



INAOE

Compresión de espín y los condensados de Bose-Einstein

por la

Lic. Liliana Villanueva Vergara

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Supervisada por:

Dr. Francisco Soto Eguibar

AGOSTO 2015

Tonantzintla, Puebla

©INAOE 2015

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad, o
en partes, de esta tesis



Resumen

En este trabajo se realiza una revisión de la compresión del espín partiendo de la compresión bosónica. Se hace un análisis de los diferentes parámetros de compresión del espín de acuerdo al problema con el que se esté trabajando; por ejemplo, la espectroscopia Ramsey y el enredamiento cuántico. Para estudiar la compresión en condensados de Bose-Einstein, se hace un repaso del concepto de condensado de Bose-Einstein y de sus características cuánticas; de la misma forma, se profundiza un poco en el estudio de la segunda cuantización para poder tratar sistemas físicos con muchas partículas idénticas y considerar a la función de onda como un operador cuántico que representa a un campo de partículas. También se lleva a cabo la demostración de la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente e independiente del tiempo, con el objetivo de describir la dinámica del condensado de Bose-Einstein a bajas temperaturas. Finalmente, se obtienen los Hamiltonianos de un eje y de dos ejes torcidos, los cuales proporcionan estados comprimidos para los condensados de Bose-Einstein.

Abstract

This thesis performs a review of spin squeezing starting from bosonic squeezing. An analysis of the different spin squeezing parameters is made according to the problem to be worked out; e.g., Ramsey spectroscopy and quantum entanglement. To study squeezing in Bose-Einstein condensates, a review of Bose-Einstein condensates and their quantum features in the regime of low temperatures is made; in the same way, this work shows a study of the second quantization to deal with a physical system with many identical particles and consider the wave function as a quantum operator representing a field of particles. Also, the demonstration of the Gross-Pitaevskii equation, time-dependent and time-independent, in order to describe the dynamics of Bose-Einstein condensate at low temperatures was carried out. Finally, the Hamiltonians for one and two twisted axis are obtained, which provide the spin-squeezed states in Bose-Einstein condensates.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia, que siempre me impulsó a alcanzar mis sueños.

Agradecimientos

Al **Dr. Francisco Soto Eguibar**, el cual confió en mí y me apoyó en todo momento.

Al **INAOE** y a **CONACYT** por la oportunidad que me brindaron de crecer tanto personalmente como profesionalmente. También quisiera agradecer al personal académico como administrativo por todo el aprendizaje y atenciones que recibí en el tiempo que duraron mis estudios.

Al jurado que tuvo la gentileza de revisar este trabajo y por sus valiosas observaciones, **Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara**, **Dr. Javier Sánchez Mondragón** y **Dr. Arturo Zúñiga Segundo**.

A mis **compañeros de generación**, con los cuales forjé una invaluable amistad.

Índice general

1. Introducción.	1
2. Estados coherentes y compresión bosónica.	3
3. Estados coherentes de espín.	9
3.1. Operadores colectivos de espín.	9
3.2. Eigenestados de momento angular.	11
3.3. Estados coherentes de espín (CSS).	12
4. Parámetros de compresión del espín.	23
4.1. Parámetros de compresión basados en el Principio de Incertidumbre de Heisenberg.	23
4.1.1. Parámetro ξ_H^2	23
4.1.2. Parámetro $\xi_{H'}$	25
4.2. Parámetro de compresión de Kitagawa y Ueda ξ_S^2	28
4.3. Parámetro de compresión de Wineland ξ_R^2	29
4.4. Parámetro de compresión $\xi_{H''}$	34
4.5. Otros parámetros de compresión.	35
5. Condensación de Bose-Einstein.	37
5.1. La condensación de Bose-Einstein como una transición de fase.	37
5.2. Diferencias entre la estadística clásica y cuántica.	39
5.2.1. Estadística clásica.	39
5.2.2. Estadística cuántica.	39
5.3. Mecánica estadística de la condensación de Bose-Einstein.	40
5.4. Sistemas condensados de Bose-Einstein.	46
5.5. Descripción microscópica de la condensación de Bose-Einstein.	47
6. Formalismo de la Segunda Cuantización.	51
6.1. Mecánica cuántica de muchos cuerpos y la primera cuantización.	51
6.2. Determinantes de Slater y Permanentes.	51
6.3. Gas de Bose o Fermi no interactuantes (Primera Cuantización).	53
6.4. Operadores de creación y aniquilación.	53
6.5. Operadores de número.	55
6.6. Propiedades básicas del hamiltoniano de sistemas sin interacción.	58
6.7. Gas de Fermi y de Bose sin interacción y con interacción (Segunda Cuantización).	58
6.8. Agregando el espín.	61

7. La ecuación de Gross-Pitaevskii.	63
7.1. Un modelo para superfluidos y condensados de Bose-Einstein.	63
7.2. Demostración de la ecuación de Gross-Pitaevskii.	64
8. Compresión del espín en condensados de Bose-Einstein.	69
8.1. Hamiltoniano de un eje torcido en condensados de Bose-Einstein.	69
8.2. Eje torcido a partir de la interacción átomo-campo con desintonización grande. . . .	73
8.3. Hamiltoniano de dos ejes torcidos.	76
8.4. Parámetro de compresión de uno y dos ejes torcidos.	77
Conclusiones.	79
Ápndice A.- Cálculo de la varianza y el valor esperado del operador $\hat{J}_{\vec{n}}$ para un CSS.	81
Apéndice B: Cálculo de los valores esperados $\langle \hat{J}_{\alpha} \rangle$ y las varianzas $(\Delta \hat{J}_{\alpha})^2$ para $\alpha = x, y, z$.	85

Capítulo 1

Introducción.

La compresión, en términos generales, redistribuye las fluctuaciones cuánticas entre dos observables que no conmutan, manteniendo la mínima incertidumbre. La compresión en sistemas bosónicos ha sido ampliamente estudiada. Un campo de radiación se dice comprimido si la incertidumbre de una de las amplitudes de cuadratura es más pequeña que el límite estándar cuántico de $\frac{1}{4}$.

El concepto de compresión de espín ha recibido notable interés en las últimas décadas, tanto teórica como experimentalmente. La compresión de espín surge de dos consideraciones principalmente:

1. Las correlaciones entre partículas y el enredamiento.
2. El incremento en la precisión de las mediciones al hacer experimentación.

Kitagawa y Ueda [1] fueron los primeros en establecer el concepto de estados de espín comprimido en 1993 y lo implementaron en la interferometría de partículas, así como en sistemas de átomos de dos niveles. Wineland y su equipo hallaron de forma natural la relación de la compresión de espín con la espectroscopia Ramsey. Encontraron que el parámetro de compresión es la razón entre la resolución de fase al utilizarse un estado correlacionado y al usar un estado coherente de espín [2,3]. Otro ámbito donde se ha hecho uso de la compresión de espín es para detectar enredamiento cuántico, el cual juega un papel importante en el procesamiento de información cuántica. En lo que concierne a experimentos, es utilizado para mejorar la precisión en mediciones realizadas en espectroscopia Ramsey, para hacer más precisos los relojes atómicos y en interferómetros de ondas gravitacionales.

Se han realizado numerosos trabajos para generar compresión en sistemas atómicos, los cuales se dividen en dos categorías:

- I. Generando compresión de espín mediante interacciones entre átomos y fotones.
- II. Generando compresión de espín en condensados de Bose-Einstein mediante colisiones atómicas.

Se ha demostrado que en un condensado de Bose-Einstein de dos componentes en diferentes estados internos, las interacciones no lineales átomo-átomo reducen las fluctuaciones en ambas

poblaciones relativas de los dos estados internos. La compresión de espín en un condensado de Bose-Einstein de dos componentes ocurre cuando las longitudes de dispersión de la onda s , que se denotan por a_{ij} y que resultan de las colisiones entre dos estados internos, difieren. Cuando el condensado de Bose-Einstein se encuentra en una superposición de dos estados internos, una interacción no lineal de las colisiones entre átomos afecta los niveles de fluctuación del número relativo y la fase entre los dos componentes. Como resultado obtenemos una estadística comprimida en una cuadratura en particular [4]. En este trabajo se hace una revisión a los conceptos relacionados con la compresión de espín y sus principales aplicaciones, haciendo énfasis en Condensados de Bose-Einstein.

En el Capítulo 1 se revisa la compresión bosónica, la cual dio la pauta para fundamentar la compresión de espín. Se analiza el operador de cuadratura, así como el parámetro característico de la misma, el cual se denota como ζ_B . Adicionalmente, se obtiene una forma de ζ_B la cual implica una condición suficiente para compresión bosónica.

Los operadores de momento angular pueden ser definidos para que puedan actuar en el espacio de Hilbert de N átomos. Con este objetivo, introducimos los operadores de espín colectivo en el Capítulo 2. En este capítulo también se definen los estados coherentes de espín o CSS por sus siglas en inglés. En el Capítulo 3 se analizan los diferentes parámetros de compresión de espín y su naturaleza. Como veremos más adelante, varios de ellos surgen del Principio de Incertidumbre de Heisenberg generalizado y otros para describir fenómenos al realizar experimentos, por ejemplo, en la espectroscopia Ramsey, como ya se mencionó.

Los condensados de Bose-Einstein se han vuelto muy comunes para trabajar en el laboratorio; nos proporcionan conjuntos grandes y coherentes de átomos ultrafríos que parecen ideales para realizar experimentos de manipulación de un estado cuántico. Para analizar la compresión de espín en Condensados de Bose-Einstein, se realiza en el Capítulo 4 una amplia descripción de la física que envuelve los Condensados de Bose-Einstein y sus aplicaciones. La Segunda Cuantización nos proporciona una forma compacta de representar el espacio de excitaciones. Se revisa el formalismo de la Segunda Cuantización en el Capítulo 5, el cual es fundamental para establecer los Hamiltonianos de uno y de dos ejes torcidos. La ecuación de Gross-Pitaevskii describe los condensados de Bose-Einstein en el régimen de bajas temperaturas, es decir, describe la función de onda del condensado. En el Capítulo 6 se analiza esta ecuación y se demuestran las expresiones para las formas dependientes e independientes del tiempo.

Finalmente, en el Capítulo 7 se describe el Hamiltoniano de un eje torcido (\hat{H}_{OAT}) y el de dos ejes torcidos (\hat{H}_{TAT}), los cuales generan estados de espín comprimido en condensados de Bose-Einstein. En el apartado del Hamiltoniano de un eje torcido, se considera el caso donde la desintonización entre los átomos y el campo es grande.

Es importante mencionar que esta revisión se basó principalmente en [5] y que todos los cálculos involucrados se realizaron en el régimen de N (número de átomos) muy grande y pequeñas excitaciones, así como $\hbar = 1$.

Capítulo 2

Estados coherentes y compresión bosónica.

Antes de discutir la compresión de espín, revisaremos la compresión bosónica, lo cual nos dará las posibles definiciones y la generación de la compresión del espín. Los estados coherentes se definen como [6]

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.1)$$

y satisfacen la condición

$$\Delta\hat{x} = \Delta\hat{p} = 1, \quad (2.2)$$

donde

$$\hat{x} \equiv \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad (2.3)$$

y

$$\hat{p} \equiv \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i}, \quad (2.4)$$

siendo \hat{a} y \hat{a}^\dagger los operadores de aniquilación y de creación, respectivamente. Dado que los estados coherentes satisfacen la propiedad (2.2), entonces también minimizan las desigualdades de Heisenberg [7]; es decir,

$$\Delta\hat{x} \Delta\hat{p} = 1, \quad (2.5)$$

y por ello, también son llamados estados de mínima incertidumbre. Dado que $\Delta\hat{x} = \Delta\hat{p} = 1$, también se les dice que son estados de mínima incertidumbre balanceados. Los estados que son de mínima incertidumbre, pero en los que $\Delta\hat{x} \neq \Delta\hat{p}$, son llamados **estados coherentes comprimidos**. Generalmente la compresión ocurre cuando la varianza es mucho menor que 1 en alguna dirección del plano xp . Con el fin de hallar un operador de cuadratura genérica de compresión, rotamos el operador \hat{x} mediante el operador definido por [8]

$$\hat{x}_\theta = e^{i\theta\hat{n}}\hat{x}e^{-i\theta\hat{n}}, \quad (2.6)$$

donde θ es una variable real arbitraria y donde $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ es el operador de número. Demostramos ahora que

$$\hat{x}_\theta = \hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}. \quad (2.7)$$

Demostración: El operador de posición está dado por (2.3). Considerando que $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, entonces,

$$\begin{aligned} \hat{x}_\theta &= e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{x}e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} \\ &= e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} \\ &= e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} + e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \end{aligned}$$

Usando el Lema de Hadamard,

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots, \quad (2.8)$$

en cada término de \hat{x}_θ , obtenemos primero que

$$e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \hat{a} + i\theta[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] + \frac{(i\theta)^2}{2!}[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}]] + \dots. \quad (2.9)$$

Usando que $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$, calculamos

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a},$$

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}]] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, -\hat{a}] = \hat{a},$$

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}]]] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a},$$

y así sucesivamente. Sustituyendo estos resultados en (2.9),

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} &= \hat{a} - i\theta\hat{a} + \frac{(i\theta)^2}{2!}\hat{a} - \frac{(i\theta)^3}{3!}\hat{a} + \dots \\ &= \hat{a} \left[1 - i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} - \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots \right] \\ &= \hat{a}e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Procedemos de la misma forma para $e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}$; usando (2.8),

$$e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \hat{a}^\dagger + i\theta[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \frac{(i\theta)^2}{2!}[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] + \dots. \quad (2.11)$$

Usando las propiedades de los conmutadores tenemos

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]\hat{a} = \hat{a}^\dagger,$$

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger,$$

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger]]] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger,$$

y así sucesivamente. Sustituyendo en (2.11):

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} &= \hat{a}^\dagger + i\theta\hat{a}^\dagger + \frac{(i\theta)^2}{2!}\hat{a}^\dagger + \frac{(i\theta)^3}{3!}\hat{a}^\dagger + \dots \\ &= \hat{a}^\dagger \left[1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} \right] \\ &= \hat{a}^\dagger e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Sustituyendo resultados, finalmente obtenemos

$$\hat{x}_\theta = e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{x}e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta},$$

que es justamente lo que queríamos demostrar.

Los operadores \hat{x} y \hat{p} están asociados con las amplitudes del campo oscilante fuera de fase uno con el otro un ángulo de $\pi/2$ y, por lo tanto, están en cuadratura. La cuadratura principal de la compresión está caracterizada por el parámetro [9]

$$\zeta_B^2 = \text{mín}(\Delta\hat{x}_\theta)^2, \quad (2.12)$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$. El campo está esencialmente comprimido si $\zeta_B^2 < 1$. Este parámetro es el menor de la varianza principal del campo y proporciona una medida de la compresión. Realizando la minimización en (2.7) llegamos a la expresión [8]

$$\zeta_B^2 = 1 + 2(\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle - |\langle\hat{a}\rangle|^2) - 2|\langle\hat{a}^2\rangle - \langle\hat{a}\rangle^2|. \quad (2.13)$$

Demostración: El parámetro de la cuadratura principal de compresión se define por (2.12). Usando la Fórmula de Euler en (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{x}_\theta &= \hat{a}(\cos\theta - i\sin\theta) + \hat{a}^\dagger(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \cos\theta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - i\sin\theta(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \\ &= \cos\theta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{i}\sin\theta(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \\ &= \hat{x}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta. \end{aligned}$$

Recordando que la varianza de un observable \hat{A} está dada por $(\Delta\hat{A})^2 = \text{Var}(\hat{A}) = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$, encontramos que

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{x}_\theta)^2 &= \langle(\hat{x}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta)^2\rangle - \langle\hat{x}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta\rangle^2 \\ &= \cos^2\theta\langle\hat{x}^2\rangle + \cos\theta\sin\theta\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle + \sin^2\theta\langle\hat{p}^2\rangle - [\cos\theta\langle\hat{x}\rangle + \sin\theta\langle\hat{p}\rangle]^2 \\ &= \cos^2\theta[\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2] + \cos\theta\sin\theta[\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle - 2\langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle] + \sin^2\theta[\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2] \\ &= \cos^2\theta(\Delta\hat{x})^2 + \sin^2\theta(\Delta\hat{p})^2 + 2\cos\theta\sin\theta\left[\frac{1}{2}\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle - \langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle\right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pero la covarianza se define como

$$\text{Cov}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2}\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle - \langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle, \quad (2.15)$$

por lo que (2.14) se escribe como

$$(\Delta\hat{x}_\theta)^2 = \cos^2\theta(\Delta\hat{x})^2 + \sin^2\theta(\Delta\hat{p})^2 + 2\cos\theta\sin\theta\text{Cov}(\hat{x}, \hat{p}). \quad (2.16)$$

Ahora escribimos $\text{Cov}(\hat{x}, \hat{p})$, $(\Delta\hat{x})^2$ y $(\Delta\hat{p})^2$ en términos de \hat{a} y \hat{a}^\dagger ,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{x}) &= (\Delta\hat{x})^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2 \\ &= \langle(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2\rangle - \langle\hat{a} + \hat{a}^\dagger\rangle\langle\hat{a} + \hat{a}^\dagger\rangle \\ &= \langle\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}\rangle - [\langle\hat{a}\rangle^2 + 2\langle\hat{a}\rangle\langle\hat{a}^\dagger\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\rangle^2] \\ &= (\Delta\hat{a})^2 + (\Delta\hat{a}^\dagger)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle - \langle\hat{a}\rangle\langle\hat{a}^\dagger\rangle\right) \\ &= (\Delta\hat{a})^2 + (\Delta\hat{a}^\dagger)^2 + 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{p}) &= (\Delta\hat{p})^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \\
&= -\langle (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \rangle + \langle \hat{a} - \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} - \hat{a}^\dagger \rangle \\
&= -\langle \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \rangle + [\langle \hat{a} \rangle^2 - 2\langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2] \\
&= -(\Delta\hat{a})^2 - (\Delta\hat{a}^\dagger)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle - \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle\right) \\
&= -(\Delta\hat{a})^2 - (\Delta\hat{a}^\dagger)^2 + 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}}{2} &= \frac{(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) + (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}{2i} \\
&= \frac{\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}}{i}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Entonces (2.15) se escribe como

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\hat{x}, \hat{p}) &= \frac{\langle \hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2} \rangle}{i} - \frac{\langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} - \hat{a}^\dagger \rangle}{i} \\
&= \frac{(\langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2) - (\langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2)}{i} \\
&= \frac{1}{i} [(\Delta\hat{a})^2 - (\Delta\hat{a}^\dagger)^2].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\cos^2\theta = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\theta)]$, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta)]$, y $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, (2.16) se escribe,

$$\begin{aligned}
(\Delta\hat{x}_\theta)^2 &= \left[\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right] (\Delta\hat{x})^2 + \left[\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right] (\Delta\hat{p})^2 + 2\sin(2\theta)\text{Cov}(\hat{x}, \hat{p}) \\
&= \frac{(\Delta\hat{x})^2 + (\Delta\hat{p})^2}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)[(\Delta\hat{x})^2 - (\Delta\hat{p})^2] + \sin(2\theta)\text{Cov}(\hat{x}, \hat{p}) \\
&= \frac{\text{Var}(\hat{x}) + \text{Var}(\hat{p})}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}[\text{Var}(\hat{x}) - \text{Var}(\hat{p})] + \sin(2\theta)\text{Cov}(\hat{x}, \hat{p}).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{x}) + \text{Var}(\hat{p}) &= [\text{Var}(\hat{a}) + \text{Var}(\hat{a}^\dagger) + 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] + [-\text{Var}(\hat{a}) - \text{Var}(\hat{a}^\dagger) + 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] \\
&= 4\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{x}) - \text{Var}(\hat{p}) &= [\text{Var}(\hat{a}) + \text{Var}(\hat{a}^\dagger) + 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] - [-\text{Var}(\hat{a}) - \text{Var}(\hat{a}^\dagger) + 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] \\
&= 2[\text{Var}(\hat{a}) + \text{Var}(\hat{a}^\dagger)],
\end{aligned} \tag{2.23}$$

por lo que (2.21) queda como

$$\begin{aligned}
(\Delta\hat{x}_\theta)^2 &= \frac{4\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} 2[\text{Var}(\hat{a}) + \text{Var}(\hat{a}^\dagger)] - i\sin(2\theta)[\text{Var}(\hat{a}) - \text{Var}(\hat{a}^\dagger)] \\
&= 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) + \text{Var}(\hat{a})[\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)] + \text{Var}(\hat{a}^\dagger)[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)] \\
&= 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) + e^{-2i\theta}\text{Var}(\hat{a}) + e^{2i\theta}\text{Var}(\hat{a}^\dagger).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sustituyendo (2.24) en (2.12),

$$\zeta_B^2 = \text{mín}\{2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) + e^{-2i\theta}\text{Var}(\hat{a}) + e^{2i\theta}\text{Var}(\hat{a}^\dagger)\}, \quad (2.25)$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$. Para calcular el mínimo de la función, calculamos su derivada e igualamos a cero

$$\frac{d\zeta_B^2}{d\theta} = -2ie^{-2i\theta}\text{Var}(\hat{a}) + 2ie^{2i\theta}\text{Var}(\hat{a}^\dagger) = 0,$$

de donde

$$\theta = \frac{1}{4i} \ln \left(\frac{\text{Var}(\hat{a})}{\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right).$$

Sustituyendo este valor de θ en (2.25)

$$\begin{aligned} \zeta_B^2 &= 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) + \exp \left[-\frac{2i}{4i} \ln \left(\frac{\text{Var}(\hat{a})}{\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right) \right] \text{Var}(\hat{a}) + \exp \left[\frac{2i}{4i} \ln \left(\frac{\text{Var}(\hat{a})}{\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right) \right] \text{Var}(\hat{a}^\dagger) \\ &= 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) + \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\text{Var}(\hat{a})}{\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right) \right] \text{Var}(\hat{a}) + \exp \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\text{Var}(\hat{a})}{\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right) \right] \text{Var}(\hat{a}^\dagger). \end{aligned}$$

Usando la propiedad de los logaritmos $\log_b(x^y) = y \log_b(x)$, la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned} \zeta_B^2 &= 2\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) + \exp \left[\ln \left(\frac{\text{Var}(\hat{a})}{\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right) \right]^{-1/2} \text{Var}(\hat{a}) + \exp \left[\ln \left(\frac{\text{Var}(\hat{a})}{\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right) \right]^{1/2} \text{Var}(\hat{a}^\dagger) \\ &= 2 \left\{ \text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) + \sqrt{\text{Var}(\hat{a})\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando que $\text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{2} \langle \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle - \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle$, $\text{Var}(\hat{a}) = \langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2$, $\text{Var}(\hat{a}^\dagger) = \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2$, y sustituyendo

$$\zeta_B^2 = 2 \left[\frac{1}{2} \langle \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle - \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle - \sqrt{\text{Var}(\hat{a})\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \right].$$

Como $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$,

$$\begin{aligned} \zeta_B^2 &= \langle 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle + 2 \langle \hat{a} \rangle \langle \hat{a}^\dagger \rangle - 2\sqrt{\text{Var}(\hat{a})\text{Var}(\hat{a}^\dagger)} \\ &= 1 + 2 \langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle + 2 |\langle \hat{a} \rangle|^2 - 2\sqrt{|\text{Var}(\hat{a})|^2} \\ &= 1 + 2(\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle + |\langle \hat{a} \rangle|^2) - 2|\langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2|. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\zeta_B^2 = 1 + 2(\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle + |\langle \hat{a} \rangle|^2) - 2|\langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2|,$$

que es lo que queríamos mostrar.

Vamos a introducir ahora el operador de compresión y los estados comprimidos que se generan al aplicar dicho operador a los estados coherentes. Para ello, escribimos primero el siguiente Hamiltoniano no lineal [10]

$$\hat{H} = i(g\hat{a}^{\dagger 2} - g^*\hat{a}^2), \quad (2.26)$$

donde g es una variable compleja arbitraria. Definimos el operador de compresión como

$$\hat{S}(\eta) = e^{-i\hat{H}t} = e^{(\eta^*\hat{a}^2 - \eta\hat{a}^{\dagger 2})/2}, \quad (2.27)$$

donde $\eta = re^{i\theta}$ y $r = -2|g|t$ es el parámetro de compresión. Los estados coherentes comprimidos son

$$|\alpha, \eta\rangle = \hat{S}(\eta) |\alpha\rangle, \quad (2.28)$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente. El operador no lineal \hat{S} combina las componentes \hat{x} y \hat{p} , o sea, realiza una rotación, y también una compresión. Los estados comprimidos bosónicos también pueden ser generados por medio de un Hamiltoniano de interacción de Kerr [11]

$$\hat{H} = \kappa(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2. \quad (2.29)$$

Eligiendo como estado inicial un estado coherente, el estado al tiempo t será

$$|\psi(t)\rangle_K = e^{-i\kappa t(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2} |\alpha\rangle. \quad (2.30)$$

Capítulo 3

Estados coherentes de espín.

3.1. Operadores colectivos de espín.

Un estado interno de un conjunto de átomos idénticos de dos niveles es generado por un conjunto de 2^N estados ortogonales tal que $|e\rangle_1 |e\rangle_2 \cdots |e\rangle_N$, donde N es el número total de átomos. Introducimos los operadores de espín colectivo para representar el estado interno de N átomos en un espacio de Hilbert de 2^N dimensiones [12]

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{ni}, \quad (3.1)$$

donde $\hat{\sigma}_{ni}$ son las matrices de Pauli del n -ésimo átomo e $i = x, y, z$. Los operadores de espín colectivo cumplen las relaciones

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \quad (3.2)$$

$$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] = i\hat{J}_l, \quad (3.3)$$

donde j, k, l toman los valores x, y, z cíclicamente, y

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z, \quad (3.4)$$

donde

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y. \quad (3.5)$$

Demostración: Los operadores de espín colectivo están dados por (3.1). Consideremos los operadores \hat{J}_i y \hat{J}_j . Su conmutador es

$$\begin{aligned} [\hat{J}_i, \hat{J}_j] &= \hat{J}_i \hat{J}_j - \hat{J}_j \hat{J}_i \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{ni} \sum_{m=1}^N \hat{\sigma}_{mj} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N \hat{\sigma}_{mj} \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{ni}. \end{aligned}$$

Es bien conocido que $\hat{\sigma}_o\hat{\sigma}_p = i\varepsilon_{opq}\hat{\sigma}_q$, donde ε_{opq} es el tensor de Levi-Civita. Entonces

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_i, \hat{J}_j] &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \hat{\sigma}_{ni}\hat{\sigma}_{mj} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{mj}\hat{\sigma}_{ni} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_{nk} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (-i\varepsilon_{jik})\hat{\sigma}_{nk} \\
&= \frac{1}{4} \left[\sum_{n=1}^N i\hat{\sigma}_{nk} - \sum_{n=1}^N i(-\hat{\sigma}_{nk}) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left(2i \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{nk} \right) \\
&= i \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_{nk} \right) \\
&= i\hat{J}_k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hat{J}_k.$$

Por otro lado, sabemos que \hat{J}_{\pm} se define por (3.5). Entonces el conmutador se escribe como

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= [\hat{J}_x + i\hat{J}_y, \hat{J}_x - i\hat{J}_y] \\
&= [\hat{J}_x, \hat{J}_x - i\hat{J}_y] + [i\hat{J}_y, \hat{J}_x - i\hat{J}_y] \\
&= [\hat{J}_x, \hat{J}_x] - i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] + i[\hat{J}_y, \hat{J}_x] + [\hat{J}_y, \hat{J}_y] \\
&= -i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] + i[\hat{J}_y, \hat{J}_x] \\
&= -i(i\hat{J}_z) + i(-i\hat{J}_z) \\
&= 2\hat{J}_z.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z,$$

y de esta forma demostramos las expresiones (3.4) y (3.5). A fin de comparar los operadores de espín de Pauli con los de espín colectivo, daremos algunas propiedades de las matrices de Pauli. Los operadores de espín de Pauli satisfacen las siguientes relaciones

$$[\hat{\sigma}_l, \hat{\sigma}_m] = 2i\hat{\sigma}_n, \tag{3.6}$$

donde l, m, n deben formar una permutación cíclica. Además

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2,$$

$$[\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_i] = 0,$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = 1.$$

Los operadores de ascenso y descenso de Pauli se definen como $\hat{\sigma}_{\pm} = (1/2)(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$. Una continua excitación o desexcitación es inhibida

$$\hat{\sigma}_+^2 = \hat{\sigma}_-^2 = 0, \quad (3.7)$$

ya que estamos tratando con átomos de espín 1/2 y no podemos aumentar o disminuir dos veces consecutivas el espín. En contraste con los operadores de espín, el operador de espín colectivo no tiene muchas restricciones.

