



**I  
N  
A  
O  
E**

# Análisis Comparativo de Estrategias Numéricas para Problemas Aeroespaciales de Control Óptimo

por

**Jesús Said Martínez Montoya**

*Tesis sometida como requerimiento parcial para obtener el grado  
de*

**Maestro en el Área de Ciencia y Tecnología del Espacio**

*En el*

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica**

Octubre 2018

Tonantzintla, Puebla

*Supervisado por:*

**Dr. Gustavo Rodríguez Gómez, INAOE**

©INAOE 2018

Todos los derechos reservados

El autor(a) otorga al INAOE permiso para la reproducción y  
distribución del presente documento



*Dedico este trabajo a mis padres que me han apoyado toda la vida en las buenas y en las malas, a mi madre, sé que no existe nada más trascendental para ella que ver triunfar a aquellos a los que dio la vida y por ello da todo de sí.*

*A mis amigas y amigos que me han apoyado aun en momentos difíciles, incluido aquellos que han estado durante poco tiempo o que me han dado un empujon en momentos criticos, sepan que ellas y ellos son fundamentales para que pueda estar contando esta historia. Espero que así como ustedes me han apoyado y deseado lo mejor, ustedes igual logren todo el éxito en lo que se propongan y nunca se olviden*

*de mí, como yo no me olvido de aquellos que me han apoyado aunque sea con detalles pequeños pero que a la larga terminan siendo grandes.*

*Mis logros también son los logros de todos aquellos seres queridos entre familia y amigos.*

# Agradecimientos

En primer lugar agradezco al Dr. Gustavo Rodríguez Gómez por compartir su conocimiento, su experiencia, su profesionalismo, apoyo y comprensión durante el tiempo que estuve bajo su guía para la realización de esta tesis. Agradezco a la coordinación del posgrado y en especial al Dr. Silvano Guichard Romero por el apoyo y la orientación que me brindaron durante mi estancia en el posgrado. A mis sinodales Dr. Omar López Cruz, Dr. Ponciano Rodríguez Montero y Dr. Rogerio Enríquez Caldera, por su tiempo y consejos durante la etapa final de este trabajo. A el consejo nacional de ciencia y tecnología CONACyT por el apoyo económico durante la formación académica y la realización de este trabajo de tesis.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>xv</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Definición del problema y antecedentes . . . . .	4
1.2. Hipótesis . . . . .	6
1.3. Objetivos Generales . . . . .	7
1.4. Objetivos Específicos . . . . .	7
1.5. Metodología . . . . .	8
1.5.1. Selección de problemas de control óptimo con enfoque aeroes- pacial . . . . .	8
1.5.2. Aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin . . . . .	8
1.5.3. Aplicación de la estrategia numérica . . . . .	8

1.5.4. Análisis comparativo de los distintos paquetes y estrategias numéricas empleadas . . . . .	9
1.6. Contribución y resumen de propuesta de solución . . . . .	9
1.7. Organización de la tesis . . . . .	9
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Control Óptimo . . . . .	11
2.1.1. Formulación del problema . . . . .	12
2.2. Métodos Para Resolver Problemas de Control Optimo . . . . .	17
2.2.1. Método Indirecto . . . . .	18
2.2.2. Método Directo . . . . .	26
2.3. Algoritmos y paquetes para la solución de problemas de control óptimo	27
2.3.1. Algoritmos y paquetes empleados . . . . .	28
2.4. Métodos Numéricos en Problemas de Control Óptimo . . . . .	30
2.4.1. Método de Colocación . . . . .	32
2.4.2. Método Pseudoespectral . . . . .	34
<b>3. Revisión de la literatura</b>	<b>35</b>
3.1. Revisión de investigaciones recientes . . . . .	35
<b>4. Planteamiento de los Problemas Seleccionados para Análisis</b>	<b>43</b>

4.1. Problema 1 . . . . .	43
4.2. Problema 2 . . . . .	48
<b>5. Experimentación</b>	<b>51</b>
5.1. Parámetros de la máquina y de comparación . . . . .	51
5.2. Resultados del Problema 1 . . . . .	53
5.2.1. Resultados con el método de colocación . . . . .	54
5.2.2. Resultados con el método pseudo espectral . . . . .	58
5.2.3. Comparativa Problema 1 . . . . .	63
5.3. Resultados del Problema 2 . . . . .	66
5.3.1. Resultados con el método de colocación . . . . .	67
5.3.2. Resultados con el método pseudo espectral . . . . .	71
5.3.3. Comparativa Problema 2 . . . . .	76
5.4. Comparativa General . . . . .	79
<b>6. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>81</b>





# Índice de figuras

1.1. Ejemplo trayectoria de aterrizaje del modulo Philae en la misión Rosseta [Stephan Ulamec, 2015] . . . . .	3
2.1. Taxonomía de métodos para el control optimo . . . . .	18
2.2. Trayectorias admisibles para el problema tipo 1 [Kirk, 1970] . . . . .	21
2.3. Trayectorias admisibles para el problema tipo 2 [Kirk, 1970] . . . . .	22
2.4. Trayectorias admisibles para el problema tipo 3 [Kirk, 1970] . . . . .	23
2.5. Comparación de la curva de un extremal y su vecindad para un problema tipo 4 [Kirk, 1970] . . . . .	24
2.6. Taxonomía de métodos para el control optimo . . . . .	31
4.1. Problema 1: obtención de trayectoria para el ascenso . . . . .	44
5.1. Gráfica de la posición $x$ y $y$ para el problema 1 . . . . .	54
5.2. Gráfica de la velocidad $v_x$ y $v_y$ para el problema 1 . . . . .	55
5.3. Gráfica del control $u$ para el problema 1 . . . . .	56

5.4. Gráfica de la trayectoria de ascenso para el problema 1 . . . . .	57
5.5. Gráfica de los coestados $\lambda_4$ y $\lambda_2$ para el problema 1 . . . . .	57
5.6. Gráfica de esfuerzo problema 1 . . . . .	58
5.7. Gráfica de la posición $x$ y $y$ con DIDO para el problema 1 . . . . .	59
5.8. Gráfica de la velocidad $v_x$ y $v_y$ con DIDO para el problema 1 . . . . .	60
5.9. Gráfica de la trayectoria de ascenso en DIDO . . . . .	60
5.10. Gráfica del control $u$ obtenido en DIDO durante la misión . . . . .	61
5.11. Gráfica de los coestados con DIDO $\lambda_4$ y $\lambda_2$ para el problema 1 . . . . .	61
5.12. Gráfica del hamiltoniano con DIDO para el problema 1 . . . . .	62
5.13. Gráfica de evolución de la función costo mediante el método pseudo espectral . . . . .	63
5.14. Gráfica de número de llamadas al modelo . . . . .	63
5.15. Gráfica de estados $q$ 's para el problema 2 . . . . .	68
5.16. Gráfica de estados $w$ 's para el problema 2 . . . . .	69
5.17. Gráfica de coestados para el problema 2 . . . . .	69
5.18. Gráfica de coestados para el problema 2 . . . . .	70
5.19. Gráfica de control para el problema 2 . . . . .	70
5.20. Gráfica de evolución de la función costo . . . . .	71
5.21. Gráfica de estados $q$ 's para el problema 2 . . . . .	72

5.22. Gráfica de estados $w$ 's para el problema 2 . . . . .	73
5.23. Gráfica de coestados para el problema 2 . . . . .	74
5.24. Gráfica de coestados para el problema 2 . . . . .	74
5.25. Gráfica de control para el problema 2 . . . . .	75
5.26. Gráfica de evolución de la función costo . . . . .	75
5.27. Gráfica de número de llamadas al modelo . . . . .	78



# Índice de tablas

2.1. Tabla de los principales programas. . . . .	28
2.2. Los tres componentes básicos de un problema de control óptimo según el método se empleó para buscar una solución [Rao, 2010] . . . . .	31
3.1. Comparativa de los métodos según el estudio de Huang [Huang, ]. . .	41
3.2. Comparativa de los métodos según el estudio de Frego [Marco, 2014] .	42
5.1. Características de MATLAB . . . . .	52
5.2. Características de la maquina . . . . .	52
5.3. Tabla de características básicas para el problema 1 . . . . .	54
5.4. Tabla comparativa estados y control problema 1 . . . . .	64
5.5. Tabla de características básicas para el problema 2 . . . . .	66
5.6. Valores de los estados en $t_f$ para problema 2 con el método de colocación	68
5.7. Valores de los estados en $t_f$ para problema 2 con el método pseudo espectral . . . . .	72
5.8. Tabla comparativa para el problema 2 . . . . .	77

5.9. Valores de los estados obtenidos en ambos métodos . . . . . 77

# Resumen

La teoría de optimización se ha venido desarrollando desde el siglo XVII desde el llamado problema de la braquistócrona planteado por Bernoulli, sin embargo, ha sido hasta la mitad del siglo XX que se ha comenzado a implementar en problemas de aeronáutica y aeroespaciales. Ya que fue a mediados de este siglo que se desarrollaron las importantes contribuciones de Pontryagin (con el Principio del Mínimo) y Bellman (en optimización mediante programación no lineal), lo cual permitió el desarrollo de la teoría de control óptimo basada en el cálculo de variaciones. A partir de entonces y paralelamente al desarrollo del control óptimo se ha desarrollado una serie de métodos numéricos que buscan obtener la solución aproximada a un problema ya que en la mayoría de los casos no es posible encontrar soluciones analíticas debido a la complejidad de los modelos matemáticos que describen el proceso.

Existen tres principales enfoques o también llamados métodos para plantear los problemas de control óptimo, los cuales son el método directo, el método indirecto y la programación no lineal. Los principales enfoques utilizados actualmente son el método indirecto y el método directo. Dependiendo del enfoque que se desee implementar en un problema de control óptimo se contará con una serie de alternativas numéricas para dar con una solución aproximada al problema. Actualmente existen líneas de investigación dedicadas a mejorar las técnicas numéricas o investigar bajo

que circunstancias funcionan mejor los principales dos enfoques para los problemas de control óptimo.

Este trabajo busca comparar dos técnicas aplicadas en problemas aeroespaciales, por un lado esta el método de colocación implementado en BVP4C de Matlab y por otro el método pseudo espectral implementado en DIDO en Matlab. Ambos métodos convergieron a soluciones validas en los problemas planteados, presentando diferencias en cuanto a precisión, tiempo de corrida, razón de convergencia y sensibilidad a la estimación inicial.

De este trabajo se desprende que el método de colocación es más rápido en tiempo de corrida, pero presenta alta sensibilidad a la estimación inicial lo cual no es raro para cualquier método numérico empleado bajo el enfoque indirecto de control óptimo. El algoritmo implementado en matlab para el método de colocación esta limitado en cuanto a capacidades ya que no se pueden incluir restricciones en las variables de estado y esto hace que se limite su potencial para problemas restringidos los cuales son comunes en problemas de aplicación.

El método pseudo espectral no requiere de estimación inicial, pero el costo computacional es mayor, se puede incluir una estimación inicial para mejorar el desempeño del método. El método requiere delimitar espacios de búsqueda para las variables de estado y controles, lo cual requiere de cierto conocimiento físico de las variables de estado y controles, sin embargo, en problemas donde no sea posible obtener una estimación inicial idónea este método implementado por el Dr. Ross en el paquete de DIDO presenta una buena alternativa para obtener una solución.



# Capítulo 1

## Introducción

En el año 1696 el Matemático Johann Bernoulli lanzo un desafío a los matemáticos del mundo para resolver lo que el llamaba “The Brachistochrone Problem” (o también conocido como el problema de la braquistocrona), consiste en encontrar la curva que describa el menor tiempo posible de viaje al dejar caer una masa puntual de un punto alto a uno bajo, únicamente bajo la acción de la gravedad (despreciando las fuerzas de fricción). Dicho problema buscaba obtener una curva la cual se puede considerar como una trayectoria que describa un tiempo mínimo bajo ciertas condiciones. Este problema pavimento el camino para el desarrollo del calculo variacional el cual es uno de los pilares de la teoría de control óptimo actual [Ross, 2015]. Varios matemáticos dieron su solución en su época entre ellos Bernoulli, Leibniz y Newton, pero fue Leonard Euler en colaboración con Bernoulli que influenciaron a Joseph Louis Lagrange; quienes resolvieron el problema de control óptimo usando el *método de la primera variación* lo cual llevo en el año 1755 a Euler a introducir el concepto del *cálculo de variaciones*. Posteriormente. El cálculo de la primera variación fue llamada la *ecuación de Euler-Lagrange*. Es en este punto que nace el cálculo de va-

riaciones.

Lagrange introdujo el *método del multiplicador* que es uno de los métodos más sólidos para plantear el problema de control óptimo. Las condiciones suficientes para la determinación de extremos de funcionales fue desarrollado por Andrien Marie Legendre en 1786, mediante la *segunda variación*. Carl Gustav Jacob Jacobi en 1836 realizó un análisis más riguroso de las condiciones de suficiencia, dicho análisis fue posteriormente llamado condición de *Legendre-Jacobi*, y más tarde y en base a los estudios de Hamilton en mecánica, Jacobi en 1838 modificó los resultados de Hamilton lo que derivó en la ecuación de *Hamilton-Jacobi* dicha ecuación es uno de los pilares en el cálculo de variaciones y en la programación dinámica [F., 2013].

Fue hasta el año 1956 que se realiza la contribución más destacada al control óptimo la cual fue realizada por el matemático Ruso L. S. Pontryagin y su grupo de investigación los cuales desarrollaron el *principio del máximo de Pontryagin*. En la misma década Bellman en 1957 introdujo la programación dinámica para resolver los problemas de control óptimo en tiempo discreto. Ya en el año 1960 Kalman desarrolló la teoría del *regulador lineal cuadrático* (LQR por sus siglas en Inglés) y el *regulador lineal cuadrático gaussiano* (LQG por sus siglas en Inglés) para el diseño de controladores por retroalimentación de estado, también introdujo una de las bases para el planteamiento de problemas de control óptimo: la *representación en espacio de estados* para un sistema dinámico y definió la controlabilidad y la observabilidad. Todo esto derivó en el filtro de Kalman (para sistemas discretos) y el filtro de Kalman-Bucy (para sistemas continuos) [F., 2013].

La teoría de control óptimo se emplea para obtener una trayectoria que describe un control en un proceso, dicha trayectoria cumple con ciertos criterios de desempeño, los cuales buscan minimizar o maximizar algún parámetro de dicho proceso. Entonces podemos decir que la trayectoria obtenida será óptima para cierto criterio

de desempeño.

Dicha teoría puede ser aplicada a muchas áreas de la ciencia y la ingeniería, entre sus usos más populares destacan las aplicaciones en la industria aeroespacial.

Actualmente en el control óptimo aplicado a problemas aeroespaciales, se emplea para optimizar los procesos de una misión tales como: el aterrizaje, el despegue, la transferencia orbital, entre otros. Dicha teoría permite la optimización de los recursos de una nave ya sea para vuelo dentro de la atmósfera o la navegación en el espacio, con ello se aumentan las capacidades de una misión, entre las que destacan el tiempo de autonomía o incluso la reducción del error en algún proceso como el aterrizaje.

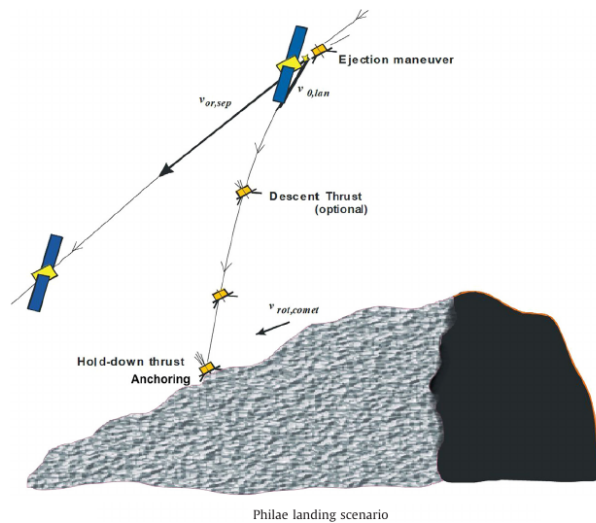


Figura 1.1: Ejemplo trayectoria de aterrizaje del modulo Philae en la misión Rosseta [Stephan Ulamec, 2015]

## 1.1. Definición del problema y antecedentes

Para aplicar el control óptimo a problemas aeroespaciales es necesario contar con el modelo matemático del problema. Dicho modelo describe el comportamiento dinámico del proceso físico como puede ser el movimiento, la aceleración etc. Dentro del modelo matemático se encuentra la variable de control, la cual se aplica solo a fenómenos que se puedan controlar, se plantea el problema y se aplica el Principio Máximo de Pontryagin (**PMP**), con lo cual el problema se convierte a un problema de dos valores a la frontera (Two Point Boundary Value Problem (**TPBVP** por sus siglas en Inglés)), a partir de aquí el problema pasa a ser un problema numérico y generalmente resulta inviable obtener una solución cerrada. Se requiere entonces de los métodos numéricos para encontrar una solución aproximada del problema.

Un problema de control óptimo, en general requiere de tres pasos esenciales los cuales son:

1. Planteamiento del modelo matemático
2. Aplicación de la teoría de control óptimo
3. Solución numérica del sistema

Dentro del modelo matemático entran las ecuaciones que describen el problema como pueden ser el movimiento, la variable de control y las perturbaciones en el sistema físico.

