



INAOE

**INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA,
ÓPTICA Y ELECTRÓNICA.**

**Exploración de cuasi partículas elásticas de cristal
líquido inducidas por campo en movimiento.**

por

Juan Pablo Cuanalo Fernández

Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN EL
ÁREA DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica**

Agosto 2019
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Rubén Ramos García
Investigador titular del INAOE

Dr. Etienne Brasselet
Investigador titular del LOMA (Universidad de Bordeaux)

©INAOE 2019

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias de esta tesis en su
totalidad o en partes mencionando la fuente.



DEDICATORIA

*Para los seres que siempre me han acompañado:
Mariana, Héctor, Mónica y Kelly.*

Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer a mis padres y hermana quienes han sido los principales causantes de mis logros, ya que han estado dispuestos a acompañarme en cada noche de estudio, apoyar cada una de mis decisiones y entender lo agotadora que puede llegar a ser esta profesión. Sin su apoyo, este trabajo no hubiera sido posible.

Agradezco a mi asesor de tesis, Dr. Rubén Ramos García, quién me dio la confianza y la oportunidad de realizar una estancia en el extranjero. Además de darme la libertad para desarrollar el presente trabajo de investigación.

Je tiens à remercier mon co-directeur de thèse, le Dr. Etienne Brasselet, qui m'a accueilli dans le laboratoire LOMA et qui a contribué au succès de mon séjour, ainsi que pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses conseils avisés pour développer mon travail de thèse.

Je remercie également toute l'équipe de travail "singulière" et ma famille française: Nina, Marcela, Mikael, Stefano, Benja et Hernando. J'ai beaucoup appris de chacun de vous, tant sur le plan scientifique que dans la vie quotidienne; vous avez également rendu mon séjour plus agréable.

Alba Joselin, gracias por ser mi soporte incondicional para el desarrollo de mi tesis, por esas palabras certeras en el momento justo para no desistirme, y especialmente por hacerme valorar este trabajo. También te agradezco por leer y revisar numerosas veces este escrito aún cuando estuvieras haciendo tus cosas. En estos últimos meses hemos convivido mucho, pasado por diferentes momentos y he aprendido muchas cosas de ti, pero hay una en especial que no comprendía totalmente hasta que te conocí, y es el verdadero significado de la frase: *C'est la vie*.

Je désire aussi remercier a Dominique qui m'a reçu gentiment chez elle pendant les six mois que j'ai habité à Bordeaux, la coexistence était agréable puisque nous pouvions échanger nos expériences avec des cultures différentes. Je remercie également Michael pour ses longs discussions sur différents sujets qui m'ont permis d'améliorer mon niveau de français, ainsi que d'apprendre les expressions pour

parler comme un vrai français.

También quiero agradecer a Rodrigo, Sara, Paco y Efrén quienes hicieron más amena la estancia en el extranjero y tuvimos la oportunidad de compartir momentos inolvidables en otro país.

Finalmente, agradezco a todas las personas que no han sido mencionadas pero me alentaron a continuar con este trabajo de investigación.

Resumen

Los cristales líquidos son materiales intrigantes que dieron paso a un nuevo campo de la física debido a la amplia gama de aplicaciones y características que presentan, por ejemplo: birrefringencia, transiciones de fase, anisotropía, dualidad sólido-líquido. El presente trabajo tiene como objetivo principal el estudio de la generación y caracterización de la dinámica de micro estructuras en una película de cristal líquido nemático, bajo diferentes condiciones de anclaje. Las moléculas de un cristal líquido confinadas en una celda es un sistema en equilibrio, el director puede ser desestabilizado al aplicar un campo eléctrico y/o magnético, que provoca la formación de patrones que a su vez pueden inducir una distribución no homogénea en la orientación del director. Como resultado, pueden surgir micro estructuras localizadas, cuya dirección de desplazamiento depende de la orientación inicial de las moléculas. Este fenómeno se encontró en dos cristales líquidos diferentes con varias distribuciones espaciales del director inicial homogéneo.

La reproducción de resultados recientes, en el caso simple de alineación plana uniforme (publicado en 2018 [1]), se logró exitosamente, así como la detección de estructuras en una celda de cristal líquido con anclaje plano no uniforme y anclaje homeótrofo, que condujeron a obtener resultados de investigación originales.

Abstract

Liquid crystals are intriguing materials that lead to a new field of physics due to the wide range of applications and characteristics they present, for example: birefringence, phase transitions, anisotropy (electrical, optical and mechanical) and solid-liquid duality. The main objective of this work is the study of the generation and characterization of the dynamics of micro structures in a nematic liquid crystal films under different anchoring conditions. The destabilization of a system in a state of equilibrium is achieved by the application of an electric and/or magnetic field, which causes the formation of patterns that can induce an in homogeneous distribution in the orientation of the liquid crystal molecules. As a result, localized micro structures may arise, whose direction of displacement depends on the initial orientation of the molecules. This phenomenon was found in two different liquid crystals with several spatial distributions of the homogeneous initial director.

The reproduction of recent results, in the simple case of uniform alignment (published in 2018 [1]), was successfully achieved, as well as the detection of structures in a liquid crystal cell with non-uniform planar anchoring and homeotrope anchoring, which led to original research results.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	1
1. Óptica de cristales líquidos.	4
1.1. Definición de cristal líquido.	4
1.1.1. Clasificación.	4
1.2. Orientación de las moléculas en nemáticos.	5
1.3. Polarización en un medio birrefringente.	6
1.3.1. Polarimetría de Stokes.	10
1.3.2. Efecto flexoeléctrico.	11
1.4. Nemáticos bajo un campo aplicado.	11
1.4.1. Energía libre de distorsión.	11
1.4.2. Transición de Fréedericksz.	14
1.5. Defectos topológicos en nemáticos.	18
1.5.1. Nudos.	21
1.6. Electroconvección.	23
1.6.1. Modelo de electroconvección estándar.	23
1.6.2. Modelo de electroconvección no estándar.	24
1.7. Solitones ópticos.	25
1.7.1. Nematicones.	25
1.7.2. Solitones espacio-temporales.	26
2. Película de cristal líquido con anclaje plano.	29
2.1. Arreglo experimental.	29
2.2. Fabricación de celdas de cristal líquido.	30
2.3. Mapa azimutal de una placa-q.	31
2.4. Generación de estructuras en una celda con anclaje plano uniforme.	33
2.5. Generación de estructuras en una celda con anclaje plano no uniforme.	36
2.5.1. Textura Schlieren.	38

3. Película de cristal líquido con anclaje homeotrópico.	41
3.1. Fabricación de celdas.	41
3.2. Mapa del ángulo azimutal de nudos y bumbilic.	43
3.3. Generación de estructuras.	44
4. Conclusiones.	51
4.1. Generación de estructuras.	51
4.2. Fabricación de celdas.	53
Trabajo futuro.	54
A. Simplificación de la ecuación de densidad de energía de Frank.	55
B. Minimización de la energía libre de Frank	58
C. Solución de la ecuación Euler-Lagrange.	61
C.1. Deformación del director de un cristal líquido semi infinito.	62
C.2. Deformación del director de un cristal líquido confinado entre dos placas de vidrio.	63
Bibliografía	64

Introducción

El descubrimiento de las propiedades inusuales de un compuesto orgánico, que parecía presentar dos puntos de fusión, se le atribuye a Friedrich Reinitzer en 1988, asistente en la universidad de Praga. Sin embargo, en trabajos realizados anteriormente, se había observado que la mielina y las fibras nerviosas modificaban sus propiedades al añadir cierta concentración de agua. El científico alemán Otto Lehmann observó un cambio de comportamiento en el benzonato de colesterol cuando modificaba su temperatura, por lo que fue capaz de reproducir los resultados obtenidos por Reinitzer y continuar con el estudio de este tipo de materia. Gracias a su actividad científica fue nominado al premio nobel de física en diferentes ocasiones. El desarrollo de la investigación cobró importancia en Francia cuando Georges Friedel fue el primer científico en observar las mesofases en el benzonato de colesterol e hizo uso del alfabeto griego para nombrar la fase esméctica y nemática. Donde en esta última, observaron discontinuidades lineales que parecían enrollarse. Además, Pierre-Gilles de Gennes fue galardonado con el premio nobel de física, en 1991, por desarrollar el estudio del orden o desorden de moléculas de cristal líquido sometidas a diferentes condiciones, y posteriormente generalizarlo a sistemas más complejos.

Fundamentalmente existen dos tipos de cristales líquidos, los termotrópicos y los liotrópicos, se diferencian de acuerdo a la causa que provoca el cambio de fase. Gracias a su practicidad, los termotrópicos han sido más estudiados en comparación a los liotrópicos. En esta categoría, los cristales líquidos se dividen según la geometría de sus moléculas; los más conocidos son aquellos cuyas moléculas son similares a varillas delgadas y alargadas, permitiendo caracterizar el orden local o general de ellas en una celda.

A lo largo de los años se han desarrollado diversas teorías matemáticas para describir la fenomenología de los cristales líquidos, la más general es la propuesta por Landau-De Gennes. Debido al extenso estudio en la literatura, en el presente trabajo se decidió adoptar la teoría propuesta por Frank-Oseen, la cual está limitada al estudio de cristales líquidos uniaxiales, es decir, aquellos que cuentan con un eje y una dirección preferencial, como los descritos anteriormente.

Vsevolod Fréedericksz fue el primer científico en observar una de las principales características de los cristales líquidos; la reorientación de las moléculas ante la presencia o ausencia de un campo (eléctrico y/o magnético) externo. Al colocar una celda de cristal líquido con polarizadores lineales cruzados, la transparencia de la celda cambiará según la orientación de las moléculas. Esta propiedad da pie al desarrollo de diferentes aplicaciones en el ámbito industrial y académico.

En los últimos años se ha presentado un importante avance en el desarrollo de dispositivos electro-ópticos, mejor conocidos como dispositivos LCD (Liquid Crystal Display). La mayor parte de la población en el mundo posee un dispositivo con esta tecnología, gracias a su tamaño compacto, bajo costo y sencilla fabricación. No obstante, los cristales líquidos exhiben características y propiedades que permiten la generación de fenómenos ópticos, por ejemplo, la construcción de haces. A través de una pantalla de cristal líquido, los moduladores ópticos espaciales controlan la amplitud y fase de un haz de luz incidente, permitiendo la formación de distintos tipos de haces. De acuerdo a la fase del haz construido, puede dar paso a la formación de vórtices ópticos.

Los trabajos de investigación han continuado enfocándose en diferentes aplicaciones como sensores químicos y biológicos, nano organización de partículas, coronografía [2,3], etc.

Motivación

La principal motivación personal fue participar, enfrentar y resolver problemas que se presentan al trabajar en investigación de frontera, ya que se tomó el reto de reproducir los resultados presentados en un trabajo publicado en Nature Communications (publicado en 2018) por Bing-Xiang et al. [1], y posteriormente generalizarlos. Es decir, explorar la generación de estructuras en otros tipos de cristal líquido, orientaciones de las moléculas en una celda y distribuciones del eje director.

Objetivos

- Construcción de un arreglo experimental propio capaz de permitir la observación de las estructuras formadas y otras propiedades físicas como la retardancia.
- Generación de estructuras en una celda comercial con anclaje plano uniforme.

-
- Generalizar los resultados obtenidos mediante la generación de estructuras localizadas en muestras con diferentes condiciones de anclaje y distribución del eje director, por ejemplo, las moléculas orientadas perpendicularmente a las superficies.
 - Detección y seguimiento automático de las estructuras formadas en el cristal líquido.
 - Caracterización de la dinámica de las estructuras.
 - Si es posible, caracterizar la forma de nuevas estructuras encontradas.

La organización de los capítulos es la siguiente. En el capítulo 1 se realiza una presentación general de los cristales líquidos, donde se muestra con detalle sus características, así como sus propiedades electro-ópticas. Luego, en el capítulo 2 se muestran diferentes técnicas para la fabricación de una película de cristal líquido, bajo condiciones de anclaje plana uniforme y no uniforme, además de la generación de estructuras en distintas configuraciones del director. Posteriormente, en el capítulo 3, se explora la generación de estructuras en una celda de cristal líquido con anclaje homeotrópico y su fabricación. Finalmente, en el capítulo 4 se discuten los resultados y se realizan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Óptica de cristales líquidos.

1.1. Definición de cristal líquido.

Los tres estados convencionales en los que se encuentra la materia son: líquido, sólido y gaseoso, sin embargo, existe un estado de la materia que exhibe propiedades físicas de un sólido, como la orientación de sus moléculas o anisotropía, pero al mismo tiempo, muestra propiedades de un líquido, como su viscosidad; la materia que presenta este comportamiento se le conoce como *cristal líquido*. Algunas de sus propiedades anisótropas son la conductividad eléctrica y térmica ($\Delta\sigma = \sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}$), permitividad dieléctrica ($\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$) y birrefringencia ($\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$) donde los subíndices \parallel, \perp indican la dirección en que la componente es medida, en este caso, se hace respecto al vector unitario paralelo a la orientación promedio del eje principal de las moléculas, también llamado *director*.

1.1.1. Clasificación.

Una mesofase es un estado de la materia intermedio entre dos fases, en los cristales líquidos estas fases son la sólida y líquida; muchas de sus propiedades dependen de la fase en la que se encuentre. La primera distinción entre dos clases de cristales líquidos se hace al diferenciar la causa que provoca la transición de sólido a líquido (o viceversa), aquellos que al aumentar o disminuir su temperatura son llamados *termotrópicos*, y aquellos que están formados por dos componentes y al cambiar la concentración de uno de ellos ocurre la transición de fase, son conocidos como *liotrópicos*.

También pueden clasificarse según la geometría de sus moléculas; si son delgadas y alargadas asemejándose a la forma de un cigarro o grano de arroz, son

llamados *calamíticos*, y si tiene forma de disco son llamados *discóticos*. Éstas son dos de las formas más frecuentes observadas en las moléculas, sin embargo, existen otras formas como la de listón (Difenil Difenil-etino) o banana.

Los cristales líquidos pueden subclasificarse de acuerdo al orden de orientación y/o posicionamiento de sus moléculas, las cuales definen diferentes mesofases. Dentro de los calamíticos, la mesofase *nemática* es aquella en la que el eje principal de las moléculas apunta en una misma dirección, careciendo de orden posicional entre ellas. Los cristales líquidos en los cuales sus moléculas presentan orden posicional y orientacional, se encuentran en la fase *esmética*, que al mismo tiempo se divide en tres, esmética A,B y C.

Un caso particular e interesante de los cristales líquidos nemáticos son los llamados *colestéricos*, ya que sus moléculas están organizadas en capas, sin embargo, su eje principal apunta en diferentes direcciones en cada capa, mostrando una torsión en el director, formando una estructura helicoidal, por esta razón también son conocidos como cristales líquidos nemáticos quirales.

1.2. Orientación de las moléculas en nemáticos.

Usualmente, el estudio de cristales líquidos implica colocarlos dentro de un ambiente confinado (capilares, gotas, etc.) que imponen condiciones de frontera orientacionales, también llamadas *condiciones de anclaje*.

En los cristales líquidos calamíticos, la orientación del director \hat{n} , está definida por dos ángulos, el polar θ y el azimutal ϕ . La dirección de las moléculas es invariante bajo una rotación de π -radianes, es decir, $\hat{n} = -\hat{n}$, además \hat{n} es un vector unitario, entonces $\|\hat{n}\| = 1$.

Dentro de las posibles orientaciones de las moléculas, los tres anclajes más importantes son el plano, homeótropo e inclinado. En el anclaje homeótropo, las moléculas están posicionadas verticalmente respecto a las superficies ($\phi = 90^\circ$, $\theta = 0^\circ$), mientras que en el anclaje plano se encuentran paralelas a la superficie ($\phi = 0^\circ$, $0^\circ < \phi < 90^\circ$) y el anclaje inclinado representa una orientación intermedia entre el anclaje plano y homeótropo, por lo que θ y ϕ toman valores entre 0° y 90° . Luego, en los casos de anclaje plano e inclinado, puede existir la posibilidad de que la orientación de las moléculas sea uniforme, es decir, el eje principal de las moléculas (o director local) apunta en la misma dirección o en caso contrario, la orientación sea no uniforme, donde el eje principal de las moléculas no apunta en una dirección preferencial. Existen diferentes métodos para realizar anclajes; para el caso plano, puede lograrse frotando las superficies y para el caso homeótropo, se puede realizar cubriendo las superficies con un surfactante con parte polar y

no polar, ambos casos son detallados en secciones posteriores.

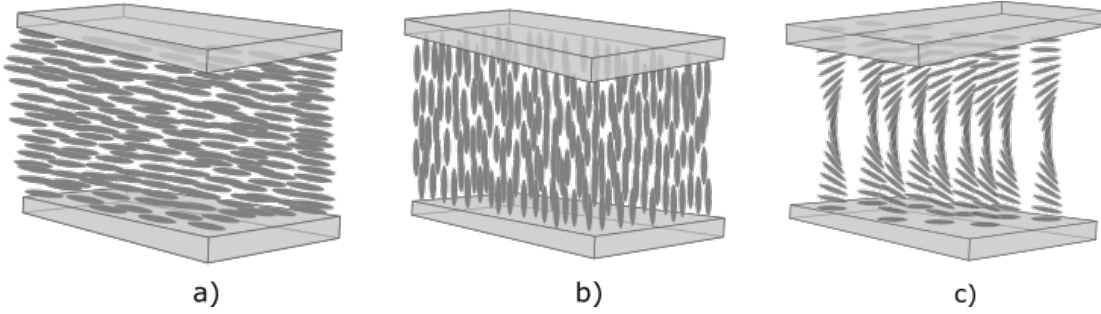


Figura 1.1: Celda de cristal líquido bajo condiciones de anclaje: a) plano, b) homeótropo y c) plano con torsión.

Con el fin de cuantificar la orientación de las moléculas en un cristal líquido uniaxial, se introduce el parámetro de orden S . Debido a que se desea conocer el orden de un conjunto de moléculas, la idea natural para definir la forma matemática de S , es promediar el orden local de cada molécula. Gracias a la simetría axial de \hat{n} , el director local queda descrito por el ángulo θ por lo que la función de densidad que describa la orientación de las moléculas no depende de ϕ , entonces $f(\theta, \phi) = f(\theta)$. Como se mencionó anteriormente, es imposible distinguir la dirección del eje principal de una molécula, entonces $f(\theta) = f(\pi - \theta)$. De ahí que S se define como [4]:

$$S = \frac{1}{2} \langle 3 \cos^2 \theta - 1 \rangle = \int f(\theta) \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) d\Omega. \quad (1.1)$$

Donde $f(\theta)$ es la función de distribución de alineación de las moléculas y $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ es el ángulo sólido. Examinando los posibles valores que adquiere S , en un sistema donde las moléculas son paralelas a las superficies, el parámetro de orden toma su valor máximo, $S = 1$. Por otro lado, si las moléculas están ordenadas perpendicularmente respecto al director, entonces $S = \frac{1}{2}$. Finalmente, se determina que en la fase isotrópica, donde las moléculas no tienen un orden en particular, $S = 0$.