3.2. Eigenestados de momento angular.

Un eigenestado que de forma simultánea lo es de los operadores \hat{J}^2 y \hat{J}_z es llamado **eigenestado de momento angular** o **Estado de Dicke**; es decir, dicho estado se define como aquel que satisface las condiciones [13]

$$\hat{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1) |J, M\rangle \quad (3.8)$$

y

$$\hat{J}_z |J, M\rangle = M |J, M\rangle, \quad (3.9)$$

donde $J = N/2$, $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$ y N es el número total de átomos. En la siguiente Figura se muestra la representación de los estados de Dicke en una esfera.

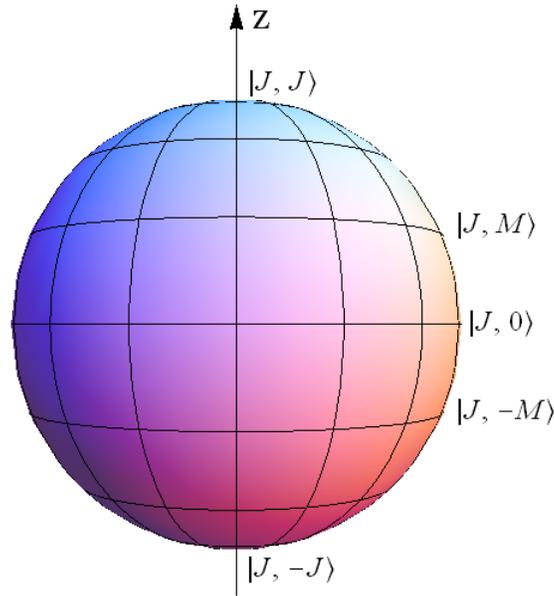


Figura 3.1: Representación de los estados de Dicke.

Si se usa la bien conocida fórmula

$$\hat{\ell}_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle, \quad (3.10)$$

donde $\hat{\ell}_+$ es el operador de ascenso de momento angular orbital, los estados excitados de Dicke se pueden construir a partir del estado base $|J, -J\rangle$. En efecto, aplicando el operador de ascenso al estado de Dicke $|J, -J\rangle$ obtenemos

$$\hat{J}_+ |J, -J\rangle = \sqrt{2J} |J, -J+1\rangle,$$

$$\begin{aligned}\hat{J}_+ |J, -J + 1\rangle &= \sqrt{2(2J - 1)} |J, -J + 2\rangle, \\ &\vdots \\ \hat{J}_+ |J, M - 1\rangle &= \sqrt{(J + M)(J - M + 1)} |J, M\rangle.\end{aligned}$$

De las expresiones anteriores es evidente que

$$|J, M\rangle = \frac{1}{(J + M)!} \hat{J}_+^{M+J} |J, -J\rangle. \quad (3.11)$$

El estado más excitado $|J, J\rangle$ y el estado base $|J, -J\rangle$ cumplen las condiciones

$$\hat{J}_+ |J, J\rangle = 0 \quad (3.12)$$

y

$$\hat{J}_- |J, -J\rangle = 0. \quad (3.13)$$

3.3. Estados coherentes de espín (CSS).

Llamamos **Estados coherentes de espín** o **Estados de Bloch** a los estados que pueden ser creados por la rotación arbitraria de los estados base de Dicke $|J, -J\rangle$. Para lograr ese objetivo debemos introducir el operador de rotación [12]; si rotamos un ángulo φ alrededor del eje Z tenemos

$$\hat{J}_z = \hat{J}_z, \quad (3.14)$$

$$\hat{J}_n = \hat{J}_x \sin \varphi - \hat{J}_y \cos \varphi, \quad (3.15)$$

y

$$\hat{J}_k = \hat{J}_x \cos \varphi + \hat{J}_y \sin \varphi. \quad (3.16)$$

En la siguiente Figura se aprecia cómo se realizan las rotaciones al eje X y al eje Y .

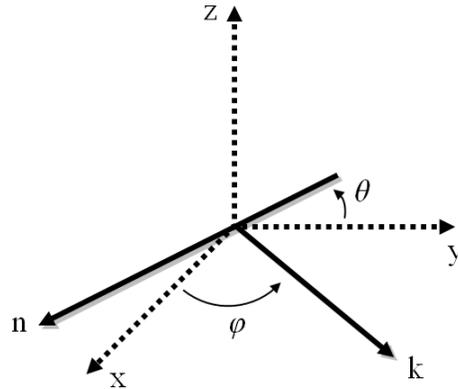


Figura 3.2: Rotación de los ejes.

El operador que rota ahora alrededor del vector \vec{n} un ángulo θ es

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{i\theta\hat{J}_n} = e^{i\theta(\hat{J}_x \sin \varphi - \hat{J}_y \cos \varphi)}. \quad (3.17)$$

Dado que el operador \hat{J}_n está en términos de \hat{J}_x y \hat{J}_y , podemos expresar (3.17) en términos de \hat{J}_+ y \hat{J}_- , por lo que podemos escribir

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{(\zeta\hat{J}_+ - \zeta^*\hat{J}_-)}, \quad (3.18)$$

donde

$$\zeta = \frac{1}{2}\theta e^{-i\varphi}. \quad (3.19)$$

Demostración: Primero efectuamos la rotación en un ángulo φ alrededor del eje Z . Ahora rotamos en un ángulo θ alrededor de un vector unitario \vec{n} . El operador que representa estas operaciones es

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{-i\theta\hat{J}_n}.$$

Sustituyendo (3.15) en la expresión anterior

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{-i\theta(\hat{J}_x \sin \varphi - \hat{J}_y \cos \varphi)}. \quad (3.20)$$

Invirtiendo (3.5) tenemos

$$\frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} = \frac{(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) + (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)}{2} = \hat{J}_x \quad (3.21)$$

y

$$\frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} = \frac{(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) - (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)}{2i} = \hat{J}_y. \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.21) y (3.22) en (3.20) obtenemos

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = \exp \left[-i\theta \left[\left(\frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \right) \sin \varphi - \left(\frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} \right) \cos \varphi \right] \right].$$

Usando la fórmula de Euler

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\theta\varphi} &= \exp \left[-i\theta \left(\frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2i} \frac{(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)}{2} - \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{2} \frac{(\hat{J}_+ - \hat{J}_-)}{2i} \right) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\theta}{4} (2e^{i\varphi} \hat{J}_- - 2e^{-i\varphi} \hat{J}_+) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\theta}{4} (2e^{i\varphi} \hat{J}_- - 2e^{-i\varphi} \hat{J}_+) \right] \\ &= \exp \left[\frac{\theta}{2} (e^{-i\varphi} \hat{J}_+ - e^{i\varphi} \hat{J}_-) \right]. \end{aligned}$$

Y finalmente tomando $\zeta = \theta e^{-i\varphi}/2$ la expresión anterior queda como

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{(\zeta\hat{J}_+ - \zeta^*\hat{J}_-)},$$

que era lo que deseábamos demostrar. Por lo tanto, los estados coherentes de espín se construyen matemáticamente por la rotación del estado base de Dicke; es decir, los estados coherentes de espín quedan definidos como

$$|\theta, \varphi\rangle = \hat{R}_{\theta\varphi} |J, -J\rangle. \quad (3.23)$$

Para hallar la ecuación de eigenvalores para los estados coherentes de espín, escribimos los operadores \hat{J}_k y \hat{J}_n en la forma

$$\hat{J}_k = \frac{1}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} + \hat{J}_-e^{i\varphi}), \quad (3.24)$$

$$\hat{J}_n = \frac{i}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} - \hat{J}_-e^{i\varphi}). \quad (3.25)$$

Demostración: Partiendo de la expresión (3.16) y sustituyendo (3.21) y (3.22), así como las formas exponenciales de $\cos \varphi$ y $\sin \varphi$ obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{J}_k &= \left(\frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \right) \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) + \left(\frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{4}(2\hat{J}_+e^{-i\varphi} + 2\hat{J}_-e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} + \hat{J}_-e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\hat{J}_k = \frac{1}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} + \hat{J}_-e^{i\varphi}).$$

Haciendo lo mismo en (3.15),

$$\begin{aligned} \hat{J}_n &= \left(\frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \right) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) - \left(\frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4i}(2\hat{J}_-e^{i\varphi} - 2\hat{J}_+e^{-i\varphi}) \\ &= \frac{-i}{2}(\hat{J}_-e^{i\varphi} - \hat{J}_+e^{-i\varphi}) \\ &= \frac{i}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} + \hat{J}_-e^{i\varphi}), \end{aligned}$$

y finalmente

$$\hat{J}_n = \frac{i}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} + \hat{J}_-e^{i\varphi}).$$

De esta forma, quedan demostradas las expresiones (3.24) y (3.25). Notemos que se cumple que

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_n\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = \hat{J}_n, \quad (3.26)$$

y también

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_k\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = \hat{J}_k \cos \theta + \hat{J}_z \sin \theta. \quad (3.27)$$

Demostración: Usando $\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{-i\theta\hat{J}_n}$, se deduce que $\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = e^{i\theta\hat{J}_n}$ y el Lema de Hadamard obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_n\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger &= e^{(-i\theta\hat{J}_n)}\hat{J}_ne^{-(i\theta\hat{J}_n)} \\ &= \hat{J}_n + [-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_n] + \frac{1}{2!}[-i\theta\hat{J}_n, [-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_n]] + \dots \end{aligned}$$

Pero $[-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_n] = 0$, entonces

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_n\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = \hat{J}_n.$$

De igual forma, usando nuevamente la fórmula de Baker-Hausdorf para \hat{J}_k ,

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_k\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger &= e^{(-i\theta\hat{J}_n)}\hat{J}_ke^{-(i\theta\hat{J}_n)} \\ &= \hat{J}_k + [-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_k] + \frac{1}{2!}[-i\theta\hat{J}_n, [-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_k]] + \dots\end{aligned}$$

El primer conmutador es

$$\begin{aligned}[-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_k] &= -i\theta[\hat{J}_x \sin \varphi - \hat{J}_y \cos \varphi, \hat{J}_x \cos \varphi + \hat{J}_y \sin \varphi] \\ &= -i\theta([\hat{J}_x \sin \varphi, \hat{J}_x \cos \varphi] + [\hat{J}_x \sin \varphi, \hat{J}_y \sin \varphi] - [\hat{J}_y \cos \varphi, \hat{J}_x \cos \varphi] - [\hat{J}_y \cos \varphi, \hat{J}_y \sin \varphi]) \\ &= -i\theta(\sin^2 \varphi [\hat{J}_x, \hat{J}_y] - \cos^2 \varphi [\hat{J}_y, \hat{J}_x]) \\ &= -i\theta[\sin^2 \varphi (i\hat{J}_z) - \cos^2 \varphi (-i\hat{J}_z)] \\ &= \theta \sin^2 \varphi \hat{J}_z + \theta \cos^2 \varphi \hat{J}_z \\ &= \theta \hat{J}_z.\end{aligned}$$

El segundo conmutador es

$$\begin{aligned}[-i\theta\hat{J}_n, [-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_k]] &= [-i\theta\hat{J}_n, \theta\hat{J}_z] \\ &= -i\theta^2[\hat{J}_n, \hat{J}_z] \\ &= -i\theta^2[\hat{J}_x \sin \varphi - \hat{J}_y \cos \varphi, \hat{J}_z] \\ &= -i\theta^2([\hat{J}_x \sin \varphi, \hat{J}_z] - [\hat{J}_y \cos \varphi, \hat{J}_z]) \\ &= -i\theta^2(\sin \varphi [\hat{J}_x, \hat{J}_z] - \cos \varphi [\hat{J}_y, \hat{J}_z]) \\ &= -i\theta^2(-i\hat{J}_y \sin \varphi - i\hat{J}_x \cos \varphi) \\ &= -\theta^2(\hat{J}_x \cos \varphi + \hat{J}_y \sin \varphi) \\ &= -\theta^2 \hat{J}_k.\end{aligned}$$

El tercero es

$$\begin{aligned}[-i\theta\hat{J}_n, -\theta^2 \hat{J}_k] &= -\theta^2[-i\theta\hat{J}_n, \hat{J}_k] \\ &= -\theta^2(\theta\hat{J}_z) \\ &= -\theta^3 \hat{J}_z.\end{aligned}$$

El siguiente es

$$\begin{aligned}[-i\theta\hat{J}_n, -\theta^3 \hat{J}_z] &= -\theta^2[-i\theta\hat{J}_n, \theta\hat{J}_z] \\ &= -\theta^2(-\theta^2 \hat{J}_k) \\ &= \theta^4 \hat{J}_k,\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Sustituyendo estos resultados,

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_k\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger &= \hat{J}_k + \theta\hat{J}_z - \frac{1}{2!}\theta^2\hat{J}_k - \frac{1}{3!}\theta^3\hat{J}_z + \frac{1}{4!}\theta^4\hat{J}_k + \dots \\ &= \hat{J}_k \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots\right) + \hat{J}_z \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots\right) \\ &= \hat{J}_k \cos \varphi + \hat{J}_z \sin \varphi.\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_k\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = \hat{J}_k \cos \varphi + \hat{J}_z \sin \varphi,$$

que era lo que queríamos probar. Utilizando (3.26) y (3.27) se demuestra que

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_-\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = \hat{R}_{\theta\varphi}[(\hat{J}_k + i\hat{J}_n)e^{-i\varphi}]\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = [\hat{J}_z \sin \theta + e^{i\varphi} \cos^2(\theta/2)\hat{J}_- - e^{-i\varphi} \sin^2(\theta/2)\hat{J}_+]e^{-i\varphi}. \quad (3.28)$$

Demostración: Consideremos las expresiones (3.23) y (3.25). Despejamos en ambas a \hat{J}_+ ,

$$\hat{J}_+ = (2\hat{J}_k - \hat{J}_-e^{i\varphi})e^{i\varphi}$$

y

$$\hat{J}_+ = (-2i\hat{J}_n + \hat{J}_-e^{i\varphi})e^{i\varphi}.$$

Igualando ambas ecuaciones

$$(2\hat{J}_k - \hat{J}_-e^{i\varphi})e^{i\varphi} = (-2i\hat{J}_n + \hat{J}_-e^{i\varphi})e^{i\varphi},$$

y por lo tanto,

$$(\hat{J}_k + i\hat{J}_n)e^{-i\varphi} = \hat{J}_-.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_-\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger &= \hat{R}_{\theta\varphi}[(\hat{J}_k + i\hat{J}_n)e^{-i\varphi}]\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger \\ &= \{\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_k\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger + i\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_n\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger\}e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Pero ya demostramos anteriormente que

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_n\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = \hat{J}_n$$

y que

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_k\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = \hat{J}_k \cos \varphi + \hat{J}_z \sin \varphi.$$

Sustituyendo estos resultados obtenemos

$$\hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_-\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = (\hat{J}_k \cos \theta + \hat{J}_z \sin \theta + i\hat{J}_n)e^{-i\varphi}.$$

Previamente demostramos que

$$\hat{J}_k = \frac{1}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} + \hat{J}_-e^{i\varphi})$$

y

$$\hat{J}_n = \frac{i}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} - \hat{J}_-e^{i\varphi}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\theta\varphi}\hat{J}_-\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger &= \left[\frac{1}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} + \hat{J}_-e^{i\varphi}) \cos \theta + \hat{J}_z \sin \theta - \frac{1}{2}(\hat{J}_+e^{-i\varphi} - \hat{J}_-e^{i\varphi}) \right] e^{-i\varphi} \\ &= \left[\frac{\hat{J}_+}{2}(e^{-i\varphi} \cos \theta - e^{-i\varphi}) + \frac{\hat{J}_-}{2}(e^{i\varphi} \cos \theta + e^{i\varphi}) + \hat{J}_z \sin \theta \right] e^{-i\varphi} \\ &= \left[\frac{\hat{J}_+e^{-i\varphi}}{2}(\cos \theta - 1) + \frac{\hat{J}_-e^{i\varphi}}{2}(\cos \theta + 1) + \hat{J}_z \sin \theta \right] e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$, y $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$, obtenemos el resultado que buscábamos

$$\hat{R}_{\theta\varphi} \hat{J}_- \hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger = [\hat{J}_z \sin \theta + e^{i\varphi} \cos^2(\theta/2) \hat{J}_- - e^{i\varphi} \sin^2(\theta/2) \hat{J}_+] e^{-i\varphi}.$$

Una importante propiedad es

$$\hat{R}_{\theta\varphi} \hat{J}_- \hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger |\theta, \varphi\rangle = 0 \quad (3.29)$$

que se demuestra a continuación.

Demostración: Usando que $\hat{J}_- |J, -J\rangle = 0$ y aplicando el operador de rotación $\hat{R}_{\theta\varphi}$ por la izquierda

$$\hat{R}_{\theta\varphi} \hat{J}_- |J, -J\rangle = 0.$$

Utilizando que $\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger \hat{R}_{\theta\varphi} = I$,

$$\hat{R}_{\theta\varphi} \hat{J}_- (\hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger \hat{R}_{\theta\varphi}) |J, -J\rangle = (\hat{R}_{\theta\varphi} \hat{J}_- \hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger) \hat{R}_{\theta\varphi} |J, -J\rangle = 0.$$

Pero por definición de los estados coherentes de espín $|\theta, \varphi\rangle = \hat{R}_{\theta\varphi} |J, -J\rangle$, por lo que

$$\hat{R}_{\theta\varphi} \hat{J}_- \hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger |\theta, \varphi\rangle = 0,$$

que era lo que deseábamos demostrar. Sustituyendo la expresión para $\hat{R}_{\theta\varphi} \hat{J}_- \hat{R}_{\theta\varphi}^\dagger$ en la relación anterior, obtenemos la ecuación de eigenvalores para estados coherentes de espín,

$$[\hat{J}_z \sin \theta + e^{i\varphi} \cos^2(\theta/2) \hat{J}_- - e^{-i\varphi} \sin^2(\theta/2) \hat{J}_+] |\theta, \varphi\rangle = 0.$$

Para probar su veracidad, basta simplemente sustituir (3.28) en la expresión que acabamos de demostrar para obtener el resultado. Dado que los estados coherentes de espín $|\theta, \varphi\rangle$ se obtienen rotando el estado base $|J, -J\rangle$, serán eigenestados del momento angular total con el mismo eigenvalor; es decir,

$$\hat{J}^2 |\theta, \varphi\rangle = J(J+1) |\theta, \varphi\rangle. \quad (3.30)$$

Por esta razón, es posible desarrollar $|\theta, \varphi\rangle$ en términos de los eigenestados de momento angular $|J, M\rangle$. Para llegar a una expresión que describa esta situación, reescribimos el operador de rotación $\hat{R}_{\theta\varphi}$ como

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{\tau \hat{J}_+} e^{\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z} e^{-\tau^* \hat{J}_-}, \quad (3.31)$$

donde $\tau = e^{-i\varphi} \tan(\theta/2)$.

Demostración: De acuerdo a [14], las álgebras de Lie han sido utilizadas para investigar las propiedades no clásicas de la luz en sistemas ópticos cuánticos. Se han considerado los estados comprimidos de fotones en términos de álgebras de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ y $\mathfrak{su}(2)$ y los estados coherentes asociados con estas álgebras. Comenzaremos por introducir los operadores \hat{K}_\pm y \hat{K}_0 , que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{K}_-, \hat{K}_+] = 2\sigma \hat{K}_0, \quad (3.32)$$

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm, \quad (3.33)$$

donde $\sigma = \pm 1$. Cuando $\sigma = 1$, los operadores \hat{K}_+ , \hat{K}_- y \hat{K}_0 se convierten en los generadores del álgebra de Lie SU(1,1) y cuando $\sigma = -1$, los operadores \hat{K}_+ , \hat{K}_- y \hat{K}_0 se convierten en los generadores del álgebra de Lie SU(2). Si la descomposición es en orden normal, para funciones arbitrarias a_{\pm} , $a_0 \in \mathbb{C}$,

$$e^{(a_+\hat{K}_+ + a_0\hat{K}_0 + a_-\hat{K}_-)} = e^{A_+\hat{K}_+} e^{\ln(A_0)\hat{K}_0} e^{A_-\hat{K}_-}, \quad (3.34)$$

donde A_{\pm} y A_0 están dados por

$$A_{\pm} = \frac{a_{\pm}}{\phi} \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi - (a_0/2\phi) \sinh \phi}, \quad (3.35)$$

y

$$A_0 = \frac{1}{[\cosh \phi - (a_0/2\phi) \sinh \phi]^2}, \quad (3.36)$$

con

$$\phi = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - \sigma a_+ a_-}. \quad (3.37)$$

En nuestro caso, sabemos que \hat{J}_+ , \hat{J}_- y \hat{J}_z tienen las siguientes reglas de conmutación,

$$[\hat{J}_-, \hat{J}_+] = -2\hat{J}_z, \quad (3.38)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hat{J}_{\pm}. \quad (3.39)$$

Comparando (3.32) con (3.38), observamos que $\sigma = -1$, por lo que tenemos un álgebra de Lie SU(2). El operador de rotación está dado por (3.18), así que identificamos que $a_+ = \varsigma$, $a_- = -\varsigma^*$ y $a_0 = 0$. De (3.37),

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{0 - (-1)\varsigma\varsigma^*} = \sqrt{\varsigma\varsigma^*} = \sqrt{(\theta/2)e^{-i\varphi}(\theta/2)e^{i\varphi}} \\ &= \theta/2. \end{aligned}$$

Calculamos A_+ con (3.35),

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{(\theta/2)e^{-i\varphi}}{(\theta/2)} \frac{\sinh(\theta/2)}{\cosh(\theta/2) - (0) \sinh(\theta/2)} = e^{-i\varphi} \frac{\sinh(\theta/2)}{\cosh(\theta/2)} \\ &= e^{-i\varphi} \tanh(\theta/2). \end{aligned}$$

Ahora calculamos A_- ,

$$\begin{aligned} A_- &= -\frac{(\theta/2)e^{i\varphi}}{(\theta/2)} \frac{\sinh(\theta/2)}{\cosh(\theta/2) - (0) \sinh(\theta/2)} = e^{i\varphi} \frac{\sinh(\theta/2)}{\cosh(\theta/2)} \\ &= e^{i\varphi} \tanh(\theta/2). \end{aligned}$$

Y por último, A_0 mediante (3.36),

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{[\cosh(\theta/2) - (0) \sinh(\theta/2)]^2} = \frac{1}{\cosh^2(\theta/2)} = \operatorname{sech}^2(\theta/2) \\ &= 1 - \tanh^2 A. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\tau = e^{-i\varphi} \tanh(\theta/2)$, podemos reescribir

$$A_+ = \tau,$$

$$A_- = \tau^*,$$

$$A_0 = 1 - \tanh(\theta/2) = 1 - |\tau|^2.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (3.34) obtenemos lo que queríamos demostrar,

$$\hat{R}_{\theta\varphi} = e^{\tau \hat{J}_+} e^{\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z} e^{-\tau^* \hat{J}_-}.$$

Usando la descomposición de $\hat{R}_{\theta\varphi}$ que acabamos de demostrar y aplicándola a los estados coherentes de espín $|\theta, \varphi\rangle$ obtenemos una expresión de los estados coherentes de espín [12],

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{M=-J}^J \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} \binom{2J}{M+J}^{1/2} \tau^{M+J} |J, M\rangle. \quad (3.40)$$

Demostración: Como ya vimos, los estados coherentes de espín se definen como

$$|\theta, \varphi\rangle = \hat{R}_{\theta, \varphi} |J, -J\rangle,$$

donde $|J, -J\rangle$ es el estado base de Dicke y $\hat{R}_{\theta\varphi}$ es el operador de rotación, dado por (3.31). Así que

$$|\theta, \varphi\rangle = e^{\tau \hat{J}_+} e^{\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z} e^{-\tau^* \hat{J}_-} |J, -J\rangle. \quad (3.41)$$

Comenzamos calculando $e^{-\tau^* \hat{J}_-} |J, -J\rangle$; usando la serie de Taylor de la exponencial

$$\begin{aligned} e^{-\tau^* \hat{J}_-} |J, -J\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau^* \hat{J}_-)^n}{n!} |J, -J\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau^*)^n}{n!} \hat{J}_-^n |J, -J\rangle \\ &= \left(1 - \tau^* \hat{J}_- + \frac{(\tau^*)^2}{2!} \hat{J}_-^2 - \dots \right) |J, -J\rangle, \end{aligned}$$

pero $\hat{J}_- |J, -J\rangle = 0$, entonces

$$e^{-\tau^* \hat{J}_-} |J, -J\rangle = |J, -J\rangle.$$

Ahora calculamos $e^{\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z} |J, -J\rangle$; usando nuevamente el desarrollo de Taylor,

$$\begin{aligned} e^{\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z} |J, -J\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(1+|\tau|^2) \hat{J}_z)^n}{n!} |J, -J\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(1+|\tau|^2))^n}{n!} \hat{J}_z^n |J, -J\rangle \end{aligned}$$

Se sabe que $\hat{J}_z |J, M\rangle = M |J, M\rangle$. Por lo tanto, $\hat{J}_z^n |J, -J\rangle = (-J)^n |J, -J\rangle$. Sustituyendo este resultado,

$$\begin{aligned}
e^{\ln(1+|\tau|^2)\hat{J}_z} |J, -J\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(1+|\tau|^2))^n}{n!} (-J)^n |J, -J\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-J \ln(1+|\tau|^2))^n}{n!} |J, -J\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\ln(1+|\tau|^2)^{-J}]^n}{n!} |J, -J\rangle \\
&= e^{\ln(1+|\tau|^2)^{-J}} |J, -J\rangle \\
&= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} |J, -J\rangle.
\end{aligned}$$

Si ahora aplicamos por la izquierda $e^{\tau\hat{J}_+}$

$$\begin{aligned}
|\theta, \varphi\rangle &= e^{\tau\hat{J}_+} e^{\ln(1+|\tau|^2)\hat{J}_z} e^{-\tau\hat{J}_-} |J, -J\rangle \\
&= e^{\tau\hat{J}_+} \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} |J, -J\rangle \\
&= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} e^{\tau\hat{J}_+} |J, -J\rangle.
\end{aligned}$$

Desarrollando $e^{\tau\hat{J}_+}$ en su serie de Taylor

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} \frac{\tau^n}{n!} \hat{J}_+^n |J, -J\rangle.$$

Considerando que $-J \leq M \leq J$, hacemos el cambio de variable $n = M + J$, y la expresión anterior queda como

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{M=-J}^{\infty} \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} \frac{\tau^{M+J}}{(M+J)!} \hat{J}_+^{M+J} |J, -J\rangle.$$

Como $\hat{J}_+ |J, M\rangle = \sqrt{(J+M+1)(J-M)} |J, M+1\rangle$, es fácil demostrar que

$$\hat{J}_+^k |J, -J\rangle = \sqrt{k!} \sqrt{(2J-0)(2J-1)(2J-2)(2J-3)\cdots(2J-(k-1))} |J, -J+k\rangle; \quad (3.42)$$

además $\hat{J}_+ |J, J\rangle = 0$, y por lo tanto,

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{M=-J}^J \frac{1}{(1+|\tau|^2)^J} \binom{2J}{M+J}^{1/2} \tau^{M+J} |J, M\rangle,$$

que es lo que se quería demostrar. A continuación se ilustra un estado coherente de espín o estado de Bloch.

