



INAOE

*Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica*

Coordinación de óptica

***Propiedades físicas y estructurales de campos
plasmónicos***

Tesis

*Para obtener el grado de Doctor en ciencias con
especialidad en Óptica*

Presenta

M.C. Marco Antonio Torres Rodríguez

Director de tesis

Dr. Gabriel Constantino Martínez Niconoff

©INAOE 2018

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes mencionando la fuente.



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres Iris Rodríguez Fernández De Lara y Marco Antonio Torres Jiménez por el apoyo brindado durante la realización de esta tesis. A mi hermana Claudia Iris Torres Rodríguez y su esposo Carlos Villa Jiménez por su aliento en tiempos difíciles. A mi Abuela Iris Fernández De Lara Granada por su paciencia cuando el humor no era el mejor. Agradezco a mis amigos por su apoyo y manifestaciones de solidaridad en los momentos difíciles. A la familia de mi novia por aquellas pláticas interesantes acerca de mi trabajo. Por su puesto a Ana Luz Guzman Figueroa por todo el amor y paciencia que me ha brindado durante estos años juntos, le agradezco por su comprensión por los momentos que no nos llegamos a ver por consecuencia del intenso trabajo que realizaba en ese momento.

En memoria de Ernesto Rodríguez Rodríguez

INDICE

1. Introducción	4
1.1. Objetivo	5
1.2. Estructura de la tesis	5
2. Conceptos de Óptica plasmónica	5
2.1. Modos plasmónicos elementales	6
3. Propiedades físicas de campos plasmónicos	10
3.1. Polarización para campos plasmónicos	10
3.2. Descripción de la Polarización	10
3.3. Parámetros de Stokes	14
3.4. Plasmones superficiales parcialmente polarizados	16
3.5. Teoría de coherencia	19
3.5.1. Teoría de coherencia: caso vectorial	19
3.5.2. Propagación de correlaciones	23
4. Propiedades estructurales de campos plasmónicos	26
4.1. interacción entre funciones Pearcey	26
4.1.1. Interacción de Irradiancia entre regiones focales	26
4.1.2. Interacción de Amplitud	28
4.2. Interacciones plasmónicas de tipo Pearcey	32
4.2.1. Descripción del campo plasmónico	32
4.2.2. Descripción de regiones singulares plasmónicas	34
a) <i>Modelo de Huygens- Fresnel plasmónico</i>	34
b) <i>Función de catástrofe</i>	35
4.2.3. Interacción plasmónica cúspide- cúspide y sistema experimental	36
5. Implementación de campos plasmónicos: efecto fotoeléctrico plasmónico, procesos resonantes, modos plasmónicos superficiales curvos.	39
5.1 Efecto fotoeléctrico plasmónico	39
5.1.1 Propuesta teórica	40
5.2 Descripción de efectos resonantes y percolación en cúmulos de partículas inmersos en una distribución aleatoria de huecos	41
5.2.1 Descripción de la distribución de los cúmulos y el arreglo de huecos en una superficie metálica	42
5.2.2 Descripción de efectos de resonancia y percolación	43
5.3. Modos plasmónicos superficiales curvos	44
5.3.1. Análisis del plasmón partícula	45
5.3.2. Descripción de la interacción entre plasmones partícula	46
5.3.3. Descripción estadística de trayectorias de correlación	47
5.3.4. Descripción grafica e implementación experimental de la trayectoria de correlación	49
5.3.5. Generación de modos superficiales curvos	49
5.3.6. Propagación en un arreglo en tándem de películas delgadas metálicas	51
6. Conclusiones	53
7. Bibliografía	54
8. Apéndices	57

1. Introducción

El desarrollo de la óptica plasmónica ha tenido un avance altamente significativo por las potenciales aplicaciones, por ejemplo, en el desarrollo de metamateriales, espectroscopia Raman sintonizable, pinzas plasmónicas e implementación de guías ópticas plasmónicas, así como el desarrollo de sensores plasmónicos [1].

En el presente trabajo de tesis se establecen los fundamentos de la óptica plasmónica y dado su carácter vectorial se muestra que es posible establecer un modelo de polarización, el cual se puede completar con procesos de coherencia generando campos plasmonicos parcialmente coherentes y polarizados, el estudio se analiza a través de la propagación de correlaciones entre las funciones vectoriales del campo eléctrico. De esta forma, se establece una analogía entre óptica para ondas homogéneas con el estudio de los campos plasmónicos.

Una propiedad fundamental en plasmones parcialmente polarizados es que su análisis se genera mediante la proyección del campo eléctrico sobre tres planos mutuamente perpendiculares, lo cual permite establecer un conjunto de parámetros de Stokes asociados a cada plano, este enfoque permite describir efectos de polarización en partículas dieléctricas cuya estructura es similar a la de medios anisotrópicos. Para la descripción de los efectos de polarización parcial plasmónica se establece una analogía con los modelos de polarización para campos electromagnéticos propagándose en el espacio libre. Se encuentra la representación de los parámetros de Stokes para campos plasmónicos completamente coherentes y se extienden para campos interferidos parcialmente coherentes y polarizados. Dichas representaciones permiten establecer los fundamentos de la teoría de coherencia plasmónica por medio de la matriz de coherencia en donde cada término de dichas matrices son las correlaciones de los campos eléctricos constituyentes.

Para la descripción de las correlaciones plasmónicas se utiliza el modelo del espectro angular, con lo cual se prueba que las correlaciones se propagan como una onda. Un tópico de gran interés es la posibilidad de síntesis de las singularidades de polarización plasmónica, el cual ofrece aplicaciones para el desarrollo de pinzas plasmónicas. Las singularidades se generan por el hecho de que las correlaciones en amplitud de un campo plasmónico se propagan como una onda. Las singularidades se pueden encontrar desde la función de fase cuyo estudio tiene como soporte teórico el método de fase estacionaria.

El estudio de las singularidades ópticas es relevante debido a que pueden ser implementadas para generar interacciones de tipo cúspide o Pearcey mostrando que las regiones singulares actúan como fuentes para la generación de franjas de interferencia, además entre los puntos cúspides existe una interacción que produce un canal de Irradiancia. Este análisis se extiende a la interacción de regiones singulares tipo Pearcey aplicado a campos plasmónicos lo cual permite hacer una analogía con el efecto fotoeléctrico. Por otra parte, se estudia la resonancia de partículas inmersas en distribuciones de huecos aleatorios para generar efectos de percolación y localización. Como un modelo alternativo de interacción plasmónica se propone un análisis de arreglos de partículas pasando de un plasmón tipo partícula hacia la propagación de un plasmón superficial cuando dos o más partículas interactúan.

1.1 Objetivo

El objetivo de este trabajo de tesis es dar una descripción de los efectos de polarización utilizando como estructura prototipo los campos plasmónicos interferidos, además, dar una descripción de la teoría de coherencia parcial para estos campos. También analizar las regiones singulares de los campos plasmónicos, en particular, las de tipo cúspide. Este análisis se utiliza para describir la interacción de regiones cúspide de tipo Pearcey. De esta manera realizar una analogía con el efecto fotoeléctrico. Se quiere mostrar cómo interactúan partículas inmersas en cúmulos de huecos y la generación de plasmones superficiales curvos y de largo recorrido.

1.2 Estructura de la tesis

Para cumplir con el objetivo anteriormente descrito, la estructura de la tesis es la siguiente. En el capítulo 2 se establecen los conceptos fundamentales de un plasmón superficial.

En el capítulo 3 se describe la amplitud plasmónica generada por la interferencia entre dos modos plasmónicos y se establece una analogía con la teoría clásica de polarización. De esta forma, se identifican los parámetros susceptibles de ser controlados para implementar los procesos de polarización parcial plasmónica. Mediante la proyección del campo eléctrico sobre tres planos mutuamente perpendiculares se establece un conjunto de parámetros de Stokes, los cuales llevan la información de los efectos de coherencia parcial, los cuales se ven reflejados en las trayectorias de polarización. El modelo incluye los casos de campos plasmónicos totalmente coherentes y otro conjunto de parámetros de Stokes para campos plasmónicos parcialmente polarizados y coherentes.

En el capítulo 4 se analizan la interacción de regiones singulares de tipo cúspides o Pearcey, posteriormente se implementa a las regiones singulares plasmónicas a partir del modelo de Huygens-Fresnel y de la función de catástrofe.

En el capítulo 5 se hace un modelo acerca del efecto fotoeléctrico plasmónico. Se estudian efectos resonantes y percolación de cúmulos de partículas inmersas en arreglos de huecos aleatorios. Finalmente se hace un análisis de la generación de plasmones superficiales curvos.

En el capítulo 6 se enuncian las conclusiones generales y se bosqueja el trabajo futuro.

2. Conceptos de Óptica Plasmónica.

En este capítulo se establecen los fundamentos de la óptica plasmónica haciendo énfasis en la descripción de un modo plasmónico y se utiliza para establecer el modelo del espectro angular plasmónico. Se describen los conceptos de polarización y de la teoría de coherencia parcial, además, se encuentra la estructura de la matriz de coherencia. Finalmente se describen los conceptos de singularidades ópticas.

2.1 Modos Plasmónicos elementales

En esta sección se presenta una descripción general de qué es un plasmón superficial los cuales se utilizarán posteriormente para el estudio de polarización plasmónica. Estamos interesados en la descripción de ondas propagándose sobre una superficie metálica utilizando como medio de transporte los electrones libres los cuales se interpretan como un “mar” de electrones que corresponde a un plasma. La onda generada se conoce como un plasmón superficial [2].

El estudio de los plasmones superficiales se puede obtener desde las ecuaciones de *Maxwell*, lo cual es el punto de vista que se sigue en este trabajo de tesis. Los plasmones son importantes para describir las propiedades ópticas de los metales. Los plasmones de superficie son ondas no homogéneas cuya propagación está confinada a la superficie metálica [3], esto es, ocurren en la interfaz entre un dieléctrico y un metal.

Permiten explicar las anomalías en la difracción de una red de difracción metálica (Anomalía de *Wood*) y también son útiles en la espectroscopia *Raman* de superficie, entre otras aplicaciones. La resonancia de plasmones superficiales es utilizada en bioquímica [2].

Muchas investigaciones se han centrado en el rango de las microondas porque es posible diseñar mecánicamente superficies materiales con patrones del orden de algunos pocos centímetros que son útiles para estas longitudes de ondas. En cambio, crear plasmones superficiales en el rango óptico implica producir superficies con geometrías menores a los $400nm$.

Como se mencionó anteriormente los plasmones se propagan en la interface entre dos medios distintos, uno es un dieléctrico con una permitividad ϵ_1 y el otro es un metal con permitividad ϵ_2 , como se muestra en la Fig.2.1. Se desea una onda en una interface metal-dieléctrico con dirección de propagación z y un coeficiente de atenuación α en la dirección x .

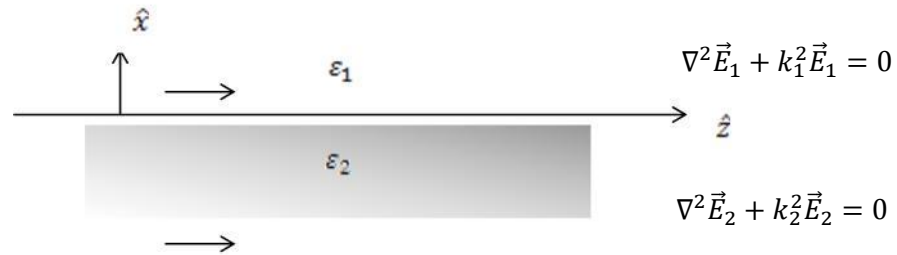


Fig.2.1: Esquema de dos campos propagándose en dirección \hat{z} , uno propagándose en un dieléctrico con permitividad ϵ_1 , mientras que el otro en un metal con permitividad ϵ_2 .

Los dos campos electromagnéticos en cada medio se modelan como [2]:

$$\vec{E}_1(x, z) = \exp\{i\beta_1 z\} \exp\{-\alpha_1 x\} (a_1 \hat{i} + b_1 \hat{k}) \tag{2.1}$$

$$\vec{E}_2(x, z) = \exp\{i\beta_2 z\} \exp\{-\alpha_2 x\} (a_2 \hat{i} + b_2 \hat{k}) ; \tag{2.2}$$

la estructura anterior satisface la ecuación de *Helmholtz*.

En donde, β_1 es el término que describe la propagación del campo en el dieléctrico y β_2 es el término que describe la propagación del campo en el metal, α_i es el factor de decaimiento, a_i y b_i son las amplitudes de los campos en las componentes en las direcciones \hat{i} y \hat{k} respectivamente. \vec{E}_1 y \vec{E}_2 están relacionados por las condiciones de frontera entre el dieléctrico y el metal [2].

El problema consiste en relacionar $\beta_i, \alpha_i, a_i, b_i ; i = 1,2$, con las propiedades del medio. Usando las condiciones de frontera tenemos que [4]:

$$E_{1T} = E_{2T} ; \text{ en } x = 0 \text{ y } z \text{ arbitrario,}$$

entonces:

$$b_1 = b_2 . \quad (2.2a)$$

De la condición de frontera para las componentes normales tenemos que:

$$\varepsilon_1 E_{1N} = \varepsilon_2 E_{2N} , \quad (2.2b)$$

de donde:

$$\varepsilon_1 a_1 = \varepsilon_2 a_2 , \quad (2.1.2c)$$

por lo tanto:

$$a_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a_1 . \quad (2.2d)$$

La relación (2.2d) nos dice que las componentes normales de los campos están relacionadas debido a que estamos estudiando una interface dieléctrico-metal y es natural que sus amplitudes en la dirección normal se mantengan solo que estando una de ellas escalada por las permitividades de los campos.

De las condiciones de frontera y de condición de amarre de fase [2], los términos que describen la propagación de los campos tanto en el dieléctrico como en el metal, β_1 y β_2 respectivamente, son iguales en la interface, de lo contrario un campo se atrasaría respecto del otro, es decir, llevan la misma velocidad.

Ahora bien, la onda superficial en cada medio toma la forma:

$$\vec{E}_1(x, z) = \exp\{i\beta z\} \exp\{-\alpha_1 x\} (a\hat{i} + b\hat{k}) \quad (2.3)$$

$$\vec{E}_2(x, z) = \exp\{i\beta z\} \exp\{-\alpha_2 x\} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a \hat{i} + b \hat{k} \right). \quad (2.4)$$

Supongamos medios libres de carga, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{E}_2 = 0; \quad (2.5)$$

entonces tenemos que:

$$(-a\alpha_1 + ib\beta) \exp\{-\alpha_1 x\} \exp\{i\beta z\} = 0, \quad (2.6)$$

$$\left(-a\alpha_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + ib\beta \right) \exp\{-\alpha_2 x\} \exp\{i\beta z\} = 0, \quad (2.7)$$

de las ecuaciones (2.6,2.7) encontramos que:

$$\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha_1, \quad (2.8)$$

usando la ecuación (2.8) en la ecuación (2.4) encontramos que el campo \vec{E}_2 se escribe de la siguiente forma:

$$\vec{E}_2(x, z) = \exp\{i\beta z\} \exp\left\{-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha x\right\} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a \hat{i} + b \hat{k} \right). \quad (2.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.3) y (2.9) en la ecuación de *Helmholtz* y haciendo primero el análisis para la componente en dirección \hat{i} se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial z^2} + k_1^2 \vec{E}_1 = 0, \quad k_1^2 = k_0^2 \varepsilon_1 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial z^2} + k_2^2 \vec{E}_2 = 0, \quad k_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 \quad (2.11)$$

entonces:

$$\alpha^2 - \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_2 = 0 \quad (2.12)$$

Para la componente en dirección \hat{k} del campo \vec{E}_2 tenemos que:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha^2 - \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_2 = 0, \quad (2.13)$$

Sustituyendo la primera ecuación de las ecuaciones (2.12) en la (2.13) podremos obtener el resultado deseado.

$$\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}(\beta^2 - k_0^2 \varepsilon_1) - \beta^2 + k_0^2 \varepsilon_2 = 0 , \quad (2.14)$$

entonces:

$$\beta^2 \left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - 1 \right) + k_0^2 \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} \right) = 0 \quad (2.15)$$

de aquí que:

$$\beta^2 = \frac{k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} - \varepsilon_2 \right)}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - 1 \right)} , \quad (2.16)$$

haciendo el álgebra correspondiente con la ecuación (2.16) el resultado queda como:

$$\beta^2 = \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) k_0^2 \quad \text{con } k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (2.17)$$

por lo tanto:

$$\beta = k_0 \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2} . \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) es la relación de dispersión la cual es continua sobre la interface ya que de no serlo los campos tendrían entre ellos un retraso [2].

Supongamos que $\varepsilon_1 > 0$, para metales tenemos que $\varepsilon_2 = \xi + i\eta$ y si $\xi < 0$ y $|\xi| > \varepsilon_1$ la onda resultante adquiere la forma de una onda plasmónica. Se tiene entonces que β es un número complejo dadas las propiedades de los materiales.

Se cumple que $\left| \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2} \right| > 1$ entonces $|\beta| > \frac{\omega}{c} = k_0$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ entonces $\beta > k_0$.

De lo anteriormente expuesto se tiene que el plasmón es una onda no radiativa y por lo tanto el proceso inverso de una onda con vector de onda k_0 incidiendo sobre una superficie metálica plana no puede excitar al plasmón. Una consecuencia de que la relación de dispersión sea compleja, es que la distancia de propagación en medios semi-infinitos es corta, aproximadamente $10 \mu m$, lo cual es una limitante para la implementación de la óptica plasmónica. Este último punto se puede resolver utilizando películas delgadas de espesor del orden de $20 - 100 nm$.

3. Propiedades estructurales de Campos Plasmonicos

Polarización es el análisis de las componentes escalares del campo eléctrico como función de amplitudes y fases relativas, esto sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación. Esta es una característica que presentan las ondas vectoriales [1,6].

3.1 Polarización para campos plasmónicos

Los plasmones superficiales elementales (**Sp**) son ondas no homogéneas generadas por oscilaciones coherentes de electrones libres de los metales [2,3]. Una propiedad genérica que presentan los campos vectoriales es la polarización, ésta es el análisis de las componentes escalares del campo eléctrico como función de la amplitud y la fase relativa en un plano perpendicular a la dirección de propagación [3,4,5].

Para describir sus propiedades físicas es necesaria una representación vectorial, como consecuencia, las propiedades de polarización son introducidas en una manera similar a las de ondas propagándose en el espacio libre. Sin embargo, se deben notar algunas diferencias físicas, una de ellas es que la trayectoria del campo eléctrico comparte el mismo plano con el vector de *Poynting*.

Además, cada componente del campo eléctrico del **Sp** está ligada con las ecuaciones de *Maxwell*, esto significa que no se pueden introducir o manipular términos de fase sobre cada componente, es decir, para los **Sp** los parámetros de polarización están mezclados y la trayectoria no puede ser modificada en el sentido de que no se distingue un parámetro que nos ayude a controlar la polarización del plasmón superficial.

3.2 Descripción de la polarización

En el capítulo anterior hemos descrito a los plasmones elementales, sin embargo, para describir la polarización plasmónica es necesario tener una expresión alterna que nos ayude a entender la idea de la polarización de los plasmones.

De manera análoga al tratamiento clásico de polarización en los campos electromagnéticos más comunes, partiremos de la superposición de dos plasmones superficiales elementales [2], uno en el plano $x - z$ cuya dirección de propagación es la dirección z y otro al cual se le hace una rotación alrededor del eje x , lo que nos dará dos plasmones superficiales rotados un ángulo θ .