1.3. Polarización en un medio birrefringente.

La luz es una onda electromagnética que se propaga en un medio, con cierta amplitud y dirección de oscilación de los campos eléctricos y magnéticos, en espa-

cio y tiempo. La descripción matemática del campo eléctrico de una onda plana monocromática, con longitud de onda λ y frecuencia angular ω , propagándose en un medio isotrópico, a lo largo del eje z es:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, t) &= E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} \\ &= E_{ox} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{i}} + E_{oy} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \hat{\mathbf{j}},\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde E_x, E_y son las componentes del campo eléctrico a lo largo de los ejes x, y , respectivamente; las cuales cuentan con amplitudes E_{ox} y E_{oy} . El término $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es la magnitud del vector de onda, y ϵ es la diferencia de fase.

El comportamiento de la dirección de vibración de E_x y E_y , a lo largo de su propagación, se denomina *polarización*. El desfase entre las componentes del campo eléctrico, con la misma amplitud, representa una dirección de oscilación en particular; por ejemplo, si ϵ es cero o múltiplo de 2π entonces, se dice que las componentes están en fase e indica que la onda está polarizada linealmente, y si $\epsilon = \pm \frac{\pi}{2}$ representa el estado de polarización circular, donde el signo indica si es izquierda o derecha, respectivamente. Además, ϵ puede tomar valores diferentes a los mencionados anteriormente, en ese caso, la polarización es elíptica. La ecuación que describe el estado general de polarización de una onda es [5]:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos \epsilon = \sin \epsilon.\tag{1.3}$$

Esta expresión es conocida como *ecuación de la elipse de polarización*. El parámetro que describe la orientación del eje mayor de esta elipse, en el sistema coordenado E_x - E_y , está definida por:

$$\tan 2\bar{\Psi} = \frac{2E_{ox}E_{oy}}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2}\tag{1.4}$$

Otra descripción matemática que representa estados de polarización de la luz, propuesta por R. Jones en 1941, es a través del cálculo de Jones [6]. Las componentes E_x, E_y de un campo eléctrico \mathbf{E} propagándose a lo largo del eje z (ver ec. 1.2) se escriben en forma de vector columna:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\phi_0} \end{pmatrix},\tag{1.5}$$

donde $\phi_0 = \phi_y - \phi_x$ es la diferencia de fase de las componentes del campo a lo largo del eje y y del eje x correspondientemente. El término $\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}e^{i\phi_0} \end{pmatrix}$ es conocido como *vector de Jones*. Alternativamente la Ec. 1.5 puede reescribirse en términos del ángulo γ formado por el eje x y \mathbf{E} , entonces se obtiene [5]:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma e^{i\phi_0} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

La luz está linealmente polarizada cuando las componentes del campo eléctrico E_x, E_y vibran en fase ($\phi_0 = 0$) o fuera de fase por múltiplos enteros de $\pm 2\pi$. Además, se dice que la luz es horizontalmente polarizada si $\gamma = 0$ y verticalmente polarizada si $\gamma = \frac{\pi}{2}$, entonces los vectores de Jones correspondientes son:

$$\mathbf{E}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

$$\mathbf{E}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Las matrices de Jones describen la acción de un elemento óptico, como polarizadores o retardadores de fase, sobre un campo óptico representado por un vector de Jones [5]. Por ejemplo, la matriz de Jones de un polarizador lineal con eje de transmisión formando un ángulo β respecto a la horizontal es:

$$M_{PL\beta} = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

A partir del estudio de las propiedades de polarización de un material, se puede obtener información acerca del sistema, por ejemplo, es posible determinar la orientación de las moléculas de un cristal líquido con la ayuda de un generador y analizador de estados de polarización. La polarización resultante de un sistema depende en gran parte de su estructura, por lo que en los materiales anisótropos, la determinación del estado de polarización resultante es útil. Una de las principales características de un medio anisótropo es la birrefringencia; propiedad de un material donde su índice de refracción depende de la polarización y la dirección de propagación de la luz en el medio. Al incidir un haz de luz en un material birrefringente, los rayos experimentarán una doble refracción, es decir, el haz es dividido en dos componentes, el rayo ordinario y extraordinario; este último recibe ese nombre porque el ángulo de desviación es diferente al del rayo ordinario, esto

se debe a que el índice de refracción en el cual se propaga el rayo extraordinario es diferente al ordinario, obedeciendo así la ley de Snell.

Considérese una celda de cristal líquido con anclaje plano, la cual se encuentra entre dos polarizadores lineales con sus ejes de transmisión cruzados. La luz linealmente polarizada \mathbf{E}_1 de amplitud E_0 producida por el primer polarizador lineal incide de forma normal en la celda de cristal líquido, pero formando un ángulo α con el director. En este modelo no se consideran pérdidas por esparcimiento o absorción por parte de las interfaces.

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \\ E_0 \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Después de atravesar la celda de cristal líquido de espesor d , el campo resultante \mathbf{E}_2 es:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha e^{ik_e d} \\ E_0 \sin \alpha e^{ik_o d} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Posteriormente, la luz atraviesa el segundo polarizador lineal, por lo que el campo electromagnético resultante \mathbf{E}_3 se calcula de acuerdo al formalismo de Jones [5], donde M_{PL} es la matriz de Jones de un polarizador lineal, donde su eje de transmisión está rotado 90° respecto al primero.

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha e^{ik_e d} \\ E_0 \sin \alpha e^{ik_o d} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Donde $k_{o,e} = \frac{2\pi}{\lambda} n_{o,e}$, es el número de onda ordinario y extraordinario, respectivamente. La norma euclídea de una matriz \mathbf{A} de dimensiones $m \times n$ es: $\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$. Entonces al calcular el cuadrado de la norma del campo resultante \mathbf{E}_3 , se obtiene la intensidad I :

$$\|\mathbf{E}_3\|^2 = I = E_0^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\pi \Delta nd}{\lambda}. \quad (1.13)$$

Debido a que la velocidad de la luz y el índice de refracción de un medio están relacionados, las componentes del campo electromagnético viajan a diferentes velocidades en un medio birrefringente, y esto se manifiesta en una diferencia de fase entre los rayos ópticos ordinario y extraordinario. Esta cantidad es denominada *retardancia* y es definida como:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \Delta n, \quad (1.14)$$

donde λ es la longitud de onda incidente y $\Delta n = n_e - n_o$ es la birrefringencia.

Al someter una celda de cristal líquido con anclaje plano en sus superficies a una diferencia de potencial, algunos parámetros físicos se vuelven dependientes principalmente del voltaje, tales como la retardancia y el grado de polarización. La retardancia alcanza su valor máximo en ausencia de voltaje, por lo que la retardancia disminuye a medida que el voltaje aumenta, esto sucede ya que las moléculas tienden a orientarse perpendicularmente a las superficies (este fenómeno es descrito de mejor forma en la sección 1.4.2). Los dispositivos con estas características son llamados *retardadores variables de cristal líquido*. [7, 8].

La caracterización de la retardancia de una celda de cristal líquido se realiza mediante el análisis de la intensidad resultante al colocar la celda entre dos polarizadores lineales con ejes de transmisión cruzados, la iluminación del sistema puede estar a cargo de un haz colimado.

1.3.1. Polarimetría de Stokes.

Georges Stokes introdujo un vector en el cual sus componentes, llamados *parámetros de Stokes*, describen matemáticamente el estado de polarización completa y parcialmente de un sistema, a diferencia de los vectores de Jones que describen únicamente estados puros de polarización [5, 9]. El vector de Stokes puede estar descrito en términos de las componentes del campo eléctrico o en términos de intensidades,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* + E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_x^* - E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_y^* + E_y E_x^* \rangle \\ \langle i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_H + I_V \\ I_H - I_V \\ I_{45} - I_{-45} \\ I_R - I_L \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Donde E_x, E_y representan las componentes del campo eléctrico en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$, respectivamente, en el sistema cartesiano. Las diples $\langle \rangle$ representan el promedio temporal y $*$ representa el complejo conjugado de una componente.

El primer parámetro de Stokes, S_0 , representa la irradiancia total que incide en el sistema, el segundo parámetro, S_1 , indica la polarización lineal de la luz, ya sea horizontal (H) o verticalmente (V). El tercer parámetro, S_2 , indica la fracción de polarización $\pm 45^\circ$ respecto al plano horizontal. Por último, el cuarto parámetro de

Stokes, S_3 , indica la polarización circular de la luz, a derecha (R) o izquierda (L). Normalizando el vector de Stokes ($S_0=1$), los parámetros pueden tomar valores entre 0 y 1, ya sean positivos o negativos.

1.3.2. Efecto flexoeléctrico.

La flexoelectricidad representa la generación de polarización eléctrica al aplicar una diferencia de voltaje en un cristal líquido. En la literatura es común referirse a este efecto con el nombre de *efecto flexoeléctrico* o *efecto pizoeléctrico*, debido a la analogía que existe con los cristales ordinarios, como lo reporta Meyer en 1969 [10]. En un cristal líquido nemático, las distorsiones tipo abanico y flexión del director $\hat{\mathbf{n}}$, pueden inducir un cambio de polarización; por este motivo la expresión matemática para describir el efecto flexoeléctrico es:

$$P_f = e_1 \hat{\mathbf{n}}(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) - e_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}}), \quad (1.16)$$

donde e_1 y e_3 son llamados *coeficientes flexoeléctricos* y representan un potencial eléctrico. El orden de magnitud típico para ambos coeficientes es $\approx 10 \frac{pC}{m}$.

1.4. Nemáticos bajo un campo aplicado.

En el estado de equilibrio de un cristal líquido nemático, el director tiende a tomar una distribución espacial en particular, pero las moléculas pueden cambiar su orientación debido a fuerzas elásticas externas. Las distorsiones surgen por la interacción de las moléculas con superficies de confinamiento, un campo eléctrico o magnético. Este fenómeno no ocurre para cualquier valor del campo aplicado, debe ser superior a un valor umbral que depende de valores intrínsecos del cristal líquido.

El propósito de esta sección es conocer la energía necesaria para deformar la orientación del director local de un cristal líquido uniaxial a través de la teoría propuesta y desarrollada por F.Frank [11] y C.Oseen [12].

1.4.1. Energía libre de distorsión.

Sea $\{x_1, x_2, x_3\}$ una base para \mathbb{R}^3 , donde $x_3 \parallel \hat{\mathbf{n}}$. Tras realizar consideraciones físicas sobre la variación espacial del director $\nabla \hat{\mathbf{n}}$ (como la simetría de las moléculas

las), se propone que los tres tipos de deformaciones que puede experimentar el director de un nemático están descritos por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 s_1 = n_{11}, \quad s_2 = n_{22} & \quad (\text{abanico}), \\
 t_1 = -n_{21}, \quad t_2 = n_{12} & \quad (\text{torsión}), \\
 b_1 = n_{13}, \quad b_2 = n_{23} & \quad (\text{flexión}).
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

Donde $n_{i,j} = \frac{\partial^2 n_i}{\partial x_j^2}$ representa la deformación del director respecto a la dirección x_j (con $j = 1, 2, 3$) y n_i es la componente i -ésima del director, donde $i = 1, 2, 3$. En la Figura 1.2 se muestra una representación gráfica de las deformaciones de un nemático confinado por dos superficies de vidrio, este sistema es comunmente llamado *celda de cristal líquido*.

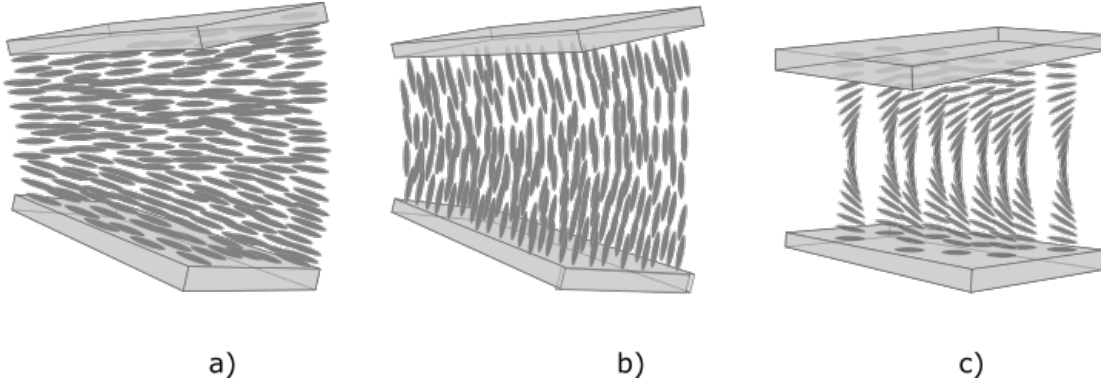


Figura 1.2: Deformaciones tipo a) abanico, b) flexión y c) torsión de un cristal líquido uniaxial.

La ecuación que describe la energía necesaria para deformar el director de un cristal líquido ha sido objeto de estudio por varios científicos [4, 13] debido a la complejidad e importancia que representa. La derivación formal de esta ecuación resulta al considerar la forma tensorial del parámetro de orden, sin embargo, se puede obtener a partir del análisis geométrico de la distorsión del director molecular.

En una celda de cristal líquido con anclaje plano, todas las moléculas están posicionadas paralelamente a las superficies de vidrio por lo que el director no muestra una variación espacial a lo largo de la celda ($\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \nabla \times \hat{\mathbf{n}} = 0$). En términos energéticos, las deformaciones estan representadas por:

$$\begin{aligned}
f_{\text{abanico}} &= \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2, \\
f_{\text{flexión}} &= \frac{1}{2} K_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2, \\
f_{\text{torsión}} &= \frac{1}{2} K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Donde las constantes de elasticidad de Frank K_1, K_2, K_3 (generalmente del orden de $10^{-12}N$) representan la proporción entre la deformación (tipo abanico, flexión y torsión, respectivamente) y la restauración de un material. Entonces la densidad de energía de deformación elástica del director es:

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2} K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 \\
&\quad + K_{24} \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})].
\end{aligned} \tag{1.19}$$

La constante K_{24} es un término extra de distorsión llamado *silla de montar*. Ahora, supóngase un anclaje capaz de orientar las moléculas en alguna dirección y además, considérese que el director puede deformarse solamente en forma de abanico, flexión o torsión. Entonces la constante K_{24} es nula,

$$f = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2} K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2. \tag{1.20}$$

La densidad de energía libre también puede expresarse en términos de las deformaciones del director (Ec. 1.17):

$$f = \frac{1}{2} K_1 (s_1 + s_2)^2 + \frac{1}{2} K_2 (t_1 + t_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (b_1^2 + b_2^2). \tag{1.21}$$

Con fines cualitativos, simplificación en cálculos matemáticos y para comprender de mejor forma la distorsión del director, se asume que el director se deforma de igual manera, entonces los valores de las constantes elásticas son iguales $K_1 = K_2 = K_3 = K$; esta consideración es conocida como *aproximación de una constante*. Después de realizar la matemática pertinente (ver Apéndice A), la Ec. 1.20 se reduce a:

$$f = \frac{1}{2} K [(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + (\nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2]. \tag{1.22}$$

1.4.2. Transición de Fréedericksz.

El director local de un cristal líquido nemático puede ser reorientado aplicando un campo eléctrico o magnético suficientemente fuerte para ejercer un torque en las moléculas. Este torque compite con el torque elástico del director impuesto por las condiciones de anclaje de las superficies, por lo que superando un valor umbral, las moléculas tienden a orientarse de forma paralela o perpendicular a la dirección inicial del director, según el signo de la anisotropía dieléctrica ($\Delta\epsilon < 0$ perpendicular y $\Delta\epsilon > 0$ paralela al director). Este cambio repentino en la orientación del director local se llama *transición de Fréedericksz*.

Esta transición es de suma importancia ya que después del voltaje umbral, la orientación del director puede ser controlada; muchos dispositivos electro-ópticos funcionan con base en este fenómeno. Ahora se desea analizar matemáticamente el comportamiento del director bajo la influencia de un campo externo.

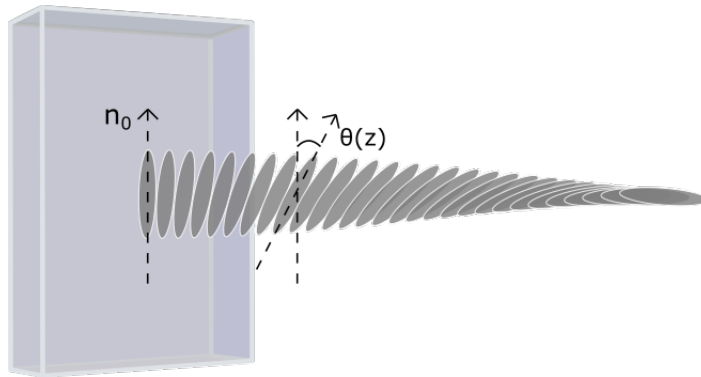


Figura 1.3: Deformación de un cristal líquido nemático semi infinito con anclaje plano, es descrita por el ángulo $\theta(z)$ formado por el director inicial n_0 y el eje principal de una molécula.