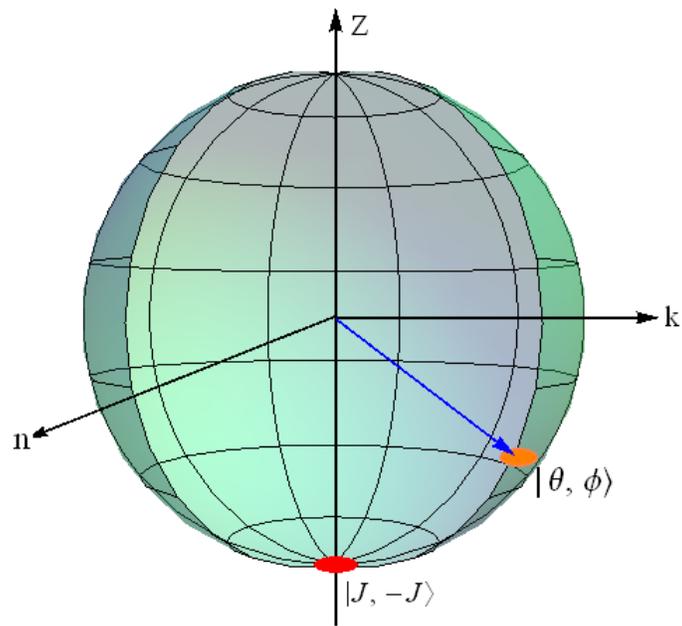


Figura 3.3: Representación de los estados coherentes de espín.

Capítulo 4

Parámetros de compresión del espín.

4.1. Parámetros de compresión basados en el Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

En esta sección analizaremos los parámetros de compresión de espín que se definen a partir de el Principio de Incertidumbre Generalizado.

4.1.1. Parámetro ξ_H^2 .

Dado que la definición de compresión de espín no es única, cuando hablamos de ella, debemos especificar cierto parámetro de compresión. La relación de incertidumbre para los operadores de momento angular resulta de la relación de conmutación

$$[\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{J}_\gamma, \quad (4.1)$$

donde α, β y γ denotan las componentes en cualesquiera de las tres direcciones ortogonales y $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el símbolo de Levi-Civita. La relación de incertidumbre es

$$(\Delta \hat{J}_\alpha)^2 (\Delta \hat{J}_\beta)^2 \geq \frac{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|^2}{4}. \quad (4.2)$$

Demostración: El Principio de Incertidumbre Generalizado establece que

$$(\Delta \hat{A})^2 (\Delta \hat{B})^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right]^2. \quad (4.3)$$

Si consideramos los operadores \hat{J}_α y \hat{J}_β , (4.3) se escribe como

$$(\Delta \hat{J}_\alpha)^2 (\Delta \hat{J}_\beta)^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta] \rangle \right]^2.$$

De (4.1),

$$(\Delta \hat{J}_\alpha)^2 (\Delta \hat{J}_\beta)^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{J}_\gamma \rangle \right]^2 = \left[\frac{1}{2i} i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle \hat{J}_\gamma \rangle \right]^2 = \frac{1}{4} |\langle \hat{J}_\gamma \rangle|^2,$$

que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto, un posible parámetro de compresión es [15]

$$\xi_H^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_\alpha)^2}{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|}, \quad (4.4)$$

donde $\alpha \neq \gamma$ y ambas variables pueden tomar los valores x, y, z . Si $\xi_H^2 < 1$, el estado es comprimido.

Demostración: En analogía con la compresión bosónica, la compresión de espín puede ser definida cuando una de las fluctuaciones en el lado izquierdo de las relaciones de incertidumbre de Heisenberg satisface [15, 16]

$$(\Delta \hat{J}_\alpha)^2 \leq \frac{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|}{2}. \quad (4.5)$$

Entonces,

$$\frac{2(\Delta \hat{J}_\alpha)^2}{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|} \leq 1.$$

Si definimos

$$\xi_H^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_\alpha)^2}{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|} \leq 1,$$

tendremos

$$\xi_H^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_\alpha)^2}{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|},$$

que es lo queríamos verificar. El subíndice H denota que el parámetro de compresión surge del Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

De forma general, el parámetro de compresión se puede definir como [15]

$$\xi_H^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2}{|\langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle|}, \quad (4.6)$$

donde \vec{n}_1 y \vec{n}_2 son dos vectores unitarios ortogonales. Deseamos calcular ξ_H^2 para los estados coherentes de espín; de las expresiones para valores esperados y varianzas para estos estados se encuentra que

$$\xi_H^2 = \frac{1 - (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2}{|\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2|}. \quad (4.7)$$

Demostración: En el Apéndice A se demuestran que los estados coherentes de espín satisfacen las relaciones

$$\langle \hat{J}_{\vec{n}} \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| \vec{n}_0 \cdot \vec{n} \quad (4.8)$$

y

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2 = \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n})^2]. \quad (4.9)$$

Así que

$$\langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2) \quad (4.10)$$

y

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 = \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]. \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.10) y (4.11) en (4.6),

$$\begin{aligned} \xi_H^2 &= \frac{2(N/4)[1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]}{|(N/2)| \langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)|} \\ &= \frac{1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2}{|\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)}, \end{aligned}$$

4.1. PARÁMETROS DE COMPRESIÓN BASADOS EN EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISE

pero

$$\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \langle \vec{\sigma}_1 \rangle = 1, \quad (4.12)$$

por lo que el parámetro finalmente queda como

$$\xi_H^2 = \frac{1 - (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2}{|\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2|}.$$

Q.E.D. Por ejemplo, tomando \vec{n}_0 en la dirección Z y \vec{n}_1 en la dirección X , el parámetro de compresión se convierte en

$$\xi_H^2 = \left| \frac{\sin \theta}{\cos \phi} \right|. \quad (4.13)$$

Demostración: Tomando \vec{n}_1 en la dirección Z y \vec{n}_0 en la dirección X , (4.6) se reescribe como

$$\xi_H^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2}{|\langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle|} = \frac{2(\Delta \hat{J}_z)^2}{|\langle \hat{J}_x \rangle|}. \quad (4.14)$$

En el Apéndice B se demuestran las expresiones de las varianzas y de los valores esperados en las direcciones X , Y y Z . Entonces,

$$\begin{aligned} \xi_H^2 &= \frac{2(N/4) \sin^2 \theta}{|(N/2) \sin \theta \cos \phi|} \\ &= \left| \frac{\sin \theta}{\cos \phi} \right|, \end{aligned}$$

tal y como queríamos mostrar. Es claro que ξ_H^2 puede ser menor que 1, lo cual no se espera para los estados coherentes de espín, porque no son de espín comprimido. Concluimos que este parámetro no es adecuado para los estados coherentes de espín.

4.1.2. Parámetro $\xi_{H'}$.

Ahora consideremos un parámetro de compresión de espín que puede ocurrir en dos direcciones ortogonales simultáneamente [17, 18]. Primero consideraremos compresión de espín en el eje X , mediante dos operadores de momento angular ortogonales en el plano YZ , dados por

$$\hat{J}_\theta \equiv \hat{J}_y \cos \theta + \hat{J}_z \sin \theta, \quad (4.15)$$

$$\hat{J}_{\theta+\pi/2} \equiv -\hat{J}_y \sin \theta + \hat{J}_z \cos \theta. \quad (4.16)$$

Estos operadores obedecen las reglas de conmutación

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_\theta] = i\hat{J}_{\theta+\pi/2}, \quad (4.17)$$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_{\theta+\pi/2}] = -i\hat{J}_\theta. \quad (4.18)$$

Demostración: Los operadores \hat{J}_θ y $\hat{J}_{\theta+\pi/2}$ están dados por (4.15) y (4.16). Calculamos el siguiente conmutador

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_\theta] = [\hat{J}_x, \hat{J}_y \cos \theta + \hat{J}_z \sin \theta] = \cos \theta [\hat{J}_x, \hat{J}_y] + \sin \theta [\hat{J}_x, \hat{J}_z]. \quad (4.19)$$

Utilizando que $[\hat{J}_o, \hat{J}_p] = i\varepsilon_{opq}\hat{J}_{opq}$, (4.19) queda como

$$\begin{aligned} [\hat{J}_x, \hat{J}_\theta] &= i \cos \theta \hat{J}_z - i \sin \theta \hat{J}_y = i(-\hat{J}_y \sin \theta + \hat{J}_z \cos \theta) \\ &= i\hat{J}_{\theta+\pi/2}, \end{aligned}$$

que es el primero de los conmutadores que queríamos demostrar. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} [\hat{J}_x, \hat{J}_{\theta+\pi/2}] &= [\hat{J}_x, -\hat{J}_y \sin \theta + \hat{J}_z \cos \theta] \\ &= -i \sin \theta \hat{J}_z - i \cos \theta \hat{J}_y \\ &= -i(\hat{J}_y \cos \theta + \hat{J}_z \sin \theta) \\ &= -i\hat{J}_\theta, \end{aligned}$$

que es el segundo conmutador y de esta forma terminamos la demostración. Trabajos realizados por Walls and Zoller [16], Saito y Ueda [19], así como Wang y Sanders [8], demostraron que la amplitud de la cuadratura de espín depende de la compresión de espín dada por (4.16). Los componentes de espín en el plano YZ controlan la compresión y adquieren mayor importancia que otra componente del espín. Como consecuencia, se pueden estudiar todas las componentes del espín en el plano YZ y no sólo la que es perpendicular a la del espín principal, como se hizo en los primeros trabajos de compresión de espín elaborados por Wineland [2] y Kitagawa y Ueda [1]. Ya introducidos estos operadores, el Principio de Incertidumbre se escribe como

$$(\Delta \hat{J}_x)^2 (\Delta \hat{J}_\theta)^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [\hat{J}_x, \hat{J}_\theta] \rangle \right]^2 = \left[\frac{1}{2i} \langle i\hat{J}_{\theta+\pi/2} \rangle \right]^2 = \frac{1}{4} \langle \hat{J}_{\theta+\pi/2} \rangle^2.$$

También,

$$(\Delta \hat{J}_x)^2 (\Delta \hat{J}_{\theta+\pi/2})^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [\hat{J}_x, \hat{J}_{\theta+\pi/2}] \rangle \right]^2 = \left[\frac{1}{2i} \langle -i\hat{J}_\theta \rangle \right]^2 = \frac{1}{4} \langle \hat{J}_\theta \rangle^2.$$

El estado es comprimido en el eje X si se cumple una de las dos condiciones

$$(\Delta \hat{J}_x)^2 < \frac{1}{2} |\langle \hat{J}_{\theta+\pi/2} \rangle| \quad (4.20)$$

$$(\Delta \hat{J}_x)^2 < \frac{1}{2} |\langle \hat{J}_\theta \rangle|, \quad (4.21)$$

o si se cumplen las dos. El valor máximo de $\langle \hat{J}_\theta \rangle$ es

$$\langle \hat{J}_\theta \rangle = \sqrt{\langle \hat{J}_z \rangle^2 + \langle \hat{J}_y \rangle^2}, \quad (4.22)$$

por lo que resulta obvia la desigualdad

$$(\Delta \hat{J}_x)^2 < \frac{1}{2} \sqrt{\langle \hat{J}_z \rangle^2 + \langle \hat{J}_y \rangle^2}. \quad (4.23)$$

De manera análoga, el estado es comprimido en \hat{J}_y si

$$(\Delta \hat{J}_y)^2 < \frac{1}{2} \sqrt{\langle \hat{J}_z \rangle^2 + \langle \hat{J}_x \rangle^2}. \quad (4.24)$$

4.1. PARÁMETROS DE COMPRESIÓN BASADOS EN EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISE

Las condiciones (4.23) y (4.24) se pueden cumplir simultáneamente. Generalizando lo anterior, consideremos los vectores \vec{n}_1 , \vec{n}_2 y \vec{n}_3 . La desigualdad (4.23) entonces se escribiría como

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 < \frac{1}{2} \sqrt{\langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle + \langle \hat{J}_{\vec{n}_3} \rangle}, \quad (4.25)$$

por lo que

$$\frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2}{\sqrt{\langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle + \langle \hat{J}_{\vec{n}_3} \rangle}} < 1.$$

Si definimos la parte izquierda como el parámetro de compresión $\xi_{H'}^2$ [17]

$$\xi_{H'}^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2}{\sqrt{\langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle + \langle \hat{J}_{\vec{n}_3} \rangle}}, \quad (4.26)$$

tenemos que $\xi_{H'}^2 < 1$. En particular, para los estados coherentes de espín se tiene

$$\xi_{H'}^2 = \sqrt{1 - (\vec{n}_0 - \vec{n}_1)^2}. \quad (4.27)$$

Demostración: Sabemos que para un estado coherente de espín, las varianzas y los valores esperados están dados por (4.8) y (4.9). Entonces,

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 &= \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2], \\ \langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle^2 &= \frac{N^2}{4} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)^2, \\ \langle \hat{J}_{\vec{n}_3} \rangle^2 &= \frac{N^2}{4} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_3)^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en (4.26),

$$\begin{aligned} \xi_{H'}^2 &= \frac{2(N/4)[1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]}{\sqrt{(N^2/4)|\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)^2 + (N^2/4)|\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_3)^2}} \\ &= \frac{(N/2)[1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]}{(N/2)|\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| \sqrt{(\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)^2 + (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_3)^2}}. \end{aligned}$$

Usando que $\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \langle \vec{\sigma}_1 \rangle = 1$, esta expresión se reduce a

$$\xi_{H'}^2 = \frac{1 - (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2}{\sqrt{(\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)^2 + (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_3)^2}} = \sqrt{1 - (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2},$$

que demuestra que para un estado coherente de espín efectivamente se cumple la ecuación (4.27). Si elegimos \vec{n}_0 en la dirección Z , se tiene

$$\xi_{H'}^2 = |\sin \theta|. \quad (4.28)$$

Demostración: Usando la expresión (4.27) y eligiendo \vec{n}_0 en la dirección Z ,

$$\xi_{H'}^2 = \sqrt{1 - |\vec{n}_0|^2 |\vec{n}_1|^2 \cos^2 \theta}.$$

Como \vec{n}_0 y \vec{n}_1 son vectores unitarios

$$\xi_{H'}^2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta|,$$

que es la ecuación (4.28), tal y como se quería demostrar. De este último resultado, podemos concluir que es posible comprimir a los estados coherentes de espín, y por lo tanto, $\xi_{H'}^2$ no es una buena definición de la compresión del espín.

4.2. Parámetro de compresión de Kitagawa y Ueda ξ_S^2 .

A diferencia de los sistemas bosónicos, donde la varianza es igual en cualquier dirección, para los estados coherentes de espín, la varianza de los operadores de espín depende de \vec{n} , y además, existe una dirección preferente, a la cual se le denomina **dirección principal de espín** o **MSD** por sus siglas en inglés, y que está dada por [1]

$$\vec{n}_0 = \frac{\langle \vec{J} \rangle}{|\langle \vec{J} \rangle|} = \frac{\langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{|\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|}, \quad (4.29)$$

donde la segunda expresión resulta por el intercambio de simetría.

Demostración: Consideremos la definición de la dirección principal de espín MSD, dada por (4.29), y recordemos que

$$\langle \vec{J} \rangle = \frac{N}{2} \langle \vec{\sigma}_1 \rangle,$$

para escribir

$$\vec{n}_0 = \frac{(N/2) \langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{|(N/2) \langle \vec{\sigma}_1 \rangle|} = \frac{\langle \vec{\sigma}_1 \rangle}{|\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|},$$

que es el resultado deseado. En lo sucesivo denotaremos como \vec{n}_\perp a la dirección perpendicular a la dirección principal de espín MSD. Para un estado coherente del espín tenemos

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = \frac{j}{2}. \quad (4.30)$$

Demostración: De (4.9),

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_\perp)^2].$$

Como \vec{n}_\perp es perpendicular a la dirección principal de espín MSD (\vec{n}_0), se tiene

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 |\vec{n}_0|^2 |\vec{n}_\perp|^2 \cos^2 90] = \frac{N}{4}.$$

Pero $j = N/2$, por lo que la expresión anterior queda como

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = \frac{2j}{4} = \frac{j}{2},$$

que es lo que se buscaba demostrar. Podemos concluir entonces, que un estado es de espín comprimido si la varianza de $\hat{J}_{\vec{n}_\perp}$ es menor que $j/2$. Un estado es de espín comprimido si

$$\text{mín}(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 < \frac{j}{2},$$

o lo que es equivalente

$$\frac{2 \text{mín}(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2}{j} < 1. \quad (4.31)$$

Definimos a ξ_S^2 como el lado izquierdo de (4.31); es decir,

$$\xi_S^2 = \frac{\text{mín}(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2}{j/2}.$$

El parámetro de compresión propuesto por Kitagawa y Ueda está basado en la cuadratura principal de compresión,

$$\xi_S^2 = \frac{\text{mín}(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2}{j/2} = \frac{4 \text{mín}(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2}{N}, \quad (4.32)$$

donde $j = N/2$, \vec{n}_\perp se refiere al eje perpendicular a la dirección principal del espín y la minimización es sobre todas las direcciones \vec{n}_\perp . Es deseable que $\xi_S^2 = 1$ para los estados coherentes del espín.

4.3. Parámetro de compresión de Wineland ξ_R^2 .

El parámetro de compresión de espín propuesto por Wineland [2,3] está enfocado al estudio de la espectroscopia Ramsey. El parámetro de compresión ξ_R^2 es la razón de las fluctuaciones entre un estado general y un estado coherente del espín en la determinación de la frecuencia de resonancia en la espectroscopia Ramsey. Los estados coherentes de espín actúan como estados de ruido de referencia. A comparación con ξ_S^2 , el cual es análogo a la compresión bosónica, el parámetro ξ_R^2 está conectado con el mejoramiento de la sensibilidad de los estados de momento angular a las rotaciones, lo cual es muy atractivo para los experimentos.

Consideremos un estado de espín $|\psi\rangle$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que la dirección principal del espín es a lo largo de la dirección del eje Z ; por lo tanto, $\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$. Vamos a rotar el estado alrededor del eje X ,

$$\hat{J}_y^{\text{out}} = e^{i\phi \hat{J}_x} \hat{J}_y e^{-i\phi \hat{J}_x} = \cos \phi \hat{J}_y - \sin \phi \hat{J}_z. \quad (4.33)$$

Demostración: Usando el lema de Hadamard,

$$\hat{J}_y^{\text{out}} = \hat{J}_y + [i\phi \hat{J}_x, \hat{J}_y] + \frac{1}{2!} [i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, \hat{J}_y]] + \frac{1}{3!} [i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, \hat{J}_y]]] + \dots \quad (4.34)$$

Calculando cada uno de los conmutadores,

$$[i\phi \hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\phi [\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\phi (i\hat{J}_z) = -\phi \hat{J}_z,$$

$$[i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, \hat{J}_y]] = [i\phi \hat{J}_x, -\phi \hat{J}_z] = -i\phi^2 [\hat{J}_x, \hat{J}_z] = -i\phi^2 (-i\hat{J}_y) = -\phi^2 \hat{J}_y,$$

$$[i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, \hat{J}_y]]] = [i\phi \hat{J}_x, -\phi^2 \hat{J}_y] = -i\phi^3 [\hat{J}_x, \hat{J}_y] = -i\phi^3 (i\hat{J}_z) = \phi^3 \hat{J}_z,$$

$$[i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, [i\phi \hat{J}_x, \hat{J}_y]]]] = [i\phi \hat{J}_x, \phi^3 \hat{J}_z] = i\phi^4 [\hat{J}_x, \hat{J}_z] = i\phi^4 (-i\hat{J}_y) = \phi^4 \hat{J}_y,$$

y así sucesivamente. Sustituyendo estos resultados en (4.34),

$$\begin{aligned} \hat{J}_y^{\text{out}} &= \hat{J}_y - \phi \hat{J}_z - \frac{\phi^2}{2!} \hat{J}_y + \frac{\phi^3}{3!} \hat{J}_z + \frac{\phi^4}{4!} \hat{J}_y + \dots \\ &= \hat{J}_y \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \dots \right) - \hat{J}_z \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \hat{J}_y \cos \phi - \hat{J}_z \sin \phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\hat{J}_y^{\text{out}} = \hat{J}_y \cos \phi - \hat{J}_z \sin \phi.$$

Q.E.D. De (4.33) obtenemos inmediatamente

$$\langle \hat{J}_y^{\text{out}} \rangle = -\sin \phi \langle \hat{J}_z \rangle \quad (4.35)$$

y

$$(\Delta \hat{J}_y^{\text{out}})^2 = \cos^2 \phi (\Delta \hat{J}_y)^2 + \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi) \langle [\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+ \rangle. \quad (4.36)$$

Demostración: Del resultado (4.33) tenemos

$$\langle \hat{J}_y^{\text{out}} \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle \cos \phi - \langle \hat{J}_z \rangle \sin \phi.$$

Dado que la dirección principal del espín se eligió a lo largo del eje Z , $\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$, y la expresión anterior queda como

$$\langle \hat{J}_y^{\text{out}} \rangle = -\langle \hat{J}_z \rangle \sin \phi.$$

La varianza de \hat{J}_y^{out} es

$$(\Delta \hat{J}_y^{\text{out}})^2 = \langle \hat{J}_y^{\text{out}^2} \rangle - \langle \hat{J}_y^{\text{out}} \rangle^2. \quad (4.37)$$

Calculamos entonces

$$\begin{aligned} \hat{J}_y^{\text{out}^2} &= (\cos \phi \hat{J}_y - \sin \phi \hat{J}_z)(\cos \phi \hat{J}_y - \sin \phi \hat{J}_z) \\ &= \cos^2 \phi \hat{J}_y^2 - \cos \phi \sin \phi \hat{J}_y \hat{J}_z - \cos \phi \sin \phi \hat{J}_z \hat{J}_y + \sin^2 \phi \hat{J}_z^2 \\ &= \cos^2 \phi \hat{J}_y^2 + \sin^2 \phi \hat{J}_z^2 - \cos \phi \sin \phi [\hat{J}_y \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_y] \\ &= \cos^2 \phi \hat{J}_y^2 + \sin^2 \phi \hat{J}_z^2 - \cos \phi \sin \phi [\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+. \end{aligned}$$

Entonces (4.37) se escribe como

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{J}_y^{\text{out}})^2 &= \cos^2 \phi \langle \hat{J}_y^2 \rangle + \sin^2 \phi \langle \hat{J}_z^2 \rangle - \cos \phi \sin \phi \langle [\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+ \rangle - (\langle \hat{J}_y \rangle \cos \phi - \langle \hat{J}_z \rangle \sin \phi)^2 \\ &= \cos^2 \phi \langle \hat{J}_y^2 \rangle + \sin^2 \phi \langle \hat{J}_z^2 \rangle - \cos \phi \sin \phi \langle [\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+ \rangle \\ &\quad - (\langle \hat{J}_y \rangle^2 \cos^2 \phi - 2 \cos \phi \sin \phi \langle \hat{J}_y \rangle \langle \hat{J}_z \rangle + \sin^2 \phi \langle \hat{J}_z \rangle^2). \end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{J}_y^{\text{out}})^2 &= \cos^2 \phi (\langle \hat{J}_y^2 \rangle - \langle \hat{J}_y \rangle^2) + \sin^2 \phi (\langle \hat{J}_z^2 \rangle - \langle \hat{J}_z \rangle^2) - \cos \phi \sin \phi \langle [\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+ \rangle + 2 \cos \phi \sin \phi \langle \hat{J}_y \rangle \langle \hat{J}_z \rangle \\ &= (\Delta \hat{J}_y)^2 \cos^2 \phi + (\Delta \hat{J}_z)^2 \sin^2 \phi - \cos \phi \sin \phi \langle [\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+ \rangle. \end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica $\cos \phi \sin \phi = \sin(2\phi)/2$, obtenemos la expresión solicitada

$$(\Delta \hat{J}_y^{\text{out}})^2 = (\Delta \hat{J}_y)^2 \cos^2 \phi + (\Delta \hat{J}_z)^2 \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi) \langle [\hat{J}_y, \hat{J}_z]_+ \rangle.$$

Un concepto ampliamente estudiado al hacer espectroscopia es el de **sensibilidad de fase**. Básicamente se refiere a la precisión de las mediciones y está determinada por el mínimo cambio de fase detectable. Otro aspecto importante es que la sensibilidad de fase depende de cómo es medido el cambio de fase. De acuerdo a la fórmula de propagación de errores,

$$\Delta x = \frac{\Delta f(x)}{|\partial \langle f(x) \rangle / \partial x|}, \quad (4.38)$$

podemos calcular la sensibilidad de la fase $\Delta\phi$ como [3]

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\hat{J}_y^{\text{out}}}{|\partial\langle\hat{J}_y^{\text{out}}\rangle/\partial\phi|}. \quad (4.39)$$

Usando los resultados previos, obtenemos una expresión equivalente

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\hat{J}_y^{\text{out}}}{|\langle\hat{J}_z\rangle\cos\phi|}.$$

Demostración: Si derivamos (4.35), obtenemos

$$\frac{\langle\hat{J}_y^{\text{out}}\rangle}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}(-\sin\phi\langle\hat{J}_z\rangle) = -\cos\phi\langle\hat{J}_z\rangle.$$

Entonces la sensibilidad de fase es

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\hat{J}_y^{\text{out}}}{|\cos\phi\langle\hat{J}_z\rangle|}.$$

que es la expresión que deseábamos demostrar. Si tomamos el ángulo de rotación muy pequeño, o sea $\phi \sim 0$, entonces la ecuación se reduce a

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\hat{J}_y}{|\langle\hat{J}_z\rangle|}. \quad (4.40)$$

Demostración: Si el ángulo de rotación es tal que $\phi \sim 0$, eso implica que $\cos\phi \sim 1$, $\sin\phi \sim 0$ y $\sin 2\phi \sim 0$, y la expresión (4.36) se convierte en

$$(\Delta\hat{J}_y^{\text{out}})^2 \sim (\Delta\hat{J}_y)^2,$$

o lo que es equivalente $\Delta\hat{J}_y^{\text{out}} \sim \Delta\hat{J}_y$. La sensibilidad de fase entonces queda como

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\hat{J}_y^{\text{out}}}{|\cos\phi\langle\hat{J}_z\rangle|} = \frac{\Delta\hat{J}_y}{|\langle\hat{J}_z\rangle|},$$

que es la ecuación (4.40). Este resultado indica que la sensibilidad de fase se puede conocer a partir de los valores esperados de espín colectivo. El caso más general no es cuando la dirección principal de espín es a lo largo del eje Z , sino a lo largo de un vector unitario arbitrario \vec{n} , por lo que (4.39) se escribiría como

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\hat{J}_{\vec{n}_\perp}}{|\langle\hat{J}\rangle|}. \quad (4.41)$$

Para los estados coherentes de espín, la sensibilidad de fase es

$$(\Delta\phi)_{CSS} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (4.42)$$

que es llamado el **Límite Cuántico Estándar (SQL)** o **shot-noise limit**. Éste es el límite de precisión en los experimentos de interferometría atómica cuando se usan átomos que no están

correlacionados.