Las oscilaciones de los electrones libres son generadas en una interface que conecta dos medios, las expresiones para el campo eléctrico en cada medio asociado al **Sp** y suponiendo que se propaga a lo largo de la dirección z se escribe como:

$$\vec{E}_1 = \left(a\hat{i} + \frac{a\alpha_1}{i\beta}\hat{k} \right) \exp\{i(\beta z - wt)\} \exp\{-\alpha_1 x\} \quad x \geq 0; \quad (3.1)$$

$$\vec{E}_2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a\hat{i} - \frac{\varepsilon_1 a \alpha_2}{\varepsilon_2 i \beta} \hat{k} \right) \exp\{i(\beta z - wt)\} \exp\{+\alpha_2 x\} \quad x < 0, \quad (3.2)$$

En esta representación $\varepsilon_{1,2}$ son la constante dieléctrica de cada medio, a es una constante que describe la amplitud del **Sp**, β es la relación de dispersión y $\alpha_{1,2}$ son los parámetros que nos indican cómo se va a atenuar el plasmón superficial. Debemos obtener una expresión alterna de la ecuación (3.1) debido a que $\beta = c + id$.

Entonces:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{id}{c^2+d^2} \quad (3.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3) en la ecuación (3.1) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \left(a\hat{i} + \hat{k} a \alpha \left(\frac{ic}{c^2+d^2} + \frac{d}{c^2+d^2} \right) \right) \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)z\} \exp\{(iRe\beta)z\} \\ &= a\hat{i} + \hat{k} a \alpha \left(\frac{iRe\beta}{|\beta|^2} + \frac{Im\beta}{|\beta|^2} \right) \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)z\} \exp\{i(Re\beta)z\} \\ &= \left(a\hat{i} + \hat{k} \frac{a\alpha}{|\beta|^2} (iRe\beta + Im\beta) \right) \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)z\} \exp\{i(Re\beta)z\} \\ &= a \left(\hat{i} + \hat{k}(\xi + i\eta) \right) \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)z\} \exp\{i(Re\beta)z\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\xi = \frac{a\alpha}{|\beta|^2} Im\beta$, $\eta = \frac{a\alpha}{|\beta|^2} Re\beta$.

La ecuación (3.4) es la expresión para el campo sin haberle realizado la rotación, el campo rotado queda como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1R} &= a \left[\left(\hat{i} + (\hat{k} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta) (\xi + i\eta) \right) \exp\{-\alpha x\} \right. \\ &\quad \times \left. \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\} \right] \\ &= a \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\} \\ &\quad \times \left(\hat{i} + \hat{j} \sin \theta (\xi + i\eta) + \hat{k} \cos \theta (\xi + i\eta) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

El campo rotado a un ángulo $-\theta$ es:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{2R}} &= a \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta - y \sin \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta - y \sin \theta)\} \\ &\times (\hat{i} - \hat{j} \sin \theta (\xi + i\eta) + \hat{k} \cos \theta (\xi + i\eta))\end{aligned}\quad (3.6)$$

Estamos ahora interesados por la suma entre los plasmones dados por las ecuaciones (3.5) y (3.6), lo cual lo hacemos por componentes indicadas en los subíndices de cada suma:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{E_{1R}} + \overrightarrow{E_{2R}})_i &= i[a \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta - y \sin \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta - y \sin \theta)\} \\ &+ a \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\}] \\ &= i a \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta)\} \\ &\times [\exp\{(Im\beta)(y \sin \theta)\} \exp\{-i(Re\beta)(y \sin \theta)\} \\ &+ \exp\{(-Im\beta)(y \sin \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(y \sin \theta)\}].\end{aligned}\quad (3.7)$$

Si en la ecuación (3.7) usamos la aproximación paraxial, el término que contiene a la parte imaginaria de β se vuelve muy pequeño en comparación con la parte real, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{E_{1R}} + \overrightarrow{E_{2R}})_i &= 2i a \exp\{-\alpha x\} \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta)\} \\ &\times \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta)\} \cos[(Re\beta)y \sin \theta]\end{aligned}\quad (3.8)$$

Ahora bien, la componente \hat{j} esta dada por:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{E_{1R}} + \overrightarrow{E_{2R}})_j &= \hat{j} a \exp\{-\alpha x\} [(\xi + i\eta) \sin \theta \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\} \\ &\times \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta + y \sin \theta)\} - (\xi + i\eta) \sin \theta \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta - y \sin \theta)\} \\ &\times \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta - y \sin \theta)\}] \\ &= \hat{j} a \exp\{-\alpha x\} (\xi + i\eta) \sin \theta \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta)\} \exp\{(-Im\beta)(z \cos \theta)\} \\ &\times [\exp\{(-Im\beta)(y \sin \theta)\} \exp\{i(Re\beta)(y \sin \theta)\} \\ &- \exp\{(Im\beta)(y \sin \theta)\} \exp\{-i(Re\beta)(y \sin \theta)\}].\end{aligned}\quad (3.9)$$

Aplicando la misma aproximación que la de la ecuación (3.7) a la ecuación (3.9) obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} (\overline{E_{1R}} + \overline{E_{2R}})_j &= 2j\hat{a}\exp\{-\alpha x\}(\xi + i\eta) \sin \theta \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta)\} \\ &\times \exp\{-Im\beta\}(z \cos \theta)\} \sin[(Re\beta)y \sin \theta] \end{aligned} \quad (3.10)$$

La componente \hat{k} esta dada por:

$$\begin{aligned} (\overline{E_{1R}} + \overline{E_{2R}})_{\hat{k}} &= \hat{k}a\exp\{-\alpha x\}(\xi + i\eta) \cos \theta \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta)\}\exp\{-Im\beta\}(z \cos \theta)\} \\ &\times [\exp\{-Im\beta\}(y \sin \theta)\}\exp\{i(Re\beta)(y \sin \theta)\} \\ &+ \exp\{Im\beta\}(y \sin \theta)\}\exp\{-i(Re\beta)(y \sin \theta)\}] . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aplicando la aproximación paraxial:

$$\begin{aligned} (\overline{E_{1R}} + \overline{E_{2R}})_{\hat{k}} &= 2\hat{k}a\exp\{-\alpha x\}(\xi + i\eta) \cos \theta \exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta)\} \\ &\times \exp\{-Im\beta\}(z \cos \theta)\} \cos[(Re\beta)y \sin \theta] . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sobre las ecuaciones (3.12) y (3.10) introducimos una nueva notación como sigue:

$$\begin{aligned} (\xi + i\eta) &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \exp\left\{i \tan^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\right\} = W \exp\{i\delta_z\} \\ i(\xi + i\eta) &= W \exp\{i\delta_y\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.13) en (3.12) y (3.10) tenemos entonces la expresión completa para la suma de los campos expresado en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \overline{E_T} &= \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 2a\exp\{-\alpha x\}\exp\{i(Re\beta)(z \cos \theta)\} \\ &\times \exp\{-Im\beta\}(z \cos \theta)\} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ W \sin \theta \sin \Omega \exp\{i\delta_y\} \\ W \cos \theta \cos \Omega \exp\{i\delta_z\} \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (3.14)$$

dónde $\Omega = \Omega(y, \theta) = (Re\beta)y \sin \theta$. Cabe notar que cuando $\theta = 0$ se recupera la estructura original (3.4).

La expresión (3.14) determina la distribución de amplitud del campo plasmónico, así mismo con la ecuación (3.14) se quiere describir la trayectoria del campo. Para esto se definirán elipses de polarización para los planos $x - y$, $x - z$, $y - z$ y sus respectivos parámetros de Stokes.

3.3 Parámetros de Stokes

Usando la ecuación (3.14) proponemos escribir el vector de Jones como:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ W \sin \theta \sin \Omega \exp\{i\delta_y\} \\ W \cos \theta \cos \Omega \exp\{i\delta_z\} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Analizando la proyección del vector de Jones sobre cada plano y siguiendo el tratamiento clásico de polarización [4], definimos tres trayectorias para el campo eléctrico en cada plano, los parámetros de Stokes son rápidamente identificados.

1) En el plano $(x - y)$, la trayectoria del campo eléctrico es:

$$\left(\frac{E_x}{\cos \Omega}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{W \sin \theta \sin \Omega}\right)^2 - \left(\frac{2E_x E_y}{W \cos \Omega \sin \theta \sin \Omega}\right) \cos \delta_y = (\sin \delta_y)^2, \quad (3.16)$$

y los correspondientes parámetros de Stokes son:

$$S_{0xy} = (\cos \Omega)^2 + W^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2 \quad (3.17)$$

$$S_{1xy} = (\cos \Omega)^2 - W^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2 \quad (3.18)$$

$$S_{2xy} = 2W \cos \Omega \sin \theta \sin \Omega \cos \delta_y \quad (3.19)$$

$$S_{3xy} = 2W \cos \Omega \sin \theta \sin \Omega \sin \delta_y. \quad (3.20)$$

Se debe notar que los parámetros de Stokes son dependientes de la coordenada y . El caso más simple puede ser identificado cuando $y = 0$, entonces, los valores de los parámetros de Stokes son:

$$(S_{0xy} \quad S_{1xy} \quad S_{2xy} \quad S_{3xy})_{y=0} = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0). \quad (3.21)$$

Esto significa que el orden cero de las franjas de interferencia tiene polarización lineal, siendo el campo eléctrico perpendicular al plano $(y - z)$.

2) En el plano $(x - z)$, la trayectoria es:

$$\left(\frac{E_x}{\cos \Omega}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{W \cos \theta \cos \Omega}\right)^2 - \left(\frac{2E_x E_z}{W \cos \theta (\cos \Omega)^2}\right) \cos \delta_z = (\sin \delta_z)^2, \quad (3.22)$$

los parámetros de *Stokes* están dados por:

$$S_{0xz} = (\cos \Omega)^2 + W^2 (\cos \theta)^2 (\cos \Omega)^2 \quad (3.23)$$

$$S_{1xz} = (\cos \Omega)^2 - W^2 (\cos \theta)^2 (\cos \Omega)^2 \quad (3.24)$$

$$S_{2xz} = 2W (\cos \Omega)^2 \cos \theta \cos \delta_z \quad (3.25)$$

$$S_{3xz} = 2W (\cos \Omega)^2 \cos \theta \sin \delta_z. \quad (3.26)$$

En $y = 0$, los valores de los parámetros de *Stokes* son:

$$(S_{0xz} \quad S_{1xz} \quad S_{2xz} \quad S_{3xz})_{y=0} = (1 + W^2 (\cos \theta)^2 \quad 1 - W^2 (\cos \theta)^2 \quad 2W \cos \theta \cos \delta_z \quad 2W \cos \theta \cos \delta_z). \quad (3.27)$$

Lo cual significa que el orden cero de las franjas de interferencia tiene polarización elíptica [4,8].

3) En el plano $(y - z)$, la trayectoria es:

$$\left(\frac{E_y}{W \sin \theta \sin \Omega}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{W \cos \theta \cos \Omega}\right)^2 - \left(\frac{2E_y E_z}{W^2 \sin \theta \sin \Omega \cos \theta \cos \Omega}\right) \cos \delta_z = (\sin \delta_z)^2, \quad (3.28)$$

los parámetros de *Stokes* son:

$$S_{0yz} = W^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2 + W^2 (\cos \theta)^2 (\cos \Omega)^2 \quad (3.29)$$

$$S_{1yz} = W^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2 - W^2 (\cos \theta)^2 (\cos \Omega)^2 \quad (3.30)$$

$$S_{2yz} = 2W^2 \sin \theta \sin \Omega \cos \theta \cos \Omega \cos \delta_z \quad (3.31)$$

$$S_{3yz} = 2W^2 \sin \theta \sin \Omega \cos \theta \cos \Omega \sin \delta_z. \quad (3.32)$$

En $y = 0$, los parámetros son:

$$(S_{0yz} \quad S_{1yz} \quad S_{2yz} \quad S_{3yz})_{y=0} = (W^2 (\cos \theta)^2 \quad -W^2 (\cos \theta)^2 \quad 0 \quad 0). \quad (3.33)$$

Esto significa que el campo eléctrico tiene polarización lineal a lo largo de la coordenada z . En el *apéndice B* se muestra que cada conjunto de parámetros de Stokes satisface la relación:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (3.34)$$

que se satisface para campos plasmónicos completamente coherentes y polarizados.

Finalmente remarcamos que cada conjunto de parámetros de *Stokes* depende de los parámetros (y, θ) [7]. Como una conclusión parcial, tenemos que un plasmón superficial elemental tiene fija su polarización, sin embargo, la interferencia entre dos de ellos presenta propiedades similares a los campos ópticos polarizables clásicos. El estado de polarización es descrito proyectando el campo eléctrico sobre tres planos mutuamente perpendiculares.

3.4 Plasmones superficiales parcialmente polarizados

El conjunto de parámetros de *Stokes* para haces interferidos son dependientes de los parámetros (y, θ) . El campo plasmónico proyectado sobre cada plano tiene asociado una familia de esferas de *Poincare*, ya que los parámetros de Stokes son dependientes de los parámetros (y, θ) .

De esta representación es posible incorporar efectos de polarización parcial que están implícitos en la matriz de coherencia asociada a cada plano. La estructura de la matriz de coherencia en términos de los parámetros de *Stokes* es [8]:

$$J = \begin{pmatrix} \langle \frac{S_0 + S_1}{2} \rangle & \langle \frac{S_2 + iS_3}{2} \rangle \\ \langle \frac{S_2 - iS_3}{2} \rangle & \langle \frac{S_0 - S_1}{2} \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.4.1)$$

donde los paréntesis triangulares representan el valor medio. Este se obtiene usando la relación siguiente:

$$\langle S_i \rangle = \int S_i(y, \theta) \rho(\theta) d\theta = M_i(y); i = 1, 2, 3, \quad (3.4.2)$$

con $\rho(\theta)$ la función de densidad de probabilidad.

Para el experimento, proponemos usar una película delgada de oro que contiene dos aberturas [9,10] depositado en un material elástico, aplicando una fuerza aleatoria paralela al eje que conecta las aberturas controlamos la separación relativa entre ellas generando el ensamble de **Spc**. El sistema óptico para generar la interferencia se muestra en la Fig. 3.1, donde la gota de aceite, de índice de refracción $n = 2.1$ actúa como una lente generando la suma entre dos **Sp** [11].

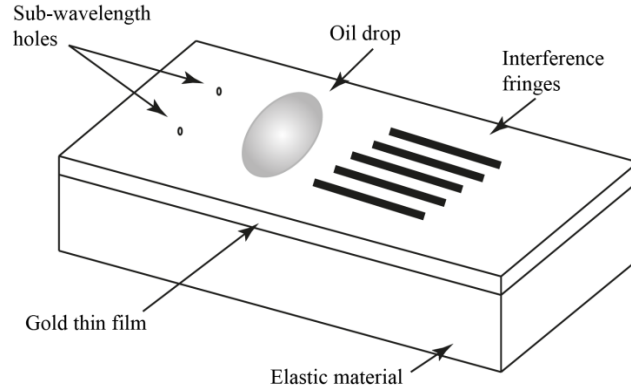


Fig. 3.1. Sistema experimental propuesto para generar la convergencia incoherente de **SPC**. El ancho de la película delgada de oro es de 40 nm puesta sobre un material elástico. La posición relativa entre las aberturas está en el intervalo de $5 - 15 \text{ nm}$ y es controlada aplicando una fuerza aleatoria.

Como un ejemplo consideramos el caso cuando la función de densidad de probabilidad $\rho(\theta)$ es uniforme en el intervalo $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$. Del *apéndice C*, para este caso, los parámetros de Stokes dados por las Eqs. [3.3.3-3.3.18] en términos de la función *Bessel* [12] adquieren la siguiente forma:

1) Sobre el plano $(x - y)$:

$$\langle S_{0xy} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{W^2}{4} \right) J_0(2hy) + \frac{W^2}{4} J_2(2hy) \quad (3.4.3)$$

$$\langle S_{1xy} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{W^2}{4} \right) J_0(2hy) - \frac{W^2}{4} J_2(2hy) \quad (3.4.4)$$

$$\langle S_{2xy} \rangle = 2W \cos(\delta_y) J_1(2hy) \quad (3.4.5)$$

$$\langle S_{3xy} \rangle = 2W \sin(\delta_y) J_1(2hy) . \quad (3.4.6)$$

En general, la polarización promedio en el plano $(x - y)$ corresponde a polarización elíptica, conteniendo el caso de polarización lineal el cual ocurre cuando $y = 0$.

2) Sobre el plano $(x - z)$:

$$\langle S_{0xz} \rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{W^2}{4} \right) J_0(2hy) + \frac{W^2}{4} J_2(2hy) + \frac{1}{2} + \frac{W^2}{4} \quad (3.4.7)$$

$$\langle S_{1xz} \rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{W^2}{4} \right) J_0(2hy) - \frac{W^2}{4} J_2(2hy) + \frac{1}{2} - \frac{W^2}{4} \quad (3.4.8)$$

$$\langle S_{2xz} \rangle = W \cos(\delta_y) J_0(2hy) \quad (3.4.9)$$

$$\langle S_{3xz} \rangle = W \sin(\delta_y) J_0(2hy) . \quad (3.4.10)$$

En general, la polarización promedio en el plano $(x - z)$ corresponde a polarización elíptica.

3) Sobre el plano ($y - z$):

$$\langle S_{0yz} \rangle = W^2(1 + J_0(2hy)) + J_2(2hy) \quad (3.4.11)$$

$$\langle S_{1yz} \rangle = 0 \quad (3.4.12)$$

$$\langle S_{2yz} \rangle = 0 \quad (3.4.13)$$

$$\langle S_{3yz} \rangle = 0 \quad (3.4.14)$$

Sobre el plano ($y - z$) el campo plasmónico es completamente no polarizado.

En la Fig.4a, mostramos la simulación numérica para la distribución de irradiancia sobre el plano ($y - z$) asociada al **Spc** completamente coherente de la ecuación (3.2.14).

En la Fig. 3.2.b, mostramos la simulación numérica cuando la separación relativa entre las aberturas de la Fig. 3.2, sigue una densidad de probabilidad uniforme, donde la curva de modulación es fácilmente identificable.

El cálculo fue obtenido tomando el modulo cuadrado de la ecuación (3.2.14) y obteniendo su valor promedio. Seleccionamos el plano ($y - z$) porque corresponde al plano de la superficie metálica el cual nos permite establecer el sistema de referencia.

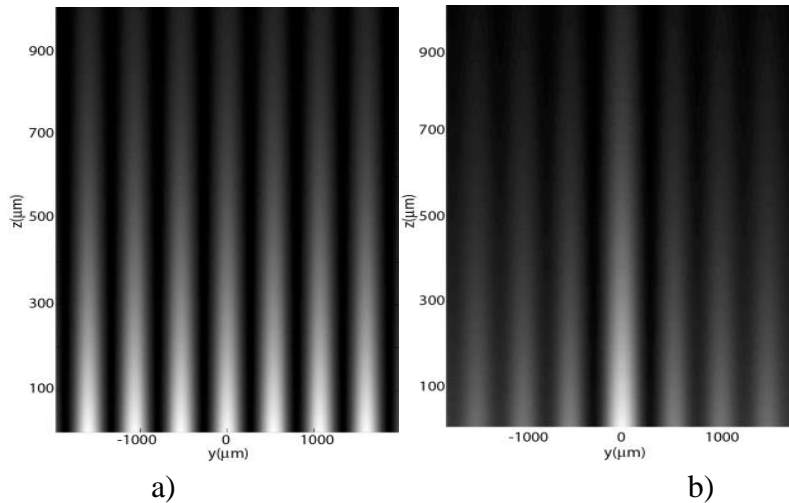


Fig. 3.2. a) Distribución de Irradiancia para un **Spc** completamente coherente. b) **Spc** parcialmente polarizado con densidad de probabilidad uniforme.

Como una aplicación de esto, las propiedades de polarización parcial pueden ser implementadas para el atrapamiento de partículas [13,14], las condiciones bajo las cuales esto es posible se analizarán en un trabajo futuro, además este estudio puede ser extendido en una forma general con

otras funciones de densidad de probabilidad, la integral (3.4.2) representa la ecuación integral de primera clase de *Fredholm* [14] cuyo núcleo son los parámetros de *Stokes*. Lo último puede ser hecho proponiendo una función específica para $M_i(y)$, donde la función desconocida es la función de densidad de probabilidad.

El campo eléctrico fue proyectado en tres planos mutuamente perpendiculares lo cual puede ser aplicado al estudio de las singularidades de polarización [15] lo cual ocurre en las regiones focales plasmónicas [16].