Una vez teniendo bien definido el comportamiento del sistema mediante su modelado matemático se aplica la teoría de control óptimo y da como resultado un conjunto de ecuaciones algebraico diferenciales, dicho conjunto al no presentar una

solución cerrada se obtiene una solución de forma numérica. En algunos casos podría no existir la solución por que el problema se debe analizar para asegurar la existencia de una solución [Ross, 2015].

Reducido el problema a uno numérico se debe seleccionar alguna estrategia numérica conveniente para la solución del mismo. Existen una gran cantidad de estrategias para obtener la solución, cada una tiene sus ventajas y desventajas así como cierta complejidad computacional.

Estas estrategias pueden ser usadas para problemas de control óptimo paramétrico y no paramétrico. Un problema paramétrico se refiere a que se conoce de antemano la forma del control  $u$  (por ejemplo  $u = -Kx$ , matriz de ganancias y los estados respectivamente), por lo cual sólo se busca el valor de ciertos parámetros,  $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , para que el control satisfaga los criterios de desempeño. En cambio un problema no paramétrico es aquel donde no se conoce la forma del control  $u$  por lo que debemos encontrar la regla de correspondencia que define a  $u$  y que satisfaga el criterio de optimización.

Actualmente el entorno de computación científica MATLAB permite la programación de las estrategias numéricas para obtener la solución de problemas de control óptimo, además MATLAB dispone de herramientas que permiten obtener la solución numérica de los problemas de control óptimo, entre estos destacan los métodos `bvp4c` y `bvp5c` desarrollados por Shampine [Shampine, 2000] y el software de terceros `DIDO`, desarrollado por Michael Ross [Ross, 2015] y enfocado exclusivamente al control óptimo. Pero además existen gran variedad de algoritmos desarrollados por terceros para el entorno de MATLAB que aplican o implementan algún método numérico en específico para problemas de propósito general o particular en algunos casos.

El paquete desarrollado por el Dr. Shampine donde están implementados los algoritmos `bvp4c` y `bvp5c` se han probado y aplicado en gran cantidad de problemas de control óptimo [Wang, 2010], al igual que DIDO desarrollado por el Dr. Ross el cual ha tenido un gran impacto en la investigación de problemas de control óptimo llegando incluso a ser aplicado en problemas espaciales investigados por la Administración Nacional Aeronáutica y del Espacio (NASA por sus siglas en Inglés) [Ross, 2015].

Esta tesis propone realizar un análisis comparativo de estrategias numéricas para encontrar la solución aproximada de diversos problemas de control óptimo aplicado al sector aeroespacial. Se destacarán los puntos importantes a la hora de implementar y el comportamiento de las soluciones obtenidas bajo dichos algoritmos.

Entre los métodos que se se desean analizar están

- BVP4C y BVP5C (Boundary Value Problem) que emplean un método de *Shooting* modificado por colocación [Shampine, 2000].
- DIDO que emplea teoría de control óptimo pseudo espectral [Ross, 2015].

## 1.2. Hipótesis

Analizando dos estrategias numéricas para resolver los problemas de control óptimo bajo el enfoque indirecto se podrá tener una visión general de los inconvenientes de cada estrategia numérica y sus virtudes.

### 1.3. Objetivos Generales

Realizar un análisis comparativo de diferentes estrategias numéricas para la solución de problemas de control óptimo orientado a problemas aeroespaciales para obtener sus ventajas y desventajas.

### 1.4. Objetivos Específicos

1. Seleccionar un conjunto de problemas de control óptimo aplicados en problemas aeroespaciales.
2. Clasificación de los tipos de problemas de control óptimo.
3. Seleccionar un conjunto de algoritmos numéricos para la solución numérica de los problemas seleccionados.
4. Seleccionar un ambiente (ambientes) de software para hacer las pruebas de los problemas seleccionados.
5. Revisar la operación de los paquetes de matlab para resolver los problemas de control óptimo. Entre ellos BVP4C o BVP5C y DIDO.
6. Realizar los algoritmos para resolver los problemas de control óptimo empleando distintos métodos.
7. Realizar un análisis comparativo del comportamiento de los métodos.

## **1.5. Metodología**

Para lograr los objetivos establecidos se propone trabajar en tres etapas principales

### **1.5.1. Selección de problemas de control óptimo con enfoque aeroespacial**

En esta etapa se pretende realizar una investigación y selección de problemas con una complejidad de intermedia a alta dentro del área aeroespacial que se acerquen lo mejor posible a problemas de investigación para con ello tener una variedad de ejemplos para analizar en cuanto a su comportamiento a la hora de aplicar cierto estrategia numérica.

### **1.5.2. Aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin**

En esta etapa se realizara el planteamiento del problema y se aplicara la teoría de control óptimo y mediante el enfoque conocido como método indirecto se obtendrá las ecuaciones de coestado, el hamiltoniano del sistema y la ley de control óptimo para cada problema.

### **1.5.3. Aplicación de la estrategia numérica**

Se seleccionarán los esquemas numéricos para resolver los problemas de control óptimo una vez planteados. Haremos un análisis de los algoritmos considerando el



tipo de estrategia que utilizan para resolver el problema de control óptimo se indagará si los algoritmos seleccionados ya están implementados y si se encuentran disponibles en algún entorno de software. Aquí también se hace una revisión de como trabajan los paquetes que resuelven los problemas.

#### **1.5.4. Análisis comparativo de los distintos paquetes y estrategias numéricas empleadas**

En esta última etapa ya con los resultados experimentales obtenidos por las diferentes estrategias numéricas se analizará su comportamiento con base en su razón de convergencia, sensibilidad a los datos, su eficiencia computacional, exactitud en la solución encontrada y las facilidades que se dan al usuario para implementar el problema.

### **1.6. Contribución y resumen de propuesta de solución**

El análisis comparativo nos permitirá tener una visión de los métodos numéricos que se comparan en el área de control óptimo aeroespacial. Además, se tendrá un repositorio con los métodos seleccionados.

### **1.7. Organización de la tesis**

En esta sección se presenta de manera breve el objetivo y tema central de cada capítulo que conforma la tesis. En el capítulo 2 *Marco Teórico* se presenta la teoría básica de control óptimo y se menciona los distintos enfoques para plantear

un problema de control óptimo, posteriormente se realiza una recopilación de los paquetes para la simulación de problemas de control óptimo, por último se realiza una introducción básica de los métodos numéricos que se emplean para resolver los problemas. En el capítulo 3 *Revisión de la Literatura* se presenta una revisión de estudios recientes de problemas de control óptimo que están enfocados a aplicaciones aeroespaciales, donde se analizan los enfoques que se emplean, así como los métodos numéricos o estrategias actuales para resolverlos. En el capítulo 4 *Planteamiento de los Problemas Seleccionados* se realiza el planeamiento matemático de los problemas seleccionados para su análisis, se describe sus objetivos y características. En el capítulo 5 *Análisis de Resultados* se presenta el análisis de los resultados obtenidos aplicando los distintos algoritmos a cada problema haciendo énfasis en las distintas características que resultaron de aplicar los diferentes métodos numéricos, sus virtudes, ventajas y desventajas. Por último en el capítulo 6 *Conclusiones* se describen las conclusiones obtenidas de este trabajo de investigación así como el trabajo futuro o las investigaciones futuras, partiendo de lo realizado en esta tesis, dentro de lo cual se hace énfasis en el aporte de esta tesis.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

Para realizar el análisis y encontrar la solución de un problema de control óptimo, se requiere de una gama de conocimientos en distintas áreas de la ciencia, como lo son la teoría de control óptimo, computo científico (principalmente para encontrar la solución numérica de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (**EDO's**) y de problemas de optimización), la mecánica clásica para describir el movimiento de los objetos en el espacio, (en este caso mecánica del cuerpo rígido, leyes de Newton). Por lo cual en esta sección se realiza una breve introducción a las áreas más importantes para el desarrollo de la tesis.

### 2.1. Control Óptimo

El control óptimo es una ciencia donde se desea determinar las entradas a un *sistema dinámico* que optimicen una medida de desempeño mientras se satisfacen ciertas restricciones del sistema. Dada la complejidad de las aplicaciones, los problemas de control óptimo son comúnmente resueltos de forma numérica.

### 2.1.1. Formulación del problema

Un problema de control óptimo [Kirk, 1970] requiere de:

- Un modelo matemático o modelo del proceso a ser controlado
- Restricciones físicas
- Una medida de desempeño

#### El modelo matemático

El modelo matemático se representa por las ecuaciones que describen el comportamiento de un proceso o sistema físico a ser controlado, mediante estas ecuaciones podemos predecir la respuesta de un sistema físico a entradas anticipadas. Para describir el cambio con respecto al tiempo de un sistema físico se emplean ecuaciones diferenciales ordinarias; las ecuaciones del modelo matemático también son llamadas ecuaciones de estado [Kirk, 1970], así entonces si:

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \tag{2.1}$$

son las variables de estado y

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t) \tag{2.2}$$

son sus entradas de control al tiempo  $t$ , entonces el proceso puede ser descrito por

un sistema de ecuaciones algebraico diferencial de primer orden de la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\
 \dot{x}_2(t) &= a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donde  $a_i$  son funciones de argumento vectorial a valores reales. Definimos entonces como el vector de estados <sup>1</sup>:

$$x(t) \equiv \left[ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \right]^T \tag{2.4}$$

y el vector de control:

$$u(t) \equiv \left[ u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \right]^T \tag{2.5}$$

El sistema 2.3 puede ser descrito en la forma compacta como:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)^T \tag{2.6}$$

donde  $a$  es una función vectorial de argumento vectorial  $a = (a_i(x(t), u(t), t), \dots, a_n(x(t), u(t), t))^T$ .

**Definición 2.1.** La historia de los valores de control de entrada en el intervalo  $[t_0, t_f]$  se expresa como  $u$  y es llamado *historia de control* [Kirk, 1970]

**Definición 2.2.** La historia de los valores de estado en el intervalo  $[t_0, t_f]$  se expresa como  $x$  y es llamado *trayectoria de estado* [Kirk, 1970].

<sup>1</sup>donde T indica que el vector es transpuesto

**Definición 2.3.** Una funcional es una regla de correspondencia que asigna a cada función  $u$  de un conjunto  $\Omega$  un valor real único. El conjunto  $\Omega$  es llamado el dominio de la funcional y el conjunto de los números reales asociados con las funciones de  $\Omega$  se le conoce como el *rango* de la funcional [Kirk, 1970].

### Restricciones Físicas

Las restricciones más comunes en los problemas son aquellas que involucran los valores iniciales y finales de las variables de estado por ejemplo:

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0) \quad (2.7)$$

$$x_1(t_f), x_2(t_f), \dots, x_n(t_f) \quad (2.8)$$

donde  $t_0$  es el tiempo inicial y  $t_f$  es el tiempo final

Otro ejemplo puede ser limitar el control a un rango de acción, por ejemplo:

$$0 \leq u \leq 1 \quad (2.9)$$

### La medida de desempeño

Para evaluar el desempeño de un sistema de forma cuantitativa, se emplea la medida de desempeño (también llamada función costo) la cual se representa mediante una *funcional* (ver definición (2.3) ) y nos sirve para relacionar el desempeño de algún parámetro o criterio con los estados y respecto al tiempo. Normalmente se emplea

la letra  $J$  para representar la medida de desempeño. En un problema de control óptimo se busca minimizar o maximizar dicha medida. La medida de desempeño es seleccionada por el diseñador y en algunos casos el tipo de problema indicará claramente que medida de desempeño se debe seleccionar mientras que en otros problemas sera una selección basada en las características del problema [Kirk, 1970].

La medida de desempeño es una funcional que se expresa de la forma:

$$J[u] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.10)$$

donde  $u \in \Omega$  es un conjunto de todas las funciones continuas del intervalo  $[t_0, t_f]$  en los reales.

En la ecuación (2.10) se observa una parte integral donde está la función  $g(x(t), u(t), t)$  la cual representa el desempeño del proceso o medida de desempeño de Lagrange. Por otra parte la función  $h(x(t_f), t_f)$  se conoce como función de desempeño terminal o medida de desempeño de Mayer, es aquí donde se incluyen las restricciones que deben cumplir los estados en el tiempo final  $t_f$ .

Algunas de las medidas de desempeño más comunes son: [Kirk, 1970]

1. Problemas de tiempo mínimo: se busca minimizar el tiempo final

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (2.11)$$

2. Problemas de control terminal: se busca minimizar o maximizar el valor alcanzado por algún estado o estados al tiempo  $t_f$  con respecto a una referencia

$$J[u] = \sum_{i=0}^n [x_1(t_f) - r_1(t_f)]^2 \quad (2.12)$$

3. Problemas de mínimo esfuerzo de control: se busca recurrir lo menos posible a acciones de control

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \quad (2.13)$$

4. Problemas de tracking: se busca mantener un estado o varios lo mas cercano posible a una referencia durante todo el trayecto

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} \|x(t) - r(t)\|^2 dt \quad (2.14)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana.

### Planteamiento

Habiendo definido *el modelo matemático, las restricciones físicas y la medida de desempeño* tenemos entonces un problema de control óptimo definido mediante las ecuaciones (2.15), (2.16).

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (2.15)$$

$$J[u] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.16)$$

Ahora el problema se reduce a encontrar un control admisible  $u^*$  (ver definición 2.5) que hace que el sistema  $\dot{x}(t)$  siga una trayectoria admisible  $x^*$  (ver definición 2.6) y que al mismo tiempo minimice o maximice la medida de desempeño  $J[u]$ .

**Definición 2.4.** Una *trayectoria de estado*  $x(t)$  está dada por la solución a las ecuaciones del modelo matemático el cual describe el comportamiento del sistema dinámico en el



intervalo  $[t_0, t_f]$  [Kirk, 1970].

**Definición 2.5.** Un *control admisible*  $u^*$  está dado por una ley de control que satisface las restricciones en el intervalo  $[t_0, t_f]$  [Kirk, 1970].

**Definición 2.6.** Una *trayectoria admisible*  $x^*$  es la trayectoria de estado que satisface las restricciones de variable de estado en el intervalo  $[t_0, t_f]$  [Kirk, 1970].

Si el control óptimo es determinado como una función del tiempo para un valor inicial de estado específico, como se observa en la ecuación (2.17), entonces se dice que el control es de *lazo abierto* ya que se tiene un control que es exclusivo para un estado inicial  $x(t_0)$ .

$$u^*(t) = e(x(t_0), t) \quad (2.17)$$

En otro caso si se conoce la *ley de control óptimo* se dice que se tiene un control de *lazo cerrado* ya que la historia de control empezando desde cualquier estado puede ser generado con dicha ley [Kirk, 1970].

## 2.2. Métodos Para Resolver Problemas de Control Óptimo

Los tres principales métodos (o enfoques) para la solución de los problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones diferenciales son los que se muestran en la figura 2.1 [Grune, 2013]:

Cada método tiene presenta sus ventajas y desventajas, su aplicación dependerá de las características del problema, por ejemplo, sensibilidad a los datos de

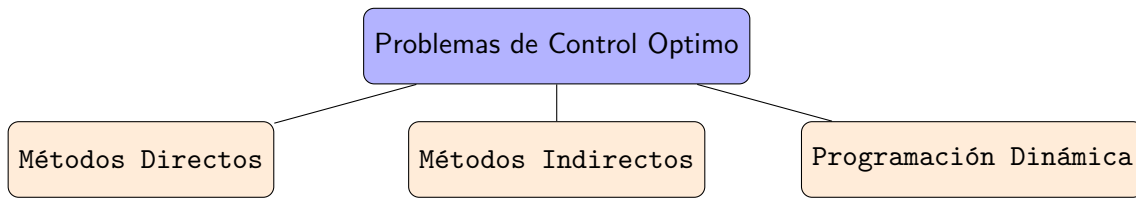


Figura 2.1: Taxonomía de métodos para el control óptimo

entrada, razón de convergencia, facilidad de programación etc. Por lo que se deberá hacer un balance para decidir cual es el método más conveniente para cada tipo de problema.

### 2.2.1. Método Indirecto

El *método indirecto* está basado en la teoría clásica del *cálculo de variaciones* y en el *principio del mínimo de Pontryagin* con el cual convertimos el problema a un problema de dos valores a la frontera (TPBVP).

#### Conceptos básicos

Las bases principales del cálculo de variaciones se dan por los conceptos de *funcional* (ver definición 2.3), *variación*, *extremal* e *incremento*.

Para considerar los valores extremos de una función se define el concepto de incremento de una funcional el cual esta dado por:

**Definición 2.7.** Si  $x$  y  $x + \delta$  son funciones para que las cuales la funcional  $J$  es definida, entonces el *incremento* de  $J$ , denotado por  $\Delta J$  es [Kirk, 1970]:

$$\Delta J \equiv J(x + \delta x) - J(x) \quad (2.18)$$

donde  $\delta x$ ,  $\delta x$  es llamado la *variación* de la función  $x$ .

Un *extremal* es un extremo de una funcional descrito por una función  $x^*$  el cual debe cumplir con el *teorema fundamental del cálculo de variaciones* (ver teorema 2.1) y puede ser un extremo máximo, mínimo.

### El calculo de variaciones

El calculo de variaciones es una rama del cálculo que se emplea para resolver problemas de optimización mediante la búsqueda de máximos o mínimos en una funcional. Para realizar dicha búsqueda se analiza la variación de la funcional y se emplea el teorema fundamental del cálculo de variaciones el cual se describe en el Teorema 2.1.