Demostración: En el Apéndice A se demuestra que para un estado coherente de espín

$$\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp} = \frac{\sqrt{N}}{2}$$

y

$$\langle \vec{J} \rangle = \frac{N}{2}.$$

Sustituyendo estos resultados en (4.41),

$$(\Delta\phi)_{CSS} = \frac{\sqrt{N}/2}{N/2} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Por lo tanto,

$$(\Delta\phi)_{CSS} = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

que es lo que queríamos mostrar. El parámetro de compresión propuesto por Wineland se define como la razón de la sensibilidad de fase de un estado general y el de un estado coherente de espín; es decir,

$$\xi_R^2 = \frac{(\Delta\phi)^2}{(\Delta\phi)_{CSS}^2}. \quad (4.43)$$

Se elige la dirección \vec{n}_\perp donde $\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp}$ es minimizado. La relación anterior también se puede escribir como [3]

$$\xi_R^2 = \frac{N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2}{|\langle \vec{J} \rangle|^2}. \quad (4.44)$$

Demostración: Se tiene que

$$\Delta\phi = \frac{\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp}}{|\langle \vec{J} \rangle|},$$

y que

$$(\Delta\phi)_{CSS} = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

por lo que (4.43) se escribe como

$$\xi_R^2 = \frac{(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 / |\langle \vec{J} \rangle|^2}{1/N} = \frac{N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2}{|\langle \vec{J} \rangle|^2},$$

que es lo que deseábamos demostrar. La definición de ξ_R^2 está relacionada con la dada por Kitagawa y Ueda, denotada por ξ_S^2 , de la siguiente forma [3]

$$\xi_R^2 = \left(\frac{j}{|\langle \vec{J} \rangle|} \right)^2 \xi_S^2. \quad (4.45)$$

Demostración: Consideremos las definiciones de los parámetros de compresión de Kitagawa-Ueda (4.32) y el de Wineland (4.44). De la definición de ξ_S^2 despejamos $(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2$,

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = \frac{N\xi_S^2}{4}.$$

Sustituyendo este resultado en la definición del parámetro de Wineland,

$$\xi_R^2 = \frac{N}{|\langle \vec{J} \rangle|^2} \frac{N}{4} \xi_S^2.$$

Finalmente usando que $N = 2j$ encontramos (4.45), tal y como se quería. Como $j = N/2 \geq |\langle \vec{J} \rangle|$, tenemos que $\xi_S^2 \leq \xi_R^2$. A pesar de que estos dos parámetros son similares (cuando $j = |\langle \vec{J} \rangle|$, $\xi_R^2 = \xi_S^2$), su significado físico es diferente. De acuerdo a la ecuación (4.41), la sensibilidad de fase se puede escribir como [3]

$$\Delta\phi = \frac{\xi_R}{\sqrt{N}}. \quad (4.46)$$

Demostración: La forma más general de la sensibilidad de fase está dada por (4.41). De la definición del parámetro de compresión de Wineland (4.44), despejamos $\Delta\hat{J}_{\vec{n}_\perp}$,

$$\Delta\hat{J}_{\vec{n}_\perp} = \sqrt{\frac{\xi_R^2 |\langle \vec{J} \rangle|^2}{N}} = \frac{\xi_R |\langle \vec{J} \rangle|}{\sqrt{N}}.$$

La sensibilidad de fase es entonces

$$\Delta\phi = \frac{\xi_R |\langle \vec{J} \rangle| / \sqrt{N}}{|\langle \vec{J} \rangle|} = \frac{\xi_R}{\sqrt{N}}.$$

El límite inferior de la sensibilidad de fase está dado por la relación de incertidumbre de Heisenberg

$$(\Delta\hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 (\Delta\hat{J}_{\vec{n}'_\perp})^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{J}_{\vec{n}_\perp} \rangle|^2. \quad (4.47)$$

De la definición de parámetro de Wineland despejamos $(\Delta\hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2$,

$$(\Delta\hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = \frac{\xi_R^2 |\langle \hat{J}_{\vec{n}_\perp} \rangle|^2}{N}.$$

Sustituyéndolo en la relación de incertidumbre,

$$\frac{\xi_R^2 |\langle \hat{J}_{\vec{n}_\perp} \rangle|^2}{N} (\Delta\hat{J}_{\vec{n}'_\perp})^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{J}_{\vec{n}_\perp} \rangle|^2,$$

y entonces

$$\frac{4\xi_R^2 (\Delta\hat{J}_{\vec{n}'_\perp})^2}{N} \geq 1. \quad (4.48)$$

Usando que

$$j^2 = \frac{N^2}{4} \geq |\langle \hat{J}_{\vec{n}_\perp}^2 \rangle| \geq (\Delta\hat{J}_{\vec{n}'_\perp})^2,$$

encontramos que

$$\frac{4}{N^2} \leq \frac{1}{(\Delta\hat{J}_{\vec{n}'_\perp})^2}.$$

Entonces,

$$\xi_R^2 \geq \frac{N}{4(\Delta\hat{J}_{\vec{n}'_\perp})^2} \geq \frac{4N}{4N^2} = \frac{1}{N},$$

y por lo tanto,

$$\xi_R^2 \geq \frac{1}{N} \quad (4.49)$$

4.4. Parámetro de compresión $\xi_{H''}^2$.

Se define el parámetro de compresión $\xi_{H''}^2$ mediante la fórmula [2]

$$\xi_{H''}^2 = \frac{j}{|\langle \vec{J} \rangle|} \xi_S^2, \quad (4.50)$$

donde ξ_S^2 es el parámetro de Kitawaga y Ueda. El parámetro de compresión $\xi_{H''}^2$ también puede escribirse como

$$\xi_{H''}^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}'_{\perp}})^2}{|\langle \vec{J} \rangle|}. \quad (4.51)$$

Demostración: Sustituyendo el parámetro de Kitawaga y Ueda, (4.32), en (4.50),

$$\xi_{H''}^2 = \frac{j}{|\langle \vec{J} \rangle|} \frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}'_{\perp}})^2}{j} = \frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}'_{\perp}})^2}{|\langle \vec{J} \rangle|},$$

que es (4.51). Ahora elegimos un conjunto de tres direcciones ortogonales $\{\vec{n}_{\perp}, \vec{n}'_{\perp}, \vec{n}_0\}$. La relación de incertidumbre es en este caso

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_{\perp}})^2 (\Delta \hat{J}_{\vec{n}'_{\perp}})^2 \geq \frac{|\langle \hat{J}_{\vec{n}_0} \rangle|^2}{4}. \quad (4.52)$$

Observemos que

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_0})^2 = \frac{N}{4}(1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2), \quad (4.53)$$

pero $\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \langle \vec{\sigma}_1 \rangle = 1$, entonces $(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_0})^2 = \frac{N}{4}(1 - 1) = 0$, lo que significa que no hay fluctuaciones a lo largo de la dirección principal del espín. Como \vec{n}_{\perp} y \vec{n}'_{\perp} son perpendiculares a \vec{n}_0 , se tiene que

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_{\perp}})^2 = (\Delta \hat{J}_{\vec{n}'_{\perp}})^2 = \frac{j}{2} = \frac{N}{4},$$

y entonces la relación de incertidumbre (4.52) queda como

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_{\perp}})^2 \leq \frac{|\langle \hat{J}_{\vec{n}_0} \rangle|}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\xi_{H''}^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_{\perp}})^2}{|\langle \hat{J}_{\vec{n}_0} \rangle|} \leq 1,$$

que implica que

$$\xi_{H''}^2 = \frac{2(N/4)}{N/2} = 1.$$

Concluimos que para los estados coherentes del espín $\xi_{H''}^2 = 1$, y este parámetro es apropiado para caracterizar la compresión de espín en este aspecto.

4.5. Otros parámetros de compresión.

En esta sección revisaremos otras definiciones de la compresión del espín y sus aplicaciones. En el primer parámetro que analizaremos en esta sección, la compresión de espín está directamente conectada con el enredamiento multipartita. Para un sistema de muchos cuerpos de espín 1/2, sus propiedades de enredamiento se pueden expresar en términos de las varianzas y valores esperados como se muestra a continuación [20]

$$\xi_{R'}^2 = \frac{N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2}{\langle \hat{J}_{\vec{n}_2} \rangle + \langle \hat{J}_{\vec{n}_3} \rangle}, \quad (4.54)$$

donde \vec{n}_1 , \vec{n}_2 y \vec{n}_3 son mutuamente ortogonales. El subíndice R' indica la relación cercana que tiene con el parámetro ξ_R^2 . Se ha probado que si se cumple la condición $\xi_{R'}^2 < 1$, el estado es enredado. Sin embargo, también se sabe que un estado enredado no es necesariamente comprimido. Inspirados en este descubrimiento, muchos trabajos han estudiado la relación existente entre compresión de espín y el enredamiento. Para los estados coherentes de espín este parámetro resulta

$$\xi_{R'}^2 = \frac{1 - (\vec{n}_0 - \vec{n}_1)^2}{(\vec{n}_0 - \vec{n}_2)^2 + (\vec{n}_0 - \vec{n}_3)^2} = 1. \quad (4.55)$$

Demostración: Ya hemos visto que para los estados coherentes de espín

$$\langle \hat{J}_{\vec{n}} \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\vec{n}_0 \cdot \vec{n})$$

y

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2 = \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n})^2].$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la definición de $\xi_{R'}^2$,

$$\begin{aligned} \xi_{R'}^2 &= \frac{N(N/4)[1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]}{(N/2)^2 |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)^2 + (N/2)^2 |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_3)^2} \\ &= \frac{1 - (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2}{(\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2)^2 + (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_3)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En conclusión, $\xi_{R'}^2$ se puede ver como una generalización de ξ_R^2 , y además proporciona un criterio realmente útil para detectar el enredamiento en sistemas de muchos cuerpos.

En el estudio de los estados de Dicke $|J, M\rangle$ en un condensado de Bose-Einstein, Raghavan [21] propuso un nuevo tipo de parámetro de compresión del espín definido por

$$\xi_D^2 = \frac{N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2}{N^2/4 - \langle \hat{J}_{\vec{n}} \rangle^2}. \quad (4.56)$$

El subíndice D indica que este parámetro puede detectar enredamiento en los estados de Dicke. Si $\xi_D^2 < 1$, el estado es comprimido a lo largo de \vec{n} . Para los estados coherentes de espín $\xi_D^2 = 1$.

Demostración: Usando las expresiones de $\langle \hat{J}_{\vec{n}} \rangle$ y $(\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2$ para los estados coherentes del espín, (4.56) se expresa como

$$\begin{aligned} \xi_D^2 &= \frac{(N^2/4)[1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]}{N^2/4 - (N/2)^2 |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2} \\ &= \frac{N^2/4 [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]}{N^2/4 [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1)^2]} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como ya mencionamos antes, una aplicación importante del parámetro de compresión de espín es detectar enredamiento. Este tipo de criterio de enredamiento está basado en desigualdades de espín colectivo. Ésto es atractivo para experimentos, porque en la práctica no siempre se pueden dirigir partículas individuales, mientras que los valores esperados y las varianzas para operadores de espín colectivo son muy fáciles de medir. Tóth [22] generalizó las definiciones de compresión de espín y dio un conjunto de desigualdades de espín. Además encontró que una de las desigualdades de espín es útil para escribir un nuevo tipo de parámetro de compresión de espín. Esta desigualdad es

$$(N - 1)(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 \geq \langle \hat{J}_{\vec{n}_2}^2 \rangle + \langle \hat{J}_{\vec{n}_3}^2 \rangle - N/2, \quad (4.57)$$

que es válida para cualesquiera estados separables y la violación de esta desigualdad indica enredamiento. La desigualdad (4.57) se puede escribir también como

$$N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 \geq \langle \vec{J}^2 \rangle - \langle \hat{J}_{\vec{n}_1} \rangle^2 - N/2. \quad (4.58)$$

Demostración: Sustituimos la varianza $(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 = \langle \hat{J}_{\vec{n}_1}^2 \rangle - \langle \hat{J}_{\vec{n}_1} \rangle^2$ del operador $\hat{J}_{\vec{n}_1}$ en la desigualdad (4.57) y obtenemos

$$N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 \geq \langle \hat{J}_{\vec{n}_1}^2 \rangle - \langle \hat{J}_{\vec{n}_1} \rangle^2 + \langle \hat{J}_{\vec{n}_2}^2 \rangle + \langle \hat{J}_{\vec{n}_3}^2 \rangle - N/2,$$

de donde se deduce trivialmente que

$$N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2 \geq \langle \vec{J}^2 \rangle - \langle \hat{J}_{\vec{n}_1} \rangle^2 - N/2,$$

que es lo que se deseaba demostrar. De la desigualdad (4.58) tenemos

$$\frac{N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2}{\langle \vec{J}^2 \rangle - N/2 - \langle \hat{J}_{\vec{n}_1} \rangle^2} \geq 1. \quad (4.59)$$

Definiendo al lado izquierdo de (4.59) como ξ_E^2 , obtenemos [22]

$$\xi_E^2 = \frac{N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_1})^2}{\langle \vec{J}^2 \rangle - N/2 - \langle \hat{J}_{\vec{n}_1} \rangle^2}. \quad (4.60)$$

Este es un parámetro de compresión de espín relacionado con el enredamiento y es similar a ξ_D^2 .

Capítulo 5

Condensación de Bose-Einstein.

5.1. La condensación de Bose-Einstein como una transición de fase.

El fenómeno de condensación de Bose-Einstein se ocupa de la observación de los efectos cuánticos relacionados con la energía cinética traslacional de los átomos o moléculas en un gas. Comencemos considerando un ejemplo simple, un gas de moléculas diatómicas. La capacidad calorífica (C_v) y su variación con la temperatura es importante para entender los efectos de cuantización de la energía cinética. La siguiente gráfica muestra el comportamiento típico de $C_v(T)$ para un gas típico diatómico.

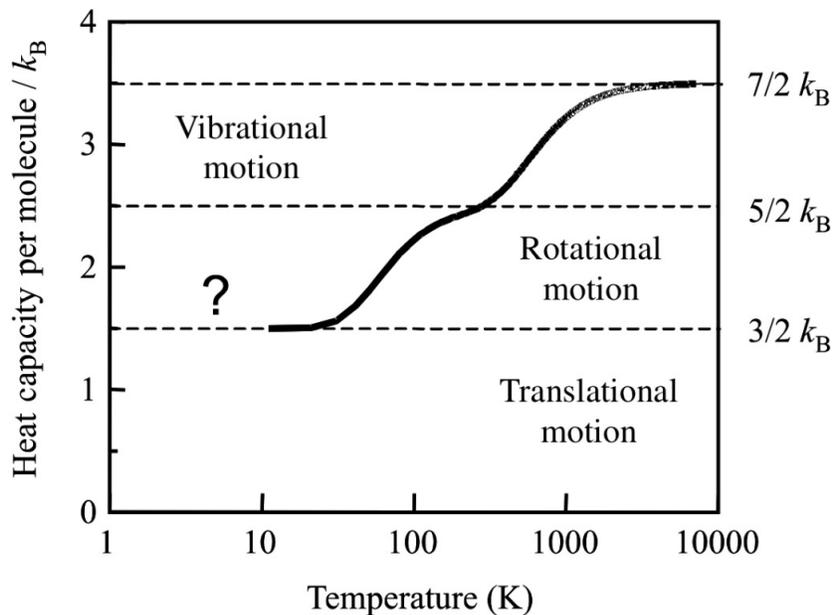


Figura 5.1: Variación esquemática de la capacidad calorífica C_v de un gas diatómico con la Temperatura. [26]

Para temperaturas muy altas, se esperan comportamientos clásicos de acuerdo con el Principio de Equipartición de la Energía [27].

Teorema de la Equipartición de la Energía: Consideremos un sistema de N partículas que se encuentra en equilibrio térmico a temperatura T , y sea E la energía promedio de cada partícula del sistema. Cada grado de libertad que aparece en la expresión para la energía de una partícula del sistema en forma cuadrática contribuye en

$$E = \frac{1}{2}k_B T. \quad (5.1)$$

Como

$$C_v = \frac{dE}{dT}, \quad (5.2)$$

tenemos las siguientes contribuciones,

1. Movimiento vibracional: k_B
2. Movimiento rotacional: k_B
3. Movimiento traslacional: $(3/2)k_B$

lo cual nos da $E = (7/2)k_B T$. Para bajas temperaturas, la capacidad calorífica se aparta del resultado clásico debido a la cuantización del movimiento térmico. Las vibraciones de una molécula pueden aproximarse mediante un oscilador armónico simple, con niveles de energía cuantizados, dados por

$$C_v = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu_{vib}. \quad (5.3)$$

El resultado clásico sólo se obtendrá si la energía térmica es mucho mayor que la vibracional [26]

$$k_B T \gg h\nu_{vib}.$$

Con los valores típicos de ν_{vib} , de alrededor de 10^{13} Hz, el comportamiento clásico es observado solamente a temperaturas arriba de 1000 K. A temperatura ambiente, el movimiento vibracional usualmente no se presenta, como se muestra en la gráfica. De la misma forma, esperamos que el movimiento rotacional no se manifieste cuando la energía térmica es comparable con la energía rotacional cuantizada; es decir, $k_B T \sim \frac{\hbar^2}{I_{rot}}$ donde I_{rot} es el momento de inercia alrededor del eje de rotación. Esto ocurre típicamente a temperaturas menores de 100 K. Entonces el movimiento rotacional es usualmente clásico a temperatura ambiente, pero no se manifiesta a bajas temperaturas. Ahora consideremos sólo el movimiento traslacional. La Tercera Ley de la Termodinámica dice que cuando $T \rightarrow 0$, $C_v \rightarrow 0$ [27]. Sin embargo, en un gas normal las fuerzas atractivas entre moléculas causan licuefacción y solidificación mucho antes que los efectos cuánticos por el movimiento traslacional se vuelvan importantes. Si pudiéramos evitar que el gas se condensara, podríamos eventualmente observar los efectos cuánticos relacionados con el movimiento traslacional. El primero en considerar este efecto fue Einstein en 1924; descubrió que incluso un gas de partículas no interactuantes, sufrirá una transición de fase a una temperatura suficientemente baja. Esta transición de fase es conocida como **Condensación de Bose-Einstein**. En mecánica estadística, la condensación de Bose-Einstein es entendida como la acumulación de una fracción macroscópica del número total de partículas en un estado de velocidad cero. Este fenómeno fue aplicado exitosamente para explicar la transición a superfluido del helio líquido en 1938. Vamos a describir el fenómeno desde la perspectiva de la termodinámica y usaremos la física estadística para derivar las fórmulas generales que son aplicables a todos los sistemas de condensados de Bose-Einstein.

5.2. Diferencias entre la estadística clásica y cuántica.

5.2.1. Estadística clásica.

En el régimen clásico, hay que limitarse a las condiciones del gas en donde la probabilidad de que cualquier estado de una sola partícula sea ocupado por más de una molécula es muy pequeña. En otras palabras, la mayoría de los estados de una sola partícula están vacíos, muy pocos contienen una sola y un número de ellos insignificamente pequeño contienen más de una. Esta situación ocurrirá si el número de estados de una sola partícula en cualquier región de energía es muy grande, comparado con el número de moléculas que poseen esa clase de energía. En sistemas diluidos a altas temperaturas, la probabilidad de ocupación de cualquier estado cuántico individual es pequeña. En esta región, las partículas obedecen la Estadística de Boltzmann [26],

$$P(E_i) \propto e^{-E_i/k_B T}, \quad (5.4)$$

donde $P(E_i)$ es la probabilidad de que la partícula esté en el estado cuántico con energía E_i y k_B es la constante de Boltzmann. A la estadística de Boltzmann se le considera clásica porque las propiedades no dependen del espín de las partículas. Normalmente la probabilidad de ocupación $P(E_i)$ es pequeña para todos los niveles de energía del sistema. Si tomamos un sistema que obedece la estadística de Boltzmann y reducimos su temperatura, las partículas tenderán a acumularse en los niveles de energía más bajos que estén disponibles.

5.2.2. Estadística cuántica.

La mayoría de las partículas poseen un momento angular intrínseco. Este momento no está relacionado con el movimiento de la partícula; es decir, posee este momento angular incluso cuando su centro de masa está en reposo. Por esta razón, a éste momento angular intrínseco de la partícula se le conoce como espín [27]. Si tratamos con partículas con espín, éstas se clasifican en

1. **Bosones:** Son partículas con espín entero. Algunos ejemplos son el mesón π (espín 0) y los fotones (espín 1).
2. **Fermiones:** Tienen espín mitad de un entero. Por ejemplo, los electrones, positrones, protones, neutrones poseen espín 1/2.

La mayoría de las partículas elementales son fermiones, pero partículas compuestas como los átomos, pueden ser fermiones o bosones, dependiendo del espín total. Los fermiones (o partículas fermiónicas) obedecen el Principio de Exclusión de Pauli que a continuación se enuncia.

Principio de Exclusión de Pauli: Establece que no es posible poner más de una partícula en un estado cuántico particular.

El propósito de la mecánica estadística es explicar los fenómenos macroscópicos en términos de la distribución de partículas entre los estados microscópicos del sistema. El comportamiento de un gas de partículas idénticas depende del espín de las partículas que comprenden el sistema. La estadística es llamada **Estadística cuántica** ya que depende de una propiedad de las partículas: el espín.

El empleo del Principio de Pauli en la Física Estadística conduce a la función de Distribución de Fermi-Dirac para el número n_{FD} de fermiones que ocupan un nivel cuántico con energía E a temperatura T

$$n_{FD}(E, T) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}, \quad (5.5)$$

donde μ es el Potencial químico que está determinado por la restricción de que la ocupación combinada de todos los niveles del sistema debe ser igual al número total de partículas [24]. El máximo valor de la función de Fermi-Dirac es 1, en concordancia con el Principio de Pauli. El Principio de Exclusión de Pauli elimina la posibilidad de la Condensación de Bose-Einstein y por lo tanto, no se considerarán partículas fermiónicas de aquí en adelante.

Los bosones, los cuales tienen espín entero, no están sujetos al Principio de Exclusión de Pauli. No hay un límite de un número de partículas para ocupar un nivel en particular y su comportamiento es totalmente diferente al de los fermiones a bajas temperaturas. En un gas de bosones no interactuantes, el número de partículas n_{BE} en un estado cuántico con energía E a temperatura T está dado por la función de Distribución de Bose-Einstein [26]

$$n_{BE}(E, T) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}. \quad (5.6)$$

De igual forma que en los fermiones, μ se determina con la condición de que la ocupación combinada de todos los niveles debe ser igual al número total de partículas. En sistemas que no tienen una restricción sobre el número total de partículas, se tiene que $\mu = 0$. Este es el caso de los fotones, los cuales son bosones con masa en reposo cero, permitiendo que sean creados y destruidos con facilidad. Se ve claramente que si en (5.6) se toma $E = h\nu$ y $\mu = 0$, se obtiene la fórmula de Planck.

5.3. Mecánica estadística de la condensación de Bose-Einstein.

Consideremos un gas de N bosones de masa m no interactuantes en un volumen V a temperatura T . Se dice que las partículas no interactúan cuando las fuerzas entre ellas son extremadamente débiles. En este límite, las interacciones entre partículas son suficientes para llevar el gas al equilibrio térmico, pero tan pequeñas que la energía potencial es despreciable. Esta aproximación no es válida cuando la separación entre partículas es muy pequeña. El considerar a una partícula como no interactuante, implica que la partícula sólo posee energía cinética, por lo que se puede poner la escala de energía con $E = 0$ como el nivel más bajo de energía del sistema. El potencial químico es determinado con la condición de que la ocupación combinada de todos los niveles de energía del sistema es igual al número total de partículas; es decir,

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty n_{BE}(E)g(E)dE, \quad (5.7)$$

donde $g(E)$ es la densidad de estados por unidad de volumen. Para partículas no interactuantes de masa m y espín S , la densidad de estados está dada por [26]

$$g(E)dE = \frac{(2S+1)}{\pi^2} \sqrt{\frac{Em^3}{2}} dE. \quad (5.8)$$

Demostración: Demostraremos esta expresión primero para el campo electromagnético. Consideremos un campo electromagnético dentro de un volumen finito V en el espacio libre. Por simplicidad, supondremos que el volumen comprende un cubo de lado L , por lo tanto, $V = L^3$ como se muestra en la Figura siguiente.

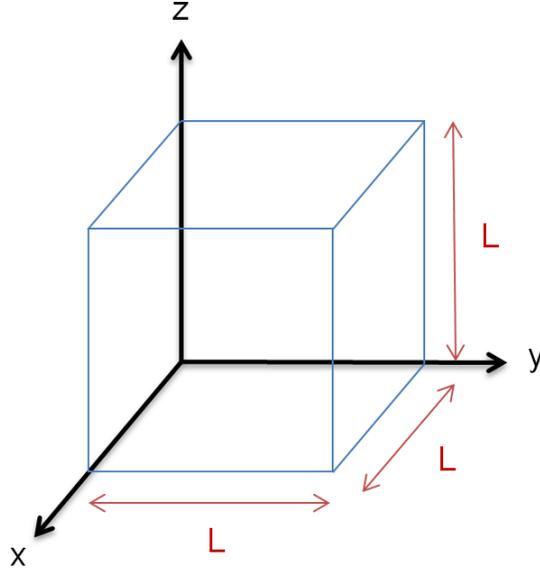


Figura 5.2: Volumen finito en el espacio libre considerado para calcular la densidad de estados. [26]

El volumen debe ser lo suficientemente grande para que sus dimensiones no tengan un efecto significativo en el resultado físico. La introducción de este cubo es sólo una herramienta de cálculo que nos permitirá encontrar la densidad de estados de manera sencilla. La solución general de las ecuaciones de Maxwell para un campo electromagnético dentro de un cubo de lado L puede escribirse como una superposición de ondas viajeras de la forma [28]

$$\vec{\varepsilon}(\vec{r}, t) = \sum_k \vec{\varepsilon}_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (5.9)$$

donde $\omega = c|\vec{k}|$, $k_j = 2\pi n_j/L$ con $j = x, y, z$ y n_x, n_y, n_z son números enteros positivos. Para el campo magnético se tiene una expresión totalmente similar. Es perfectamente conocido que en este caso el campo eléctrico es transversal ($\vec{\varepsilon}_k \perp \vec{k}$); es decir, que $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_k = 0$, lo cual permite dos polarizaciones independientes para cada valor de \vec{k} . Ahora consideremos la Figura 5.3. El espacio entre los puntos es $2\pi/L$. Por lo tanto, cada valor permitido del vector \vec{k} ocupa un área efectiva $A = \ell^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$. Podemos generalizar este argumento al caso de tres dimensiones, que es el que realmente nos interesa, por lo que el volumen efectivo será $A = \ell^3 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$. Surge la pregunta: ¿Cuántos estados k permitidos habrá entre k y $k + dk$? Denotaremos este número de estados como $g(k)dk$. En el caso bidimensional, calculamos este número considerando la zona de espacio k encerrado por los vectores k con magnitudes entre k y $k + dk$ y luego dividiendo por el área efectiva por estado k

$$g^{2D}(k)dk = \frac{2\pi k}{(2\pi/L)^2} dk = \frac{2\pi k L^2}{(2\pi)^2} dk = \frac{L^2}{2\pi} k dk. \quad (5.10)$$

En el caso tridimensional, el resultado equivalente se obtiene dividiendo el volumen encerrado en el espacio k entre los cascarones esféricos de radio k y $k + dk$ entre el volumen efectivo por el estado k

$$g^{3D}(k)dk = \frac{4\pi k^2}{(2\pi/L)^3} dk = \frac{4\pi k^2 L^3}{(2\pi)^3} dk = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk = V \frac{k^2}{2\pi^2} dk. \quad (5.11)$$

Así que finalmente obtenemos

$$g(k) \equiv \frac{g^{3D}(k)}{V} = \frac{k^2}{2\pi^2}. \quad (5.12)$$

Observemos que $g(k)$ no depende del volumen, lo cual confirma que la división del espacio es meramente una herramienta de cálculo. Ya que tenemos una expresión para la densidad de estados en el espacio k , podemos calcular el número de estados por unidad de volumen por unidad de rango de frecuencia angular $g(\omega)$. Para realizar esto, mapeamos los valores de k y $k + dk$ en sus frecuencias angulares correspondientes, llamadas ω y $\omega + d\omega$ y recordamos que hay dos polarizaciones para cada estado k . Por lo tanto escribimos

$$g(\omega)d\omega = 2g(k)dk = 2g(k)\frac{1}{d\omega/dk}.$$

Usando que $\omega = ck$ y que $\frac{d\omega}{dk} = c$, la expresión anterior queda como

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (5.13)$$

Notemos que la densidad de estados de los modos del campo electromagnético es proporcional al cuadrado de la frecuencia.