3.5 Teoría de coherencia

En esta sección se describe la teoría de coherencia para el caso vectorial. Entendemos a la coherencia como una medida de la similitud que tiene un campo electromagnético consigo mismo en diferentes puntos del espacio o consigo en un mismo punto del espacio pero en diferentes tiempos.

Usamos la representación matricial para identificar la matriz de coherencia, con esto se hace el análisis de la propagación de correlaciones que nos lleva finalmente al teorema de *Van Cittert-Zernike*.

3.5.1 Teoría de coherencia: caso vectorial

Para describir la teoría de coherencia vectorial hacemos uso del sistema esquematizado en la Fig. 3.3 el cual tiene una fuente primaria extendida. De un punto de la fuente emerge el campo, el cual se propaga en distintas direcciones. Los campos en los puntos p y q tienen asociados un estado de polarización, justo después de los puntos mencionados colocamos un analizador el cual nos permitirá obtener las componentes del campo y sus estados de polarización en el punto s .

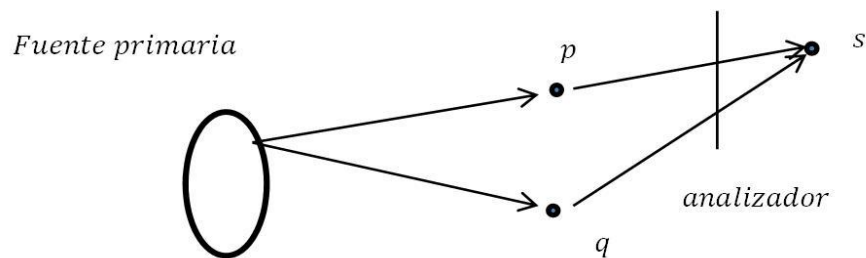


Fig. 3.3. Esquema de la fuente primaria extendida de donde emerge un campo eléctrico hacia los puntos p y q , para después propagarse a través de un analizador y obtener el estado de polarización del campo en el punto s .

Los campos en los puntos p y q están dados por:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(p) &= \hat{i}a_i \exp\{i\delta_i\} \exp\{ikr_{ip}\} + \hat{j}b_i \exp\{i\gamma_i\} \exp\{ikr_{ip}\} \\ \vec{E}_i(q) &= \hat{i}a_i \exp\{i\delta_i\} \exp\{ikr_{iq}\} + \hat{j}b_i \exp\{i\gamma_i\} \exp\{ikr_{iq}\}, \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

donde a_i y b_i son las amplitudes de cada componente en los puntos p y q respectivamente, γ_i y δ_i son las fases en cada componente, r_{ip} y r_{iq} son los vectores de posición que hay entre puntos de la fuente y los puntos p y q .

El campo total de la fuente primaria en los puntos p y q se expresa como:

$$\vec{E}_T(p) = \sum_{i=1}^N (\hat{i}a_i \exp\{i\delta_i\} + \hat{j}b_i \exp\{i\gamma_i\}) \exp\{ikr_{ip}\} = \hat{i}\phi_1 + \hat{j}\psi_1 \quad (3.5.2)$$

$$\vec{E}_T(q) = \sum_{j=1}^N (\hat{i}a_j \exp\{i\delta_j\} + \hat{j}b_j \exp\{i\gamma_j\}) \exp\{ikr_{jq}\} = \hat{i}\phi_2 + \hat{j}\psi_2 .$$

Dónde:

$$\phi_1 = a_i \exp\{i\delta_i\} \exp\{ikr_{ip}\} \quad (3.5.2a)$$

$$\psi_1 = b_i \exp\{i\gamma_i\} \exp\{ikr_{ip}\} ,$$

son las expresiones para cada componente del campo en el punto p .

De manera similar tenemos:

$$\phi_2 = a_j \exp\{i\delta_j\} \exp\{ikr_{jq}\} \quad (3.5.2b)$$

$$\psi_2 = b_j \exp\{i\gamma_j\} \exp\{ikr_{jq}\} ,$$

que son las expresiones para cada componente del campo en el punto q .

El campo total en el punto s se expresa como:

$$\begin{aligned} \vec{E}(s) = & \phi_1 \cos \theta \exp\{ikr_{ps}\} + \psi_1 \sin \theta \exp\{ikr_{ps}\} \\ & + \phi_2 \cos \theta \exp\{ikr_{qs}\} + \psi_2 \sin \theta \exp\{ikr_{qs}\}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

La intensidad en el punto s es:

$$\begin{aligned}
I(s) = E(s)E^*(s) = & \phi_1\phi_1^*(\cos\theta)^2 + \phi_1\psi_1^*\sin\theta\cos\theta + \phi_1\phi_2^*(\cos\theta)^2\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\} \\
& + \phi_1\psi_2^*\cos\theta\sin\theta\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\} + \psi_1\phi_1^*\cos\theta\sin\theta \\
& + \psi_1\psi_1^*(\sin\theta)^2 + \psi_1\phi_2^*\sin\theta\cos\theta\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\} \\
& + \psi_1\psi_2^*(\sin\theta)^2\exp\{ik(r_{ps} - r_{qs})\} + \phi_2\phi_1^*(\cos\theta)^2\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\} \\
& + \phi_2\psi_1^*\sin\theta\cos\theta\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\} + \phi_2\phi_2^*(\cos\theta)^2 \\
& + \phi_2\psi_2^*\cos\theta\sin\theta + \psi_2\phi_1^*\cos\theta\sin\theta\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\} \\
& + \psi_2\psi_1^*(\sin\theta)^2\exp\{ik(r_{qs} - r_{ps})\} + \psi_2\phi_2^*\cos\theta\sin\theta \\
& + \psi_2\psi_2^*(\sin\theta)^2
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Esta relación es más simple de manejar si se expresa en términos de matrices. La matriz de coherencia para un campo electromagnético parcialmente coherente se expresa como [8]:

$$J = \begin{pmatrix} \langle |E_1|^2 \rangle & \langle E_1 E_2^* \rangle \\ \langle E_1 E_2^* \rangle & \langle |E_2|^2 \rangle \end{pmatrix}. \tag{3.5.4.A}$$

Al hacer la representación matricial de la ecuación (3.5.4) en la forma de la matriz (3.5.4.A) podremos identificar la matriz de coherencia generalizada como:

$$I(s) = T \cdot J_g \cdot T^{T*}, \tag{3.5.5}$$

donde T es una matriz renglón:

$$T = (\cos\theta\exp\{ikr_{ps}\} \quad \sin\theta\exp\{ikr_{ps}\} \quad \cos\theta\exp\{ikr_{qs}\} \quad \sin\theta\exp\{ikr_{qs}\}) \tag{3.5.6}$$

T^{T*} es una matriz columna:

$$T^{T*} = \begin{pmatrix} \cos\theta\exp\{-ikr_{ps}\} \\ \sin\theta\exp\{-ikr_{ps}\} \\ \cos\theta\exp\{-ikr_{qs}\} \\ \sin\theta\exp\{-ikr_{qs}\} \end{pmatrix}, \tag{3.5.7}$$

y el símbolo T^* significa que la matriz es transpuesta conjugada.

La matriz J_g es llamada matriz de coherencia generalizada y nos dice como se mezclan los campos en el punto s , los paréntesis triangulares representan los valores promedios dado que las amplitudes son variables aleatorias.

La matriz J_g se expresa como:

$$J_g = \begin{pmatrix} \langle |\phi_1|^2 \rangle & \langle \phi_1 \psi_1^* \rangle & \langle \phi_1 \phi_2^* \rangle & \langle \phi_1 \psi_2^* \rangle \\ \langle \psi_1 \phi_1^* \rangle & \langle |\psi_1|^2 \rangle & \langle \psi_1 \phi_2^* \rangle & \langle \psi_1 \psi_2^* \rangle \\ \langle \phi_2 \phi_1^* \rangle & \langle \phi_2 \psi_1^* \rangle & \langle |\phi_2|^2 \rangle & \langle \phi_2 \psi_2^* \rangle \\ \langle \psi_2 \phi_1^* \rangle & \langle \psi_2 \psi_1^* \rangle & \langle \psi_2 \phi_2^* \rangle & \langle |\psi_2|^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.5.8)$$

Reescribiendo la matriz J_g tenemos que:

$$J_g = \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix}. \quad (3.5.9)$$

Donde A, B, C, C^* son matrices compuestas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} \langle |\phi_1|^2 \rangle & \langle \phi_1 \psi_1^* \rangle \\ \langle \psi_1 \phi_1^* \rangle & \langle |\psi_1|^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.5.10)$$

La matriz A contiene la información de los parámetros de coherencia, parámetros de Stokes en el punto p .

$$B = \begin{pmatrix} \langle |\phi_2|^2 \rangle & \langle \phi_2 \psi_2^* \rangle \\ \langle \psi_2 \phi_2^* \rangle & \langle |\psi_2|^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.5.11)$$

la matriz B lleva la misma información solo que en el punto q .

$$C = \begin{pmatrix} \langle \phi_1 \phi_2^* \rangle & \langle \phi_1 \psi_2^* \rangle \\ \langle \psi_1 \phi_2^* \rangle & \langle \psi_1 \psi_2^* \rangle \end{pmatrix} \text{ y } C^* = \begin{pmatrix} \langle \phi_2 \phi_1^* \rangle & \langle \phi_2 \psi_1^* \rangle \\ \langle \psi_2 \phi_1^* \rangle & \langle \psi_2 \psi_1^* \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.5.12)$$

llevan la información de la correlación de los parámetros de Stokes entre p y q .

En el caso en que ψ_1, ϕ_1 sean funciones estadísticamente independientes, tenemos que:

$$\langle \phi_1 \psi_1^* \rangle = \langle \phi_1 \rangle \langle \psi_1^* \rangle. \quad (3.5.13)$$

3.5.2. Propagación de correlaciones

En esta sección se muestra, que la función de correlación en amplitudes de un campo electromagnético, presenta características ondulatorias, esto nos permite establecer un modelo de coherencia parcial conservando la naturaleza vectorial del campo electromagnético.

De la Fig. 3.3 el campo en el punto p es \vec{E}_1 y el campo en el punto q es \vec{E}_2 . La representación para cada componente de acuerdo al modelo de espectro angular es:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 = & \hat{i} \iint A(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} dudv \\ & + \hat{j} \iint B(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} dudv\end{aligned}\quad (3.5.2.1)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 = & \hat{i} \iint A(u', v') \exp\{i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} du' dv' \\ & + \hat{j} \iint B(u', v') \exp\{i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} du' dv',\end{aligned}\quad (3.5.2.2)$$

donde $A(u, v), B(u, v)$ son las amplitudes de cada componente en términos de las frecuencias espaciales, que contribuyen a generar el campo en el punto p . De manera análoga, $A(u', v'), B(u', v')$ son las amplitudes que genera el campo en el punto q .

Los procesos de coherencia parcial se describen en términos de las correlaciones de los campos, los cuales están definidos como:

$$\begin{aligned}\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle = E_{12} = & \iint \iint \langle A(u, v) A^*(u', v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\ & \times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudv du' dv' \\ & + \iint \iint \langle B(u, v) B^*(u', v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\ & \times \exp\{i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudv du' dv' \\ & + 2Re \iint \iint \langle A(u, v) B^*(u', v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\ & \times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudv du' dv',\end{aligned}\quad (3.5.2.3)$$

en donde los paréntesis triangulares significan un promedio estadístico.

En el *apéndice A*, se demuestra que la función de correlación entre los campos correspondientes satisface la ecuación de *Helmholtz*, $\nabla^2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle + k^2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle = 0$.

Sabemos que la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (3.5.2.4)$$

tiene como solución:

$$\phi = \psi \exp\{i\omega t\}, \quad (3.5.2.5)$$

En nuestro caso, si la función de correlación se multiplica por un término armónico en términos de una nueva variable τ , se define una nueva función que se conoce como la función de coherencia mutua dada por:

$$\Gamma = \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle \exp\{i\omega \tau\}.$$

Entonces es claro que satisface una ecuación tipo onda:

$$\nabla^2 \Gamma = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tau^2}. \quad (3.5.2.6)$$

Donde la interpretación física para τ es un tiempo de retraso entre los campos \vec{E}_1 y \vec{E}_2 .

Interpretando los términos de la matriz (3.5.1.9) en términos de las funciones de correlación, restringiéndonos sólo al primer término de la matriz (C de 3.5.1.12) tenemos que éste toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2^* \rangle &= \iint \iint \langle A(u, v) A^*(u', v') \rangle \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\ &\times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \end{aligned} \quad (3.5.2.7)$$

Definiendo $x' = x - x_0$:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2^* \rangle &= \iint \iint \iiint \langle A(u, v) A^*(u', v') \rangle \exp\{i2\pi x(u - u')\} \exp\{i2\pi x_0 u'\} \exp\{i2\pi y(v - v')\} \\ &\times \exp\{i2\pi y_0 v'\} \exp\{i2\pi z(p - p')\} \exp\{i2\pi z_0 p'\} dx dy dz du dv du' dv' \\ &= \iint \iint \langle A(u, v) A^*(u', v') \rangle \delta(u - u') \exp\{i2\pi x_0 u'\} \delta(v - v') \\ &\times \exp\{i2\pi y_0 v'\} \delta(p - p') \exp\{i2\pi z_0 p'\} du dv du' dv' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint \langle |A(u, v)|^2 \rangle \exp\{i2\pi(x_0u + y_0v + z_0p)\} dudv \\
&= K(x_0, y_0, z_0) = K(x - x', y - y', z - z') \quad , \quad (3.5.2.8)
\end{aligned}$$

el término $\langle |A(u, v)|^2 \rangle$ es llamado el espectro de potencias. Si derivamos la función de correlación dada por la expresión (3.5.2.8) sabemos que cumplirá con la ecuación de *Helmholtz* (apéndice A'). Se puede realizar el mismo procedimiento para la representación de todos los términos de la matriz. Cuando la correlación se calcula sobre un plano se tiene que $z_0 = 0$, entonces la expresión (3.5.2.8) toma la forma de la transformada de Fourier del espectro de potencias. Recalamos que heredado de las propiedades de la δ de *Dirac* se tiene que solo se correlacionan los campos que se propagan en la misma dirección.

Se tiene que la expresión para todas las correlaciones es:

$$\langle \phi_i \phi_j^* \rangle = \iint A(u, v) B^*(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} dudv = w(x, y, z, \gamma) \quad (3.5.2.9)$$

Esta última ecuación es la función de densidad espectral para una sola frecuencia. Si obtenemos la transformada de *Fourier* en la variable τ , tenemos:

$$F\{w(x, y, z, \gamma)\} = \int w(x, y, z, \gamma) \exp\{i2\pi\gamma\tau\} d\gamma = \Gamma(x, y, z, \tau) \quad (3.5.2.10)$$

donde $\tau = t_1 - t_2$.

La ecuación (3.5.2.10) es la función de coherencia mutua considerando todas las frecuencias. Tenemos que expresión general para cada término de la matriz de coherencia está dada por:

$$\Gamma_{ij} = \iiint A_i(u, v) B_j^*(u, v) \exp\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\} dudvd\gamma \quad , \quad (3.5.2.11)$$

donde el carácter vectorial está implícito en cada componente de la matriz.

Un análisis en detalle se describe en el apéndice A'', lo cual corrobora que las correlaciones se propagan con un carácter ondulatorio.

4. Propiedades estructurales de campos plasmónicos

4.1 Interacción entre funciones Pearcey.

Estudiamos la interacción cúspide - cúspide entre dos campos ópticos tipo Pearcey analizando su estructura topológica. Lo hacemos en dos pasos; el primero es una interacción de Irradiancia que permite identificar regiones de organización. El segundo es una interacción de amplitud, donde es mostrado que las franjas de interferencia están organizadas alrededor de la distribución de Irradiancia. El comportamiento topológico del campo óptico es analizado identificando regiones con diferentes funciones de fase, una de ellas, corresponde con una función de catástrofe la cual tiene asociada una región focal, la otra región puede ser aproximada por una función cuadrática. La principal consecuencia heredada por la estructura de fase es que las franjas de interferencia emergen de las regiones focales teniendo propiedades similares como de cargas topológicas.

Es bien sabido que la energía se disipa o almacena alrededor de puntos de equilibrio también conocidos como puntos críticos, lo cual constituye el soporte para la realización de modelos físicos contemporáneos [17]. En el contexto óptico, esto significa que un campo óptico está organizado alrededor de las regiones focales también conocidas como regiones causticas o regiones singulares, definidas como la envolvente de los puntos críticos para la función de amplitud [18-20].

En este sentido, las propiedades físicas de las regiones focales son fundamentales para entender la estructura global del campo óptico porque en su vecindad, propiedades ópticas importantes son esperadas.

Por ejemplo, efectos de bifurcación [21,22] consistiendo en la generación de diferentes propiedades físicas cuando algunos parámetros implícitos en la descripción de campos ópticos cambian sus valores. La consecuencia física es que el campo óptico es dividido en dos o más franjas cuyas evoluciones temporales/espaciales pueden generar vórtices ópticos [23,24]. Además, las regiones focales presentan propiedades similares a las de cargas topológicas lo cual se vuelve evidente cuando estas interactúan con otros campos ópticos [25,26], como será mostrado.

El punto principal de este capítulo esta soportado por la propiedad de que la función de fase del campo óptico presenta propiedades adiabáticas en la vecindad de las regiones focales. El significado físico es que el campo óptico pierde su comportamiento ondulatorio adquiriendo propiedades como de partícula [27], además las regiones focales presentan el valor más alto de Irradiancia, ofreciendo la posibilidad de transferir energía a otras regiones del campo óptico, este hecho es descrito en detalle implementando la ecuación de transporte de Irradiancia. En este contexto, el objetivo del presente capítulo es describir la interacción entre dos funciones Pearcey cuando cada una tiene asociada una región de forma cúspide [28]. La condición de frontera para generar las funciones Pearcey consiste en dos rendijas de forma parabólica como esta esquematizada en la Fig. 5.1.a, esta configuración puede ser interpretada como la versión topológica del interferómetro de Young. En la Fig. 5.1.b se muestra la correspondiente región cúspide la cual es generada por el campo de difracción emergiendo de cada rendija de forma parabólica.

4.1.1. Interacción de Irradiancia entre regiones focales

Por el comportamiento adiabático de la región focal, la primera interacción debe ser descrita implementando una redistribución de energía, donde se identifican propiedades físicas novedosas, en particular mostramos que cada región focal es capaz de transferir energía a otras regiones del campo óptico, esto es una nueva propiedad que aparece en el interferómetro topológico de Young. La interacción es realizada usando la ecuación de transporte de Irradiancia [29], esta es aplicada en la vecindad de los puntos cúspide generando un "canal de Irradiancia" lo cual constituye una

extensión de las regiones focales como será mostrado en breve. Las otras regiones del campo óptico deben ser analizadas por una interacción de amplitud donde las franjas de interferencia están organizadas alrededor del canal de irradiancia. La ecuación de transporte de Irradiancia está dada por

$$\nabla_{\perp} \cdot [I(x, y, z)\nabla_{\perp}L(x, y, z)] = -\frac{\partial}{\partial z}I(x, y, z) \quad (4.1.1.1)$$

donde ∇_{\perp} es el operador gradiente en dos dimensiones actuando en el plano $x - y$. La Irradiancia en el punto $P(x, y, z)$ es generada por la contribución de cada región focal representada por $I(x, y, z) = I_1 + I_2$, los términos de fase están dados por $L = L_1 - L_2$, donde $L_{1,2} = kr_{1,2}$, k es el numero de onda y r_i es la distancia desde un punto sobre la condición de frontera a la detección del punto P .

Solo los parámetros asociados a la parábola superior están esquematizados en la Fig. 4.1.b.

