedad de la Tierra ya que el suelo de la nave se está moviendo con él.

La fuerza de gravedad debido al movimiento de la nave en su órbita apunta hacia el centro de la Tierra, sin embargo, el vector que describe la velocidad en dicho movimiento apunta en dirección perpendicular. El cambio de la velocidad (aceleración) determina la dirección en la que se mueve la nave. Por ejemplo, si la aceleración cesara repentinamente entonces la nave seguiría moviéndose en la dirección que tenía el vector velocidad en dicho momento (en este caso trayectoria recta). La aceleración hace que el vector velocidad cambie de dirección continuamente. La nave entonces cambia de dirección solo un instante dado la velocidad pero sigue la dirección de la aceleración debido a la fuerza de gravedad. Entonces la nave //va cayendo hacia la Tierra// y debido a esto los astronautas experimentan aparente ingravidez. Es lo mismo que ocurre cuando un paracaidista desciende en caída libre, antes de abrir su paracaídas.

Para que los astronautas realicen prácticas en condiciones de ingravidez un avión lleva a cabo maniobras en la que realiza movimientos siguiendo las trayectorias de un tiro parabólico. Debido a que en la dirección horizontal viaja a velocidad constante entonces los astronautas no sienten ninguna fuerza en esa dirección. Por otro lado, en la dirección vertical tienen una aceleración igual a g , debido a esto sienten ingravidez.

2.2.3. Fuerza y cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento o "momento" \vec{P} de un objeto cuya masa es m y se mueve a una velocidad \vec{V} está dado por

$$\vec{P} = m \vec{V}. \quad (2.5)$$

El cambio en la cantidad de movimiento, si se le aplica una fuerza \vec{F} durante un tiempo Δt al mismo objeto de masa m , es igual a

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t. \quad (2.6)$$

Es decir, el cambio en cantidad de momento del objeto depende de la fuerza aplicada, como vector (con magnitud y dirección) y del tiempo Δt que se aplica dicha fuerza. Si durante ese tiempo no cambió la masa del objeto entonces dicho cambio lo podemos escribir como

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{V} m, \quad (2.7)$$

donde $\Delta \vec{V}$ es el cambio en la velocidad del objeto y m es su masa. Tanto $\Delta \vec{V}$ como \vec{F} son vectores, suponemos que un objeto, cuya masa se mantiene constante, está en el espacio exterior y viaja a una velocidad \vec{V} y si sólo cambiáramos su dirección, sin cambiar la magnitud de su velocidad y la fuerza que le aplicamos es constante, entonces tendríamos la situación de la Figura 2.3. De acuerdo a dicha figura la dirección del vector \vec{F} es la misma que la del vector $\Delta \vec{V}$, entonces la igualdad en los vectores

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{V} m, \quad (2.8)$$

la podemos escribir usando el vector unitario, en la dirección de \vec{F}

$$F \Delta t \hat{k} = \Delta V m \hat{k}. \quad (2.9)$$

Como en ese caso \vec{F} y \vec{V} son constantes, podemos escribir la ecuación anterior como una igualdad entre magnitudes, sin incluir el vector unitario. Por otro lado, al observar el triángulo formado por los vectores de la Figura 2.3 tenemos que

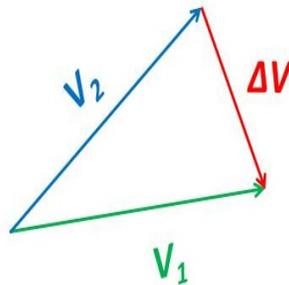


Figura 2.3: Vectores de velocidad antes \vec{V}_1 y después \vec{V}_2 de aplicar la fuerza \vec{F} durante un tiempo Δt .

$$\frac{\Delta V}{2} = V \sin \theta. \quad (2.10)$$

Entonces, para cambiar la dirección del objeto un ángulo θ , de acuerdo a la Ecuación 2.10 y a la Ecuación 2.9, el tiempo que se debe aplicar la fuerza es

$$\Delta t = \frac{2 m V \sin\theta}{F}. \quad (2.11)$$

2.2.4. Polarización de una onda electromagnética

El estado de polarización de una onda electromagnética corresponde a la dirección en la que oscila el campo eléctrico y se puede expresar mediante vectores. En el caso particular, en el que el campo eléctrico oscila en dirección vertical se puede expresar mediante la siguiente expresión

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{j}}, \quad (2.12)$$

donde E_0 es la máxima amplitud de la onda, k es la magnitud del vector de onda ($\frac{2\pi}{\lambda}$), con λ la longitud de onda, z es la coordenada que describe la posición del vector sobre la dirección de propagación, ω es la frecuencia de dicha onda, t el tiempo y $\hat{\mathbf{j}}$ el vector unitario en dirección vertical.

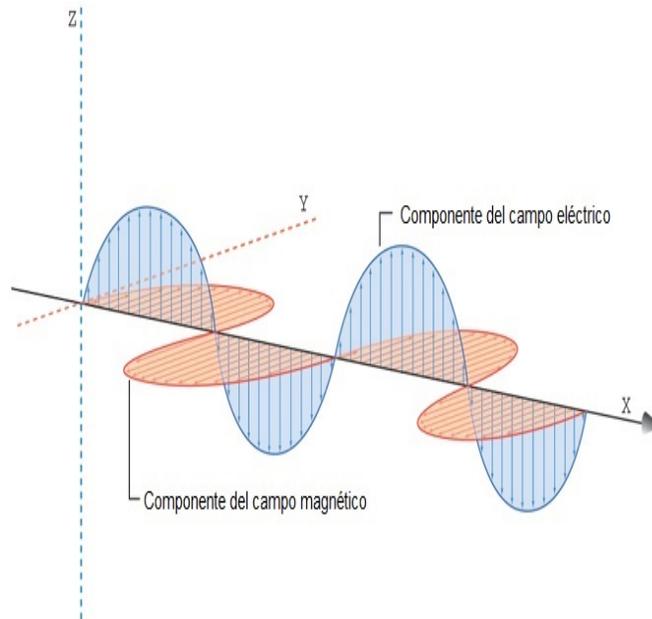


Figura 2.4: Representación de una onda electromagnética. En este caso particular el vector del campo eléctrico oscila en dirección vertical (flechas azules) y el del campo magnético en dirección horizontal (flechas rojas). Debido a que el vector del campo eléctrico oscila sólo en dirección de Y se dice que la onda está linealmente polarizada en dirección vertical.

En el caso general, el vector del campo eléctrico se puede expresar mediante un vector con dos componentes, una en \mathbf{X} y otra en \mathbf{Y} , donde dichas componentes son:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_x(z, t) &= E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{E}}_y(z, t) &= E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

donde ε es la diferencia de fase entre las dos ondas. Entonces el vector del campo eléctrico de la onda se puede expresar como

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = \vec{\mathbf{E}}_x(z, t) + \vec{\mathbf{E}}_y(z, t) \quad (2.13)$$

Para el caso particular en el que $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ se tiene polarización circular (Figuras 2.5 y 2.6). Ya que cuando ambas componentes ($\vec{\mathbf{E}}_x$ y $\vec{\mathbf{E}}_y$) son positivas, el vector $\vec{\mathbf{E}}_y$ (o componente vertical) aumenta mientras el vector $\vec{\mathbf{E}}_x$ disminuye, de tal manera que la suma de dichos vectores $\vec{\mathbf{E}}$ mantiene su amplitud constante y solo cambia su dirección, como se muestra en la Figura 2.5.

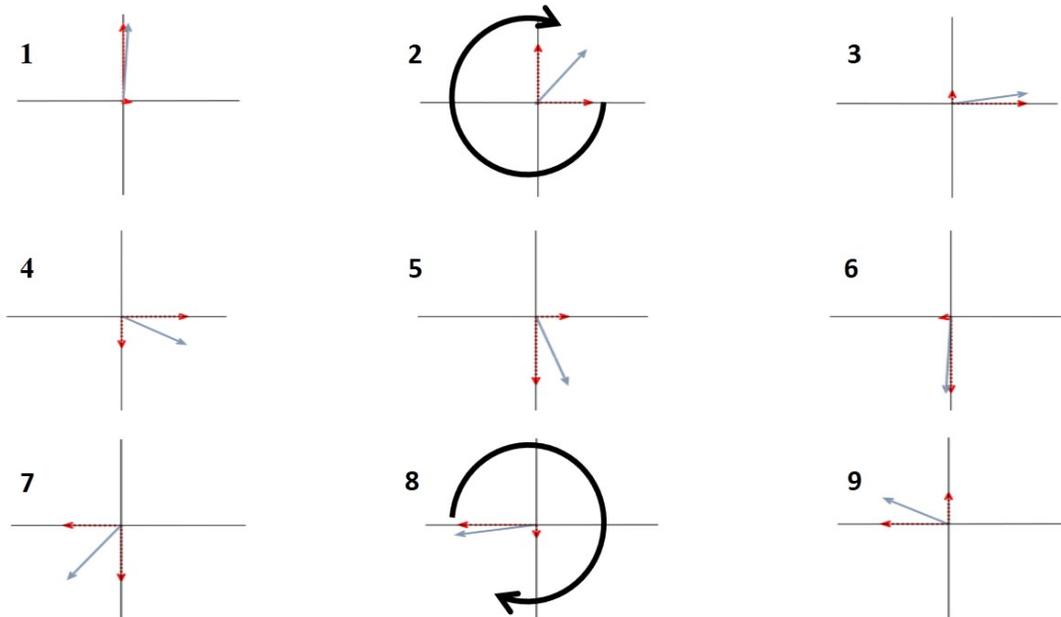


Figura 2.5: Representación de los vectores que describen el campo eléctrico de una onda electromagnética circularmente polarizada.

En este caso el vector $\vec{\mathbf{E}}$ de campo eléctrico rota en la dirección perpendicular a la de propagación, como se muestra en la

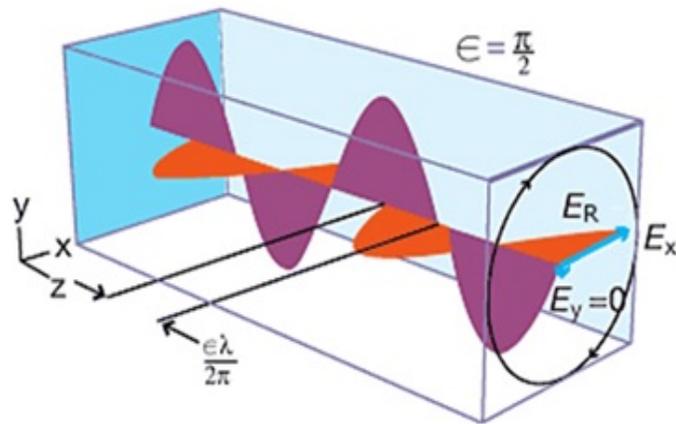


Figura 2.6: Representación de la propagación de la componente eléctrica E_R de una onda electromagnética circularmente polarizada. Se muestran las componentes E_x y E_y del vector del campo eléctrico resultante E_R . En el caso en el que la diferencia de fase es $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ y $E_x = E_y$, la suma de los vectores da por resultado un vector del campo eléctrico que gira en el sentido de las manecillas del reloj trazando un círculo.

Capítulo 3

CAMPOS VECTORIALES

Un campo vectorial representa la magnitud y dirección de una variable para cada punto del espacio. Como dicha magnitud tiene también dirección entonces se le llama magnitud vectorial. Si tenemos un campo vectorial la variable se define como una función de las coordenadas espaciales. Es decir, para cada punto del espacio tiene una magnitud y una dirección. Como ejemplo podemos analizar el caso de la fuerza de gravedad que genera un campo vectorial, el cual veremos a continuación. Posteriormente veremos también algunas características del campo eléctrico y del campo magnético.

3.1. Vectores y líneas de fuerza para representar campos vectoriales

3.1.1. Campo gravitacional

La fuerza de gravedad que siente una masa m debido a la presencia de una masa M . Si suponemos que ambas masas son puntuales entonces la fuerza estará dirigida en la dirección de la línea imaginaria que une las masas y tendremos simetría esférica. En ese caso, la dirección y magnitud del vector $\vec{\mathbf{F}}$, para cada punto del espacio, solo depende de la distancia r de la posición de la masa m respecto la masa M , con lo cual la fuerza se puede expresar como

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{G m M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal.

- a) Calcula la fuerza de gravedad que ejerce la masa M sobre la masa m cuando esta se encuentra a una distancia r_2 , en relación a la fuerza que experimenta cuando está a una distancia r_1 , con $r_2 = 2r_1$. ¿Qué puedes decir acerca del comportamiento del campo vectorial debido a la fuerza de gravedad, con respecto a la distancia?
- b) ¿Cómo varía la fuerza de gravedad con respecto a los valores de la masa M ?

Respuestas

- a) La fuerza a la distancia $r_2 = 2r_1$ es $\vec{\mathbf{F}}_2 = \frac{1}{4}\vec{\mathbf{F}}_1$.
- b) Varía linealmente, es decir la fuerza varía en la misma proporción que varía M .

3.1.2. Campo eléctrico

La ley de Coulomb describe la fuerza que ejerce una carga Q sobre otra carga q , situada a una distancia r . Dicha fuerza es

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.2)$$

donde el vector $\hat{\mathbf{r}}$ se representa como una flecha en la posición de la carga q , dicha flecha está dirigido de la carga Q hacia la carga q , ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío. Tanto Q como q pueden ser de signo positivo o negativo. Si la carga Q es positiva y q negativa entonces el vector de fuerza tendría la dirección contraria, es decir, apuntaría de q hacia Q , es decir la fuerza hace que la carga q tienda a ir hacia la carga Q . En este caso se dice que las cargas se atraen. Si las cargas son del mismo signo entonces el producto Qq es positivo y el vector de fuerza mantiene la dirección yendo de Q hacia q . Es decir, la fuerza tiene a alejar a la carga q de la carga Q . En este caso se dice que las cargas se repelen.

El campo eléctrico E debido a la carga Q es un campo vectorial que se expresa como

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.3)$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ apunta en dirección saliendo de la carga. Entonces, si la carga Q fuera positiva, el vector apuntaría en la misma dirección, como se muestra en la Figura 3.1a así en el caso de la carga descrita por el círculo rojo de la Figura 3.1b. Si la carga fuera negativa entonces el vector apuntaría en sentido opuesto, como se describe con la flecha que acompaña al círculo azul de la Figura 3.1b.