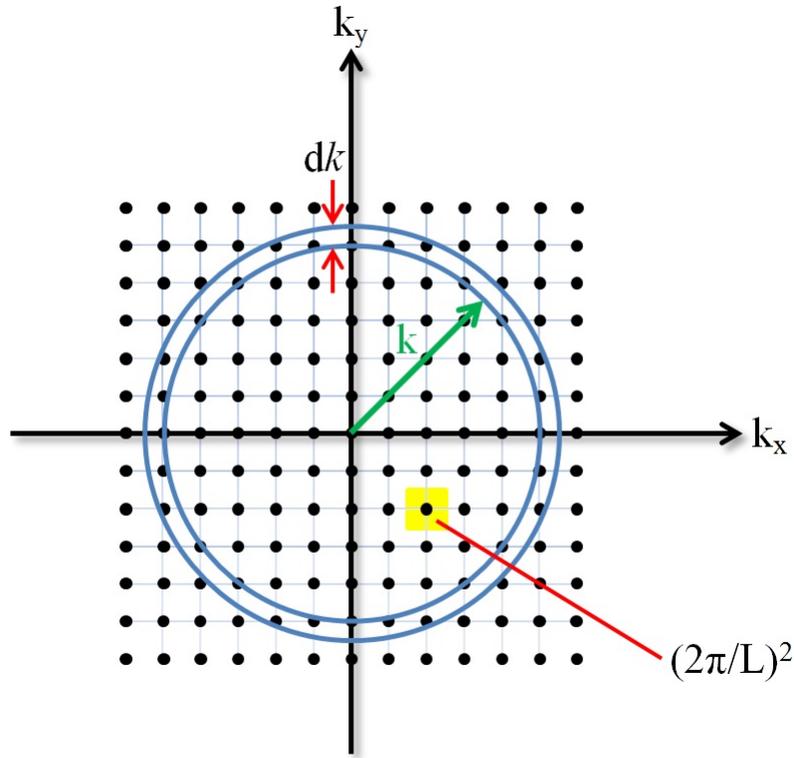


Figura 5.3: Valores permitidos del vector de onda en el plano (x, y) del espacio \vec{k} .

La derivación de la densidad de estados para el campo electromagnético puede adaptarse a otros campos, es decir, a otras partículas. En el caso de ondas de electrones en cristales, se necesita $g(E)$, la densidad de estados por unidad de volumen por unidad de rango de energía. La derivación es similar a la hecha anteriormente para $g(k)$. Entonces

$$g(E) = 2 \frac{g(k)}{dE/dk}. \quad (5.14)$$

En este caso, el factor 2 viene de que hay dos estados del espín del electrón para cada estado k disponible, llamado espín arriba o espín abajo. Para electrones libres se tiene que $E = \frac{k^2}{2m}$, o $k^2 = 2mE$, pero $g(k) = \frac{k^2}{2\pi^2}$, y por tanto

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{m}. \quad (5.15)$$

Usando estas expresiones, (5.14) se escribe como

$$\begin{aligned} g(E) &= \frac{2}{2\pi^2} (2m^2 E) \sqrt{\frac{1}{2mE}} \\ &= \frac{\sqrt{E}}{\pi^2} \sqrt{\frac{4m^4}{2m}} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sqrt{2m^3}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para partículas no interactuantes de espín S y masa m , el factor 2 es reemplazado por la multiplicidad del espín; o sea

$$\begin{aligned} g(E) &= (2S + 1) \frac{g(k)}{dE/dk} \\ &= (2S + 1)(2m^2 E) 2\pi^2 \frac{1}{\sqrt{2mE}} \\ &= \frac{(2S + 1)}{\pi^2} \sqrt{\frac{Em^3}{2}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Por lo tanto

$$g(E)dE = \frac{(2S + 1)}{\pi^2} \sqrt{\frac{Em^3}{2}} dE,$$

que es la ecuación (5.8), tal y como se quería demostrar.

Ahora consideremos el comportamiento de un gas de bosones de $S = 0$ con una densidad de partículas fija N/V y una temperatura T variable. El valor del potencial químico puede ser calculado sustituyendo los resultados anteriores en (5.7), y obtenemos [26]

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} \right) \left[2\pi(2S + 1)(2m)^{3/2} \sqrt{E} \right] dE.$$

Como $S = 0$,

$$\frac{N}{V} = 2\pi(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E}}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} dE. \quad (5.18)$$

No hay solución analítica para esta última ecuación, pero la dependencia general de μ con T se puede entender sin recurrir a técnicas numéricas. Analizando (5.18), podemos ver que a temperaturas suficientemente altas, μ debe tener un valor grande negativo para compensar el valor grande de T . Cuando se está enfriando el gas, se mantiene fija N/V , por lo que μ debe incrementarse para compensar el decremento en $k_B T$. Este proceso continúa al disminuir T , pero no puede continuar indefinidamente porque mantener el factor de ocupación positivo para todos los valores de $E \geq 0$ implica que $\mu < 0$. Por lo tanto, μ aumentará con la reducción de T hasta limitarse a un valor pequeño negativo muy cercano a cero. La temperatura crítica a la cual μ se acerca a este límite es precisamente la temperatura de condensación de Bose-Einstein, en la cual estamos interesados. Cuando analizamos el comportamiento de un sistema en el límite cuando μ se aproxima a cero, el valor del integrando en (5.18) queda indefinido en $E = 0$; por lo tanto, debemos tratar el estado de energía cero de manera diferente y reescribir esta ecuación como

$$\frac{N}{V} = N_0(T) + 2\pi(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E}}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} dE, \quad (5.19)$$

donde $N_0(T)$ es la densidad del número de partículas en el estado de energía cero. Al tomar el límite de (5.6) con $E = 0$ y $\mu \rightarrow 0$, encontramos que

$$N_0(T)V = \frac{1}{(1 - (\mu/k_B T) + \dots) - 1} = -\frac{k_B T}{\mu}. \quad (5.20)$$

Demostración: Haciendo $E = 0$ en (5.6)

$$n_{BE}(E = 0, T) = \frac{1}{e^{-\mu/k_B T} - 1}, \quad (5.21)$$

o en términos de la densidad de estados N_0 ,

$$N_0(T) = \frac{n_{BE}}{V} = \frac{1}{V} \frac{1}{e^{-\mu/k_B T} - 1}. \quad (5.22)$$

Desarrollando en serie de Taylor la exponencial,

$$N_0(T)V = \frac{1}{[1 - \mu/k_B T + (\mu/k_B T)^2 - \dots] - 1}. \quad (5.23)$$

Dado que $\mu \rightarrow 0$, el factor cuadrático y los de orden mayor son despreciables, por lo que (5.23) queda como

$$N_0(T)V = \frac{1}{(1 - \mu/k_B T) - 1} = \frac{1}{-\mu/k_B T} = -\frac{k_B T}{\mu},$$

que es lo que se estaba buscando. Este resultado muestra que el límite donde $|\mu|$ puede ser tan pequeño está determinado por el número de partículas que ocupan el estado $E = 0$.

La temperatura de condensación se define como aquella en que es imposible dar cabida a todas las partículas en los estados con $E > 0$. La condición para que esto suceda está dada por [26]

$$\frac{N}{V} = \frac{3}{2} \zeta(2\pi m k_B T_c)^{3/2}, \quad (5.24)$$

donde $\zeta(y)$ es la función zeta de Riemann.

Demostración: Dado que se debe considerar a μ muy pequeño, tomamos $\mu = 0$ en (5.18),

$$\frac{N}{V} = 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E}}{e^{E/k_B T_c} - 1} dE.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \frac{E}{k_B T_c}$,

$$\frac{N}{V} = 2\pi \left(\frac{2mk_B T_c}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx. \quad (5.25)$$

Pero

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

y se obtiene (5.24). Podemos ahora obtener la temperatura crítica T_c como

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \zeta^{2/3}\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \quad (5.26)$$

Para temperaturas por debajo de T_c , una fracción microscópica del número total de partículas se condensa en el estado $E = 0$. El resto de las partículas seguirá distribuyéndose térmicamente entre el resto de los niveles. El número de partículas en los estados con $E > 0$ están dados por (5.18) con $\mu = 0$. Por lo tanto, para $T \leq T_c$, debemos escribir la densidad de partículas como

$$\frac{N}{V} = N_0(T) + \left(\frac{N}{V}\right) \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}. \quad (5.27)$$

Demostración: En la ecuación (5.19) tomamos $\mu = 0$

$$\frac{N}{V} = N_0(T) + 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E}}{e^{E/k_B T} - 1} dE. \quad (5.28)$$

Haciendo el cambio de variable $x = \frac{E}{k_B T}$,

$$\frac{N}{V} = N_0(T) + 2\pi \left(\frac{2mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx.$$

La integral ya la calculamos arriba, así que

$$\frac{N}{V} = N_0(T) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}. \quad (5.29)$$

Usando ahora (5.26) obtenemos (5.27), tal y como se deseaba. Podemos resolver (5.27) para $N_0(T)$ y encontrar que

$$N_0(T) = \frac{N}{V} \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \right]. \quad (5.30)$$

La fracción de partículas en el estado condensado es [27]

$$f(T) = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}. \quad (5.31)$$

La ecuación indica que la fracción de partículas con velocidad cero se aproxima al 100 % cuando $T \rightarrow 0$. En la siguiente figura se muestra el resultado (5.31).

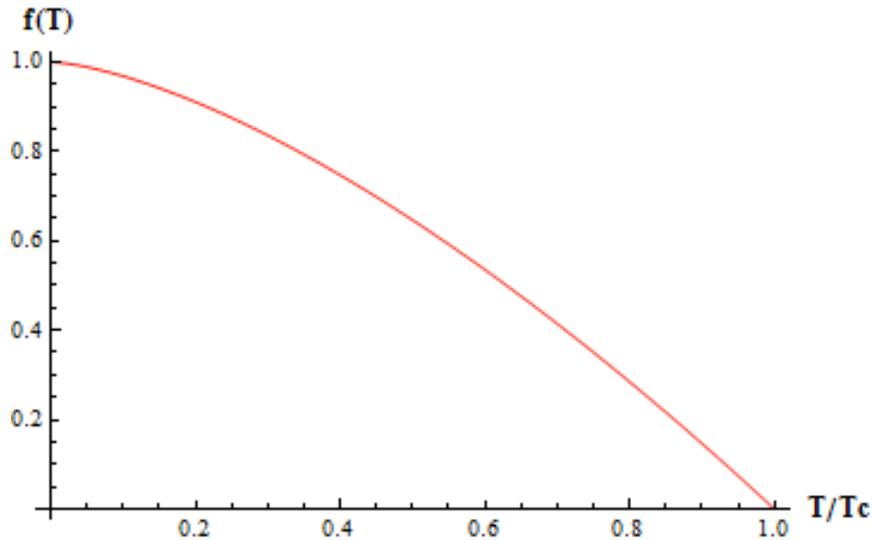


Figura 5.4: Fracción $f(T)$ del número de partículas en el BEC contra la Temperatura.

Observemos de la Figura que para $T > T_c$, el número de partículas en el estado base es despreciable. A medida que T decrece por debajo de T_c , el número de tales partículas crece rápidamente. Estas partículas poseen energía cero y momento cero. Debido a esto, no contribuyen a la presión ni poseen viscosidad (puesto que está relacionado con el transporte de momento). El proceso en que se concentran partículas en el estado base de energía cero, se conoce como condensación de Bose-Einstein. Difiere de la condensación de un vapor en un líquido en que la condensación de Bose-Einstein no ocurre separación espacial en fases con propiedades diferentes. Sin embargo, aparecen muchas características semejantes en ambos tipos de condensación. Por ejemplo, la presión de un gas de Bose-Einstein a $T < T_c$, precisamente como la presión de un vapor saturado, sólo depende de su temperatura pero no de su volumen. Un gas Bose-Einstein a temperaturas por debajo de T_c recibe el nombre de degenerado. [27]

5.4. Sistemas condensados de Bose-Einstein.

A continuación se detallarán algunos sistemas donde se presenta la condensación de Bose-Einstein. El ejemplo más conocido antes de los trabajos de gases diluidos fue el helio líquido. El helio natural contiene 99.99 % del isótopo ^4He , con solo 0.01 % de ^3He , dándole predominantemente propiedades bosónicas. El helio es un gas a temperaturas ambiente y se licúa a 4.2K. La densidad del helio líquido es 120 kg/m^3 , por lo que se puede calcular que la temperatura crítica es $T_c = 2.7 \text{ K}$.

El helio ${}^4\text{He}$ tiene espín cero y, por consiguiente, satisface la estadística de Bose-Einstein.

Otro fenómeno bien conocido en la materia condensada es la superconductividad. Los electrones individuales en un metal son fermiones, pero en un superconductor, dos electrones se emparejan para formar un **Par de Cooper**. El par de Cooper puede tener espín 1 o 0 y, por lo tanto, formar un sistema bosónico. Los electrones de conducción en un superconductor, cuya temperatura está por debajo de la temperatura de transición, pueden estar en un estado normal o pueden estar en un estado superconductor; la fracción de electrones que se encuentran en estado superconductor está dada por una ecuación análoga a (5.30). En la siguiente Tabla se describen diferentes sistemas bosónicos donde se presenta la condensación de Bose-Einstein. [26]

Sistema	Bosón	T_c (K)
Helio Líquido	${}^4\text{He}$	2.17
Gases atómicos diluidos	Variable	$\sim 10^{-7}$
Superconductores	Pares electrón Cooper	Arriba de ~ 100
Semiconductor	Excitón	~ 10
Estrella de neutrones	Pares neutrón Cooper	$\sim 10^9$

Tabla 5.1: Sistemas físicos que presentan el fenómeno de condensación de Bose-Einstein.

Podemos observar de la lista que la definición de "baja temperatura" varía dramáticamente de sistema a sistema.

5.5. Descripción microscópica de la condensación de Bose-Einstein.

Concebir a la condensación de Bose-Einstein como una acumulación de partículas en el estado de velocidad cero, deja claro que sólo se puede observar en gases de bosones, los cuales no están sujetos al Principio de Exclusión de Pauli. Los átomos y moléculas de un gas están compuestos por protones, neutrones y electrones, que son fermiones. Los átomos y las moléculas pueden ser fermiones o bosones, dependiendo del espín total. Podemos averiguar si un átomo en particular es un fermión o un bosón, calculando el espín total de acuerdo a las reglas de la suma de momento angular cuántico, que es [29]

$$S_{\text{atomo}} = S_{e^-} + S_{\text{nucleo}}. \quad (5.32)$$

Es evidente que un átomo o una molécula será un bosón si el número total de electrones, protones y neutrones es un número par y un fermión si el número total es impar. Ahora consideremos un gas a temperatura T de bosones atómicos idénticos de masa m , que no interactúan. Recordemos que si no interactúan las partículas son completamente libres, y su única energía es cinética. Las condiciones para el logro de un condensado de Bose-Einstein son bastante extremas. Como ya vimos, las partículas del sistema deben ser idénticas. Esta condición de indistinguibilidad requiere que las longitudes de De Broglie de las partículas se solapen significativamente, lo cual se logra a temperaturas extremadamente bajas. De esta forma, las longitudes de onda de De Broglie serán largas. A continuación haremos una revisión acerca de esta condición. De Broglie postuló que todas las partículas que poseían una cantidad de movimiento tenían asociada una onda con una longitud

$\lambda_{deB} = \frac{h}{p}$, donde h es la constante de Planck y p es el momento de la partícula. La longitud de onda de De Broglie térmica, λ_{deB} , está dada por [26]

$$\frac{p^2}{2m} \equiv \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{\lambda_{deB}} \right)^2 = \frac{3}{2} k_B T, \quad (5.33)$$

lo que implica que

$$\lambda_{deB} = \frac{1}{\sqrt{3mk_B T}}. \quad (5.34)$$

Demostración: Ya mencionamos que dado que las partículas del gas no interactúan, su única energía es la cinética, y dicha energía es $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$. Es bien conocido que la energía cinética promedio para el caso unidimensional es [25]

$$\langle \varepsilon_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} m \left(\frac{k_B T}{m} \right) = \frac{k_B T}{2}. \quad (5.35)$$

Ahora haremos uso el famoso Teorema de Equipartición de la Energía que enunciamos al principio de este Capítulo. Considerando que el movimiento de cada bosón es en 3 dimensiones, entonces

$$\langle \varepsilon \rangle = 3 \left(\frac{k_B T}{2} \right) = \frac{3}{2} k_B T.$$

Por lo tanto, las dos expresiones equivalentes para la energía cinética

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{\lambda_{deB}} \right)^2 = \frac{3}{2} k_B T.$$

Sustituyendo la longitud de onda de De Broglie, igualando dicha energía cinética a $\frac{3}{2} k_B T$ y despejando λ , llegamos a (5.34), que es lo que deseábamos demostrar. Debemos notar que la longitud de la onda de De Broglie se incrementa al disminuir T . La función de onda mecánico-cuántica para el movimiento de traslación de un átomo libre se extiende sobre una distancia de aproximadamente λ_{deB} . Dado que al aumentar λ_{deB} disminuye T , eventualmente se alcanzará una temperatura T cuando las funciones de onda de los átomos vecinos empiezan a superponerse. La siguiente Figura representa esta situación. [26]

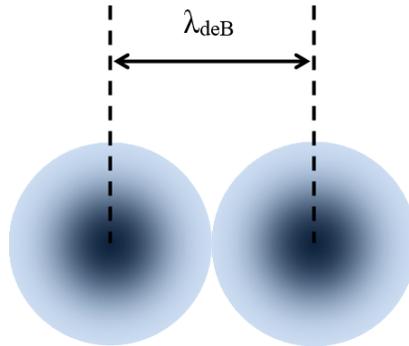


Figura 5.5: Solapamiento de las funciones de onda de dos átomos separados por λ_{deB} . [26]

Los átomos interactúan entre sí y se unirán para formar un estado extendido con una función de onda común. Éste es el estado condensado de Bose-Einstein. La condición para la función de

onda superpuesta consiste en que el recíproco del volumen efectivo de la partícula determinado por la longitud de onda de De Broglie debe ser igual a la densidad de la partícula. Si tenemos N partículas en un volumen V , la condición descrita anteriormente puede ser escrita como [26]

$$\frac{N}{V} \sim \frac{1}{\lambda_{deB}^3}. \quad (5.36)$$

Usando la expresión para λ_{deB} y resolviendo para T , encontramos que

$$T_c \sim \frac{1}{3} \frac{h^2}{mk_B} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (5.37)$$

Esta es la misma fórmula que hallamos para T_c , salvo una constante. El argumento utilizado para derivar esto, por el contrario, es mucho más intuitivo y nos da una señal de que el estado condensado consiste en un estado extendido con todos los átomos coherentes entre sí.

Capítulo 6

Formalismo de la Segunda Cuantización.

6.1. Mecánica cuántica de muchos cuerpos y la primera cuantización.

El objetivo de este capítulo es introducir el formalismo conocido como la **Segunda Cuantización**, que es extremadamente útil cuando se trabaja con sistemas de muchas partículas interactuantes. Supongamos que tenemos un sistema de N partículas sin espín y masa m ; las partículas tienen posiciones \vec{r}_i y momento \vec{p}_i ($i = 1, \dots, N$). Más adelante veremos que agregar el espín no presenta ninguna dificultad. Consideremos el hamiltoniano [30]

$$H \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N U(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (6.1)$$

que describe partículas moviéndose bajo un potencial $U(\vec{r})$ e interactuando con un potencial $V(\vec{r})$. La función de onda tiene la propiedad de simetría

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \varsigma \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \quad (6.2)$$

donde

$$\varsigma = \begin{cases} 1 & \text{Bosones} \\ -1 & \text{Fermiones} \end{cases}$$

Esta expresión se puede generalizar para cualquier número de permutaciones realizadas. Para bosones, no importa cuántas veces permutemos las partículas, la función de onda no es afectada. Para fermiones, dependerá si el número de permutaciones es par o impar [29].

6.2. Determinantes de Slater y Permanentes.

Antes de introducir la segunda cuantización, analicemos un poco más la primera cuantización y presentamos un caso simple de funciones de onda. Para bosones se denominan **Permanentes** y para fermiones **Determinantes de Slater** [31]. Estas funciones de onda son importantes para hacer contacto con el formalismo de la segunda cuantización. Finalmente, se puede demostrar que cualquier función de onda de N bosones o fermiones, puede escribirse como una combinación lineal de Permanentes o Determinantes de Slater, respectivamente. Por lo tanto, estas funciones de onda

forman una base para el espacio de Hilbert de N partículas.

Consideremos dos partículas, para después generalizar el resultado. Supongamos que ponemos una partícula en el estado α_1 y la otra en el estado α_2 . Si son bosones, el Permanente obtenido para llenar estos dos estados es

$$\Psi_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_{\alpha_1}(\vec{r}_1)\phi_{\alpha_2}(\vec{r}_2) + \phi_{\alpha_1}(\vec{r}_2)\phi_{\alpha_2}(\vec{r}_1)]. \quad (6.3)$$

Para fermiones, el Determinante de Slater obtenido es

$$\Psi_{SD}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_{\alpha_1}(\vec{r}_1)\phi_{\alpha_2}(\vec{r}_2) - \phi_{\alpha_1}(\vec{r}_2)\phi_{\alpha_2}(\vec{r}_1)]. \quad (6.4)$$

Una forma de entender estas funciones de onda es considerando que empezamos con el estado $\phi_{\alpha_1}(\vec{r}_1)\phi_{\alpha_2}(\vec{r}_2)$, esto es, la partícula 1 está en el estado α_1 y la segunda en el α_2 . Podemos observar que la función de onda anterior es incorrecta, ya que no satisface la propiedad de simetría. Para solucionar este problema, simetrizamos las coordenadas de la partícula y así obtenemos (6.3). Si tratamos con fermiones, hacemos un determinante de Slater empezando con la misma función de onda, pero antisimetrizamos para obtener (6.4). El factor $1/\sqrt{2}$ se agrega por convención, pero en general estos estados no están normalizados; la función de onda Ψ_{SD} siempre está normalizada y Ψ_p está normalizada, a menos que $\alpha_1 = \alpha_2$. Además, Ψ_{SD} se anula si $\alpha_1 = \alpha_2$ (lo cual es compatible con el Principio de Exclusión de Pauli, que previene que haya dos fermiones en el mismo estado). Para escribir un Permanente o Determinante de Slater para N partículas, imaginemos que ocupamos los estados $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. La expresión para el Permanente o Determinante de Slater obtenido para esta función de onda es [32]

$$\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_p \varsigma^{|P|} \phi_{\alpha_1}(\vec{r}_{p(1)}) \phi_{\alpha_2}(\vec{r}_{p(2)}) \cdots \phi_{\alpha_N}(\vec{r}_{p(N)}), \quad (6.5)$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones P de los enteros $i = 1, \dots, N$. Si esto se hace un número par de veces, tendremos una permutación par, y si se realiza un número impar de veces, la permutación es impar. Definimos para la permutación par $|P| = 0$ y para la permutación impar $|P| = 1$. Definimos el ket correspondiente a este estado

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (6.6)$$

Si intercambiamos dos partículas

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \varsigma |\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle. \quad (6.7)$$

Por lo tanto, para fermiones, el orden de α_i dentro del ket si importa. Ya explicada la notación, podemos hacer algunas afirmaciones sobre las funciones de onda de (6.5).

1. Para bosones, donde $\varsigma = 1$, simplemente sumamos sobre todas las permutaciones con coeficientes positivos (ya que $\varsigma^{|P|} = 1$).
2. Para permutaciones impares en fermiones, tiene un signo menos, mientras que para permutaciones pares, se tiene signo positivo.

6.3. Gas de Bose o Fermi no interactuantes (Primera Cuantización).

Recordemos algunos hechos básicos sobre los gases de bosones y fermiones no interactuantes y de esta forma escribimos las funciones de onda del estado base. El hamiltoniano es en este caso

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}. \quad (6.8)$$

Consideremos que el sistema que está en una caja cúbica de volumen $V = L^3$ con condiciones periódicas de frontera. En el caso de una sola partícula, los eigenestados de la energía son ondas planas dadas por [33]

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (6.9)$$

Este estado tiene momento $\vec{p} = \vec{k}$ y energía

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\vec{k}^2}{2m}. \quad (6.10)$$

Debido al volumen finito, el vector de onda \vec{k} adquiere los valores discretos

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y + n_z \hat{e}_z), \quad (6.11)$$

donde n_x , n_y y n_z son enteros arbitrarios. El vector de onda \vec{k} etiqueta los estados de la partícula y juega el mismo rol que el subíndice α . Para bosones, sabemos que el estado base se obtiene poniendo todas las partículas en el estado de energía más bajo, es decir, cuando $k = 0$. Por lo tanto, la función de onda del estado base de muchas partículas para bosones es [32]

$$\Psi_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \psi_0(\vec{r}_1) \psi_0(\vec{r}_2) \cdots \psi_0(\vec{r}_N), \quad (6.12)$$

Ésta es simétrica bajo intercambios de \vec{r}_i y \vec{r}_j y es proporcional a la función de onda permanente obtenida cuando todos los α_i son iguales y $\vec{k} = 0$. Para fermiones, sabemos que obtenemos el estado base llenando los N estados de menor energía. Supongamos que estos estados tienen vectores de onda $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N$, donde no hay dos de estos vectores iguales. Entonces, el estado base de muchos fermiones es sólo el Determinante de Slater $\Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$.

