



**INAOE**

# **Distribución de Dirac para intensidad y fase**

por el

**M.C. Luis Amilca Andrade Morales**

Tesis sometida como requisito parcial para  
obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Supervisada por:

**Dr. Héctor Manuel Moya Cessa**

INAOE

**Dr. Francisco Soto Eguibar**

INAOE

AGOSTO 2019

Tonantzintla, Puebla

©INAOE 2019

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias en su totalidad, o  
en partes, de esta tesis



# Dedicatoria

A la memoria de mi **padre**.

*Wichis gracias por todo tu amor.*

A mi **madre**.

*Gracias por todo mami, te amo.*

A mi **hijo**.

*León gracias por sacar lo mejor de mi.*

A mi **esposa**.

*Gracias por nunca dudar de mi y estar conmigo cuando más lo necesite. Eres y serás el amor de mi vida.*



# Agradecimientos

A los **Dres. Héctor M. Moya Cessa, Francisco Soto Eguibar,**

*Por su asesoría para la elaboración de esta tesis. Muchas gracias por todo su apoyo.*

Al **INAOE** y a **CONACYT.**

*Por la oportunidad que me han dado de crecer profesionalmente.*

A mis sinodales: **Dr. Gabriel C. Martínez Niconoff, Dr. Víctor M. Arrizón Peña, Dr. Arturo Zuñiga Segundo, Dr. Francisco J. Renero Carrillo, Dr. Irán Ramos Prieto.** *Quienes con sus comentarios y observaciones han hecho de éste un mejor trabajo.*

A mis **compañeros y amigos del INAOE.**

*Juan, Susy, Julian, Toño, Cruz, Lili, Rafa, Catana, Braulio gracias por todos los momentos que vivimos en esta aventura.*

Al resto de mi **familia.**

*Especialmente a mi tía Andrea, por su apoyo incondicional.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estados del campo electromagnético . . . . .	3
1.1.1. Estados de Fock . . . . .	4
1.1.2. Estados coherentes . . . . .	6
1.1.3. Operador de desplazamiento . . . . .	7
1.1.4. Estadística de fotones . . . . .	8
1.1.5. Propiedades de los estados coherentes . . . . .	9
<b>2. El operador de fase en óptica cuántica</b>	<b>13</b>
2.1. El operador de fase de Dirac . . . . .	13
2.2. El operador de fase de Susskind y Glogower . . . . .	15
2.3. El operador de fase de Pegg y Barnett . . . . .	16
2.3.1. Conmutador de número y fase . . . . .	17
2.3.2. Operadores de creación y aniquilación . . . . .	18
2.3.3. El operador de fase y la transformada discreta de Fourier . . . . .	19
<b>3. Sistemas cuánticos de dimensión finita</b>	<b>23</b>
3.1. Estados coherentes finitos . . . . .	23
3.2. Eigenvectores del operador de aniquilación finito . . . . .	25
3.2.1. Forma analítica de un estado coherente finito . . . . .	27
3.3. Operador de desplazamiento finito . . . . .	29

<b>4. Funciones de distribución de probabilidad</b>	<b>31</b>
4.1. Distribuciones de probabilidad en el espacio fase . . . . .	32
4.1.1. Función de distribución-P de Glauber-Sudarshan . . . . .	32
4.1.2. Función de distribución-Q de Husimi . . . . .	33
4.1.3. Función de distribución de Wigner . . . . .	35
4.1.4. Función de distribución de Kirkwood-Rihaczek . . . . .	35
4.2. Distribuciones de probabilidad discretas . . . . .	36
4.2.1. Función de Wigner para número y fase . . . . .	37
4.2.2. Función de Kirkwood-Rihaczek para número y fase . . . . .	39
4.2.3. Distribución de Kirkwood-Rihaczek para un estado cohe- rente finito . . . . .	40
<b>5. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>45</b>