**Teorema 2.1.** *Si  $x^*$  es un extremal, la variación de  $J$  dada por  $x^*$  es [Kirk, 1970]:*

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 \quad (2.19)$$

En otras palabras la variación de una funcional debe ser cero para la funcional evaluada en  $x^*$ .

Aplicando el teorema fundamental a la funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

se obtiene que la condición necesaria para que  $x^*$  sea un extremo relativo de  $J$  se

debe cumplir lo siguiente

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0 \quad (2.20)$$

Las condiciones de frontera dependen del tipo de problema que se este resolviendo. A continuación se describen los cuatro problemas principales que se consideran en el Cálculo Variacional.

- Problema tipo 1: Encontrar la condición necesaria para que una función  $x^*$  sea un extremo de la funcional

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.21)$$

$t_0, x(t_0) = x_0, t_f, x(t_f) = x_f$  son dados. En este caso la condiciones de frontera son  $x_0$  y  $x_f$  y la condición necesaria para el extremal está dada por (2.20).

La figura 2.2 muestra ejemplos de trayectorias admisibles para un problema de tipo 1.

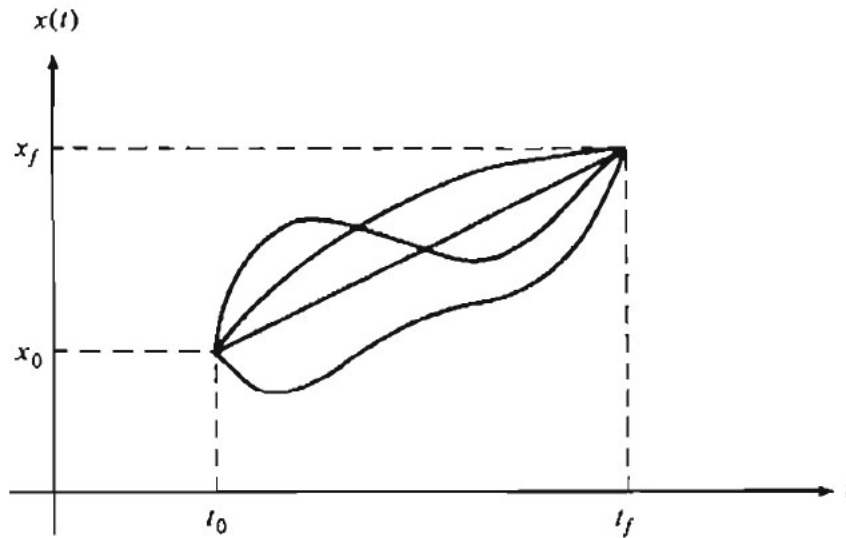


Figura 2.2: Trayectorias admisibles para el problema tipo 1 [Kirk, 1970]

- Problema tipo 2: Encontrar la condición necesaria para que una función  $x^*$  sea un extremo de la funcional

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.22)$$

$t_0$ ,  $x_0$  y  $t_f$  están dados y el estado final  $x_f$  es libre. Las condiciones de frontera están dadas por  $x_0$  y

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0 \quad (2.23)$$

y la condición necesaria para el extremal está dada por (2.20).

La figura 2.3 muestra ejemplos de trayectorias admisibles para el problema de tipo 2.

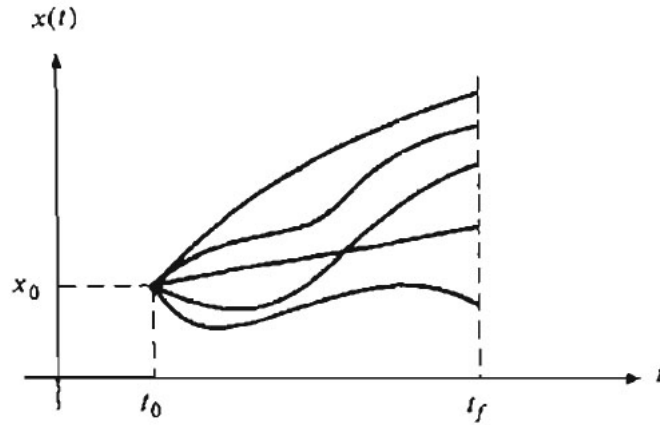


Figura 2.3: Trayectorias admisibles para el problema tipo 2 [Kirk, 1970]

- Problema tipo 3: Encontrar la condición necesaria para que una función  $x^*$  sea un extremo de la funcional

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.24)$$

$t_0$ ,  $x_0$  y el estado final  $x_f$  están dados, el tiempo final  $t_f$  es libre. Las condiciones de frontera están dadas por  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_f) = x_f$  y

$$g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left[ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}^*}(x(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{x}(t_f) = 0 \quad (2.25)$$

Ejemplos de curvas admisibles para este tipo de problema se muestran en la figura 2.4

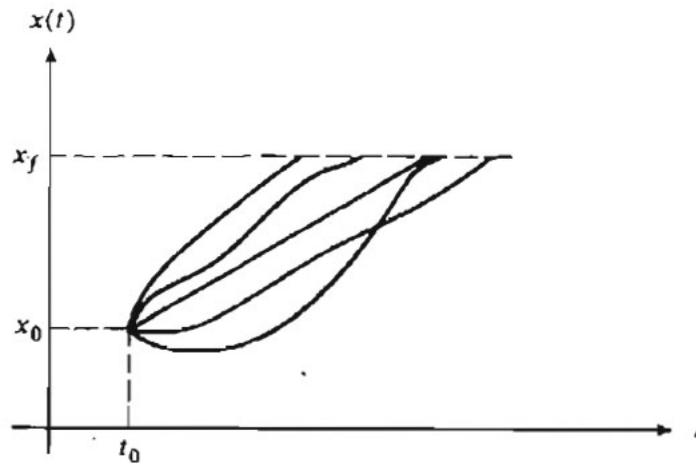


Figura 2.4: Trayectorias admisibles para el problema tipo 3 [Kirk, 1970]

- Problema tipo 4: Encontrar la condición necesaria para que una función  $x^*$  sea un extremo de la funcional

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.26)$$

$t_0$  y  $x_0$  están dados,  $t_f$  y  $x_f$  son libres. Si  $t_f$  no está relacionada con  $x_f$ , las condiciones de frontera están dadas por  $x(t_0) = x_0$  y

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) = 0, \quad g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (2.27)$$

En la figura 2.5 se observa la comparación entre una curva admisible  $x$  y un extremal  $x^*$ .

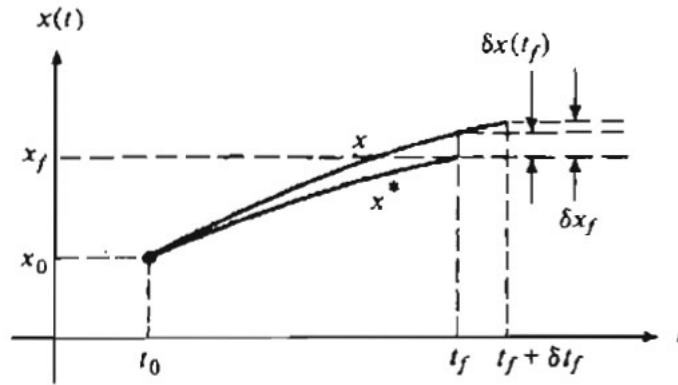


Figura 2.5: Comparación de la curva de un extremal y su vecindad para un problema tipo 4 [Kirk, 1970]

Los cuatros tipos de problemas presentados anteriormente se formularon en su forma escalar (funciones a valores reales) para no sobrecargar la notación. Su generalización a funciones vectoriales es directo.

### El cálculo de variaciones en control óptimo

Partiendo de las ecuaciones de estado descritas por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = a(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.28)$$

Se busca minimizar la medida de desempeño expresada por:

$$J[u] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.29)$$

Aplicando el *principio del mínimo de Pontryagin* introducimos el *Hamiltoniano* que



se define como:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)[a(x(t), u(t), t)] \quad (2.30)$$

Al vector  $\lambda$  de la ecuación (2.30) se le conoce como vector de coestados, este vector sirve para reducir el problema restringido de  $n$  variables a uno de  $n + k$  variables sin restricciones el cual es más simple de resolver, además de que relaciona los estados con la medida de desempeño [Ross, 2015].

Las condiciones necesarias para encontrar un control admisible  $u^*$  que cause que el sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  siga una trayectoria admisible  $x^*$  que minimice la medida de desempeño (2.29) están dadas por las siguientes ecuaciones [Kirk, 1970]

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.31)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.32)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \quad (2.33)$$

y Mediante el Hamiltoniano la función costo, los estados y coestados a se encuen-

tran las condiciones de transversabilidad las cuales nos describen las condiciones de frontera para el problema de control óptimo y esta descrito como:

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f - \lambda^*(t_f)) \right]^T \delta x_f + \left[ H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (2.34)$$

Por medio de (2.34) se determinan las condiciones de frontera.

Esta metodología se conoce como método indirecto ya que de forma indirecta estamos obteniendo  $u^*$  óptimo que minimiza o maximiza  $J$  mediante el uso del principio del mínimo de Pontryagin. Una vez estableciendo las condiciones de frontera todo lo que queda es resolver el problema de dos valores a la frontera para lo cual se recurre a métodos numéricos dado que rara vez se podrá obtener una solución analítica del problema.

### 2.2.2. Método Directo

El método directo resuelve el problema de control óptimo minimizando directamente la medida de desempeño o función costo, se aplican directamente técnicas numéricas de optimización e integración. No requiere de la teoría del cálculo de Variaciones ni de las condiciones necesarias para el control óptimo. Se basa en la filosofía de primero discretizar y luego optimizar, por lo cual el problema pasa a ser un *problema de programación no lineal* [Huang, ].

### 2.3. ALGORITMOS Y PAQUETES PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

Algunos de los métodos directos más empleados son:

- Método de Disparo
- Método de Disparo Múltiple
- Método de Colocación
- Método de Inclusión Diferencial
- Método del Gradiente
- Método del Gradiente Conjugado

### **2.3. Algoritmos y paquetes para la solución de problemas de control óptimo**

Actualmente se han desarrollado una gran cantidad de herramientas de software para la solución de problemas de control óptimo [Rao, 2010], gran parte de este software ha sido programado en el lenguaje Fortran dadas sus características para la programación matemática. Sin embargo, se pueden encontrar herramientas y paquetes en otros lenguajes y entornos de trabajo, por ejemplo, MATLAB, incluso existen entornos gráficos dedicados a los problemas de control óptimo que han sido desarrollados por grandes instituciones dedicadas a la investigación, como es el caso de COPERNICUS desarrollado por NASA.

A continuación presentamos una tabla con un resumen de los principales paquetes y algoritmos:

	Paquetes y algoritmos para el control óptimo		
	Paquete o Algoritmo	Código Abierto	Software de pago
Fortran	BNDSCO	Si	No
	POST2	No	No
	OTIS4	No	No
	SOCS	No	Si
	MISER	Si	Si
	DIRCOL		-
	NTG	-	-
	MIDAS	-	-
Entornos Gráficos	GMAT	-	-
	GESOP	-	-
	COPERNICUS	-	-
MATLAB	SNOPT	-	-
	TOMLAB	-	-
	KNITRO	-	-
	RIOTS95	-	-
	DIDO	No	Si
	DIRECT	-	-
	PROPT	-	-
	OPTCONTROLCENTRE	-	-
	GPOPS	-	-
BVP4C, BVP5c	Si	No	

Tabla 2.1: Tabla de los principales programas.

### 2.3.1. Algoritmos y paquetes empleados

Los paquetes para la solución de problemas de control óptimo que se emplean son:

- DIDO que emplea el método pseudoespectral, programado por Ross (paquete de terceros para Matlab)
- BVP4C que emplea el método de colocación modificado, programado por Shampine (incluido en la librería de *optimization toolkit* de Matlab)

## DIDO

DIDO es un paquete de terceros desarrollado por el Dr. Michael Ross [Ross, 2015] el cual para su funcionamiento trabaja sobre la plataforma MATLAB. Dicho paquete es amigable al usuario ya que solo se requiere del planteamiento del problema de control óptimo y del conocimiento de los posibles resultados de los estados en el tiempo final. Resuelve el problema de control óptimo basándose en el *método indirecto* que a su vez emplea el *principio del mínimo de Pontryagin* y mediante el método pseudoespectral obtiene una solución numérica del mismo. El Dr. Roos afirma que su paquete debe ser considerado como simplemente método pseudoespectral mas allá de considerarse un método indirecto [Ross, 2015].

## Programas BVP4c o BVP5c

Dentro de la plataforma de MATLAB existe una herramienta dedicada a la optimización llamada "*optimization toolkit*" que reúne las herramientas necesarias para resolver problemas de optimización en general. Dentro de sus herramientas se encuentran los algoritmos BVP4C y BVP5C que sirven para resolver problemas de valores a la frontera (BVP). Dichos algoritmos fueron desarrollados por Shampine [Shampine, 2000] y se basan en el método de colocación modificado adaptado por Shampine para su implementación en problemas de valores a la frontera [Shampine, 2000].

Para aplicar dichos algoritmos en la resolución de problemas de control óptimo es necesario llevar a cabo el planteamiento del problema, construir una estructura de estimaciones iniciales mediante el comando `bvpinit` y aplicar el método de colocación modificado mediante el comando `bvp4c` o `bvp5c`.

## 2.4. Métodos Numéricos en Problemas de Control Óptimo

En esta sección damos una breve discusión de los algoritmos numéricos que emplean los paquetes o programas descritos en la sección anterior y que se utilizan en el presente trabajo.

Los métodos numéricos para resolver los problemas de control óptimo tienen su origen desde la década de los 50's con el trabajo de Bellman en programación dinámica y la aparición de las computadoras [Rao, 2010]. A lo largo del siglo pasado se han desarrollado métodos y algoritmos para dicho propósito cuyas características han ido variando con el tiempo con el fin de obtener soluciones más precisas, con mejor razón de convergencia y diferente sensibilidad a las estimaciones iniciales.

Al resolver un problema de control óptimo se obtiene una serie de puntos en un intervalo de tiempo finito que va de  $[t_0, t_f]$  que representan aproximaciones al control  $u$  y a los estados  $\mathbf{x}$  de un sistema dinámico. Por lo cual solamente podemos obtener el control o el valor de los estados en una serie de puntos finitos dentro del intervalo de tiempo.

Los métodos indirectos y directos presentan dos filosofías diferentes para atacar un problema de control óptimo. Según sea el caso que se elija nos enfrentaremos a situaciones matemáticas distintas, como se observa en la Tabla 2.2. Por ejemplo, si nos enfocamos en los métodos indirectos estaremos más enfocados a la teoría de *Ecuaciones Diferenciales* mientras que si nos enfocamos en métodos directos nos concentraremos más en *Técnicas de Optimización*. Sin embargo, seguiremos empleando métodos integradores pero bajo una circunstancia diferente.

Tabla 2.2: Los tres componentes básicos de un problema de control óptimo según el método se empleó para buscar una solución [Rao, 2010]

Métodos Indirectos		
Sistemas de Ecuaciones No Lineales	Ecuaciones Diferenciales e Integración de Funciones	Técnicas de Optimización
Métodos Directos		

Dependiendo de la filosofía que se emplee para resolver un problema de control óptimo dispondremos de una amplia gama de métodos numéricos para atacar el problema. Algunos se emplean en ambas filosofías pero bajo circunstancias diferentes. En la siguiente figura 2.6 se presentan algunas de las estrategias numéricas que se emplean.