Considérese un cristal líquido nemático semi infinito, con anclaje plano en su superficie inferior (ver Figura 1.3). Respetando la notación, $\theta(z)$ es el ángulo formado entre el eje largo de una molécula y el director inicial, por lo que este valor describe la distorsión local del director en el plano xy a lo largo de la dirección \hat{z} . El torque inducido por un campo magnético aplicado en dirección \hat{z} es:

$$f_B = -\frac{1}{2\mu_0}\chi_a(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}). \quad (1.23)$$

La densidad de energía libre del sistema es la suma de la contribución de la densidad de energía libre de Frank 1.20 y la densidad de energía del campo magnético 1.23,

$$\begin{aligned}
f &= f_B + f_{Frank} \\
&= -\frac{1}{2\mu_0}\chi_a (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{2}K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2}K_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Considerando la deformación puramente de torsión, es decir, que la distorsión del director ocurra en el plano xy y que las constantes K_1, K_3 sean nulas, entonces $\hat{\mathbf{n}}$ está descrito por $\mathbf{n}(\mathbf{z}) = (\cos \theta(z), \sin \theta(z), 0)$. En el Apéndice B se muestra la matemática de estas consideraciones y además, se minimiza la energía de la ecuación resultante, obteniendo:

$$K_2 \frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{\chi_a B^2}{\mu_0} \sin \theta \cos \theta = 0. \tag{1.25}$$

Sea $\xi = \sqrt{\frac{K_2\mu_0}{\chi_a B^2}}$ la longitud de coherencia magnética, entonces se reescribe la Ec.1.25,

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{\xi^2} \sin \theta \cos \theta = 0. \tag{1.26}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene el comportamiento del director de un cristal líquido semi infinito. En el Apéndice C se muestra el álgebra necesaria para obtener la primer integral de la Ec.1.26:

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2} (\sin^2 \theta + cte). \tag{1.27}$$

Usando las condiciones de frontera ($\theta = 0$ en $z = 0$, y $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $z = \infty$), la constante de integración, es nula. Después se integra la Ec.1.27 y se obtiene la solución:

$$\theta(z) = 2 \arctan \left(e^{-\frac{z}{\xi}} \right). \tag{1.28}$$

El término ξ puede ser interpretado como la longitud mínima necesaria para que el director sea deformado. Como primer resultado es interesante, sin embargo, es necesario acercar el problema a condiciones de laboratorio. Considérese un cristal líquido confinado en una celda de vidrio de espesor d (donde $\xi \ll d$) con anclaje plano y deformación de torsión; ahora las condiciones de frontera son $\theta(0) = \theta(d) = 0$, y la máxima deformación θ_m se alcanza en $z = \frac{d}{2}$. Como primer aproximación, se asume que la distorsión entre dos moléculas consecutivas en planos diferentes a lo largo del eje z es muy pequeña ($\sin \theta \cos \theta = \theta$) entonces,

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{\xi^2}\theta = 0.$$

Como la deformación máxima se encuentra en $z = \frac{d}{2}$, la solución no trivial a esta ecuación es:

$$\theta = \theta_m \cos \frac{z}{\xi}.$$

De las condiciones de frontera $\theta(0) = 0 = \theta(d)$ se tiene,

$$\frac{d}{\xi} = n\pi, \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

O equivalentemente, sustituyendo el valor de ξ se obtiene el valor del campo magnético umbral para que ocurra la transición de Fréedericksz,

$$B_c = \frac{n\pi}{d} \sqrt{\frac{\mu_0 K_2}{\chi_a}}. \quad (1.29)$$

Continuando con la obtención de la solución general a la Ec. 1.26, se sustituyen las nuevas condiciones de frontera en la Ec. 1.27, por lo que se obtiene el valor de la constante de integración y la ecuación resultante es:

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2} (\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta). \quad (1.30)$$

En el apéndice C.2 se realiza el álgebra para obtener la solución general,

$$\frac{d}{2\xi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta}} d\theta = K(\sin \theta_m). \quad (1.31)$$

Esta integral no resulta práctica, por lo que puede aproximarse a la ecuación,

$$\theta_m \approx 2\sqrt{\frac{B}{B_c} - 1}. \quad (1.32)$$

Análogamente, se obtiene el valor del campo crítico al aplicar un campo eléctrico a un cristal líquido nemático con condiciones de anclaje plano; el problema se resuelve de la misma manera, considerando la relación entre el campo eléctrico y magnético: $E = \left(\frac{\epsilon_a}{4\pi\chi_a}\right)^{\frac{1}{2}} B$. Luego, se reemplazan los términos de la susceptibilidad magnética por la eléctrica, es decir, $\frac{1}{2}\chi_a$ por $\frac{\epsilon_a}{8\pi}$. Entonces, el campo eléctrico necesario para que la transición de Fréedericksz ocurra es:

$$E_c = \frac{\pi}{d} \left(\frac{4\pi K_2}{\epsilon_a}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.33)$$

Es interesante realizar la comparación entre el valor crítico para el campo eléctrico y magnético, y así conocer qué campo es más eficiente para producir la transición de Fréedericksz. El orden de magnitud de la permeabilidad magnética en el vacío es 1×10^{-6} , mientras que el valor típico para la susceptibilidad magnética es $\chi_a = 10^{-7}$, y de la susceptibilidad eléctrica es $\epsilon_a = 0,1$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{E_c}{H_c} &= \sqrt{\frac{4\pi}{\chi_a \epsilon_a}} \\ &= 35 \times 10^6. \end{aligned}$$

Experimentalmente será mas fácil inducir la transición de Fréedericksz mediante un campo eléctrico que con un campo magnético.

1.5. Defectos topológicos en nemáticos.

La discontinuidad o presencia de singularidades en un sistema es objeto de estudio en diversas áreas de la física, incluyendo cosmología, materia condensada y cristales líquidos, los cuales se han convertido en un medio óptimo para el estudio de defectos, y posteriormente aplicarlo a medios menos accesibles. En secciones anteriores se han mostrado algunos ejemplos de las distorsiones que puede sufrir el director de un cristal líquido; en esta sección se presenta otro tipo de distorsión llamada *disclinación*. El nombre surge al observar una inclinación en la orientación del conjunto de moléculas en un cristal líquido, esto puede surgir debido a la presencia de un campo externo o durante cambios repentinos de presión o temperatura. Por ejemplo, al romper la simetría del sistema durante una transición de fase (isotrópica - nemática) o al incidir un haz.

Las disclinaciones, o también llamadas *defectos topológicos*, pueden ser definidas como una discontinuidad o una singularidad en un medio, particularmente en los cristales líquidos nemáticos, son grandes distorsiones localizadas que no pueden relajarse y el parámetro de orden no está definido en su centro [14]. La distribución o textura final de los defectos dependerá de las condiciones de anclaje impuestas por las superficies; en una celda con anclaje plano, las disclinaciones pueden clasificarse en dos formas según su geometría, defectos tipo *punto*, o *línea*, como su nombre lo indica.

Considérese un cristal líquido nemático confinado en una celda con anclaje plano, el vector normal de las superficies es paralelo al eje z y el director, descrito por las coordenadas cilíndricas $\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}$, en dirección $\hat{n} = (\cos \Psi(\phi), \sin \Psi(\phi), 0)$, y Ψ es el ángulo formado por \hat{n} y \hat{r} . La deformación del medio debe tener un costo en la energía del sistema, eligiendo la ecuación de densidad de energía libre de Frank, con la aproximación de una constante, Ec 1.22, se sustituye la expresión del director \hat{n} y luego, se minimiza la energía, por lo que se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 \phi} = 0$. La solución a esta ecuación es:

$$\Psi = q\phi + \phi_0. \quad (1.34)$$

Donde ϕ_0 es una constante y q es el rango o factor de peso; sin embargo, en la literatura se conoce comúnmente como *carga topológica*, debido al carácter topológico que presentan las disclinaciones. Los defectos punto pueden clasificarse de acuerdo a su carga topológica, que puede tomar los valores: $q = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$. En una celda de cristal líquido donde las superficies no son tratadas, se observan de forma simultánea disclinaciones de diferentes cargas topológicas, esta distribución es llamada *textura Schlieren*, descrita en la sección 3.4.1.

El enfoque topológico de las disclinaciones surge al asociar el parámetro de orden con los defectos y al caracterizar su estructura; esto es posible considerando una trayectoria cerrada que contenga una disclinación en su centro, llamada *circuito de Burgers*. La dirección de la trayectoria se toma en sentido contrario a las manecillas del reloj; si el director aumenta o disminuye $2\pi q$ a lo largo de la trayectoria construida, entonces la carga topológica de las disclinaciones es q , lo cual se puede generalizar matemáticamente a través de la integral de línea:

$$\oint_{\alpha} d\alpha = 2\pi q.$$

El proceso de determinación de la carga topológica de un defecto, mediante un circuito de Burger, consiste en tomar una molécula referencial y analizar continuamente el cambio de inclinación respecto a una molécula adyacente; por ejemplo, considérese una molécula posicionada paralela a $+x$, a partir de este sitio comienza la trayectoria imaginaria, la cual aumenta en sentido contrario de las manecillas del reloj. La trayectoria del circuito de Burger finaliza al completar el trayecto circular y llegar al punto de partida, en este momento se determina la posición final de la molécula adyacente a la inicial, indicando cuántos múltiplos de π rotó el director local.

Para ejemplificar la determinación de la carga topológica de una disclinación con este método, se muestra la Figura 1.4 d), donde la distribución del director es radial y la circunferencia roja dibujada representa el circuito de Burger. Considérense las moléculas paralelas a $+x$, continuando con la trayectoria descrita, se observa que la línea de flujo es paralela a los ejes coordenados $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{4}$. Al completar el circuito de Burger, la línea de flujo es nuevamente paralela a $+x$, entonces la integral de línea es $\oint_{\alpha} d\alpha = 2\pi$, por lo tanto el valor de la carga topológica es $q = 1$.

Los defectos descritos por la Ec. 1.34 son bidimensionales y son formados en las superficies, además la distribución de un defecto con una misma carga puede ser diferente dependiendo del valor de ϕ_0 , mostradas en la Figura 1.4 e),f). Aparte de capilares, los defectos se han observado en otros sistemas como gotas nemáticas. En la Figura 1.4 se muestran los defectos topológicos comúnmente observados en un cristal líquido nemático.

Un método experimental para determinar el signo de los defectos consiste en rotar uno de los polarizadores, si el patrón de intensidad rota en dirección de las manecillas del reloj, el signo de la carga topológica es positivo, en caso contrario, negativo [13].

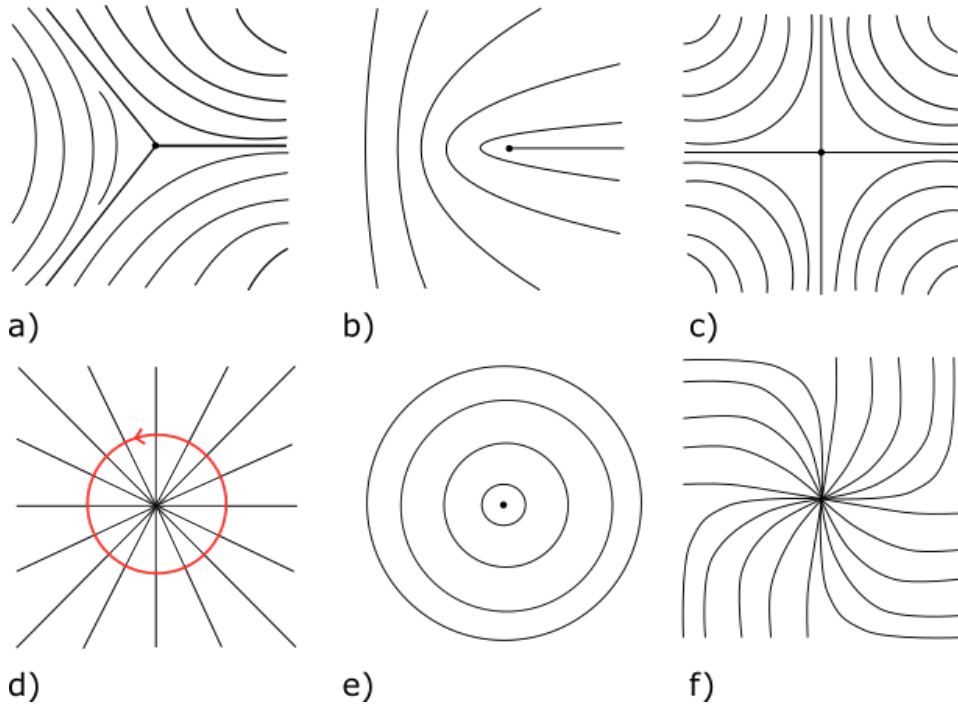


Figura 1.4: Las líneas de flujo representan la orientación continua del director, en este caso representan defectos topológicos de carga $q =$ a) $-\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) -1 , d) 1 , con $\phi_0 = 0$. Otra representación de una disclinación de carga topológica $q = 1$ es mostrada en la figura e) $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ y f) $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$. En la figura d), la circunferencia roja representa un circuito de Burger. El punto central en todos los defectos representa la línea de disclinación perpendicular a las superficies.

Ahora que se ha revisado la estructura de los defectos, se desea calcular la energía almacenada por una disclinación aislada. Esto se realiza calculando el gradiente de la función Φ , obteniendo la ecuación:

$$f = \frac{1}{2}K \frac{q^2}{r^2}. \quad (1.35)$$

Para obtener la energía de la disclinación, se integra la densidad de energía desde el centro del defecto r_c , hasta el tamaño máximo de la muestra R , entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^{2\pi} \int_{r_c}^R f \, r \, dr \, d\theta \\
&= \pi K q^2 \ln \frac{R}{r_c}.
\end{aligned}
\tag{1.36}$$

La energía de un defecto topológico diverge gracias al factor $\ln \frac{R}{r_c}$ y depende del cuadrado de la carga topológica. El valor típico del corazón de una disclinación es $r_c = 1nm$, y generalmente el radio de una celda de vidrio es $R = 1cm$, entonces la energía almacenada por una disclinación de carga $q = 1$ es $F = 50pN$.

La característica topológica requiere que la suma de las cargas desaparezca, es decir, $\sum q_i = 0$ [15], por lo que la textura presenta dinámica e interacción entre disclinaciones, la desaparición de un par de defectos topológicos es llamada *aniquilación*. De acuerdo a observaciones realizadas, dos defectos de misma carga topológica pero signo contrario, conectados por las mismas ramas, se aproximan uno al otro hasta que la aniquilación se presenta, entonces el patrón de intensidad resultante tiene forma de líneas alargadas formando un circuito cerrado. La observación del movimiento de defectos topológicos es atribuido a la continua reorientación del director.

En el transcurso del tiempo, los defectos se eliminarán unos a otros de tal forma que, idealmente, la orientación del director regresará a la configuración original. En algunos casos, la aniquilación de defectos es un problema por lo que se han desarrollado diferentes métodos para crear, borrar o evitar su desaparición; uno de ellos es el atrapamiento y manipulación de disclinaciones a través de pinzas ópticas, creando redes ordenadas. Otra técnica utilizada para estabilizar el número de defectos, se realiza dopando la muestra con un componente iónico [16].

1.5.1. Nudos.

Las característica de los defectos formados en cristales líquidos depende de las condiciones de anclaje de las superficies. Considérese un cristal líquido nemático con anisotropía dieléctrica negativa ($\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$), introducido entre dos superficies tratadas homeotrópicamente. La aplicación de un campo eléctrico o magnético externo (paralelo a \hat{z}) superior al valor del campo umbral de la transición de Fréedericksz, provocará una reorientación en el director, las moléculas minimizan la energía y tienden a orientarse perpendicularmente al campo eléctrico sin alguna dirección preferencial en el plano de las superficies, surgiendo algunos defectos no singulares, denominados localmente *nudos*, sin embargo, en la literatura son

llamados *umbilics* [17]. El signo de la anisotropía dieléctrica (o diamagnética) es importante porque indica la dirección en la que se reorientan las moléculas; si la anisotropía es positiva, entonces las moléculas tienden a orientarse de forma paralela al campo, contrariamente a la anisotropía negativa descrita anteriormente. En la Figura 1.5 se muestra gráficamente la distribución de las moléculas que forman un defecto tipo nudo.

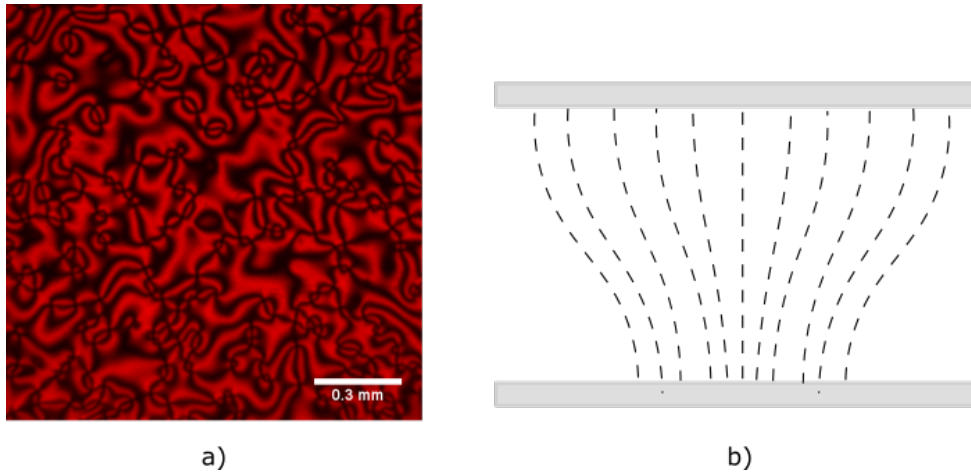


Figura 1.5: a) Conjunto de defectos tipo nudo formado al aplicar un campo superior al valor crítico de la transición de Fréedericksz ($V = 2V_{rms}$, $f = 800Hz$), en una celda de cristal líquido QY-VA 201305 con anclaje homeótropo. La muestra es observada desde la parte superior de la celda. b) Representación gráfica de un nudo, la vista es lateral.

La observación de esta textura, a través de polarizadores lineales cruzados, indicaría que los defectos son similares a los propuestos por Frank, porque de igual forma todos los defectos están conectados entre ellos a través de ramas oscuras y brillantes, en adición, el patrón de intensidad es similar; sin embargo, existen dos diferencias fundamentales que los distinguen, la primera es que el centro o corazón del defecto es continuo y la segunda es que los defectos son tridimensionales. A pesar de estas diferencias, conservan la propiedad topológica, en lugar de realizar un circuito de Burger, se considera una bola que encierre al defecto, de esta forma son igualmente clasificados por su carga topológica, existiendo únicamente aquellos con carga $q = \pm 1$. Otra característica de los defectos tipo nudo es que están emparejados, es decir, los defectos con carga $q = 1$ están acoplados con aquellos que tienen carga contraria, $q = -1$, a lo largo de toda la red.

Esta textura presenta dinámica de los nudos moviéndose unos hacia otros, debido a la continua reorientación del director, descartando cualquier fenómeno relacionado con flujo de moléculas, como el efecto de electroconvección (descrito

en la sección 2.6). La aniquilación de los nudos reduce el número de estos con el paso del tiempo, hasta que idealmente desaparezcan todos, obteniendo una textura uniforme. No obstante, debido a impurezas, irregularidades o incluso, en el borde de la celda, pueden permanecer algunos de ellos de forma estática, y debido a su emparejamiento, su comportamiento corresponde a la presencia virtual de otro nudo con carga topológica de signo contrario.

La caracterización del conjunto de nudos, es realizada mediante dos parámetros: la densidad y la separación de los defectos, ambos son dependientes del tiempo: $\rho(t) \propto t^{-\nu}$ y $D(t) \propto (t_0 - t)^\alpha$, respectivamente. El intervalo de tiempo $t_0 - t$ representa el tiempo de aniquilación, ν y α son coeficientes de escalamiento por determinar, generalmente toman el valor de $\nu = 1$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ [18].

1.6. Electroconvección.

La formación de patrones gracias a desestabilizaciones de sistemas en equilibrio ha sido estudiada en cristales líquidos nemáticos, este fenómeno es llamado *electroconvección*. Para desestabilizar las moléculas del cristal líquido, las cuales se encuentran entre dos superficies tratadas con anclaje plano, se aplica un campo eléctrico normal a las superficies, por lo que la forma del patrón obtenido depende de la amplitud y frecuencia del campo eléctrico.

La principal causa de la formación de inestabilidades en el director, es la anisotropía dieléctrica y conductiva, ya sea positiva o negativa. Entonces, para distinguir los cuatro posibles regímenes o sistemas, se introduce la notación $(+, -)$, donde el primer signo hace referencia a la anisotropía dieléctrica y el segundo a la anisotropía conductiva ($\epsilon_a > 0, \sigma_a < 0$). El modelo que describe las inestabilidades en los casos $(+, -)$, $(-, +)$ es llamado *modelo estándar de electroconvección*, el cual ha sido estudiado ampliamente, mientras que los sistemas $(+, +)$, $(-, -)$ han sido poco estudiados y es llamado *modelo no estándar de electroconvección*.

1.6.1. Modelo de electroconvección estándar.

La electroconvección es un fenómeno parecido a la transición de Fréedericksz, en el sentido que se produce al aplicar un voltaje a una película de cristal líquido en fase nemática. Carr [19] y Helfrich [20] describieron la electroconvección teóricamente mediante el mecanismo que lleva su nombre Carr-Helfrich, y establece que cualquier fluctuación del director conduce a la producción de densidad de carga, que a su vez induce fuerzas de Coulomb y en consecuencia transporte de masa, es decir, un flujo de materia.