# Índice de figuras

1.1. Distribución de número de fotones para un estado coherente con a) $\bar{n} = 3$ y b) $\bar{n} = 10$ . . . . .	9
3.1. Distribución de número de fotones para un estado coherente finito con a) $s = 7$ y $\alpha = 1$ y b) $s = 11$ y $\alpha = 4$ . . . . .	30
4.1. Función de Wigner para número y fase para un estado coherente con amplitud $\alpha = 4$ . . . . .	38
4.2. Distribución de Kirkwood-Rihaczek para el estado coherente finito, definido en (3.20) para un espacio con $s = 11$ . . . . .	40
4.3. Distribución de Kirkwood-Rihaczek para el estado coherente finito, definido en (3.29) para un espacio con $s = 11$ . . . . .	41
4.4. Distribución de Kirkwood-Rihaczek para el estado coherente finito, definido en (3.37) para un espacio con $s = 11, \alpha = 1$ . . . . .	42
5.1. a) Reloj módulo 4 y b)Reloj módulo 3. . . . .	46





# Resumen

Consideramos dos definiciones de estados coherentes en un espacio de Hilbert de dimensión finita, basados en la definición de los operadores de creación y aniquilación circulares en el formalismo de Pegg y Barnett. La función de Kirkwood-Rihaczek para número y fase se calcula para dichos estados. Se presentan resultados analíticos y gráficas computadas numéricamente.



# Abstract

We consider two definitions of coherent states in a Hilbert space of finite dimension, based on the definition of the circular creation and annihilation operators in Pegg-Barnett formalism. The number-phase Kirkwood-Rihaczek function is calculated for those states. Analytical results and numerically computed graphs are presented.



# Capítulo 1

## Introducción

En mecánica clásica las variables dinámicas como la posición  $q$  y el momento  $p$  pueden ser medidas simultáneamente con precisión arbitraria. En consecuencia, se puede construir una distribución de densidad que describa un sistema clásico. Por otro lado, en mecánica cuántica el concepto de probabilidad conjunta en un punto del espacio-fase  $(q, p)$ , no está permitido debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, lo que resulta en el hecho de que la posición y el momento de una partícula no se pueden medir simultáneamente con precisión. Dos observables (operadores) no conmutan, por lo que es bien sabido que no existe una regla única por la cual se pueda asociar una variable del espacio-fase a un operador cuántico [1]. Por lo tanto, dependiendo del ordenamiento de los operadores, se pueden definir varias funciones de distribución. Por consiguiente, la función de distribución en el espacio-fase debe ser simplemente una herramienta matemática que facilita los cálculos y como tal, se puede diseñar para cualquier función de probabilidad que se desee, siempre y cuando conduzca a descripciones correctas de cantidades observables físicas. En mecánica cuántica estas funciones de distribución son llamadas funciones de distribución de cuasi-probabilidad y son ampliamente utilizadas en la reconstrucción de

estados cuánticos. Por ejemplo en la reconstrucción del estado de un campo en una cavidad [2, 3] o del movimiento vibracional de iones [4, 5]. Las funciones de cuasi-probabilidad más conocidas son la función de Wigner, la función- $Q$  de Husimi y la función- $P$  de Glauber-Sudarshan, que corresponden respectivamente al ordenamiento simétrico, antinormal y normal en sus funciones características asociadas. Una función de distribución de cuasi-probabilidad no tan conocida, es la función de distribución de Kirkwood [6], la cual fue propuesta solo un año después de que Wigner introdujera la suya. Estas funciones son de gran importancia porque nos permiten tener una visión clásica de estados cuánticos.

El problema de definir un operador de fase hermitiano para un oscilador armónico o para un campo electromagnético con un único modo de oscilación, es un problema no resuelto del todo en mecánica cuántica [7]. La existencia de un operador hermitiano  $\hat{\Phi}$  canónicamente conjugado al operador de número  $\hat{N}$ , fue postulado por primera vez por Dirac en 1927 [8]. Posteriormente en 1964 Susskind-Glogower [9], mostraron que el resultado de Dirac conducía a controversias esenciales. El desarrollo de una función de distribución de cuasi-probabilidad asociada a un operador de fase, había sido imposible debido a la ausencia de un operador de fase hermitiano. Sin embargo, el formalismo propuesto por Pegg y Barnett [10, 11], ha permitido construir un adecuado operador de fase. La función de Wigner para número y fase fue introducida con detalle por Vaccaro y Pegg [12]. Esta formulación ha proporcionado una base adecuada para estudiar sistemas cuánticos en un espacio de Hilbert de dimensión finita, especialmente en el estudio de estados coherentes.