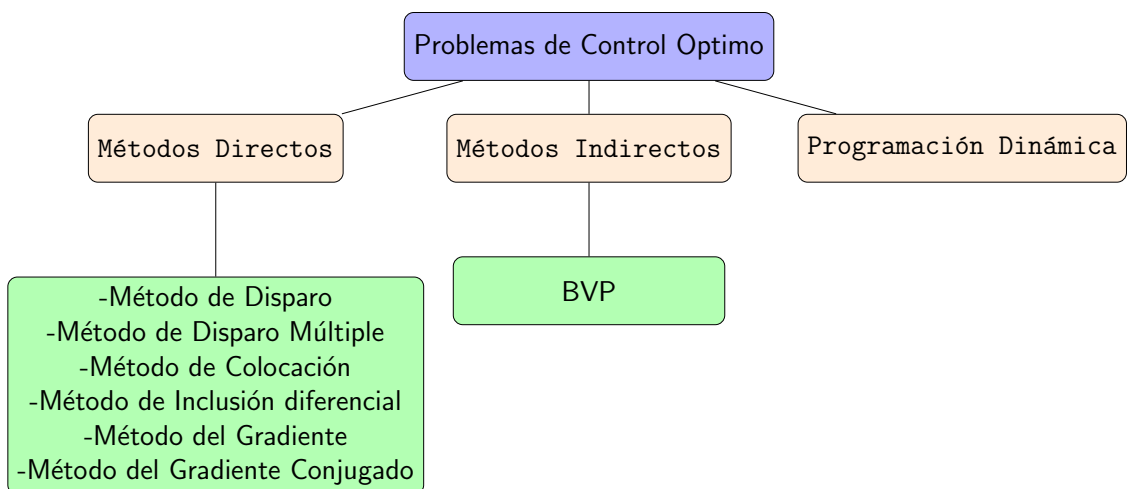


Figura 2.6: Taxonomía de métodos para el control óptimo

En esta tesis se emplea el método indirecto para plantear los problemas y bajo dos estrategias numéricas se busca obtener una solución a los problemas planteados, dichas estrategias numéricas son:

- Método de Colocación
- Método Pseudoespectral

### 2.4.1. Método de Colocación

El método de colocación es una estrategia numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias EDOs, ecuaciones parciales diferenciales y ecuaciones integrales. La idea básica es escoger un espacio finito dimensional de soluciones candidatas y una cantidad de puntos del dominio llamados puntos de colocación donde la función seleccionada satisface la ecuación en los puntos de colocación [Shampine, 2000]. Generalmente se emplean polinomios de tercer orden para aproximar una solución. Este método resuelve problemas de valores a la frontera BVP (Boundary Value Problem por sus siglas en Inglés) de la forma:

$$y' = f(x, y, p), a \leq t \leq b \quad (2.35)$$

Sujeto a dos condiciones de frontera:

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (2.36)$$

Donde  $p$  es un vector de parámetros desconocido. Por simplicidad se omite en las expresiones siguientes de esta explicación. La solución aproximada representada por  $S(t)$  es una función continua que es un polinomio cubico en cada sub intervalo  $[x_n, x_{n+1}]$  de una malla  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  el cual satisface las condiciones de frontera dadas por:

$$g(S(a), S(b)) = 0 \quad (2.37)$$



Y a su vez satisface las ecuaciones diferenciales (colocando) en el final y en un punto medio de cada sub intervalo tal que:

$$S'(x_n) = f(x_n, S(x_n)) \quad (2.38)$$

$$S'((x_n + x_{n+1})/2) = f((x_n + x_{n+1})/2, S((x_n + x_{n+1})/2)) \quad (2.39)$$

$$S'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, S(x_{n+1})) \quad (2.40)$$

Estas condiciones resultan en la solución de un sistema de ecuaciones algebraico no lineal para los coeficientes definiendo  $S(x)$ , Las ecuaciones algebraicas no lineales se resuelven iterativamente por linealización y se toman en cuenta las condiciones de frontera en todo momento. El método `bvp4c` emplea este método de colocación pero empleando la **regla de Simpson** donde  $S(x)$  es una aproximación de cuarto orden a una solución aislada  $y(x)$  [Shampine, 2000].

$$\|y(x) - S(x)\| \leq Ch^4 \quad (2.41)$$

Donde  $h$  es el máximo de los tamaños de paso y  $C$  es una constante. Este limite se cumple para todas las  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  La regla de Simpson es un método para la aproximación numérica de integrales definidas. La aproximación se realiza para  $n$  subdivisiones igualmente espaciadas donde  $n$  es par y esta descrita por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \quad (2.42)$$

Donde  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

Debido a que un BVP puede tener mas de una solución el código `bvp4c` requiere de una estimación inicial suministrada por el usuario para la solución deseada.

La estimación incluye una estimación para una malla inicial que indica el comportamiento deseado de la solución. Obtener una estimación inicial lo suficientemente buena es comúnmente la parte mas compleja para resolver el problema. `bvp4c` toma un enfoque para el control del error que ayuda a lidiar con las estimaciones iniciales pobres [Shampine, 2000]. El control del error se lleva a cabo mediante los residuales definidos por

$$r(x) = S'(x) - f(x, S(x)) \quad (2.43)$$

Los residuales están bien definidos sin importar que tan mal sea la estimación inicial de la solución y los residuales pueden ser evaluados donde sea simplemente evaluando  $f(x, S(x))$ .

### 2.4.2. Método Pseudoespectral

También conocido como método interpolante, este método esta clasificado dentro de los métodos espectrales, su principal características es que demanda una precisión muy alta de la ecuación diferencial en un cierto conjunto de puntos de la malla. Generalmente, la solución se busca en la forma de una serie truncada.

La idea básica es escribir la solución de la ecuación diferencial como una suma de ciertas "funciones base" (por ejemplo, como una serie de Fourier que es una suma de exponenciales complejas) y luego elegir los coeficientes de la suma con el fin de satisfacer la solución de la ecuación de la mejor manera posible.

# Capítulo 3

## Revisión de la literatura

### 3.1. Revisión de investigaciones recientes

Fue a partir de la aparición de las computadoras para resolver problemas matemáticos que se empezaron a desarrollar algoritmos que tienen como meta la obtención de una solución estimada a los problemas de control óptimo en general. Dado el contexto de la época (después de la mitad del siglo XX) muchas de las investigaciones se centraron en problemas aeronáuticos o aeroespaciales. Durante la década de los 70's, 80's y 90's y lo que va del siglo XXI se incrementó considerablemente la investigación y el análisis sobre cómo resolver los problemas de control óptimo. Un enfoque de investigación durante estos años se enfocó en el estudio de las distintas estrategias para atacar los problemas y cuáles resultan más adecuados para llevarlos a la práctica.

Algunas de estas investigaciones son descritas a continuación en orden cronológico. Oberle [Oberle and Grimm, 1989] en la década de los 80's desarrolló el programa BNDSCO basándose en los integradores desarrollados por Bulirsch para problemas

de valores a la frontera. BNDSCO es una implementación del algoritmo que emplea el método de disparo múltiple desarrollado por Bulirsch, que es adaptado al problema de valores a la frontera (BVP) [Oberle and Grimm, 1989].

En el año 1993 Oskar Von Struk [von Stryk O, 1993] presentó un algoritmo para la obtención de una solución numérica al problema de control óptimo mediante el método de colocación directa. Para realizar esto transforma un problema restringido de control óptimo en un programa finito dimensional no lineal el cual puede ser resuelto por el método estándar de *programación secuencial cuadrática* (SPQ-method por sus siglas en inglés). El método que presentó mejora los algoritmos existentes para la implementación del método de colocación en términos de fiabilidad y la capacidad de incluir discontinuidades en los puntos adyacentes.

En el año de 1996 Andrews [Andrews, 1996] desarrolló y comparó algoritmos para los problemas de control óptimo. Entre los cuales están el método de disparo, método de Chebyshev y el método de disparo múltiple. en los problemas analizados algunos fueron con variables adjuntas y otros no; es decir, analiza de forma directa e indirecta los métodos, sus conclusiones destacadas fueron que el método de disparo simple y de disparo múltiple dan soluciones más precisas, pero el método de disparo múltiple es mejor para problemas mas inestables y de alta sensibilidad.

En 1997 Oberle realizó un estudio sobre la existencia y la solución múltiple de un problema de transferencia orbital donde se minimiza el combustible. Mediante métodos directos demostró que la existencia de la solución al problema de control óptimo está garantizada si se restringen los tiempos de transferencia orbital admisibles por un límite superior que se caracteriza por ser arbitrario. Llega a la conclusión de que podría no existir una solución global óptima del problema con tiempo de transferencia libre [H.J. Oberle, 1997].

En 2006 Avvakumov realiza una investigación de los algoritmos para resolver problemas de control óptimo y describe el método de continuación numérica con respecto a un parámetro. Él afirma que el esquema de variación de parámetros puede considerarse como un desarrollo especial y una modificación del método clásico de Newton. Con este enfoque se pretende la reducción de un problema de valor a la frontera a un problema Cauchy.

En 2007 Ternovskii [Ternovski and M. Khapaev, 2007] se enfocó en el estudio de problemas de control óptimo empleando el *teorema de existencia y unicidad* con datos de entrada dados para controles por intervalos. Ternovskii trata el problema de control óptimo como el problema inverso de recuperar el control  $u(t)$  de los datos de entrada incluyendo los aproximados, dado que los datos involucran errores; desarrolla entonces, un algoritmo en el cual combina el enfoque del principio de Pontryagin con la teoría de problemas mal condicionados (*ill-posed problems*) e introduce un estabilizador de Tikhonov con un parámetro de regularización.

Huang [Huang, ] en el año 2012, realizó un estudio de los algoritmos numéricos para la optimización de trayectorias de vehículos de vuelo. Entre los puntos que destaca está lo que el autor denomina como factor clave (la medida de desempeño) el cual afecta el éxito o el fracaso del diseño del sistema del vehículo de vuelo; dicho factor consiste en ensamblar dinámicamente y de forma estática todos los subsistemas del vehículo de vuelo para lograr el mejor índice de desempeño que describa de forma correcta el problema. Huang clasifica los métodos de optimización de trayectorias en base a los estándares de los mismos como:

- Métodos directos y Métodos indirectos
  
- Métodos integradores y Métodos diferenciadores

- Optimización de un objetivo simple y Optimización de múltiples objetivos
- Optimización garantizada y Optimización robusta
- Métodos puros de matemáticas y métodos impuros de matemáticas

Huang analizó los métodos directos e indirectos aplicados a problemas de control óptimo aeroespacial, nos indica algunas de sus ventajas y desventajas según el enfoque que apliquemos a los problemas de control óptimo. En la Tabla 3.1 se muestran las ventajas y desventajas destacadas por Huang.

Huang, también analiza algoritmos mas recientes y de complejidad mayor que los métodos tradicionales entre los que destaca:

- Método de exploración rápida del árbol al azar
- Método de optimización del procedimiento del horizonte de balanceo.
- Algoritmo genético.
- Algoritmo de la colonia de hormigas.
- Método de optimización de enjambre de partículas.
- Programación dinámica y gradiente conjugado (algoritmo combinado).

Trélat en el año 2012 [Trélat, 2012] afirma que las herramientas usuales para el control óptimo pueden ser combinadas con otras técnicas matemáticas para mejorar significativamente sus desempeños y ampliar su dominio de aplicación, como lo es la geometría diferencial que puede ser especialmente útil en problemas de reentrada

atmosférica de una nave, o el método de continuación numérica o también llamado homotopía el cual es especialmente útil en problemas donde es difícil dar una estimación inicial viable para la convergencia del problema.

Grune en el año 2013 [Grune, 2013] al igual que Huang realizó un estudio de los métodos para el control óptimo no lineal, su estudio se enfoca en los métodos directos, indirectos y en la programación no lineal, entre los principales puntos que destaca están:

- El enfoque de programación dinámica, provee una solución global retroalimentada pero es computacionalmente caro para sistemas cuyas dimensiones son grandes.
- El método indirecto obtiene trayectorias óptimas con alta precisión pero requiere buenas estimaciones iniciales para la iteración.
- El método directo también calcula las trayectorias óptimas pero es menos exigente en términos de estimaciones iniciales a cambio de una precisión más baja.

Frego [Marco, 2014] realiza afirmaciones similares en el estudio que hace del desempeño de los métodos para los problemas de control óptimo. En la tabla 3.2 se muestran las ventajas y desventajas que destaca Frego para los distintos métodos de optimización.

Mediante esta investigación se optó por aplicar el **enfoque indirecto** para plantear los problemas y posteriormente analizar las dos estrategias numéricas. Los autores Grune, Frego y Huang afirman virtudes similares para el enfoque indirecto. Las virtudes que afirman los autores para dicho método son:

1. Alta precisión de la solución obtenida
2. La solución óptima cumple con las condiciones necesarias de primer orden.
3. Incluso en sistemas de gran escala es factible aplicar dicho enfoque.

Y dado que por lo general en problemas aeroespaciales se requiere de una alta precisión, el enfoque indirecto pasa a ser una buena opción para atacar dichos problemas, de igual manera la flexibilidad para ser aplicado a sistemas de gran escala hacen de este enfoque una alternativa muy usada comúnmente en problemas aeroespaciales.

Por otro lado las desventajas en común para dicho enfoque son:

1. Requiere de una buena estimación inicial.
2. La solución es un extremal pero no necesariamente un mínimo.
3. Para problemas con restricciones se complica el uso del método.

La principal desventaja que recalcan los autores es la estimación inicial. Este punto pasa a ser un aspecto crítico para la solución del problema ya que de no contar con una buena estimación inicial no será posible converger a una solución para el sistema.



Enfoque del problema	Ventajas	Desventajas
Enfoque Directo	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. No es necesaria la deducción de las condiciones necesarias de control óptimo</li> <li>2. Comparado con el método indirecto, el método directo tiene un <i>dominio de convergencia</i> más amplio y unos requisitos bajos para obtener una buena exactitud de la evaluación del valor inicial. Estimar el valor inicial de la variable consistente es innecesario.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. La solución obtenida del problema de programación no lineal puede ser insuficiente para asegurar la solución del problema de control óptimo.</li> <li>2. El método directo aplicado a optimización paramétrica converge fácilmente a soluciones óptimas locales.</li> </ol>
Enfoque Indirecto	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Alta precisión de la solución.</li> <li>2. La solución óptima cumple con las condiciones necesarias de primer orden.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Es complicado deducir la solución óptima basándose en el <i>Principio del Máximo de Pontryagin</i></li> <li>2. El dominio de convergencia es extremadamente pequeño durante la solución del problema de valores a la frontera por lo cual se requiere de alta precisión de la <i>estimación inicial</i>.</li> <li>3. En los problemas con restricciones es difícil aplicar el método indirecto.</li> </ol>

Tabla 3.1: Comparativa de los métodos según el estudio de Huang [Huang, ].

Enfoque del problema	Ventajas	Desventajas
Enfoque Directo	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los <i>problemas no lineales</i> han sido ampliamente estudiados y actualmente hay una gran variedad de algoritmos disponibles.</li> <li>2. Es fácil tratar las restricciones de desigualdad porque tienen su forma equivalente natural asociado al problema no lineal.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los métodos directos solo producen soluciones subóptimas o soluciones aproximadas.</li> </ol>
Enfoque Indirecto	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Alta precisión de la solución</li> <li>2. Incluso en sistemas de gran escala es factible aplicar este enfoque</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. El BVP resultante es difícil de solucionar.</li> <li>2. Es obligatorio analizar la solución, dado que es un extremo, pero no necesariamente un mínimo. Esto puede ser realizado inspeccionando el problema (convexidad, segunda variación, etc.)</li> </ol>
Programación Dinámica	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. La búsqueda de la solución se realiza en todo el espacio de estado dando como resultado un <i>óptimo global</i>.</li> <li>2. Admite algunas soluciones analíticas.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. La ecuación diferencial parcial resultante esta en un <i>espacio de alta dimensión</i> y en general no es manejable. Esto es lo que Bellman llamó "La maldición de la dimensionalidad".</li> </ol>

Tabla 3.2: Comparativa de los métodos según el estudio de Frego [Marco, 2014]

# Capítulo 4

## Planteamiento de los Problemas

### Seleccionados para Análisis

En el presente capítulo se plantean los problemas seleccionados para su análisis, estos se enfocan principalmente en problemas con aplicaciones aeroespaciales, tales como trayectorias de aterrizaje, trayectorias de transferencia orbital y de navegación por el espacio.

Los problemas se plantearon con el método indirecto por lo cual hacemos uso de la teoría expuesta en el capítulo 2 sección 2.1.

#### 4.1. Problema 1

El presente problema consiste en la obtención de la trayectoria de ascenso para el lanzamiento de una nave desde la luna a una órbita circular a 100 millas náuticas (185.2 Km) de distancia. [Longuski M. James, 2014]. El problema se ilustra en la

figura 4.1

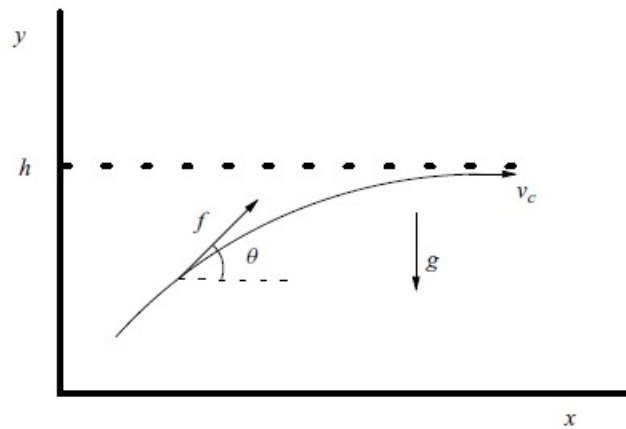


Figura 4.1: Problema 1: obtención de trayectoria para el ascenso

Se realiza su planteamiento mediante el enfoque indirecto. Se caracteriza por ser un problema del tipo 3 según la teoría del cálculo variacional con tiempo final libre y un estado final libre. Generalmente muchos problemas de control óptimo orientados a aplicaciones aeroespaciales tienen el tiempo final libre.

Se tienen las siguientes constantes:

Altura final  $y_f = 185,200m$

Velocidad circular final  $v_c = 1.627e3m/s$

Aceleración gravitacional de la luna  $g = 1.62m/s^2$

Empuje = 3

Se requiere lanzar una nave desde la superficie lunar para establecer una órbita circular, con un campo gravitacional  $g$  constante.

Para este problema se realizan las siguientes suposiciones:

- Los ejes  $x$  y  $y$  son rectilíneos

- La aceleración gravitacional  $g$  es constante y equivalente a suponer que la luna es plana
- La velocidad de combustión del combustible es constante

El modelo matemático de este problema está dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= a(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\
 &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), v_x(t), v_y(t))^T \\
 &= \left( v_x(t), v_y(t), \frac{F}{m} \cos(\theta(t)), \frac{F}{m} \sin(\theta(t)) - g \right)^T
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estados dentro del cual  $x(t)$  es la posición de la nave en el eje  $x$  y se mide en Kilómetros (Km),  $y(t)$  es la posición de la nave en el eje  $y$  y se mide en Kilómetros (Km),  $v_x$  representa la velocidad de la nave en el eje  $x$  y se mide en Kilómetros por hora (Km/hr) y por ultimo  $v_y$  representa la velocidad de la nave en el eje  $y$  y se mide en Kilómetros por hora (Km/hr). Dicho sistema dinámico se obtiene a partir de la segunda ley de Newton donde la aceleración de empuje de la nave  $F/m$  es constante.