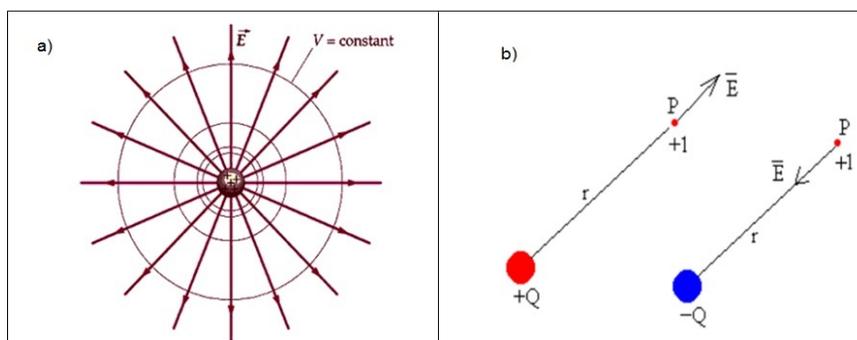


Figura 3.1: a) Representación del campo eléctrico de una carga positiva. b) Representación del vector de campo eléctrico para una posición dada a una distancia r . El círculo rojo representa a una carga positiva mientras que el azul a una carga negativa.

Un dipolo es un par de partículas de cargas de igual magnitud q pero de signos opuestos (positiva y negativa). Si la separación entre las partículas es d entonces la magnitud del campo eléctrico, sobre el eje del dipolo (la dirección que las une) es igual a

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q d}{z^3} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.4)$$

Si tenemos un anillo de radio R , con carga q , entonces el campo eléctrico, debido a dicho anillo, a una distancia z sobre el eje del anillo es

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q z}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.5)$$

- a) ¿Cómo varía el campo eléctrico de una carga puntual como función de la distancia?
- b) ¿Cuál campo decae más rápido con la distancia, el de una carga puntual o el de un dipolo?
- c) Si la distancia al anillo es mucho mayor a su radio, ¿Cuál será el campo eléctrico a una distancia z sobre el eje del anillo?

Respuestas

- a) Varía como r^{-2}
- b) La magnitud del campo eléctrico del dipolo decae como función de r^{-3} . Es decir, el campo magnético del dipolo varía más rápido con la distancia que el campo de una carga puntual.
- c) A una distancia $r \gg R$ campo eléctrico del anillo, sobre el eje del mismo es función de r^{-2} .

3.1.3. Campo magnético

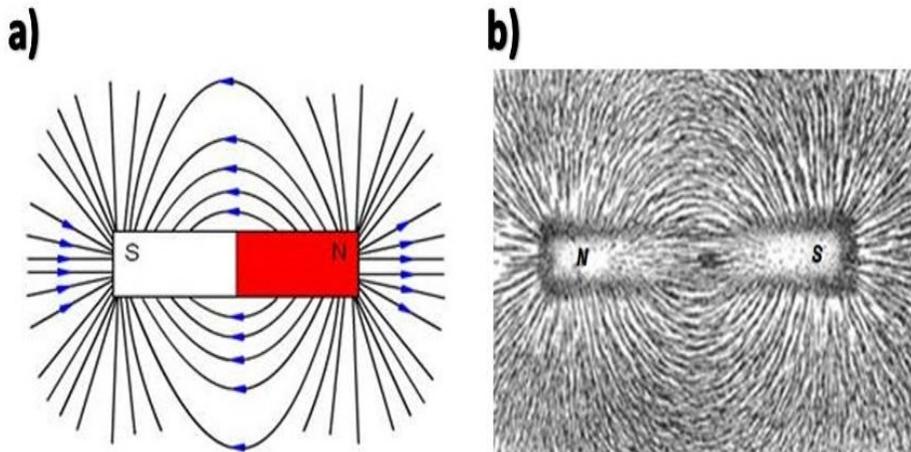


Figura 3.2: a) Representación del campo magnético debido a una barra. El campo vectorial se representa mediante líneas que corresponden a las líneas de fuerza del campo magnético. Para cada punto del espacio, dicha fuerza se orienta de acuerdo a la línea de fuerza (en dicho punto) y el sentido del vector apunta del polo Norte Magnético hacia el Polo Magnético Sur. b) Imagen de limaduras de hierro en presencia del campo magnético de una barra. Las partículas de hierro se orientan de acuerdo a las líneas de fuerza del campo magnético.

3.2. Ejercicios para resolver

3.2.1. Flujo debido a un campo vectorial

Muestra por integración directa que el flujo del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = xy^2\hat{\mathbf{i}} + y^3\hat{\mathbf{j}} + y^2z\hat{\mathbf{k}}$ fuera de la superficie cerrada formando por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, el plano $z = 0$ y $z = b$ ($b > 0$) es $5\pi ba^4/4$.

Capítulo 4

INTEGRALES

A continuación se muestran ejemplos del uso de **integrales**. En el Capítulo de Ecuaciones Diferenciales (Capítulo 5) se incluyen casos (5.2.1, 4.2.3, 5.1.4, 5.1.5) en los que también se aplican integrales.

4.1. Integrales simples

4.1.1. Variación de la intensidad de la luz al pasar por un medio opaco

En este ejemplo se usa la Ecuación 4.9 que es la solución de la Ecuación Diferencial que describe la atenuación de la luz en un medio opaco (Ecuación 5.6). Dicha ecuación diferencial se deduce en el Ejercicio 5.1.1 del Capítulo 5 y se resuelve en el Ejercicio 4.1.2 del Capítulo 4.

La forma integral de la Ecuación de Transporte Radiativo permite calcular la variación de la intensidad de la luz como función de la variable τ_ν . Esta última variable define el intervalo de integración (límites de integración).

Una persona en la Tierra que observa hacia el centro del disco solar nota que la intensidad en la fotosfera es $I_\nu(0)$. Si a simple vista la corona tiene una profundidad óptica $\tau_\nu \ll 1$ y la función fuente S_ν se considera constante, vamos a calcular la intensidad $I_\nu(\tau_\nu)$ que ve dicho observador.

Respuesta

Como la corona solar es un gas que está entre la fotosfera y nosotros, efectivamente, podemos usar la solución de la ecuación de transporte radiativo calculada en el Ejercicio 4.1.2. Vamos a considerar que S_ν es constante en la siguiente ecuación

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-l)} S_\nu dl \quad (4.1)$$

entonces la integral del lado derecho no depende de S_ν y por lo tanto este parámetro puede salir de dicha integral, quedando

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-l)} dl \quad (4.2)$$

La integral depende de l y la exponencial que está dentro de la integral es función de $\tau_\nu - l$. Podemos expresar la exponencial haciendo el cambio de variable $u = -(\tau_\nu - l)$. Entonces, tenemos que $du = dl$ y sustituyendo en la integral queda que,

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \int e^u du \quad (4.3)$$

Por otro lado, sabemos que $\int e^u du = e^u$, entonces

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu e^{-(\tau_\nu - t)} \Big|_0^{\tau_\nu} \quad (4.4)$$

debido a que los valores entre los cuales se integra son 0 y τ_ν ,

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \left[e^{-(\tau_\nu - \tau_\nu)} - e^{-(\tau_\nu - 0)} \right] \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \left[1 - e^{-\tau_\nu} \right]. \end{aligned}$$

Si $\tau_\nu \ll 1$, es decir la profundidad óptica es muy pequeña, tenemos que

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &\approx I_\nu(0)e^{-0} + S_\nu \left[1 - e^{-0} \right] \\ I_\nu(\tau_\nu) &\approx I_\nu(0). \end{aligned}$$

entonces, la intensidad de luz que ve el observador es la misma que sale de la Fotosfera, es decir, la Corona no absorbe ni emite, es transparente a la frecuencia ν .

Comentarios

Para encontrar la solución a este problema, primero se debe indentificar qué tipo de **ecuación diferencial** se usa, en este caso, es de primer orden. Después se decide resolver mediante integración directa (para esto es necesario tener conocimiento sobre integrales definidas, **integrando por sustitución** y entender que $\int e^u du = e^u$ para este problema se consideró que S_ν es constante, por lo tanto, se obtiene de una integración de manera más simple.

4.1.2. Solución de la ecuación de transporte radiativo

Partimos de la ecuación de transporte radiativo en forma diferencial

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu, \quad (4.5)$$

es una **ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden**. Para su solución damos la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Entonces la ecuación queda de la siguiente manera

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu = S_\nu \quad (4.6)$$

donde $x = \tau_\nu$, $y = I_\nu$, $P(x) = 1$ y $f(x) = S_\nu$. Se calcula un factor integrante $\mu(x)$ definido como

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int P(x)dx}, \\ \mu(x) &= e^{\int 1dx}, \\ \mu(x) &= e^x, \\ \mu(x) &= e^{\tau_\nu}.\end{aligned}$$

Multiplicamos $\mu(x)$ por la ecuación 4.6

$$e^{\tau_\nu} \left(\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu \right) = e^{\tau_\nu} S_\nu \quad (4.7)$$

Si

$$\begin{aligned}(e^{\tau_\nu} I_\nu)' &= e^{\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu \frac{de^{\tau_\nu}}{d\tau_\nu} \\ (e^{\tau_\nu} I_\nu)' &= e^{\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu e^{\tau_\nu} \\ (e^{\tau_\nu} I_\nu)' &= e^{\tau_\nu} \left(\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu \right)\end{aligned}$$

Entonces la ecuación 4.7 queda:

$$(e^{\tau_\nu} I_\nu)' = e^{\tau_\nu} S_\nu$$

Integrando ambos lados de la ecuación

$$\int (e^{\tau_\nu} I_\nu)' d\tau_\nu = \int e^{\tau_\nu} S_\nu d\tau_\nu,$$

y suponiendo que S_ν es constante, y los límites de integración son de 0 a τ_ν entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{d(e^{\tau_\nu} I_\nu)}{d\tau_\nu} d\tau_\nu &= S_\nu \int e^{\tau_\nu} d\tau_\nu \\ \int d(e^{\tau_\nu} I_\nu) &= S_\nu \int_0^{\tau_\nu} e^{\tau_\nu} d\tau_\nu \\ e^{\tau_\nu} I_\nu + C_1 &= S_\nu e^{\tau_\nu} \Big|_0^{\tau_\nu} + C_2 \\ e^{\tau_\nu} I_\nu + C_1 &= S_\nu (e^{\tau_\nu} - e^0) + C_2 \\ e^{\tau_\nu} I_\nu + C_1 &= S_\nu (e^{\tau_\nu} - 1) + C_2\end{aligned}$$

Despejando I_ν

$$\begin{aligned}I_\nu &= e^{-\tau_\nu} S_\nu (e^{\tau_\nu} - 1) + e^{-\tau_\nu} C_2 - e^{\tau_\nu} C_1 \\ I_\nu &= S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) + e^{-\tau_\nu} (C_2 - C_1)\end{aligned}$$

Si $C = C_2 - C_1$

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) + C e^{-\tau_\nu} \quad (4.8)$$

Ahora encontremos el valor de C , evaluando la ecuación 4.8 cuando $\tau_\nu = 0$

$$\begin{aligned} I_\nu(0) &= S_\nu(1 - e^0) + Ce^0 \\ I_\nu(0) &= S_\nu(1 - 1) + C \\ I_\nu(0) &= C \end{aligned}$$

Sustituyendo C en la ecuación 4.8

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) + I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} \quad (4.9)$$

Comentarios

La ecuación 4.5 es una **ecuación lineal homogénea**, la cual se tiene que resolver dividiéndola en dos partes: una es la solución a la **ecuación homogénea** (la cual se obtiene cuando se iguala a cero) y la otra es la solución particular.

Se escribe la ecuación en su **forma estándar** para poder aplicar el **método de solución de factor integrante**. La ecuación 4.6 ya está en la **forma estándar**. La solución para una **ecuación diferencial lineal** se puede realizar de la siguiente manera:

1. Poner la **ecuación en forma estándar**.
2. Identificar $P(x)$ y posteriormente encontrar **el factor integrante** $e^{\int P(x)}$.
3. Multiplicar ambos lados de la ecuación por **el factor integrante**.
4. Integrar ambos lados y resolver.

4.1.3. Colapso a estrella de neutrones

Si una estrella de neutrones está en un sistema binario, le arrancará material a su estrella compañera. Precisamente este material, que cae sobre la estrella de neutrones, produce fenómenos que permiten detectar el sistema y deducir que contiene una de ellas.

1. Considerando, solamente el efecto gravitacional, muestra que cuando una masa pequeña m cae, desde una gran distancia, sobre la superficie de una estrella de masa M y radio R , la energía potencial liberada está dada por

$$U = -\frac{GMm}{R} \quad (4.10)$$

2. Una masa de $10^{-7} M_\odot$ por año cae sobre la superficie de una estrella de neutrones cuya masa es $M = 1M_\odot$ y radio $R = 10 \text{ km}$. Si toda la energía potencial liberada es radiada, muestra que la luminosidad observada es de $2,17 \times 10^5 L_\odot$.
3. Si consideráramos que la energía radiada por una estrella de neutrones es la de un cuerpo negro, ¿cuál debería ser su temperatura efectiva? ¿En qué parte del espectro electromagnético podríamos ver la radiación emitida por la estrella de neutrones?

Respuestas

1. Partimos de la definición de energía potencia, U :

$$\int_0^U dU = - \int_{\infty}^R F \bullet dl, \quad (4.11)$$

donde F es la fuerza de atracción gravitacional, también expresada por

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo la ecuación (4.12) en la ecuación (4.11) e integrando ésta última tenemos que

$$U = - \int_{\infty}^R G \frac{Mm}{r^2} dr,$$

$$U = -GMm \left(\frac{1}{r} \right)_{\infty}^R.$$

Entonces, la energía potencial liberada es

$$U = - \frac{GMm}{R}.$$

2. Como en este caso se considera que toda la energía potencial es radiada, la luminosidad es igual a la variación (que en este caso corresponde a una disminución) de la energía potencial, es decir,

$$L = - \frac{dU}{dt}. \quad (4.13)$$

Derivando la ecuación (4.10) con respecto del tiempo tenemos que

$$L = G \frac{M}{R} \frac{dm}{dt},$$

donde, la tasa de acreción es $\frac{dm}{dt} = 10^{-7} M_{\odot} \text{ años}^{-1} = 6,29 \times 10^{18} \text{ g/s}$, $M = 1M_{\odot}$ y $R = 10 \text{ km}$. Sustituyendo los valores tenemos que

$$L = (6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) \frac{(1,98 \times 10^{33} \text{ g})}{10^6 \text{ cm}} (6,29 \times 10^{18} \text{ g/s}) = 8,29 \times 10^{38} \text{ erg/s}.$$

Como la luminosidad del Sol es $L_{\odot} = 3,82 \times 10^{33} \text{ erg/s}$, entonces,

$$L = 2,17 \times 10^5 L_{\odot}.$$

3. Si se pensara que la estrella de neutrones emite como un cuerpo negro entonces, de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, la potencia total emitida sería

$$E = \sigma T^4$$

$$L = A \cdot E$$

$$L = A \sigma T^4$$

donde σ es la constante de Stefan ($5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$), A es el área de la superficie ($4\pi R^2$) que emite la radiación y T es la temperatura efectiva del cuerpo negro.