6.4. Operadores de creación y aniquilación.

A partir de esta sección, comenzamos a desarrollar el formalismo de la Segunda Cuantización. El primer paso es extender el espacio de Hilbert para permitir el mayor número posible de partículas, no sólo N . Por supuesto, no necesitamos hacer esto ya que el Hamiltoniano conserva el número de partículas, por lo que esta extensión del espacio de Hilbert es un truco que será muy útil. Vamos a considerar un espacio de Hilbert el cual incluya los estados $|\alpha_1\rangle$ (una partícula), $|\alpha_1, \alpha_2\rangle$ (dos partículas), $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ (tres partículas) y así sucesivamente. El operador básico de la segunda cuantización es el operador de creación \hat{a}_α^\dagger . Actuando en algún estado en nuestro espacio de Hilbert extendido, este operador añade una partícula al sistema en el estado α . Por lo tanto, si Ψ_N es un

estado con N partículas, entonces $\hat{a}_\alpha^\dagger |\Psi_N\rangle$ es un estado con $N + 1$ partículas. El hermite conjugado del operador de creación es $\hat{a}_\alpha = (\hat{a}_\alpha^\dagger)^\dagger$ y es llamado el operador de aniquilación. Para ver porqué, supongamos que $|\psi_{N+1}\rangle$ es un estado con $N + 1$ partículas y $\langle\psi_{N+1}|\hat{a}_\alpha^\dagger|\psi_N\rangle \neq 0$. Entonces tenemos

$$\langle\psi_{N+1}|\hat{a}_\alpha^\dagger|\psi_N\rangle^* = \langle\psi_N|\hat{a}_\alpha|\psi_{N+1}\rangle \neq 0. \quad (6.13)$$

Dado que es distinto de cero, debe ser el caso en que $\hat{a}_\alpha |\psi_{N+1}\rangle$ es un sistema de N partículas, lo cual implica que al actuar \hat{a}_α remueve o aniquila una partícula del sistema. Para bosones, los operadores de creación y aniquilación satisfacen las relaciones de conmutación [30]

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}, \quad (6.14)$$

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] = 0. \quad (6.15)$$

Para fermiones, los operadores satisfacen las relaciones de anti-conmutación

$$\{\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (6.16)$$

$$\{\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta\} = \{\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger\} = 0. \quad (6.17)$$

El siguiente paso es especificar que el estado Permanente o Determinante de Slater están en términos de los operadores de creación y aniquilación. Primero definimos un estado especial $|0\rangle$ llamado estado de vacío. Este es el único estado que no contiene partículas. La acción de cualquier operador de aniquilación actuando sobre el estado vacío es

$$\hat{a}_\alpha |0\rangle = 0, \quad (6.18)$$

lo cual es lógico, ya que no podemos remover la partícula y darle un estado físico si la partícula no se encuentra ahí. Ahora podemos escribir la expresión de los estados Permanente o Determinante de Slater como [31]

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle. \quad (6.19)$$

Todas las propiedades de estos estados se siguen de las relaciones de conmutación y anticonmutación. Por ejemplo, si deseamos calcular $\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle$,

$$\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = \delta_{\alpha_1, \alpha_2}.$$

Demostración: De la relación de conmutación para bosones y fermiones

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^\dagger - \zeta \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\alpha = \delta_{\alpha, \beta}.$$

Dado que $\alpha = \alpha_1$ y $\beta = \alpha_2$, despejamos $\hat{a}_{\alpha_1} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger$ de la expresión anterior y tenemos

$$\hat{a}_{\alpha_1} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} + \zeta \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle\alpha_1|\alpha_2\rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_1} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta_{\alpha_1 \alpha_2} + \zeta \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1} | 0 \rangle \\ &= \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | \zeta \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Pero $\hat{a}_{\alpha_1} |0\rangle = 0$, por lo tanto

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \delta_{\alpha_1 \alpha_2},$$

que es lo deseábamos demostrar. La normalización de un estado de dos partículas con $\alpha_1 \neq \alpha_2$,

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 1. \quad (6.20)$$

Demostración: Tenemos que

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle,$$

y usando las relaciones de conmutación o anticonmutación queda

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} (\delta_{\alpha_1, \alpha_1} + \varsigma \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1}) \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle + \varsigma \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Usando una vez más la relaciones de conmutación o de anticonmutación,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle + \varsigma \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger (\delta_{\alpha_1, \alpha_2} + \varsigma \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle + \varsigma \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger | 0 \rangle + \varsigma^2 \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1} | 0 \rangle, \end{aligned}$$

pero $\hat{a} |0\rangle = 0$, así que

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle + \varsigma \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger | 0 \rangle + \varsigma^2 \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_1} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle + \varsigma \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_1}^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\delta_{\alpha_1, \alpha_2} = 0$, y

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger | 0 \rangle.$$

Escribimos ahora $\hat{a}_{\alpha_2} \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger = 1 + \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2}$, obteniendo

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \langle 0 | 1 + \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}_{\alpha_2}^\dagger \hat{a}_{\alpha_2} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 0 \rangle = 1, \end{aligned}$$

que es lo que deseábamos demostrar. El estado $|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$ está normalizado (ya que los α_i son todos diferentes). Esto es automáticamente cierto para fermiones, entonces los estados determinante de Slater están normalizados. Sin embargo, para bosones, si algunos α_i son los mismos, entonces los estados no están normalizados. Un ejemplo de esto es $\langle \alpha_1, \alpha_1 | \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$.

6.5. Operadores de número.

Una de las preguntas básicas que podemos formularnos acerca de los sistemas de muchos cuerpos es: ¿Cuántas partículas están ocupando el estado α ? Como estamos tratando con un problema cuántico, esperamos que el número de partículas en el estado α esté dado por el eigenvalor del operador hermitiano \hat{n}_α , llamado operador de número u operador de número de ocupación. El operador \hat{n}_α es muy útil. Por ejemplo, supongamos que estamos tratando con un sistema de partículas que no interactúan, y que α etiqueta los eigenestados de la energía para un hamiltoniano

de una sola partícula. Entonces, cada partícula en el estado α tiene energía ϵ_α , y la energía total de las partículas en el estado α está dado por el operador $\epsilon_\alpha \hat{n}_\alpha$. Por lo tanto, la energía total de todas las partículas en el sistema es [32]

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{n}_{\alpha}. \quad (6.21)$$

Mediante esta expresión podemos construir el Hamiltoniano de un sistema sin interacciones en términos de los operadores del número de ocupación. Otros observables importantes (por ejemplo, el momento), también se pueden expresar de manera similar. Encontraremos ahora una fórmula para escribir a \hat{n}_α en términos de \hat{a}_α y \hat{a}_α^\dagger . Siguiendo el ejemplo del caso bosónico [34]

$$\hat{n}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha. \quad (6.22)$$

Comprobemos que la suposición es razonable. Si no hay partículas ocupando el estado α , entonces \hat{n}_α dará cero. Además,

$$[\hat{n}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \hat{a}_\alpha^\dagger \delta_{\alpha\beta} \quad (6.23)$$

y

$$[\hat{n}_\alpha, \hat{a}_\beta] = -\hat{a}_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (6.24)$$

Demostración: Como $\hat{n}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$, podemos reescribir

$$[\hat{n}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = [\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger].$$

Utilizando la propiedad $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$, y las reglas de conmutación de los operadores de creación y aniquilación, obtenemos

$$[\hat{n}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = [\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \hat{a}_\alpha^\dagger [\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] + [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] \hat{a}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \delta_{\alpha\beta},$$

que es la fórmula (6.23). Para demostrar (6.24), procedemos de la misma manera,

$$\begin{aligned} \hat{n}_\alpha, \hat{a}_\beta &= [\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] \\ &= \hat{a}_\alpha^\dagger [\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] + [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta] \hat{a}_\alpha \\ &= [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta] \hat{a}_\alpha \\ &= -\delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger, \end{aligned}$$

y de esta forma, obtenemos los resultados requeridos. Es evidente que necesitaremos un operador cuya acción sobre las funciones de onda nos de el número total de partículas en el sistema. No se requiere mucha discusión para concluir que dicho operador es [32]

$$\hat{N} = \sum_{\alpha} \hat{n}_{\alpha}. \quad (6.25)$$

Ahora vamos a considerar la acción de los operadores de creación y aniquilación sobre estados donde las partículas no ocupan el estado α . Formalmente consideremos el estado $|\beta_1, \dots, \beta_N\rangle$ donde $\beta_i \neq \alpha$ para $i = 1, \dots, N$. Tendremos

$$\hat{n}_\alpha |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle = 0. \quad (6.26)$$

Demostración: Podemos representar el estado en cuestión como

$$|\beta_1, \dots, \beta_N\rangle = \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle,$$

así que

$$\hat{n}_\alpha |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle = \hat{n}_\alpha \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle.$$

Por las reglas de conmutación fundamentales, (6.14) y (6.15), y como α es diferente a toda β , $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_{\beta_j}^\dagger] = 0$, y $[\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] = 0$, así que

$$\hat{n}_\alpha |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle = \hat{n}_\alpha \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle = \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha |0\rangle.$$

Finalmente, como $\hat{a}_\alpha |0\rangle$ para todo α , llegamos a (6.26). Ahora vamos a considerar un estado con una sola partícula en el estado α . Es lógico esperar que

$$\hat{n}_\alpha |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle = |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle; \quad (6.27)$$

es decir, el eigenvalor del operador de número de partículas en el estado α es uno. Dicho de otra manera, efectivamente tenemos una partícula en el estado α .

Demostración: Vamos a suponer que $\beta_j = \alpha$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \hat{n}_\alpha |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle &= \hat{n}_\alpha \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle \\ &= \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_{j-1}}^\dagger (\hat{n}_\alpha \hat{a}_{\beta_j}^\dagger) \hat{a}_{\beta_{j+1}}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Por las reglas de conmutación ya enunciadas,

$$\hat{n}_\alpha |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle = \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_{j-1}}^\dagger (\hat{a}_{\beta_j}^\dagger \hat{n}_\alpha + \hat{a}_{\beta_j}^\dagger) \hat{a}_{\beta_{j+1}}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle. \quad (6.29)$$

Como $\alpha = \beta_j$ y todas las β_j son diferentes, podemos trasladar el operador \hat{n}_α hasta que actúe directamente sobre el estado de vacío, obteniendo cero, y entonces

$$\begin{aligned} \hat{n}_\alpha |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle &= \hat{a}_{\beta_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_{j-1}}^\dagger \hat{a}_{\beta_j}^\dagger \hat{a}_{\beta_{j+1}}^\dagger \cdots \hat{a}_{\beta_N}^\dagger |0\rangle \\ &= |\beta_1, \dots, \beta_N\rangle, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. En el caso de los fermiones, la demostración sigue un camino muy parecido; sin embargo, la similaridad se detiene hasta aquí, porque ahora construiremos estados bosónicos con muchas partículas en cada uno de los estados posibles, lo cual es imposible en el caso de los fermiones por el principio de exclusión de Pauli. Vayamos al caso de los bosones, considerando únicamente dos partículas en un estado; de ahí será fácil ver la generalización a un número arbitrario de partículas. Se cumple que

$$\hat{n}_\alpha |\alpha, \alpha\rangle = 2 |\alpha, \alpha\rangle. \quad (6.30)$$

Demostración: Por definición tenemos

$$\hat{n}_\alpha |\alpha, \alpha\rangle = \hat{n}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger |0\rangle,$$

pero con las reglas de conmutación es trivial demostrar que $\hat{n}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger = \hat{a}_\alpha^\dagger + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n}_\alpha$ y entonces,

$$\begin{aligned} \hat{n}_\alpha |\alpha, \alpha\rangle &= (\hat{a}_\alpha^\dagger + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n}_\alpha) \hat{a}_\alpha^\dagger |0\rangle \\ &= \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger |0\rangle + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger |0\rangle \\ &= |\alpha, \alpha\rangle + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger |0\rangle. \end{aligned}$$

Usando nuevamente que $\hat{n}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger = \hat{a}_\alpha^\dagger + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n}_\alpha$,

$$\begin{aligned}\hat{n}_\alpha |\alpha, \alpha\rangle &= |\alpha, \alpha\rangle + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger |0\rangle + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n}_\alpha |0\rangle \\ &= 2 |\alpha, \alpha\rangle,\end{aligned}$$

que es el resultado deseado. Por lo tanto, este operador cuenta correctamente las dos partículas en el estado α .

6.6. Propiedades básicas del hamiltoniano de sistemas sin interacción.

Consideremos el Hamiltoniano $\hat{H} = \sum_\alpha \epsilon_\alpha \hat{n}_\alpha$, ecuación (6.21). En general, este Hamiltoniano tiene un gran número (en muchos casos infinito) de constantes de movimiento debido a que

$$[\hat{H}, \hat{n}_\alpha] = 0. \quad (6.31)$$

Por lo tanto, el número de partículas en cualquier estado α de una sola partícula es una constante de movimiento. De esta forma podemos construir eigenestados de un sistema de muchos cuerpos muy fácilmente: sólo especificamos el número de partículas ocupando cada eigenestado. La existencia de muchas constantes de movimiento es una característica muy especial de los problemas sin interacción, y en general, no es cierto cuando hay interacciones (usualmente hay algunas constantes de movimiento, dictadas por la simetría del sistema).

Ahora trataremos el estado base de un sistema de N cuerpos, primero N bosones y luego N fermiones. Primero supongamos que las energías están ordenadas; es decir, tenemos que $\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \dots \leq \epsilon_N \leq \dots$. Para bosones ponemos las N partículas en el estado más bajo, y el estado base es [31]

$$|\psi_{gs}^{\text{bosones}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{a}_1^\dagger)^N |0\rangle. \quad (6.32)$$

Para fermiones, llenamos los N estados más bajos y el estado base es

$$|\psi_{gs}^{\text{fermiones}}\rangle = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \dots \hat{a}_N^\dagger |0\rangle. \quad (6.33)$$

6.7. Gas de Fermi y de Bose sin interacción y con interacción (Segunda Cuantización).

Ahora volvemos a los gases de Bose y de Fermi sin interacción, pero usaremos la segunda cuantización. Los eigenestados de una sola partícula están etiquetados por el momento \vec{k} , por lo tanto, podemos usar el Hamiltoniano sin interacción de la sección anterior, pero con los siguientes cambios en la notación [32]

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow \vec{k}, \\ \hat{a}_\alpha &\rightarrow \psi(\vec{k}), \\ \hat{a}_\alpha^\dagger &\rightarrow \psi^\dagger(\vec{k}),\end{aligned}$$

$$\epsilon_\alpha \rightarrow \epsilon_{\vec{k}} = \frac{\vec{k}^2}{2m}.$$

El Hamiltoniano se reescribe como

$$H = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}), \quad (6.34)$$

donde $\psi(\vec{k})$ aniquila una partícula con momento \vec{k} . Si estamos tratando con bosones

$$[\psi(\vec{k}), \psi^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (6.35)$$

y para fermiones

$$[\psi(\vec{k}), \psi^\dagger(\vec{k}')]_+ = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (6.36)$$

Es importante tener en cuenta que como estamos cuantizando en una caja, el vector de onda \vec{k} toma valores discretos, por lo cual las Deltas de Kronecker tienen sentido. El operador

$$\hat{n}(\vec{k}) = \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}), \quad (6.37)$$

es el **operador de número** y determina cuántas partículas hay con momento \vec{k} . Surge en este punto la pregunta: ¿Cuál es la densidad de partículas en una posición dada \vec{r} ? Para responder esta pregunta necesitamos hallar un **operador de densidad** $\hat{n}(\vec{r})$, que es como el operador de número en el espacio. Con el objetivo de construir el operador de densidad, necesitamos construir los operadores de creación y aniquilación en el espacio de posición; si éstos están escritos como $\psi^\dagger(\vec{r})$ y $\psi(\vec{r})$, respectivamente, podemos intuir que el operador de densidad será de la forma [34]

$$\hat{n}(\vec{r}) = \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}). \quad (6.38)$$

Esta propuesta es razonable porque $\hat{n}(\vec{r})$ destruye una partícula en \vec{r} y después la vuelve a crear, como el operador de número; sin embargo, debe ser un poco diferente a éste última porque es adimensional, mientras que $\hat{n}(\vec{r})$ debe tener unidades de volumen inverso. Podemos construir $\psi^\dagger(\vec{r})$ regresando a la mecánica cuántica de una partícula. Primero notemos que el estado de momento de una partícula se puede expresar como

$$|\vec{k}\rangle = \psi^\dagger(\vec{k}) |0\rangle. \quad (6.39)$$

Como estamos trabajando en una caja, los estados de momento de la partícula están normalizados, o sea,

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (6.40)$$

Definimos los eigenestados de posición $|\vec{r}\rangle$, los cuales satisfacen la normalización usual [35] que es

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (6.41)$$

Las funciones de onda de la partícula libre están dadas por

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (6.42)$$

y por lo tanto

$$|\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} |\vec{r}\rangle d^3\vec{r}, \quad (6.43)$$

donde la integral es tomada sobre el volumen de la caja. También se cumple la relación inversa

$$|\vec{r}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} |\vec{k}\rangle. \quad (6.44)$$

Deseamos que el operador de creación en el espacio de posición satisfaga [35]

$$\psi^\dagger(\vec{r}) |0\rangle = |\vec{r}\rangle. \quad (6.45)$$

Para eso usamos (6.39), (6.43) y (6.45), y definimos [30]

$$\psi^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi^\dagger(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (6.46)$$

y tenemos la relación inversa (justo la transformada inversa de Fourier)

$$\psi^\dagger(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi^\dagger(\vec{k}). \quad (6.47)$$

Esta definición verifica que los operadores de creación y aniquilación satisfacen las relaciones de anticonmutación [36]

$$\{\psi(\vec{r}), \psi^\dagger(\vec{r}')\} = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (6.48)$$

Por lo tanto, estos operadores son como los operadores de creación y aniquilación que hemos discutido, con la diferencia de que reemplazamos la delta de Kronecker por una delta de Dirac, ya que ahora estamos tratando con variables continuas y antes tratábamos con variables discretas. Ahora podemos expresar el Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación en el espacio de configuración como

$$\hat{H} = \int \psi^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (6.49)$$

Verifiquemos si la suposición que se hizo con respecto al operador de densidad, $\hat{n}(\vec{r}) = \psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r})$, es correcta. Si consideramos un gas de Bose o de Fermi sin interacción, la densidad es uniforme en el espacio, por lo tanto esperamos que

$$\langle \psi_{gs} | \hat{n}(\vec{r}) | \psi_{gs} \rangle = n = \frac{N}{V}. \quad (6.50)$$

Demostración: Calculamos este producto interno

$$\langle \psi_{gs} | \hat{n}(\vec{r}) | \psi_{gs} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \langle \psi_{gs} | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}') | \psi_{gs} \rangle.$$

Para gases de Bose y de Fermi, este producto interno se anula a menos que $\vec{k} = \vec{k}'$, dado que si se comienza en el estado base, quitamos una partícula en el estado \vec{k}' y lo ponemos en un estado diferente \vec{k} , tendremos un nuevo estado, ortogonal al estado base, por lo tanto

$$\langle \psi_{gs} | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}') | \psi_{gs} \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \langle \psi_{gs} | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}) | \psi_{gs} \rangle,$$

y esto implica que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{gs} | \hat{n}(\vec{r}) | \psi_{gs} \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \langle \psi_{gs} | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}) | \psi_{gs} \rangle \\
&= \frac{1}{V} \langle \psi_{gs} | \sum_{\vec{k}} \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}) | \psi_{gs} \rangle \\
&= \frac{1}{V} \langle \psi_{gs} | \hat{N} | \psi_{gs} \rangle \\
&= \frac{N}{V} \\
&= n,
\end{aligned}$$

que es el resultado deseado. Ahora sabemos suficiente para escribir el hamiltoniano de un sistema en el que las partículas interactúan entre si en la forma de la segunda cuantización. El punto crucial es que pensemos cómo es el movimiento en el potencial externo $U(\vec{r})$, así como en el término del potencial de interacción, en términos del operador de densidad. La forma es

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int d^3\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi(\vec{r}) + \int d^3\vec{r} U(\vec{r}) \hat{n}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}) \hat{n}(\vec{r}') \\
&= \int d^3\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' V(\vec{r} - \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \psi(\vec{r}'),
\end{aligned} \tag{6.51}$$

donde en la segunda línea se utilizó que $\hat{n} = \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r})$.

6.8. Agregando el espín.

Supongamos que estamos interesados en partículas con espín. Consideremos el caso de fermiones con espín 1/2; por ejemplo, electrones. Lo único que necesitamos para representar el espín es añadir un índice extra a los operadores de creación y aniquilación, de la manera siguiente [32]

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi_\sigma(\vec{r}) \tag{6.52}$$

y

$$\psi^\dagger(\vec{r}) \rightarrow \psi_\sigma^\dagger(\vec{r}). \tag{6.53}$$

El índice σ representa la proyección del espín a lo largo del eje Z y puede tomar dos valores, $\sigma = \uparrow, \downarrow$. Por lo tanto, $\psi_\uparrow^\dagger(\vec{r})$, por ejemplo, crea un electrón de espín hacia arriba en la posición \vec{r} . Tenemos las relaciones de anticonmutación

$$[\psi_\sigma(\vec{r}), \psi_{\sigma'}(\vec{r}')]_+ = \{\psi_\sigma^\dagger(\vec{r}), \psi_{\sigma'}^\dagger(\vec{r}')\} = 0 \tag{6.54}$$

y

$$[\psi_\sigma(\vec{r}), \psi_{\sigma'}(\vec{r}')]_+ = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \tag{6.55}$$

La densidad de espín σ de electrones es $\hat{n}_\sigma(\vec{r}) = \psi_\sigma^\dagger(\vec{r}) \psi_\sigma(\vec{r})$, y por lo tanto, la densidad total es $\hat{n}(\vec{r}) = \sum_\sigma \hat{n}_\sigma(\vec{r})$.

Capítulo 7

La ecuación de Gross-Pitaevskii.

La dinámica de un condensado de Bose-Einstein en el régimen de bajas temperaturas está descrita generalmente por la ecuación de Gross-Pitaevskii (GPE) la cual es una aproximación para las interacciones entre partículas [37]. Por lo general, la GPE se deriva de la segunda cuantización. Para una colección de bosones, en el límite de temperatura cero, todas las partículas están ocupando el estado base del sistema; de hecho, antes de alcanzar este límite, una acumulación de partículas en el estado base puede ser observada. Por lo tanto, para una temperatura suficientemente baja, la mayoría de las partículas están en el mismo estado cuántico y tiene la misma velocidad, de tal forma, que la colección de bosones se comporta como un fluido macroscópico con propiedades nuevas, como la superfluidez [38]. Con el objetivo de estudiar estas propiedades, sólo es necesario concentrarse en el estado base. El estado de las partículas en un cierto nivel de energía está descrito por una función de onda normalizada, la cual es un eigenvector del Hamiltoniano del sistema que se esté considerando y cuyo eigenvalor corresponde a la energía de ese nivel; entonces, debemos encontrar los eigenvectores con eigenvalor mínimo para el Hamiltoniano que describe nuestro sistema. Este Hamiltoniano debe incluir todas las interacciones entre todos los pares de partículas; si hay N partículas en el sistema, el Hamiltoniano tendrá N^2 términos. Para simplificar el problema, usaremos la aproximación de campo medio, que significa que la acción sobre una partícula, debido a todas las demás partículas, es sustituida por la acción promedio de un fluido. De esta forma cambiamos un modelo complejo para la interacción entre bosones por uno simplificado, que es válido para gases diluidos; luego deberemos encontrar un valor aproximado para el menor eigenvalor de este nuevo Hamiltoniano minimizado. Cabe mencionar que las interacciones entre bosones no son necesarias para que la condensación se lleve a cabo [39]; sin embargo, juegan un papel importante en las propiedades de un condensado. Para este propósito no es suficiente utilizar la ecuación de Schrödinger [40], sino que se requiere la ecuación de Gross-Pitaevskii.

7.1. Un modelo para superfluidos y condensados de Bose-Einstein.

Cuando el gas helio (isótopo ^4He) se enfría, es posible observar una transición a líquido a una temperatura de 4.2 K y a 1 atm de presión. Si continuamos enfriando el sistema, abajo de 2.17 K, esta fase líquida adquiere propiedades inusuales, se convierte en un superfluido [41]. La superfluidez se manifiesta, entre otros efectos, por la falta de viscosidad; en otras palabras, el líquido fluye sin fricción. Si lanzamos algo de este superfluido de helio dentro de un canal en forma de anillo, no se detendrá. Incluso si tratamos de mover un objeto a cierta velocidad a través de la

superficie del líquido, no experimentará resistencia. Otra característica interesante de este sistema es la creación de vórtices, que se pueden ver como pequeños remolinos dentro del líquido y que se comportan muy diferente de los observados en el agua, por ejemplo. Estos vórtices tienen ciertas propiedades cuantificadas (la velocidad del líquido no puede tomar cualquier valor arbitrario). Estas propiedades, observadas en el helio líquido ^4He en 1937, también se observan en ^3He a bajas temperaturas y más recientemente en condensados de Bose-Einstein [42]. Estos fenómenos son una manifestación macroscópica de efectos cuánticos y para estudiarlos se requiere el uso de la mecánica cuántica. En los años 50, Landau y Ginzburg [43] propusieron un modelo de electrones que da lugar a la superconductividad como un superfluido, con la ayuda de la ecuación simplificada

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2 u + gu(|u|^2 - 1), \quad (7.1)$$

donde $|u|^2$ representa la densidad del superfluido, el cual fluye sin fricción, mientras que el resto de la materia está en un estado de fluido normal y g es una constante de proporcionalidad con dimensiones de energía. Esta ecuación entrega predicciones satisfactorias, pero su uso es limitado debido al hecho de que las interacciones son bastante fuertes. Sin embargo, el modelo de Landau-Ginzburg es un caso particular de una ecuación que surge naturalmente cuando estudiamos el comportamiento de los condensados de Bose-Einstein en una aproximación de primer orden, dicha ecuación es la **ecuación de Gross-Pitaevskii** [37]

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V_{ext} + g|\psi|^2 \right) \psi, \quad (7.2)$$

donde m es la masa de los átomos del condensado, $|\psi|^2$ es la densidad atómica, V_{ext} es un potencial externo y g es un parámetro que mide las interacciones atómicas. La ecuación de Gross-Pitaevskii tiene la misma forma matemática que la ecuación de Schrödinger no lineal, que es básicamente la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V_{ext} \right) \psi, \quad (7.3)$$

más un término no lineal que considera la interacción entre las partículas. En el caso de los condensados de Bose-Einstein, las interacciones son muy débiles, por lo que las predicciones hechas con la ecuación de Gross-Pitaevskii son muy buenas.

7.2. Demostración de la ecuación de Gross-Pitaevskii.

Detallaremos la demostración de la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo a partir del Hamiltoniano de la segunda cuantización en la aproximación del modelo de un gas de Bose de interacción débil. Vamos a describir el sistema de N bosones interactuantes usando el Hamiltoniano de la segunda cuantización en términos del operador de campo de Bose $\hat{\Psi}$. Este operador es una función del espacio y del tiempo; sin embargo, por conveniencia no consideremos el tiempo. El Hamiltoniano de la segunda cuantización está dado por

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{H}_0 \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V_{int}(\vec{r}, \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}), \quad (7.4)$$

donde $V_{int}(\vec{r}, \vec{r}')$ es el potencial de interacción entre los bosones,

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V_{ext}, \quad (7.5)$$

es el Hamiltoniano de una sola partícula, m es la masa de la partícula y V_{ext} es el potencial externo actuando en el sistema. Los operadores $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ y $\hat{\Psi}(\vec{r})$ representan la creación y aniquilación de un bosón en la posición \vec{r} , respectivamente, y satisfacen las reglas de conmutación que ya se explicaron en el Capítulo 6. El gas está lo suficientemente diluido para que las interacciones atómicas estén dominadas por las colisiones de onda s de dos cuerpos; estas colisiones son esencialmente elásticas, son colisiones de esferas rígidas, y pueden ser modeladas en términos del pseudo-potencial [37]

$$V_{int}(\vec{r}, \vec{r}') = g\delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad (7.6)$$

donde

$$g = \frac{4\pi Na}{m},$$

siendo a la longitud de dispersión de la onda s . El hamiltoniano se puede escribir como

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{H}_0 \hat{\Psi}(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') d^3\vec{r}. \quad (7.7)$$

Demostración: Sustituyendo (7.6) en (7.4),

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) H_0 \hat{\Psi}(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') [g\delta(\vec{r}' - \vec{r})] \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}').$$

Haciendo la integral sobre las variables primadas del segundo término del lado derecho, obtenemos (7.7). Usando las relaciones de conmutación [30]

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}'), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})] = \delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad (7.8)$$

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}'), \hat{\Psi}(\vec{r})] = [\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}'), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})] = 0, \quad (7.9)$$

la ecuación de Heisenberg es

$$i \frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{r})}{\partial t} = [\hat{H}_0 + g \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r})] \hat{\Psi}(\vec{r}). \quad (7.10)$$

Demostración: La evolución en el tiempo de un observable en la descripción de Heisenberg está dada por la ecuación

$$i \frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{r}')}{\partial t} = [\hat{\Psi}(\vec{r}'), \hat{H}], \quad (7.11)$$

pero

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}'), \hat{H}] = \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{H} - \hat{H} \hat{\Psi}(\vec{r}').$$

Calculemos el último término de la expresión anterior,

$$\hat{H} \hat{\Psi}(\vec{r}') = \left[\int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{H}_0 \hat{\Psi}(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') d^3\vec{r} \right] \hat{\Psi}(\vec{r}').$$

Como la integración es sobre \vec{r} , podemos colocar con libertad a $\hat{\Psi}(\vec{r}')$ dentro de las integrales

$$\hat{H} \hat{\Psi}(\vec{r}') = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{H}_0 \hat{\Psi}(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') d^3\vec{r}. \quad (7.12)$$

De la relación de conmutación (7.8), $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r}') = \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) - \delta(\vec{r}' - \vec{r})$, que sustituida en (7.12) nos conduce a

$$\begin{aligned}\hat{H}\hat{\Psi}(\vec{r}') &= \int [\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) - \delta(\vec{r}' - \vec{r})]\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r}')d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int [\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) - \delta(\vec{r}' - \vec{r})]\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} \\ &= \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} - \int \delta(\vec{r}' - \vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int [\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \\ &\quad - 2\delta(\vec{r}' - \vec{r})]\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r}.\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de la Delta de Dirac

$$\begin{aligned}\hat{H}\hat{\Psi}(\vec{r}') &= \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} - \hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r}') + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} \\ &\quad - g \int \delta(\vec{r}' - \vec{r})\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} \\ &= \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} - \hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r}') + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} \\ &\quad - g\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}').\end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{H} &= \hat{\Psi}(\vec{r}') \left[\int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} \right] \\ &= \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r}.\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión del conmutador

$$\begin{aligned}[\hat{\Psi}(\vec{r}'), \hat{H}] &= \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} + \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} \\ &\quad - \int \hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} + \hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r}') \\ &\quad - \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})d^3\vec{r} + g\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}') \\ &= \hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r}') + g\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}').\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (7.11)

$$i\frac{\partial\hat{\Psi}(\vec{r}')}{\partial t} = [\hat{H}_0\hat{\Psi}(\vec{r}') + g\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}')].$$

Por lo tanto, demostramos el resultado deseado. De la ecuación (7.10), se obtiene otra forma de la misma, dada por

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext} + g|\psi|^2 \right) \psi, \quad (7.13)$$

donde $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ representa a una función del espacio y el tiempo.