El problema tiene las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$t_0 = 0, x(0) = 0, v_x(0) = v_y(0) = 0 \tag{4.2}$$

$$y(t_f) = y_f, v_x(t_f) = v_c, v_y(t_f) = 0 \tag{4.3}$$

De acuerdo a los objetivos del problema que es maximizar la carga útil de

combustible para alcanzar una órbita circular a 185.2 Km, la función objetivo se define como:

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t_f \quad (4.4)$$

El hamiltoniano se obtiene mediante la ecuación (4.5), esto es

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)[a(x(t), u(t), t)] \quad (4.5)$$

Donde  $\lambda(t) = ([\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)]^T$  son los coestados del sistema dinámico y  $g(x(t), u(t), t)$  es el integrando de la función costo.

Sustituyendo (4.1) en (4.5) obtenemos el hamiltoniano del sistema, esto es

$$H((x(t), u(t), \lambda(t), t) = 1 + \lambda_1(t)V_x(t) + \lambda_2(t)V_y(t) + \lambda_3(t)\frac{F}{m} \cos \theta(t) + \lambda_4(t)\left(\frac{F}{m} \sin \theta(t) - g\right) \quad (4.6)$$

A partir del hamiltoniano y del a ecuación (2.33) obtenemos la ley de control óptimo, esto es

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \quad (4.7)$$

$$\cos(\theta(t)) = \frac{-\lambda_3(t)}{\sqrt{\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)}} \quad (4.8)$$

$$\sin(\theta(t)) = \frac{-\lambda_4(t)}{\sqrt{\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)}} \quad (4.9)$$

Las ecuaciones de coestado se obtienen a partir de la ecuación (4.10).

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.10) obtenemos las ecuaciones de coestado:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = 0 \quad (4.11)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y(t)}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = 0 \quad (4.12)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial v_x(t)}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = -\lambda_1(t) \quad (4.13)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = -\frac{\partial H}{\partial v_y(t)}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = -\lambda_2(t) \quad (4.14)$$

Las condiciones iniciales y de frontera de (4.1) y (4.11) - (4.14) se obtienen a partir de la ecuación (4.15), esto es.

$$0 = \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[ H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f \quad (4.15)$$

Entonces obtenemos las condiciones adicionales para el sistema analizando en donde se presenta variación para la ecuación (4.15), a simple vista se observa que tenemos

un estado final libre y el tiempo final libre por lo cual queda:

$$\lambda_1(t_f) = 0, H(t_f) = -1 \quad (4.16)$$

Con lo anterior tenemos los datos suficientes para resolver el problema mediante el método de colocación modificado implementado en Matlab mediante el algoritmo BVP4C y mediante el método pseudo espectral implementado en DIDO. Los resultados y su análisis de abarcan en el Capítulo 5.

## 4.2. Problema 2

Problema de manejo de un cuerpo rígido [Ross, 2015].

El objetivo del problema es minimizar el esfuerzo de control para un movimiento descrito mediante mecánica del cuerpo rígido, con cuaterniones. Dicha mecánica se emplea actualmente para problemas aeroespaciales y de robótica.

Este problema es del tipo 2 acorde con la teoría expuesta en el capítulo 2 en donde tenemos el tiempo inicial y final fijos y los estados con variación.

El modelo matemático de este problema está dado por:

$$\mathbf{x}(t) = a(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), \dot{q}_4(t), \dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t), \dot{w}_3(t))^T$$

Donde:  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estados dentro del cual  $q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t)$  son los componentes base de los cuaterniones y  $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$  son las velocidades angulares. La dinámica del sistema esta descrita por:

$$\dot{q}_1(t) = \frac{1}{2}(\omega_1(t)q_4(t) - \omega_2(t)q_3(t) + \omega_3(t)q_2(t)) \quad (4.17)$$



$$\dot{q}_2(t) = \frac{1}{2}(\omega_1(t)q_3(t) + \omega_2(t)q_4(t) - \omega_3(t)q_1(t)) \quad (4.18)$$

$$\dot{q}_3(t) = \frac{1}{2}(-\omega_1(t)q_2(t) + \omega_2(t)q_1(t) - \omega_3(t)q_4(t)) \quad (4.19)$$

$$\dot{q}_4(t) = \frac{1}{2}(-\omega_1(t)q_1(t) - \omega_2(t)q_2(t) - \omega_3(t)q_3(t)) \quad (4.20)$$

$$\dot{\omega}_1(t) = u_1(t) \quad (4.21)$$

$$\dot{\omega}_2(t) = u_2(t) \quad (4.22)$$

$$\dot{\omega}_3(t) = u_3(t) \quad (4.23)$$

Las condiciones de frontera quedan definidas por:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad q_3(0) = 0, \quad q_4(0) = 1 \\ w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_3(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$q_1(t_f) = 0.06708, \quad q_2(t_f) = -0.1118, \quad q_3(t_f) = 0.2236, \quad q_4(t_f) = 0.9659, \quad t_f = 20 \quad (4.25)$$

Se busca minimizar el esfuerzo de control por lo cual la medida de desempeño queda:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t)) dt \quad (4.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones dinámicas del problema (4.17) - (4.23) en (4.5) obtenemos el hamiltoniano del sistema, esto es

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}[(u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t)) + \lambda_{q_1(t)}(\omega_1(t)q_4(t) - \\ \omega_2(t)q_3(t) + \omega_3(t)q_2(t)) + \lambda_{q_2(t)}(\omega_1(t)q_3(t) + \omega_2(t)q_4(t) - \omega_3(t)q_1(t)) + \\ \lambda_{q_3(t)}(-\omega_1(t)q_2(t) + \omega_2(t)q_1(t) + \omega_3(t)q_4(t)) + \lambda_{q_4(t)}(-\omega_1(t)q_1(t) - \\ \omega_2(t)q_2(t) - \omega_3(t)q_3(t))] + \lambda_{w_1(t)}u_1(t) + \lambda_{w_2(t)}u_2(t) + \lambda_{w_3(t)}u_3(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

## 50CAPÍTULO 4. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS PARA ANÁLISIS

A partir del hamiltoniano y de la ecuación (2.33) obtenemos la ley de control óptimo, esto es

$$u_1(t) = -\lambda_{\omega_1}(t), \quad u_2(t) = -\lambda_{\omega_2}(t), \quad u_3(t) = -\lambda_{\omega_3}(t) \quad (4.28)$$

Sustituyendo (4.27) en (4.10) obtenemos las ecuaciones de coestado:

$$\dot{\lambda}_{q_1}(t) = -\frac{1}{2}(-\lambda_{q_2}(t)\omega_3(t) + \lambda_{q_3}(t)\omega_2(t) - \lambda_{q_4}(t)\omega_1(t)) \quad (4.29)$$

$$\dot{\lambda}_{q_2}(t) = -\frac{1}{2}(\lambda_{q_1}(t)\omega_3(t) - \lambda_{q_3}(t)\omega_1(t) - \lambda_{q_4}(t)\omega_2(t)) \quad (4.30)$$

$$\dot{\lambda}_{q_3}(t) = -\frac{1}{2}(-\lambda_{q_1}(t)\omega_2(t) + \lambda_{q_2}(t)\omega_1(t) - \lambda_{q_4}(t)\omega_3(t)) \quad (4.31)$$

$$\dot{\lambda}_{q_4}(t) = -\frac{1}{2}(\lambda_{q_1}(t)\omega_1(t) + \lambda_{q_2}(t)\omega_2(t) - \lambda_{q_3}(t)\omega_3(t)) \quad (4.32)$$

$$\dot{\lambda}_{\omega_1}(t) = -\frac{1}{2}(\lambda_{q_1}(t)q_4(t) + \lambda_{q_2}(t)q_3(t) - \lambda_{q_3}(t)q_2(t) - \lambda_{q_4}(t)q_1(t)) \quad (4.33)$$

$$\dot{\lambda}_{\omega_2}(t) = -\frac{1}{2}(-\lambda_{q_1}(t)q_3(t) + \lambda_{q_2}(t)q_4(t) + \lambda_{q_3}(t)q_1(t) - \lambda_{q_4}(t)q_2(t)) \quad (4.34)$$

$$\dot{\lambda}_{\omega_3}(t) = -\frac{1}{2}(\lambda_{q_1}(t)q_2(t) - \lambda_{q_2}(t)q_1(t) + \lambda_{q_3}(t)q_4(t) - \lambda_{q_4}(t)q_3(t)) \quad (4.35)$$

Con lo anterior tenemos los datos suficientes para resolver el problema mediante el algoritmo del método de colocación y el método pseudo espectral.

# Capítulo 5

## Experimentación

Esté capítulo se enfoca en la implementación de los problemas planteados en el capítulo 4, en los entornos de Matlab y DIDO. Se busca evaluar el desempeño de los métodos propuestos para los problemas de control óptimo, principalmente se hace énfasis en el esfuerzo computacional, tiempo de ejecución, error cuadrático medio de los estados finales, la razón de convergencia y facilidad de implementación.

Dado que los problemas se resuelven de forma numérica es preciso tener presente las características de la máquina en donde se ejecutan los experimentos, para esto se incluye una sección dedicada a dichas características.

### 5.1. Parámetros de la máquina y de comparación

En el entorno computación es importante tener en cuenta las limitaciones de la máquina a la hora de representar los números, dado que las computadoras solo pueden representar una cantidad finita de números, esta representación esta limitada

Tabla 5.1: Características de MATLAB

<b>Version Matlab</b>	<b>Presicion</b>	<b>Tipo de Error</b>	<b>epsilon de la maquina</b>
R2017a Student Licence 9.2.0.556344	Doble	Redondeo	2.2204e-16

Tabla 5.2: Características de la maquina

<b>Procesador</b>	Intel core i7 6700k a 4.0 Ghz
<b>Memoria principal</b>	16 Gb DDR4 a 3000 Mhz
<b>Compilador</b>	MATLAB R2017a
<b>Sistema Operativo</b>	Windows 10
<b>Epsilon de la máquina</b>	2.2204e-16

por la aritmética de punto flotante de la máquina. Actualmente y a partir de 1985 se adoptó la norma binaria de punto flotante que se conoce como ANSI/IEEE 754-1985, sin embargo, esto no implica que todas las computadoras arrojen los mismos resultados ya que existen tolerancias a la norma. Por lo cual es importante conocer los límites de precisión numérica que se pueden alcanzar en cada máquina.

La tabla 5.1 muestra las características principales del entorno de computación científica MATLAB.

Las características de la máquina empleada para los experimentos se muestran en la tabla 5.2

El epsilon de la máquina (o unidad de redondeo) es el menor número positivo de la aritmética del sistema de punto flotante tal que  $1 + \epsilon > 1$  esta información nos ayuda a definir el paso de integración para los métodos numéricos o en el caso de BVP4C a definir de forma adecuada el error del residual.

Se realiza la comparación de los métodos tomando como base los siguientes parámetros.

- Numero de nodos de evaluación.
- Tiempo de corrida promedio.
- Desviación estándar del tiempo de corrida.
- Numero de llamadas al modelo.
- Error en los valores finales de los estados.

Se realizo en total 10 corrida para cada problema en cada método, esto con el fin de obtener un tiempo promedio de corrida ya que las condiciones del entorno de trabajo hace que en cada corrida varié el tiempo.

## 5.2. Resultados del Problema 1

El problema 1 consiste en la obtención de la trayectoria de ascenso óptimo minimizando el combustible descrito por la siguiente medida de desempeño:

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t_f \quad (5.1)$$

Para más detalles ver el capítulo 4 sección 4.1.

El problema se planteó de forma indirecta empleando el hamiltoniano. Los resultados se obtuvieron de un promedio de 10 corridas para cada método aplicado. Se empleó el algoritmo del método de colocación modificado implementado en `bvp4c` y el algoritmo del método pseudo espectral implementado en `DIDO` para obtener la solución. Las características básicas del problema se remarcan en la tabla 5.3. Los valores de los estados y el control fueron evaluados en 100 nodos de evaluación

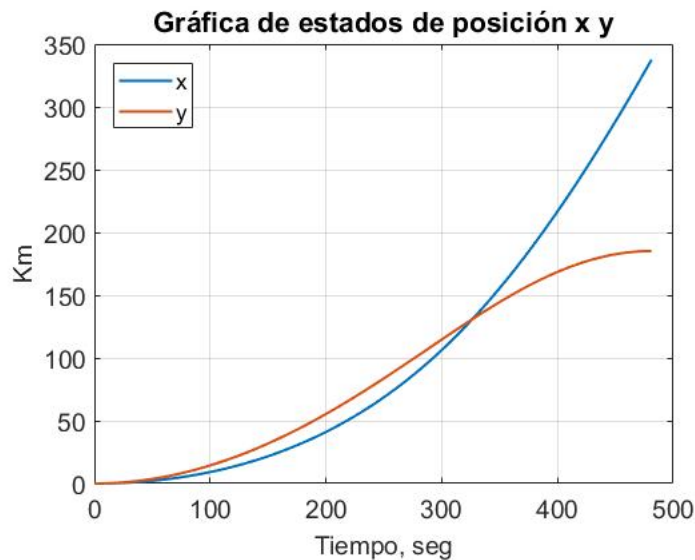
Tabla 5.3: Tabla de características básicas para el problema 1

	Tiempo final	Estados iniciales	Estados finales	Nodos de Evaluación
<b>Características del Problema</b>	Libre	Fijos para todos los estados	Libre para x Fijo para y, vx, vy	100

(dado que el problema esta discretizado se evalúa en una serie de puntos o nodos de evaluación para los cuales se obtienen los valores de los estados y el control).

### 5.2.1. Resultados con el método de colocación

En el método de colocación implementado en el código BVP4C desarrollado por Shampine, se obtuvo un tiempo de corrida promedio de 0.2344 segundos al implementar el problema. El problema busca minimizar el tiempo final  $t_f$ , para el caso del método de colocación se obtuvo un valor de  $t_f = 481.2039$  segundos. Las gráficas obtenidas de estados y coestados se pueden observar en las figuras 5.1, 5.2 y 5.5. Dichas gráficas validan el resultado dado que cumplen con las condiciones iniciales y de frontera establecidos en el problema.

Figura 5.1: Gráfica de la posición  $x$  y  $y$  para el problema 1

En la figura 5.1 se describe la trayectoria de los estados de posición en  $x$  (azul) y  $y$  (rojo), el estado  $x$  es libre y llega a un valor máximo de  $x = 337.55km$ , el cual es un valor aceptable que no representa ninguna inconsistencia en el problema. El estado de posición  $y$  llega al valor de  $y = 185.2Km$ , el cual es el valor deseado por la descripción del problema con un error de cero.

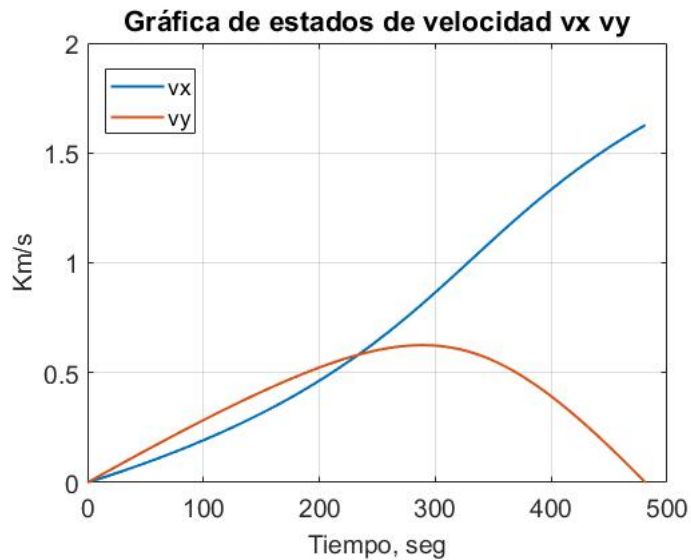


Figura 5.2: Gráfica de la velocidad  $v_x$  y  $v_y$  para el problema 1

En la figura 5.2 se ilustra el comportamiento de los estados de velocidad durante la misión de ascenso partiendo de velocidades iniciales  $v_{x_0}$  y  $v_{y_0}$  y terminado con velocidades finales  $v_{x_f} = 1.627km/s$  y  $v_{y_f} = 0km/s$  las cuales son las velocidades finales establecidas en el problema y que presentan un error de cero en ambos casos.

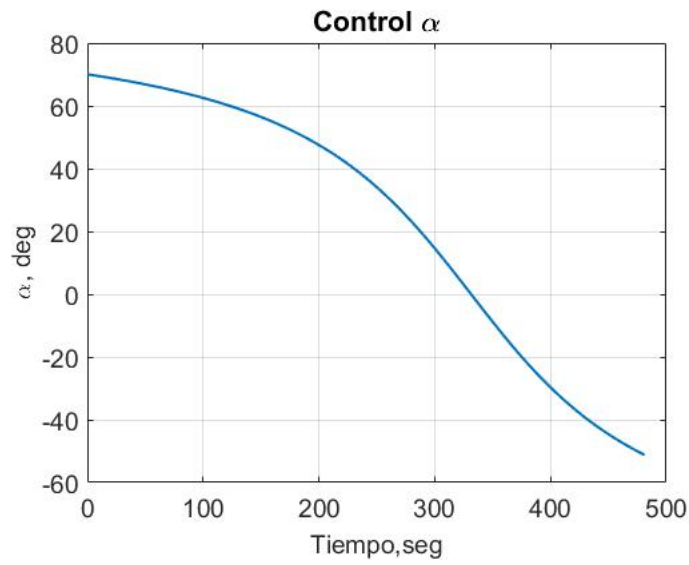


Figura 5.3: Gráfica del control  $u$  para el problema 1

En la figura 5.3 se observa el comportamiento del control durante toda la trayectoria de ascenso del problema. El control pega directamente en la variación de la velocidad tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$ . La curva obtenida presenta un comportamiento suave sin variaciones bruscas lo que indica que la solución obtenida es aceptable.