Por lo tanto, la temperatura efectiva es

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}}$$

Sustituyendo valores tenemos que

$$T = \sqrt[4]{\frac{(8,29 \times 10^{38} \text{ erg/s})(10^{-7} \text{ W s/erg})}{4\pi(10^4 \text{ m})^2(5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4)}} = 32842817,1108 \text{ K} = 3,2843 \times 10^7 \text{ K}$$

De acuerdo con la ley de Wien, para calcular la longitud de onda del máximo en la emisión de cuerpo negro:

$$\lambda_{max} = \frac{2,8976 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{T}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{2,8976 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{3,2843 \times 10^7 \text{ K}} \\ \lambda_{max} &= 0,8824 \times 10^{-10} = 0,0882 \text{ nm} \end{aligned}$$

La radiación “cae” en la región de rayos X del espectro electromagnético.

Comentarios

Se parte de una **ecuación diferencial de primer orden homogénea**. Para calcular la energía potencial se resuelve a **integral simple** por el método de **variables separables**. El problema proporciona la tasa de acreción $\frac{dm}{dt}$, entonces la ecuación 4.10 se deriva con respecto al tiempo, y como la masa es la variable dependiente entonces obtenemos una **ecuación diferencial** que depende de la tasa de acreción en la cual se sustituyen los valores y se tiene la luminosidad.

4.2. Integrales simples en Coordenadas Polares

4.2.1. Área que recorre Plutón alrededor del Sol

Las trayectorias descritas por los planetas en sus órbitas alrededor del Sol son elipses. Si la ecuación de una elipse, en coordenadas cartesianas, está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

1. Demuestra que el área encerrada por la elipse es $A = \pi ab$, donde a y b representan el semieje mayor y semieje menor respectivamente.
2. Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Si el semieje menor b es igual a $38,24 \text{ UA}$ y su período alrededor del Sol es 248 años, determina el área que cubre plutón al completar su período.

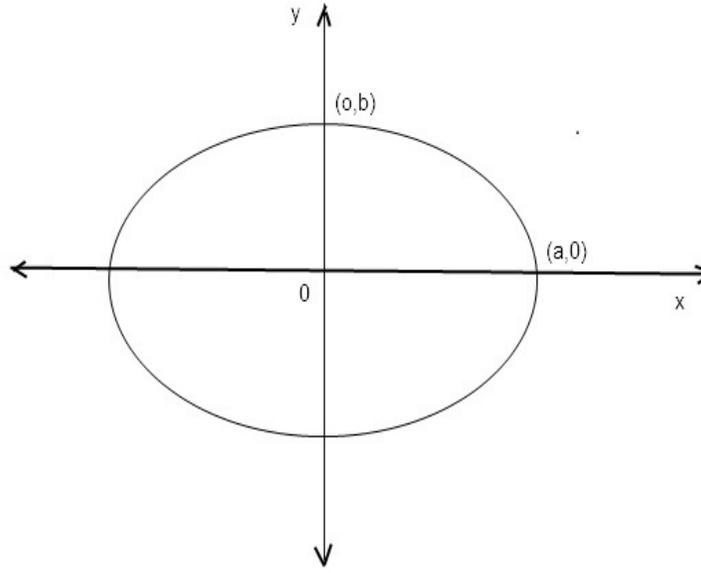


Figura 4.1: Elipse que representa la trayectoria descrita por los planetas alrededor del Sol.

Respuestas

- Al despejar y de la ecuación de la elipse, resulta

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \\ y^2 &= b^2 \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2} \right) \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Como la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes, el área total, A , es cuatro veces el área en el primer cuadrante. La parte de la elipse que queda en el primer cuadrante está expresada por la función

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq a, \\ \text{y así } A &= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

A fin de evaluar esta integral hacemos la sustitución $x = a \sin \theta$. Entonces, $dx = a \cos \theta d\theta$. Para cambiar los límites de integración, observamos que cuando $x = 0$, $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$; cuando $x = a$, $\sin \theta = 1$, $\Rightarrow \theta = \pi/2$. Por otra parte:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

Sustituyendo este último término en la integral, tenemos que

$$\begin{aligned}
 A &= 4\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4\frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 2ab \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \pi ab.
 \end{aligned}$$

Hemos demostrado que el área de una elipse cuyos semiejes son a y b es πab .

2. Para conocer el área que barre Plutón al completar su período orbital en 248 años, es necesario conocer la distancia media (la longitud del radio mayor de la elipse). Partiendo de la tercera ley de Kepler determinamos el valor del radio mayor:

$$\begin{aligned}
 T^2 &= a^3 \\
 a &= \sqrt[3]{T^2} \\
 a &= \sqrt[3]{(248 \text{ años})^2} \\
 a &= 39,47UA.
 \end{aligned}$$

El área que cubre plutón alrededor del Sol se determina a partir de

$$\begin{aligned}
 A &= \pi ab \\
 A &= \pi(39,47UA)(39,47UA) \\
 A &= 4741,70UA^2
 \end{aligned}$$

Es decir, Plutón cubre una área de $4741,70UA^2$ en 248 años.

Comentarios

Para saber el área encerrada partimos de la ecuación de la elipse, donde se despeja y en función de a , b y x ($y = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 - x^2}$). Se realiza un **cambio de variable del diferencial de la integral**, pasándolo de **coordenadas cartesianas a polares** ($x = a \sin \theta$), para posteriormente resolver la **integral simple** que resulta, la cual es precisamente la expresión para el área de una elipse, que es igual a πab .

Entonces, para conocer el área de barrido de Plutón tomaremos en cuenta la ley de Kepler para determinar el valor del semieje mayor, y después sustituir en la ecuación del área.

4.2.2. Perímetro de órbitas de los planetas y los cometas

La trayectoria descrita por algunos cometas y planetas está dada por la ecuación de la elipse. Dicha ecuación puede ser de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con base en lo anterior, demuestra que el perímetro para cada uno de ellos es de la forma:

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

donde ϵ es la excentricidad de la elipse ($\epsilon = c/a$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y $a > b > 0$).

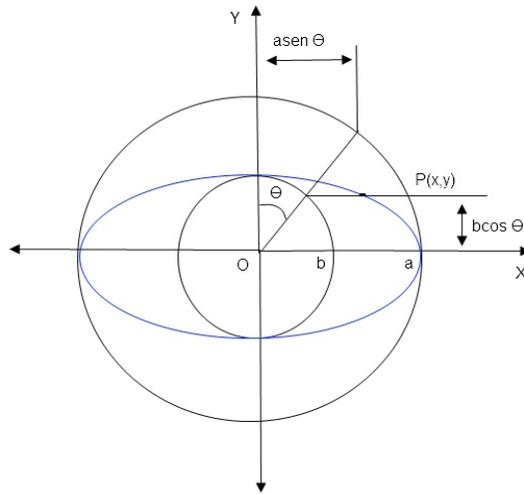


Figura 4.2: Las coordenadas para el punto $P(x,y)$ en coordenadas polares son $x = a \sin \theta$ e $y = b \sin \theta$.

Respuesta

De la Figura 4.2, la ecuaciones paramétricas que describen el punto $P(x,y)$ sobre a elipse son

$$x = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = a \sin \theta \quad y = b \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = b \cos \theta.$$

Por otra parte, la ecuación paramétrica para hallar la longitud de arco a lo largo de la curva se define como

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta. \quad (4.14)$$

Por lo tanto, si la curva del primer cuadrante es simétrica con respecto a los otros tres cuadrantes (ver Figura 4.2), sólo será necesario calcular el perímetro o la longitud de arco a lo largo del primer cuadrante y multiplicar ésta por cuatro, restringiendo la variación $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Así,

$$\begin{array}{ll} x = a \sin \theta & y = b \cos \theta \\ \frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta & \frac{dy}{d\theta} = -b \sin \theta \\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = a^2 \cos^2 \theta & \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = b^2 \sin^2 \theta \end{array}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la definición 4.14 se tiene que

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Y utilizando la identidad $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,

$$\begin{aligned} L &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Definiendo $\epsilon^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, finalmente se tiene que

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Comentarios

En este problema para poder expresar a x y y por medio de los semiejes de la elipse y el ángulo que forman entre sí, aplicamos la transformación a coordenadas polares. En teoría de cálculo en varias variables se estudia como parametrizar ecuaciones, como calcular la longitud de un arco y como determinar un porcentaje del círculo, como en el caso de este ejercicio. Se usaron conceptos de derivación y de propiedades trigonométricas (siendo éstas últimas indispensables para facilitar el cálculo y llegar a la expresión deseada) no fue necesario realizar la integral ya que solo se requería hacer la demostración. Fue necesario emplear propiedades de simetría de la elipse ya que de otra manera no podríamos obtener una función e integrarla; esto se debe a que para un solo punto en el eje de coordenadas, en una elipse existen dos posibles valores correspondientes, así que no podríamos construir una integral para calcular la longitud de arco. Si usamos las propiedades de simetría de la elipse podemos dividirla en cuadrantes y encontrar una función que describa a uno de éstos usando coordenadas polares, después se calcula la longitud de arco de dicho cuadrante y para finalizar se multiplica por 4, ya que consideramos todos los cuadrantes que conforman la elipse.

4.2.3. Asteroide en disco de polvo

Consideremos una estrella cuya masa es igual a la masa del Sol, $M_{\star} = M_{\odot}$, y que tiene un disco de polvo alrededor. Supongamos que el polvo consiste en granos cuyo diámetro es $\phi = 10^{-6}$ m y que la densidad numérica del polvo es $n_p = 10^5$ grano/m³. También vamos a suponer que un asteroide de 1 km de diámetro está orbitando la estrella a una distancia de 50UA.

1. Usa las **leyes de Kepler** para calcular la velocidad orbital del asteroide alrededor de la estrella.
2. Supongamos que el asteroide está viajando a través del polvo con la velocidad calculada anteriormente. Vamos a suponer que los granos de polvo y el asteroide tienen la misma densidad (3000 kg/m^3) y vamos a calcular la rapidez con la cual el radio del asteroide crece debido a la acreción de polvo.
3. Usando los resultados anteriores, vamos a calcular el tiempo que le tomaría al asteroide duplicar su radio.

Respuestas

1. Aplicando la tercera ley de Kepler se tiene que el período T , en años, viene dado por $T^2 = a^3$, donde a es el semieje mayor de la elipse, en UA . Si $a = 40 \text{ UA}$, entonces $T = 252,98 \text{ años} = 7,97 \times 10^9 \text{ s}$. Por otro lado, la velocidad tangencial (v) en un movimiento circular está dada por

$$v = \frac{2\pi a}{T} \quad (4.15)$$

Por lo tanto,

$$v = 4,69 \text{ km/s.}$$

2. Para calcular la rapidez con la cual aumenta el radio del asteroide consideremos el caso en el que la densidad del asteroide, ρ_* , es constante respecto del tiempo, pero no así su masa, M , ni su radio, R . La densidad está dada por

$$\rho_* = \frac{M}{V}, \quad (4.16)$$

donde V es el volumen del asteroide. Derivando respecto del tiempo tenemos que

$$\frac{d\rho_*}{dt} = \frac{\frac{dM}{dt}}{\frac{4}{3}\pi R^3} - \frac{3M}{\frac{4}{3}\pi R^4} \frac{dR}{dt} = 0, s$$

ya que la densidad es constante a través del tiempo. Por lo tanto,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{3M}{R} \frac{dR}{dt} \quad (4.17)$$

Por otro lado, debido a la acreción de polvo en el asteroide (donde ρ es la densidad de la nube de polvo), éste aumenta de radio. La cantidad de masa que se acreta en el asteroide por unidad de tiempo es

$$\frac{dM}{dt} = \rho A_{area} v = \rho 4\pi R^2 v, \quad (4.18)$$

donde, A_{area} es la superficie del asteroide y v es la velocidad tangencial. Igualando la ecuación (4.17) con la ecuación (4.18) y recordando, de la ecuación (4.16), que la masa del asteroide es

$$M = \rho_* \frac{4}{3} \pi R^3$$

y tenemos que

$$\rho 4\pi R^2 v = \frac{3\rho_* \frac{4}{3}\pi R^3}{R} \frac{dR}{dt}.$$

Por lo tanto, la rapidez con la que crece el radio del asteroide es

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\rho}{\rho_*} v. \quad (4.19)$$

En la ecuación anterior el cociente ρ/ρ_* determina la rapidez con la que crece el asteroide. Entonces debemos conocer ρ en función de la densidad de un grano de polvo, que es igual a la densidad del asteroide.

Debido a que la nube de polvo consiste en granos cuyo diámetro es $\phi = 10^{-6} m$ y que hay 10^5 granos por metro cúbico, entonces la densidad de la nube de polvo, ρ , es

$$\rho = \frac{4}{3}\pi (\phi/2)^3 \rho_p n_p, \quad (4.20)$$

donde ρ_p es la densidad de un grano de polvo. Sustituyendo la ecuación (4.20) en la ecuación (4.19) tenemos que

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4}{3}\pi (\phi/2)^3 \frac{\rho_p}{\rho_*} n_p v.$$

Como la densidad del asteroide (ρ_*) es igual a la densidad del grano de polvo (ρ_p) se obtiene que

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4}{3}\pi (\phi/2)^3 n_p v.$$

Sustituyendo los valores de ϕ ($10^{-6} m$) y v ($4,69 km/s$) obtenemos la rapidez con la que crece el asteroide; la cual es

$$\frac{dR}{dt} = 2,45 \times 10^{-13} km/s.$$

3. A partir de la diferencial $\frac{dR}{dt}$ podemos expresar el radio como función del tiempo. Para calcular el tiempo que le toma al asteroide duplicar su radio, tenemos que integrar desde R_o hasta $2R_o$

$$\int_{R_o}^{2R_o} dR = \frac{4}{24}\pi \phi^3 n_p v \int_0^t dt. \quad (4.21)$$

El tiempo que le tomará al asteroide duplicar su radio inicial $R_o = 0,5 km$ es

$$t = \frac{6R_o}{\pi \phi^3 n_p v} = 2 \times 10^{12} s = 6,3 \times 10^4 \text{ años.}$$

Comentarios

Mediante la ley de Kepler obtenemos la velocidad tangencial en la órbita del asteroide. Además, se encuentra la **ecuación diferencial** con la cual se describe la variación de la densidad. Para resolver dicha ecuación utilizamos el método de separación de variables y los valores obtenidos se sustituyen en la ecuación de densidad.