El objetivo de esta tesis consiste en construir la función de Kirkwood-Rihaczek para número y fase de una manera análoga en que se define para posición y momento. El trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma: Primero se presentan algunos conceptos indispensables para entender la teoría cuántica

de la radiación, tal como el oscilador armónico cuántico, los estados de Fock y los estados coherentes, que son de suma importancia en óptica cuántica. En el capítulo dos se plantea el problema fundamental de la fase cuántica y se presenta una revisión del formalismo de Pegg y Barnett. En el tercer capítulo discutimos algunas aproximaciones para definir estados coherentes en un espacio de dimensión finita. En el capítulo cuatro presentamos algunas de las distribuciones de quasi-probabilidad más importantes en óptica cuántica, así como su desarrollo en un espacio de dimensión finita, se investiga la función de distribución de Kirkwood-Rihaczek para número y fase para un estado coherente finito.

## 1.1. Estados del campo electromagnético

Muchos fenómenos de la naturaleza pueden ser modelados en primera instancia mediante osciladores armónicos. Es por eso, que es el modelo fundamental para una variedad de fenómenos vibracionales que se encuentran, por ejemplo, en mecánica clásica, mecánica cuántica, electrodinámica, mecánica estadística, estado sólido, física nuclear y física de partículas. El campo electromagnético con un único modo de oscilación es un conocido sistema físico que ha sido modelado con éxito por el oscilador armónico cuántico. El hamiltoniano para el oscilador armónico se escribe como (por simplicidad, consideremos una masa unitaria, y establecemos  $\omega = 1$ ) [13]

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2), \quad (1.1)$$

El problema es cómo encontrar los valores propios de la energía y los estados propios de este Hamiltoniano. Este problema puede ser estudiado por medio de dos métodos separados. El primer método, consiste en resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el Hamiltoniano (1.1). El segundo



método, no resuelve la ecuación de Schrödinger, pero trata, en cambio, con el álgebra de operadores, conocidos como operadores de creación y aniquilación. En nuestro trabajo, utilizaremos el segundo método, ya que es más directo, y más simple de resolver.

Introducimos los operadores de creación  $\hat{a}^\dagger$  y aniquilación  $\hat{a}$ , conocidos también como operadores escalera

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p}). \quad (1.2)$$

Usando  $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ , podemos verificar que los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  obedecen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (1.3)$$

De tal manera que podemos expresar

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2) - \frac{1}{2}, \quad (1.4)$$

o de manera equivalente como

$$\frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2) = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}. \quad (1.5)$$

Sustituyendo (1.5) en (1.1) obtenemos

$$\hat{H} = \omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) = \omega(\hat{n} + \frac{1}{2}). \quad (1.6)$$

Con  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , donde  $\hat{n}$  es conocido como operador de número.

### 1.1.1. Estados de Fock

Los eigenestados de (1.6) son conocidos como estados de Fock o estados de número  $|n\rangle$

$$\hat{H} |n\rangle = \omega(n + \frac{1}{2}) |n\rangle, \quad (1.7)$$

con eigenvalores  $\omega(n + \frac{1}{2})$ , donde  $n$  es un entero no negativo, y es identificado como el número de excitaciones (fotones en el caso del campo electromagnético). Los estados de Fock son eigenestados del operador de número,

$$\hat{n} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (1.8)$$

La energía de un oscilador armónico siempre es positiva, así que debe haber un valor de la energía,  $E_0 > 0$  con un correspondiente eigenestado  $|0\rangle$ . Definimos el estado vacío del oscilador armónico como

$$\hat{a} |0\rangle = 0. \quad (1.9)$$

Los operadores de creación y aniquilación actúan sobre los estados de número de la siguiente forma

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (1.10)$$

Cualquier estado  $|n\rangle$  puede ser construido en términos del estado vacío por medio del operador de creación,

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (1.11)$$

Los estados de número forman una base ortonormal y completa, es decir,

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (1.12)$$

Usando la relación de completés es posible expresar cualquier operador en términos de los estados de número. En efecto, el operador de aniquilación se escribe

$$\hat{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} |n-1\rangle \langle n|, \quad (1.13)$$

y el operador de creación

$$\hat{a}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}^\dagger |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|. \quad (1.14)$$

La representación matricial de estos operadores es

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

El operador de número es simplemente

$$\hat{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle \langle n|. \quad (1.16)$$