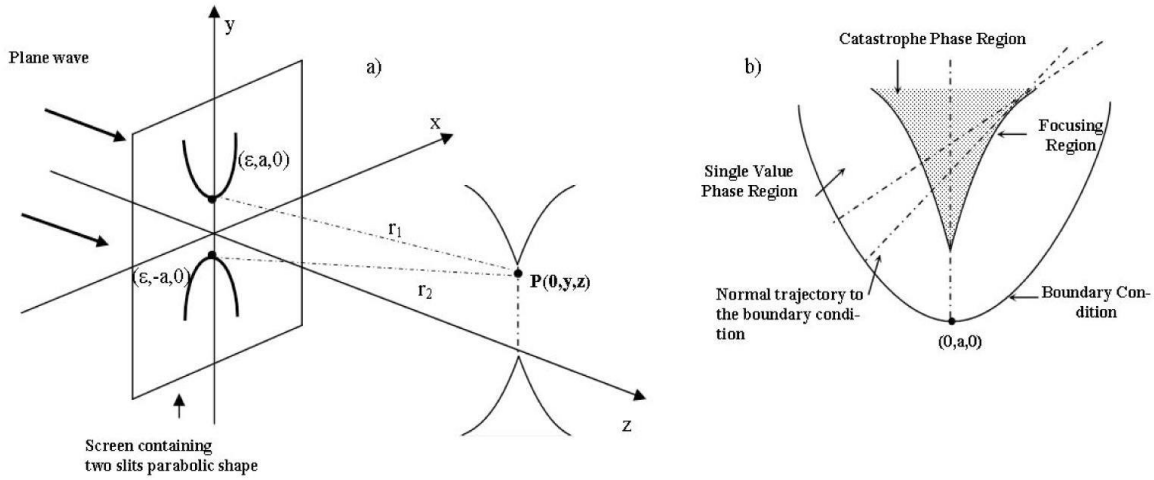


Fig. 4.1. a) Interferómetro topológico de Young y regiones focales de forma cúspide asociada a cada función Pearcey. Las rendijas parabólicas están contenidas en un cuadrado de 8 mm por lado, las separaciones de los vértices están en el intervalo $[0, 2]\text{ mm}$. La fuente de iluminación fue un laser He-Ne con una longitud de onda de 632.8 nm . b) Descripción geométrica de la región focal.

Considerando las coordenadas $(\epsilon, \pm a, 0)$ para los puntos sobre la condición de frontera en la vecindad de los vértices de las parábolas y un punto arbitrario $(0, y, z)$ sobre la trayectoria lineal que conecta los puntos cúspide, las funciones de distancia en la aproximación paraxial son

$$r_1 = \sqrt{(y - a)^2 + z^2 + \epsilon^2} \approx z + \frac{(y-a)^2}{2z}, \quad (4.1.1.2)$$

$$r_2 = \sqrt{(y + a)^2 + z^2 + \epsilon^2} \approx z + \frac{(y+a)^2}{2z}, \quad (4.1.1.3)$$

donde hemos omitido el término cuadrático ϵ^2 debido a que $|\epsilon| > 1$. El término de diferencia de fase toma la forma

$$kr_1 - kr_2 = \frac{2ayk}{z}. \quad (4.1.1.4)$$

Entonces, la ecuación de transporte de Irradiancia adquiere la forma

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\{I_1 + I_2\} \frac{\partial}{\partial y} (kr_1 - kr_2) \right) = -\frac{\partial}{\partial z} (I_1 + I_2), \quad (4.1.1.5)$$

Introduciendo la Eq. (4.1.1.4) en Eq. (4.1.1.5), la ecuación diferencial parcial para la interacción de Irradiancia es

$$-\frac{2ak}{z} \frac{\partial}{\partial y} (I_1 + I_2) = \frac{\partial}{\partial z} (I_1 + I_2), \quad (4.1.1.6)$$

y el correspondiente sistema de ecuaciones características es

$$\frac{dy}{2ak} = \frac{dz}{z} \quad (I_1 + I_2) = 0, \quad (4.1.1.7)$$

cuya solución está dada por

$$I_1 + I_2 = c_2, \quad \frac{y}{2ak} = \ln(z) + c_1. \quad (4.1.1.8)$$

Note que $z \neq 0$, porque $z = 0$ corresponde al plano de la transmitancia y todavía no es generada aun una región focal. El significado físico de la Eq. (4.1.1.8) es la generación de un canal de Irradiancia conectando los dos puntos cúspides. Remarcamos que la Eq. (4.1.1.8) es válida en la vecindad de los puntos cúspide y la geometría del canal de Irradiancia no es dependiente de la separación relativa entre las rendijas parabólicas. Esto concuerda con las simulaciones de computadora para la distribución de Irradiancia mostrada en las Figs. 4.2.e y 4.2.h. Estos resultados concuerdan con los resultados experimentales mostrados en las Figs. 4.2.f y 4.2.i. Cuando la separación entre las regiones cúspides es lo suficientemente grande, no existe interacción de Irradiancia y la geometría de las franjas de interferencia recuerdan al interferómetro de Young clásico, como es mostrado en los resultados experimentales de la Fig. 4.2.c.

4.1.2. Interacción de Amplitud

El siguiente punto del estudio describe la interacción en amplitud entre campos ópticos tipo Pearcey. Considerando las dos rendijas como un interferómetro topológico, el problema consiste en describir la estructura de las franjas de interferencia así como su relación con la región focal. Los campos ópticos bajo estudio son generados por la difracción emergiendo de cada rendija cuyas funciones de transmitancias están dadas por

$$t(x, y) = \delta(y - (x + a)^2) + \delta(y + (x + a)^2), \quad (4.1.2.1)$$

donde δ es la función Delta de Dirac. El campo de difracción para la función de amplitud en la aproximación paraxial es

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z) = & \iint_{-\infty}^{\infty} [\delta(y - (x + a)^2) + \delta(y + (x + a)^2)] \\ & \times \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right) \exp\left(-\frac{i2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right) dx dy . \end{aligned} \quad (4.1.2.2)$$

Haciendo la integración respecto a la variable y , así obteniendo

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z) = & \varphi_1 + \varphi_2 \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{4i\pi}{\lambda z}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\left(y_0 - a - \frac{1}{2}\right) - xx_0\right)\right] dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{4i\pi}{\lambda z}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\left(y_0 + a + \frac{1}{2}\right) - xx_0\right)\right] dx , \end{aligned} \quad (4.1.2.3)$$

el termino de fase en la primera integral es de la forma

$$L(x, \alpha, \beta) = \frac{x^4}{4} - \alpha \frac{x^2}{2} + \beta x . \quad (4.1.2.4)$$

La estructura de la función de fase puede ser obtenida desde sus puntos críticos dados por

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = x^3 - \alpha x + \beta , \quad (4.1.2.5)$$

donde la envolvente de los puntos críticos satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 = 3x^2 - \alpha . \quad (4.1.2.6)$$

Para que los puntos críticos tomen valores reales, es necesario que $\alpha > 0$, lo cual ocurre cuando

$$y_0 - a - \frac{1}{2} > 0 . \quad (4.1.2.7)$$

De las Eqs. (4.1.2.5) y (5.1.2.6), la geometría de la región focal es

$$\beta = \pm 2 \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{3/2} . \quad (4.1.2.8)$$

La principal consecuencia de la Eq. (4.1.2.7) es que la función de fase puede ser considerada como una función de catástrofe. Si no se cumple esta condición el término de fase no corresponderá a la función de catástrofe porque no hay presentes puntos singulares, y puede ser representada como una función cuadrática. Esto ocurre cuando

$$y_0 \leq a + \frac{1}{2}, \quad (4.1.2.9)$$

y no hay envolvente de los puntos singulares. En este caso, el termino cuadrático puede ser removido y la integral se reduce a

$$\int \exp \frac{i2\pi}{\lambda z} \left(x^2 \left(y_0 - a - \frac{1}{2} \right) \right) \exp \left(\frac{i2\pi}{\lambda z} x x_0 \right) dx . \quad (4.1.2.10)$$

La última expresión corresponde con la transformada de Fourier de una función Gaussiana con varianza compleja. Calculando explícitamente la integral obtenemos

$$\varphi_1 = \exp \frac{i2\pi}{\lambda z} \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 - a - \frac{1}{2} \right)^2} \right). \quad (4.1.2.11)$$

Basado en un análisis previo, concluimos parcialmente que la función de amplitud φ_1 tiene dos posibles representaciones para su función de fase. Una de ellas corresponde a una función de catástrofe, la otra es una función cuadrática, separadas por la región focal. Para cada representación esperamos diferentes propiedades físicas del campo óptico.

Desde un análisis similar para la segunda integral de la Eq. (4.1.2.3), la condición para que el termino de fase tome la forma de una función de catástrofe es

$$y_0 < -a - \frac{1}{2}. \quad (4.1.2.12)$$

Si la condición previa no se satisface, el termino de fase es de nuevo una función cuadrática y la amplitud está dada por

$$\varphi_2 = \exp \frac{i2\pi}{\lambda z} \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 + a + \frac{1}{2} \right)^2} \right), \quad (4.1.2.13)$$

lo cual es válido en regiones definidas por

$$y_0 \geq -a - \frac{1}{2}. \quad (4.1.2.14)$$

De las Eqs. (4.1.2.11) y (4.1.2.13), es fácil mostrar que el termino de interferencia es

$$2\text{Re}(\varphi_1 \varphi_2^*) = 2 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda z} \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 - a - \frac{1}{2} \right)^2} \right) - \frac{2\pi}{\lambda z} \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 + a + \frac{1}{2} \right)^2} \right) \right], \quad (4.1.2.15)$$

donde el máximo de Irradiancia ocurre cuando

$$\left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 - a - \frac{1}{2} \right)^2} \right) - \left(\frac{x_0^2}{\left(y_0 + a + \frac{1}{2} \right)^2} \right) = m\lambda z, \quad (4.1.2.16)$$

y la geometría de las franjas de interferencia es un conjunto de hipérbolas teniendo al eje x_0 como asíntota.

El hecho de que los términos de fase tengan dos posibles representaciones implica que las franjas de interferencia emergen desde la región focal fluyendo hacia la región cuadrática de fase teniendo un comportamiento asintótico, estas oraciones son acordes a las Eqs. (4.1.2.15) y (4.1.2.16).

La interferencia ocurre solo en las regiones donde la función de fase es univaluada. Entonces tenemos que las fuentes para las franjas de interferencia están colocadas sobre la región focal justificando las propiedades de carga topológica. Este comportamiento puede ser observado en las simulaciones por computadora mostradas en las Figs. 4.2.e y 4.2f así como también en los resultados experimentales mostrados en las Figs. 4.2.h y 4.2.i.

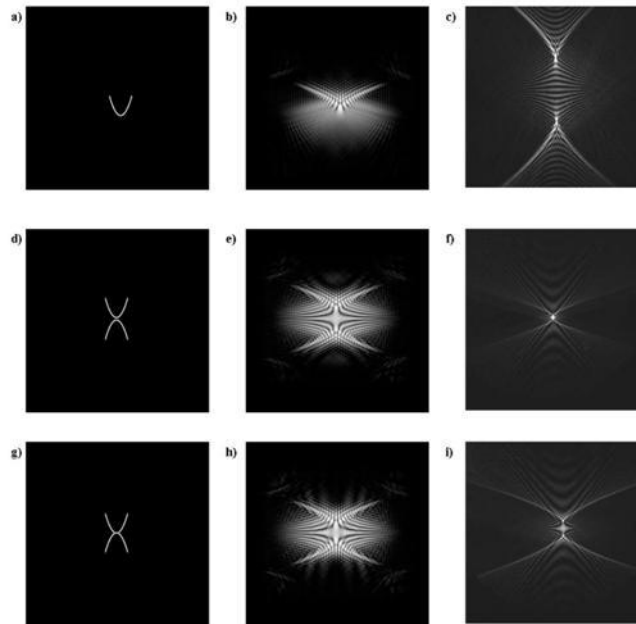


Fig. 4.2. En a) mostramos la condición de frontera parabólica para generar la función Pearcey mostrada en b). En d) y g) mostramos la condición de frontera para generar dos funciones Pearcey, esta configuración permite controlar la interacción entre regiones cúspide. En e) y h) mostramos la simulación por computadora asociada a la distribución de Irradiancia para cada campo óptico. En c) mostramos el resultado experimental cuando no existe interacción de Irradiancia entre las regiones cúspide. En f) y i) mostramos los resultados experimentales para la generación del canal de Irradiancia.

Hemos presentado el análisis para la interacción entre dos campos ópticos emergiendo de dos rendijas de forma parabólica, esta configuración corresponde a la versión topológica del interferómetro de Young. El campo de difracción emergiendo de cada parábola tiene asociada una región focal de forma cúspide. El estudio de los campos ópticos fue descrito analizando dos tipos de interacciones ópticas. La primera de ellas, fue la transferencia de Irradiancia entre las regiones focales usando la ecuación de transporte de Irradiancia, mostramos que las regiones focales son capaces de transferir energía a otras regiones del campo óptico. Para la geometría propuesta, mostramos la generación de un canal de Irradiancia conectando los puntos cúspide, constituyendo una extensión de las regiones focales, ofreciendo aplicaciones interesantes, en particular, puede ser implementado como luz guiada así como pinzas ópticas sintonizables.

4.2. Interacciones plasmónicas de tipo Pearcey

El campo electromagnético propagándose sobre una superficie conductora puede generar efectos interesantes con aplicaciones potenciales al diseño de sistemas ópticos plasmónicos, tales como, pinzas plasmónicas, generación de capacitancia local sintonizable, diseño de antenas y espectroscopia sintonizable [6,14,30]. Se sabe muy bien que el campo electromagnético puede ser analizado desde la descripción del campo eléctrico, sin embargo, existen regiones donde el campo electromagnético presenta propiedades singulares. En particular, sobre una superficie conductora se puede generar una familia de estructuras plasmónicas lo cual constituye la condición de frontera para el campo electromagnético [31]. En años recientes se ha estudiado la generación de regiones focales propagándose en el espacio libre [32], en esta sección mostraremos que los campos plasmónicos cuando se están propagando sobre una superficie metálica son capaces de generar regiones focales cuyas principales consecuencias consisten en generación de carga.

Entonces se quiere encontrar una relación entre la generación de campos plasmónicos, su propagación y la descripción de las regiones focales plasmónicas. Siendo la síntesis de carga (real) la responsable de inducir propiedades físicas novedosas. Para la generación de las regiones focales, usamos una rendija curva grabada sobre la superficie metálica e iluminamos perpendicularmente con una onda plana, como prototipo usamos una rendija parabólica, generando regiones focales cuyas funciones de fase tienen asociada una función de catástrofe tipo Pearcey [33]. Con la inclusión de otra rendija podemos generar la interacción entre dos plasmones tipo Pearcey, esta propuesta permite modificar la distribución de carga, iluminando con un campo parcialmente coherente [8], la distribución de carga puede adquirir un comportamiento dinámico manifestado en la generación de corrientes.

4.2.1. Descripción del campo plasmónico

El campo plasmónico es generado por oscilaciones colectivas de carga, han sido reportadas diferentes configuraciones para generar el campo plasmónico [2], en la presente sección, lo generamos iluminando una condición de frontera de tipo rendija curva grabada sobre una superficie metálica. La razón de esto es debido a la condición de transversalidad [34], esto significa que el campo plasmónico superficial debe propagarse de manera perpendicular a la geometría de la condición de frontera como se muestra en la Fig. 4.3.

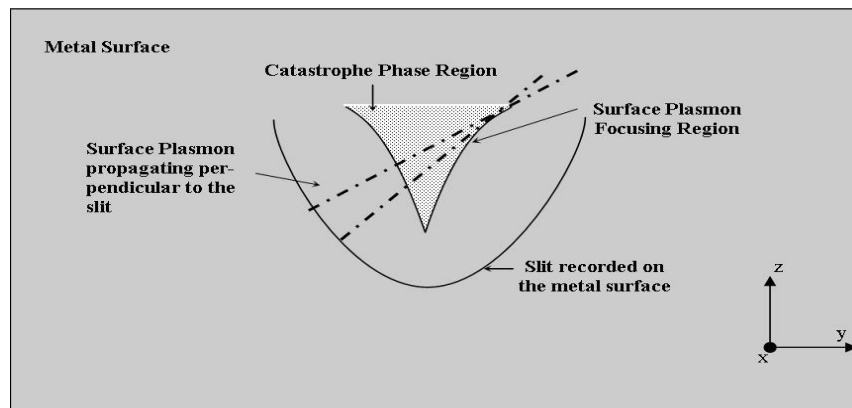


Fig. 4.3. Construcción de las regiones plasmónicas tipo Pearcey.

Todo el campo plasmónico puede ser interpretado como formado por un conjunto de plasmones elementales, cada uno tiene asociado una función de relación de dispersión β [2]. Para un medio semi-infinito, β tiene la forma

$$\beta = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.1.1)$$

La expresión matemática para el campo eléctrico asociado al plasmón elemental propagándose en la coordenada z esta dado por

$$\vec{E} = \hat{\xi} \exp\{iz\beta\} \exp\{-\alpha x\} \quad (4.2.1.2)$$

donde $\hat{\xi}$ es el vector de amplitud que lleva las propiedades directivas del campo plasmónico y α es el factor de atenuación en la coordenada x . Para que la Eq. (4.2.1.1) sea satisfecha, es necesario que

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.2.1.3)$$

Lo que significa que el promedio de la distribución de carga sobre la superficie metálica es cero. Reescribiendo explícitamente al vector $\hat{\xi}$, el campo eléctrico adquiere la forma

$$\vec{E} = (a\hat{i} + b\hat{k}) \exp\{iz\beta\} \exp\{-\alpha x\} \quad , \quad (4.2.1.4)$$

La Eq. (4.2.1.4) implica una condición de balance entre los parámetros a , b , β , α , dada por

$$(-\alpha a + bi\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\alpha}{i\beta} a \quad , \quad (4.2.1.5)$$

Consecuentemente la expresión para el plasmón elemental superficial es

$$\vec{E} = \left(a\hat{i} + \frac{\alpha}{i\beta} a\hat{k} \right) \exp\{iz\beta\} \exp\{-\alpha x\} \quad . \quad (4.2.1.6)$$

Una expresión general se puede obtener haciendo una rotación alrededor del eje x , entonces el plasmón superficial propagándose sobre la superficie $y - z$ es

$$\vec{E} = \left(a\hat{i} + \frac{\alpha}{i\beta} a \sin \theta \hat{j} + \frac{\alpha}{i\beta} a \cos \theta \hat{k} \right) \exp\{i\beta(z \cos \theta + y \sin \theta)\} \exp\{-\alpha x\} \quad , \quad (4.2.1.7)$$

la estructura dada por la Eq. (4.2.1.7) sigue cumpliendo con $\nabla \cdot \vec{E} = 0$.

Usando el hecho de que campos plasmónicos superficiales arbitrarios pueden ser expresado como una suma de modos elementales, el campo plasmónico es

$$\vec{E}_T = \sum_n \left(a_n \hat{i} + \frac{\alpha}{i\beta} a_n \sin \theta_n \hat{j} + \frac{\alpha}{i\beta} a_n \cos \theta_n \hat{k} \right) \exp\{i\beta(z \cos \theta_n + y \sin \theta_n)\} \exp\{-\alpha x\}. \quad (4.2.1.8)$$

La última ecuación es la representación discreta para el modelo del espectro angular, para una representación continua esta adquiere la forma

$$\vec{E}_T = \iint \xi(u, v) \exp\{i\beta(zu + yv)\} \exp\{-\alpha x\} dudv, \quad (4.2.1.9)$$

donde u, v son las frecuencias espaciales. Debido a la linealidad, las expresiones (4.2.1.8) y (4.2.1.9) satisfacen $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. En las siguientes secciones mostraremos que esta condición no se satisface en regiones singulares generando distribuciones de carga.

4.2.2. Descripción de regiones singulares plasmónicas

a) Modelo de Huygens- Fresnel plasmónico

Se sabe que el modelo de Huygens-Fresnel establece que de cada punto sobre una superficie emerge una onda circular, en nuestro caso de cada punto emerge una onda circular plasmónica, para incluir un comportamiento vectorial proponemos una condición de frontera de la forma

$$\hat{T}(y, z) = \hat{\xi}(y, z) \delta(y - f(z)) \quad , \quad (4.2.1.10)$$

donde la δ es la función Delta de Dirac, $\hat{T}(y, z)$ debe ser una función vectorial. Esto significa que de cada punto de la rendija emerge una onda plasmónica circular, cuya evolución está determinada por el vector $\hat{\xi}$ como se muestra en la Fig. 4.4. Esta representación permite geometrizar la integral de difracción plasmónica.