Con las condiciones iniciales resolvemos la **ecuación diferencial** para poderla integrar, esta **integral de segundo orden** por ende es de variables separables, con esto podemos calcular la variación de algunos parámetros físicos del asteroide.

4.3. Integrales múltiples en Coordenadas Cartesianas

4.3.1. Volumen de un prisma rectangular

Supongamos que tenemos un prisma rectangular cuyos lados tienen longitud x , y y z . Encuentra la masa de dicho prisma si:

a) La densidad es constante (ρ_0) a lo largo de todo el prisma rectangular y todos los lados son iguales y de longitud a .

b) El prisma es un cubo de lados iguales a a y la densidad está dada por

$$\rho = \rho_0xyz. \quad (4.22)$$

Respuestas

a) Si la densidad es ρ_0 dentro de todo el prisma rectangular, entonces el volumen se puede expresar mediante la siguiente **integral triple**

$$M = \int \int \int_v \rho_0 dV \quad (4.23)$$

como ρ_0 no es función de x, y, z , puede salir de la integral y $dV = dxdydz$,

$$M = \rho_0 \int_{z=0}^a dz \int_{y=0}^a dy \int_{x=0}^a dx$$

cuya solución es

$$M = \rho_0 [z]_{z=0}^a [y]_{y=0}^a [x]_{x=0}^a$$

y evaluando en 0 y a tenemos que

$$M = \rho_0 a^3$$

b) En el caso en que la densidad está dada por la Ecuación 4.22 la masa, M , está dada por la siguiente **integral triple**

$$M = \int \int \int_v \rho dV$$

sustituyendo la densidad tenemos que

$$M = \int \int \int_v \rho_0xyz dxdydz$$

como ρ_0 y a no dependen de x, y, z , entonces pueden salir de la integral

$$M = \rho_0 \int \int \int xyz dxdydz$$

y, como podemos expresar la función xyz como la multiplicación de tres diferentes funciones independientes, entonces la **integral triple** para calcular la masa, M , resulta

$$\begin{aligned}
 &= \rho_0 \int_{z=0}^a z dz \int_{y=0}^a y dy \int_{x=0}^a x dx \\
 &= \rho_0 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^a \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^a \\
 M &= \frac{\rho_0 a^6}{8}
 \end{aligned}$$

4.4. Integrales múltiples en Coordenadas Cilíndricas

4.4.1. Cálculo del volumen y la masa en coordenadas cilíndricas

Encuentra la masa del sólido limitado por $z = 0$, el paraboloides $z = x^2 + y^2 + 1$ y el cilindro de $x^2 + y^2 = 1$, donde la densidad es igual a $\rho = 1 + z$. El elemento de volumen dV en coordenadas polares cilíndricas se muestra en la Figura 4.3 y está dado por $dV = R dR d\phi dz$.

Un elemento de volumen dV , igual al definido anteriormente, se puede generar en otro ángulo ϕ cualquiera y sería igual si se mantiene R , debido a que se definió en coordenadas cilíndricas. Incluso, si se cambiara la posición z , el diferencial sería igual, solo que en ese caso dV estaría a otra altura. Esto permite integrar dicho diferencial en torno al eje z generando un cilindro. Los extremos del cilindro se pueden definir con base en los valores mínimo y máximo de z que se definan en la integral. Es decir, la altura del cilindro se puede definir con base en los valores de z . El diámetro del cilindro se define con base en el límite de la coordenada R . El elemento de volumen dV , definido en coordenadas cilíndricas en este ejercicio, se puede comparar con el definido en coordenadas esféricas (Ejercicio 4.5.1). En ese caso, el elemento de volumen se puede rotar un ángulo ϕ y también un ángulo theta en torno al origen del sistema de coordenadas. Es decir, en ese caso, dV se define con coordenadas que a su posición le dan simetría esférica.

La región de integración para V se muestra en la Figura 4.4. Entonces la masa M está dada por

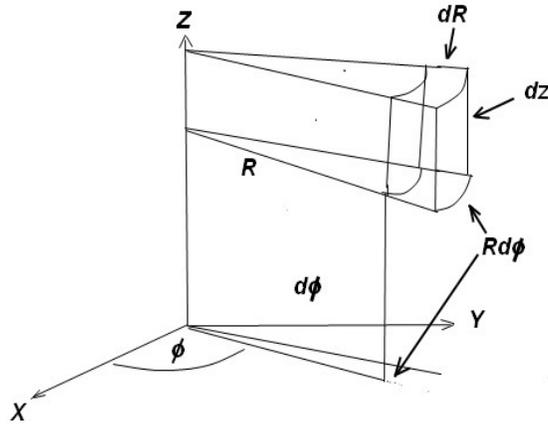


Figura 4.3: Representación de un elemento de volumen en coordenadas cilíndricas. Dicho elemento se define a partir de un diferencial del ángulo φ , un diferencial de longitud en la dirección z y un diferencial en la dirección radial, R . El elemento de volumen tendría la misma forma si cambiamos el ángulo φ , en el que está ubicado el elemento de volumen. Es decir, dV se puede cambiar de posición en torno al eje z . Así, al integrar el elemento de volumen dV en torno al eje z y a un valor fijo z_1 , se generará círculo paralelo al plano XY . Si se integra el elemento dV para otra altura z_2 , se generará otro círculo que será paralelo al anterior. Es decir, los círculos que se generan para z fijos estarán orientados horizontalmente y quedará un círculo encima de otro. Esto le da una geometría cilíndrica al volumen que se puede generar con dicho elemento de volumen (a diferencia del elemento de volumen en coordenadas esféricas definido en el Ejercicio 4.5.1).

$$\begin{aligned}
 M &= \int_V \rho dV &= \int_V (1+z) R dR d\phi dz \\
 & &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R=0}^1 dR \int_{z=0}^{R^2+1} R(1+z) dz \\
 & &= 2\pi \int_0^1 R \left[z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{R^2+1} dR \\
 & &= 2\pi \int_0^1 R \left[R^2 + 1 + \frac{(R^2 + 1)^2}{2} \right] dR \\
 & &= 2\pi \int_0^1 \left[R^3 + R + \frac{R^5}{2} + R^3 + \frac{R}{2} \right] dR \\
 & &= 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{8\pi}{3}
 \end{aligned}$$

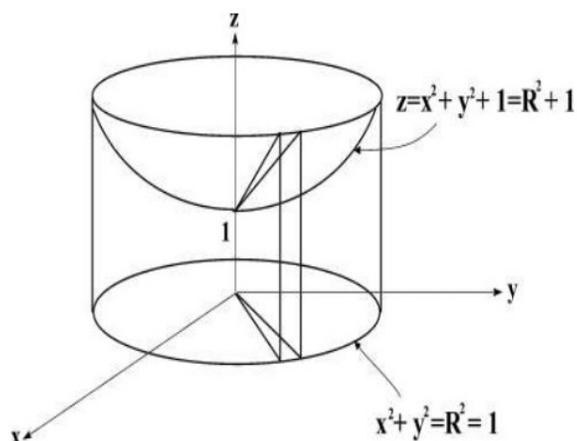


Figura 4.4: Representación de la región de integración del elemento de volumen definido en la Figura 4.3. El valor hasta el que se va integrar la variable z se define en función de x y y (ver el enunciado), que también se puede expresar en función de R . Esta es una función que, en este caso particular, define "la tapa superior de una botella cilíndrica-de una forma parabólica.

4.5. Integrales múltiples en Coordenadas Polares y Esféricas

4.5.1. Cálculo del volumen de una esfera

Vamos a calcular el volumen de una esfera de radio a usando coordenadas polares esféricas. El elemento del volumen dV en coordenadas polares se representa en la Figura (4.5) y está dado por

$$dV = r \sin \theta \, d\phi \, r \, d\theta \, dr = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

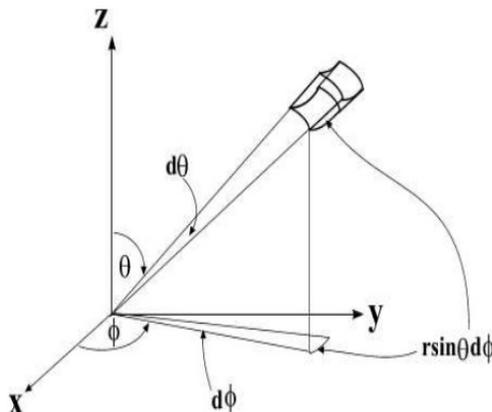


Figura 4.5: Elemento de volumen en coordenadas esféricas. Se puede comparar con el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas (Ejercicio 4.4.1).

Por lo tanto para calcular el volumen de la esfera tenemos la **integral triple**

$$V = \int \int \int_v dV$$

y, como la función que describe dV se puede separar en tres funciones independientes tenemos tres integrales

$$V = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

la solución de las integrales conduce a

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a [-\cos \theta]_0^\pi [\rho]_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^3}{3} (2)(2\pi) \end{aligned}$$

entonces, el volumen de la esfera de radio a es

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (4.24)$$

4.5.2. Variación de la masa de la Tierra por la caída de meteoritos

Aquí se expresa la variación de una variable Física mediante una **ecuación diferencial**, en este caso dicha variable cambia de manera continua. Trataremos una situación hipotética en la que la masa de la Tierra aumenta continuamente además se muestra como se usa una integral para calcular el valor de una variable en coordenadas esféricas. Varios parametros físicos, tales como el radio, el volumen, la fuerza de gravedad, y otros, dependen de la masa. Entonces, el aumento en la masa conduce a la variación de estos parametros. Un pequeño aumento de la masa se puede considerar como un diferencial. Si se trata de un aumento de la masa a lo largo de un tiempo dado, entonces se puede ver como la integral del diferencial de la masa a lo largo de dicho tiempo. En ese caso, la variación de algún parámetro que depende de la masa, que en el inciso **a** es el radio, se expresa como función de la variación de la masa. Es decir, vamos a calcular la variación del radio como función de la variación de la masa. Dicha variación se expresa como un diferencial de radio como función de un diferencial de masa. Sin embargo, como se quiere conocer la variación del radio a lo largo de un tiempo dado, entonces se tiene que integrar la variación de la masa a lo largo de dicho tiempo y, usando la función que describe el aumento del radio (como función de la masa), se puede calcular el aumento del radio para dicho intervalo de tiempo. En este ejercicio también se muestra como se usa una integral para calcular el valor de una variable en **coordenadas esféricas**.

Supongamos que caen meteoritos uniformemente distribuidos sobre toda la superficie de la Tierra, sumando un promedio anual de $2,2 \times 10^8 \text{ kg}$, que los meteoritos tienen la misma densidad que la Tierra y que caen en forma radial (formando un ángulo de 90 grados con la superficie de la Tierra), vamos a calcular:

a) El aumento en el radio de la Tierra. **b)** El nuevo período de rotación que tendría la Tierra después de 5 años. **c)** El nuevo período de traslación de la Tierra después de 3 años.

Respuestas a) Se parte de la densidad volumétrica, $\rho = m/V$, pero como la masa y el volumen varía con el tiempo, debido al bombardeo de los meteoritos, por lo tanto tendremos:

$$\begin{aligned}\rho &= dm/dV \\ \rho dV &= dm\end{aligned}$$

Se integra ambos lados de la ecuación, además se considera a ρ como constante.

$$\begin{aligned}\int dm &= \int \rho dV \\ \int dm &= \rho \int dV\end{aligned}$$

Calcularemos la integral de volumen en **coordenas esféricas**.

$$\begin{aligned}\int_{M_{Tierra}}^{M_{Tierra}+m_{agregada}} dm &= \rho \int_{R_{Tierra}}^{R_{Tierra}+r_{inc}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ (m)_{M_{Tierra}}^{M_{Tierra}+m_{agregada}} &= \rho \left(\int_{R_{Tierra}}^{R_{Tierra}+r_{inc}} r^2 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \\ M_{Tierra} + m_{agregada} - M_{Tierra} &= \rho \left(\frac{r^3}{3} \right)_{R_{Tierra}}^{R_{Tierra}+r_{inc}} (\phi)_0^{2\pi} (-\cos \theta)_0^\pi \\ m_{agregada} &= \frac{\rho}{3} \left((R_{Tierra} + r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \right) (2\pi - 0) (-\cos \pi + \cos 0) \\ m_{agregada} &= \frac{\rho}{3} \left((R_{Tierra} + r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \right) (2\pi) (2) \\ m_{agregada} &= \frac{4\rho}{3} \left((R_{Tierra} + r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \right)\end{aligned}$$

Se despeja r_{inc} que es el incremento que tuvo la Tierra después de ser bombardiada por un año.

$$\begin{aligned}\frac{3m_{agregada}}{4\rho} &= (R_{Tierra} + r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \\ (R_{Tierra} + r_{inc})^3 &= \frac{3m_{agregada}}{4\rho} + (R_{Tierra})^3 \\ R_{Tierra} + r_{inc} &= \sqrt[3]{\frac{3m_{agregada}}{4\rho} + (R_{Tierra})^3} \\ r_{inc} &= \sqrt[3]{\frac{3m_{agregada}}{4\rho} + (R_{Tierra})^3} - R_{Tierra}\end{aligned}$$

Sabemos que la densidad de la Tierra, ρ , es 5520 kg/m^3 , el radio de la Tierra, R_{Tierra} , es, aproximadamente, 6371 Km y el promedio anual de meteoritos, $m_{agregada}$, es de $2,2 \times 10^8 \text{ kg}$