Los estados de número no tienen incertidumbre en intensidad, o lo que es lo mismo,

$$\langle \Delta \hat{n} \rangle = \sqrt{\langle n | \hat{n}^2 | n \rangle - \langle n | \hat{n} | n \rangle^2} = 0. \quad (1.17)$$

Los promedios para la posición y momento son nulos para los estados de número,  $\langle n | \hat{q} | n \rangle = \langle n | \hat{p} | n \rangle = 0$ . Sin embargo, sus incertidumbres son

$$\langle \Delta \hat{q} \rangle = \sqrt{\langle n | \hat{q}^2 | n \rangle} = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2\omega}}, \quad (1.18)$$

y

$$\langle \Delta \hat{p} \rangle = \sqrt{\langle n | \hat{p}^2 | n \rangle} = \sqrt{\frac{(2n+1)\omega}{2}}. \quad (1.19)$$

La cantidad

$$P(n) = |\langle n | \psi \rangle|^2. \quad (1.20)$$

nos da la probabilidad de tener  $n$  número de excitaciones (fotones) en el estado  $|\psi\rangle$ .

### 1.1.2. Estados coherentes

Los estados coherentes son considerados los estados “más clásicos” del oscilador armónico cuántico. Fueron introducidos por Glauber [14, 15] y

Sudarshan [16] en 1963 como eigenestados del operador de aniquilación

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (1.21)$$

Como el operador  $\hat{a}$  no es hermitiano, sus eigenvalores  $\alpha$  son complejos. Como vimos en la sección anterior, los estados de número  $|n\rangle$  forman un conjunto completo, lo que nos permite expresar el estado  $|\alpha\rangle$  como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (1.22)$$

sustituyendo (1.22) en (1.21) es posible obtener la relación de recurrencia

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1}, \quad (1.23)$$

la cual conduce inmediatamente a

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \quad (1.24)$$

La ecuación (1.22) se ve entonces como

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1.25)$$

donde el coeficiente  $C_0$  se encuentra de la normalización

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2}. \quad (1.26)$$

para que ahora podamos escribir la expansión en la base de estados de Fock

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.27)$$

### 1.1.3. Operador de desplazamiento

Consideremos el operador de desplazamiento de Glauber

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \quad (1.28)$$

donde  $\alpha$  es la amplitud del campo, y  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación respectivamente. Usando la fórmula de Baker-Hausdorff

$$e^{(\hat{A}+\hat{B})} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}, \quad (1.29)$$

que es válida para cualquier par de operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  con conmutadores  $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$ . Dado que  $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$ , podemos usar la fórmula de Baker-Hausdorff, desentrelazar el operador de desplazamiento y aplicarlo al estado vacío

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) |0\rangle &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} |0\rangle, \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} |0\rangle. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Al desarrollar los términos  $e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$  y  $e^{-\alpha^*\hat{a}}$  en su serie de Taylor, usando la condición  $\hat{a}|0\rangle = 0$  y la definición  $|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$  podemos observar que un estado coherente puede ser construido como desplazamiento del estado vacío

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (1.31)$$

#### 1.1.4. Estadística de fotones

La probabilidad de detectar  $n$  fotones en un estado coherente esta dada por la distribución de Poisson

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (1.32)$$

donde  $|\alpha|^2$  es justamente el número medio de fotones del campo. En la figura (1.1) graficamos un par de ejemplos de la distribución de probabilidad de número de fotones para diferentes  $\bar{n}$ . Podemos calcular fácilmente el valor esperado del número de fotones y su varianza

$$\begin{aligned} \bar{n} = \langle n \rangle &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \\ \langle n^2 \rangle &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Entonces  $(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle$ , que es lo que se espera de la estadística de Poisson.

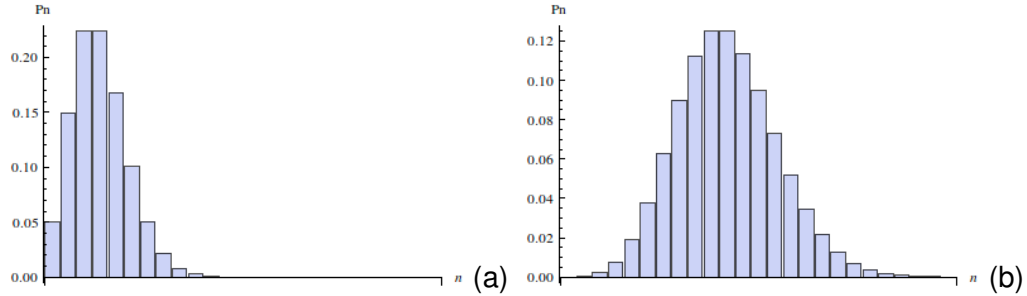


Figura 1.1: Distribución de número de fotones para un estado coherente con a)  $\bar{n} = 3$  y b)  $\bar{n} = 10$ .