La dinámica del director es descrita por las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones de Maxwell y la inducción de torques (elástico, eléctrico y viscoso) [21]. La principal formación observada es debida al movimiento de las moléculas en forma circular a lo largo de la celda de vidrio, por esto son llamados *rollos de electroconvección*. Los rollos pueden formarse paralelos al director o formar un ángulo β entre ellos, obteniendo rollos oblicuos. En las figuras 1.6 a)-d) se muestran diferentes patrones de electroconvección en celdas de cristal líquido con anclaje plano de espesor $d = 3-4\mu m$, en diferentes regímenes. Los rollos fueron observados a través de polarizadores lineales cruzados. Las imágenes fueron extraídas del libro escrito por A. Buka et al. [22]. Además, en la Figura 1.6, se muestra el diagrama de un rollo de electroconvección surgido al aplicar un campo eléctrico \mathbf{E} normal a la celda. Las flechas circulares dibujadas en los rollos, muestran la dirección de rotación del flujo de moléculas, y las flechas dibujadas hacia arriba y hacia abajo indican el transporte de carga iónica.

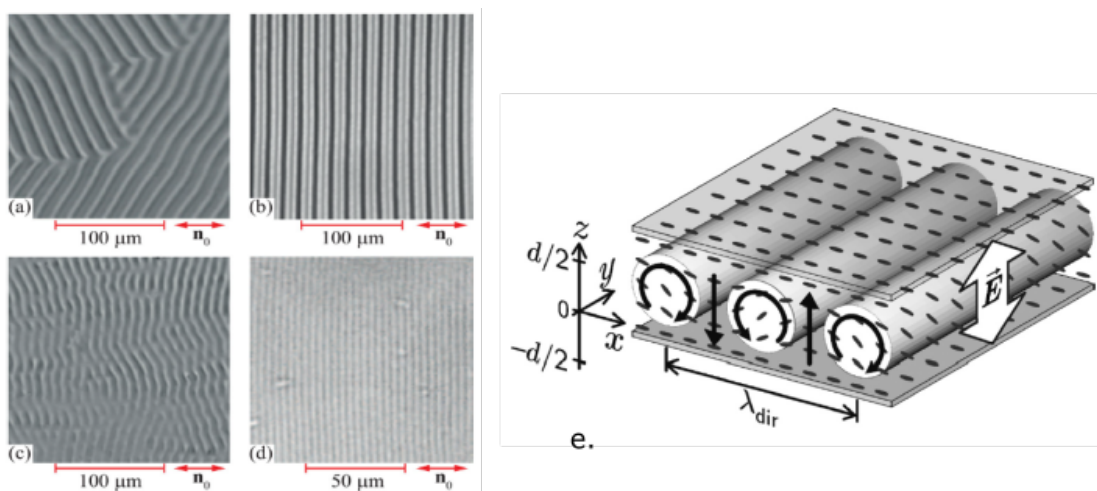


Figura 1.6: Patrones de electroconvección representando rollos a) oblicuos y b) normales en el régimen conductivo; mientras que los rollos c) oblicuos y d) normales estén formado en el régimen dieléctrico [23]. El director esta indicado por n_0 e) Diagrama de rollos de electroconvección, en una celda con anclaje plano. Las moléculas están representadas por las líneas punteadas [24] .

1.6.2. Modelo de electroconvección no estándar.

A pesar que este modelo no explica la formación de patrones en sistemas $(-, -)$, se ha observado la formación de algunas inestabilidades en forma de gusano o rayas, y por primera vez, se reportó la observación de estructuras en forma

de mariposa, sin profundizar en otras características, por ejemplo, su dinámica [25]. Una de las posibles causas por las cuales no se había observado la formación de patrones en el modelo no estándar, es debido al alto voltaje crítico (aproximadamente el doble necesario para la electroconvección estándar) y la anisotropía de conductividad negativa.

La principal diferencia que se ha observado entre los dos modelos de electroconvección es el valor de β , ya que para el modelo estándar, los rollos forman un ángulo pequeño respecto al director ($\beta < 30^\circ$), mientras que para el modelo no estándar toma valores mayores e incluso pueden obtenerse rollos perpendiculares al director.

1.7. Solitones ópticos.

En un medio no lineal pueden ocurrir distintos fenómenos, el más común entre ellos es la variación del índice de refracción según la intensidad irradiada en un sistema, es conocido como *efecto Kerr* y está descrito por: $n(I) = n_0 + n_2 I$, donde n_0 y n_2 son los índices de refracción lineal y no lineal, respectivamente. Otro ejemplo es la generación de ondas solitarias que se propagan en un medio sin modificar su forma y velocidad, este fenómeno fue observado por primera vez por Sir Scott Russell mientras viajaba en un canal en Escocia [26].

A lo largo de la historia, a este fenómeno se le ha nombrado de diferentes formas debido al continuo avance que presentaban los estudios; los primeros trabajos que se inspiraban en la observación de Russell lo llamaron *ondas de traslación*. Posteriormente, se observó que interaccionaban entre ellas en forma de colisiones, mostrando un comportamiento dual onda-partícula, y por esta razón fueron llamadas *solitones* [27]. En los últimos años este fenómeno ha sido ampliamente estudiado en diferentes materiales, especialmente en fibras ópticas. Sin embargo, los cristales líquidos presentan características no lineales, por lo que algunos efectos pueden ser observados; por ejemplo, auto-enfoque, desenfoque, modulación de fase, mezcla de ondas ópticas que incluye generación de armónicos, amplificación de haz, dispersión estimulada, etc. [28]

1.7.1. Nematicones.

La propiedad de no linealidad de los cristales líquidos los han convertido en un buen candidato para el estudio de fenómenos no lineales, como los mencionados anteriormente e incluyendo a los solitones; particularmente los solitones ópticos espaciales generados en un cristal líquido nemático son llamados *nematicones*.

Es común introducir la nomenclatura $(m + n)D$ para referirse a estos objetos, el primer término, m , se refiere a las dimensiones transversales y n a la dirección de propagación del solitón.

La generación de nematicones está ligada con la interacción entre luz-materia y la reorientación del director en el cristal líquido, entonces al propagar un haz de luz se producen diferentes tipos de solitones según la forma del haz incidido. Por esta razón son llamados *solitones tipo Gaussiano, Hermite Gauss y Laguerre-Gauss*. Además, existen diferentes medios en los cuales los nematicones han sido reportados; tales como celdas de cristal líquido con anclaje plano, homeótropo, cristales líquidos quirales, etc. [29]).

Como se mencionó anteriormente, el efecto Kerr es una de las principales características de los medios no lineales, sin embargo, los cristales líquidos en fase nemática no son un medio Kerr, pero de igual forma presentan un índice de refracción variable gracias a la reorientación de sus moléculas inducida por campo. Debido a esto, conservan la propiedad de no linealidad y permiten la generación de solitones.

1.7.2. Solitones espacio-temporales.

Los solitones espacio-temporales son paquetes de ondas que se propagan en un medio no lineal, sin modificar su forma en espacio y tiempo; para la generación de este tipo de ondas es necesario el balance entre efectos lineales (difracción y dispersión) y no lineales (autoenfoco) [30]. Esta competencia entre efectos lineales y no lineales es debida a que los paquetes de onda tienden a expandirse gracias a las diferentes frecuencias que se superponen para formar el paquete, mientras que el efecto no lineal lo comprime.

Otro término para referirse a este tipo de ondas fue introducido por Silberberg en 1990 [31], las llamó *light bullets* (LB, balas de luz), por la semejanza que muestran con esos objetos. Al igual que los solitones ópticos espaciales, en la literatura es común referirse a este tipo de solitones multidimensionales como ondas solitarias $(2 + 1 + 1)D$, donde el “2” se refiere a la dimensión transversal, el primer “1” indica la variable temporal y el segundo “1” representa el número de dimensiones en el que se propaga la LB.

Mediante la ecuación de onda paraxial dependiente del tiempo, la velocidad de grupo de dispersión y considerando el tiempo reducido $\tau = t - \frac{z}{v_g}$, se obtiene la ecuación que describe la dinámica de los solitones, es llamada *ecuación de Schrödinger no lineal* (NLS):

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - N(\Phi)\Phi, \quad (1.37)$$

donde x, y son las coordenadas transversales, z es la dirección de propagación, Φ es la amplitud de la envolvente y $N(\Phi)$ representa la no linealidad del medio. La más común es la de un medio Kerr donde $N(\Phi) = \Phi^2$.

Las soluciones de esta ecuación son de la forma $\Phi(\rho, z) = U(\rho)\exp(ikz)$, donde $\rho^2 = x^2 + y^2 + \tau^2$ son las coordenadas espacio-temporales, y dichas soluciones conllevan a la existencia matemática de solitones. Por ejemplo, considerando la ecuación NLS en dos dimensiones, la solución da origen a los solitones de Townes. Sin embargo, uno de los principales problemas para la generación experimental de solitones espacio-temporales multidimensionales, es su estabilidad en el medio y además, la identificación de materiales ideales, la cual continúa siendo un problema abierto. [32]

S.K. Adhikari reporta el estudio de LB en medios no lineales cúbicos y quínticos ($\chi^{(2)}, \chi^{(5)}$), donde los medios proporcionan enfocamiento y desenfocamiento tipo Kerr, respectivamente. Las propiedades dinámicas de la LB fueron estudiadas, especialmente colisiones frontales a diferentes velocidades. El primer resultado muestra que a grandes velocidades, las colisiones son cuasi elásticas y las LB conservan su perfil. A velocidades medias, al colisionar dos LB pueden desaparecer, y finalmente a velocidades bajas, las colisiones son inelásticas, por lo que dos LB se unen para formar una sola [33].

En este trabajo se muestra la generación de estructuras, surgidas gracias a la aplicación de un campo eléctrico que induce la reorientación de las moléculas del cristal líquido (ver Fig.1.7). Estrictamente, no son consideradas LB ya que no son formadas por un campo óptico y los cristales líquidos nemáticos no son un medio Kerr, sin embargo, su comportamiento es semejante. Las deformaciones del director representan ondas solitarias propagándose en el cristal líquido, conservando su perfil y velocidad constante en espacio y tiempo, además interactúan entre ellas por medio de colisiones, de forma semejante al resultado reportado por S.K. Adhikari. Por estas razones se puede realizar una comparación entre solitones espacio temporales y las *balas de director*, nombradas así por primera vez por Bing-Xiang et al. [1].

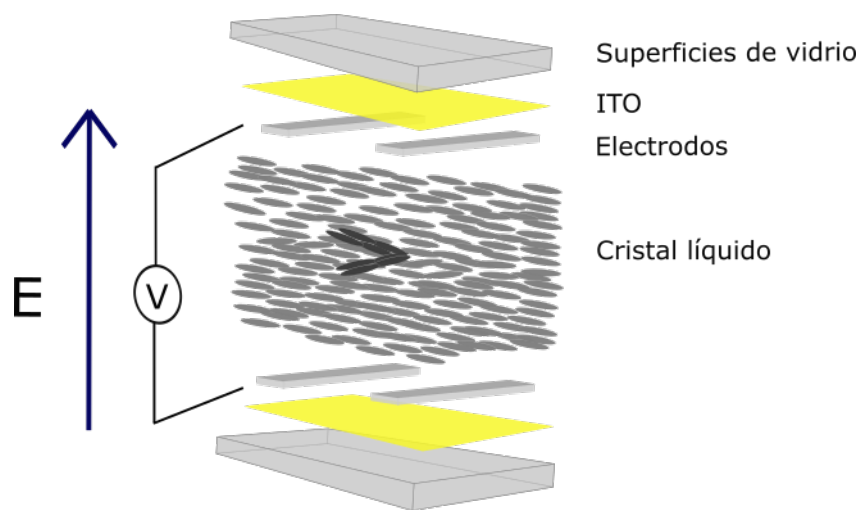


Figura 1.7: Representación gráfica de balas de director (moléculas oscuras) formadas gracias a la aplicación de un campo eléctrico perpendicular a las superficies, en una celda de cristal líquido con anclaje plano.

Capítulo 2

Película de cristal líquido con anclaje plano.

2.1. Arreglo experimental.

El estudio experimental de cristales líquidos se realiza mediante elementos ópticos capaces de analizar la polarización del campo incidente y la producida por las moléculas del cristal líquido, por lo que la herramienta comúnmente usada es un microscopio de polarización.

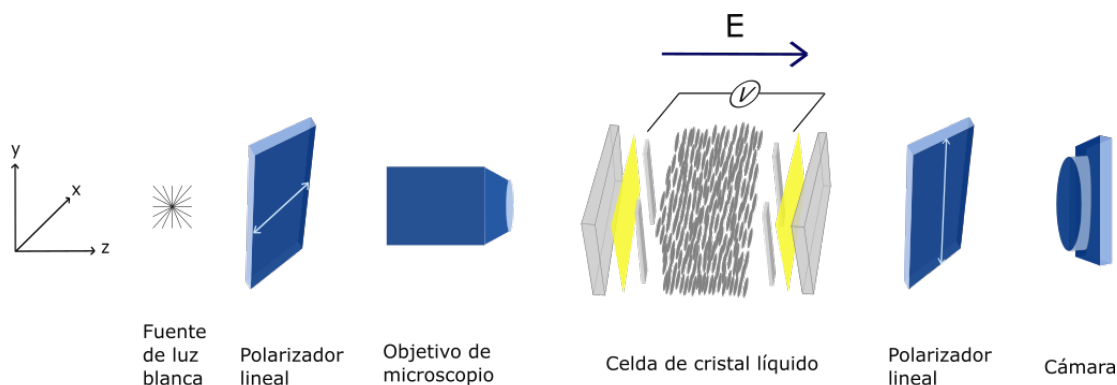


Figura 2.1: Arreglo experimental general, los ejes ópticos están representados por las líneas dibujadas en los polarizadores lineales. El cristal líquido CCN-47 requiere elevar su temperatura para estar en fase nemática, por lo que la celda se encuentra dentro de una cámara de metal donde su temperatura es regulada por el controlador de temperatura Eurotherm P116.

El arreglo experimental general consiste en una fuente de luz blanca incidiendo a lo largo del eje z para iluminar la celda, dos polarizadores lineales con sus ejes de transmisión cruzados; al primero de ellos es común llamarlo *generador de estados de polarización* y al segundo *analizador*. La visualización del sistema está a cargo de un objetivo Olympus x10 de larga distancia de trabajo ($20mm$), o una lente positiva de $50mm$ de distancia focal, que proyecta la imagen formada en el sensor (dimensiones de $4mm \times 3mm$) de una cámara ThorLabs (ver Figura 2.1).

Durante el desarrollo del estudio se utilizaron dos cristales líquidos calamíticos termotrópicos confinados en celdas, donde sus superficies están tratadas con diferentes condiciones de anclaje. La fórmula química del primero es 4-butyl-4-heptyl-bicyclohexyl-4-carbonitrile (CCN-47) con anisotropía dieléctrica y conductiva negativa (particularmente, a $4kHz$ y $45^\circ C$, $\Delta\epsilon = -4,4$, $\Delta\sigma = -1,2 \times 10^{-9}\Omega^{-1}m^{-1}$); además cuenta con baja birrefringencia $n_e - n_o \approx 0,03$. El diagrama de fase del cristal líquido es determinado: la transición de fase esméctica a nemática se presenta a $29^\circ C$, mientras que la transición a la fase isotrópica ocurre a $61^\circ C$; por lo tanto el rango de temperatura de la fase nemática es de $29^\circ C - 61^\circ C$. Fue necesario introducir la celda de cristal líquido dentro de una caja metálica, la temperatura del interior fue regulada por el controlador Eurotherm P116.

Para facilitar la manipulación experimental, y como parte de la optimización del sistema, el segundo cristal líquido utilizado fue QY-VA 201305, nombrado así por el fabricante CanaanChem. Tiene propiedades similares al CCN-47 ($\Delta\epsilon$ (1 KHz, $25^\circ C$) = $-2,22$, $\Delta n(589nm, 20^\circ C) = n_e - n_o = 1,5445 - 1,4815 = 0,063$); sin embargo, la fase nemática se encuentra en un amplio intervalo de temperatura. La transición esméctica-nemática ocurre a $-40^\circ C$, y la transición a la fase isotrópica, o también llamada *punto de clarificación*, se obtiene a $97^\circ C$, por lo tanto es posible trabajar con este cristal líquido en fase nemática a temperatura ambiente (aproximadamente $20^\circ C$).

2.2. Fabricación de celdas de cristal líquido.

En todas las celdas fabricadas en el laboratorio, los electrodos fueron adheridos a las superficies de vidrio recubiertas con el substrato ITO (Indium Tin Oxide), para aplicar un campo eléctrico sinusoidal perpendicularmente a las superficies, es decir, paralelo al eje z .

El éxito de la construcción de un sistema que encapsule al cristal líquido, depende del control de distintos factores; la limpieza de las superficies de vidrio, juega un papel fundamental. Debe de evitarse cualquier tipo de interacción entre las superficies y el ambiente, ya que la presencia de cualquier elemento (polvo, pelusa, etc.) puede alterar significativamente la orientación de las moléculas, por

esta razón, las superficies fueron limpiadas delicadamente con chorros de alcohol.

Posteriormente, entre las dos superficies de vidrio se colocaron gotas de pegamento y espaciadores de diferente espesor ($9\mu m$, $13\mu m$, $23\mu m$). Es necesario presionar uniformemente la superficie superior para que el espesor de la celda sea uniforme, esto se realizó con tres distintos procedimientos. El primero fue colocar un objeto suficientemente pesado en el centro de la celda y dejarlo reposar durante algunos minutos, pero constantemente el espesor de la celda no era uniforme. El segundo consistió en oprimir los extremos de la celda con dos clips, sin embargo, ambos clips no presionaban con la misma fuerza y el espesor de la celda tampoco era uniforme. Por último, se contruyó un sistema capaz de presionar la celda de vidrio de forma controlada, consiste en un mecanismo similar a una prensa compuesta por una plataforma ajustable, en su extremo cuenta con una lámina de metal circular plana para presionar uniformemente la superficie superior de la celda. Una rápida comprobación de la uniformidad del espesor de la celda consiste en observar el patrón de interferencia formado en su centro, al ser iluminado con luz blanca, como con alguna lámpara en el laboratorio, de esta forma al no ser observado el patrón de interferencia, se puede modificar inmediatamente la presión sobre la celda. Debido a la libertad con la que se puede ajustar la presión ejercida sobre la celda, la mayor parte de ellas fueron contruidas con este último método descrito.

El llenado de la celda requiere colocar algunas gotas del cristal líquido en uno de sus extremos y por capilaridad, se dispersará por toda la celda, formando una película delgada de cristal líquido. En el caso de CCN-47, por su alta viscosidad a temperatura ambiente, se recomienda elevar su temperatura hasta alcanzar su fase isotrópica, reduciendo considerablemente su viscosidad; caso contrario al QY-VA 201305, que se introdujo a temperatura ambiente, por su baja viscosidad.

Para la fabricación de una celda con anclaje plano uniforme, existen diversas opciones para tratar las superficies de vidrio, la técnica más utilizada se realiza por frotamiento, por ejemplo con un paño de terciopelo.