. Sustituyendo valores

$$\begin{aligned} r_{inc} &= \sqrt[3]{\frac{3(2,2 \times 10^8)}{4(5520)} + 6371^3} - 6371 \\ r_{inc} &= 2,46 \times 10^{-4} \text{ km} \\ r_{inc} &= 0,246 \text{ m} \end{aligned}$$

b) Como los meteoritos han caído en forma radial sobre la superficie de la Tierra, entonces no producen un cambio neto en el momento angular de la Tierra. Por conservación del momento angular tenemos que

$$L_i = L_f \quad (4.25)$$

El momento angular, L , se define como el producto del momento de inercia, I , y la velocidad angular, ω . El momento angular inicial, L_i , corresponde al momento de inercia y a la velocidad angular iniciales mientras que el momento angular final, L_f , al momento de inercia y a la velocidad angular finales,

$$L_i = I_i \omega_i = I_f \omega_f = L_f \quad (4.26)$$

Para calcular el momento de inercia de la Tierra, que es un cuerpo sólido con densidad constante, ρ , usamos la expresión general para el momento de inercia:

$$I = \int r^2 dm, \quad (4.27)$$

donde dm es un diferencial de masa. Considerando que ρ es constante y como $\rho = \frac{m}{V}$, entonces

$$dm = \rho dV. \quad (4.28)$$

El elemento de volumen dV está a una distancia $r \sin \theta$ del eje de rotación. Entonces, sustituyendo la ecuación (4.28) en la ecuación (4.27) tenemos que

$$I = \int r^2 \rho dV \quad (4.29)$$

donde dV es la variable sobre la que se va a integrar. Entonces, podemos resolver dicha **integral en coordenadas esféricas**, sustituyendo dV por $(r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta d\phi$, vamos a tener una **integral triple**.

$$I = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta,$$

el argumento que está dentro de la integral se puede separar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dr \int_{\pi}^0 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \rho r^4 (1 - \cos \theta) \\ I &= \rho 2\pi \frac{R^5}{5} \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right)_{\pi}^0 \\ I &= \frac{2\pi \rho R^5}{5} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

entonces, el momento de inercia es

$$I = \frac{2}{5} M R^2, \quad (4.30)$$

con $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Sustituyendo la ecuación (4.30) en la ecuación (4.26) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} M_i R_i^2 \omega_i &= \frac{2}{5} M_f R_f^2 \omega_f \\ M_i R_i^2 \omega_i &= M_f R_f^2 \omega_f \\ \text{sí } \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

donde T es el periodo de rotación de la Tierra, sustituyendo resulta

$$\begin{aligned} M_i R_i^2 \frac{2\pi}{T_i} &= M_f R_f^2 \frac{2\pi}{T_f} \\ \frac{M_i R_i^2}{T_i} &= \frac{M_f R_f^2}{T_f} \end{aligned}$$

por lo que el periodo de rotación cuando se tiene una masa final M_f es

$$T_f = \frac{M_f R_f^2 T_i}{M_i R_i^2} \quad (4.31)$$

donde M_f es la cantidad de masa depositada por los meteoritos después de un tiempo dado. Por otro lado, a partir de los datos dados en el enunciado, tenemos que la masa de meteoritos que cae durante 5 años es $M_f = 5 \times 2,2 \times 10^8 \text{ kg} = 11 \times 10^8 \text{ kg}$. La masa de la Tierra es $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ y $T_i = 24 \text{ hrs}$. Así que, de la ecuación (4.31), resulta que el nuevo período orbital debe ser

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{(11 \times 10^8 \text{ kg}) (24 \text{ hrs}) R_f^2}{(5,97 \times 10^{24} \text{ kg}) R_i^2} \\ T_f &= 4,4221 \times 10^{-15} \frac{R_f^2}{R_i^2} \text{ hrs} \end{aligned}$$

Como el radio final es casi igual al inicial, entonces

$$T_f \approx 4,4221 \times 10^{-15} \text{ hrs}$$

Es decir, el período final es mayor al inicial en una cantidad despreciable.

c) Debido a que no hay fuerzas externas que afecten el movimiento, tenemos que, por conservación de momento angular, ecuación (4.26), $L = I\omega = \text{constante}$. En este caso podemos tomar al sistema Tierra-Sol como dos cuerpos puntuales donde la Tierra, cuya masa es M , está a una distancia r del Sol. La masa final de la Tierra es M_f , así que

$$T_f = \frac{M_f R_f^2 T_i}{M_i R_i^2}$$

donde T_i es el viejo período traslacional, M_f es el incremento de masa después de 3 años ($M_f = 3 \times 2,2 \times 10^8 \text{ kg} = 6,6 \times 10^8 \text{ kg}$) y $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, es la masa de la Tierra. Entonces, el nuevo período de traslación, T_f , es

$$T_f = \frac{(6,6 \times 10^8 \text{ kg}) (24 \text{ hrs}) R_f^2}{(5,97 \times 10^{24} \text{ kg}) R_i^2}$$

$$T_f = 2,6533 \times 10^{-15} \frac{R_f^2}{R_i^2} \text{ hrs}$$

De manera aproximada tenemos que

$$T_f \approx 2,6533 \times 10^{-15} \text{ hrs}$$

Es decir, el incremento en el período de traslación también es despreciable.

Comentarios

La Tierra está en crecimiento constante, debido la caída de meteoritos, por lo cual su período de rotación varia. Por la forma en que dichos meteoritos arriban no existe un cambio en el momento angular de la Tierra, por lo que se pueden igualar su momento angular inicial y final (ley de conservación del momento angular), donde el momento angular se relaciona con el momento de inercia y velocidad angular.

Para calcular el momento de inercia de la Tierra usamos la ecuación del momento de inercia en forma integral, donde dm es igual a la ecuación de densidad; después se sustituye y se genera una integral de volumen. Para facilitar los cálculos, la Tierra es considerada una esfera así que se efectúa un cambio de coordenadas para tener una integral triple.

Sustituimos el resultado del momento de inercia en la ecuación de la ley de conservación del momento angular, con lo cual se obtiene una ecuación de la que pueda despejarse el periodo de rotación final. Al final, se sustituyen los valores y se considera el radio del meteorito despreciable con respecto a la Tierra.

4.5.3. Parámetros físicos de una estrella

En una estrella, la variación de su densidad con la distancia a su centro es aproximadamente una ley de potencias, $\rho(r) = 1,41 \times 10^{16} r^{1,5} \text{ kg/m}^3$. Si una estrella tiene un radio de 10^9 m y una luminosidad de $2 \times 10^{25} \text{ W}$ (donde la W denota *watts*, $1 \text{ W} = \text{J/s}$), vamos a calcular:

1. La masa de la estrella.
2. Su energía potencial.
3. La energía térmica.
4. El tiempo que le tomaría a la estrella colapsarse a un punto debido a su gravedad.

Respuestas

1. Para el cálculo de la masa de la estrella partimos de la expresión de la diferencia de masa como función de la densidad:

$$dM = \rho dV. \quad (4.32)$$

Integrando sobre el volumen tenemos que la masa es

$$M = \int 1,41 \times 10^{16} r^{-1,5} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (4.33)$$

$$M = 1,41 \times 10^{16} \int_0^R r^{0,5} dr \int_{\Omega} \sin \theta d\theta d\phi$$

$$M = 1,41 \times 10^{16} \frac{R^{1,5}}{1,5} 4\pi$$

$$M = 3,76 \times 10^{16} \pi R^{1,5} [\text{kg}].$$

Por lo tanto, la masa de la estrella es

$$M = 3,73 \times 10^{30} \text{ kg} = 1,88 M_{\odot}$$

2. Para calcular la energía potencial de la estrella, recordemos que la energía potencial de un cuerpo esféricamente simétrico y sólido es

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (4.34)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta que la energía potencial de la estrella es

$$U = -\frac{3}{5} \frac{(6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) \times (3,73 \times 10^{33} \text{ g})^2}{10^{11} \text{ cm}} = -5,56 \times 10^{48} \text{ erg}.$$

3. Para calcular la energía térmica recordemos que, apartir del Teorema del Virial, la energía cinética, K , es igual a un medio de la energía potencia, U ,

$$K = -\frac{1}{2} U. \quad (4.35)$$

Trivialmente se tiene que la energía cinética, en este caso energía térmica, es

$$K = -\frac{1}{2}U. \quad (4.36)$$

$$K = \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (4.37)$$

y entonces,

$$K = 2,78 \times 10^{48} \text{ erg.}$$

4. El tiempo de caída libre lo calculamos usando la expresión de la distancia recorrida por un cuerpo en un movimiento rectilíneo con aceleración constante:

$$d = vt + \frac{1}{2}at^2, \quad (4.38)$$

donde, d es la distancia, v es la velocidad, a es la aceleración y t es el tiempo. Para calcular el tiempo, t , de caída libre de un cuerpo que inicialmente está en reposo ($v = 0$) y cae con aceleración constante, a , se concluye que el tiempo de caída, hasta recorrer una distancia, d , es

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}},$$

donde $d = R$ y $a = \frac{GM}{R^2}$. La relación anterior la podemos escribir como

$$t = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}.$$

Por lo tanto, el tiempo de caída libre, t , es

$$t = \sqrt{\frac{2 \times (10^{11} \text{ cm})^3}{(6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) \times (3,73 \times 10^{33} \text{ g})}} = 2835,29 \text{ s} = 47,25 \text{ min.}$$

Comentarios

Para el cálculo de la masa de la estrella partimos de una **ecuación diferencial homogénea de primer orden** (Ecuación 4.32), resolviéndola por medio de variables separables, la integral de volumen se resolvió cambiando de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas (ya que se supone que la estrella es de forma esférica).

Para encontrar la energía potencial y térmica de la estrella solo se sustituyeron los valores de G , M , y R en las ecuaciones 4.34 y 4.36, respectivamente.

Para calcular el tiempo de caída libre se utilizó la ecuación 4.38, después se despeja a t cuando el cuerpo se encuentra en reposo (por lo tanto la velocidad es igual a cero), se sustituyen valores y se obtiene el tiempo.

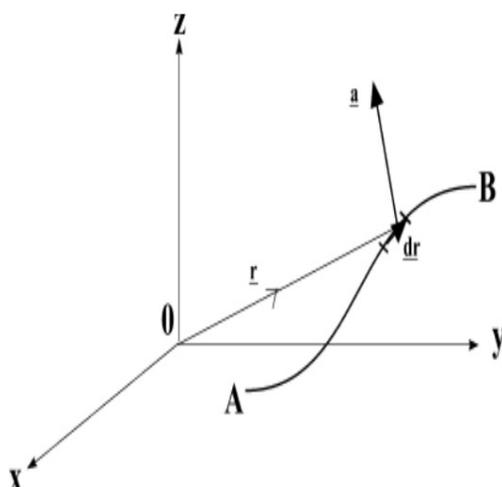


Figura 4.6: Curva C representando de manera general una trayectoria usada para realizar una integración en un campo vectorial en el cual, para cada punto de la curva C , se tiene un vector $r = (x, y, z)$.

4.6. Integrales de línea

4.6.1. Cálculo del trabajo realizado por una fuerza

Hallar el trabajo realizado por $\mathbf{F} = k x y \hat{\mathbf{i}}$, con $k = \text{cte}$, sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva C que consiste en líneas rectas, que se unen en los puntos siguientes (en orden): $(0,0)$, $(a,0)$, $(2a,a)$, $(2a,2a)$, $(a,2a)$. Etiquetamos los puntos como se indica en la Figura 4.7. Entonces podemos calcular el trabajo realizado, W , usando el Teorema de Stokes [6, pág. 420], el cual es

$$\begin{aligned}
 W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_C (k x y \hat{\mathbf{i}}) \cdot (\hat{\mathbf{i}}dx + \hat{\mathbf{j}}dy) \\
 &= \int_C k x y dx \\
 &= \left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} \right) k x y dx
 \end{aligned}$$

para la trayectoria del punto A al punto B , la función a lo largo de la cual se integra es $y = 0$. Entonces, para ese trayecto el trabajo resulta

$$k \int_{AB} xy dx = 0 \quad (4.39)$$

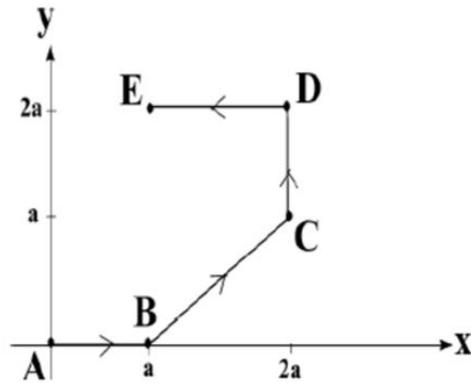


Figura 4.7: Trayectoria en un sistema de coordenadas en el que el eje x representa la posición de una partícula y el eje y la fuerza aplicada a la misma. A este tipo de sistemas de coordenadas se les conoce como diagramas para calcular el trabajo realizado. En este caso, el trabajo se realiza sobre una partícula. Los puntos A, B, C, D y E en el diagrama muestran las posiciones en las que cambia la trayectoria de la partícula. Para calcular el trabajo se usa una integral de línea.

De manera similar calculamos el trabajo para el tramo BC , resultando

$$y = x - a \implies k \int_{BC} xy \, dx = k \int_a^{2a} x(x - a) \, dx = \frac{5}{6} ka^3. \quad (4.40)$$

Para la trayectoria de C a D el trabajo es

$$x = 2a \implies dx = 0 \quad k \int_{CD} xy \, dx = 0, \quad (4.41)$$

y en el tramo DE es

$$y = 2a \implies k \int_{DE} xy \, dx = k \int_{2a}^a x \cdot 2a \, dx = -3a^3k. \quad (4.42)$$

Así que el trabajo total W , para toda la trayectoria de la Figura 4.7 resulta ser

$$W = \frac{5}{6} ka^3 - 3a^3k = -\frac{13}{6} ka^3. \quad (4.43)$$

1. Escribe la ecuación paramétrica de la superficie de la curva S de un hemisferio descrito en coordenadas polares (r, θ, ϕ) por

$$r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Usa esto para mostrar que el vector de área $d\mathbf{S}$ está dado por

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}} \sin \theta d\theta d\phi,$$

donde

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}.$$

2. Dado el campo vectorial $\mathbf{a} = y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + xy\hat{\mathbf{k}}$, muestra por integración directa que

$$\int \int_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Evalúa primero la integral con respecto de ϕ .

3. Muestra que el vector de campo vectorial $\mathbf{b} = xz\hat{\mathbf{i}} + y(-x^2/2)\hat{\mathbf{j}}$ satisface $\nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{a}$, además usa el teorema de Stokes para confirmar el resultado del inciso (2).

4.6.2. Cálculo del campo magnético generado por una corriente eléctrica

Cuando una corriente \mathbf{I} fluye por un alambre delgado un campo magnético \mathbf{B} es inducido, dado por la Ley de Biot-Savart

$$\mathbf{B}_p = I \int_C \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (4.44)$$

donde \mathbf{r} , \mathbf{R} se muestran en la Figura 4.8 y $R = |\mathbf{R}|$. Vamos a calcular el campo magnético debido a una corriente que fluye en un alambre recto infinito.