En la figura 5.4 se muestra la trayectoria en  $x$  y en  $y$  para el ascenso de la nave al punto deseado.



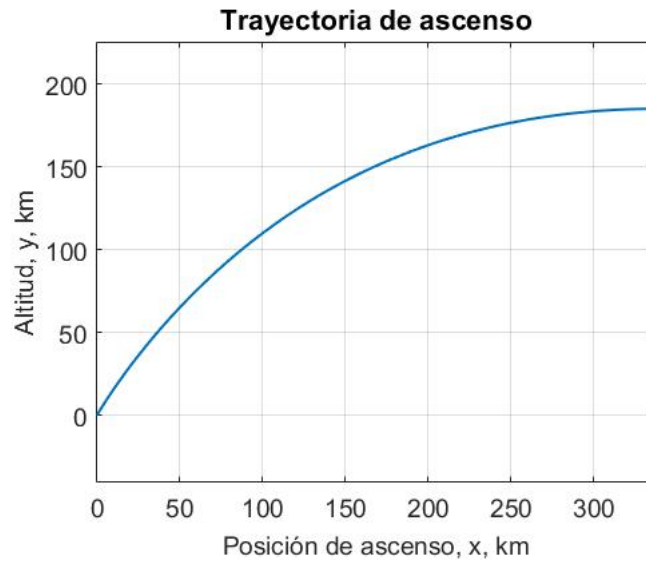
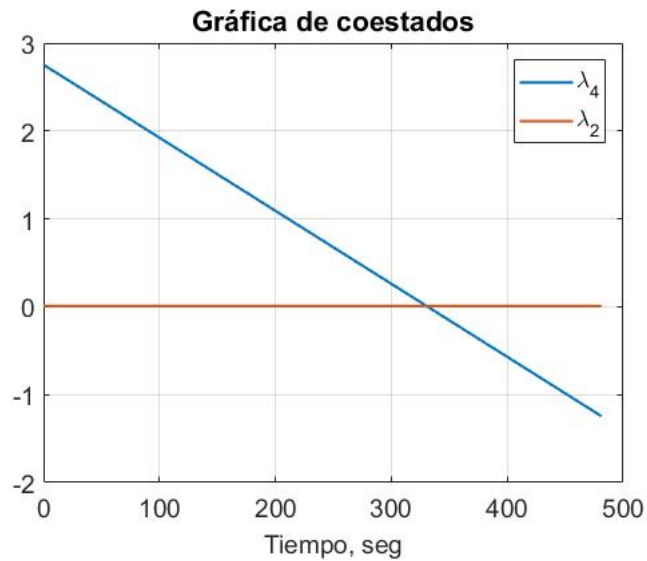


Figura 5.4: Gráfica de la trayectoria de ascenso para el problema 1

Figura 5.5: Gráfica de los coestados  $\lambda_4$  y  $\lambda_2$  para el problema 1

En la figura 5.5 se describe el comportamiento de los coestados  $\lambda_2$  y  $\lambda_4$ . Se sabe en base al análisis y planteamiento del problema que el coestado  $\lambda_4$  debe comportarse como una función lineal del tiempo lo cual se cumple en este caso; en tanto que el coestado  $\lambda_2$  debe ser constante lo cuál de igual manera se cumple.

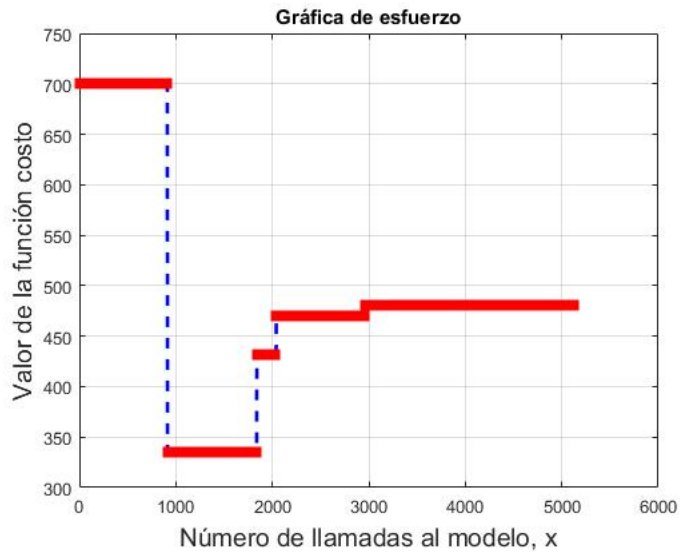


Figura 5.6: Gráfica de esfuerzo problema 1

En la figura 5.6 se ilustra la evolución de la función costo durante las entradas al método al emplear el algoritmo del método de colocación. Se puede apreciar como el método va proponiendo diferentes valores de la función costo hasta que esta se acerca al valor óptimo realizando 37 llamadas al método.

### 5.2.2. Resultados con el método pseudo espectral

El método pseudo espectral es un método preciso pero más lento a comparación del método de colocación, sin embargo, su principal característica es que no es necesario proporcionar una estimación inicial, pero esto tiene un costo computacional elevado lo cual dispara el tiempo de corrida. El algoritmo empleado por DIDO es muy sensible a los espacios de búsqueda de los estados y al escalamiento del problema, esto es, si manejamos el problema en unidades canónicas o escaladas (de valores bajos) obtendremos una mejor razón de convergencia en el algoritmo pero en general será más lento a comparación del método de colocación que se implementa

en BVP4C.

Para este caso se obtuvo un tiempo final  $t_f$  de 481.42 segundos el cual tiene una muy ligera diferencia con el obtenido por método de colocación la cual es de 0.0003 segundos de diferencia.



Figura 5.7: Gráfica de la posición  $x$  y  $y$  con DIDO para el problema 1

En la figura 5.7 se observa la trayectoria de los estados de posición en  $x$  (azul) y  $y$  (rojo) obtenidos con DIDO, el estado  $x$  es libre y llega a un valor máximo de  $x = 337.7792 \text{ km}$  lo cual es un valor aceptable. El valor del estado de posición  $y$  llega al valor de  $y = 185.2 \text{ km}$  lo cual es el valor deseado por la descripción del problema con un error de cero.

En la figura 5.8 se describe el comportamiento de los estados de velocidad durante la misión de ascenso obtenidas con el algoritmo del método pseudo espectral partiendo de velocidades iniciales  $vx_0$  y  $vy_0$  y terminado con velocidades finales  $vx_f = 1.627 \text{ km/s}$  y  $vy_f = 8.611820709962610e^{-15} \text{ m/s}$ . En caso de  $vx_f$  se llega al valor deseado y establecido por el problema y en el caso de  $vy_f$  se llega a un valor

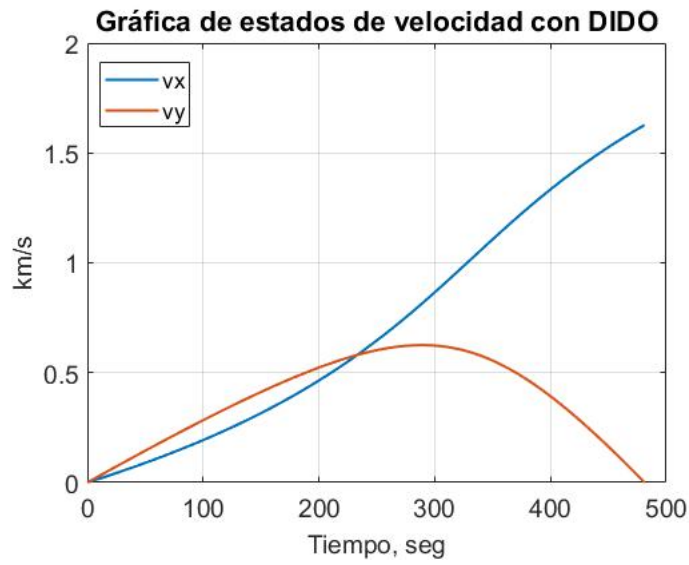


Figura 5.8: Gráfica de la velocidad  $v_x$  y  $v_y$  con DIDO para el problema 1

muy aproximado al deseado con un error del orden de 8 femtos.

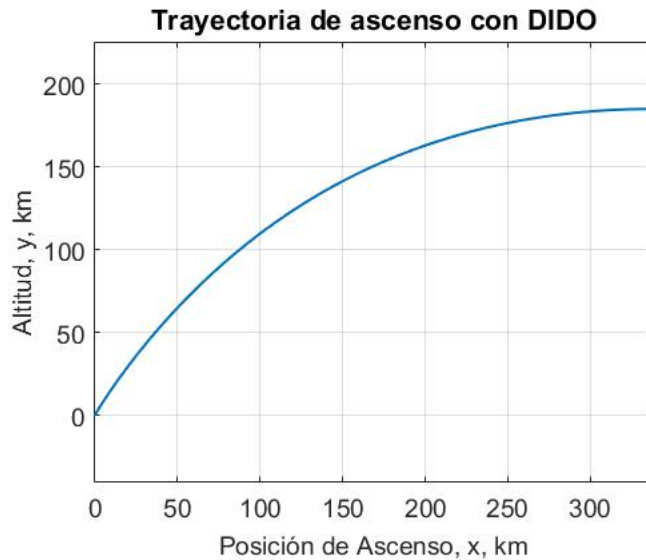


Figura 5.9: Gráfica de la trayectoria de ascenso en DIDO

En la figura 5.9 se presenta la trayectoria de ascenso para la nave en los ejes  $x$  y  $y$ . El ascenso se que puede apreciar tiene un comportamiento suave sin cambios bruscos lo cual da pauta a que estamos ante una respuesta aceptable.

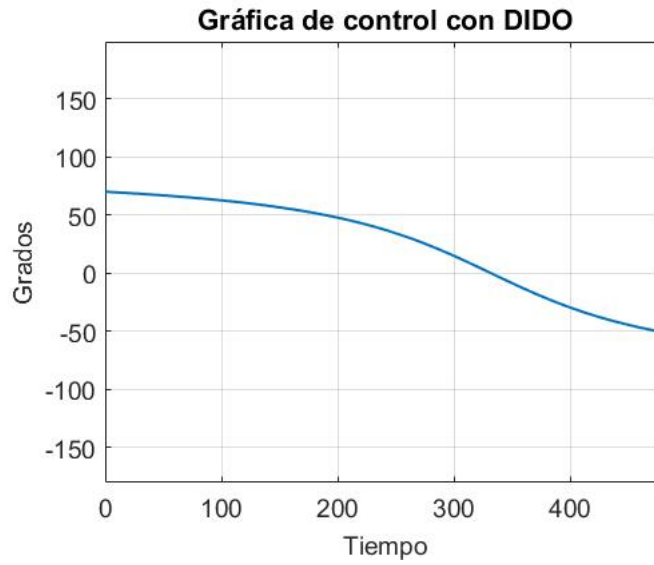


Figura 5.10: Gráfica del control  $u$  obtenido en DIDO durante la misión

En la figura 5.10 se describe el comportamiento del control el cual le pega a los estados  $v_x$  y  $v_y$  el control se comporta de forma suave y va de un valor inicial de  $u_0 = 69.9095$  a un valor final de  $u_f = -55.28$ .

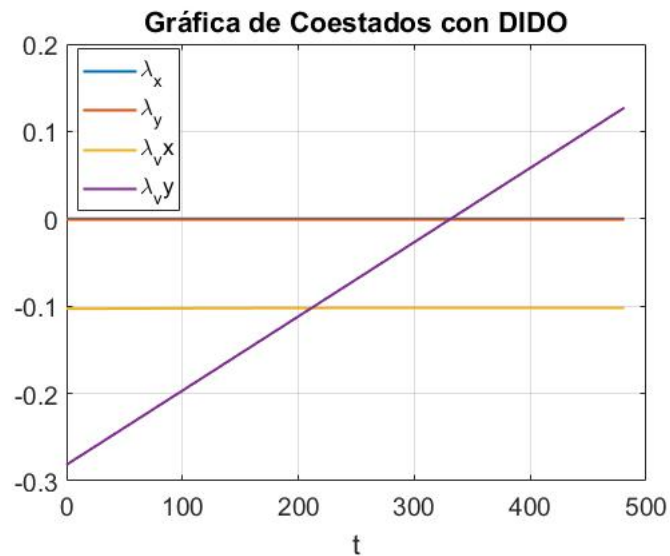


Figura 5.11: Gráfica de los coestados con DIDO  $\lambda_4$  y  $\lambda_2$  para el problema 1

En la figura 5.11 se observa el comportamiento de los coestados  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  y

$\lambda_4$ . Se sabe con base en el análisis y planteamiento del problema que el coestado  $\lambda_4$  debe comportarse como una función lineal del tiempo lo cual se cumple en este caso. En tanto que el coestado  $\lambda_2$  debe ser constante y los coestados  $\lambda_1$ , y  $\lambda_3$  deben ser cero lo cual se cumple para ambos casos. Mediante estas observaciones podemos validar la solución numérica obtenida.

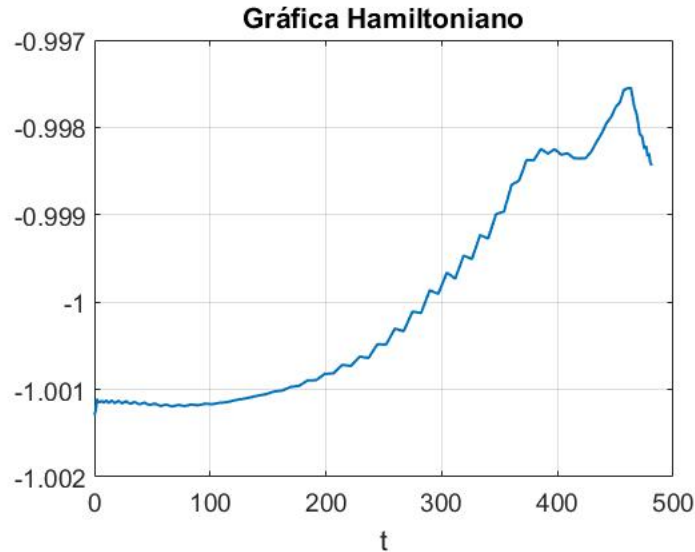


Figura 5.12: Gráfica del hamiltoniano con DIDO para el problema 1

En la figura 5.12 se presenta el comportamiento del hamiltoniano durante el problema. Mediante el análisis teórico se sabe que el hamiltoniano debe mantener un valor de  $H = -1$  en esta gráfica se aprecian variaciones muy ligeras cuyo error máximo es de 0.0025 y un error medio de 0.0012 debido principalmente a los errores y tolerancias del método numérico.

En la figura 5.13 se observa la evolución de la función costo durante la resolución del problema con el método pseudo espectral. En este caso se hizo una cantidad de llamadas a la función costo de más de 350,000 y dentro de las primeras llamadas el método estuvo examinando valores lejanos al valor óptimo final de la función costo. Se puede observar que incluso se examinó la frontera superior del espacio de



Figura 5.13: Gráfica de evolución de la función costo mediante el método pseudo espectral búsqueda para el tiempo la cual fue establecida en 1000 segundos.

### 5.2.3. Comparativa Problema 1

Las características de ejecución del problema con cada método se describen en la tabla 5.2.3, las diferencias entre los estados y el control obtenidas en ambos métodos se presentan en la tabla 5.4 y en la figura se observa la diferencia entre las llamadas al modelo que empleo el algoritmo para el método de colocación y el algoritmo para el método pseudo espectral.

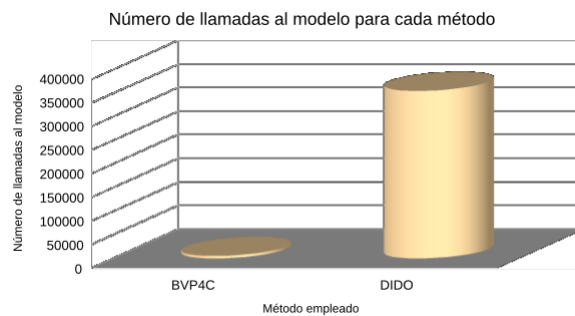


Figura 5.14: Gráfica de número de llamadas al modelo

	Método de Colocación	Método pseudo espectral
<b>Numero de corridas</b>	10	10
<b>Convergió</b>	Si	Si
<b>Número de nodos de evaluación</b>	100	100
<b>Tiempo de corrida promedio</b>	0.2578 s	1058.1 s
<b>Desviación estándar del Tiempo de Corrida</b>	0.1545	0.028392957
<b>Número de llamadas al modelo</b>	5130	354699
<b>Número de llamadas al método</b>	37	–

Tabla 5.4: Tabla comparativa estados y control problema 1

<b>Estados</b>	<b>Método Colocación</b>	<b>Método Pseudo espectral</b>	<b>Diferencia entre ambos</b>
<b>xf</b>	337.5 km	337.7792 km	0.2792 km
<b>yf</b>	185.2 km	185.2 km	0
<b>vx</b>	1.627 km/s	1.672 km/s	0
<b>vy</b>	0	8.6118e-18 km/s	8.6118e-18
<b>u0</b>	70.0436	69.9095	0.1341
<b>uf</b>	-51.2292	-55.28	4.0508
<b>tf</b>	481.2039 s	481.2042	0.0003



En cuanto a tiempo de corrida existe una enorme diferencia entre ambos métodos siendo el método de colocación el más rápido para converger, pero muy dependiente y sensible a la estimación inicial. En cambio el método pseudo espectral tiene un tiempo de corrida largo para llegar a la solución, pero sin depender de ninguna estimación inicial ya que es un método de estimación inicial libre (Se puede proporcionar estimación inicial si se desea pero el algoritmo esta diseñado para trabajar sin dicha estimación). En cuanto a los resultados en los estados y el control se obtuvo en algunos casos variación de 0 para los estados finales  $y_f$  y  $vx_f$  en tanto que para el estado final libre  $x_f$  se presento una diferencia de  $0.27km$  entre ambos métodos, en el estado  $vy_f$  la variación fue del orden de 8 femtos, el caso mas significativo se presentó en el valor del control final  $u_f$  donde se presentó una variación de 4.050 grados de control entre ambos métodos. Dichas variaciones se describen en la tabla 5.4. Por último el número de llamadas al modelo en ambos algoritmos es radicalmente diferente mientras que el algoritmo del método de colocación realiza 5130 llamadas al modelo, el método pseudo espectral realiza más de 300000 llamadas al modelo 60 veces más que el método de colocación lo que se traduce en un tiempo de computo mucho mayor.