2.3. Mapa azimutal de una placa-q.

Existen diferentes técnicas para orientar espacialmente las moléculas de un cristal líquido de forma no homogénea, es decir, que el eje óptico sea variante en el plano de las superficies, esto se puede realizar a través de una capa plana anisotrópica uniaxial transparente, también conocida como *placa-q* (o en inglés *q-plate*) [34]. Matemáticamente está descrita por la Ec.1.34. Una de las principales características de estos elementos, específicamente para $q = 1$, es el cambio del momento angular orbital de la luz incidente, es decir, la polarización de la luz

incidente controla el signo de la helicidad orbital del frente de onda de salida [35, 36].

Con el objetivo de familiarizarse con los sistemas de imágenes de polarización, se caracterizó el mapa del ángulo azimutal de un elemento óptico birrefringente, con diferentes métodos. Se utilizó una placa-q fabricada por BeamCo de carga topológica $q = 1$, sintonizada para $633nm$, la descripción matemática está a cargo de la Ec. 1.34. Luego, de la Ec. 1.4, se expresa el ángulo azimutal de la elipse de polarización en términos de los parámetros de Stokes,

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2} \arctan \frac{S_2}{S_1}. \quad (2.1)$$

En la Figura 2.2 se muestra la caracterización del ángulo azimutal de polarización de una placa-q ($q = 1$) por tres métodos descritos posteriormente.

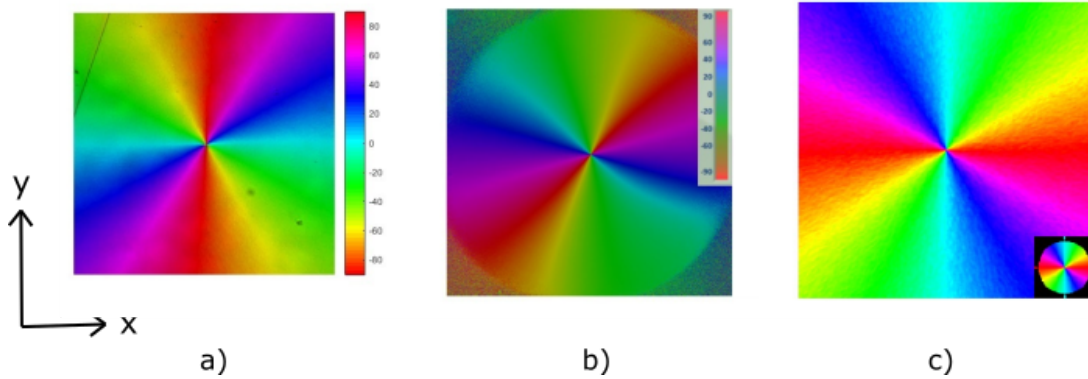


Figura 2.2: Mapa del ángulo azimutal de polarización de una placa-q ($q = 1$), adquirido por diferentes métodos: b) Polarimetría de Stokes convencional, c) Cámara Salsa, d) Sistema de imágenes AbrioTM.

El primer método para obtener el mapa azimutal de la placa-q fue calcular los parámetros de Stokes “manualmente”, es decir, capturar una imagen de la distribución de intensidad de cada parámetro y posteriormente, procesar las imágenes con un script en Matlab, el cual calcula $\bar{\Psi}$ para cada pixel de la cámara CCD. Experimentalmente se utiliza un generador y analizador de estados de polarización, el eje óptico de este último se rota según el parámetro que se desee medir.

El siguiente dispositivo usado para verificar el experimento fue la cámara de polarización *Salsa* [37], es un sistema complejo que registra y procesa automáticamente las distribuciones de intensidad de un elemento óptico para calcular los parámetros de Stokes, así como grados de polarización. En este dispositivo se debe

indicar si la luz incidida es polarizada circularmente derecha o izquierda, ya que el mapa azimutal desplegado por la cámara Salsa debe rotarse 45° o 135° en sentido de las manecillas del reloj, respectivamente. En este experimento se utilizó luz polarizada circularmente izquierda, por lo que el mapa azimutal debe rotarse 135° , es decir, $\bar{\Psi}_{q\text{-plate}} = \bar{\Psi}_{Salsa} + 135^\circ$, o equivalentemente, $\bar{\Psi}_{q\text{-plate}} = \bar{\Psi}_{Salsa} - 45^\circ$. Después de realizar esta consideración, se observa que los mapas azimutales de la placa-q, desplegados por el método manual y por la cámara Salsa conciden.

El último recurso utilizado fue el dispositivo AbrioTM [38], es un sistema de imágenes que está adaptado para trabajar con un microscopio (Olympus IX71 invertido) y a través de su propio software, es capaz de medir y analizar la retardancia de cada pixel en cuestión de segundos. Además, es posible visualizar el mapa del ángulo azimutal del elemento óptico. De acuerdo al mapa de color, mostrado en la esquina inferior derecha de la Figura 2.2 c), se observa que el mapa azimutal de la placa-q coincide con los anteriores. De esta forma, se cuenta con tres métodos diferentes para realizar la medición del ángulo azimutal de polarización de un elemento birrefringente.

La determinación del estado de polarización de un elemento birrefringente, como los cristales líquidos, permite obtener información acerca de la orientación de sus moléculas; ya que estas modifican la polarización incidente en la celda. La distribución de las moléculas en una placa-q con carga topológica $q = 1$ es radial (ver Figura 1.4 d)), entonces al analizar su mapa azimutal, se asocian los colores de la barra con el ángulo α formado por el eje principal de las moléculas y el eje x . Por ejemplo, en la Figura 2.2, la región del mapa azimutal representada por el color cyan, indica que las moléculas se encuentran paralelas al eje x ($\alpha = 0^\circ$); mientras que la región en color rojo representa moléculas posicionadas verticalmente, es decir, paralelas al eje y ($\alpha = 90^\circ$).

2.4. Generación de estructuras en una celda con anclaje plano uniforme.

El trabajo de Bing-Xiang et al. [1] informa sobre el surgimiento de deformaciones elásticas localizadas, con características similares a un solitón, en una celda de cristal líquido CCN-47 con anclaje plano homogéneo. La forma de estas estructuras es parecida a una mariposa y su movimiento es perpendicular al director, donde su velocidad depende del cuadrado del campo aplicado. La continuación del trabajo de investigación consistió en la reproducción de estos intrigantes y frescos resultados; se utilizó una celda comercial fabricada por EHC Japan de espesor $d \approx 8\mu m$, se llenó con el cristal líquido CCN-47 y luego se pegaron electrodos a las superficies cubiertas con ITO.

Explorando la muestra en voltaje y frecuencia, se observaron las balas de director en el rango de frecuencia $100 - 1000Hz$ y en voltaje de $2 - 40V_{rms}$. El dominio de “rayas”, asociado con el fenómeno de electroconvección fue observado, así como las diferentes interacciones entre ellas: emisión, absorción y colisiones. Los resultados son mostrados en las secuencias de imágenes de la Figura 2.3 y en el Video Complementario 1. La configuración experimental utilizada es mostrada en la Figura 2.1, omitiendo el filtro y las placas retardadoras cuarto de onda, por lo que los elementos ópticos principales son los polarizadores lineales con ejes de transmisión cruzados.

Cada evento comienza en t_0 , la siguiente imagen se registró t_1 más tarde y la tercera imagen se capturó después de t_2 . La formación de las balas de director se debe al rompimiento de la simetría del estado inicial del director, la cual resulta en una rápida propagación de la reorientación de las moléculas (perpendicular al estado inicial). La geometría de las estructuras es en forma de mariposa, ya que se observa una cabeza y dos alas; el director se inclina hacia arriba y hacia abajo en cada una de ellas, por lo que pareciera que la bala de director aleteara. También se pueden observar las fuentes y los sumideros, los cuales están representados en forma de cruz formados por cuatro “puntos”, dos brillantes y dos oscuros.

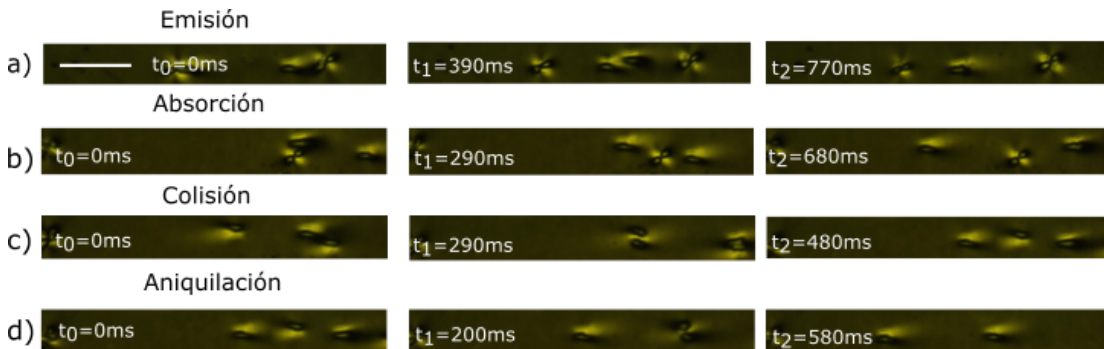


Figura 2.3: Secuencia de imágenes que representan los eventos de a) emisión, b) absorción, c) colisión y d) aniquilación de balas de director. Las estructuras se formaron en el cristal líquido CCN-47 (a $T = 50^{\circ}C$), a $350Hz$ y $22,24V_{rms}$. Las imágenes fueron adquiridas a través de polarizadores lineales cruzados. Barra de escala $50\mu m$.

En la primera imagen de la secuencia del evento de emisión, una bala de director emerge de la desestabilización del medio, provocada por irregularidades en la superficie, y se propaga hacia la izquierda, en dirección a otro sumidero; además se observa que la fuente permanece en la misma posición. El evento de absorción se muestra en la siguiente secuencia de imágenes, una bala de director se propaga desde el extremo derecho hacia el izquierdo, y en la tercer imagen (es decir, después de $t_2 = 680ms$) la estructura ya no es visible porque fue absorbida

por el sumidero.

Las balas de director pueden interactuar entre ellas, colisionando frente a frente, de forma elástica o inelástica. En la primera imagen de la secuencia c), dos balas de director viajan en direcciones opuestas, luego la segunda imagen muestra la colisión entre ellas y la tercera imagen muestra cómo las estructuras recuperan su perfil después de la colisión y continúan su camino.

Finalmente, se observó la aniquilación de estructuras después de colisionar, en este caso, se representa la aniquilación solo de una estructura. De igual forma, las balas de director se propagan en dirección opuesta y al colisionar, la bala de director izquierda aniquila a la otra y continúa propagándose hacia la izquierda.

Después de observar las balas de director, se programó un script en Matlab, el cual permitiría su seguimiento obteniendo su trayectoria y en consecuencia, su rapidez de propagación. La expresión matemática para calcular la rapidez, propuesta por Bing-Xiang et al. [1], indica que es proporcional al cuadrado del voltaje incidente: $v = \beta E^2$, donde $\beta = 1,5 \times 10^{-17} m^3 V^{-2} s^{-1}$. Se midió la velocidad de diez balas de director en una misma región, obteniendo así la magnitud de la velocidad promedio de ellas, $\bar{v} = 161,72 \frac{\mu m}{s}$. Este resultado coincide con el predicho por Bing-Xiang et al., ya que la relación entre la velocidad de las estructuras y el grosor de una celda cristal de líquido con anclaje plano la definen como $v \approx (10 - 50)d s^{-1}$, en este caso, el espesor de la celda es $d \approx 8 \mu m$, que corresponde a $v \approx 80 - 400 \frac{\mu m}{s}$.

La primera parte del proyecto, que consistió en comprobar los resultados obtenidos por Bing-Xiang et al. [1] se concluyó satisfactoriamente al observar todos los eventos reportados y en adición, elaborar un código de seguimiento; el siguiente paso es generalizar el resultado anterior. Debido a las características del cristal líquido QY-VA 201305 (mencionadas en la sección 2.1), se introdujo en una celda con anclaje plano uniforme, se escaneó en frecuencia y voltaje en búsqueda de la formación de estructuras similares a las observadas en el cristal líquido CCN-47. La principal diferencia entre estos dos cristales líquidos es que el QY-VA 201305 presenta su fase nemática a temperatura ambiente, por lo que la visualización de las balas de director puede realizarse con un microscopio. Además, a comparación del cristal líquido CCN-47, las estructuras se forman a frecuencias más bajas.

En la Figura 2.4 se muestra la presencia de balas de director, su forma y dirección de desplazamiento se conservan. Además, se observaron los eventos de nucleación, colisiones y aniquilación, previamente descritos. De igual forma, las balas de director existen en un régimen de frecuencias y voltaje, donde incluso pueden coexistir con el régimen de “rayas”, causadas por la electroconvección.

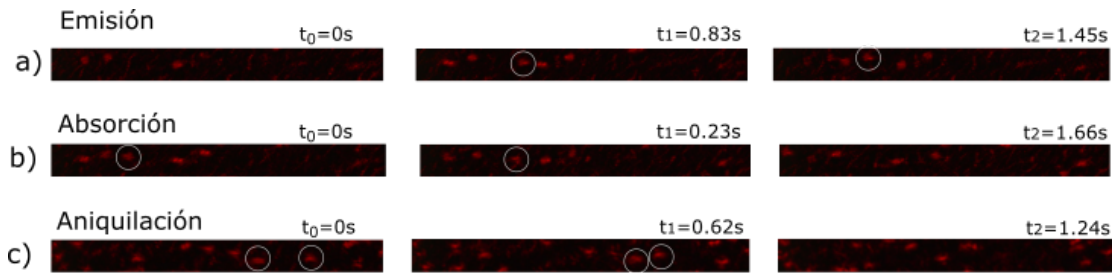


Figura 2.4: Secuencia de imágenes que muestran los eventos: a) nucleación, b) absorción y c) aniquilación de balas de director, en el cristal líquido QY-VA 201305. Las imágenes fueron adquiridas a través de polarizadores lineales cruzados y un filtro de longitud de onda $\lambda = 680nm$.

A pesar de que las imágenes mostradas no son tan claras, como en la Figura 2.3, pudieron observarse todos los eventos descritos anteriormente (nucleación, absorción, aniquilación y colisiones), así como la geometría de las estructuras. En el Video Complementario 2 se presenta el video de donde las imágenes de la Figura 2.4 fueron extraídas, y además se puede observar que, en este caso, las balas de director y el régimen de “rayas” coexisten.

2.5. Generación de estructuras en una celda con anclaje plano no uniforme.

La condición de anclaje plano permite dos configuraciones de la orientación en las moléculas: uniforme o no uniforme. En este último, las moléculas del cristal líquido son paralelas a las superficies pero el director local apunta en diferentes direcciones, permitiendo distintas distribuciones en el director, por ejemplo las mostradas en la Figura 1.4.

El siguiente paso en el presente trabajo de investigación consistió en explorar la formación de estructuras en diferentes configuraciones del director con anclaje plano, particularmente en defectos aislados, por lo que de acuerdo a sus características, una placa- q fue un buen candidato. Se eligió explorar en frecuencia y voltaje el centro de una placa- q de carga topológica $q = \frac{1}{2}$, donde el director es representado en la Figura 1.4 b).

Estructuras localizadas, similares a las descritas en el experimento anterior, fueron observadas propagándose en dirección perpendicular a las líneas del director, por lo que se conserva esta característica en condiciones de anclaje plano.

Desafortunadamente, la muestra presentó una disclinación en forma de pared que impidió la formación y el correcto desplazamiento de las estructuras, ya que gran parte de ellas interactuaban con la disclinación.

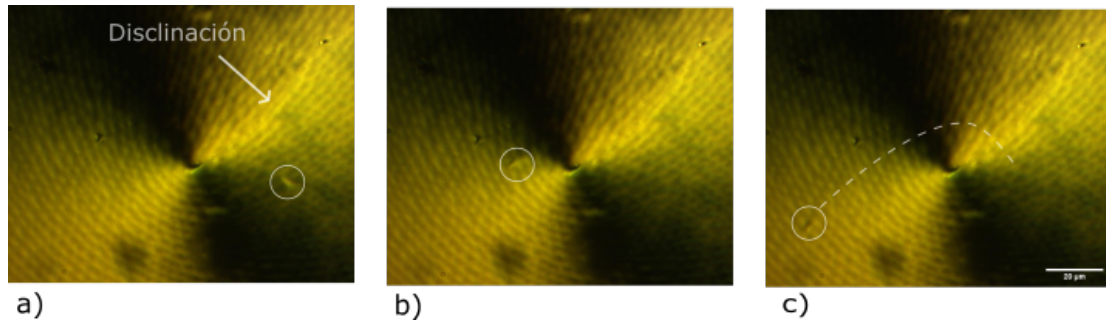


Figura 2.5: En las figuras a)-c) se muestra la distribución de intensidad de una q-plate de carga topológica $q = \frac{1}{2}$. La disclinación se presenta con una flecha en la figura a), mientras que la dinámica de la estructura, señalada dentro de una circunferencia, se muestra en las imágenes posteriores. La bala de director fue formada al aplicar un campo eléctrico ($f = 650H$, $V = 22,4V_{rms}$) al cristal líquido CCN-47 ($T = 50^{\circ}C$).

En la muestra se observó la generación de muchas estructuras simultáneamente, al igual que algunas aisladas, sin embargo, con el fin de ilustrar de mejor forma este fenómeno, en la Figura 2.5 se muestra la propagación de una sola estructura en el cristal líquido CCN-47.

La técnica de fotoalineamiento es otro método utilizado para ordenar las moléculas de un cristal líquido en una celda, requiere recubrir las superficies de vidrio con un substrato fotosensible; por ejemplo azobenceno, capaz de reorientar las moléculas bajo la aplicación de un haz polarizado, capa por capa según se desee. Este método no tradicional, presenta varias ventajas sobre el método de frotado de superficies, porque en primera instancia no involucra contacto mecánico con las superficies, por lo que no permite la acumulación de cargas estáticas y la producción de polvo en las superficies. Otra ventaja al utilizar el fotoalineamiento en comparación al frotado de las superficies, es que el costo de producción de las superficies tratadas es menor, ya que para frotar las superficies son necesarias grandes máquinas que tengan control y precisión en el frotado. La principal ventaja observada es que proporciona un gran control sobre el alineamiento de las moléculas e incluso, en algunos casos, el anclaje puede ser reversible. [39]

Celdas fabricadas con la técnica de fotoalineamiento fueron recibidas por parte de la Universidad de Osaka, las dimensiones del patrón inscrito dentro de las

celdas, son de $2\text{mm} \times 3\text{mm}$ y contienen defectos topológicos localizados y aislados de carga $q = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ (ver Figura 2.6). Fueron llenadas con los cristales líquidos CCN-47 y QY-VA 201305, se examinaron en frecuencia y voltaje, pero no se observaron las balas de director. La ausencia de formación de estructuras se atribuye al fuerte anclaje impuesto por las superficies, ya que el voltaje aplicado no logra desestabilizar al director.