### 1.1.5. Propiedades de los estados coherentes

#### Minimizan el principio de incertidumbre

Los estados coherentes también pueden ser entendidos como aquellos estados cuyos promedios siguen trayectorias clásicas de  $q$  y  $p$ . Definimos los operadores de posición  $\hat{q}$  y momento  $\hat{p}$  como

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{p} &= \frac{\sqrt{2\omega}}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).\end{aligned}\tag{1.34}$$

con  $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ . Tomando el valor esperado para un estado coherente, obtenemos

$$\langle q \rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\alpha + \alpha^*),\tag{1.35}$$

y

$$\langle q^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{2\omega} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{2\omega}(1 + (\alpha + \alpha^*)^2).\tag{1.36}$$

Así

$$(\Delta q)_\alpha^2 = \langle q^2 \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\alpha^2 = \frac{1}{2\omega}.\tag{1.37}$$

De manera similar podemos encontrar que

$$(\Delta p)_\alpha^2 = \frac{\omega}{2}, \quad (1.38)$$

Finalmente obtenemos

$$(\Delta q)_\alpha^2 (\Delta p)_\alpha^2 = \frac{1}{4}; \quad (1.39)$$

es decir, los estados coherentes minimizan el principio de incertidumbre.

### Los estados coherentes no son ortogonales

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \exp \left[ -\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \langle n | m \rangle, \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \right] \exp(\alpha\beta^*), \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha\beta^* \right], \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2}(\beta^* \alpha - \beta \alpha^*) \right] \exp \left[ -\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

El primer término solo es una fase compleja, por lo que

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\beta - \alpha|^2} \neq 0. \quad (1.41)$$

Por lo tanto, los estados coherentes no son ortogonales.

### Los estados coherentes son sobre-completos

La relación de completés para un estado coherente esta dada como una integral sobre el plano complejo de acuerdo con

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = 1, \quad (1.42)$$

donde  $d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha)d\text{Im}(\alpha)$ . La prueba de esto es la siguiente: escribiendo

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m}. \quad (1.43)$$

Es conveniente escribir la integral en coordenadas polares, de tal manera que  $\alpha = re^{i\phi}$  y  $d^2\alpha = r dr d\phi$ .

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} r^{n+m} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi}, \quad (1.44)$$

pero

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} = 2\pi \delta_{nm}. \quad (1.45)$$

y, con el cambio adicional de variables,  $r^2 = y$ ,  $2r dr = dy$ . Podemos escribir

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^{\infty} dy e^{-y} y^n. \quad (1.46)$$

Ya que

$$\int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy = n!, \quad (1.47)$$

Tenemos finalmente

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \pi, \quad (1.48)$$

lo que prueba la relación de completés.

Cualquier vector de estado  $|\psi\rangle$  en el espacio de Hilbert del mono modo de un campo cuantizado puede expresarse en términos de los estados coherentes como

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle. \quad (1.49)$$

Pero supongamos que el estado  $|\psi\rangle$  es un estado coherente  $|\beta\rangle$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha|\beta\rangle, \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta\right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$



Esta última ecuación muestra que los estados coherentes no son linealmente independientes. Se dice que los estados coherentes están “sobre completos”, debido a que hay más que suficientes estados disponibles para expresar cualquier estado en términos de estados coherentes.