A partir de la Figura 4.9 tenemos que $d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{i}}$ y $\mathbf{R} = -x\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}}$, entonces

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & a & 0 \end{vmatrix} = a dx \hat{\mathbf{k}}.$$

Como $R = |\mathbf{R}| = (x^2 + a^2)^{1/2}$ y el campo magnético está dado por la Ecuación 4.44 resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_p &= I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a dx \mathbf{k}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \\ &= \mathbf{k} a I \left[\frac{1}{a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty}, \\ &= \frac{2 I}{a} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

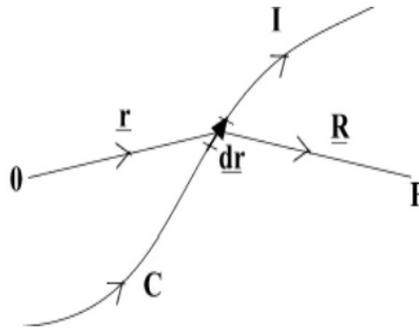


Figura 4.8: Curva que representa una línea de conducción (como un alambre conductor) por la que circula una corriente eléctrica I . Dicha corriente genera un campo magnético. Para calcular dicho campo, se usa una integral de línea.

Este es un campo constante en la dirección z . Por lo tanto, si tomáramos el eje x perpendicular a la página con la corriente fluyendo hacia fuera de la página, entonces, las líneas del campo magnético serían círculos en el plano yz .

4.7. Aplicaciones del Teorema de Green

4.7.1. Uso del teorema de Green para calcular una integral de línea cerrada

Usa el teorema de Green para evaluar la siguiente integral $\int_C \sqrt{1+x^3}dx + 2xydy$ donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 3)$ orientados en sentido de las manecillas del reloj (Figura (4.11)).

Solución

De la Figura (4.11) podemos ver que la curva C puede verse como tres segmentos de línea que pueden ser parametrizados fácilmente. Sin embargo, no es fácil hacer directamente la integral de línea. En particular porque el término $\sqrt{1+t^3}dt$ no se puede integrar.

Por el teorema de Green la integral de línea se transforma en una integral doble sobre la región D encerrada por el triángulo, donde las funciones son

$$P = \sqrt{1+x^3}, \quad Q = 2xy$$

Calculamos las derivadas parciales de ambas funciones

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

y usando el teorema de Green nuestra integral de línea resulta

$$\begin{aligned} \int_C Pdx + qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D 2y dA \end{aligned}$$

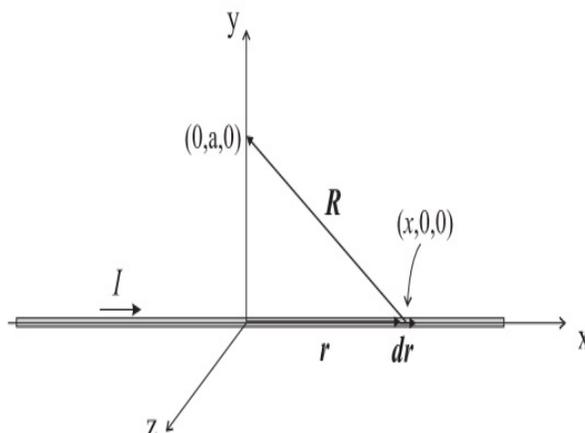


Figura 4.9: Diagrama para visualizar el elemento de alambre dr , ubicado en $(x,0,0)$ por el que circula una corriente I y que genera un campo magnético en torno a él, el cual se calcula para el punto $(0,a,0)$.

Para parametrizar la región D , podemos establecer los límites en la integral doble considerando que atraviesa toda la región D . De tal manera que x varíe desde 0 hasta 1. Para cada x , y varíe de 0 hasta donde se une con el lado inclinado del triángulo (hipotenusa).

El lado inclinado (hipotenusa) está determinado por la ecuación $y = 3x$. De esta forma se puede calcular desde que esta recta pasa por $(0,0)$ y hasta $(1,3)$. Podemos decir que la altura máxima y se observa sobre x y es igual a $3x$.

Por lo tanto, podemos elegir los límites de la integral de la siguiente manera

$$\int_0^1 \int_0^{3x} 2y dy dx$$

Como dx está afuera de la integral de dy , entonces primero evaluamos la integral en y que esta en función de x y despues evaluamos la integral en dx .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{3x} 2y dy dx &= \int_0^1 y|_0^{3x} dx \\ &= \int_0^1 (9x^2 - 0) \\ &= (3x^3)|_0^1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Entonces, la solución es

$$\int_C \sqrt{1+x^3} dx + 2xy dy = 3.$$

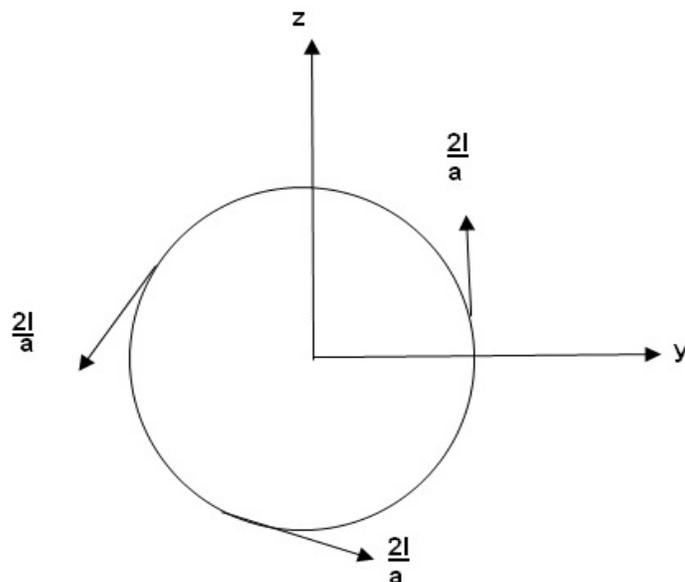


Figura 4.10: El campo magnético que resulta del conductor lineal infinito es $2I/a$.

4.7.2. Cálculo del área de una elipse con el Teorema de Green

Tenemos la expresión de una elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

vamos a calcular el área de dicha elipse usando la fórmula dada por el Teorema de Green

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx).$$

Para la elipse tenemos que la curva C está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}(t) &= a \cos(t)\hat{\mathbf{i}} + b \sin(t)\hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces la superficie de la elipse se puede calcular, por el Teorema de Green, de la siguiente manera,

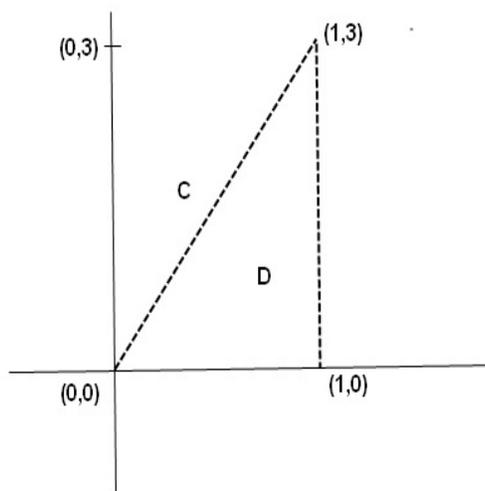


Figura 4.11: Triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,3)$, el cual delimita la región D sobre la que se va a calcular la integral de línea usando el Teorema de Green.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx), \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt, \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos(t) b \cos(t) - b \sin(t) (-a \sin(t))) dt, \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(ab \sin^2(t)) + (ab \cos^2(t))] dt, \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt, \\
 &= \pi ab.
 \end{aligned}$$

recapitulando escribimos la expresión, que resulta muy sencilla, para el área de la elipse

$$A = ab\pi.$$

4.7.3. Uso del teorema de Green para evaluar una integral sobre una línea no-cerrada

La integral

$$\int_C (1 + xy^2) dx - x^2 y dy \quad (4.45)$$

se puede escribir como

$$\int_C P dx - Q dy \quad (4.46)$$

donde $P = 1 + xy^2$ y $Q = x^2y$. Entonces la integral sobre la siguiente línea no-cerrada

$$\int_C (1 + xy^2) dx - x^2y dy \quad (4.47)$$

se puede calcular si se completa una línea cerrada y se aplica el Teorema de Green ([6, pág. 408]), donde C es la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$.

Solución

Esta integral de línea puede resolverse directamente por parametrización de C como (t, t^2) donde $-1 \leq t \leq 1$. Sin embargo, usaremos el teorema de Green para ilustrar el método realizado en algunos problemas. C es no-cerrada. Sin embargo, usaremos el teorema de Green para ilustrar como se aplica en estos casos. Para usar el teorema de Green, necesitamos una curva cerrada, por lo cual utilizaremos el segmento de una línea horizontal C' que va desde $(1, 1)$ hasta $(-1, 1)$ para cerrar la curva C (Figura 4.12)

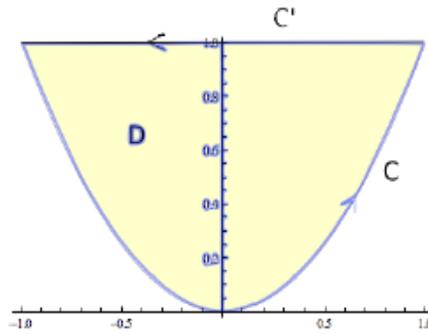


Figura 4.12: Curva abierta C para la cual se quiere calcular la longitud. Debido a que, para usar el teorema de Green, se requiere de una curva cerrada, entonces se usa una línea horizontal C' que va desde $(1, 1)$ hasta $(-1, 1)$ para generar una curva cerrada $C \cup C'$ la cual limita a la región D .

Para calcular la integral de línea tenemos las siguientes dos funciones

$$P = 1 + xy^2, \quad Q = -x^2y$$

calculamos las derivadas parciales de ambas funciones

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2y$$

Aplicando el teorema de Green para la region D tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{C \cup C'} (1 + xy^2) dx - x^2y dy &= \int \int_D (-2xy - 2xy) dA \\ &= \int \int_D -4xy dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 -4xy dy dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^5 - 2x) dx = 0. \end{aligned}$$

Calculamos la integral sobre la recta C' que une los puntos $(1, 1)$ con $(1, -1)$, la parametrización de esta curva es: $x(t) = -t$, $y(t) = 1$ para $t \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_{C'} (1 + xy^2) dx - x^2 y dy &= \int_1^{-1} (1 - t) (-dt) \\ &= \int_1^{-1} (t - 1) (dt) = -2. \end{aligned}$$

Para determinar el valor de la integral sobre la curva C , restamos el valor de la integral sobre la curva C' al valor de la integral sobre la región D , es decir,

$$\int_C (1 + xy^2) dx - x^2 y dy = 0 - (-2) = 2.$$

4.8. Teorema de Stokes

4.8.1. Cálculo de una integral de línea con el Teorema de Stokes

Sea C la curva cerrada mostrada en la Figura 4.13. Para $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ se va a calcular la siguiente integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (4.48)$$

usando el teorema de Stokes ([6, pág. 21]).

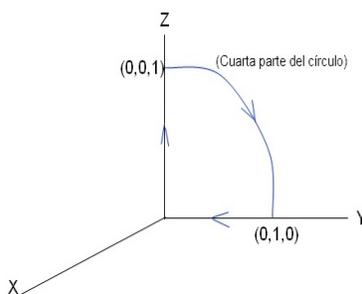


Figura 4.13: Trayectoria cerrada para calcular la integral de la superficie encerrada por dicha trayectoria.

Solución

Como tenemos una integral de línea y el objetivo es usar el teorema de Stokes, entonces vamos a calcular la siguiente integral de superficie

$$\iint_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.49)$$

donde \mathbf{S} es una superficie con borde \mathbf{C} . Tenemos la libertad de elegir cualquier superficie \mathbf{S} , siempre y cuando nos orientamos para que \mathbf{C} sea un límite de orientación positiva. En este caso, la elección más simple para \mathbf{S} es clara. Sea \mathbf{S} un cuarto del disco en el plano yz . Teniendo en

cuenta la orientación de la curva \mathbf{C} , tenemos que elegir la superficie normal del vector \mathbf{n} para señalar en qué dirección apunta. De acuerdo a la regla de la mano derecha, el vector normal debe apuntar hacia el lado negativo del eje x . Podemos calcular la curvatura de \mathbf{F} usando la notación vectorial

$$\begin{aligned}
 \text{curl}(\mathbf{F}) &= \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (y, z, x) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} x - \frac{\partial}{\partial z} z \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial z} y \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} z - \frac{\partial}{\partial y} z \right) \\
 &= \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(-1) \\
 &= (-1, -1, -1)
 \end{aligned}$$

a continuación se parametriza la superficie correspondiente a un cuarto del disco (mostrado por un segmento de círculo de la Figura 4.13)

$$\Phi(r, \theta) = (0, r \cos \theta, r \sin \theta), \quad (4.50)$$

para $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Calculamos el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= (0, \cos \theta, \sin \theta), \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= (0, -r \sin \theta, r \cos \theta), \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= \hat{\mathbf{i}}(r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta), \\
 &= \hat{\mathbf{i}}r.
 \end{aligned}$$

El vector normal apunta en la dirección x positiva. Sin embargo, debería apuntar en la dirección x negativa. Para orientar la superficie adecuadamente, hay que utilizar en su lugar el vector normal

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -r\hat{\mathbf{i}}. \quad (4.51)$$

De esta manera, podemos ver que la integral $\iint_S \text{curl} F \cdot dS$ debe ser positiva. El campo del vector $\text{curl} F = (-1, -1, -1)$ y el vector normal $(-r, 0, 0)$ apuntan en una dirección similar. Ahora, podemos calcular la integral, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \operatorname{curl} \mathbf{F}(\Phi(r, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, \theta) \times \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \theta) \right), \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-1, -1, -1) \cdot (-1r, 0, 0) d\theta dr, \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r d\theta dr = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

4.9. Ejercicios para resolver

4.9.1. Longitud de una curva que está dada mediante una función

Encuentra la longitud de la curva de la Figura 4.14

$$x = a \sin^3 t, \quad y = a \cos^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

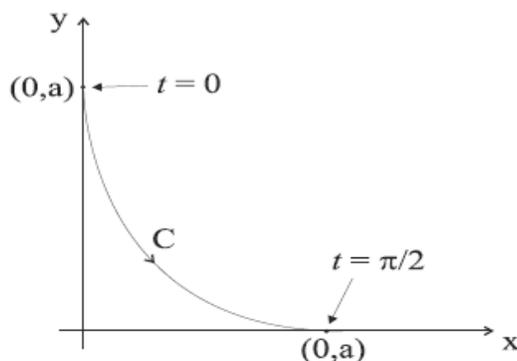


Figura 4.14: Representación de la curva C , sobre ella se muestran los puntos $t = 0$ y $t = \pi/2$ que corresponden a los extremos del segmento para el cual se va a medir la longitud de C .

cuando

$$\begin{aligned}
t = 0 &\quad \rightarrow \quad x = 0, \quad y = a \\
t = \frac{\pi}{2} &\quad \rightarrow \quad x = a, \quad y = 0
\end{aligned}$$

4.9.2. Masa encerrada en un volumen dado por sus valores extremos

Calcula la masa total de un cuerpo que ocupa la región $x > 0, y > 0, z > 0$ de la esfera $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, y tiene una densidad de masa $\rho(\mathbf{r}) = x^3 y z$.