Demostración: Anteriormente llegamos a la ecuación (7.10). Separando al operador de campo bosónico en una función de onda y el operador de aniquilación

$$\hat{\Psi}(\vec{r}') = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}') \hat{a}_{\alpha}, \quad (7.14)$$

y expresando $\hat{\Psi}(\vec{r})$ en la representación de Heisenberg de operadores dependientes del tiempo [44]

$$\hat{\Psi}(\vec{r}') = \psi(\vec{r}') + \hat{\Psi}'(\vec{r}'), \quad (7.15)$$

donde $\psi(\vec{r}') \equiv \langle \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle$ es llamado el parámetro de orden o función de onda del condensado y $\hat{\Psi}'(\vec{r}')$ se puede interpretar como una perturbación en ese estado del condensado. La GPE considera que $\hat{\Psi}'$ es despreciable, por lo que $T \sim 0$ y $\hat{\Psi}'(\vec{r}') \approx \psi(\vec{r}')$. Haciendo la aproximación $\hat{\Psi}(\vec{r}') \approx \psi(\vec{r}')$ obtenemos

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + g|\psi|^2 \right) \psi.$$

Sustituyendo (7.5) en la expresión anterior

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext} + g|\psi|^2 \right) \psi,$$

obtenemos la expresión solicitada. Cabe señalar que $|\psi|^2$ es la densidad del condensado, la cual se suele denotar por n_0 . Observemos esta expresión es válida cuando

1. La temperatura es mucho menor que la temperatura de transición para el inicio de la condensación.
2. El condensado interactúa débilmente, lo cual es cierto cuando $a \ll \lambda_{dB}$, donde λ_{dB} es la longitud térmica de De Broglie de las partículas.

La ecuación independiente del tiempo de Gross-Pitaevskii está dada por

$$\left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g|\phi(\vec{r})|^2 \right) \phi(\vec{r}) = \mu \phi(\vec{r}), \quad (7.16)$$

donde μ es el potencial químico, es decir, la energía ganada por el sistema como resultado de la adición de una sola partícula a volumen y entropía constante.

Demostración: Para demostrar esta expresión, se propone una solución que consta del producto de una función que depende de la variable espacial por otra que está en función de la temporal

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\mu t}, \quad (7.17)$$

Sustituimos la solución (7.17) en la ecuación (7.13)

$$i \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\vec{r}) e^{-i\mu t}] = \left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g(\phi(\vec{r}) e^{-i\mu t} \phi(\vec{r}) e^{i\mu t}) \right] \phi(\vec{r}) e^{-i\mu t}.$$

Reduciendo términos

$$i\mu \phi(\vec{r}) e^{-i\mu t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g\phi^2(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}) e^{-i\mu t}.$$

Finalmente

$$\mu\phi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g\phi^2(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}).$$

Aunque la ecuación de Gross-Pitaevskii puede parecer simple, se puede aplicar para obtener información acerca de un gran número de sistemas físicos tal como los condensados de Bose-Einstein, superfluidos o fenómenos donde se ve involucrada la luz.

Capítulo 8

Compresión del espín en condensados de Bose-Einstein.

En este capítulo analizaremos los Hamiltonianos de un eje torcido y de dos ejes torcidos. El Hamiltoniano de un eje torcido es el que se ha estudiado más ampliamente, además de que tiene muchas implementaciones experimentales. El objetivo de usar este tipo de Hamiltonianos para generar estados de espín comprimido está inspirado en el Hamiltoniano no lineal que produce compresión bosónica [5].

8.1. Hamiltoniano de un eje torcido en condensados de Bose-Einstein.

En esta sección derivaremos el Hamiltoniano de un eje torcido para un condensado de Bose-Einstein de dos componentes, el cual puede considerarse como un condensado de Bose-Einstein con átomos con dos estados internos, o similarmente en un pozo doble de potencial. Consideremos el caso de N átomos con dos estados internos, $|A\rangle$ y $|B\rangle$. El Hamiltoniano del sistema está dado por [20, 45]

$$\hat{H} = \int \sum_{k=A,B} \left[\hat{\psi}_k(\vec{r}) \hat{H}_{ok} \hat{\psi}_k(\vec{r}) + \frac{g_{kk}}{2} \hat{\psi}_k^\dagger \hat{\psi}_k^\dagger \hat{\psi}_k \hat{\psi}_k \right] d\vec{r} + \int g_{AB} \hat{\psi}_A^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_A \hat{\psi}_B d\vec{r}, \quad (8.1)$$

donde el hamiltoniano de una sola partícula es

$$\hat{H}_{ok} = -\frac{\nabla^2}{2m} + V_k(\vec{r}), \quad (8.2)$$

y gobierna a los átomos en el estado interno k , con la masa del átomo m y el potencial de atrapamiento $V_k(\vec{r})$. El operador bosónico de campo $\hat{\psi}_k(\vec{r})$ aniquila a un átomo en la posición \vec{r} en el estado interno k , y obedece la relación de conmutación ya vista

$$[\hat{\psi}_k(\vec{r}), \hat{\psi}_k^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

La fuerza de interacción está dada por

$$g_{kl} = \frac{4\pi a_{kl}}{m}, \quad (8.3)$$

donde a_{kl} es la longitud de dispersión de la onda s , y g_{AA} , g_{BB} y g_{AB} corresponden a colisiones entre átomos A, B y una mezcla de ambos, respectivamente. Ahora aplicaremos la aproximación de un solo modo para cada uno de los componentes [34]

$$\hat{\psi}_A(\vec{r}) = \phi_A(\vec{r})\hat{a} \quad (8.4)$$

y

$$\hat{\psi}_B(\vec{r}) = \phi_B(\vec{r})\hat{b}, \quad (8.5)$$

donde $\phi_A(\vec{r})$ y $\phi_B(\vec{r})$ son reales, y \hat{a} y \hat{b} son los operadores de aniquilación bosónicos que satisfacen las reglas [30]

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \quad (8.6)$$

$$[\hat{a}, \hat{b}] = 0. \quad (8.7)$$

En la aproximación de un solo modo, el Hamiltoniano se reescribe como [5]

$$\hat{H} = (\hat{\omega}_A - \hat{U}_{AA})\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{\omega}_B - \hat{U}_{BB})\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{U}_{AA}(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + \hat{U}_{BB}(\hat{b}^\dagger\hat{b})^2 + 2\hat{U}_{AB}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad (8.8)$$

donde

$$\hat{\omega}_k = \int \phi_k^*(\vec{r})\hat{H}_{ok}\phi_k(\vec{r})d\vec{r} \quad (8.9)$$

y

$$\hat{U}_{kl} = \frac{g_{kl}}{2} \int |\phi_k(\vec{r})|^2|\phi_l(\vec{r})|^2d\vec{r}. \quad (8.10)$$

Demostración: El Hamiltoniano del sistema está dado por (8.1), y se puede escribir explícitamente como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d\vec{r} \left[\hat{\psi}_A^\dagger(\vec{r})\hat{H}_{OA}\hat{\psi}_A + \frac{g_{AA}}{2}\hat{\psi}_A^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}_A^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}_A(\vec{r})\hat{\psi}_A(\vec{r}) \right] \\ &+ \int d\vec{r} \left[\hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r})\hat{H}_{OB}\hat{\psi}_B + \frac{g_{BB}}{2}\hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}_B(\vec{r})\hat{\psi}_B(\vec{r}) \right] \\ &+ \int d\vec{r}g_{AB}\hat{\psi}_A^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}_A(\vec{r})\hat{\psi}_B(\vec{r}). \end{aligned}$$

Usando la aproximación de un sólo modo, (8.4) y (8.5), la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d\vec{r} \left[\phi_A^*(\vec{r})\hat{a}\hat{H}_{OA}\phi_A(\vec{r})\hat{a} + \frac{g_{AA}}{2}\phi_A^*(\vec{r})\hat{a}^\dagger\phi_A^*(\vec{r})\hat{a}^\dagger\phi_A(\vec{r})\hat{a}\phi_A(\vec{r})\hat{a} \right] \\ &+ \int d\vec{r} \left[\phi_B^*(\vec{r})\hat{b}\hat{H}_{OB}\phi_B(\vec{r})\hat{b} + \frac{g_{BB}}{2}\phi_B^*(\vec{r})\hat{b}^\dagger\phi_B^*(\vec{r})\hat{b}^\dagger\phi_B(\vec{r})\hat{b}\phi_B(\vec{r})\hat{b} \right] \\ &+ \int d\vec{r}g_{AB}\phi_A^*(\vec{r})\hat{a}^\dagger\phi_B^*(\vec{r})\hat{b}^\dagger\phi_A(\vec{r})\hat{a}\phi_B(\vec{r})\hat{b}. \end{aligned}$$

Definiendo

$$\hat{\omega}_k = \int d\vec{r}\phi_k^*(\vec{r})\hat{H}_{ok}\phi_k(\vec{r})$$

y

$$\hat{U}_{kl} = \frac{g_{kl}}{2} \int d\vec{r}|\phi_k(\vec{r})|^2|\phi_l(\vec{r})|^2,$$

y usando relaciones de conmutación (8.6), nos queda

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{\omega}_A \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{U}_{AA} \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) \hat{a} + \hat{\omega}_B \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{U}_{BB} \hat{b}^\dagger (\hat{b} \hat{b}^\dagger - 1) \hat{b} + 2\hat{U}_{AB} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &= \hat{\omega}_A \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{U}_{AA} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{U}_{AA} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\omega}_B \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{U}_{BB} \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{U}_{BB} \hat{b}^\dagger \hat{b} + 2\hat{U}_{AB} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &= (\hat{\omega}_A - \hat{U}_{AA}) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{U}_{AA} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + (\hat{\omega}_B - \hat{U}_{BB}) \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{U}_{BB} (\hat{b}^\dagger \hat{b})^2 + 2\hat{U}_{AB} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b},\end{aligned}$$

que es justamente lo que deseábamos demostrar. Notemos que $\phi_k(\vec{r})$ obedece la ecuación acoplada de Gross-Pitaevskii, por lo que $\hat{\omega}_k$ y \hat{U}_{kl} dependen del tiempo. El Hamiltoniano efectivo se reescribe usando los operadores de momento angular por medio de la representación de Schwinger siguiente [5]

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}), \quad (8.11)$$

$$\hat{J}_+ = \hat{a}^\dagger \hat{b} \quad (8.12)$$

y

$$\hat{J}_- = \hat{a} \hat{b}^\dagger, \quad (8.13)$$

donde el operador $2\hat{J}_z$ mide la diferencia de población entre los estados $|A\rangle$ y $|B\rangle$ y \hat{J}_\pm describe el tunelaje atómico entre los dos estados internos. El operador para el número total de átomos \hat{N} está dado por

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad (8.14)$$

que es una cantidad conservada. Usando (8.11), (8.12) y (8.13), el Hamiltoniano (8.8) se escribe como

$$\hat{H} = e(t) \hat{N} + E(t) \hat{N}^2 + \delta(t) \hat{J}_z + \chi(t) \hat{J}_z^2, \quad (8.15)$$

donde los coeficientes están dados por

$$\chi(t) = \hat{U}_{AA} + \hat{U}_{BB} - 2\hat{U}_{AB}, \quad (8.16)$$

$$e(t) = \frac{\hat{\omega}_A + \hat{\omega}_B - \hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB}}{2}, \quad (8.17)$$

$$E(t) = \frac{\hat{U}_{AA} + \hat{U}_{BB} + 2\hat{U}_{AB}}{4} \quad (8.18)$$

y

$$\delta(t) = \hat{\omega}_A - \hat{\omega}_B + (\hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB})(\hat{N} - 1). \quad (8.19)$$

Demostración: En la aproximación de un solo modo, cuya validez para calcular la compresión de espín esta verificada en [44,45], el Hamiltoniano está dado por (8.8). Consideremos la representación de Schwinger dada por (8.11), (8.12) y (8.13). Para demostrar que (8.8) y (8.15) son equivalentes, desarrollaremos (8.15) para llegar a (8.8). Calculamos cada término, tomando que $\hat{n}_A = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ y $\hat{n}_B = \hat{b}^\dagger \hat{b}$. El primero es

$$\begin{aligned}e(t) \hat{N} &= \left(\frac{\hat{\omega}_A + \hat{\omega}_B - \hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB}}{2} \right) (\hat{n}_A + \hat{n}_B) \\ &= \frac{\hat{\omega}_A}{2} (\hat{n}_A + \hat{n}_B) + \frac{\hat{\omega}_B}{2} (\hat{n}_A + \hat{n}_B) - \frac{\hat{U}_{AA}}{2} (\hat{n}_A + \hat{n}_B) - \frac{\hat{U}_{BB}}{2} (\hat{n}_A + \hat{n}_B).\end{aligned}$$

El segundo

$$\begin{aligned} E(t)\hat{N}^2 &= \left(\frac{\hat{U}_{AA} + \hat{U}_{BB} + 2\hat{U}_{AB}}{4} \right) (\hat{n}_A + \hat{n}_B)^2 \\ &= \left(\frac{\hat{U}_{AA} + \hat{U}_{BB} + 2\hat{U}_{AB}}{4} \right) (\hat{n}_A^2 + 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2). \end{aligned}$$

El tercero

$$\begin{aligned} \delta(t)\hat{J}_z &= (\hat{\omega}_A - \hat{\omega}_B + \hat{U}_{AA}\hat{N} - \hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB}\hat{N} + \hat{U}_{BB}) \left(\frac{\hat{n}_A + \hat{n}_B}{2} \right) \\ &= \frac{\hat{n}_A}{2}(\hat{\omega}_A - \hat{\omega}_B + \hat{U}_{AA}\hat{n}_A + \hat{U}_{AA}\hat{n}_B - \hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB}\hat{n}_A - \hat{U}_{BB}\hat{n}_B + \hat{U}_{BB}) \\ &\quad - \frac{\hat{n}_B}{2}(\hat{\omega}_A - \hat{\omega}_B + \hat{U}_{AA}\hat{n}_A + \hat{U}_{AA}\hat{n}_B - \hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB}\hat{n}_A - \hat{U}_{BB}\hat{n}_B + \hat{U}_{BB}). \end{aligned}$$

Por último, el cuarto término es

$$\begin{aligned} \chi(t)\hat{J}_z^2 &= (\hat{U}_{AA} + \hat{U}_{BB} - 2\hat{U}_{AB}) \left[\frac{(\hat{n}_A - \hat{n}_B)^2}{4} \right] \\ &= (\hat{U}_{AA} + \hat{U}_{BB} - 2\hat{U}_{AB}) \left(\frac{\hat{n}_A^2 - 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2}{4} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en (8.15)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{\omega}_A}{2}(\hat{n}_A + \hat{n}_B) + \frac{\hat{\omega}_B}{2}(\hat{n}_A + \hat{n}_B) - \frac{\hat{U}_{AA}}{2}(\hat{n}_A + \hat{n}_B) - \frac{\hat{U}_{BB}}{2}(\hat{n}_A + \hat{n}_B) \\ &\quad + \frac{\hat{U}_{AA}}{4}(\hat{n}_A^2 + 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2) + \frac{\hat{U}_{BB}}{4}(\hat{n}_A^2 + 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2) + \frac{\hat{U}_{AB}}{4}(\hat{n}_A^2 + 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2) \\ &\quad + \frac{\hat{n}_A}{2}(\hat{\omega}_A - \hat{\omega}_B + \hat{U}_{AA}\hat{n}_A + \hat{U}_{AA}\hat{n}_B - \hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB}\hat{n}_A - \hat{U}_{BB}\hat{n}_B + \hat{U}_{BB}) \\ &\quad - \frac{\hat{n}_B}{2}(\hat{\omega}_A - \hat{\omega}_B + \hat{U}_{AA}\hat{n}_A + \hat{U}_{AA}\hat{n}_B - \hat{U}_{AA} - \hat{U}_{BB}\hat{n}_A - \hat{U}_{BB}\hat{n}_B + \hat{U}_{BB}) \\ &\quad + \frac{\hat{U}_{AA}}{4}(\hat{n}_A^2 - 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2) + \frac{\hat{U}_{BB}}{4}(\hat{n}_A^2 - 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2) - \frac{\hat{U}_{AB}}{2}(\hat{n}_A^2 - 2\hat{n}_A\hat{n}_B + \hat{n}_B^2). \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{\omega}_A \left(\frac{\hat{n}_A}{2} + \frac{\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_A}{2} - \frac{\hat{n}_B}{2} \right) + \hat{\omega}_B \left(\frac{\hat{n}_A}{2} + \frac{\hat{n}_B}{2} - \frac{\hat{n}_A}{2} + \frac{\hat{n}_B}{2} \right) \\ &\quad + \hat{U}_{AA} \left(-\frac{\hat{n}_A}{2} - \frac{\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_A^2}{4} + \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_B^2}{4} + \frac{\hat{n}_A^2}{2} + \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} - \frac{\hat{n}_A}{2} - \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} - \frac{\hat{n}_B^2}{2} + \frac{\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_A^2}{4} - \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_B^2}{4} \right) \\ &\quad + \hat{U}_{BB} \left(-\frac{\hat{n}_A}{2} - \frac{\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_A^2}{4} + \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_B^2}{4} - \frac{\hat{n}_A^2}{4} - \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_A}{2} + \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_B^2}{2} - \frac{\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_A^2}{4} - \frac{\hat{n}_A\hat{n}_B}{2} + \frac{\hat{n}_B^2}{4} \right) \\ &\quad + \hat{U}_{AB} \left(\frac{\hat{n}_A^2}{2} + \hat{n}_A\hat{n}_B + \frac{\hat{n}_B^2}{2} - \frac{\hat{n}_A^2}{2} + \hat{n}_A\hat{n}_B - \frac{\hat{n}_B^2}{2} \right) \\ &= \hat{\omega}_A\hat{n}_A + \hat{\omega}_B\hat{n}_B + \hat{U}_{AA}(-\hat{n}_A + \hat{n}_A^2) + \hat{U}_{BB}(-\hat{n}_B + \hat{n}_B^2) + \hat{U}_{AB}(2\hat{n}_A\hat{n}_B) \\ &= \hat{\omega}_A\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\omega}_B\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{U}_{AA}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{U}_{AA}(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 - \hat{U}_{BB}\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{U}_{BB}(\hat{b}^\dagger\hat{b})^2 + 2\hat{U}_{AB}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} \\ &= (\hat{\omega}_A - \hat{U}_{AA})\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{\omega}_B - \hat{U}_{BB})\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{U}_{AA}(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + \hat{U}_{BB}(\hat{b}^\dagger\hat{b})^2 + \hat{U}_{AB}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}. \end{aligned}$$

Este último resultado es precisamente (8.8), por lo tanto, (8.8) y (8.15) son equivalentes. Notemos que el Hamiltoniano original (8.1) enreda los estados internos y de movimiento de los átomos, lo cual es una fuente de decoherencia para la compresión del espín.

8.2. Eje torcido a partir de la interacción átomo-campo con desintonización grande.

En esta sección, analizaremos el Hamiltoniano de un eje torcido de una colección de átomos de dos niveles interactuando con un campo con desintonización grande; este tema ha sido desarrollado en [47–51]. Consideremos un modelo ideal, una colección de N átomos de dos niveles situados en una cavidad. El Hamiltoniano del sistema entero es

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (8.20)$$

donde

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{J}_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (8.21)$$

y

$$\hat{H}_I = g(\hat{J}_+ \hat{a} + \hat{J}_- \hat{a}^\dagger). \quad (8.22)$$

Observemos que \hat{H}_0 describe la dinámica de los átomos y el campo libres, y \hat{H}_I es el término de interacción en la aproximación de onda rotante. Los operadores de espín $\hat{J}_{z,\pm}$ describen el sistema atómico; \hat{a} , \hat{a}^\dagger describe el campo en la cavidad y g es la constante de acoplamiento entre el átomo y el campo. Podemos ver del hamiltoniano que los átomos interactúan con el campo de la cavidad, sin que haya interacción directa entre los átomos. Sin embargo, bajo la condición de desintonización grande, es decir, cuando $\Delta = \omega_0 - \omega_c$ es muy grande comparado con g , $|\Delta| \gg g\sqrt{N}$, podemos utilizar la transformación de Fröich-Nakajima para obtener el Hamiltoniano efectivo que describe la interacción no lineal átomo-átomo. La transformación de Fröich-Nakajima está dada por [5]

$$\hat{H}_{\hat{S}} = e^{-\hat{S}} \hat{H} e^{\hat{S}}, \quad (8.23)$$

donde \hat{S} es del mismo orden que el término de interacción \hat{H}_I y está dado por

$$\hat{S} = \frac{g}{\Delta} (\hat{a}^\dagger \hat{J}_- - \hat{a} \hat{J}_+). \quad (8.24)$$

Desarrollando la transformación anterior hasta segundo orden en \hat{S} , obtenemos

$$\hat{H}_S = \hat{H}_0 + \frac{1}{2} [\hat{H}_I, \hat{S}]. \quad (8.25)$$

Demostración: El Hamiltoniano está dado por (8.20). Desarrollamos (8.23) usando el Lema de Hadamard

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\hat{S}} &= e^{\hat{S}} \hat{H} e^{\hat{S}} \\ &= e^{-\hat{S}} (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) e^{\hat{S}} \\ &= (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) + [-\hat{S}, \hat{H}_0 + \hat{H}_I] + \frac{1}{2!} [-\hat{S}, [-\hat{S}, \hat{H}_0 + \hat{H}_I]] + \frac{1}{3!} [-\hat{S}, [-\hat{S}, [-\hat{S}, \hat{H}_0 + \hat{H}_I]]] + \dots \end{aligned}$$

Si consideramos hasta segundo orden de \hat{S} obtenemos

$$\hat{H}_S = (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) + [-\hat{S}, \hat{H}_0 + \hat{H}_I] + \frac{1}{2!}[-\hat{S}, [-\hat{S}, \hat{H}_0 + \hat{H}_I]]. \quad (8.26)$$

Calculamos los conmutadores involucrados

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0, \hat{S}] &= [\omega_0 \hat{J}_z + \omega_c \hat{n}, (g/\Delta)(\hat{a}^\dagger \hat{J}_- \hat{a} \hat{J}_+)] \\ &= \frac{\omega_0 g}{\Delta} [\hat{J}_z, \hat{a}^\dagger \hat{J}_-] + \frac{\omega_c g}{\Delta} [\hat{n}, \hat{a}^\dagger \hat{J}_-] - \frac{\omega_0 g}{\Delta} [\hat{J}_z, \hat{a} \hat{J}_+] - \frac{\omega_0 g}{\Delta} [\hat{n}, \hat{a} \hat{J}_+]. \end{aligned}$$

Usando que $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ y que $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$, la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0, \hat{S}] &= \frac{\omega_0 g}{\Delta} \left([\hat{J}_z, \hat{a}^\dagger] \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger [\hat{J}_z, \hat{J}_-] \right) + \frac{\omega_c g}{\Delta} \left([\hat{n}, \hat{a}^\dagger] \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger [\hat{n}, \hat{J}_-] \right) \\ &\quad - \frac{\omega_0 g}{\Delta} \left([\hat{J}_z, \hat{a}] \hat{J}_+ + \hat{a} [\hat{J}_z, \hat{J}_+] \right) - \frac{\omega_c g}{\Delta} \left([\hat{n}, \hat{a}] \hat{J}_+ + \hat{a} [\hat{n}, \hat{J}_+] \right). \end{aligned}$$

Pero $[\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}$, $[\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$, $[\hat{J}_-, \hat{J}_+] = -2\hat{J}_z$, y $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$, así que

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0, \hat{S}] &= \frac{\omega_0 g}{\Delta} (-\hat{a}^\dagger \hat{J}_-) + \frac{\omega_c g}{\Delta} (\hat{a}^\dagger \hat{J}_-) - \frac{\omega_0 g}{\Delta} (\hat{a} \hat{J}_+) - \frac{\omega_c g}{\Delta} (-\hat{a} \hat{J}_+) \\ &= -\frac{(\omega_0 - \omega_c)}{\Delta} g \hat{a}^\dagger \hat{J}_- - \frac{(\omega_0 - \omega_c)}{\Delta} g \hat{a} \hat{J}_+. \end{aligned}$$

Pero la desintonización es $\Delta = \omega_o - \omega_c$, entonces la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0, \hat{S}] &= -\frac{\Delta g}{\Delta} \hat{a}^\dagger \hat{J}_- - \frac{\Delta g}{\Delta} \hat{a} \hat{J}_+ \\ &= -g(\hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \hat{a} \hat{J}_+) \\ &= -\hat{H}_I. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\hat{H}_0, \hat{S}] = -\hat{H}_I. \quad (8.27)$$

El otro conmutador involucrado es

$$\begin{aligned} [\hat{H}_I, \hat{S}] &= [g(\hat{J}_+ \hat{a} + \hat{J}_- \hat{a}^\dagger), (g/\Delta)(\hat{a}^\dagger \hat{J}_- - \hat{a} \hat{J}_+)] \\ &= \frac{g^2}{\Delta} [\hat{J}_+ \hat{a} + \hat{J}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{J}_- - \hat{a} \hat{J}_+] \\ &= \frac{g^2}{\Delta} ([\hat{J}_+ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{J}_-] - [\hat{J}_+ \hat{a}, \hat{a} \hat{J}_+] + [\hat{J}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{J}_-] - [\hat{J}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a} \hat{J}_+]). \end{aligned}$$

Calculamos cada conmutador

$$\begin{aligned} [\hat{J}_+ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{J}_-] &= [\hat{J}_+ \hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger [\hat{J}_+ \hat{a}, \hat{J}_-] \\ &= (\hat{J}_+ [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{J}_+, \hat{a}^\dagger] \hat{a}) \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger (\hat{J}_+ [\hat{a}, \hat{J}_-] + [\hat{J}_+, \hat{J}_-] \hat{a}) \\ &= \hat{J}_+ \hat{J}_- + 2\hat{a}^\dagger \hat{J}_z \hat{a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{J}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a} \hat{J}_+] &= [\hat{J}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{J}_+ + \hat{a} [\hat{J}_- \hat{a}^\dagger, \hat{J}_+] \\
 &= (\hat{J}_- [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + [\hat{J}_-, \hat{a}] \hat{a}^\dagger) \hat{J}_+ + \hat{a} (\hat{J}_- [\hat{a}^\dagger, \hat{J}_+] + [\hat{J}_-, \hat{J}_+] \hat{a}^\dagger) \\
 &= -\hat{J}_- \hat{J}_+ - 2\hat{a} \hat{J}_z \hat{a}^\dagger.
 \end{aligned}$$

Resulta obvio que

$$\begin{aligned}
 [\hat{J}_+ \hat{a}, \hat{a} \hat{J}_+] &= 0, \\
 [\hat{J}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{J}_-] &= 0.
 \end{aligned}$$

Usando estos resultados, el conmutador se escribe como

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}_I, \hat{S}] &= \frac{g^2}{\Delta} (\hat{J}_+ \hat{J}_- + 2\hat{a}^\dagger \hat{J}_z \hat{a} + \hat{J}_- \hat{J}_+ + 2\hat{a} \hat{J}_z \hat{a}^\dagger) \\
 &= \frac{g^2}{\Delta} [\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ + 2(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \hat{J}_z].
 \end{aligned}$$

Para reducir esta expresión, usamos que $\hat{a} \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1$, llegando a

$$[\hat{H}_I, \hat{S}] = \frac{g^2}{\Delta} [(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + 2(2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{J}_z].$$

Obtenidos los conmutadores, desarrollamos (8.26)

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I + [\hat{H}_0 + \hat{H}_I, \hat{S}] + \frac{1}{2!} [-\hat{S}, [\hat{H}_0 + \hat{H}_I, \hat{S}]] \\
 &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I + [\hat{H}_0, \hat{S}] + [\hat{H}_I, \hat{S}] + \frac{1}{2} [-\hat{S}, [\hat{H}_0, \hat{S}]] + \frac{1}{2} [-\hat{S}, [\hat{H}_I, \hat{S}]] \\
 &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I - \hat{H}_I + [\hat{H}_I, \hat{S}] + \frac{1}{2} [-\hat{S}, -\hat{H}_I] + \frac{1}{2} [-\hat{S}, [\hat{H}_I, \hat{S}]] \\
 &= \hat{H}_0 + [\hat{H}_I, \hat{S}] - \frac{1}{2} [\hat{H}_I, \hat{S}] - \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{H}_I, \hat{S}]] \\
 &= \hat{H}_0 + \frac{1}{2} [\hat{H}_I, \hat{S}] - \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{H}_I, \hat{S}]].
 \end{aligned}$$

Observemos que el tercer término es despreciable ya que contiene un factor proporcional a Δ^{-2} , por lo tanto

$$\hat{H}_S = \hat{H}_0 + \frac{1}{2} [\hat{H}_I, \hat{S}],$$

que es lo que queríamos mostrar. Sustituyendo el resultado del conmutador $[\hat{H}_I, \hat{S}]$ que fue calculado en el cuerpo de la demostración anterior, obtenemos [5]

$$\hat{H}_S = \hat{H}_0 - \eta [\hat{J}_z^2 - (2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{J}_z] \quad (8.28)$$

donde $\eta = g^2/\Delta$. Observemos que (8.28) contiene un término de un eje torcido \hat{J}_z^2 y un término de interacción dispersiva proporcional a $\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{J}_z$.