## Capítulo 2

# El operador de fase en óptica cuántica

*A pesar de un siglo de desarrollo en el campo de la mecánica cuántica, no existe una respuesta generalmente aceptada para describir la fase de un campo electromagnético mediante un operador hermitiano. Este problema fue abordado por primera vez por F. London [17], quien señaló la ausencia de un operador hermitiano en mecánica cuántica correspondiente a la fase clásica. Después de London, el desafío fue tomado por una serie de investigadores, generando muchas e ingeniosas soluciones, acompañadas de una enorme y variada literatura [18, 19].*

### 2.1. El operador de fase de Dirac

La idea de un operador de fase llegó al campo de la óptica cuántica cuando Dirac abordó el problema de la cuantización del campo electromagnético. Dirac propuso que al igual que un número complejo se puede expresar en términos de su amplitud y su fase ( $z = re^{i\alpha}$ ), los operadores de creación y aniquilación

pueden ser expresados como

$$\hat{a} = e^{i\hat{\phi}}\sqrt{\hat{n}}, \quad (2.1)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{n}}e^{-i\hat{\phi}}, \quad (2.2)$$

donde  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ , es el operador de número de fotones y  $\hat{\phi}$  es interpretado como un operador hermitiano que describe la fase. Sin embargo, el enfoque de Dirac falla debido a la suposición de que un operador de fase hermitiano  $\hat{\phi}$  realmente existe. Si  $\hat{\phi}$  existe como un operador hermitiano, entonces  $\exp(i\hat{\phi})$  debería ser un operador unitario. De las ecuaciones (2.1) y (2.2) es fácil mostrar que

$$e^{i\hat{\phi}} = \hat{a}(\hat{n})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$e^{-i\hat{\phi}} = (\hat{n})^{-\frac{1}{2}}\hat{a}^\dagger = (e^{i\hat{\phi}})^\dagger. \quad (2.4)$$

Ahora

$$(e^{i\hat{\phi}})^\dagger(e^{i\hat{\phi}}) = 1, \quad (2.5)$$

pero

$$(e^{i\hat{\phi}})(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = \hat{a}\frac{1}{\hat{n}}\hat{a}^\dagger \neq 1. \quad (2.6)$$

Con esto se prueba que  $e^{i\hat{\phi}}$  no es un operador unitario, de lo cual se deduce que  $\hat{\phi}$  no es un operador hermitiano. La raíz del problema esta relacionada con el espectro de  $\hat{n}$ , debido a que no se extiende a valores negativos. Usando las expresiones (2.1) y (2.2) y de la relación de conmutación  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  se sigue que

$$e^{i\hat{\phi}}\hat{n}e^{-i\hat{\phi}} - \hat{n} = 1, \quad (2.7)$$

o de manera equivalente

$$e^{i\hat{\phi}}\hat{n} - \hat{n}e^{i\hat{\phi}} = e^{i\hat{\phi}}. \quad (2.8)$$

Al expandir en serie las exponenciales se puede comprobar que la ecuación (2.7) se cumple cuando

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] = i. \quad (2.9)$$

Es la relación de conmutación introducida por Dirac, la cual sugiere que el operador de número y el operador de fase obedecen una relación de conmutación canónica y por lo tanto las fluctuaciones en estas cantidades deben satisfacer la relación de incertidumbre

$$\Delta n \Delta \phi \geq \frac{1}{2}. \quad (2.10)$$

Por desgracia, las cosas no son tan simples. Para ver que algo está muy mal con lo anterior, tomamos los elementos de matriz del conmutador (2.9), para un estado de número  $|n\rangle$  y  $|n'\rangle$ , obtenemos la expresión  $(n' - n) \langle n' | \hat{\phi} | n \rangle = i \delta_{n', n}$ , que es una contradicción evidente cuando  $n' = n$ . Otro inconveniente del formalismo está relacionado con el hecho de que  $\hat{\phi}$  es un operador angular; es decir, que la relación (2.10) implicaría que si  $\Delta n$  es muy pequeño,  $\Delta \phi$  tendría un valor mucho mayor que  $2\pi$ , dejando fuera la naturaleza periódica de la fase.

## 2.2. El operador de fase de Susskind y Glogower

Susskind y Glogower [9] definieron un operador de fase similar al propuesto por Dirac

$$\hat{V} \equiv (\hat{n} + 1)^{-\frac{1}{2}} \hat{a}, \quad (2.11)$$

$$\hat{V}^\dagger \equiv \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.12)$$

donde  $\hat{V}$  y  $\hat{V}^\dagger$  son análogos a los factores de fase  $e^{\pm i\phi}$  y son usualmente llamados operadores de Susskind-Glogower. Los operadores de Susskind y Glogower tienen como eigenestados los estados de fase  $|\phi\rangle$  propuestos por London [17]

$$|\phi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle. \quad (2.13)$$

Usando la definición (2.11) se puede mostrar fácilmente que

$$\hat{V} |\phi\rangle = e^{i\phi} |\phi\rangle. \quad (2.14)$$

Estos estados de fase no son normalizables ni ortogonales. Sin embargo, el operador unidad puede ser escrito en términos de los estados de fase  $|\phi\rangle$  como