4.9.3. Trabajo realizado a lo largo de trayectorias definidas por varias funciones

Encuentra el trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{F} = (x, y^2, z^3)$ sobre una partícula de masa m , cuando esta se mueve a lo largo de cada uno de las siguientes trayectorias:

1. Línea recta de $(0,0,0)$ hasta $(10,10,10)$,
2. La curva $x = t, y = 2t, z = t^2$ desde $t = 0$ hasta $t = 3$.

Capítulo 5

ECUACIONES DIFERENCIALES

A continuación se presentan ejemplos del uso de **ecuaciones diferenciales**. En el Capítulo de Integrales, (Capítulo 4) se incluyen ejemplos (5.2.1, 4.2.3) en los que también se usan ecuaciones diferenciales.

5.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

5.1.1. Ecuación de transporte radiativo

Cuando una onda electromagnética de frecuencia ν o radiación electromagnética (que sería luz en el caso de frecuencias del visible) incide en un medio que la absorbe, la intensidad de radiación (I) decae proporcionalmente a su recorrido dentro de dicho medio (Figura 5.1). Entre mayor sea la distancia que recorre dentro del medio, mayor va a ser el decaimiento.

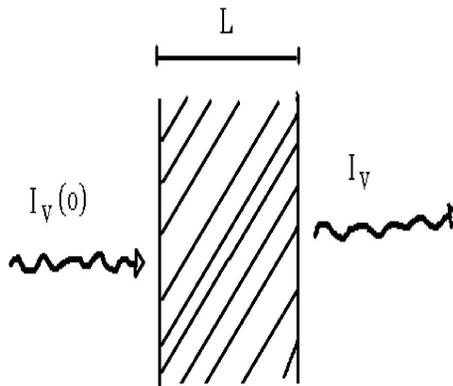


Figura 5.1: Representación de la radiación (luz) que pasa a través de un medio. En general, la intensidad de la radiación que llega al medio (lado izquierdo) es diferente a la que sale de él (lado derecho). Sin embargo, algunos medios pueden ser completamente transparentes a alguna frecuencia dada. En esos casos, la intensidad que sale sería igual a la que incide.

Debido a lo anterior, la intensidad de radiación, al cruzar un medio absorbente, se puede expresar como una **ecuación diferencial** a la que se le conoce como Ecuación de Transporte Radiativo o de Transferencia de Radiación. Vamos a ver primero el caso en el que, a la frecuencia ν , el medio solo absorbe y no emite. En ese caso, la **ecuación diferencial** que describe la intensidad de radiación se puede expresar en términos del coeficiente de absorción (κ_ν) del medio, de la siguiente manera:

$$\frac{dI_\nu}{d\ell} = -\kappa_\nu I_\nu. \quad (5.1)$$

Se define la profundidad óptica, de un objeto o sistema de un material dado, como una variable que determina cuanta radiación va a absorber si la frecuencia de dicha radiación es ν . Si la radiación cruza el sistema recorriendo una distancia L dentro de dicho sistema, entonces la profundidad óptica depende de dicha distancia.

$$\tau_\nu = \int_0^L \kappa_\nu d\ell. \quad (5.2)$$

Ahora, si tenemos un medio que, a la frecuencia ν emite, con un coeficiente de emisión j_ν . Entonces en la **ecuación diferencial** que describe la intensidad de radiación dentro de dicho medio también tenemos que considerar la emisión que se tenga a medida que la radiación incidente recorra el medio. En ese caso, la **ecuación diferencial** es

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu. \quad (5.3)$$

La cual también se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (5.4)$$

Definimos la función fuente como S_ν , la cual expresa el cociente entre el coeficiente de emisión y el coeficiente de absorción,

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}, \quad (5.5)$$

entonces la ecuación de transporte queda como

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu. \quad (5.6)$$

en la Ecuación 5.6 se considera que el medio también emite a la frecuencia ν . Esta es una **ecuación diferencial lineal de primer orden** y su solución se lleva a cabo en el Ejercicio ??, dicha solución conduce a la forma integral de la Ecuación de Transporte Radiativo, la cual es

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_0 e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (5.7)$$

donde I_0 es la intensidad de la radiación incidente a la frecuencia ν . Esta ecuación es muy usada en Astronomía, Geofísica y Ciencias Espaciales. En el presente texto, la Ecuación 5.7 se aplica en el Ejercicio 4.1.1 del Capítulo 4.

Comentarios

Este problema es de decaimiento, es conveniente compararlo con el Ejercicio 4.1.1 de la Sección 4.1, sobre el mismo tema y con el Ejercicio 4.13 sobre la disminución de la energía potencial, del Capítulo de Integrales (Capítulo 4). En el presente ejercicio, se describe el transporte radiativo, o transferencia de energía por radiación, mediante una **ecuación diferencial** que depende de la opacidad y la emisividad del medio por el que se propaga la radiación de frecuencia ν . Haciendo álgebra obtenemos una **ecuación diferencial de primer orden no homogénea** para la ecuación de transporte radiativo y resolviendo dicha ecuación tenemos la expresión en forma integral.

5.1.2. Estrella en equilibrio hidrostático

Vamos a ver cuáles son las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen cilíndrico de una estrella. El volumen está a una distancia r del centro de la estrella, su eje está orientado radialmente hacia el centro y el cilindro tiene una sección dA y un grosor dr . La presión sobre la superficie superior genera una fuerza que empuja al elemento de volumen hacia afuera de la estrella. Dicha fuerza es

$$F_P = \frac{dP}{dr} dA dr.$$

Por otro lado, sobre el mismo elemento de volumen actúa una fuerza de gravedad dada por el producto de la masa de dicho elemento y la aceleración debida a la gravedad, a . La masa del elemento de volumen (dM) se puede expresar como

$$dM = \rho_r dV = \rho_r dA dr,$$

donde ρ_r es la densidad a la distancia r . Por otro lado, la aceleración debida a la fuerza de gravedad sobre el elemento de volumen dV es

$$a = \frac{G dM}{r^2}. \quad (5.8)$$

Entonces, la fuerza de atracción gravitacional sobre el elemento de volumen es

$$F_g = a dM = a \frac{GM_r}{r^2} \rho_r dA dr, \quad (5.9)$$

donde M_r es la masa de la estrella que se localiza a distancias menores a r y ρ_r es la densidad a la distancia r .

Cuando la Presión interna de una estrella (que tiende a expandirla) y la fuerza de gravedad (que tiende a contraerla) están en equilibrio (equilibrio hidrostático) se cumple la siguiente igualdad

$$F_p = F_g, \quad (5.10)$$

y entonces se cumple la siguiente **ecuación diferencial**

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho_r, \quad (5.11)$$

como

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho_r dr, \quad (5.12)$$

se cumple también que

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}, \quad (5.13)$$

donde el subíndice r se refiere a la distancia desde el centro de la estrella a la base del elemento de volumen.

A partir de esta ecuación se pueden calcular diversos parámetros físicos de una estrella.

Comentarios

Se establece la ecuación de equilibrio hidrostático partiendo de las presiones sobre un elemento de volumen que, en este caso, es un cilindro. Se obtiene **ecuación diferencial** que relaciona algunos parámetros físicos de la estrella.

5.1.3. Viento Solar y fuerza de gravedad

El Sol está perdiendo masa continuamente, a una tasa de $10^{-14}M_\odot$ por año, en lo que se conoce como viento solar. Esta pérdida de masa es muy pequeña y se puede despreciar. Sin embargo, algunos parámetros dependen de la masa del Sol. Debido a esto, se puede calcular la variación de dichos parámetros como función de la variación de la masa del Sol.

a) Escribe la **ecuación diferencial** que expresa la variación de la Fuerza de atracción gravitacional del Sol a lo largo de un tiempo T sobre un objeto cuya masa es m y que gira en torno al Sol en una órbita circular a una distancia r .

b) Supongamos que la tasa de pérdida de masa y la distancia Tierra-Sol han sido las mismas desde hace 5×10^9 años hasta la fecha. Vamos a calcular la variación de la fuerza de atracción del Sol sobre la Tierra durante dicho tiempo.

Respuestas

a) La ecuación que describe la fuerza de gravedad es

$$F = \frac{GmM_\odot}{r^2}, \quad (5.14)$$

donde G es la constante universal para la fuerza de gravedad. El cambio en la fuerza de gravedad del Sol sobre un objeto de masa m se puede expresar a partir de la derivada de F respecto del tiempo. Debido a que ninguna de las variables del lado derecho depende de M_\odot entonces la derivación del lado derecho es simplemente

$$\frac{dF}{dt} = \frac{Gm}{r^2} \frac{dM_\odot}{dt}. \quad (5.15)$$

Es decir, tenemos una **ecuación diferencial** de la forma

$$\frac{dY}{dt} = A \frac{dX}{dt}, \quad (5.16)$$

donde A es constante respecto de X y de t , $F(t) = Y(t)$ y $M_\odot = X(t)$.

b) Sustituyendo los valores de la masa de la Tierra y del Sol y la variación de la masa del Sol, así como la distancia entre el Sol y la Tierra (149597870700 m $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$) en la Ecuación 5.15, resulta que la variación de la fuerza de gravedad sobre la Tierra es

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2})(5,97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(1,5 \times 10^{11} \text{ m})^2} (10^{-14} * (1,9 \times 10^{30} \text{ kg}) * 5 \times 10^9) \\ \frac{dF}{dt} &= 1,68 \times 10^{18} \text{ N}.\end{aligned}$$

5.1.4. Distancia recorrida por un objeto en caída libre

Cuando un objeto se deja caer desde cierta altura h su velocidad es cero, a medida que transcurre el tiempo va aumentando su velocidad de tal manera que cuando pasa por el punto A lleva una velocidad v_0 y cuando pasa por el punto B lleva una velocidad v , que es mayor a v_0 . Supongamos que conocemos el tiempo (t) que le toma en ir del punto A hacia el punto B y la velocidad con la cual pasa por el punto A .

a) ¿Cuál es la velocidad que lleva justo cuando pasa por el punto B ?

b) ¿Cuál es la distancia que ha recorrido en el tiempo t ?

Respuestas

a) Partiendo de la segunda ley de Newton, el objeto de masa m es atraído a la superficie de la Tierra con una aceleración debida a la gravedad de $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Por otra parte, la aceleración se define como $a = \frac{dv}{dt}$, así

$$\begin{aligned}ma &= mg \\ \frac{dv}{dt} &= g.\end{aligned}$$

Integrando de ambos lados es posible hallar la velocidad que lleva justo cuando pasa por el punto B . Cuando pasa por el punto A el objeto lleva una velocidad v_0 y es el momento en el que inicia el tiempo de medición que le toma en ir del punto A hacia el B , por lo tanto $t_0 = 0$. Cuando llega al punto B a transcurrido un tiempo t , por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^v dv &= g \int_{t_0}^t dt \\ v|_{v_0}^v &= gt|_{t_0=0}^t \\ v &= v_0 + gt.\end{aligned}$$

b) Una vez calculada la velocidad, podemos hallar la distancia recorrida del punto A hacia el punto B integrando la ecuación de la velocidad. Cuando el objeto pasa por el punto A , que es el punto donde inicia la medición de la distancia recorrida, $y_0 = 0$ en un tiempo $t_0 = 0$. Por otra parte, la velocidad se define como $v = \frac{dy}{dt}$, por lo tanto, la distancia recorrida está dada

por

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 + gt \\
 \frac{dy}{dt} &= v_0 + gt \\
 \int_{y_0}^y dy &= v_0 \int_{t_0}^t dt + g \int_{t_0}^t t dt \\
 y|_{y_0=0}^y &= v_0 t|_{t_0=0}^t + \frac{1}{2} g t^2|_{t_0=0}^t \\
 y &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.
 \end{aligned}$$

Comentarios

En este problema se muestra cómo se obtienen las ecuaciones de velocidad y distancia en caída libre. En el caso de la velocidad, se parte de la **ecuación diferencial lineal de primer orden** $\frac{dv}{dt} = g$, la cual se puede resolver por **variables separables** dado que g es una constante. En el cálculo de la distancia se considera que la velocidad $v = dr/dt$ donde $r = y =$ distancia. La expresión $v = dy/dt$ se sustituye en la ecuación para la velocidad de un objeto en caída libre. Esto origina una **ecuación diferencial** en la que las variables son y y t . Dicha ecuación se resuelve por **variables separables**, de un lado de la igualdad tenemos solo la variable y y del otro solo la variable t . Resolviendo las integrales de ambos lados, obtenemos la expresión de la distancia y recorrida por un objeto en caída libre durante tiempo t .

5.1.5. Cálculo de la velocidad en caída libre

Supón que se tiene la situación del Ejercicio ?? con la diferencia de que sólo se conoce la velocidad v_0 cuando pasa por el punto A y la distancia y recorrida al pasar del punto A al punto B . ¿Qué velocidad lleva el objeto justo cuando pasa por el punto B ?