Mientras que el método de colocación tardo 0.25 segundos en promedio, el método pseudo espectral tardo 1058 segundos en promedio 4232 veces más que el método de colocación. Se debe destacar que el método pseudo espectral depende en gran medida de los espacios de búsqueda los cuales sí están bien establecidos reducirán el tiempo de computo. También el autor del algoritmo el Dr. Ross recomienda ampliamente el uso unidades escaladas cercanas del valor unitario [Ross, 2015], para de esta manera mejorar considerablemente los tiempos de computo. Este proceso requiere una conversión de unidades lo cual implica re formular las ecuaciones de estado y coestado del problema.

Tabla 5.5: Tabla de características básicas para el problema 2

	Tiempo final	Estados iniciales	Estados finales	Nodos de Evaluación
<b>Características del Problema</b>	Fijo	Fijos para todos los estados	Fijo para todos los estados	30

### 5.3. Resultados del Problema 2

El problema 2 consiste en la obtención del control óptimo  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  para un problema de cuerpo rígido. Se busca minimizar la medida de desempeño descrita por:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t)) dt \quad (5.2)$$

La principal dificultad de este problema surge de la necesidad de tener una estimación inicial adecuada, que permita la convergencia en una solución bajo el método de colocación implementado en BVP4C. En tanto que en el método pseudo espectral la dificultad radica en limitar el espacio de búsqueda de los controles y los estados adecuadamente para que de esta manera se pueda obtener un resultado consistente y un tiempo de corrida menor bajo el método pseudo espectral implementado en DIDO. Para detalles del problema ver el capítulo 4 sección 4.2.

El problema 2 se planteó de forma indirecta empleando el hamiltoniano. Los resultados se obtuvieron de un promedio de 10 corridas para cada método. Se empleó el algoritmo del método de colocación implementado en BVP4C de Matlab y el método pseudo espectral implementado en DIDO para obtener la solución. Las características básicas del problema se remarcan en la tabla 5.5. Los valores de los estados y el control fueron evaluados en 30 nodos de evaluación.

El problema no presenta variación en los estados finales ni en el tiempo final, por lo cual se clasifica dentro del problema más simple del cálculo de variaciones,

sin embargo, esto no implica que sea sencillo de resolver ya que este problema es mucho más sensible a la estimación inicial a diferencia del problema 1. En este caso es relativamente fácil obtener un jacobiano singular lo que imposibilita la resolución del mismo bajo el método de colocación, para el caso del método pseudo espectral si no se limitan bien los espacios de búsqueda el problema diverge.

### 5.3.1. Resultados con el método de colocación

Para el problema 2 el método de colocación resulto el más rápido pero presentó una elevada sensibilidad a la estimación inicial lo cual corresponde a lo descrito en la investigación que se presenta en el capítulo 3, al emplear el enfoque indirecto para plantear el problema mediante el hamiltoniano, se presenta generalmente una elevada sensibilidad a la estimación inicial, esta depende de la dinámica del sistema a resolver. En este caso la estimación inicial que se empleó para poder resolver el problema fue de:

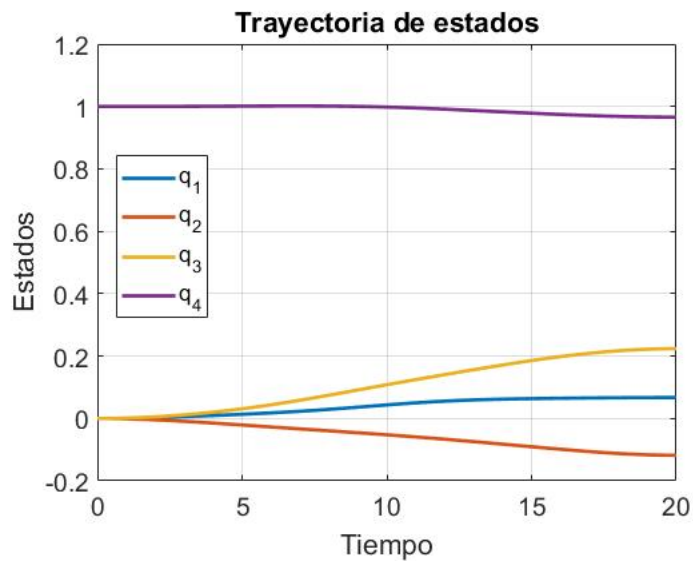
$$q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 1, \omega_1 = 0.1, \omega_2 = 0.1, \omega_3 = 0.1, \lambda_{q_1} = -0.1628, \\ \lambda_{q_2} = 0.2714, \lambda_{q_3} = -0.5428, \lambda_{q_4} = 0, \lambda_{w_1} = -0.0406, \lambda_{w_2} = 0.0677, \lambda_{w_3} = -0.1354$$

Mediante esta estimación inicial se obtuvieron los resultados para los estados finales que se muestran en la tabla 5.6 bajo el algoritmo del método de colocación implementado en BVP4C de Matlab. Como se puede observar en dicha tabla tenemos resultados exactos para el caso de los estados finales, estos llegan al valor deseado con una diferencia de 0 para los 7 estados del problema.

En la figura 5.15 se presenta el comportamiento de los estados  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$  obtenidos aplicando el método de colocación, este comportamiento es suave lo cual indica que los valores obtenidos pueden representar una solución viable.

Tabla 5.6: Valores de los estados en  $t_f$  para problema 2 con el método de colocación

Estado	Valor final Obtenido	Valor final Deseado	Diferencia
$q_1$	0.06708	0.06708	0
$q_2$	-0.118	-0.118	0
$q_3$	0.2236	0.2236	0
$q_4$	0.9659	0.9659	0
$\omega_1$	0	0	0
$\omega_2$	0	0	0
$\omega_3$	0	0	0

Figura 5.15: Gráfica de estados  $q$ 's para el problema 2

En la figura 5.16 se observa el comportamiento para los estados  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  para la solución obtenida con el método de colocación. Los estados parten de 0 y llegan al valor final deseado con un comportamiento suave.

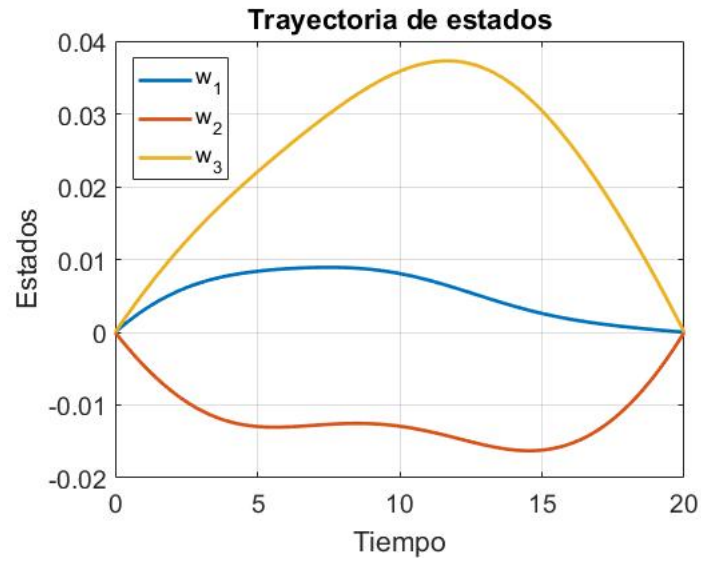


Figura 5.16: Gráfica de estados  $w$ 's para el problema 2

En la figura 5.17 se ilustra el comportamiento de los coestados  $\lambda_{q1}$ ,  $\lambda_{q2}$ ,  $\lambda_{q3}$  y  $\lambda_{q4}$  para la solución obtenida por el método de colocación.

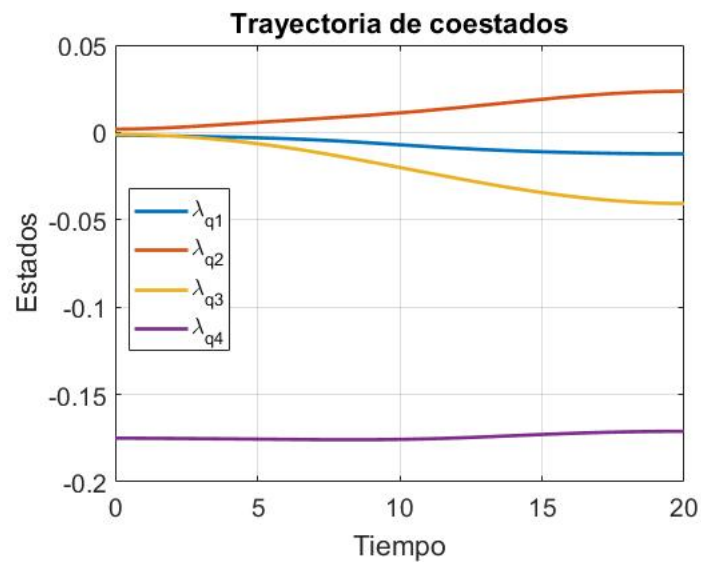


Figura 5.17: Gráfica de coestados para el problema 2

En la figura 5.18 se presenta el comportamiento de los coestados  $\lambda_{\omega1}$ ,  $\lambda_{\omega2}$  y

$\lambda_{\omega_3}$  para la solución obtenida por el método de colocación.

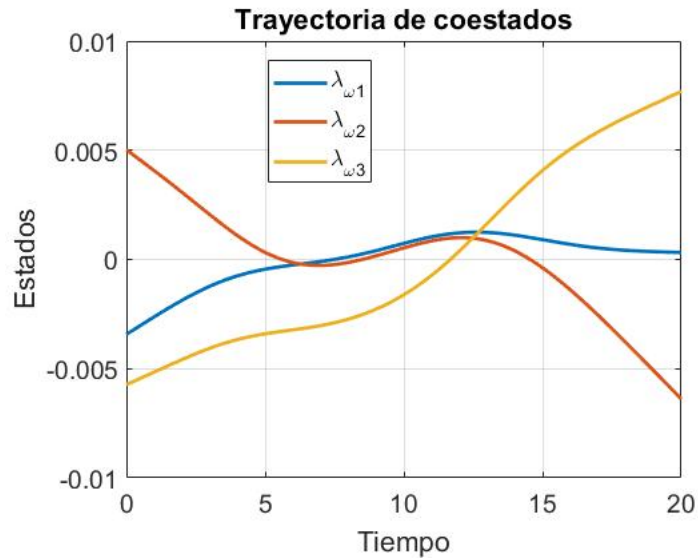


Figura 5.18: Gráfica de coestados para el problema 2

En la figura 5.19 se puede apreciar el comportamiento del control obtenido con el método de colocación el cual le pega directamente a los estados  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ .

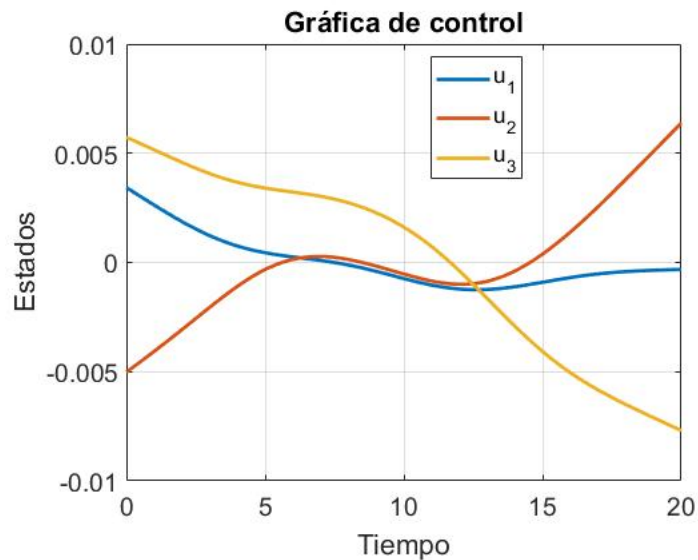


Figura 5.19: Gráfica de control para el problema 2

En la figura 5.20 se observa la evolución de la función costo durante las llamadas al método, bajo el algoritmo del método de colocación implementado en matlab. El objetivo es minimizar dicha función costo, se puede apreciar como en ciertas llamadas al método se presentan picos, donde se dispara el valor de la función costo, dichos picos son corregidos por el algoritmo en la siguiente llamada para así redirigirse a una solución óptima y converger finalmente a la solución obtenida.



Figura 5.20: Gráfica de evolución de la función costo

### 5.3.2. Resultados con el método pseudo espectral

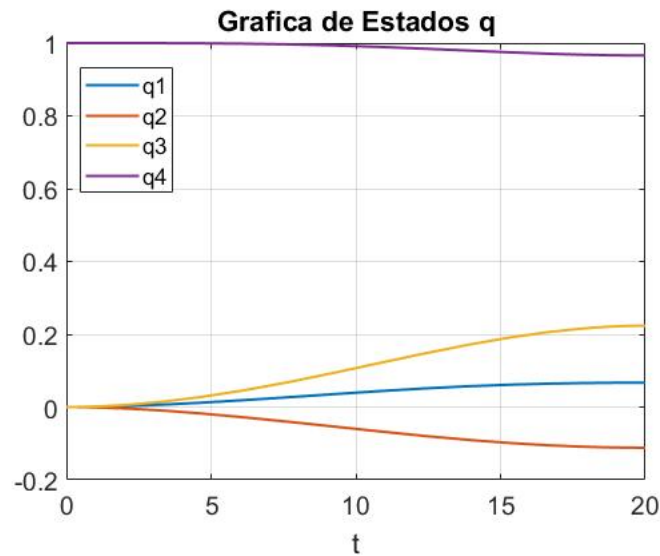
Mediante el método pseudo espectral se pudo prescindir de la utilización de una estimación inicial, sin embargo el tiempo de corrida fue considerablemente mayor para obtener una solución. En este caso el tiempo de corrida promedio fue de 4.66564 segundos, además de que en este caso para el valor de los estados en el tiempo final si se presentó un ligero error en el estado  $\omega_2$  del orden de  $1.3875E-18$  lo cual es atribuido a errores en el truncamiento de la máquina.

Tabla 5.7: Valores de los estados en  $t_f$  para problema 2 con el método pseudo espectral

Estado	Valor final Obtenido	Valor final Deseado	Diferencia
q1	0.06708	0.06708	0
q2	-0.1118	-0.1118	0
q3	0.2236	0.2236	0
q4	0.9659	0.9659	0
w1	0	0	0
w2	-1.3875E-18	0	1.3875E-18
w3	0	0	0

Los valores de los estados en el tiempo  $t_f$  se pueden observar en la tabla 5.7.

En la figura 5.21 se presenta la trayectoria de los estados  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$  obtenidos bajo el método pseudo espectral. Dichas trayectorias presentan un comportamiento suave e idéntico al obtenido en la trayectoria obtenida mediante el método de colocación. En todos los casos se llega al valor final deseado.

Figura 5.21: Gráfica de estados  $q$ 's para el problema 2

En la figura 5.22 se observa la trayectoria de los estados  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ . Dicha trayectoria tiene un comportamiento suave y no es idéntico al comportamiento que



arrojó el resultado obtenido mediante el método pseudo espectral. En dos de los tres estados se llega al valor final deseado. Únicamente el estado  $\omega_2$  tiene un error de  $1.3875\text{E-}18$ .

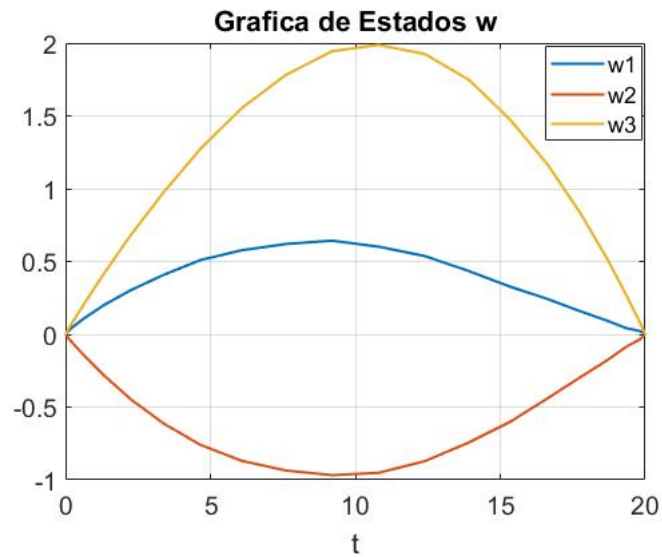


Figura 5.22: Gráfica de estados  $w$ 's para el problema 2

En la figura 5.23 se ilustra la trayectoria para los coestados  $\lambda_{q1}$ ,  $\lambda_{q2}$ ,  $\lambda_{q3}$  y  $\lambda_{q4}$ . Su comportamiento es muy diferente al obtenido bajo el método de colocación, pero esto no implica que el resultado este incorrecto o que no sea admisible.