8.3. Hamiltoniano de dos ejes torcidos.

A pesar de que la compresión del espín se puede producir efectivamente mediante el modelo de un eje torcido, el ángulo de compresión óptimo depende de dos factores:

1. El tamaño del sistema.
2. Su evolución en el tiempo.

Este problema puede ser resuelto si la torsión es realizada en favor y en contra de las manecillas del reloj simultáneamente alrededor de dos ejes ortogonales en el plano normal a la dirección principal del espín. El estado inicial es $|J, -J\rangle$ y la torsión se efectúa alrededor de dos ejes en las direcciones $\theta = \pi/2$ y $\phi = \pm\pi/4$. Los operadores de espín se escriben como

$$\hat{J}_{\pi/2, \pi/4} = \cos(\pi/4)\hat{J}_x + \sin(\pi/4)\hat{J}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_x + \hat{J}_y), \quad (8.29)$$

$$\hat{J}_{\pi/2, -\pi/4} = \cos(\pi/4)\hat{J}_x - \sin(\pi/4)\hat{J}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_x - \hat{J}_y). \quad (8.30)$$

El Hamiltoniano de dos ejes torcidos se escribe como [1]

$$\hat{H}_{TAT} = \chi(\hat{J}_{\pi/2, \pi/4}^2 - \hat{J}_{\pi/2, -\pi/4}^2). \quad (8.31)$$

Otra forma de escribir esta expresión es

$$\hat{H}_{TAT} = \chi(\hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x). \quad (8.32)$$

Demostración: Calculamos

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\pi/2, \pi/4}^2 &= \left(\frac{\hat{J}_x + \hat{J}_y}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\hat{J}_x + \hat{J}_y}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2), \\ \hat{J}_{\pi/2, -\pi/4}^2 &= \left(\frac{\hat{J}_x - \hat{J}_y}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\hat{J}_x - \hat{J}_y}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}(\hat{J}_x^2 - \hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión para \hat{H}_{TAT} obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{TAT} &= \chi(\hat{J}_{\pi/2, \pi/4}^2 - \hat{J}_{\pi/2, -\pi/4}^2) \\ &= \frac{\chi}{2}(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2 - \hat{J}_x^2 + \hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x - \hat{J}_y^2) \\ &= \chi(\hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Es posible expresar (8.31) en términos de los operadores \hat{J}_+ y \hat{J}_- ,

$$\hat{H}_{TAT} = \frac{\chi}{2i}(\hat{J}_+^2 - \hat{J}_-^2). \quad (8.33)$$

Demostración: Usando que

$$\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2},$$

$$\hat{J}_y = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i},$$

y sustituyendo en (8.31),

$$\begin{aligned} \hat{H}_{TAT} &= \chi(\hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x) \\ &= \chi \left[\left(\frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \right) \left(\frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} \right) + \left(\frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} \right) \left(\frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\chi}{2i}(\hat{J}_+^2 - \hat{J}_-^2), \end{aligned}$$

que es la expresión deseada. Este Hamiltoniano es completamente análogo al Hamiltoniano que se usa para producir luz comprimida, y que crea y aniquila fotones en pares. Desafortunadamente, el modelo de dos ejes torcidos sólo puede resolverse analíticamente para $N \leq 3$. Hay dos principales ventajas que tiene el modelo de dos ejes torcidos sobre el de un eje torcido

1. El ángulo óptimo de compresión es invariante durante la evolución. Como la dirección principal de espín para el Hamiltoniano de dos ejes torcidos es a lo largo del eje Z , el ángulo óptimo de compresión está determinado por dos cantidades, $\langle \hat{J}_x^2 - \hat{J}_y^2 \rangle$ y $\langle \hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x \rangle$. Como

$$[\hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x, \hat{H}_{TAT}] = 0, \quad (8.34)$$

$\langle \hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x \rangle$ es invariante durante la evolución. Como el estado inicial es un estado coherente del espín, entonces $\langle \hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x \rangle = 0$. De esta forma, las direcciones de compresión óptima son $\phi = 0, \pi/2$.

2. El grado de compresión es alto. Los parámetros de compresión de espín son [5]

$$\xi_R^2 \propto \frac{1}{N}, \quad (8.35)$$

$$\xi_S^2 \propto \frac{1}{N}, \quad (8.36)$$

en el modelo de dos ejes torcidos. Por lo tanto, la fase de ruido se aproxima al límite de Heisenberg.

8.4. Parámetro de compresión de uno y dos ejes torcidos.

De acuerdo a [1], el parámetro de compresión ξ_S^2 es diferente para el caso de uno y dos ejes torcidos. Para el caso de un eje torcido

$$\xi_S^2 \propto \frac{1}{N^{2/3}}, \quad (8.37)$$

Al tener dos ejes torcidos, el parámetro de compresión es proporcional a

$$\xi_S^2 \propto \frac{1}{N}, \quad (8.38)$$

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de ξ_S^2 para diferentes valores de N para un eje torcido. Típicamente en los experimentos se consideran entre 10^4 y 10^9 partículas [5].

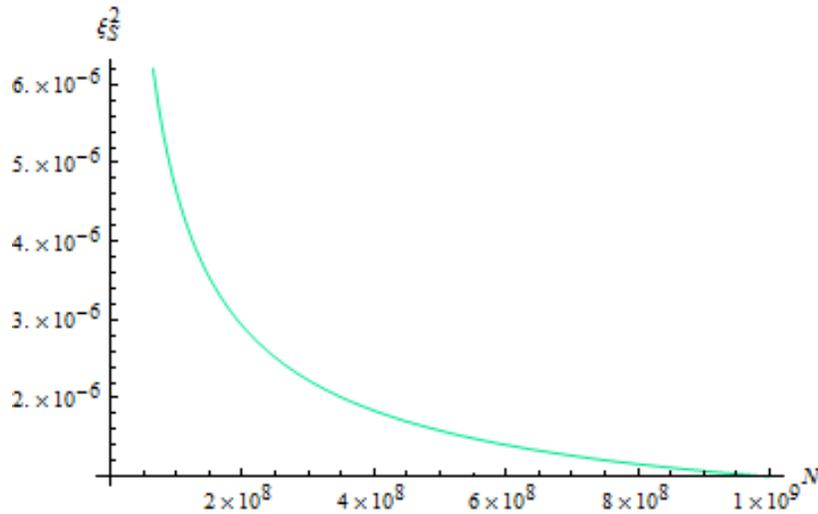


Figura 8.1: Variación del parámetro ξ_S^2 para el caso de un eje torcido.

Observemos ahora la Gráfica siguiente, la cual considera dos ejes torcidos.

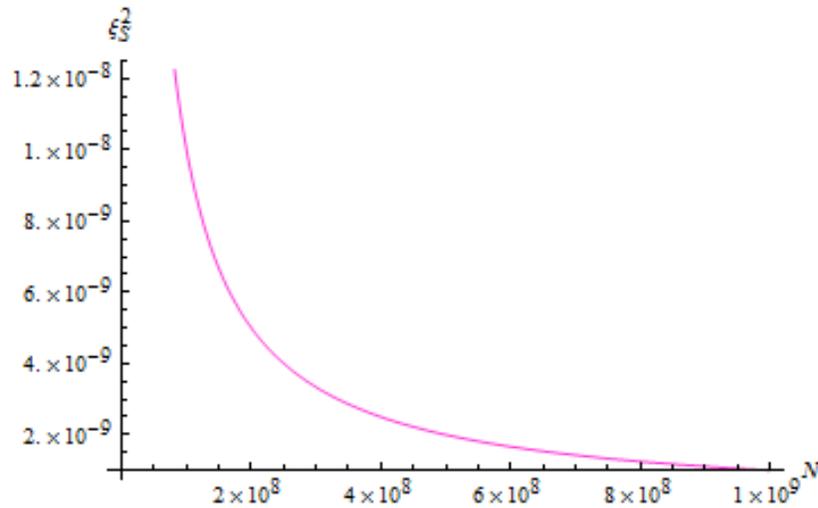


Figura 8.2: Variación del parámetro ξ_S^2 para dos ejes torcidos.

Al comparar estas gráficas, el parámetro de compresión asociado al Hamiltoniano de dos ejes torcidos es menor que el de un eje torcido, lo cual nos habla de un mayor grado de compresión.

Conclusiones.

En este trabajo se revisaron los aspectos básicos que envuelven la compresión de espín y a su vez, cómo funciona al aplicarlo al tema concreto de condensados de Bose-Einstein.

La compresión de espín surge como una analogía de la compresión bosónica de los fotones. Encontramos que al aplicar un operador de rotación a los estados de Dicke, los cuales son simplemente los estados usuales de momento angular y eigenestados del operador \hat{J}_z , obtenemos los estados coherentes de espín o estados de Bloch. Estos estados y los operadores involucrados en su descripción obedecen las propiedades que a continuación se enlistan:

1. Son definidos por un operador de transformación unitario actuando sobre el estado base.
2. Estos estados obedecen ecuaciones de eigenvalores.
3. Estos estados no son ortogonales y son sobrecompletos.
4. Se pueden construir relaciones de mínima incertidumbre para operadores que no conmutan.

Como se pudo observar, las definiciones de parámetro de compresión de espín son diferentes de acuerdo a la aplicación que se desee darles. Se encontró que algunos parámetros de compresión de espín, tales como ξ_H , $\xi_{H'}$ surgen de la idea de compresión bosónica, la cual se basa en el Principio de Incertidumbre de Heisenberg generalizado. Algunos surgieron de forma natural, tal como sucedió en los experimentos que realizó Wineland en espectroscopia Ramsey, donde el parámetro de compresión es la razón de las fluctuaciones entre un estado general y un estado de ruido de referencia. Por otra parte, algunos parámetros de compresión fueron definidos para detectar enredamiento, por ejemplo $\xi_{R'}^2$, el cual sirve como un criterio para el enredamiento multipartita, ya que ha sido demostrado que si se cumple que $\xi_{R'}^2 < 1$, el estado es enredado. El parámetro ξ_D^2 surgió a partir del estudio de los estado de Dicke y su utilidad radica en que si se cumple la condición $\xi_D^2 < 1$, el estado es comprimido.

Mediante la definición de Estado Coherente de Espín (CSS) y considerando que éste no es de espín comprimido, identificamos si la definición del parámetro de compresión propuesto era adecuado.

Con el objetivo de aplicar la compresión de espín a condensados de Bose-Einstein, debíamos asegurarnos de hacer una revisión exhaustiva a éstos. Concluimos que:

1. Por arriba de la temperatura crítica T_c , las partículas se distribuyen entre los estados de energía del sistema de acuerdo con la función de distribución de Bose-Einstein dada por (5.6).

2. A la temperatura T_c , ocurre una transición de fase y una fracción sustancial del número total de partículas se condensa en el estado $E = 0$.
3. Como las partículas no interactúan, sólo poseen energía cinética, y el estado $E = 0$ corresponde a la velocidad cero. Las partículas en el estado de velocidad cero son responsables de los fenómenos de bajas temperaturas asociados con la condensación de Bose-Einstein, como por ejemplo, la superfluidez.
4. La fracción de partículas en el estado superfluido está dado por (5.30), y cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto, la fracción se eleva a la unidad.

Otro tema importante al cual debíamos prestarle atención era al de la Segunda Cuantización. La segunda cuantización es un método muy práctico para tratar problemas cuánticos de muchos cuerpos, que nos permite cuantizar campos clásicos. Este formalismo es de vital importancia, ya que nos permitió escribir el Hamiltoniano de muchos cuerpos que describe N partículas interactuando con un potencial externo y un potencial de interacción partícula-partícula, el cual corresponde al Hamiltoniano de los condensados de Bose-Einstein. Este Hamiltoniano, en la descripción de Heisenberg, nos condujo a la Ecuación de Gross-Pitaevskii. Esta ecuación gobierna los condensados de Bose-Einstein en el régimen de bajas temperaturas.

Finalmente, se analizaron los Hamiltonianos de uno y dos ejes torcidos que permiten generar estados de espín comprimido. El Hamiltoniano de un eje torcido es uno de los modelos más importantes estudiados para generar compresión de espín tanto teórica como experimentalmente.

Si hablamos de mayor grado de compresión, éste lo obtenemos mediante el Hamiltoniano de dos ejes torcidos comparado con el de un eje torcido. El Hamiltoniano de dos ejes torcidos tiene algunas desventajas, como por ejemplo, no es de fácil implementación en los experimentos o los resultados analíticos no están disponibles para un sistema de tamaño arbitrario.

Ápndice A.- Cálculo de la varianza y el valor esperado del operador $\hat{J}_{\vec{n}}$ para un CSS.

La varianza se define como

$$(\Delta \hat{J}_\alpha)^2 = \langle \hat{J}_\alpha^2 \rangle - \langle \hat{J}_\alpha \rangle^2.$$

Calculamos cada valor esperado de la expresión anterior. Recordemos que los operadores colectivos de spin se definen de la siguiente forma

$$\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{i\alpha}.$$

Basados en este definición

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_\alpha^2 \rangle &= \langle \hat{J}_\alpha \hat{J}_\alpha \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{i\alpha} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{j\alpha} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \hat{\sigma}_{i\alpha} \hat{\sigma}_{j\alpha} \rangle. \end{aligned}$$

Separamos la doble suma de la siguiente forma

$$\langle \hat{J}_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=j=1}^N \langle \hat{\sigma}_{i\alpha} \hat{\sigma}_{j\alpha} \rangle + \sum_{i \neq j=1}^N \langle \hat{\sigma}_{i\alpha} \hat{\sigma}_{j\alpha} \rangle \right).$$

Se cumple que

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_i = 1,$$

por lo que $\langle \hat{J}_\alpha^2 \rangle$ se escribe como

$$\langle \hat{J}_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(N + \sum_{i \neq j=1}^N \langle \hat{\sigma}_{i\alpha} \hat{\sigma}_{j\alpha} \rangle \right).$$

Debido al intercambio de simetría

$$\langle \hat{J}_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{4} N + \frac{1}{4} N(N-1) \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle^2.$$

Ahora calculamos

$$\langle \hat{J}_\alpha \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle \hat{\sigma}_{i\alpha} \rangle = \frac{N}{2} \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle.$$

Sustituyendo resultados en la definición de varianza

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{J}_\alpha)^2 &= \frac{N}{4} + \frac{N(N-1)}{4} \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle^2 - \left(\frac{N}{2} \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle \right)^2 \\ &= \frac{N}{4} + \frac{N^2}{4} \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle^2 - \frac{N}{4} \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle^2 - \frac{N^2}{4} \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle^2 \\ &= \frac{N}{4} (1 - \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\Delta \hat{J}_\alpha)^2 = \frac{N}{4} (1 - \langle \hat{\sigma}_{1\alpha} \rangle^2).$$

Ahora consideremos un operador más general $\hat{J}_{\vec{n}}$

$$\hat{J}_{\vec{n}} = \vec{J} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_i \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{i\vec{n}}.$$

La varianza de $\hat{J}_{\vec{n}}$ se escribe como

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2 = \frac{N}{4} (1 - \langle \hat{\sigma}_{1\vec{n}} \rangle^2)$$

y

$$\langle \hat{J}_{\vec{n}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle \hat{\sigma}_{i\vec{n}} \rangle = \frac{N}{2} \langle \hat{\sigma}_{1\vec{n}} \rangle = \frac{N}{2} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n} \rangle.$$

El vector \vec{n}_0 se expresa en coordenadas esféricas

$$\langle \vec{\sigma}_1 \rangle = |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| \vec{n}_0 = |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Usando la expresión anterior, obtenemos

$$\langle \hat{J}_{\vec{n}} \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| \vec{n}_0 \cdot \vec{n}.$$

Luego

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2 &= \frac{N}{4} (1 - \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n} \rangle^2) \\ &= \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n})^2]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2 = \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n})^2].$$

Para las varianzas a lo largo de la dirección \vec{n}_\perp perpendicular a la dirección principal de espín

$$\begin{aligned}
 (\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 &= \frac{N}{4} (1 - \langle \sigma_{1\vec{n}_\perp} \rangle^2) \\
 &= \frac{N}{4} [1 - (\langle \vec{\sigma}_1 \rangle \cdot \vec{n}_\perp)^2] \\
 &= \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_\perp)^2] \\
 &= \frac{N}{4}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = \frac{N}{4}.$$

Apéndice B: Cálculo de los valores esperados $\langle \hat{J}_\alpha \rangle$ y las varianzas $(\Delta \hat{J}_\alpha)^2$ para $\alpha = x, y, z$.

Primero calcularemos los valores esperados. La siguiente expresión

$$\langle \hat{J}_{\vec{n}} \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| \vec{n}_0 \cdot \vec{n},$$

fue demostrada en el Apéndice A, donde

$$\langle \vec{\sigma}_1 \rangle = |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| \vec{n}_0 = |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Usando esta expresión, podemos hallar los valores esperados de los operadores \hat{J}_x , \hat{J}_y y \hat{J}_z .

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (1, 0, 0) = \frac{N}{2} \sin \theta \cos \phi,$$

$$\langle \hat{J}_y \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (0, 1, 0) = \frac{N}{2} \sin \theta \sin \phi$$

y

$$\langle \hat{J}_z \rangle = \frac{N}{2} |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (0, 0, 1) = \frac{N}{2} \cos \theta.$$

Por lo tanto

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \frac{N}{2} \sin \theta \cos \phi,$$

$$\langle \hat{J}_y \rangle = \frac{N}{2} \sin \theta \sin \phi$$

y

$$\langle \hat{J}_z \rangle = \frac{N}{2} \cos \theta.$$

Ahora deseamos calcular las varianzas usando la expresión ya demostrada

$$(\Delta \hat{J}_{\vec{n}})^2 = \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 (\vec{n}_0 \cdot \vec{n})^2].$$

Entonces

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{J}_x)^2 &= \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 ((\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (1, 0, 0))^2] \\ &= \frac{N}{4} [1 - (\sin \theta \cos \phi)^2] \\ &= \frac{N}{4} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{J}_y)^2 &= \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 ((\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (0, 1, 0))^2] \\
&= \frac{N}{4} [1 - (\sin \theta \sin \phi)^2] \\
&= \frac{N}{4} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{J}_z)^2 &= \frac{N}{4} [1 - |\langle \vec{\sigma}_1 \rangle|^2 ((\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (0, 0, 1))^2] \\
&= \frac{N}{4} [1 - \cos^2 \theta].
\end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, obtenemos

$$(\Delta \hat{J}_z)^2 = \frac{N}{4} \sin^2 \theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{J}_x)^2 &= \frac{N}{4} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi), \\
(\Delta \hat{J}_y)^2 &= \frac{N}{4} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi)
\end{aligned}$$

y

$$(\Delta \hat{J}_z)^2 = \frac{N}{4} \sin^2 \theta.$$

Bibliografía

- [1] M. Kitagawa and M. Ueda, Squeezed spin states, *Phys. Rev. A* 47, 5138 (1993).
- [2] D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W. M. Itano, F.L. Moore, D.J. Heinzen, Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy, *Phys. Rev. A* 46, R6797 (1992).
- [3] D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W. M. Itano, D.J. Heinzen, Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy, *Phys. Rev. A* 50, 67 (1994).
- [4] S. Thanvanthri, Z. Dutton, Spatial dynamics and spin squeezing in Bose-Einstein, *Phys. Rev. A* 75, 023618 (2007).
- [5] J. Ma, X. Wang, C.P Sun, F. Nori, Quantum Spin Squeezing, *Phys. Report* 509 (2011).
- [6] J. M. Radcliffe, Some Properties of coherent spin states, *J. Phys. A: Gen. Phys.* Vol. 4 (1971).
- [7] A.M. Peremolov, Generalized coherent states and their applications, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [8] X. Wang, B.C. Sanders, Relations between bosonic quadrature squeezing and atomic spin squeezing, *Phys. Rev. A* 68, 033821 (2003).
- [9] A. Lukš, V. Peřrinová, J. Perina, Principal squeezing of vacuum fluctuations, *Opt. Commun.* 67, 149-151 (1988).
- [10] K. Wódkiewicz, J. H. Eberly, Coherent states, squeezed fluctuations, and the SU(2) and SU(1,1) groups in quantum-optics applications, *J. Opt. Soc. Am. B* 2, 458-466 (1985).
- [11] M. Kitagawa, Y. Yamamoto, Number-phase minimum-uncertainty state with reduced number uncertainty in a Kerr nonlinear interferometer, *Phys. Rev. A* 34, 3974 (1986).
- [12] F.T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, Atomic coherent states in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 6:2211-2237 (1972).
- [13] R. H. Dicke, Coherence in spontaneous radiation processes, *Phys. Rev.*, 93:99 (1954).
- [14] M. Ban, Descomposition formulas for su(1,1) and su(2,2) Lie algebras and their applications in quantum optics, *J. Opt. Soc. Am B* 10, 1347-1359 (1993).
- [15] D.F. Walls and P. Zoller, Enhanced sensitivity of a gravitational-wave detector, *Phys. Lett. A* 85, 118 (1981).
- [16] D.F. Walls and P. Zoller, Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence, *Phys. Rev. Lett.* 47, 709 (1981).

- [17] H. Prakash, R. Kumar, Simultaneous squeezing of two orthogonal spin components, *J. Opt. B-Quantum Semiclassical Opt.* 7, S757 (2005).
- [18] H. Prakash, K. Kumar, R., Atomic squeezing in assembly of two-level atoms interacting with a single mode coherent radiation, *Eur. Phys. J. D* 42, 475 (2007).
- [19] H. Saito, M. Ueda, Number-phase-squeezed few-photon state generated from squeezed atoms, *Phys. Rev. A* 59, 3959 (1999).
- [20] A. Sørensen, L. Duan, J. Cirac, P. Zoller, Many-particle entanglement with Bose-Einstein condensates, *Nature* 409, 63 (2001).
- [21] S. Raghavan, H. Pu, P. Meystre, N. Bigelow, Generation of arbitrary Dicke states in spinor Bose-Einstein condensates, *Opt. Commun.* 188, 149 (2001).
- [22] G. Tóth, C. Knapp, O. Guehne, H. J. Briegel, Spin squeezing and entanglement, *Phys. Rev. A* 79, 042334 (2009).
- [23] D. H. Trevena, *Statistical Mechanics: An introduction*, Woodhead Publishing (2011).
- [24] F. Schwabl, *Statistical Mechanics*, Springer (2006).
- [25] L. García-Colín, *Introducción a la Termodinámica Clásica*, Ed. Trillas (2008).
- [26] M. Fox, *Quantum Optics: an Introduction*, Oxford University Press (2006).
- [27] F. Mandl, *Física Estadística*, Editorial Limusa (1979).
- [28] E. Hecht, *Óptica*, Addison-Wesley (2000).
- [29] J. J. Sakurai, J. J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (2010).
- [30] G. D. Mahan, *Many-particle physics*, Kluwer Academic (2000).
- [31] A. Altland, B. Simons, *Condensed matter field theory*, Cambridge (2010).
- [32] M. Hermele, Lecture Notes "Second Quantization", Course "Solid State Physics II", University of Colorado, Spring (2010).
- [33] L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).
- [34] H. Bruus, K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction*, Oxford University Press (2004).
- [35] M. Doi, Second quantization representation for classical many-particle system, *J. Phys.* A9 (1976).
- [36] P. Jordan, E. Wigner, Classical second quantization, *Z. Phys* 47, 631 (1928).
- [37] J. Rogel-Salazar, The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensates. *European Journal of Physics*, 34(2), 247 (2013).
- [38] L.D. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii. *Statistical Physics: Theory of the Condensed State*. Course of Theoretical Physics. Butterworth-Heinemann (1980).

- [39] L. Ferrari, Approaching Bose-Einstein condensation. *Eur. J. Phys.*, 32:1547 (2011).
- [40] R. P. H. Gasser, W.G. Richards, *An introduction to Statistical Thermodynamics*. World Scientific (1995).
- [41] P. Nozières, D. Pines, *The theory of quantum liquids: Superfluid Bose liquids*. Advance Book Classics. Addison-Wesley (1990).
- [42] S. Balibar. The discovery of superfluidity. *J. of Low Temp. Phys.*, 146(5/6):441, 207.
- [43] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, On the theory of Superconductivity. *Zh. Eksperim. I. Teor. Fiz.*, 20:1060, 1950. Collected papers of L.D. Landau, Pergamon Press, 546 (1965).
- [44] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, 71(3) (1999).
- [45] A. Sørensen, Bogoliubov, Theory of entanglement in a Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* 65, 043610 (2002).
- [46] U. Poulsen, K. Mølmer, Positive-P simulations of squeezing in a two-component condensate, *Phys. Rev. A* 64, 013616 (2001).
- [47] A. Klimov, C. Saavedra, The Dicke model dynamics in a high detuning limit, *Phys. Lett. A* 247, 14 (1998).
- [48] G. Agarwal, R. Puri, R. Singh, Atomic Schrödinger cat states, *Phys. Rev. A* 56, 2249 (1997).
- [49] D. Shindo, A. Chavez, S. Chumakov, A. Klimov, Dynamical squeezing enhancement in the off-resonant Dicke model, *J. Opt. B-Quantum Semiclassical Opt.* 6, 34 (2004).
- [50] R. Deb, M. Abdalla, S. Hassan, N. Nayak, Spin squeezing and entanglement in a dispersive cavity, *Phys. Rev. A* 73, 053817 (2006).
- [51] S. Chaudhury, S. Merkel, T. Herr, A. Silberfarb, I.H Deutsch, P. S. Jessen, Quantum control of the hyperfine spin of a Cs atom ensemble, *Phys. Rev. Lett.* 99, 163002 (2007).