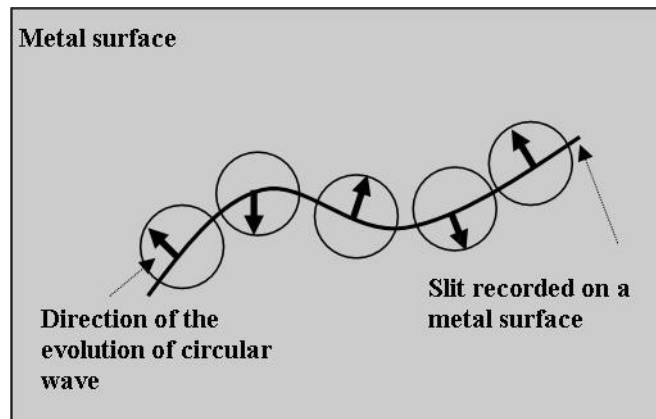


Fig. 4.4. Evolución de una onda circular emergiendo desde una rendija grabada sobre una superficie metálica.

El campo plasmónico puede ser escrito como

$$\vec{E}_T = \exp\{-\alpha x\} \int \xi(y, z) \delta(y - f(z)) \frac{\exp\{ikr\}}{r} dy \quad (4.2.1.11)$$

donde $r = \left((y - y_0)^2 + (z_0 - f(y))^2 \right)^{1/2}$. La última ecuación nos permite realizar una descripción de la fase plasmónica para analizar la función de catástrofe asociada con el campo plasmónico.

b) Función de catástrofe

Desde la función de fase, podemos deducir la estructura del campo plasmónico, en particular, cuando esta sigue un comportamiento no lineal, puede ser interpretada como una fase de catástrofe y desde esta representación realizar el cálculo para obtener la expresión de la carga la cual de estar colocada en la región focal tipo Pearcey.

La función Delta de Dirac permite generar una estructura de fase $f(y) = y^2$, entonces la función de fase está dada por

$$\begin{aligned} L &= \beta \left((y - y_0)^2 + (z_0 - y^2)^2 \right)^{1/2} \\ &= \beta \left(y^4 + y^2(1 - 2z_0) + y(-2y_0) + z_0^2 + y_0^2 \right)^{1/2} \\ &= \beta \left(y^4 + ay^2 + by + c \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.2.1.12)$$

donde $a = (1 - 2z_0)$, $b = (-2y_0)$ y $c = z_0^2 + y_0^2$.

La Eq. (4.2.1.12) tiene estructura de una función de catástrofe, para generar la región focal tipo Pearcey debemos encontrar la envolvente de los puntos críticos, para hacer esto usamos el principio de Fermat

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} \beta \left(y^4 + ay^2 + by + c \right)^{-1/2} (4y^3 + 2ay + b) = 0. \quad (4.2.1.13)$$

Analizando los términos de la Eq. (4.2.1.13) notamos que el término dentro de la raíz cuadrada no puede ser cero porque esto implica que no existe función de fase, entonces el segundo término debe ser cero, esto es

$$(4y^3 + 2ay + b) = 0. \quad (4.2.1.14)$$

Si hacemos la segunda derivada podemos encontrar la envolvente de los puntos críticos

$$12y^2 + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \left(-\frac{a}{6} \right)^{1/2} \quad (4.2.1.15)$$

Sustituyendo la Eq. (4.2.1.15) en (4.2.1.14) tenemos

$$\left(4\left(-\frac{a}{6}\right)^{3/2} + 2a\left(-\frac{a}{6}\right)^{1/2} + b\right) = 0 \quad . \quad (4.2.1.16)$$

Esto significa que $b = b(a)$ lo cual implica que estamos justo en la región focal mostrada en la Fig. 4.3 entonces el campo plasmónico adquiere la forma

$$\vec{E}_T = \int \frac{\xi(y,z)}{(y^4 + ay^2 + by + c)^{1/2}} \exp\{-ax\} \exp\{i\beta(y^4 + ay^2 + b(a)y + c)^{1/2}\} dy . \quad (4.2.1.17)$$

De la última ecuación notamos que el campo plasmónico no satisface mas $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, esto significa que existen cargas libres en la superficie que generan una carga real sobre la región focal.

4.2.3. Interacción plasmónica cúspide- cúspide y sistema experimental

Recientemente se ha estudiado la interacción entre dos campos ópticos de tipo cúspide. Un análisis similar puede ser aplicado para la interacción plasmónica cúspide-cúspide. Para la generación de esta interacción usamos dos superficies metálicas, una de ellas contiene dos rendijas parabólicas, la distribución de carga es transferida por interacción Coulombiana a una segunda superficie, como esta esquematizado en la Fig. 4.5.

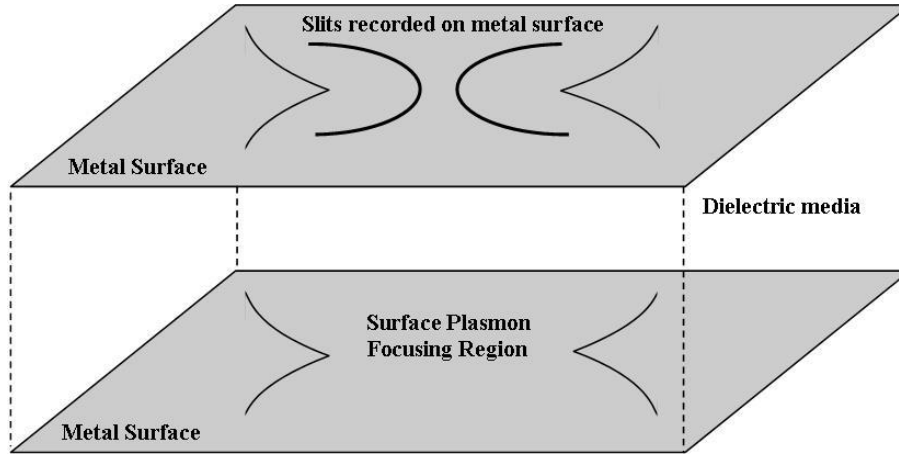


Fig. 4.5. Interacción entre dos regiones focales plasmónicas, donde las otras dos regiones focales plasmónicas son generadas por interacción Coulombiana.

Realizamos el análisis de la interacción utilizando la ecuación de transporte de Irradiancia.

$$\nabla_{\perp} \cdot (I(x_0, y_0, z) \nabla_{\perp} L(x_0, y_0, z)) = -\frac{\partial}{\partial z} I(x_0, y_0, z) , \quad (4.2.1.18)$$

donde ∇_{\perp} es el operador gradiente bidimensional actuando en el plano $x_0 - y_0$. La Irradiancia sobre un punto $P = (x_0, y_0, z)$ es generada por la contribución de cada región focal representada por $(x_0, y_0, z) = I_1 + I_2$, el termino de fase esta dado por $L = L_1 - L_2$, donde $L_{1,2} = kr_{1,2}$, k es el numero de onda y r_i es la distancia desde un punto de la condición de frontera a la detección del punto P . Considerando las coordenadas $(0, \pm a, 0)$ para los puntos sobre la condición de frontera y

un punto arbitrario $(0, y_0, z)$ sobre la trayectoria lineal que conecta los puntos cúspide, las funciones de distancia en la aproximación paraxial son

$$r_1 = \sqrt{(y_0 - a)^2 + z^2} \approx z + \frac{(y_0 - a)^2}{2z} \quad , \quad (4.2.1.19)$$

$$r_2 = \sqrt{(y_0 + a)^2 + z^2} \approx z + \frac{(y_0 + a)^2}{2z} \quad , \quad (4.2.1.20)$$

y los términos de fase toman la forma

$$kr_1 - kr_2 = -\frac{2ay_0k}{z} \quad . \quad (4.2.1.21)$$

Entonces, la ecuación de transporte de Irradiancia adquiere la forma

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left(\{I_1 + I_2\} \frac{\partial}{\partial y_0} (kr_1 - kr_2) \right) = -\frac{\partial(I_1 + I_2)}{\partial z} \quad . \quad (4.2.1.22)$$

Introduciendo la Eq. (4.2.1.21) en la Eq. (4.2.1.22), la ecuación diferencial parcial para la interacción de Irradiancia es

$$\frac{-2ak}{z} \frac{\partial}{\partial y_0} (I_1 + I_2) = \frac{\partial(I_1 + I_2)}{\partial z} \quad , \quad (4.2.1.23)$$

y el sistema correspondiente de ecuaciones características es

$$\frac{dy_0}{2ak} = \frac{dz}{z} \quad d(I_1 + I_2) = 0 \quad , \quad (4.2.1.24)$$

cuya solución está dada por

$$I_1 + I_2 = c_2 \quad , \quad \frac{y_0}{2ak} = \ln(z) + c_1 \quad (4.2.1.25)$$

Note que $z \neq 0$, dado que $z = 0$ corresponde con el plano de la transmitancia y ninguna caustica es generada todavía.

Esta solución concuerda con la distribución de Irradiancia mostrada en la Fig.4.6.

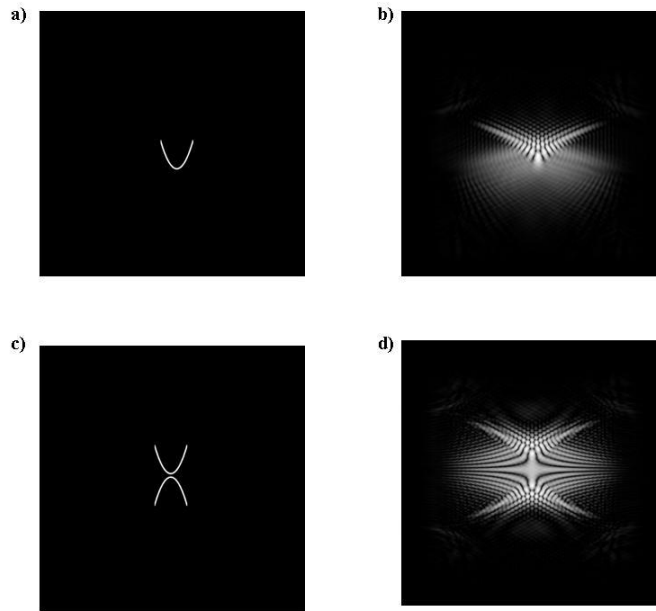


Fig.4.6. En a) mostramos la condición de frontera para generar la función Pearcey plasmónica mostrada en b). En c) mostramos la condición de frontera para generar las interacciones plasmónicas tipo Pearcey mostradas en d).

Presentamos un modelo teórico para describir la síntesis de carga usando campos plasmónicos emergiendo de una condición de frontera tipo rendija grabada en una superficie metálica. La función de curvatura de la geometría de la rendija es la responsable de que el campo plasmónico presente efectos de compresión, cuya evolución espacial genera regiones focales. La distribución de carga tiene la misma geometría que la región focal y esta fue analizada desde su función de fase. La función de curvatura sigue un comportamiento no lineal y la función de fase tiene asociada una función de catástrofe. El modelo fue aplicado a una función cuadrática, generando una función de catástrofe tipo Pearcey, donde la región focal tiene forma cúspide. Esta geometría fue implementada para describir la interacción entre campos plasmónicos de tipo cúspide, lo cual muestra que se genera un canal de Irradiancia entre la línea que conecta las regiones cúspide. El análisis fue implementado usando la ecuación de transporte de Irradiancia, las simulaciones por computadora corroboran las predicciones teóricas. Un importante tópico del estudio es el hecho de que la distribución de carga puede adquirir un comportamiento dinámico manifestado en distribuciones de corrientes locales cuando la rendija es iluminada con campos parcialmente coherentes, este comportamiento implica un rompimiento en las propiedades de simetría del campo plasmónico. El modelo realizado ofrece aplicaciones interesantes para el desarrollo de pinzas plasmónicas, efectos de resonancia y espectroscopia sintonizable.

5. Implementación de campos plasmónicos: efecto fotoeléctrico plasmónico, procesos resonantes, modos plasmónicos superficiales curvos.

En esta sección describimos la generación de regiones focales plasmónicas, los campos asociados son implementados para generar procesos físicos como el efecto fotoeléctrico. Esto es posible debido a que el campo eléctrico es muy intenso en las regiones focales.

5.1 Efecto fotoeléctrico plasmónico

El enfocamiento de un campo electromagnético propagándose en una superficie conductora puede generar efectos interesantes con potenciales aplicaciones al diseño de pinzas ópticas plasmónicas, capacitancia sintonizable, etc. [2]. Ha sido mostrado que un conjunto de estructuras plasmónicas pueden coexistir simultáneamente en una superficie metálica cuya propagación puede ser analizada desde el modelo de espectro angular. Desde esta representación es posible describir la generación de regiones singulares las cuales generan redistribuciones de carga que tienen asociados campos eléctricos [32].

Colocando una segunda superficie metálica en la vecindad del campo eléctrico, es posible crear un efecto novedoso análogo al efecto fotoeléctrico. Este efecto consiste en la emisión de electrones cuando una superficie metálica es iluminada con ondas electromagnéticas, cuyas frecuencias exceden su función de trabajo. Efectos similares son inducidos porque el campo eléctrico puede extraer electrones modificando la conductividad del medio.

Los campos plasmónicos elementales son generados por las oscilaciones colectivas de carga cuyo campo eléctrico es

$$\vec{E}_p = (\vec{\xi}) \exp\{-\alpha x\} \exp\{i\beta z\}, \quad (5.1)$$

donde β es la relación de dispersión, α es el término que describe el decaimiento del campo perpendicular a la superficie metálica y $\vec{\xi}$ es el vector de amplitud. La Eq. (5.1) satisface $\nabla \cdot \vec{E}_p = 0$. Usando el modelo de Huygens-Fresnel podemos representar la difracción plasmónica cuando una rendija de forma curva es iluminada como

$$\vec{E}_p = \exp\{-\alpha x\} \int \vec{\xi}(y, z) \delta[y - f(y)] \frac{\exp\{i\beta r\}}{r} dy. \quad (5.2)$$

Considerando una rendija de forma parabólica $f(y) = y^2$, el campo eléctrico toma la forma

$$\vec{E}_p = \exp\{-\alpha x\} \int \vec{\xi}(y) \frac{\exp\{i\beta[(y-y_0)^2 + (z_0 - f(y))^2]^{1/2}\}}{r} dy, \quad (5.3)$$

La función delta de Dirac genera una estructura de fase L dada por

$$\begin{aligned} L &= \beta((y - y_0)^2 + (z_0 - y^2)^2)^{1/2} = \beta[y^4 + y^2(1 - 2z_0) + y(-2y_0) + z_0^2 + y_0^2]^{1/2} \\ &= \beta[y^4 + ay^2 + by + c]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Las regiones focales son generadas por la envolvente de los puntos singulares de la función de fase que son obtenidos por la primera y segunda derivada de L

$$y = \left(-\frac{a}{3}\right)^{1/2} , \quad (5.5)$$

Implicando que la geometría de las regiones focales está dada por

$$a = \left(\frac{b}{c}\right)^{2/3} , \quad (5.6)$$

lo cual es de forma cúspide. Introduciendo la Eq. (5.6) en la Eq. (5.3) el campo eléctrico plasmónico es

$$\vec{E}_p = \exp\{-\alpha x\} \int \vec{\xi}(y) \frac{\exp\{i\beta(y^4 + ay^2 + b(a)y + c)^{1/2}\}}{r} dy . \quad (5.7)$$

En la ecuación previa, debe ser notado que $\nabla_a \cdot \vec{E}_p \neq 0$ genera una distribución de carga cuya representación es

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial a} \propto \varepsilon \exp\{-\alpha x\} \int \frac{i\beta}{2} \vec{\xi}(y) \frac{\exp\{i\beta(y^4 + ay^2 + b(a)y + c)^{-1/2}\} (y^2 + b'(a))}{r} dy. \quad (5.8)$$

Como conclusión parcial, las regiones singulares en el campo eléctrico plasmónico induce redistribuciones de carga que serán utilizadas para generar procesos como del efecto fotoeléctrico plasmónico .

5.1.1 Propuesta teórica

El sistema físico que se propone consiste en dos películas delgadas metálicas separadas por un medio dieléctrico. Sobre una de ellas hay una rendija de forma curva la cual genera campos plasmónicos de superficie cuando esta es iluminada como esta esquematizado en la Fig. 5.1. La propagación espacial genera redistribuciones de carga que inducen un campo eléctrico entre las placas. La energía almacenada entre las placas es

$$U \approx Fd \approx 2qEd , \quad (5.9)$$

lo cual es válido para un volumen pequeño limitado por la geometría de la distribución de carga como esta mostrado en la Fig.5.1.

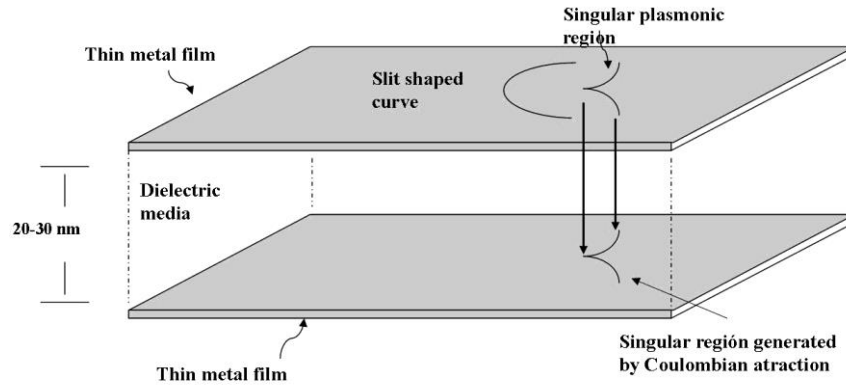


Fig.5.1. Dos placas metálicas delgadas con un medio dieléctrico entre ellas donde el campo plasmónico y su respectiva región focal son generadas

Cuando el valor de la energía excede la función de trabajo se espera el efecto fotoeléctrico plasmónico. Esto ocurre cuando

$$2qEd > \phi_c \quad , \quad (5.10)$$

Donde ϕ_c es la función de trabajo para la placa metálica de abajo esquematizada en la Fi.1. Un mejoramiento del modelo incluiría que las dos placas metálicas presenten diferentes funciones de trabajo.

Hemos mostrado que las regiones singulares plasmónicas inducen redistribuciones de carga la cual genera campos eléctricos intensos que es implementado para inducir como el efecto fotoeléctrico plasmónico. El modelo propuesto ofrece aplicaciones al grabado a escalas manométricas sobre superficies metálicas similar a los efectos de litografía.

5.2. Descripción de efectos resonantes y percolación en cúmulos de partículas inmersos en una distribución aleatoria de huecos

Es bien sabido que la luz puede ser guiada en un arreglo de guías de onda, es importante describir la propagación de un campo electromagnético en superficies metálicas o cúmulos de partículas [35].

En esta sección presentamos un análisis de efectos resonantes de partículas inmersas en un arreglo aleatorio de huecos colocados en una superficie metálica. Controlando la función de densidad de probabilidad es posible generar efectos de percolación. La percolación consiste en la generación de un camino que sigue una señal a través de un sistema [36]. El sistema bajo estudio esta mostrado en la Fig.5.2.a donde un cumulo de segundo y tercer orden son mostrados.

Por simplicidad consideramos solo el cumulo de segundo orden, la iluminación es perpendicular a la superficie metálica con polarización en la dirección z. El campo estimula al cúmulo generando un sistema de tres dipolos mostrado en la Fig.5.2.b. Representamos el sistema de dipolos por medio de un sistema mecánico de resortes sin masa.