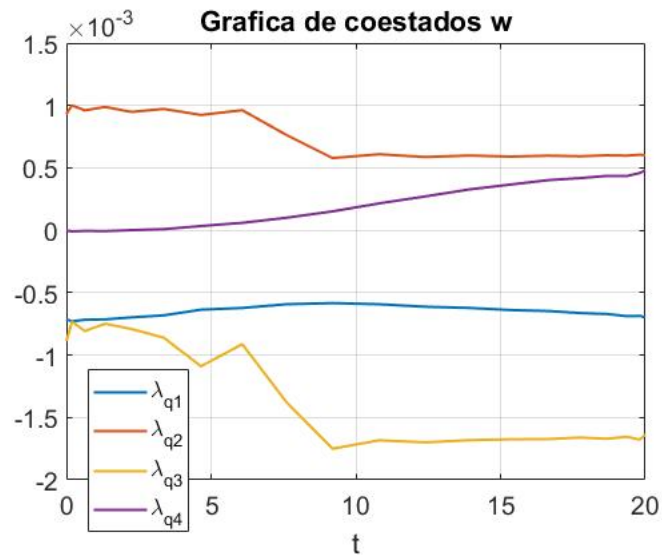


Figura 5.23: Gráfica de coestados para el problema 2

En la figura 5.25 se muestra el comportamiento de los coestados  $\lambda_{\omega 1}$ ,  $\lambda_{\omega 2}$  y  $\lambda_{\omega 3}$  obtenidos bajo el método pseudo espectral. su comportamiento presenta diferencias importantes en cuanto a la trayectoria en comparación al método de colocación.

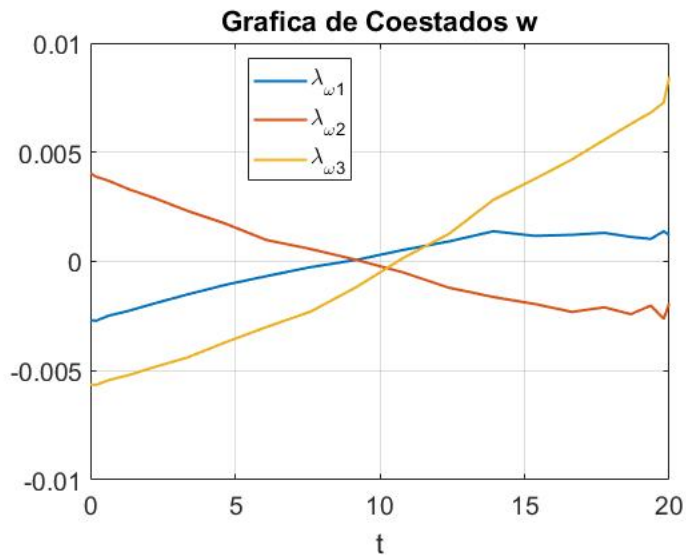


Figura 5.24: Gráfica de coestados para el problema 2

En la figura 5.25 se presenta el comportamiento del control para los resultados

obtenidos bajo el método pseudo espectral.

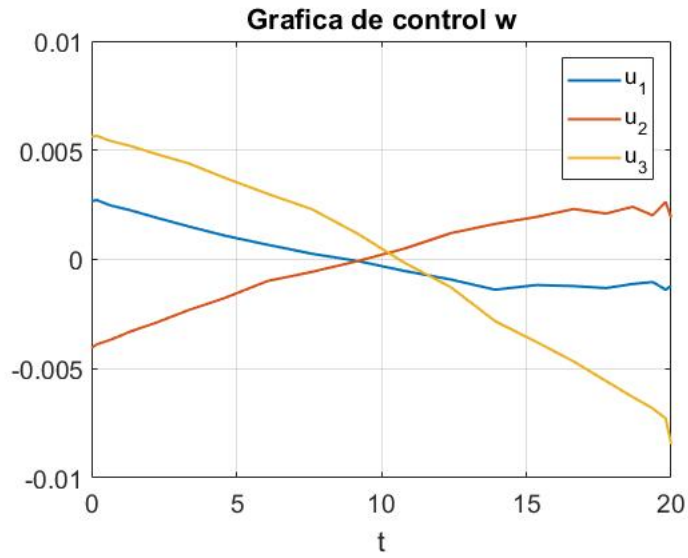


Figura 5.25: Gráfica de control para el problema 2

Por ultimo en la figura 5.26 se muestra el comportamiento del método pseudo espectral a al hora de realizar las iteraciones para obtener la solución del problema.

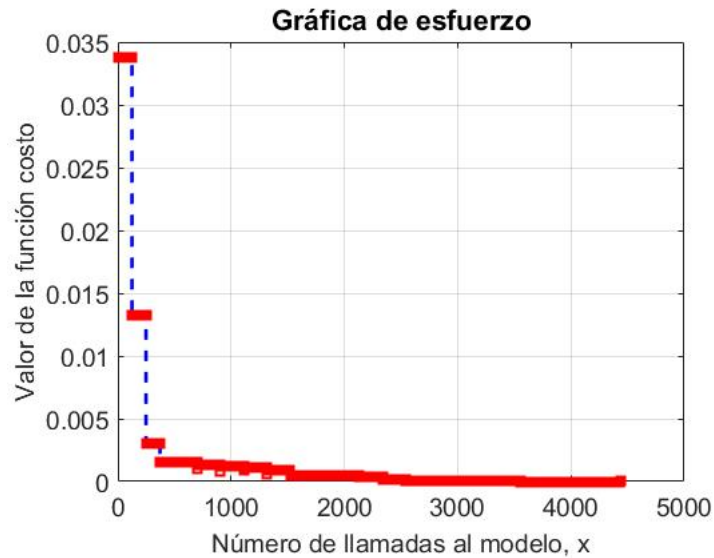


Figura 5.26: Gráfica de evolución de la función costo

### 5.3.3. Comparativa Problema 2

Las características de ejecución del problema se presentan en la tabla 5.8, las diferencias entre los estados y el control obtenidas para el tiempo final  $t_f$  en ambos métodos se presentan en la tabla 5.9 y en la figura 5.27 se observa la diferencia entre las llamadas al modelo que se realizaron durante la implementación de ambos métodos.

Con ambos métodos se logró converger a una solución cumpliendo con las condiciones de frontera establecidas en el problema, sin embargo, se presentaron diferencias significativas en los resultados arrojados principalmente de los controles y los coestados. Los coestados se comportaron de forma diferente en ambos casos. Esto se puede explicar debido a la dinámica de los cuaterniones a la hora de plantear los coestados y a las condiciones de transversabilidad. Lo cual no implica necesariamente que al ser diferentes las trayectorias de los coestados las soluciones no son óptimas o son incorrectas.

El método de colocación resultó ser el más rápido en tiempo de ejecución ya que tan solo requirió de menos de 0.70 segundos en promedio para converger en cada iteración, en tanto que el método pseudo espectral requirió de 4.66 segundos en promedio 6.63 veces más que el método de colocación.

En este problema a diferencia del problema 1 el número de llamadas al modelo fue mayor para el método de colocación con 31052 llamadas, pero a pesar de esto el tiempo de convergencia fue menor, en tanto que para el método pseudo espectral el número de llamadas al modelo fue de 4435 llamadas, 7 veces menor que el método de colocación. Esto indica que aunque el número de llamadas sea menor el método en sí es más lento de ejecutar. Además se debe tener en cuenta que el método

Tabla 5.8: Tabla comparativa para el problema 2

	<b>Método de Colocación</b>	<b>Método Pseudo espectral</b>
<b>Número de corridas</b>	10	10
<b>Convergió</b>	Si	Si
<b>Tiempo de corrida promedio</b>	0.7031segundos	4.66564 segundos
<b>Desviación estándar del tiempo de corrida</b>	0.3248	0.16571
<b>Número de llamadas al modelo</b>	31052	4435
<b>Número de llamadas al método</b>	197	-

Tabla 5.9: Valores de los estados obtenidos en ambos métodos

<b>Estados</b>	<b>Método de Colocación</b>	<b>Método Pseudo espectral</b>	<b>Diferencia</b>
<b>q1f</b>	0.06708	0.06708	0
<b>q2f</b>	-0.1118	-0.1118	0
<b>q3f</b>	0.2236	0.2236	0
<b>q4f</b>	0.9659	0.9659	0
<b>w1f</b>	0	0	0
<b>w2f</b>	0	-1.3875E-18	-1.3875E-18
<b>w3f</b>	0	0	0

pseudo espectral implementado en DIDO depende en gran medida de los espacios de búsqueda de los estados y el control y el hecho de que sea libre de estimación inicial hace que el método se mas lento aun. Esto se puede mejorar implementando una estimación inicial idónea y proporcionándola al método aunque en general el método será mas lento que el de colocación.

En el caso del problema 2 la sensibilidad a la estimación inicial fue muy elevada por lo cual no se lograba obtener una convergencia del problema a una solución optima valida bajo el método de colocación. Para solucionar esto se recurrió a una estimación inicial "inteligente" la cual permitió al problema converger a una solución valida bajo el método de colocación. En el caso del método pseudo espectral estamos libres de proporcionar esta estimación o no pero esto conllevará un costo computacional además de la posibilidad de que el método no converja a una solución óptima admisible.

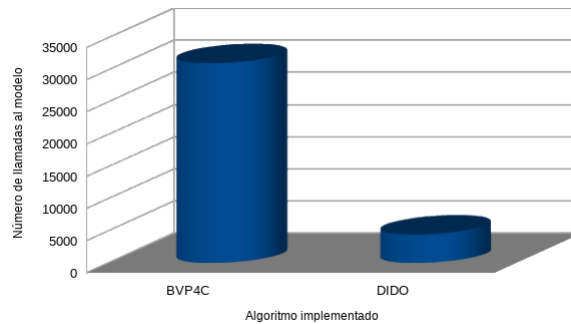


Figura 5.27: Gráfica de número de llamadas al modelo

Por ultimo este es un problema donde se puede recurrir a ambos métodos para lograr una mejor convergencia y una mayor precisión dado que al ser sensible a la estimación inicial se puede recurrir al método pseudo espectral implementado en DIDO para obtener una solución y esta misma salida se puede implementar como una estimación inicial para otro método que sea mas sensible en este aspecto en este

caso como lo es el método de colocación, pero no hay que olvidar que los métodos implementados bajo el enfoque indirecto de control óptimo son más sensibles a las estimaciones iniciales que los implementados bajo un enfoque directo de control óptimo como se describe en el capítulo 3.

## **5.4. Comparativa General**

Mediante el análisis de los resultados se pudieron deducir las siguientes ventajas y desventajas de ambas estrategias numéricas las cuales se muestran en la tabla 5.4.

Estrategia Numérica	Ventajas	Desventajas
Método de Colocación	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Alta precisión de la solución.</li> <li>2. Es más rápido para converger.</li> <li>3. Tiene mayor precisión que el método pseudo espectral.</li> <li>4. Es gratuito y de código abierto.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Dificultad de programación en presencia de restricciones.</li> <li>2. Sensibilidad a la estimación inicial.</li> </ol>
Método Pseudoespectral	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Alta precisión de la solución.</li> <li>2. En DIDO no requiere del planteamiento de coestados.</li> <li>3. Más simple de programar.</li> <li>4. No requiere de una estimación inicial.</li> <li>5. Se puede proveer una estimación inicial.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Requiere de un escalamiento para mejorar su desempeño.</li> <li>2. Es más tardado para converger aun realizando menos llamadas al modelo.</li> <li>3. Requiere definir espacio de búsqueda para estados y control.</li> <li>4. Requiere conocimientos físicos claros de los estados y el control.</li> <li>5. Requiere un número más elevado de llamadas al método.</li> </ol>



# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajo Futuro

Se presentó una comparación de métodos para resolver problemas de control óptimo, esta comparación se realizó mediante la solución de dos problemas, dichos problemas fueron elegidos dado que son una buena base para partir a problemas de aplicación más complejos. Los métodos que se compararon son el método pseudo espectral implementado en DIDO y el método de colocación implementado en BVP4C, ambos métodos fueron implementados de forma indirecta utilizando el Principio del Máximo de Pontryagin bajo la plataforma de programación Matlab.

Ambos métodos convergieron en los problemas y presentaron una alta precisión en la solución obtenida. La principal diferencia radica en el tiempo para converger lo cual hace que el método pseudo espectral sea mas pesado que el de colocación.

El método de colocación presenta sensibilidad elevada en la estimación inicial, lo cual implica que de no ser posible proveer de una estimación inicial idónea, dicho método no convergerá debidamente y se requiriera recurrir a otros métodos o mejorar la estimación inicial que se emplee.

El método pseudo espectral no requiere de estimación inicial pero en su lugar de debe de proveer un espacio de búsqueda, el cual se define en base al análisis del comportamiento físico del sistema.

El método pseudo espectral es muy dependiente de un buen escalamiento para incrementar el rendimiento computacional del método, en cambio el método de colocación converge mucho más rápido sin el escalamiento bajo las mismas condiciones del problema, como se mostró en el problema 1.

El método de colocación esta limitado bajo el algoritmo implementado en BVP4C ya que no es posible operarlo bajo restricciones, por lo cual, si se desea implementar restricciones en el algoritmo BVP4C se debe realizar un adaptación del problema, por ejemplo la conversión de restricciones a variables de estado.

El método pseudo espectral implementado en DIDO esta restringido en acceso al código base del mismo, con lo cual no fue posible obtener el número de llamadas al método.

Algunos de los posibles trabajos futuros a partir de esta tesis son:

Expandir el análisis de los métodos de colocacion y pseudo espectral a problemas del tipo 4 o tipo 2.

En caso de las estimaciones iniciales difíciles de obtener se puede implementar un esquema híbrido mediante la obtención una solución bajo el método psuedo espectral, que no requiere estimación inicial como requisito para converger a una solución, y a partir de este resultado se puede proporcionar una estimación inicial lo suficiente mente cercana para obtener una solución bajo el método de colocación implementado en BVP4C, obteniendo con esto una solución de mayor precisión, que únicamente empleando el método pseudo espectral.

Implementar restricciones al método de colocación, adaptando el código a las mismas para ampliar su funcionamiento.

Implementar los problemas bajo el enfoque directo y compara los resultados y el comportamiento de los métodos con los obtenidos bajo el enfoque indirecto.



# Bibliografía

- [Andrews, 1996] Andrews, F. (1996). Shooting method for the numerical solution of optimal control problems with bounded state variables. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89:355 – 372.
- [F., 2013] F., O. T. (2013). Introducción al control Óptimo. *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ingeniería Eléctrica*.
- [Grune, 2013] Grune, L. (2013). Numerical methods for nonlinear optimal control problems. *Mathematical Institute, University of Bayreuth*.
- [H.J. Oberle, 1997] H.J. Oberle, K. T. (1997). Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 95:243 – 262.
- [Huang, ] Huang, G., L. Y. . N. A survey of numerical algorithms for trajectory optimization of flight vehicles. *Science China Technological Sciences*.
- [Kirk, 1970] Kirk, D. E. (1970). *Optimal Control Theory: An Introduction*. Prentice Hall, 1 edition.
- [Longuski M. James, 2014] Longuski M. James, Guzman J. José, P. E. J. (2014). *Optimal Control with Aerospace Applications*. Springer.

- [Marco, 2014] Marco, F. (2014). *Numerical Methods for Optimal Control Problems with Application to Autonomous Vehicles*. PhD thesis, University of Trento.
- [Oberle and Grimm, 1989] Oberle, H. and Grimm, W. (1989). Bndsc0 a program for the numerical solution of optimal control problems.
- [Rao, 2010] Rao, A. V. (2010). A survey of numerical methods for optimal control. *Advances in Astronautical Sciences*, 135.
- [Ross, 2015] Ross, M. I. (2015). *A Primer on Pontryagin's Principle*. Collegiate, Publishers, 2 edition.
- [Shampine, 2000] Shampine, L. F. (2000). Solving boundary value problems for ordinary differential equations in matlab with bvp4c. *Science*, pages 1 – 16.
- [Stephan Ulamec, 2015] Stephan Ulamec, J. B. e. a. (2015). Rosetta lander - philae: Landing preparations. *Acta Astronautica*, 107:79 – 86.
- [Ternovski and M. Khapaev, 2007] Ternovski, V. and M. Khapaev, M. (2007). Direct numerical method for solving optimal control problems. *Doklady Mathematics*, 2008, Vol 77, No 3, 77:428 – 431.
- [Trélat, 2012] Trélat, E. (2012). Optimal control and applications to aerospace: Some results and challenges. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154:713 – 758.
- [von Stryk O, 1993] von Stryk O (1993). Numerical solution of optimal control problems by direct collocation. *International Series of Numerical Mathematics*, 111:129–143.
- [Wang, 2010] Wang, X. (2010). Solving optimal control problems with matlab. *MATHWORKS*, pages 1 – 20.