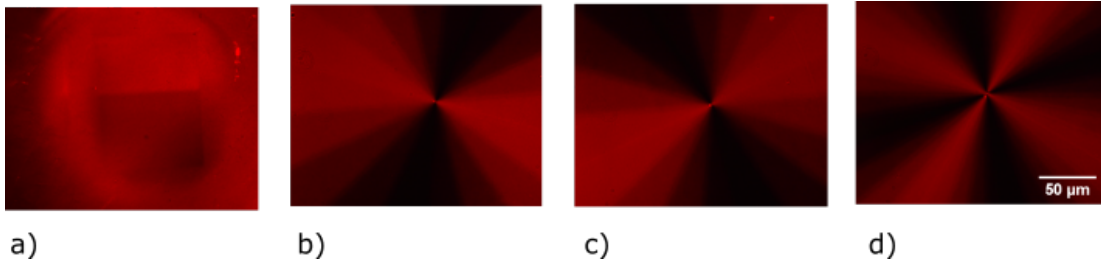


Figura 2.6: Disclinaciones con cargas topológicas: a) $q = 0$, b) $q = \frac{1}{2}$, c) $q = -\frac{1}{2}$ y d) $q = -1$, fabricadas por el método de fotoalineamiento. Las imágenes fueron adquiridas a través de polarizadores lineales cruzados y un filtro de longitud de onda $\lambda = 680\text{nm}$.

2.5.1. Textura Schlieren.

En secciones anteriores se ha discutido acerca del tratamiento de las superficies de una celda de cristal líquido, sin embargo, no se ha considerado el hecho de llenar una celda que no presente un tratamiento en sus superficies. A menudo se llena una celda sin tratar para observar el comportamiento general de algún cristal líquido; las moléculas se acomodan de forma aleatoria sobre las superficies, pero el director permanece paralelo a ellas, esta distribución espacial del director es llamada *textura Schlieren*.

La característica principal de esta textura es la formación de un conjunto de singularidades con diferentes cargas topológicas, las cuales se pueden observar con un microscopio de polarización, por esta razón fue otro candidato para examinar la generación de estructuras tipo balas de director. En la Figura 2.7 se presenta una imagen típica de la textura Schlieren, donde se puede observar la red de defectos topológicos conectados por ramas brillantes y oscuras, que de acuerdo a la configuración experimental, el director es perpendicular o paralelo al eje óptico del analizador. De acuerdo a la distribución espacial del director y la orientación del eje óptico del analizador, los defectos con cuatro ramas, oscuras y brillantes,

corresponden a la carga topológica $q = \pm 1$ (uno de ellos es mostrado en la Figura 2.7 con el número 1), mientras que los defectos con dos ramas corresponden a la carga topológica $q = \pm \frac{1}{2}$ (mostrado en la imagen con el número 2). La textura también presenta dinámica en las disclinaciones, por lo que se observa su mutua aniquilación, representada por circuitos cerrados (ejemplificado en la Figura 2.7 con el número 3).

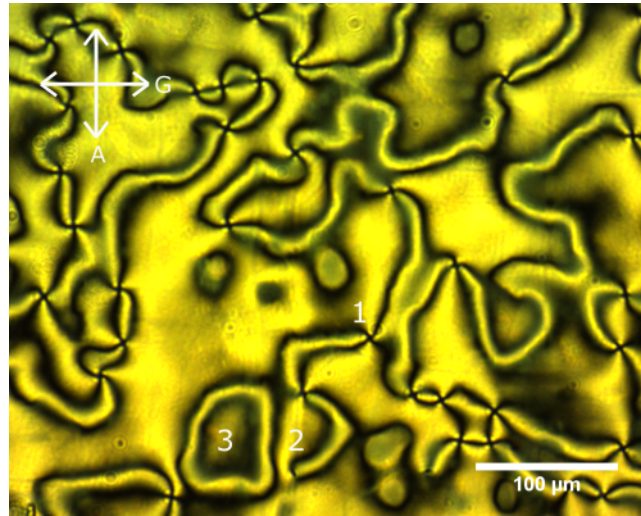


Figura 2.7: Textura Schlieren observada en el cristal líquido CCN-47 (a temperatura de 50°C) a través de polarizadores lineales cruzados, donde los ejes de transmisión del analizador y generador están representados por las flechas marcadas con las letras A y G, respectivamente. La textura se obtuvo al aplicar un voltaje de $1V$. El espesor de la celda es $d \approx 13\mu\text{m}$.

Como se mencionó anteriormente, la preparación de la celda no requiere un tratamiento en particular, sin embargo, para asegurar que las superficies de vidrio sean planas, se alisaron mediante una película delgada de recubrimiento, colocada por medio de un spin coater. El surfactante utilizado fue PVA (por sus siglas en inglés, Polyvinyl alcohol). Además, se realizó una comparación entre superficies con y sin limpiamiento por plasma, utilizado para eliminar organismos vivos sobre las superficies. Después de depositar las superficies dentro del dispositivo *Plasma Treatment* durante 25 minutos, como lo recomienda el manual de usuario, y construir las celdas, se observó que la calidad de la textura mejora notablemente cuando las superficies son sometidas al limpiamiento con plasma.

Posteriormente se exploró la generación de estructuras en esa muestra, pero no se observó ninguna, solamente un patrón de desestabilización del medio. Luego de trabajar en diversas ocasiones con esta muestra, se detectaron algunas impurezas

dentro de la celda, del orden de algunas micras, las cuales se desplazaban gracias a la desestabilización del medio.

Capítulo 3

Película de cristal líquido con anclaje homeotrópico.

Hasta el momento, se ha estudiado el comportamiento de las moléculas de un cristal líquido en una celda con anclaje plano, no obstante, los fenómenos observados no se limitan a esta configuración. La condición de anclaje homeotrópico implica que las moléculas estén orientadas perpendicularmente a las superficies de la celda, y de igual forma que en el caso plano, al aplicar un campo externo, las moléculas se reorientan de forma perpendicular o paralela al director (según la anisotropía del medio), por lo que el estudio se extrapola a otra condición de anclaje. De acuerdo a los eventos observados, se espera obtener resultados similares, es decir, que al aplicar un campo superior a la transición de Fréedericksz, para provocar la deformación local del director, se formen y propaguen estructuras moviéndose perpendicularmente al director, similares a las balas de director reportadas anteriormente.

3.1. Fabricación de celdas.

El método comúnmente utilizado para fabricar celdas con anclaje homeotrópico consiste en tratar las superficies de vidrio con un surfactante compuesto por moléculas anfífilas, es decir, un extremo de la molécula es soluble en agua, mientras que el otro extremo es hidrófobo. De esta forma la parte hidrofílica es anclada a la superficie y la parte no hidrófoba apunta perpendicularmente a la superficie, de este modo, las moléculas estarán atrapadas entre las colas de carbono del surfactante, permaneciendo perpendicularmente a las superficies (ver Figura 3.1). En el laboratorio se fabricaron celdas de cristal líquido homeotrópicas con el método descrito anteriormente; se trataron las superficies de vidrio cubiertas con una

película de ITO, con el surfactante Bromuro de hexadeciltrimetilamonio, que por sus siglas en inglés (Cetyl Trimethyl Ammonium Bromide) recibe el nombre de CTAB. Fue diluido en agua (en proporción de $0,2g/L$), con la ayuda de un agitador durante aproximadamente 30 minutos, posteriormente las superficies fueron introducidas y cubiertas totalmente por la solución y se dejaron reposar durante algunas horas. Luego, se retiró el surfactante gentilmente y las superficies fueron secadas al introducirlas en un horno durante varias horas.

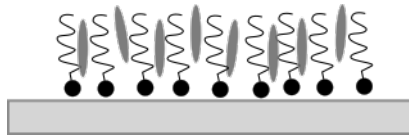


Figura 3.1: Representación gráfica de moléculas anfifílicas adheridas a una superficie de vidrio proporcionando anclaje homeotrópico a una celda de cristal líquido.

Además de fabricar celdas con el método descrito anteriormente, se realizó una configuración alternativa a la capilar; se esparcieron y depositaron gotas de cristal líquido sobre las superficies. La forma más eficiente de realizarlo fue mediante una jeringa con aguja microlítica. De acuerdo a la cantidad de cristal líquido depositado, se obtuvieron gotas de diferentes radios, observando la formación de un conjunto de nudos o uno aislado. Particularmente, en las celdas fabricadas en el laboratorio, utilizando el cristal líquido CCN-47, se observaron nudos aislados para gotas de radio $r \approx 30 - 220\mu m$, mientras que para radios superiores ($r \approx 250\mu m$) se observó una red de nudos como en el caso capilar. Cabe destacar que algunas gotas depositadas fueron tan pequeñas que para la observación del nudo no fue necesario la aplicación de un campo externo, ya que las mismas condiciones de frontera proporcionaban las condiciones adecuadas para la formación de un nudo. En la figura 3.2 c) se muestra un ejemplo de la formación de un nudo aislado en una gota, esa muestra fue fabricada completamente en el laboratorio de recibimiento.

La generación de nudos en una celda de cristal líquido se obtiene al aplicar un campo externo perpendicular a las superficies, por lo que no se limita a un campo eléctrico, también pueden inducirse por un campo magnético ($B_c < B$). De acuerdo a una técnica recientemente introducida, en el laboratorio de recibimiento [40], puede aislarse únicamente un nudo en una red de defectos. (ver Figura 3.2 b)). Localmente, los nudos generados por un campo magnético son llamados *bumbilics*.

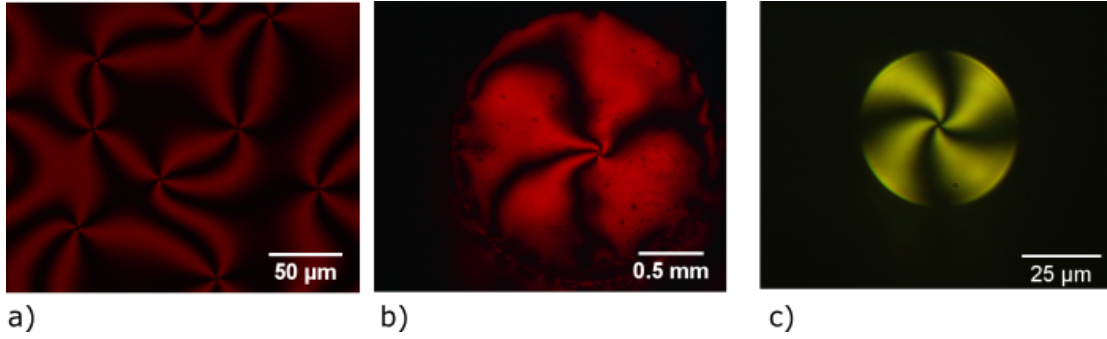


Figura 3.2: Diferentes configuraciones de una celda bajo la condición de anclaje homeótrofo. a) Imagen típica de una red de nudos, al aplicar un campo eléctrico superior a la transición de Fréedericksz. En particular, se utilizó una celda comercial llena con CCN-47, de grosor $d = 19,65\mu m$, el voltaje umbral para observar la red de nudos es aproximadamente $1V_{rms}$. b) Nudo aislado al colocar un imán (radio interno $2mm$, radio externo $4mm$, N40) en la parte superior de la superficie de la muestra. c) Gota de cristal líquido CCN-47 de radio $r \approx 49\mu m$, el grosor de la celda es $d \approx 13\mu m$

3.2. Mapa del ángulo azimutal de nudos y bum-bilic.

Para caracterizar el ángulo azimutal de una película de cristal líquido (MLC 660) con anclaje homeótrofo, se utilizó una celda con espesor $d = 16,5\mu m$. La distribución de nudos fue lograda al aplicar un voltaje superior a la transición de Fréedericksz, luego la muestra se dejó reposar algunos segundos para que los nudos más cercanos se aniquilen. El método usado para adquirir las imágenes, fue “manual”; es decir, rotando el analizador de estados de polarización para obtener los parámetros de Stokes, por lo que al tomar dos imágenes consecutivas, la distribución de intensidad no era la misma, ya que los nudos se movían ligeramente. Por esta razón en la Figura 3.3 a) parece que los defectos topológicos tuvieran distintos centros.

A partir de la información acerca de la polarización de la muestra, se puede determinar el signo de la carga topológica analizando la Figura 3.3, usando la barra de colores. Considerando un circuito de Burger en un solo defecto, cuando Ψ y ϕ aumentan, entonces la carga topológica es positiva. En el otro caso, cuando ϕ aumenta pero Ψ disminuye, entonces la carga del defecto es negativa. Por lo tanto, los nudos marcados en la imagen con el número 1, 3 son de carga topológica $q = 1$ y los marcados con el número 2, 4, 5 son de carga $q = -1$. También se puede

observar el emparejamiento de nudos, ya que el vecino de cada defecto topológico con carga $q = 1$, es uno con carga $q = -1$.

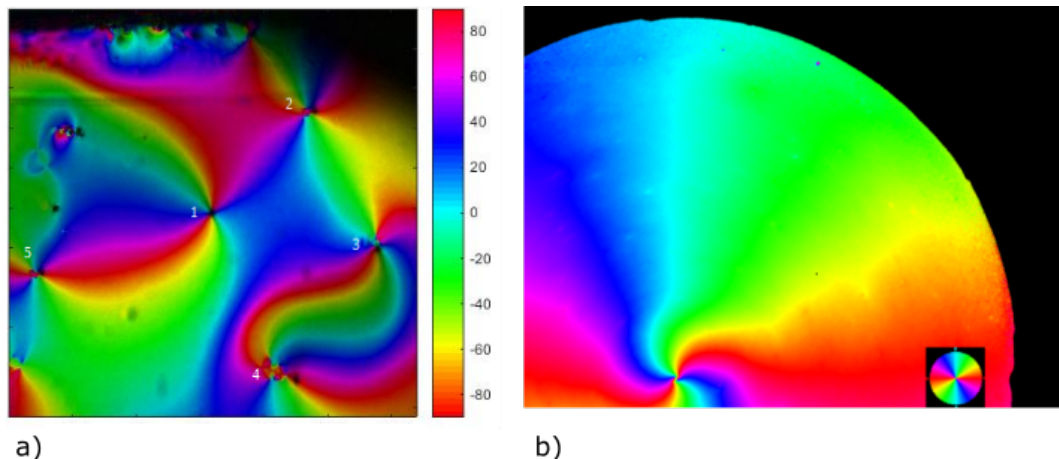


Figura 3.3: Mapa del ángulo azimutal de polarización de a) una red de defectos topológicos tipo nudo y b) un bumbilic generado por campo magnético.

En la Figura 2.2 d), se mostró el mapa azimutal de polarización de una placa- q adquirida con el dispositivo AbrioTM, sin embargo, la primer medición realizada con este dispositivo no coincidía con los otros experimentos, por lo que se decidió corroborar el resultado obtenido con otro elemento óptico conocido. El elemento escogido fue un bumbilic, debido a que lejos de su centro, las moléculas deben estar orientadas radialmente. Es suficiente observar un cuarto de la imagen para verificar el comportamiento radial de las moléculas.

El mapa del ángulo azimutal se obtuvo rotando 45° la medición hecha por AbrioTM, por lo que es necesario introducir un ángulo de compensación para obtener el mapa azimutal correcto y que coincida con las mediciones realizadas con los otros métodos. La adaptación del dispositivo AbrioTM al microscopio, requiere colocar un modulador espacial de luz en el sistema óptico de microscopio, sin embargo, no está colocado de forma paralela, sino, formando un ángulo de 45° . Por esta razón se introduce el ángulo de compensación.

3.3. Generación de estructuras.

La dirección del estudio se dirigió hacia las muestras con anclaje homeótropo debido a la configuración radial del director, en adición a ello se desea comprobar la nucleación de estructuras en defectos topológicos 3D, a diferencia del caso plano,

los cuales son formados en las superficies. Entonces, si las estructuras conservan la dirección de desplazamiento, deberían moverse alrededor del centro del nudo.

La red de nudos es un buen candidato para verificar la formación de estructuras en toda la celda, sin embargo, debido a la generación espontánea y aniquilación de nudos hace que el experimento sea irreproducible, es decir, si se aplica un campo superior a B_c , se obtendrá una red de nudos, pero no se garantiza que sea la misma al aplicar el mismo campo en un tiempo diferente. Con el objeto de construir un experimento reproducible, y además, donde se pueda localizar y aislar un defecto, se añadió un campo magnético a la red de nudos, proporcionado por un imán de neodimio de diámetro interior $2mm$, radio exterior $6mm$ y de espesor $8mm$ con N50, produciendo un bumbilic aislado. Debido a impurezas presentes en la celda, algunos nudos permanecieron presentes en la muestra, por lo que el bumbilic no era completamente estático.

Todas las muestras mostradas en la Figura 3.2 fueron escaneadas en frecuencia y voltaje, como en el caso plano; en la gota de cristal líquido se observó únicamente una deformación dinámica del director, mientras que se identificó la generación de estructuras en ambas configuraciones (red de nudos y bumbilic) de la celda comercial.

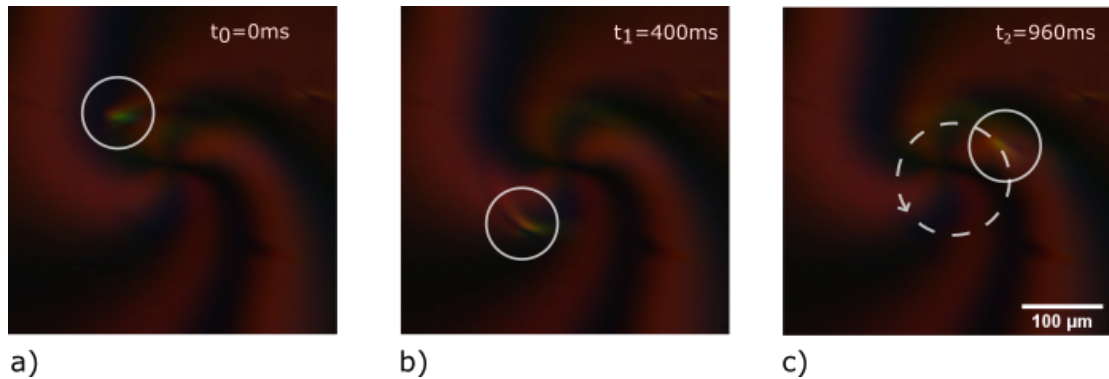


Figura 3.4: Se aplicó un voltaje suficientemente fuerte ($V = 21,6V_{rms}$, $f = 800Hz$ a $50^\circ C$) en la celda, para obtener una distribución de nudos y la formación de estructuras. En las Figuras a) - c), se observa una estructura encerrada en la circunferencia blanca, orbitando alrededor del centro del defecto. La trayectoria de la estructura se muestra con una línea punteada en c), así como la dirección de rotación indicada por la flecha. Los parámetros t_1 y t_2 representan el tiempo transcurrido desde la primera imagen en $t = t_0$.

En la Figura 3.4 se muestra una estructura formada en una red de nudos moviéndose alrededor de uno de ellos, se observan colores en ella ya que Bing-Xiang et al. [1] recomienda insertar una placa retardadora de onda completa para mejorar

el contraste entre las balas de director y el fondo. La placa retardadora de onda completa también es conocida como placa retardadora de primer orden, ya que está diseñada para introducir retardancia (entre 530 y $560\mu m$) de una longitud de onda entre los frentes de onda ordinario y extraordinario, al ser iluminada con luz blanca. Cuando se coloca una placa retardadora de una onda en un microscopio de polarización, entre el analizador y generador, se observa un tono magenta; se debe a que los frentes de onda con longitudes de onda correspondientes al color verde, emergen de la placa con la misma polarización que el generador y son posteriormente absorbidas por el analizador. Los frentes de onda con longitudes de onda correspondiente al color azul y rojo son polarizadas elípticamente, por lo que la componente del campo eléctrico paralela al analizador generará el tono magenta observado en un microscopio.