5.2.1. Descripción de la distribución de los cúmulos y el arreglo de huecos en una superficie metálica

El cumulo sigue una distribución de Poisson dada por

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^k}{k!} e^{-\langle k \rangle} \quad , \quad (5.2.1)$$

donde $\langle k \rangle$ es el promedio de cúmulos de orden i rodeados por un arreglo aleatorio de huecos siguiendo una función de densidad de probabilidad de Bernoulli

$$P(n) = \binom{N}{n} q^n (1 - q)^{N-n} \quad , \quad (5.2.2)$$

donde N es el numero de celdas, n es el numero de celdas con hueco y q es la probabilidad de que en la celda exista un hueco mostrado en la Fig.5.2.a.

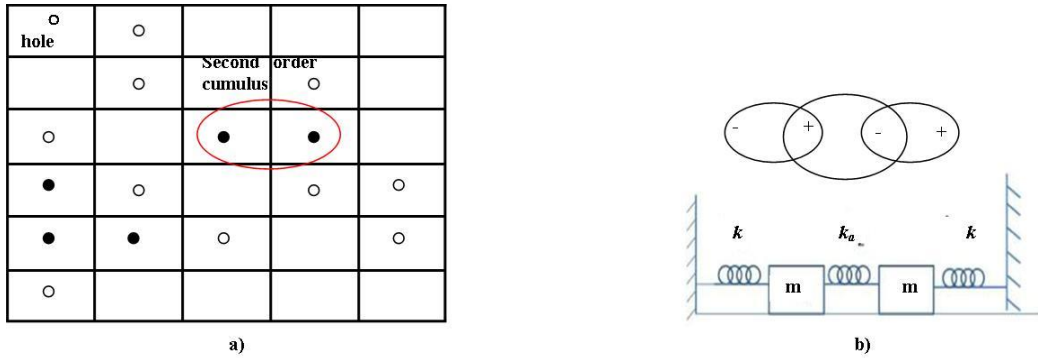


Fig.5.2. a) Distribución de huecos y cúmulos de partículas puestos sobre una superficie metálica. b) Sistema mecánico de resortes.

Para describir efectos resonantes proponemos un sistema análogo de cúmulos como será analizado en la siguiente sección.

5.2.2. Descripción de efectos de resonancia y percolación

El cumulo de segundo orden mostrados en la Fig.5.2.a es representado por un sistema mecánico de resortes con misma constante de restitución k y para el resorte de acoplamiento una constante k_a . Las ecuaciones de movimiento se obtienen desde el Lagrangiano dado por

$$L = K - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_a(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \right) \quad (5.2.3)$$

$$\ddot{X} + w^2 X = 0 \quad (5.2.3.a)$$

$$\ddot{X}' + (w^2 + 2w_a^2)X' = 0 \quad , \quad (5.2.3.b)$$

donde $= cte$, $\ddot{X} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$, $X = x_1 + x_2$, $\ddot{X}' = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$ y $X' = x_1 - x_2$. Las soluciones modales implican un comportamiento armónico y desde el sistema identificamos dos modos de vibración.

El primero es cuando la vibración tiene una frecuencia w y el segundo con frecuencia $w^2 + 2w_a^2$. La ultimas ecuaciones representan el movimiento del cumulo de segundo orden, considerando los efectos de los alrededores, esto es equivalente a un sistema de "masa reducida", es decir, $m \neq constante$, si hay mas huecos se espera que la interacción de los cúmulos con los huecos vecinos sea más fuerte.

Con los comentarios previos las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$m\ddot{X} + \dot{X} \frac{dm}{dt} + kX = 0 \quad , \quad (5.2.4)$$

$$m\ddot{X}' + \dot{X}' \frac{dm}{dt} + (k + 2k_a)X' = 0 \quad , \quad (5.2.5)$$

donde el cambio en la masa genera efectos de disipación.

Las soluciones de la Eq. (5.2.4) tienen la forma

$$X = \exp\{-\alpha t\}[c_1 \text{sen}(w't) + c_2 \text{cos}(w't)] \quad \text{con } X \in [0, \frac{L}{2}] \quad , \quad (5.2.6)$$

$$X = \exp\{\alpha t\}[c_1 \text{sen}(w't) + c_2 \text{cos}(w't)] \quad \text{con } X \in (\frac{L}{2}, 0] \quad , \quad (5.2.7)$$

donde la exponencial decreciente modula los términos oscilatorios, Fig.5.3.

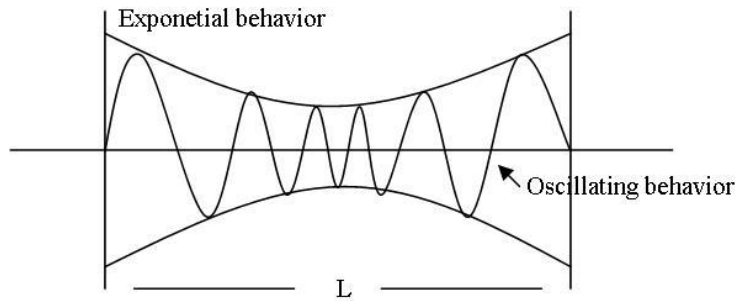


Fig.5.3. Solución de interacción para el cúmulo con huecos vecinos.

El significado físico es que cuando $X \in [0, \frac{L}{2}]$ el cúmulo transfiere energía a los huecos vecinos, el otro caso es cuando $X \in (\frac{L}{2}, 0]$ significando que los huecos regresan energía al cúmulo.

Ahora, los efectos de percolación ocurren cuando la energía es solo transferida del cúmulo al alrededor, las Eqs. (5.2.4,5.2.5) son transformadas como

$$m\ddot{X} + \dot{X} \frac{dm}{dt} + kX = F \quad , \quad (5.2.8)$$

$$m\ddot{X}' + \dot{X}' \frac{dm}{dt} + (k + 2k_a)X' = F \quad . \quad (5.2.9)$$

La solución de las ecuaciones previas genera una onda teniendo como fuente al cúmulo. Hemos descrito los efectos resonantes en un cúmulo de partículas de segundo orden inmersas en una distribución de huecos, el análisis fue hecho obteniendo las ecuaciones de movimiento para el sistema de tres dipolos representados por un sistema mecánico de resortes. Usando el concepto de masa reducida describimos la interacción entre el cúmulo y la distribución de huecos cuya solución muestra un comportamiento oscilatorio modulado por una función exponencial. Cuando P es aproximadamente la dimensión fractal el cúmulo transfiere energía a los huecos generando efectos de percolación.

5.3. Generación de modos plasmónicos superficiales curvos de largo recorrido y su propagación en un arreglo de películas delgadas metálicas.

Durante la última década la comunidad científica ha mostrado un interés en los modelos de campos plasmónicos debido a sus potenciales aplicaciones. En la presente sección enfatizamos el estudio de las trayectorias de correlación sobre una superficie metálica con estructura aleatoria. El modelo resultante ofrece aplicaciones al desarrollo de nano-antenas teniendo la posibilidad de un ancho de banda sintonizable [37]. Este tipo de estructuras tiene aplicaciones en la síntesis de nuevas fuentes de iluminación y el control de efectos magnéticos [38]. Describimos la síntesis de campos plasmónicos propagándose a lo largo de trayectorias curvas. Los efectos sintonizables son controlados con el parámetro de curvatura teniendo aplicaciones en espectroscopia Raman de superficie (SERS).

Usando el comportamiento evanescente del campo plasmónico, el análisis es extendido a la propagación de campos plasmónicos a través de un arreglo en tándem de películas delgadas metálicas con aplicaciones en el estudio de cristales fotónicos y puntos cuánticos [39,40].

Como punto de partida, describimos el estudio del campo eléctrico en la vecindad de una nanopartícula usando la aproximación electrostática [38]. El campo eléctrico corresponde con el plasmón partícula. Este modelo permite la descripción de la interacción entre dos plasmones partícula. La interacción es extendida para describir los campos plasmónicos propagándose sobre una superficie generando comportamiento ondulatorio satisfaciendo la ecuación de Helmholtz donde el número de onda debe tener valores complejos para recobrar los modelos tradicionales de plasmones superficiales.

Controlando la distribución aleatoria de nano partículas, analizamos los efectos de correlación llevándonos a inducir efectos de localización. Este ultimo enunciado se obtiene enmascarando la superficie delgada metálica con dos arreglos aleatorios de huecos independientes. Controlando los factores de escala, modificamos la curvatura de la trayectoria de correlación. El modelo es relacionado con un patrón de speckle emergiendo de una superficie rugosa [2]. Esta configuración es similar a la propuesta por Raether para el acoplamiento de campos plasmónicos. Se muestran resultados experimentales.

5.3.1. Análisis del plasmón partícula

El plasmón partícula corresponde con las distribuciones de corrientes superficiales de los átomos. El análisis es implementado aplicando la aproximación electrostática dada por

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad , \quad (5.3.1.1)$$

donde ϕ es una función potencial. Usando separación de variables en coordenadas cartesianas sobre el plano $x - y$, la ecuación adquiere la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad (5.3.1.2)$$

Proponiendo la solución como

$$\phi = X(x)Y(y) \quad , \quad (5.3.1.3)$$

obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{X} - \alpha^2 X &= 0 \\ \ddot{Y} + \alpha^2 Y &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.3.1.4)$$

donde la constante de acoplamiento α es un numero complejo teniendo la forma $\alpha = a + ib$. Esta condición es necesaria porque perturbando el campo, debe adquirir un comportamiento propagante como se muestra abajo. Resolviendo para X , tenemos que

$$X = c_1 e^{cx} e^{idx} + c_2 e^{cx} e^{-idx} , \quad (5.3.1.5)$$

y la solución para Y esta dada por

$$Y = D_1 e^{icy} e^{-dy} . \quad (5.3.1.6)$$

Entonces la solución completa para ϕ adquiere la forma

$$\phi = A e^{cx} e^{idx} e^{-dy} e^{icy} , \quad (5.3.1.7)$$

con $c < 0$ y $d > 0$. La ecuación previa representa la condición de frontera para el campo plasmónico.

5.3.2. Descripción de la interacción entre plasmones partícula

El modelo es extendido para describir la propagación del campo eléctrico. Para esto, proponemos que la aproximación electrostática no se cumple mas adquiriendo la forma de la ecuación de Helmholtz teniendo la forma

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 . \quad (5.3.2.1)$$

Fijándonos en la propagación a lo largo de la coordenada x , la ecuación anterior adquiere la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0 , \quad (5.3.2.2)$$

donde k es el numero de onda complejo $k = k_1 + ik_2$. Proponiendo una solución de la forma $\phi = X(x)Y(y)$, obtenemos el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{aligned} \ddot{X} + (k^2 - h^2)X &= 0 \\ Y + \alpha^2 Y &= 0 , \end{aligned} \quad (5.3.2.3)$$

cuya solución adquiere la forma

$$\phi_p = M e^{\gamma x} e^{i\Omega x} e^{-dy} e^{icy} , \quad (5.3.2.4)$$

esta ecuación debe recobrar la estructura de la aproximación electrostática para una sola nano partícula. De la solución previa es fácilmente identificar su comportamiento. A lo largo de la coordenada y el campo es rodeado por el termino exponencial el cual permanece sin perturbarse

por la presencia de una segunda partícula, la interacción ocurre principalmente en la coordenada x . Este comportamiento puede ser generalizado adquiriendo un efecto ondulatorio. Una relación de balance entre el número de onda complejo k con la constante de acoplamiento α puede predecirse, esta interacción decrece el término evanescente y el término propagante se vuelve dominante. Esta interacción se muestra en la Fig. 5.4.

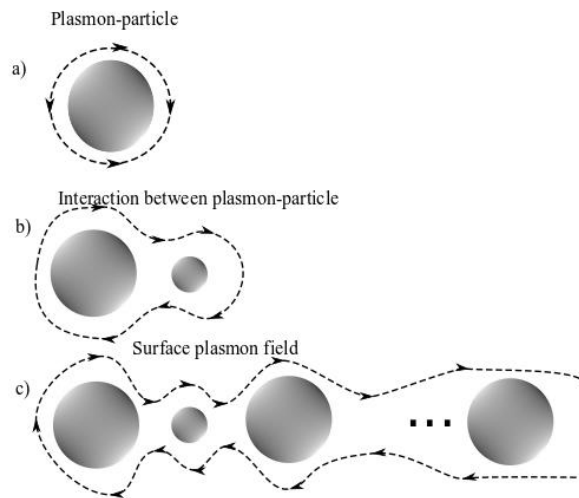


Fig. 5.4. a) Campo eléctrico localizado para un plasmón partícula. b) Interacción entre dos plasmones partícula. c) Describe la generación del campo plasmónico superficial en un arreglo de nano partículas.

En la Fig. 5.4.a la aproximación electrostática es válida para una sola nano partícula, el comportamiento ondulatorio es generado por otro conjunto de partículas interactuando mostrado en la Fig. 5.4.c. Hasta este punto tenemos descrita la generación de una onda propagándose en la coordenada x , este análisis puede ser extendido a la propagación en el plano $x - y$ lo cual será analizado en la siguiente sección.

5.3.3. Descripción estadística de trayectorias de correlación

En la presente sección, describimos la transferencia de las propiedades estadísticas del modelo de caminata aleatoria anisotrópica bidimensional para generar propagación ondulatoria sobre una superficie metálica generando un modo plasmónico superficial curvado. Describimos la trayectoria en un arreglo bidimensional, empezando desde el punto P con coordenada $(0,0)$. La caminata aleatoria es caracterizada por un conjunto de puntos distribuidos aleatoriamente y la trayectoria puede ser obtenida desde la función de correlación correspondiendo al flujo de la corriente de probabilidad.

Las propiedades estadísticas de una distribución aleatoria de puntos pueden ser transferidas para inducir y controlar importantes efectos físicos. Por ejemplo, se sabe que la distribución de amplitud de un patrón de Speckle sigue una estadística Gaussiana [41,42]. La estadística del patrón de Speckle es empatada con una distribución de huecos aleatorios y esto se transfiere sobre una superficie metálica mostrado en la Fig.5.5. El análisis es obtenido enmascarando la superficie metálica la cual es considerada formada por un conjunto de celdas cuadradas. La probabilidad de un hueco estando

en el centro de cada celda es P ; luego, la probabilidad de la ausencia del hueco es $(1 - P)$. La superficie contiene N celdas y la probabilidad de que la superficie contenga n huecos, asumiendo una distribución de Bernoulli es

$$P(n) = \binom{N}{n} P^n (1 - P)^{N-n}. \quad (5.3.3.1)$$

Cuando el número de celdas N se incrementa, la distribución de Bernoulli tiende a una distribución Gaussiana de la forma

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.3.3.2)$$

donde σ^2 es la variancia. Se pueden identificar propiedades interesantes identificando por medio de la descripción de la auto correlación en este tipo de distribuciones. El caso más simple ocurre cuando dos pantallas son superpuestas y subsecuentemente, una de ellas se rota un ángulo pequeño. Para entender la generación de la trayectoria de auto correlación, nos enfocamos en un solo hueco. En este caso, es evidente que el hueco sigue un arco circular uniendo todos los puntos de probabilidad constante, y la trayectoria de correlación completa es un círculo. El resultado en este caso es mostrado en la Fig. 5.6.a. La trayectoria de correlación puede ser controlada induciendo un factor de escala en la distribución de puntos aleatorios. Superponiendo las dos pantallas de nuevo, es evidente que el factor de escala cambia el punto a lo largo de una trayectoria lineal perpendicular a las regiones de probabilidad constante las cuales son conjuntos de círculos, como se deduce del argumento de la distribución Gaussiana. El análisis es presentado de manera equivalente para un patrón de Speckle usando el hecho de que ambos tienen la misma distribución de probabilidad. En la Fig. 5.6.b, mostramos estas trayectorias de correlación. Finalmente, introduciendo una pequeña rotación, las trayectorias lineales están curvadas, como se muestra en la Fig.5.6.c.

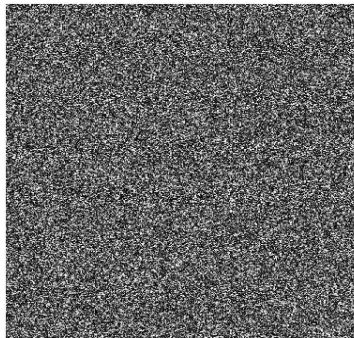


Figure 5.5. Speckle pattern generated with a roughness surface illuminated with a plane wave.

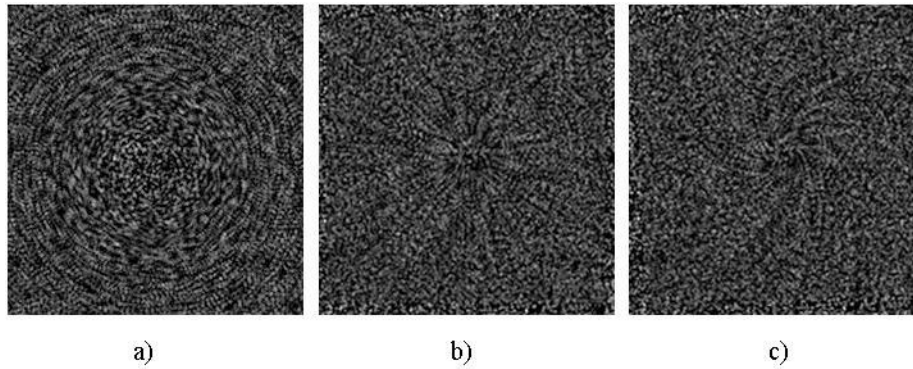


Fig.5.6. a) Conjunto de puntos siguiendo una distribución Gaussiana. b) Función de correlación entre dos conjuntos de puntos Gaussianos donde una máscara fue rotada un ángulo pequeño. c) Trayectorias de flujo de probabilidad entre dos máscaras, una de ellas esta escalada aproximadamente el 95% sin rotarse.

Este resultado puede ser explicado como sigue: la función de correlación de dos superficies escaladas y rotadas tiene la forma

$$\begin{aligned} & \rho_1(x, y) \cdot \rho_2(x', y') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{[d(x\cos\theta + y\sin\theta)]^2 + [d(-x\sin\theta + y\cos\theta)]^2}{2\sigma_2^2}\right\} \end{aligned} \quad (5.3.3.3)$$

Analizando el argumento de la función exponencial como una forma cuadrática, esto puede mostrar que las curvas de correlación constante son elipses, presentando un sistema de referencia donde adquieren la forma canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad (5.3.3.4)$$

La probabilidad fluye a través de las trayectorias perpendiculares entre dos regiones de probabilidad constante cuya ecuación diferencial está dada por

$$y' = \frac{b^2 y}{a^2 x} \quad . \quad (5.3.3.5)$$

La solución correspondiente es

$$y = cx^\alpha \quad , \quad (5.3.3.6)$$

donde c es una constante arbitraria y $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$, la cual contiene la información acerca de la escala entre dos procesos probabilísticos.

5.3.4. Descripción grafica e implementación experimental de la trayectoria de correlación

Una parte fundamental de este capítulo consiste en describir un método para generar campos plasmónicos superficiales propagándose a lo largo de trayectorias predeterminadas. Esto se puede obtener analizando la función de correlación entre dos pantallas donde cada una tiene una distribución aleatoria de huecos siguiendo una determinada función de densidad de probabilidad. Este método tiene la característica de que la geometría de la trayectoria de correlación presenta curvatura sintonizable lo cual permite la posibilidad de generar plasmones de largo recorrido. Un modelo alternativo para generar trayectorias de correlación curvas es realizado usando un patrón de speckle como se muestra en la Fig.5.7.

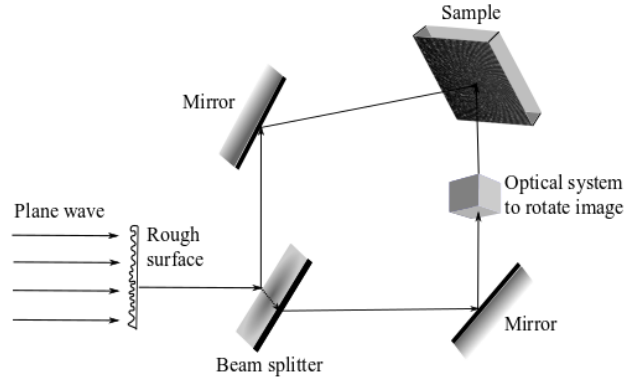


Fig. 5.7. Sistema experimental para generar trayectorias de correlación para un patrón de speckle.