Respuesta

Para la solución partimos de la segunda ley de Newton

$$ma = mg,$$

y la aceleración se puede expresar con la siguiente **ecuación diferencial**

$$\frac{dv}{dt} = g. \quad (5.17)$$

La integración de la ecuación diferencial 5.17 se tiene que hacer respecto al tiempo y éste no se conoce. Se mencionó que sólo se conoce la distancia recorrida entre el punto A y B , por lo tanto, será necesario integrar respecto de la distancia y . Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial 5.17 por 1, expresado como $1 = \frac{dy}{dy}$, se tiene que el lado izquierdo de

$$\frac{dv}{dt} = g,$$

se puede expresar como

$$\frac{dy}{dy} \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy},$$

y, recordando que $v = \frac{dy}{dt}$ podemos ver que la ecuación diferencial 5.17 es equivalente a

$$v \frac{dv}{dy} = g,$$

ya que $g \times 1 = g$. Pasando dy al lado derecho de la ecuación anterior tenemos que

$$v dv = g dy, \quad (5.18)$$

para conocer la velocidad que tenía el objeto en el punto B tenemos que integrar cada lado de la ecuación diferencial 5.18. El lado derecho se integra entre los puntos A y B . Debido a eso, en el lado izquierdo tendremos las velocidades correspondientes a dichas posiciones. A la velocidad para el punto A la consideramos como velocidad inicial (v_0) y a la velocidad para el punto B (que es la que queremos conocer) como v

$$\int_{v_0}^v v dv = g \int_{y_0}^y dy,$$

$$\frac{1}{2} v^2 \Big|_{v_0}^v = g y \Big|_{y_0=0}^y,$$

y considerando $y_0 = 0$ tenemos que

$$v^2 - v_0^2 = 2 g y.$$

por lo cual, tendremos la siguiente expresión para v^2

$$v^2 = 2 g y + v_0^2. \quad (5.19)$$

Comentarios

En este problema se utilizó un recurso interesante, al hacer la multiplicación $1 = \frac{dy}{dy}$ fue posible cambiar las **variables de la ecuación diferencial**, quitando la limitante de no conocer la variable de tiempo t , resultando en una **ecuación diferencial lineal con variables separables** dado que, en este caso, g es una constante. Por lo tanto, la ecuación se resuelve despejando los términos dy y dv e integrando ambos lados de la ecuación. Al hacer esto encontramos la fórmula de la velocidad en caída libre (Ecuación 5.19), que se usa en clases de física básica como $v^2 = 2gh + v_0^2$, donde h es la altura. Sin embargo, generalmente no se explica su deducción mediante el uso de **ecuaciones diferenciales**.

5.2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

5.2.1. Velocidad de escape de Marte

Una nave espacial desea escapar de la superficie de Marte, los tripulantes saben que la fuerza de atracción ejercida sobre la nave está dada por la **ecuación diferencial**

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2}, \quad (5.20)$$

donde G es la constante de gravitación universal, M , la masa de Marte y r es la distancia al centro de masa del planeta y la nave. Para poder abandonar el planeta será necesario aplicarle a la nave una velocidad inicial, v_0 , llamada velocidad de escape, suficiente como para lograr salir del planeta. Con base en lo anterior,

1. Demuestra que la velocidad de escape que necesita la nave para poder abandonar dicha superficie está dada por

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_M}},$$

donde R_M es el radio de Marte.

2. Supongamos que los tripulantes sólo conocen el valor del radio de Marte ($R_M = 3397 \text{ km}$) y el valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie ($g_M = 3,71 \text{ m/s}^2$). ¿Es posible con esta información conocer el valor de la velocidad de escape?

Respuestas

1. Antes de resolver la **ecuación diferencial**, es necesario conocer las condiciones iniciales para poder resolver el problema. Cuando $t = 0$, el objeto tendrá una velocidad inicial de lanzamiento v_0 y se encontrará a una distancia $r_0 = R_M$, que será el radio del centro de Marte a la superficie. Por otra parte, es necesario llevar la ecuación (5.20) en términos de v . Entonces debemos considerar que

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr}.$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (5.20), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= -G \frac{M}{r^2} \\ v dv &= -GM \frac{dr}{r^2}. \end{aligned}$$

Integrando de ambos lados,

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v v dv &= -GM \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} \\ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} &= GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{GM}{r} - \frac{GM}{R_M} + \frac{v_0^2}{2} \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{GM}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R_M} \right). \end{aligned}$$

De la expresión anterior, la velocidad del cuerpo debe ser enteramente positiva. El término GM/r se hace muy pequeño a medida que el cuerpo se aleja de la superficie de Marte, la única contribución para que la velocidad sea puramente positiva es

$$\begin{aligned}\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R_M} &\geq 0 \\ v_0 &\geq \sqrt{\frac{2GM}{R_M}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad mínima con la cual el objeto puede escapar de la superficie de Marte es

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_M}}.$$

Si la velocidad de lanzamiento es menor que v_0 , la nave regresará a la superficie de Marte y dichos astronautas perderán su oportunidad de abandonar el planeta rojo.

2. En la superficie de Marte, cuando $r_0 = R_M$, la aceleración de la fuerza de gravedad es igual a $g_M = 3,71 \text{ m/s}^2$. De lo anterior, la ecuación que relaciona la fuerza gravitacional entre ambos cuerpos está dada por

$$\begin{aligned}mg_M &= G\frac{Mm}{r^2} \\ g_M &= G\frac{M}{R^2} \\ \text{entonces, } M &= \frac{g_M R_M^2}{G}.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación de la velocidad de escape v_0 , se tiene que

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{2g_M R_M} \\ v_0 &= \sqrt{2(3,71 \text{ m/s}^2)(3397000 \text{ m})} \\ v_0 &= 5020,5 \text{ m/s} = 5 \text{ km/s}.\end{aligned}$$

Comentarios

Para resolver este problema es necesario hacer la deducción de d^2r/dt^2 ya que con esto es posible observar que resulta una **ecuación diferencial lineal simple de variables separables**, dado que G y M son constantes. Esta **ecuación diferencial** se puede resolver por **variables separables**. Es decir, es posible realizar la integración de una variable de una lado de igualdad y la integración de la otra en el otro lado de dicha igualdad. Se usó la fórmula de la fuerza gravitacional, y se hicieron despejes y sustituciones para encontrar el valor de v_0 de la ecuación

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_M}}$$

5.2.2. Cambio de una órbita alrededor de Marte a una en torno a Júpiter

Se mandó una misión espacial a Plutón. Para alcanzar su objetivo, primero se puso en órbita elíptica, alrededor de Marte. Posteriormente se puso en órbita alrededor de Júpiter. Como se

conocen las coordenadas de Marte y de Júpiter se estudiaron las trayectorias posibles, así como el momento más adecuado, para pasarlo de la órbita de Marte a la de Júpiter.

Después de haber estudiado las posibles trayectorias, se decide que el cambio de órbita se realizará en el momento en el que la misión se encuentre en el Perigeo de su órbita en torno a Marte.

En la Figura 5.2 se muestra una vista superior de las órbitas de la misión para el momento en el que se considera adecuado hacer el cambio de órbita. La misión se mueve en dirección contraria a las manecillas del reloj. La órbita de Marte se representa con la elipse menor y la de Júpiter con la elipse mayor. Se puede ver que la órbita en torno a Marte coincide en dos puntos con la órbita alrededor de Júpiter. En la órbita alrededor de Marte esos puntos son el Apogeo (punto de menor distancia) y el Perigeo (punto de mayor distancia), el semieje mayor de dicha órbita es igual a a y el semieje menor es igual a b .

a) ¿Cuál es la ventaja de hacer el cambio de órbita durante el Perigeo?

b) ¿Cuáles son los incrementos en la aceleración, tanto en la componente X como en la componente Y , que deben darse al movimiento de la misión para realizar el cambio de órbita en el Perigeo?

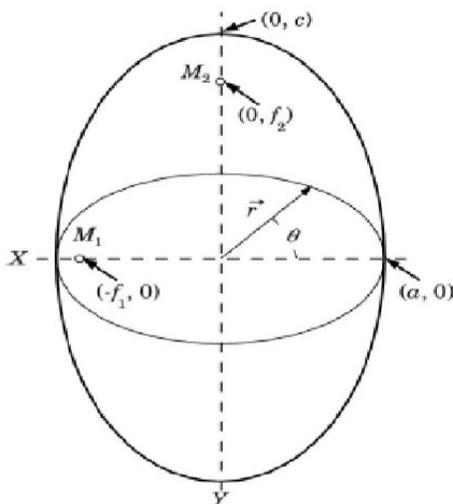


Figura 5.2: Representación de las órbitas elípticas de la misión en torno al Marte (órbita representada por la elipse menor) y en torno a Júpiter (elipse mayor). f_1 es la distancia desde el origen de coordenadas hasta el lugar en el que se encuentra Marte. Entonces, las coordenadas de Marte, en este sistema de coordenadas, es $(-f_1, 0)$. Júpiter se encuentra, en el mismo momento, en las coordenadas $(0, f_2)$.

Respuestas

a) Recordemos que en el Perigeo la distancia a Marte es máxima. Entonces, la fuerza de atracción gravitacional (Ecuación 3.1) de Marte sobre la misión es mínima. Debido a eso, es más fácil hacer que la misión deje la órbita de Marte estando en esa posición.

b) Vamos a calcular la aceleración que tiene un objeto en órbita alrededor de Marte en el punto $(a, 0)$. Analizando la Figura 5.2 vemos que el foco de la elipse menor se encuentra en el punto $(-f_1, 0)$. La distancia del punto $(a, 0)$ a dicho foco es $f_1 + a$. También vamos a calcular la aceleración de un objeto que gira en órbita alrededor de Júpiter en el mismo punto $(a, 0)$. De acuerdo a la Figura 5.2 la distancia del punto $(a, 0)$ al foco f_2 es $(a^2 + f_2^2)^{1/2}$.

Para calcular la aceleración partimos de la expresión de la posición de la misión con referencia

al eje de coordenadas, cuyo origen coincide con el centro de ambas elipses. El vector de posición de la misión, en general, se expresa como

$$\vec{r} = a \cos \theta \hat{i} + b \sin \theta \hat{j}, \quad (5.21)$$

el cual, derivándolo respecto al tiempo resulta en la expresión de la velocidad, que es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \hat{i} + b \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \hat{j}, \quad (5.22)$$

y derivándola nuevamente respecto al tiempo obtenemos la expresión para la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -a \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta + \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta \right] \hat{i} + b \left[- \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta + \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos \theta \right] \hat{j}. \quad (5.23)$$

Recordemos que, de acuerdo a la Figura 5.2, la misión gira en su órbita en dirección contraria a las manecillas del reloj. Entonces el ángulo θ aumenta a partir del punto $(a, 0)$. El ángulo θ de la Figura 5.2 lo consideraremos igual a α para Marte y a β para Júpiter.

En el punto $(a, 0)$ tenemos que $\alpha = \beta = 0$, por lo tanto $\sin(\beta) = \sin(\alpha) = 1$ y $\cos(\beta) = \cos(\alpha) = 1$. Entonces la aceleración en dicho punto para la órbita en torno a Marte es

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \Big|_{\theta=0} = -a \left(\frac{d\theta}{dt} \Big|_{\theta=0} \right)^2 \hat{i} + b \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \Big|_{\theta=0} \right) \hat{j}, \quad (5.24)$$

y la aceleración para la órbita en torno a Júpiter es

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \Big|_{\beta=0} = -a \left(\frac{d\beta}{dt} \Big|_{\beta=0} \right)^2 \hat{i} + c \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} \Big|_{\beta=0} \right) \hat{j}. \quad (5.25)$$

La fuerza de atracción gravitacional por unidad de masa que ejerce Marte sobre un objeto que se encuentra en el punto $(a, 0)$ es

$$\frac{-GM_M}{(a + f_1)^2} \hat{i} = -a \left(\frac{d\theta}{dt} \Big|_{\theta=0} \right)^2 \hat{i}, \quad (5.26)$$

y la fuerza de atracción gravitacional, por unidad de masa, en el punto $(a, 0)$ debido a Júpiter es

$$\frac{-GM_J}{a^2 + f_2^2} \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + f_2^2}} \hat{i} + \frac{f_2}{\sqrt{a^2 + f_2^2}} \hat{j} \right) = -a \left(\frac{d\beta}{dt} \Big|_{\beta=0} \right)^2 \hat{i} + c \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} \Big|_{\beta=0} \right) \hat{j}. \quad (5.27)$$

Sustituyendo la Ecuación 5.26 en la Ecuación 5.24 se obtiene una **ecuación diferencial de segundo orden** que expresa la aceleración debida a la fuerza de gravedad ejercida por Marte en el punto $(a, 0)$

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{-GM_M}{(a + f_1)^2} \hat{i} + 0\hat{j}, \quad (5.28)$$

y sustituyendo la Ecuación 5.27 en la Ecuación 5.25 se obtiene la aceleración debida a la fuerza de gravedad ejercida por Júpiter

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \Big|_{\beta=0} = \frac{aGM_J}{(a^2 + f_2^2)^{3/2}} \hat{i} + \frac{Gf_2M_J}{(a^2 + f_2^2)^{3/2}} \hat{j}. \quad (5.29)$$

Esto significa que en el punto $(a, 0)$ la componente X de la aceleración tiene que incrementarse por un factor

$$\Delta a_X = \frac{aGM_J}{(a^2 + f_2^2)^{3/2}} + \frac{GM_M}{(a + f_1)^2}, \quad (5.30)$$

en la dirección de $-X$. Se puede ver que la diferencia en las aceleraciones en X depende de las masas de ambos planetas y de ambas distancias. Por otro lado, la componente Y de la aceleración tiene que incrementarse un factor (moviéndose hacia arriba en la Figura 5.2) igual a

$$\Delta a_Y = \frac{Gf_2M_J}{(a^2 + f_2^2)^{3/2}}. \quad (5.31)$$

La componente de la aceleración en la dirección Y de la Figura 5.2 solo depende de la masa de Júpiter y de la distancia del punto $(a, 0)$ a Júpiter.

Para calcular la fuerza requerida para cambiar de órbita se debe considerar la aceleración total

$$\Delta \vec{a} = \Delta a_X \hat{i} + \Delta a_Y \hat{j} \quad (5.32)$$

Bibliografía

- [1] <http://www.southampton.ac.uk/~leor/soton/MATH2017/overview2017.pdf>
- [2] Preguntas de la Olimpiada Nacional de Astronomía en México, J. Eduardo Mendoza Torres, Siena Editores, 2006 y 2008
- [3] http://www.its.caltech.edu/~subhojoy/Site/Previous_Teaching_files/green.pdf
- [4] Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal, Tom M. Apostol, Volumen 1, Editorial Reverté, S.A., 2001
- [5] Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades, Tom M. Apostol, Volumen 2, Editorial Reverté, S.A., 2002
- [6] Cálculo vectorial, 5-ta Edición, J.E. Marsden, A.J. Tromba, Addison-Wesley, 2004
- [7] Advanced Calculus of Several Variables, C. H. Edwards, Jr., Dover Books on Mathematics, 2003
- [8] Problemas resueltos de cálculo en una variable, V., Tomeo Perucha, Thomson-Paraninfo S.A., España, 2005
- [9] Problemas resueltos de cálculo en varias variables, V., Tomeo Perucha, J., San Martín Moreno, I., Uña Juárez, Thomson-Paraninfo S.A., España, 2007
- [10] Cálculo Diferencial, Teoría y Problemas, J. M. Mazón Ruiz, Mc Graw-Hill, 1997