El análisis de birrefringencia de un elemento óptico puede realizarse con esta herramienta al colocar un espécimen entre el generador de estados de polarización y la placa retardadora de una onda. Considerando como elemento birrefringente las moléculas de un cristal líquido calamítico, y colocando su eje principal paralelo al eje lento de la placa retardadora de una onda, los frentes de onda de longitudes de onda correspondientes al azul y verde serán polarizadas elípticamente, formando un tono amarillo. Por otro lado, si el eje principal de las moléculas y el eje lento de la placa retardadora son colocados perpendicularmente, entonces los frentes de onda de longitudes de onda correspondientes al color azul y verde serán polarizados elípticamente, combinándose para generar un color de interferencia similar al azul. Debido a esto, la mitad de la estructura se observará amarilla y la otra parte azul, al insertar una placa retardadora de una onda entre la muestra y el analizador, donde sus ejes ópticos forman un ángulo de 45° [1, 41]. En esta configuración se obtuvieron buenos resultados cualitativos; se identificaron tres diferentes tipos de estructuras en movimiento. La primera de ellas fue en forma de mariposa, observada en experimentos anteriores, la segunda fue en forma de esfera y por último otras en forma de toroide, las cuales se movían de forma aleatoria, no conservaban el movimiento anteriormente observado, es decir, perpendicular al director.

En la Figura 3.5 se observa una estructura moviéndose alrededor de un bumbilic, está señalada por la circunferencia blanca y su trayectoria es indicada en la Figura c) por la circunferencia punteada. La configuración experimental utilizada es mostrada en la Figura 2.1, el generador y analizador de estados de polarización están compuestos por polarizadores circulares cruzados, por lo que idealmente la muestra debería de observarse de un color uniforme. Cabe mencionar que en ambas configuraciones, red de nudos y bumbilic, al incrementar el voltaje, la formación de estructuras incrementa formando nubes de ellas.

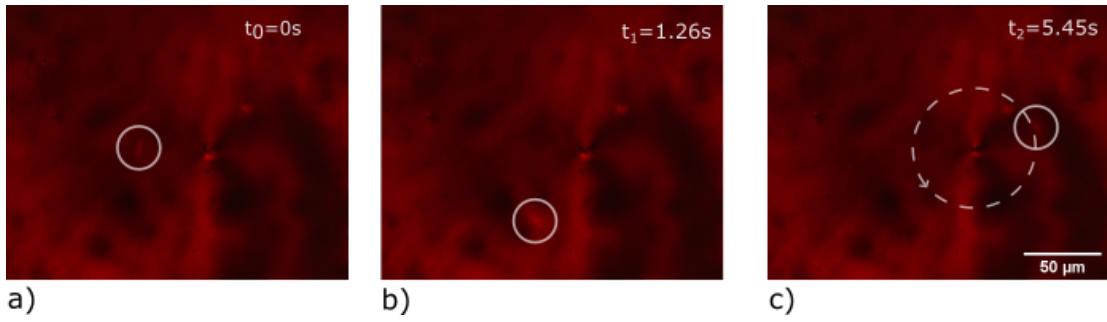


Figura 3.5: Secuencia de imágenes que muestran una estructura, encerrada por una circunferencia, que orbita alrededor de un bumbilic. Su formación se obtuvo al aplicar un voltaje de magnitud $V = 22,6V_{rms}$ a $f = 800Hz$, $T = 50^{\circ}C$. El camino trazado por la estructura se muestra con una línea punteada en c), así como la dirección de rotación indicada por la flecha.

A pesar de la dinámica presentada por los nudos (y bumbilic), cuando una estructura orbita alrededor del defecto, su movimiento es estable y en algunos casos permanece durante varios segundos ($\approx 50s$) hasta que la estructura desaparece, escapa o el nudo donde está moviéndose es aniquilado por otro y la estructura escapa propagándose libremente por la celda.

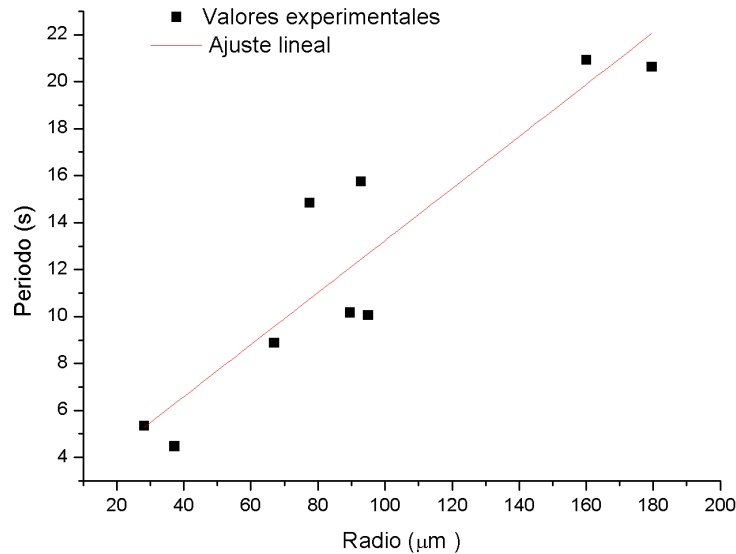


Figura 3.6: Período de las balas de director según el radio de órbita, bajo un voltaje $V = 15,8V_{rms}$ a frecuencia $f = 50Hz$, $T = 50^{\circ}C$.

Es común observar balas de director formadas en el centro del nudo, las cuales permanecen atrapadas, se especula que estas estructuras se mueven en 3 dimensiones debido a la naturaleza de los nudos. En algunos casos, al aumentar el voltaje, las balas de director pueden ser expulsadas del centro propagándose a lo largo de la celda, pudiendo orbitar en otro nudo.

Finalmente, para caracterizar la dinámica de las estructuras, se aplicó un voltaje capaz de generar muchas de ellas simultáneamente, lo cual permitió asociar una relación entre su radio de órbita y su período. En la Figura 3.6 se presenta una gráfica mostrando los resultados obtenidos.

En la gran mayoría de los videos grabados, el contraste entre el fondo y las estructuras en movimiento no fue el mejor, por lo que resulta difícil realizar un seguimiento a las estructuras por software. A pesar de esto, el script se pudo implementar en algunos videos, como en el caso plano para calcular su velocidad. En la Figura 3.7 se muestra la trayectoria descrita por estructuras orbitando alrededor de nudos. Las imágenes mostradas en la Figura 3.4 fueron extraídas de este video, mostrado como Video Complementario 3.

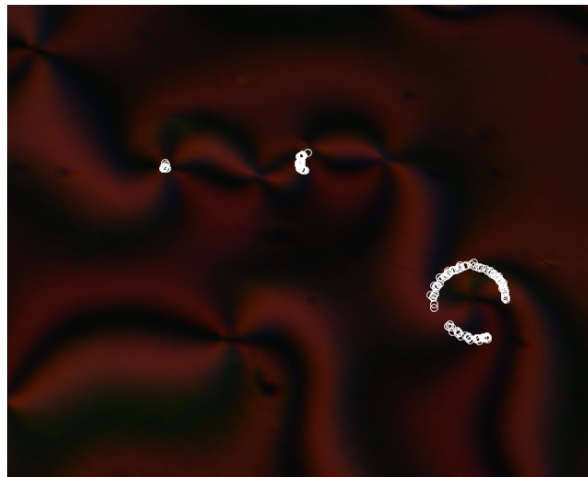


Figura 3.7: Seguimiento automático de estructuras orbitando alrededor de nudos.

Los puntos dibujados en la parte superior izquierda representan la trayectoria descrita por dos estructuras. La primera de ellas está encerrada en el centro del defecto, por esta razón, la trayectoria parece ser un punto. Mientras que los puntos dibujados en la parte inferior derecha muestran la trayectoria descrita por la estructura de interés. Puede observarse que en esta trayectoria los puntos dibujados no son continuos, esto se debe a que en algunas regiones, la intensidad de la estructura no fue suficiente para que el script pudiera identificarla y realizar el

seguimiento.

En el capítulo anterior se reportó la formación y propagación de balas de director en el cristal líquido QY-VA 201305 en una celda con anclaje plano uniforme, por lo que es natural continuar con el trabajo de investigación explorando una celda con anclaje homeótropro con este cristal líquido.

La muestra fue examinada en frecuencia y voltaje en la configuración de red de nudos y posteriormente con un bumbilic aislado; ambas texturas fueron de buena calidad ya que se observó la formación de varios nudos en toda la celda, así como la mutua aniquilación. Además, la celda no contaba con impurezas. En la Figura 3.8 se muestran estructuras formadas por la deformación del director, propagándose alrededor de un defecto topológico, en ambas configuraciones.

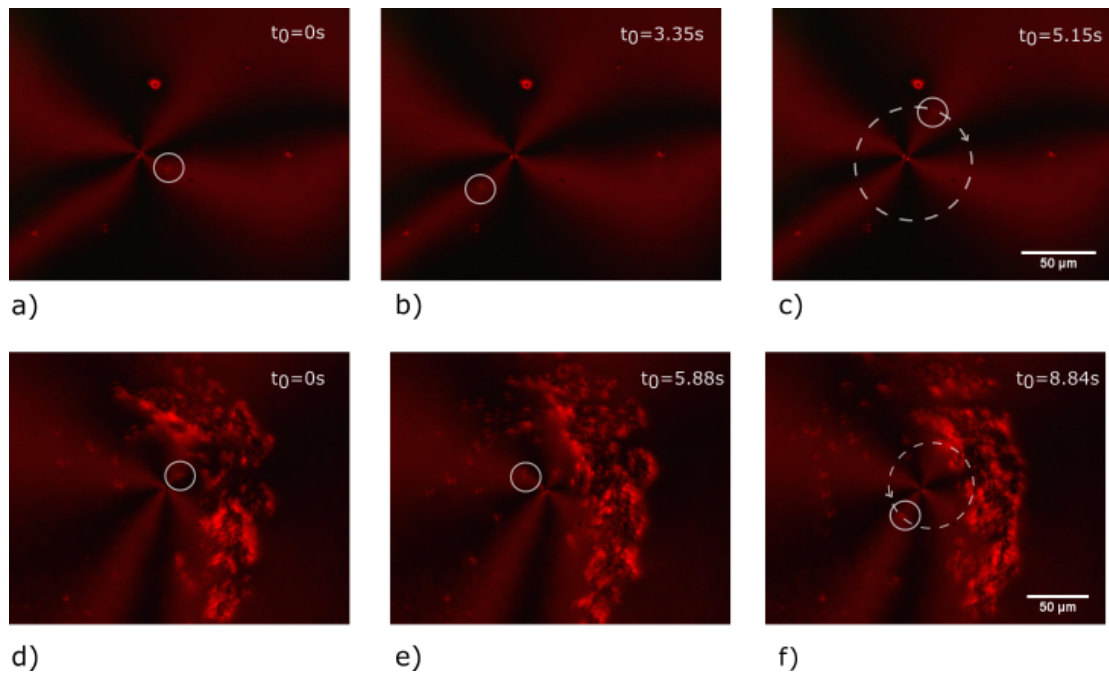


Figura 3.8: Secuencia de imágenes que representan el movimiento de balas de director en la configuración de a) - c) red de nudos ($f = 30Hz, V = 18,5V_{rms}$) y d) - f) bumbilic aislado ($f = 35Hz, V = 21,6V_{rms}$), en una celda, de espesor $d \approx 16,7$, de cristal líquido QY-VA 201305.

La desestabilización del medio es diferente respecto al cristal líquido CCN-47, en este caso se observaron zonas donde surgían muchas balas de director formando nubes de ellas (Figura 3.8 d) - f)), mientras que en otras zonas las moléculas no eran reorientadas. Sin embargo, la formación de ellas es similar al cristal líquido CCN-47 con anclaje plano uniforme, ya que se observaron las fuentes y sumideros,

y a medida que aumenta el voltaje, una bala puede surgir y propagarse. También se observó la propagación de una sola bala de director moviéndose alrededor de un nudo.

La forma de las estructuras, corresponde igualmente a la de una mariposa como en casos anteriores, y no se observó la aparición de otros tipos de estructuras reportados anteriormente.

Capítulo 4

Conclusiones.

La excitación adecuada de las moléculas de un cristal líquido nemático uniaxial termotrópico debido a un campo externo, conlleva a la distorsión local del director formando estructuras que se mueven perpendicularmente al director. En el caso plano, se mueven de un extremo de la celda al otro, trazando una trayectoria recta, mientras que en las celdas con anclaje homeótropo se mueven circularmente alrededor del centro del defecto. Las balas de director son deformaciones del director localizadas a lo largo de toda la celda, donde la distorsión máxima es alcanzada a la mitad de ella, además no cambian su perfil a lo largo del espacio y tiempo; se propagan con una velocidad constante y pueden interactuar entre ellas [1], sin embargo no tienen masa. Por estas razones las balas de director son denominadas cuasi partículas elásticas y son comparadas con el comportamiento de solitones.

4.1. Generación de estructuras.

En el caso de una celda de cristal líquido con anclaje plano uniforme, se produjeron correctamente los resultados al observar la geometría de las balas de director, y sus múltiples interacciones. Posteriormente, se observó el mismo comportamiento de las estructuras en una celda con anclaje plano no uniforme (placa-q, $q = \frac{1}{2}$), sin embargo, en la textura Schlieren no se observó la formación de balas de director. Además, se exploró la generación y propagación de las estructuras elásticas en el cristal líquido alternativo: QY-VA 201305, donde de igual forma, se observaron los mismos eventos causados por las estructuras.

En la muestra con anclaje homeótropo se observó la formación y propagación de balas de director moviéndose de forma perpendicular al director. De acuerdo al método descrito anteriormente (secciones 2.3 y 3.2), la polarimetría de Stokes

permitiría determinar la geometría de las estructuras, pero el mayor obstáculo encontrado fue que el voltaje necesario para deformar el medio provoca una retardancia no uniforme en el defecto topológico, como se puede observar en la Figura 3.5. A pesar de esto, y sin ser un resultado contundente, se propone que las formas de las estructuras son: mariposa (como en el caso plano homogéneo), esfera y toroide; estos últimos pueden asemejarse a los *hopfiones*, solitones en forma de dona propagándose en un cristal líquido [32]. En el caso esférico, la polarimetría de Stokes determinaría si su movimiento es puramente traslacional o incluye movimiento rotacional. Particularmente, algunas de las estructuras en forma de esfera dejaban su traza marcada durante su desplazamiento aleatorio, es decir, a su paso la deformación del director era permanente, ya que las moléculas no lograban volver a su orientación inicial.

La aparente solidificación del cristal líquido en gran parte de la muestra homeótropa ralentizó el desarrollo del estudio y, a pesar de calentarla durante algunas horas a alta temperatura (40°C por encima del punto de clarificación), no mostró una gran mejoría.

La presencia de estos “patrones” sólidos dentro de la celda, impide una buena textura de nudos y, por lo tanto, la formación de estructuras. Para evitar la formación de estos patrones se sugiere no someter al cristal líquido a cambios repentinos de temperatura, por ejemplo, retirar la celda de la caja metálica (para controlar su temperatura), ya que generalmente se encuentra a 55°C y pasa a aproximadamente 20°C. Una solución para reutilizar la celda es realizar un filtraje, el cual consiste en extraer el cristal líquido contaminado pudiendo volver a utilizar la celda.

Después de examinar a fondo la celda homeótropa en la configuración de red de nudos, se procedió a colocar un imán sobre las superficies generando un bumbilic en el centro del imán. Debido a la presencia de los patrones sólidos mencionados anteriormente, fue difícil encontrar un sitio favorable en la celda donde se pudiera colocar el imán, además los nudos formados permanecían sujetos a los patrones, impidiendo la aniquilación de aquellos formados fuera del imán. La presencia cercana de nudos con un bumbilic aislado, modifica la retardancia observada a través de polarizadores circulares cruzados, impidiendo un buen sistema para realizar el seguimiento automático.

El gráfico presentado en la Figura 3.6 muestra que, por el momento, no existe una relación realmente clara entre el período de la estructura y el radio de la órbita, sin embargo, se observa que el período aumenta de acuerdo al radio de la órbita, hasta alcanzar un valor límite; lo cual es un comportamiento esperado, ya que las estructuras se mueven a velocidad constante y aquellas que recorren una trayectoria más larga, les tomará mayor tiempo completar una vuelta.

Finalmente, se concluye que la dirección de desplazamiento de las estructuras, perpendicular al director, no depende exclusivamente del cristal líquido CCN-47, ya que también fue observada en el QY-VA 201305; y tampoco de una configuración en particular, debido a que se observó en anclaje plano uniforme y no uniforme, así como en el anclaje homeótrofo. Las balas de director en forma de mariposa son las que mostraron este comportamiento ya que las estructuras con diferente geometría (supuestamente forma esférica y toroidal), por momentos se desplazaban en dirección aleatoria.

4.2. Fabricación de celdas.

La fabricación de celdas homeótropas en el laboratorio (gotas dispersas y capilares con espesor $d \approx 13\mu m, 23\mu m$) involucran el tratamiento de las superficies con el surfactante CTAB, en ambos casos se observó una buena textura de nudos, sin embargo, no se observaron estructuras. Esto puede deberse a que el surfactante utilizado contiene amonio, el cual es rico en iones, lo que evita la formación de las balas de director [1]. Por lo tanto, se sugiere tratar las superficies con otro método u otro surfactante, por ejemplo, el utilizado para la fabricación comercial de celdas con capas de polímeros o lecitina.

La dispersión del cristal líquido CCN-47 en superficies con anclaje homeótrofo, derivó en la formación de gotas de radio entre $30\mu m$ y $600\mu m$. A pesar de obtener nudos aislados bien definidos, se observó únicamente la desestabilización del medio, pero no la formación de balas de director, esto debido a que el surfactante utilizado fue CTAB, como en el caso anterior. Por esta razón, se descartó trabajar con este sistema.

Como se mencionó anteriormente, un problema que se tuvo al trabajar con la muestra homeótrofa fue la solidificación del cristal líquido y la presencia de impurezas (partículas con masa de origen desconocido) en la celda, sin embargo, se observó que de igual manera se desplazan de forma perpendicular al director, por lo que la respuesta a la pregunta: “¿Es posible que micro partículas puedan ser desplazadas debido a la reorientación de las moléculas inducida por un campo externo y, en adición a ello, controlar su dirección de desplazamiento por medio de disclinaciones en cristales líquidos?”, queda abierta.

Trabajo futuro

La generación de micro estructuras, inducida por campo eléctrico, en el cristal líquido CCN-47 con anclaje homeótrofo, resulta interesante por la dinámica que se presenta, por lo que se desea recuperar la célula comercial. Esto se puede lograr filtrando el cristal líquido y eliminando las impurezas que se observaron, con esto se puede saber el origen de la formación de estas impurezas. Además, se desea trabajar con otro cristal líquido, que tenga propiedades ópticas parecidas a CCN-47, que de igual forma muestre la formación de estructuras en una muestra con anclaje homeótrofo, pero que la manipulación de la celda sea más accesible.