El sistema óptico que rota la imagen puede ser un prisma tipo Dove. Modificando la configuración de iluminación usando un haz convergente y cambiando la distancia relativa entre dos patrones de speckle obtenidos por medio de un ligero movimiento en uno de los espejos se introduce un factor de escala. La superposición en irradiancia entre dos patrones de speckle genera las deseadas trayectorias de correlación. El patrón de speckle es mostrado en la Fig.5.5.

Se sabe que la función de irradiancia para un patrón de speckle tiene asociada una función de densidad de probabilidad tipo exponencial decreciente. El termino decreciente puede ser empatado con la razón de decaimiento del modo plasmónico. Esta configuración permite mejorar la generación de campos plasmónicos evitando el enmascaramiento de la superficie metálica la cual debe ser hecha con técnicas de litografía. Las trayectorias de correlación deseadas pueden ser implementadas en la siguiente sección para describir un plasmón de superficie. Por el hecho de que la correlación ocurre en una trayectoria curva, esperamos que el plasmón superficial presente comportamiento magnético.

5.3.5 Generación de modos plasmónicos superficiales curvos.

La descripción estadística previa será usada para la síntesis de modos plasmónicos superficiales. La expresión para el campo eléctrico de un modo plasmónico superficial elemental propagándose a lo largo del eje z esta dada por

$$E(x, z) = (\hat{i}a + \hat{k}b)exp\{-ax\}exp\{i\beta z\} , \quad (5.3.5.1)$$

donde $\beta = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)^{1/2} = \xi + i\eta$ es la relación de dispersión y ϵ_1, ϵ_2 representan la permitividad del dieléctrico y el metal respectivamente. Rotando el sistema de referencia a lo largo del eje x , el plasmón elemental superficial adquiere la forma

$$E(x, z) = (\hat{i}a + \hat{j}b\sin\theta + \hat{k}b\cos\theta) \times \exp\{-\alpha_1 x\} \exp\{i\beta(z\cos\theta + y\sin\theta)\} \quad (5.3.5.2)$$

Usando la relación funcional dada por la Eq. (5.3.3.6), la expresión para el modo plasmónico curvado está dada por

$$E(x, y) = (\hat{i}a + \hat{j}b\sin\theta + \hat{k}b\cos\theta) \times \exp\{-\alpha_1 x\} \exp\{i\beta(y^\alpha \cos\theta + y\sin\theta)\} \quad (5.3.5.3)$$

Por medio de las ecuaciones de Maxwell, podemos obtener la expresión para el campo magnético y el flujo de energía por el vector de Poynting.

Para el sistema experimental, proponemos iluminar una placa delgada de Au (grosor $\sim 20 - 40 \text{ nm}$) con un patrón de speckle correlacionado como se muestra en la Fig. 5.7. La iluminación consiste en dos patrones de speckle, cada uno es visualizado como un conjunto de motas circulares distribuidas aleatoriamente siguiendo una función de probabilidad Gaussiana. La longitud de onda es de $\lambda = 1550 \text{ nm}$. Los parámetros geométricos están de acuerdo con los reportados en [15]. La curva de correlación corresponde al modo plasmónico superficial dado por la Eq. (5.3.5.3). Notablemente, las propiedades estadísticas del patrón de speckle son transferidas a la superficie metálica como el modo plasmónico propagándose a lo largo de la trayectoria de correlación. Para permitir la generación de un modo plasmónico superficial de largo recorrido, la longitud de correlación debe ser menor que 2μ para garantizar los efectos resonantes [43,44], esto puede ser controlado con los parámetros de rugosidad de la superficie implementada para generar el patrón de speckle evitando el decaimiento a lo largo de la trayectoria de correlación.

El sistema experimental esta esquematizado en la Fig. 5.8.

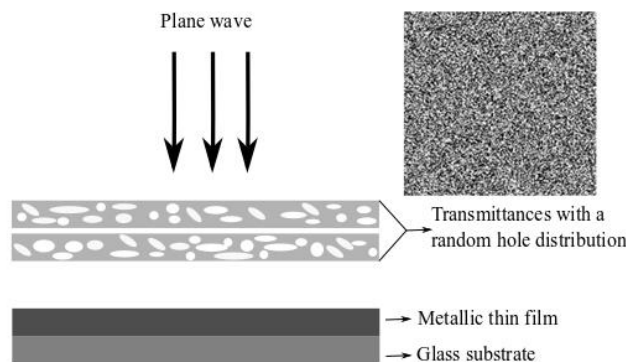


Fig. 5.8. Superficie metálica enmascarada, la longitud de onda típica es IR.

El análisis presentado puede ser extendido a otras configuraciones plasmónicas lo cual será presentado en la siguiente sección.

5.3.6. Propagación en un arreglo en tándem de películas delgadas metálicas

La extensión natural del análisis presentado es el transferir el modo plasmónico a un arreglo en tándem de películas delgadas metálicas, mostrado en la Fig. 5.9. Esto es posible usando el comportamiento evanescente a lo largo del eje x del campo plasmónico superficial curvado. Este comportamiento ha sido implementado para generar una redistribución de un campo óptico a lo largo de un arreglo de guías de onda [45]. En este modelo, el carácter evanescente es usado para tunelar el campo óptico.

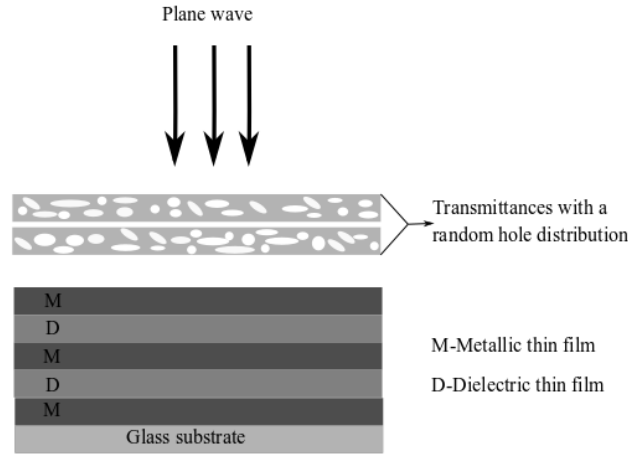


Fig.5.9. Arreglo en tándem para propagar un campo plasmónico, el ancho del metal es 20 – 40 nm y la película dieléctrica es 20 – 40 nm .

La transmisión del modo plasmónico satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$i \frac{dE_n}{dz} + \beta E_n + C_{n+1} E_{n+1} + C_{n-1} E_{n-1} = 0$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.3.6.1)$$

donde β es la relación de dispersión y C_i representa la constante de acoplamiento la cual depende de la separación relativa entre superficies vecinas [46]. La solución de la ecuación previa es similar a la presentada en [45]; sin embargo, para asociar significado físico la constante de acoplamiento C_i presentamos el análisis de dos películas metálicas delgadas.

El caso más simple ocurre cuando el sistema está formado por dos películas delgadas metálicas separadas por un medio dieléctrico cuyo grosor debe ser menor que 50 nm . El decaimiento evanescente depende del módulo del cociente de la permitividad [47] y en este grosor es posible generar múltiples efectos [45]. El sistema de ecuaciones (5.3.6.1) adquiere la forma

$$i \frac{dE_1}{dz} + \beta E_1 + C_2 E_2 = 0 ,$$

$$i \frac{dE_2}{dz} + \beta E_2 + C_1 E_1 = 0 . \quad (5.3.6.2)$$

Reescribiendo en su forma matricial, obtenemos

$$i \begin{pmatrix} \frac{dE_1}{dz} \\ \frac{dE_2}{dz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta & c_2 \\ c_1 & \beta \end{pmatrix} . \quad (5.3.6.3)$$

Puede ser deducido que, como consecuencia de la conservación de la energía, la estructura de la matriz debe ser simétrica. Esto indica que $c_1 = c_2 = c$ y la solución general es

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \exp(\lambda_1 z) + d_2 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \exp(\lambda_2 z) , \quad (5.3.6.4)$$

donde d_i representan constantes arbitrarias, $\xi_{1,2}$ y $\eta_{1,2}$ representan los eigenvectores con eigenvalores $\lambda_{1,2}$ satisfaciendo la ecuación característica dependiendo de la constante de acoplamiento

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm c . \quad (5.3.6.5)$$

Más aun, se sabe que los eigenvectores deben ser complejos [48]. Entonces sin pérdida de generalidad, la solución puede ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(\lambda_1 z) , \quad (5.3.6.6)$$

lo cual indica que el cambio generad entre cada modo plasmónico presenta propiedades similares como en la teoría de acoplamiento de modos [46]. Este análisis nos lleva a la expresión para el modo plasmónico como

$$\begin{aligned} E_1 &= A \vec{\xi} \exp(-|\alpha x|) \exp(i\beta s) \\ E_2 &= iA \vec{\xi} \exp(-|\alpha x|) \exp(i\beta s) \end{aligned} , \quad (5.3.6.7)$$

donde $\vec{\xi}$ es un vector unitario tangente a la curva de correlación y s es la longitud de arco sobre la misma curva, remarcamos que la trayectoria de correlación esta dad por la Eq. (5.3.5.3).

La Eq. (5.3.6.4) describe el acoplamiento evanescente a través de un arreglo en tándem de películas delgadas metálicas. Notemos que las condiciones de frontera del campo eléctrico indican que la geometría del campo plasmónico generado en la primera película delgada metálica debe ser preservada en todas las superficies. Esto muestra que la transmisión de un modo plasmónico curvado permite inducir propiedades magnéticas en el sistema [49-52].

6. Conclusiones

En esta tesis se describieron procesos de coherencia parcial para campos plasmónicos, el estudio se logró estableciendo una analogía con procesos de polarización parcial clásica. En particular, se encontró un conjunto de parámetros de Stokes para campos plasmónicos totalmente coherentes sobre tres planos mutuamente perpendiculares.

El estudio se extendió a parámetros de Stokes para campos plasmónicos parcialmente coherentes y polarizados, en donde los promedios estadísticos se obtuvieron utilizando una expansión de las funciones *seno* y *coseno* en términos de la función *Bessel*.

Debido a que usamos plasmones superficiales *cosenoidales* interferidos y el campo resultante depende de las coordenadas espaciales (y, θ) , se puede controlar el ángulo con el cual interfieren estos campos y por consiguiente podemos modificar el estado de polarización en las franjas de interferencia, el ejemplo prototipo corresponde a la franja de orden cero. Se describieron los procesos de coherencia parcial y polarización parcial mediante la matriz de coherencia, en un mismo punto, pero considerando la naturaleza vectorial del campo eléctrico.

El punto de vista teórico presentado en este estudio permite la incorporación de otros efectos como la percolación [52], cuyas principales características son que el campo plasmónico presenta propiedades fractales lo cual son el origen de las propiedades magnéticas implícitas en la trayectoria curva de los modos plasmónicos. El modelo presentado puede ser extendido mediante la implementación de diferentes geometrías para las distribuciones de huecos lo cual modifica los efectos resonantes plasmónicos. Notablemente, las trayectorias curvas tienen asociadas regiones focales y, por tanto, la correspondiente singularidad magnética ofrece la posibilidad de implementación en la generación de espejos magnéticos.

Las propiedades estadísticas de la distribución de huecos aleatorios o equivalentemente el patrón de speckle fueron transferidos a una superficie metálica para establecer las condiciones para generar modos plasmónicos curvados de largo recorrido. En el caso de la distribución de huecos puede ser implementado enmascarando una película delgada metálica con dos pantallas que permitan controlar la trayectoria de correlación cuya geometría corresponde a un modo plasmónico curvado. Otra posibilidad fue iluminando la película delgada metálica con dos patrones de speckle correlacionados. Una importante consecuencia de estas configuraciones es que el conjunto de modos plasmónicos superficiales curvados presentan estructura de vórtices que permiten inducir propiedades magnéticas [51]. Usando el carácter evanescente de los modos plasmónicos, el campo eléctrico fue transferido a la propagación en un arreglo en tándem de películas delgadas metálicas ofreciendo aplicaciones al diseño de cristales fotónicos con propiedades magnéticas sintonizables. Finalmente, remarcamos que el análisis presentado ofrece aplicaciones a cristales fotónicos, así como diseño de metamateriales [53-57]. Rompiendo la periodicidad o incorporando otro tipo de metal sobre una región seleccionada es como si se dopara la estructura y entonces es posible inducir efectos de localización. La generación de plasmones usando patrones de speckle ofrece la posibilidad de incorporar un comportamiento sintonizable de la trayectoria de correlación que a su vez ofrece aplicaciones en el desarrollo de antenas plasmónicas [55], esto es posible porque reemplazando la onda plana por una onda parcialmente coherente, es posible controlar los efectos de resonancia entre huecos vecinos revirtiendo la dirección de propagación del modo plasmónico.

7. BIBLIOGRAFÍA Y FUENTES

- [1] Nelson Darío Gómez Cardona, “Modelización y realización experimental de sensores de campo evanescente basados en resonancia de plasmones de superficie en fibras ópticas”, Universidad Nacional de Colombia.
- [2] M H. Raether, “*Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*”, Vol. 111 of Springer tracts in modern physics, Springer-Verlag, Berlin, (1988)
- [3] J.M. Pitarke, V.M. Silkin, E.V. Shulkov and P.M. Echenique, “Theory of Surface plasmons and surface-plasmons polaritons” Rep. Prog. Phys. 70, 1-87, (2007)
- [4] E. Hecht, “*Óptica*”, Addison Wesley, Madrid, 2000.
- [5] R.M.A. Azzam, N.M. Bashara, “*Ellipsometry and Polarized light*”, North-Holland, (1979)
- [6] Brzobohatý, O., Šiler, M., Trojek, J., Chvátal, L., Karásek, V. and Zemánek, P. "Non-spherical gold nanoparticles trapped in optical tweezers: shape matters," Opt. Express 23, 8179-8189 (2015).
- [7] G. Martínez-Niconoff, P. Martínez Vara, J. Muñoz Lopez, J.C. Juárez M and A. Carbajal Domínguez, “Partially coherent surface plasmon modes,” Journal European Of the Optical Society JEOS 6, 11009, (2011)
- [8] Mandel, L. and Wolf, E., [Optical coherence and quantum optics], Cambridge U. Press, UK, (1995).
- [9] H. F. Ghaemi, Tineke Thio, and D. E. Grupp, T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, “Surface plasmons enhance optical transmission through subwavelength holes” Phys Rev. B, 58, 11, (1998)
- [10] W. L. Barnes, A. Dereux and T.W. Ebbesen, “Surface *plasmon* subwavelength optics”, Nature, 424, 14, 824, (2003)
- [11] G. Martínez Niconoff, J.A. Sanchez-Gil, H.H. Sanchez, and A. Perez-Leija “Self-imaging and caustics in two-dimensional surface plasmon optics,” Opt. Comm., **281**, 2316-2320, (2008)
- [12] G.N Watson, “*A treatise on the theory of Bessel functions*”, Cambridge University Press, (1966)
- [13] W. Liu, D. N. Neshev, I. V. Shadrivov, A. E. Miroshnichenko, and Y. S. Kivshar, “Plasmonic Airy beam manipulation in linear optical potentials,” Opt. Lett., **36** 1164-1166, (2011)
- [14] Roxworthy, B. J. and Toussaint, K. C. "Femtosecond Plasmonic Optical Tweezers Using GoldBowtie Nanoantenna Arrays," in Frontiers in Optics 2012/Laser Science XXVIII, OSA Technical Digest (online) (Optical Society of America, 2012), paper FW1G.3.
- [15] G. Martínez Niconoff, P. Martínez Vara, G. Díaz Gonzalez, J.Silva Barranco and A. Carbajal Domínguez, “Surface Plasmon Singularities”, International Journal of Optics, 152937, (2012)
- [16] J.F Nye, “Polarization Effects in the Diffraction of Electromagnetic Waves: The Role of Disclinations”, Proc. R. Soc. Lond. A 1983 387, (1983)
- [17] I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, 1989).
- [18] M. V. Berry and C. Upstill, “Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns,” in *Progress in Optics* Vol. XVIII, E. Wolf, ed. (North Holland, 1980). [19] G. Martínez-Niconoff, J. Carranza, and A. C. Rodríguez, “Caustics of diffraction fields,” Opt. Commun. 114(3- 4), 194–198 (1995).
- [20] J. F. Nye, *Natural Focusing and Fine Structure of Light* (IOP Publishing, 1999).
- [21] Y. S. Kivshar and E. A. Ostrovskaya, “Optical Vortices: Folding and twisting waves of light,” Opt. Photonics News 12(4), 24–28 (2001).
- [22] G. Martínez-Niconoff, J. Muñoz-Lopez, J. Silva-Barranco, A. Carbajal-Domínguez, and P. Martínez-Vara, “Self-focusing transmittances,” Opt. Lett. 37(11), 2121–2123 (2012).
- [23] M. R. Dennis, K. O’Holleran, and M. J. Padgett, “Singular optics: optical vortices and polarization singularities,” *Progress in Optics* Vol. 53, E. Wolf, ed. (Amsterdam-Elsevier, 2009).

- [24] M. S. Soskin, V. N. Gorshkov, M. V. Vasnetsov, J. T. Malos, and N. R. Heckenberg, "Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices," *Phys. Rev. A* **56**(5), 4064–4075 (1997).
- [25] P. Vaity and R. P. Singh, "Topological charge dependent propagation of optical vortices under quadratic phase transformation," *Opt. Lett.* **37**(8), 1301–1303 (2012).
- [26] A. M. Amaral, E. L. Falcão-Filho, and C. B. de Araújo, "Characterization of topological charge and orbital angular momentum of shaped optical vortices," *Opt. Express* **22**(24), 30315–30324 (2014).
- [27] G. Martinez-Niconoff, S. I. De Los Santos, J. Silva-Barranco, J. A. Martinez, P. Martinez-Vara, and J. C. Ramirez-San Juan, "Kinematic of focusing regions," *J. Opt.* **16**(8), 085704 (2014).
- [28] J. D. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia, and M. R. Dennis, "Auto-focusing and self-healing of Pearcey Beams," *Opt. Express* **20**(17), 18955–18966 (2012).
- [29] C. Dorrer and J. D. Zuegel, "Optical testing using the transport-of-intensity equation," *Opt. Express* **15**(12), 7165–7175 (2007).
- [30] De Angelis, F., Proietti Zaccaria, R. and Di Fabrizio, E. "Mapping the local dielectric response at the nanoscale by means of plasmonic force spectroscopy," *Opt. Express* **20**, 29626-29633 (2012).
- [31] Martinez-Niconoff, G., Carranza-Gallardo, J., Cornejo-Rodriguez, A. and Ley-Koo, E. "Design of projective zone plates and their focusing properties," *Opt. Lett.* **22**, 594-596 (1997).
- [32] Martínez-Niconoff, G., De Los Santos-García, S. I., Torres-Rodríguez, M. A., Suárez Xique, R., Vargas-Morales, M., Martínez Vara, P. and Carbajal-Domínguez, A. "Topological properties of the interaction between focusing regions kind cusped," *Opt. Express* **24**, 14648-14653 (2016).
- [33] Gilmore, R., [Catastrophe theory for scientists and Engineers], Ed. Dover Publications Inc. , New York, (1981).
- [34] Elsgolts, L., [Differential Equations And The Calculus Of Variations], Ed. Mir, Moscu, (1969).
- [35] G. Martinez Niconoff, M.A. Torres Rodriguez, M. Vargas Morales, S.I. De Los Santos Garcia, P. Martinez Vara, and A. Carbajal-Dominguez, "Generation of long-range curved-surface plasmonic modes and their propagation through thin metal films in a tandem array," *App. Opt.* Vol.56, 8996-8999, 2017.
- [36] D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to percolation Theory*, Revised Second edition (CRC Press 1994).
- [38] R. Aroca. Surface-enhanced vibrational spectroscopy, J. Wiley and sons (2006).
- [39] V. Berger. Nonlinear Photonic Crystals. *Physics Review Letters* **81**, 4136, (1998).
- [40] S. O'Brien, & J. B. Pendry. "Photonic band-gap effects and magnetic activity in dielectric composites. *Journal of Physics: Condensed Matter*, **14**, 15, (2002).
- [41] F. Spitzer, *Principles of random walk*, Springer (2001).
- [42] J. W. Goodman. Statistical properties of laser speckle patterns. In *Laser speckle and related phenomena* (9–75). Springer Berlin Heidelberg (1975).
- [43] Jung et al J. Au/SiO₂ Nanoring Plasmon waveguides at optical communication Band. *Journal of Lightwave Technology*, **25**(9), 2757-2765 (2007).
- [44] A. Ahmadvand1, S. Golmohammadi. Electromagnetic plasmon propagation and coupling through gold nanoring heptamers: a route to design optimized telecommunication photonic nanostructures. *Appl. Opt.* **53**(18), 3832-3849 (2004).
- [45] L. Martin, G. Di Giuseppe, A. Perez Leija, R. Keil, F. Dreisow, M. Heinrich, S. Nolte, A. Szameit, A. F. Abouraddy, D. N. Christodoulides, B. A. Saleh. Anderson localization in optical waveguide arrays with off-diagonal coupling disorder, *Optics Express*, **19**, 14, (2011).

- [46] B. M. Rodriguez-Lara, F. Soto-Eguibar, A. Zarate Cardenas, & H. M. Moya-Cessa. A classical simulation of nonlinear Jaynes–Cummings and Rabi models in photonic lattices, *Optics Express*, **21**, 1012888 (2013).
- [47] S. Y. Lee, J. Park, M. Kang, & B. Lee. Highly efficient plasmonic interconnector based on the asymmetric junction between metal-dielectric-metal and dielectric slab waveguides. *Optics express*, **19**(10), 9562–9574 (2011).
- [48] M. W. Hirsch, S. Smale, & R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, (2012).
- [49] A. R. McGurn, A. A. Maradudin, & V. Celli. Localization effects in the scattering of light from a randomly rough grating. *Physical Review B*, **31**(8), 4866 (1985).
- [50] R. Zia, J. A. Schuller, and M. L. Brongersma. Near-field characterization of guided polariton propagation and cutoff in surface plasmon waveguides. *Physics Review, B* **74** (165415), (2006).
- [51] M. Engelhardt, K. Langfeld, H. Reinhardt & O. Tennert. Deconfinement in SU(2) Yang-Mills theory as a center vortex percolation transition. *Physics Review, D* **61**(054504), (2000).
- [52] D. Enders, T. Nagao, A. Pucci, T. Nakayama, & M. Aono. Surface-enhanced ATR-IR spectroscopy with interface-grown plasmonic gold-island films near the percolation threshold. *Physical Chemistry Chemical Physics*, **13**(11), 4935–4941 (2011).
- [53] L. Maigyte, & K. Staliunas. Spatial filtering with photonic crystals. *Applied Physics Reviews*, **2**(1), 011102 (2015).
- [54] X. Zheng, W. Smith, J. Jackson, B. Moran, H. Cui, D. Chen, & C. M. Spadaccini. Multiscale metallic metamaterials. *Nature Materials*, **15**, 1100–1106 (2016).
- [55] P. Zhang, Y. Hu, D. Cannan, A. Salandrino, T. Li, R. Morandotti, & Z. Chen. Generation of linear and nonlinear nonparaxial accelerating beams. *Optics letters*, **37**(14), 2820–2822 (2012).
- [56] P. Yeh. *Introduction to photorefractive nonlinear optics*, J. Wiley and Sons, 47-61, 1993.
- [57] P. Prasad. *Nanophotonics*, J. Wiley and sons (2004).

8. Apéndices

APENDICE A

Mostrar que la función de correlación dada por la ecuación (3.5.2.3) satisface la ecuación de *Helmholtz*:

$$\nabla^2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle + k^2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle = 0$$

Muestra:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2^* \rangle = E_{12} &= \iiint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\ &\times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\ &+ \iiint H \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\ &\times \exp\{i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\ &+ 2\text{Re} \iiint K \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\ &\times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv', \end{aligned}$$

con $D = \langle A(u, v)A^*(u', v') \rangle$, $H = \langle B(u, v)B^*(u', v') \rangle$ y $K = \langle A(u, v)B^*(u', v') \rangle$.

Haciendo el análisis por términos, entonces:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \left[\iiint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iiint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iiint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint \iint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\
& = (i2\pi u)^2 \iint \iint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\
& + (i2\pi v)^2 \iint \iint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\
& + (i2\pi p)^2 \iint \iint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\
& = [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2] \iint \iint D \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\
& \quad \times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv'.
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \left[\iint \iint H \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \right] \\
& = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint \iint H \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\
& = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iint \iint H \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\
& = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint \iint H \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \\
& = [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2] \iint \iint H \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \\
& \quad \times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv'.
\end{aligned}$$

Por ultimo:

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \left[2\text{Re} \iint \iint K \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\} \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\} dudvdu' dv' \right] \\
& = [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2] 2\text{Re} \iint \iint K \exp\{i2\pi(xu + yv + zp)\}
\end{aligned}$$

$$\times \exp\{-i2\pi(x'u' + y'v' + z'p')\}dudvdu'dv'.$$

Entonces sustituyendo en la ecuación de *Helmholtz*:

$$\begin{aligned} [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2]E_{12} + k^2E_{12} &= (-4\pi^2u^2 - 4\pi^2v^2 - 4\pi^2p^2)E_{12} + k^2E_{12} \\ &= -4\pi^2(u^2 + v^2 + p^2)E_{12} + k^2E_{12} = 0, \end{aligned}$$

como $(u^2 + v^2 + p^2) = \frac{1}{\lambda^2}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, por lo tanto:

$$\frac{-4\pi^2}{\lambda^2}E_{12} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}E_{12} = 0.$$

APENDICE A'

Mostrar que la función de correlación dada por la ecuación (3.5.2.8) cumple la ecuación de *Helmholtz*:

$$\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = \phi_{12} = \iint \langle |A(u, v)|^2 \rangle \exp\{i2\pi(x_0u + y_0v + z_0p)\}dudv, \quad x_0 = x - x'$$

con $F = \langle |A(u, v)|^2 \rangle$, entonces:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \left[\iiint F \exp\{i2\pi[(x - x')u + (y - y')v + (z - z')p]\}dudv \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iiint F \exp\{i2\pi[(x - x')u + (y - y')v + (z - z')p]\}dudv \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iiint F \exp\{i2\pi[(x - x')u + (y - y')v + (z - z')p]\}dudv \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iiint F \exp\{i2\pi[(x - x')u + (y - y')v + (z - z')p]\}dudv \\ &= (i2\pi u)^2 \iiint F \exp\{i2\pi[(x - x')u + (y - y')v + (z - z')p]\}dudv \\ &\quad + (i2\pi v)^2 \iiint F \exp\{i2\pi[(x - x')u + (y - y')v + (z - z')p]\}dudv \\ &\quad + (i2\pi p)^2 \iiint F \exp\{i2\pi[(x - x')u + (y - y')v + (z - z')p]\}dudv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2] \iiint \text{Fexp}\{i2\pi[(x-x')u + (y-y')v + (z-z')p]\} dudv \\
&= (-4\pi^2 u^2 - 4\pi^2 v^2 - 4\pi^2 p^2) \phi_{12}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de *Helmholtz*:

$$-4\pi^2(u^2 + v^2 + p^2)\phi_{12} + k^2\phi_{12} = 0.$$

como $(u^2 + v^2 + p^2) = \frac{1}{\lambda^2}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, por lo tanto:

$$\frac{-4\pi^2}{\lambda^2}\phi_{12} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\phi_{12} = 0.$$

APENDICE A''

Mostrar que la ecuación (3.5.2.11) cumple con la ecuación de onda:

$$\Gamma = \iiint A(u, v)B^*(u, v)\text{exp}\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\} dudvdy,$$

con $G = A(u, v)B^*(u, v)$.

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Gamma &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iiint G\text{exp}\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\} dudvdy \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iiint G\text{exp}\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\} dudvdy \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iiint G\text{exp}\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\} dudvdy \\
&= [(i2\pi u)^2 + (i2\pi v)^2 + (i2\pi p)^2]\Gamma.
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \iiint G\text{exp}\{i2\pi(xu + yv + zp + \gamma\tau)\} dudvdy = \frac{1}{c^2} (i2\pi\gamma)^2 \Gamma.$$

Entonces:

$$(-4\pi^2 u^2 - 4\pi^2 v^2 - 4\pi^2 p^2)\Gamma = -\frac{4\pi^2 \gamma^2}{c^2} \Gamma,$$

como $(u^2 + v^2 + p^2) = \frac{1}{\lambda^2} \gamma \lambda \gamma = c$, entonces:

$$-4\pi^2 (u^2 + v^2 + p^2)\Gamma = -\frac{4\pi^2 \gamma^2}{\lambda^2 \gamma^2} \Gamma,$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{\lambda^2} \Gamma = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma.$$

APENDICE B

Debemos comprobar las siguientes relaciones:

$$\mathbf{a)} S_{0xy}^2 = S_{1xy}^2 + S_{2xy}^2 + S_{3xy}^2, \quad \mathbf{b)} S_{0xz}^2 = S_{1xz}^2 + S_{2xz}^2 + S_{3xz}^2, \quad \mathbf{c)} S_{0yz}^2 = S_{1yz}^2 + S_{2yz}^2 + S_{3yz}^2.$$

Para **a)**

$$S_{0xy}^2 = (\cos \Omega)^4 + W^4 (\sin \theta)^4 (\sin \Omega)^4 + 2W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \Omega)^2 (\sin \theta)^2 \quad (3.a)$$

$$S_{1xy}^2 = (\cos \Omega)^4 + W^4 (\sin \theta)^4 (\sin \Omega)^4 - 2W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \Omega)^2 (\sin \theta)^2 \quad (3.b)$$

$$S_{2xy}^2 = 4W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2 (\cos \delta_y)^2 \quad (3.c)$$

$$S_{3xy}^2 = 4W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2 (\sin \delta_y)^2 \quad (3.d)$$

$$\Rightarrow S_{1xy}^2 + S_{2xy}^2 + S_{3xy}^2 = (\cos \Omega)^4 + W^4 (\sin \theta)^4 (\sin \Omega)^4 - 2W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \Omega)^2 (\sin \theta)^2$$

$$+ 4W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2 [(\cos \delta_y)^2 + (\sin \delta_y)^2]$$

$$= (\cos \Omega)^4 + W^4 (\sin \theta)^4 (\sin \Omega)^4 - 2W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \Omega)^2 (\sin \theta)^2$$

$$+ 4W^2 (\cos \Omega)^2 (\sin \theta)^2 (\sin \Omega)^2$$

$$= (\cos \Omega)^4 + W^4(\sin \theta)^4(\sin \Omega)^4 + 2W^2(\cos \Omega)^2(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2. \quad (3.e)$$

Es claro que la ecuación (3.a) es la misma que la ecuación (3.e):

$$\therefore S_{0xy}^2 = S_{1xy}^2 + S_{2xy}^2 + S_{3xy}^2 \quad (3.f)$$

Para **b)**

$$S_{0xz}^2 = (\cos \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 + 2W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2 \quad (3.g)$$

$$S_{1xz}^2 = (\cos \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 - 2W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2 \quad (3.h)$$

$$S_{2xz}^2 = 4W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2(\cos \delta_z)^2 \quad (3.i)$$

$$S_{3xz}^2 = 4W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2(\sin \delta_z)^2 \quad (3.j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{1xz}^2 + S_{2xz}^2 + S_{3xz}^2 &= (\cos \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 - 2W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2 \\ &\quad + 4W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2[(\cos \delta_z)^2 + (\sin \delta_z)^2] \\ &= (\cos \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 - 2W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2 \\ &\quad + 4W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2 \\ &= (\cos \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 + 2W^2(\cos \Omega)^4(\cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (3.k)$$

Comparando las ecuaciones (3.g) y (3.k) claramente son iguales:

$$\therefore S_{0xz}^2 = S_{1xz}^2 + S_{2xz}^2 + S_{3xz}^2 \quad (3.l)$$

Para **c)**

$$S_{0yz}^2 = W^4(\sin \theta)^4(\sin \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 + 2W^4(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2(\cos \theta)^2(\cos \Omega)^2 \quad (3.m)$$

$$S_{1yz}^2 = W^4(\sin \theta)^4(\sin \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 - 2W^4(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2(\cos \theta)^2(\cos \Omega)^2 \quad (3.n)$$

$$S_{2yz}^2 = 4W^4(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2(\cos \theta)^2(\cos \Omega)^2(\cos \delta_z)^2 \quad (3.o)$$

$$S_{3yz}^2 = 4W^4(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2(\cos \theta)^2(\cos \Omega)^2(\sin \delta_z)^2 \quad (3.p)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_{1yz}^2 + S_{2yz}^2 + S_{3yz}^2 &= W^4(\sin \theta)^4(\sin \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 \\
&\quad - 2W^4(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2(\cos \theta)^2(\cos \Omega)^2 \\
&\quad + 4W^4(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2(\cos \theta)^2(\cos \Omega)^2[(\cos \delta_z)^2 + (\sin \delta_z)^2] \\
&= W^4(\sin \theta)^4(\sin \Omega)^4 + W^4(\cos \theta)^4(\cos \Omega)^4 \\
&\quad + 2W^4(\sin \theta)^2(\sin \Omega)^2(\cos \theta)^2(\cos \Omega)^2 \tag{3.q}
\end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones (3.m) y (3.q) claramente son iguales:

$$\therefore S_{0yz}^2 = S_{1yz}^2 + S_{2yz}^2 + S_{3yz}^2 \tag{3.r}$$

APENDICE C

La función de densidad de probabilidad $\rho(\theta) = cte$.

1) para el plano $x - y$:

$$\begin{aligned}
S_{0xy} &= (\cos(hy \sin \theta))^2 + \omega^2(\sin \theta)^2(\sin(hy \sin \theta))^2 \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos(2hy \sin \theta) + \omega^2(\sin \theta)^2(1 - \cos(2hy \sin \theta))) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy \sin \theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin \theta)^2 - \frac{1}{2}\omega^2(\sin \theta)^2 \cos(2hy \sin \theta).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle S_{0xy} \rangle &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy \sin \theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin \theta)^2 - \frac{1}{2}\omega^2(\sin \theta)^2 \cos(2hy \sin \theta) \right) \rho(\theta) d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2hy \sin \theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin \theta)^2 - \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) \cos(2hy \sin \theta) \right) \rho(\theta) d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{4} \right) \cos(2hy \sin \theta) + \frac{1}{2}\omega^2(\sin \theta)^2 + \frac{\omega^2}{4} \cos 2\theta \cos(2hy \sin \theta) \right) \rho(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{4} \right) J_0(2hy) + 2 \sum_{n=1} J_{2n}(2hy) \cos 2n\theta + \frac{\omega^2}{4} \cos 2\theta J_0(2hy) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega^2}{2} \cos 2\theta \sum_{n=1} J_{2n}(2hy) \cos 2n\theta \right) \rho(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \omega^2 \right) J_0(2hy) + \frac{\omega^2}{4} J_2(2hy).
\end{aligned}$$

Para el parámetro S_{1xy} solo modificamos el signo:

$$\langle S_{1xy} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \omega^2 \right) J_0(2hy) - \frac{\omega^2}{4} J_2(2hy).$$

Para el parámetro S_{2xy} :

$$\begin{aligned}
S_{2xy} &= 2\omega \cos(hy \sin \theta) \sin \theta \sin(hy \sin \theta) \cos \delta_y \\
&= \frac{\sin(2hy \sin \theta)}{2} \sin \theta.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle S_{2xy} \rangle &= \int 2 \sum_{n=0} J_{2n+1}(2hy) \frac{\sin((2n+1)\theta)}{2} \sin \theta \cos \delta_y \rho(\theta) d\theta \\
&= 2\omega \cos \delta_y J_1(2hy).
\end{aligned}$$

$$\langle S_{3xy} \rangle = 2\omega \sin \delta_y J_1(2hy).$$

2) Para el plano $x - z$:

$$\begin{aligned}
S_{0xz} &= (\cos(hy \sin \theta))^2 + \omega^2 (\cos \theta)^2 (\cos(hy \sin \theta))^2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2hy \sin \theta) + \frac{\omega^2 (\cos \theta)^2}{2} \cos(2hy \sin \theta) + \frac{\omega^2 (\cos \theta)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2hy \sin \theta) + \left(\frac{\omega^2}{4} \cos 2\theta + \frac{\omega^2}{4} \right) \cos(2hy \sin \theta) + \frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^2}{4} \cos 2\theta
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) \cos(2hy \sin \theta) + \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4} \cos 2\theta \cos(2hy \sin \theta) + \frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^2}{4} \cos 2\theta$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle S_{0xz} \rangle &= \int \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) J_0(2hy) + \frac{1}{2} + \frac{\omega^2 \cos 2\theta J_0(2hy)}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2 \cos 2\theta}{2} \sum_{n=1} J_{2n}(2hy) \cos 2n\theta \right] \rho(\theta) d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) J_0(2hy) + \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4} J_2(2hy) + \frac{\omega^2}{4} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) J_0(2hy) + \frac{\omega^2}{4} J_2(2hy). \end{aligned}$$

Para el parámetro S_{0xz} solo modificamos el signo:

$$\langle S_{1xz} \rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) J_0(2hy) - \frac{\omega^2}{4} J_2(2hy).$$

Para el parámetro S_{2xz} :

$$\begin{aligned} S_{2xz} &= 2\omega (\cos(hy \sin \theta))^2 \cos \theta \cos \delta_z \\ &= 2\omega \left[\frac{1}{2} \cos(hy \sin \theta) + \frac{1}{2} \right] \cos \theta \cos \delta_z \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle S_{2xz} \rangle &= \int 2\omega \left[\frac{1}{2} J_0(2hy) + \sum_{n=1} J_{2n}(2hy) \cos 2n\theta \cos \theta \right] \cos \delta_z \rho(\theta) d\theta \\ &= \omega J_0(2hy) \cos \delta_z. \end{aligned}$$

Para S_{3xz} :

$$\langle S_{3xz} \rangle = \omega J_0(2hy) \sin \delta_z.$$

3) Para el plano $y - z$:

$$S_{0yz} = \omega^2 (\sin \theta)^2 (\sin(hy \sin \theta))^2 + \omega^2 (\cos \theta)^2 (\cos(hy \sin \theta))^2$$

$$= 2\omega^2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \cos(2hy \sin \theta) + \frac{1}{2} \right).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle S_{0yz} \rangle &= \int \omega^2 [\cos 2\theta \cos(2hy \sin \theta) + \cos 2\theta \cos(2hy \sin \theta) + 1] \rho(\theta) d\theta \\ &= \omega^2 \left[\cos 2\theta J_0(2hy) + 2 \cos 2\theta \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(2hy) \cos 2n\theta + \cos 2\theta + J_0(2hy) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(2hy) \cos 2n\theta + 1 \right] \\ &= \omega^2 [1 + J_0(2hy) + J_2(2hy)]. \end{aligned}$$

Para S_{1yz} :

$$\langle S_{1yz} \rangle = 0.$$

Para S_{2yz} :

$$S_{2yz} = 2\omega^2 \sin \theta \cos \theta \sin(hy \sin \theta) \cos(hy \sin \theta) \cos \delta_z.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle S_{2yz} \rangle &= \int [2\omega^2 \sin \theta \cos \theta \sin(hy \sin \theta) \cos(hy \sin \theta) \cos \delta_z] \rho(\theta) d\theta \\ &= \int \left[\frac{\sin 2\theta \sin(hy \sin \theta)}{2} \right] \rho(\theta) d\theta \\ &= \int \left[\frac{1}{4} \sin 2\theta \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2hy) \sin((2n+1)\theta) \right] \rho(\theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Para S_{3yz} :

$$\langle S_{3yz} \rangle = 0.$$