En cuanto a la preparación de las celdas, se desea preparar superficies con anclaje homeótrofo con un surfactante que tenga una concentración menor de iones para mejorar la generación de balas de director; una alternativa puede ser el surfactante lecitina.

El trabajo que se puede realizar en un futuro inmediato es explorar una muestra con anclaje inclinado, mejorar el sistema de formación de imágenes, determinar la forma de las estructuras encontradas en la celda homeótropa y producir balas de director localizadas mediante un campo óptico generado por un haz láser. Además, se espera poder atrapar las estructuras, y con esto, controlar su trayectoria y provocar interacciones entre ellas.

Apéndice A

Simplificación de la ecuación de densidad de energía de Frank.

Con fines experimentales o de análisis matemático, la Ecuación 1.20 no es práctica, además que resulta difícil de resolver, por lo que se considera que los tres tipos de deformaciones que sufre el director son de igual forma, entonces $K_i = K$, donde $i = 1, 2, 3$. La Ec. 1.20 se reduce a la ecuación:

$$f = \frac{1}{2}K [(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2]. \quad (\text{A.1})$$

Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario que describe al director en un cristal líquido en el sistema cartesiano tradicional ($\hat{\mathbf{r}} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$). Entonces $\hat{\mathbf{n}}$ tiene componentes $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$.

El rotacional está definido como:

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\mathbf{n}} &= \left(\frac{dn_y}{dz} - \frac{dn_z}{dy} \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{dn_x}{dz} - \frac{dn_z}{dx} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{dn_x}{dy} - \frac{dn_y}{dx} \right) \hat{\mathbf{k}} \\ &= \alpha_1 \hat{\mathbf{i}} - \alpha_2 \hat{\mathbf{j}} + \alpha_3 \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Luego, se calculan explícitamente los términos 2 y 3 de la ecuación A.1,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}} &= \left(n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\alpha_1 \hat{\mathbf{i}} - \alpha_2 \hat{\mathbf{j}} + \alpha_3 \hat{\mathbf{k}} \right) \\ &= n_x \alpha_1 - n_y \alpha_2 + n_z \alpha_3. \end{aligned}$$

Después, se calcula la norma de la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}}) &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 \\
&= (n_x \alpha_1 - n_y \alpha_2 + n_z \alpha_3)^2 \\
&= (n_x \alpha_1)^2 + (n_y \alpha_2)^2 + (n_z \alpha_3)^2 \\
&\quad - 2[(n_x \alpha_1)(n_y \alpha_2 + n_z \alpha_3) + n_y \alpha_2 n_z \alpha_3] \\
&= (n_x \alpha_1)^2 + (n_y \alpha_2)^2 + (n_z \alpha_3)^2 \\
&\quad - 2(n_x n_y \alpha_1 \alpha_2 + n_x n_z \alpha_1 \alpha_3 - n_y n_z \alpha_2 \alpha_3).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Por otro lado, se calcula el tercer término de la ecuación A.1, entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}} &= (n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}}) \times (\alpha_1 \hat{\mathbf{i}} - \alpha_2 \hat{\mathbf{j}} + \alpha_3 \hat{\mathbf{k}}) \\
&= (n_y \alpha_3 - n_z \alpha_2) \hat{\mathbf{i}} - (n_x \alpha_3 - n_z \alpha_1) \hat{\mathbf{j}} + (n_x \alpha_2 - n_y \alpha_1) \hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 &= (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}}) \\
&= (n_y \alpha_3 - n_z \alpha_2)^2 + (n_x \alpha_3 - n_z \alpha_1)^2 + (n_x \alpha_2 - n_y \alpha_1)^2 \\
&= (n_x \alpha_2)^2 + (n_x \alpha_3)^2 + (n_y \alpha_1)^2 + (n_y \alpha_3)^2 + (n_z \alpha_1)^2 \\
&\quad + (n_z \alpha_2)^2 - 2(n_y \alpha_3 n_z \alpha_2 + n_x \alpha_3 n_z \alpha_1 + n_x \alpha_2 + n_y \alpha_1).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Sumando las ecuaciones A.2 y A.3, se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 &= (n_x \alpha_1)^2 + (n_y \alpha_2)^2 + (n_z \alpha_3)^2 - 2(n_x n_y \alpha_1 \alpha_2 \\
&\quad + n_x n_z \alpha_1 \alpha_3 - n_y n_z \alpha_2 \alpha_3) + (n_x \alpha_2)^2 + (n_x \alpha_3)^2 \\
&\quad + (n_y \alpha_1)^2 + (n_y \alpha_3)^2 + (n_z \alpha_1)^2 + (n_z \alpha_2)^2 \\
&\quad - 2(n_y \alpha_3 n_z \alpha_2 + n_x \alpha_3 n_z \alpha_1 + n_x \alpha_2 + n_y \alpha_1) \\
&= \alpha_1^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) + \alpha_2^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \\
&\quad + \alpha_3^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).
\end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario, entonces $\|\hat{\mathbf{n}}\|^2 = 1$, por lo que la suma de los términos 2 y 3 de la Ec. A.1 es:

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2. \tag{A.4}$$

Por otro lado, se calcula la norma del rotacional de $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\begin{aligned}(\nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 &= (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) \\ &= (\alpha_1 \hat{\mathbf{i}} - \alpha_2 \hat{\mathbf{j}} + \alpha_3 \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\alpha_1 \hat{\mathbf{i}} - \alpha_2 \hat{\mathbf{j}} + \alpha_3 \hat{\mathbf{k}}) \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).\end{aligned}\tag{A.5}$$

Finalmente, se observa que las ecuaciones A.4 y A.5 son equivalentes, entonces:

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 = (\nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2.$$

Por lo tanto, realizando la aproximación de una constante, la densidad de energía libre es:

$$f = \frac{1}{2}K [(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + (\nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2].$$

Apéndice B

Minimización de la energía libre de Frank

La contribución de la densidad de energía libre de Frank y de la densidad de energía libre del campo magnético están descritas en la Ec. 1.24, además se asume la deformación del director como: $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta(z), \cos \theta(z), 0)$. Con el objetivo de obtener la expresión matemática de la densidad de energía con esta deformación del director, se calculan explícitamente los productos escalares y vectoriales de la Ec. 1.20,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_z}{\partial z} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Sustituyendo $\hat{\mathbf{n}}$ en la definición del rotacional (Ec. A) se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \hat{\mathbf{n}} &= \sin \theta \frac{d\theta}{dz} \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \frac{d\theta}{dz} \hat{\mathbf{j}}. \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) &= \left(n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} \right) \cdot \left(\sin \theta \frac{d\theta}{dz} \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \frac{d\theta}{dz} \hat{\mathbf{j}} \right) \\ &= n_x \sin \theta \frac{d\theta}{dz} + n_y \cos \theta \frac{d\theta}{dz} \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \frac{d\theta}{dz} \\ &= \frac{d\theta}{dz}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) &= -n_z \cos \theta \frac{d\theta}{dz} \hat{\mathbf{i}} + n_z \cos \theta \frac{d\theta}{dz} \hat{\mathbf{j}} \\
&\quad + \left(n_x \cos \theta \frac{d\theta}{dz} - n_y \sin \theta \frac{d\theta}{dz} \right) \hat{\mathbf{k}} \\
&= (-\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta) \frac{d\theta}{dz} \hat{\mathbf{k}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego de calcular todos los términos de la Ec. 1.20 y sustituyéndolos, se obtiene:

$$f_{Frank} = \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2.$$

Se observa que la densidad de energía libre de Frank es puramente de torsión a lo largo del eje z . Ahora, se calcula el término de la contribución del campo magnético, Ec.1.23, al ser aplicado en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$, entonces se obtiene:

$$f_B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\chi_a B^2}{\mu_0} \sin^2 \theta. \quad (\text{B.2})$$

Con el fin de obtener la Ec. 1.24 con la forma del director descrita anteriormente, se suman las dos contribuciones calculadas anteriormente,

$$f = \frac{1}{2} K_2 \frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\chi_a B^2}{\mu_0} \sin^2 \theta. \quad (\text{B.3})$$

Integrando sobre una sección, el área A en el plano xy , se obtiene la energía libre de Frank,

$$F = \frac{1}{2} \int \left[K_2 \frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{\chi_a B^2}{\mu_0} \sin \theta \cos \theta \right] dz. \quad (\text{B.4})$$

El problema de minimización de energía es un problema de cálculo variacional, por lo que se calcula la derivada funcional de la ecuación anterior respecto a $\theta(z)$, entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ &= K_2 \frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{\chi_a B^2}{\mu_0} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Apéndice C

Solución de la ecuación Euler-Lagrange.

El objetivo de esta sección es encontrar la solución general a la ecuación de equilibrio (Ec.C.1) y explorar las diferentes aproximaciones para evitar cálculos matemáticos de gran complejidad. Introduciendo la longitud de coherencia magnética, la ecuación de equilibrio reducida es:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{\xi^2} \sin\theta \cos\theta = 0. \quad (\text{C.1})$$

Despejando el término de la ecuación donde se encuentra la segunda derivada del ángulo y multiplicando ambos lados de la ecuación por la derivada del ángulo, se obtiene:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{d\theta}{dz} = -\frac{1}{\xi^2} \sin\theta \cos\theta \frac{d\theta}{dz}.$$

Por la regla de la cadena, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 &= -\frac{1}{\xi^2} \sin\theta \cos\theta \frac{d\theta}{dz} \\ &= \frac{\cos\theta}{\xi^2} \cdot \frac{d \cos\theta}{dz} \\ &= \frac{1}{2\xi^2} \cdot \frac{d \cos^2\theta}{dz}. \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 &= \frac{1}{\xi^2} \int \frac{d\cos^2 \theta}{dz} dz \\ &= \frac{1}{\xi^2} (\sin^2 \theta + cte).\end{aligned}\tag{C.2}$$

C.1. Deformación del director de un cristal líquido semi infinito.

En esta sección se calcula la distorsión que sufre el director de un cristal líquido uniaxial, donde una de sus superficies tiene anclaje plano y el espesor de la celda es muy grande, considerándose así un “cristal líquido semi infinito” (ver Figura. 1.3).

De acuerdo a esta consideración, las condiciones de la frontera son: $\theta(0) = 0$ y $\theta(\infty) = \frac{\pi}{2}$, entonces el valor de la constante de integración de la Ec.1.27 es cero. Eligiendo la solución positiva, se obtiene la ecuación:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\xi} \cos \theta.$$

Resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables, se tiene,

$$\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{\xi} \int dz.$$

$$\ln \tan \frac{\theta}{2} = \pm \frac{z}{\xi} + cte.$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = e^{\pm \frac{z}{\xi} + cte}.$$

$$\theta = 2 \arctan e^{\pm \frac{z}{\xi} + cte}.$$

C.2. Deformación del director de un cristal líquido confinado entre dos placas de vidrio.

Como se ha mencionado anteriormente, el estudio típico de un cristal líquido se realiza comúnmente introduciéndolo a una celda con superficies de vidrio, por lo que ahora las condiciones de frontera cambian respecto al problema anterior, ($\theta(0) = 0 = \theta(d)$). Considérese un cambio de ángulo muy pequeño entre dos moléculas consecutivas, entonces expandiendo en serie las funciones $\sin \theta$, $\cos \theta$ y despreciando los términos de segundo orden, las funciones se aproximan a : $\sin \theta = \theta$ y $\cos \theta = 1$. Entonces la ecuación C.2 es:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{\xi^2}\theta = 0.$$

La solución general a la ecuación es:

$$\theta = A \sin \frac{z}{\xi} + B \cos \frac{z}{\xi}.$$

Donde A , B son constantes de integración que se determinan con las condiciones de frontera $\theta(0) = 0 = \theta(d)$. Entonces, $B = 0$ y $0 = A \sin \frac{d}{\xi}$, eliminando la solución trivial ($A = 0$) se tiene la condición:

$$\frac{d}{\xi} = n\pi \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sustituyendo el valor de la coherencia magnética, se encuentra el valor umbral de un campo magnético para producir la transición de Fréedericksz:

$$B_c = \frac{n\pi}{d} \sqrt{\frac{\mu_0 K_2}{\chi_a}}.$$

Retomando la Ec. para encontrar la solución general, se aplican las nuevas condiciones de frontera considerando que la función tiene su máximo en $\theta_m = \frac{d}{2}$, entonces:

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2} (\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta).$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\xi} \sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta}.$$

Considerando la simetría del sistema, es decir, si $\theta(z)$ minimiza la energía, entonces $-\theta(z)$ también lo hace, y además no se consideran las soluciones no triviales en $\theta(z) = \theta(d - z)$, donde $0 \leq z \leq d$. La ecuación diferencial se resuelve por separación de variables, entonces se tiene:

$$dz = \frac{1}{\xi} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta}} d\theta.$$

$$\xi \int_0^{\frac{d}{2}} dz = \int_0^{\theta(z)} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta'}} d\theta'.$$

$$\xi \frac{d}{2} = \int_0^{\theta_m} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta'}} d\theta'.$$

$K(\sin \theta_m) = \int_0^{\theta_m} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta'}} d\theta'$ es conocida como integral elíptica completa de primer orden.

Bibliografía

- [1] Bing-Xiang L. Electrically driven three-dimensional solitary waves as director bullets in nematic liquid crystals. *Nature Communications*, 2018.
- [2] A. Aleksanyan and E. Brasselet. Vortex coronagraphy from self-engineered liquid crystal spin-orbit masks. *Optics Letters*, 41:5234–5237, 2016.
- [3] A. Aleksanyan and E. Brasselet. High-charge and multiple-star vortex coronagraphy from stacked vector vortex phase masks. *Opt. Lett.*, 43(3):383–386, Feb 2018.
- [4] P.G. De Gennes and J. Prost. *The Physics Of Liquid Crystals*. Oxford University Press, 1993.
- [5] K.K. Sharma. *Optics. Principles and Applications*. Elsevier, 2006.
- [6] R.C. Jones. A new calculus for the treatment of optical systems. description and discussion of the calculus. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7):488–493, Jul 1941.
- [7] Bruce N.C. López-Téllez, J. and O. Rodríguez-Herrera. Characterization of optical polarization properties for liquid crystal-based retarders. *Appl. Opt.*, 55(22):6025–6033, 08 2016.
- [8] J. López-Téllez and N. Bruce. Stokes polarimetry using analysis of the nonlinear voltage-retardance relationship for liquid-crystal variable retarders. *Review of Scientific Instruments*, 85:033104–033104, 03 2014.
- [9] Max Born and Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 7 edition, 1999.
- [10] R. Meyer. Piezoelectric effects in liquid crystals. *Physical Review Letters*, 22, 03 1969.
- [11] F.C. Frank. On the theory of liquid crystals. *Discussion of the Faraday Society*, 25:19–28, 1958.

-
- [12] C. W. Oseen. The theory of liquid crystals. *Trans. Faraday Soc.*, 29:pp.883, 1933.
- [13] P. Oswald and P. Pieranski. *Les cristaux liquides concepts et propriétés physiques illustres par des expériences*. no. Gordon and Breach Science Publishers, 2000.
- [14] J. Selinger. *Introduction to the theory of the soft matter. From ideal gases to liquid crystals*. Springer, 2016.
- [15] M. Kleman and O.D. Lavrentovic. Topological point defects in nematic liquid crystals. *Philosophical Magazine and Philosophical Magazine Letters*, 86:4117–4137, 09 2006.
- [16] Sasaki et al. Large-scale self-organization of reconfigurable topological defect networks in nematic liquid crystals. *Nature Communications*, 09 2016.
- [17] A. Rapini. Umbilics: static properties and shear-induced displacements. *Le journal de physique*, 34:629, 07 1973.
- [18] Marshall O. Wright J. Dierking, I. and N. Bulleid. Annihilation dynamics of umbilical defects in nematic liquid crystals under applied electric fields. *Phys. Rev. E*, 71:061709, 06 2005.
- [19] E.F. Carr. Influence of electric fields on the molecular alignment in the liquid crystal p-(anisalamino)-phenyl acetate. *Molecular Crystals*, 7:253–268, 1969.
- [20] W. Helfrich. Conduction-induced alignment of nematic liquid crystals: Basic model and stability considerations. *The Journal of chemical physics*, 51:4092–4105, 11 1969.
- [21] Krekhov et al. Nonstandard electroconvection and flexoelectricity in nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E*, 77, 02 2008.
- [22] Börzsönyi T. Éber N. Buka, A. and T. Tóth-Katona. *Patterns in the Bulk and at the Interface of Liquid Crystals*, pages 298–318. 01 2008.
- [23] Salamon P. Éber, N. and A. Buka. Electrically induced patterns in nematics and how to avoid them. *Liquid Crystals Reviews*, 4:101–134, 07 2016.
- [24] Stannarius R. Heuer, J. and T. John. Reentrant ehc patterns under superimposed square wave excitation. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 449(1):11–19, 2006.
- [25] Brand et al. Electroconvection in nematic liquid crystals: comparison between experimental results and the hydrodynamic model. *Physics Letters A*, 235:508–514, 11 1997.

-
- [26] J.S. Russell. *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*. 1845.
- [27] N. Zabusky and M. Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15, 08 1965.
- [28] I.C. Khoo. *Liquid crystal non linear optics*. 8, 1994.
- [29] Peccianti M. Assanto, G. and C. Conti. Nematicons: optical spatial solitons in nematic liquid crystals. *Optics and Photonics News*, 14:44–48, 02 2003.
- [30] D. Mihaache. Multidimensional localized structures in optical and matter-wave media: A topical survey of recent literature. *Romanian Reports in Physics*, 69, 01 2017.
- [31] Y. Silberberg. Collapse of optical pulses. *Opt. Lett.*, 15(22):1282–1284, N11 1990.
- [32] Kartashov et al. Frontiers in multidimensional self-trapping of nonlinear fields and matter. *Nature Reviews Physics*, 1:185–187, 02 2019.
- [33] S. K. Adhikari. Elastic collision and molecule formation of spatiotemporal light bullets in a cubic-quintic nonlinear medium. *Phys. Rev. E*, 94:032217, 08 2016.
- [34] M. Rafayelyan. *Singular beam shaping from spin-orbit flat optics*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 07 2017.
- [35] Manzo C. Marrucci, L. and D. Paparo. Stokes polarimetry using analysis of the nonlinear voltage-optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Phys. Rev. Lett.*, 896, 05 2006.
- [36] Odoliak N. Kaczmarek M. Kravets, N. and E. Brasselet. Self-induced liquid crystal q-plate by photoelectric interface activation. *Applied Physics Letters*, 114:pp.061101, 2019.
- [37] Lechocinski N. Vedel, M. and S. Breungot. *Full Stokes Polarization camera - Spatial inhomogeneity and field calibration*. Bossa Nova Technologies.
- [38] Hinds Instruments. *Abrio*. Hinds Instruments.
- [39] O Yaroshchuk and Y. Reznikov. Photoalignment of liquid crystals: basics and current trends. *J. Mater. Chem*, 2012.
- [40] E. Brasselet. Tunable high-resolution macroscopic self-engineered geometric phase optical elements. *Phys. Rev. Lett.*, 121:033901, 07 2018.

[41] Olympus Scientific Solutions Americas Corp.
<https://www.olympus-lifescience.com/en/microscope-resource/primer/techniques/polarized/firstorderplate/>, 2019.