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi |\phi\rangle \langle\phi| = 1. \quad (2.15)$$

En la base de estados de número los operadores de Susskind-Glogower se escriben como

$$\hat{V} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|, \quad \hat{V}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \quad (2.16)$$

Se puede probar que

$$\hat{V}\hat{V}^\dagger = 1, \quad \hat{V}^\dagger\hat{V} = 1 - |0\rangle \langle 0|, \quad (2.17)$$

entonces

$$[\hat{V}, \hat{V}^\dagger] = |0\rangle \langle 0|. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, los operadores  $\hat{V}$  y  $\hat{V}^\dagger$  no conmutan ni son unitarios.

## 2.3. El operador de fase de Pegg y Barnett

Una de las propuestas más acertadas en la descripción cuántica de la fase es la introducida por Pegg y Barnett [10, 11]. Ellos mostraron que el espacio de estados de dimensión finita puede ser generado por  $(s+1)$  estados de fase  $|\theta_m\rangle$ ,

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp(i\theta_m n) |n\rangle, \quad (2.19)$$

con las siguientes propiedades

$$\sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = 1, \quad \langle \theta_m | \theta_n \rangle = \delta_{m,n}. \quad (2.20)$$

La fase  $\theta_m$  es definida como

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}, \quad m = 0, 1, \dots, s \quad (2.21)$$

donde el valor de la fase  $\theta_0$  es arbitrario. Los estados de fase fueron aplicados por Pegg y Barnett en su definición de un operador de fase hermitiano

$$\hat{\Phi}_s \equiv \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|; \quad (2.22)$$

del cual se sigue que  $|\theta_m\rangle$  son eigenestados del operador  $\hat{\Phi}_s$

$$\hat{\Phi}_s |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle. \quad (2.23)$$

### 2.3.1. Conmutador de número y fase

De la definición del estado de fase (2.22), podemos expresar el proyector  $|\theta_m\rangle \langle \theta_m|$  en términos de la base de estados de número

$$|\theta_m\rangle \langle \theta_m| = (s+1)^{-1} \sum_{n,n'=0}^s \exp[i(n-n')\theta_m] |n'\rangle \langle n|. \quad (2.24)$$

Al insertar (2.24) en la ecuación (2.22), el operador  $\hat{\Phi}_\theta$  puede ser escrito como

$$\hat{\Phi}_\theta = \theta_0 + \frac{s\pi}{s+1} + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'}^s \frac{\exp[i(n'-n)\theta_0] |n'\rangle \langle n|}{\exp[i(n'-n)\frac{2\pi}{s+1}] - 1}. \quad (2.25)$$

Similarmente el operador de número  $\hat{n}$  puede ser escrito como

$$\hat{n} = \sum_{n=0}^s n |n\rangle \langle n| = \frac{s}{2} + \sum_{m \neq m'}^s \frac{|\theta_{m'}\rangle \langle \theta_m|}{\exp[-i(m'-m)\frac{2\pi}{s+1}] - 1}, \quad (2.26)$$

donde se uso el hecho de que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \exp(-in\theta_m) |\theta_m\rangle. \quad (2.27)$$

El conmutador de fase y número es calculado usando las expresiones (2.25) y (2.26)

$$[\hat{\Phi}_\theta, \hat{n}] = \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'} \frac{(n-n') \exp[i(n'-n)\theta_0] |n'\rangle \langle n|}{\exp[-i(n'-n)\frac{2\pi}{s+1}] - 1}. \quad (2.28)$$

Como podemos ver esta expresión es muy diferente a la relación de Dirac (2.9).

### 2.3.2. Operadores de creación y aniquilación

Una vez que el operador de fase  $\hat{\Phi}_s$  está definido, funciones de este operador pueden ser introducidas. Pegg y Barnett construyeron un operador unitario  $\exp(i\hat{\Phi}_s)$  como

$$\exp(i\hat{\Phi}_s) = \sum_{m=0}^s \exp(i\theta_m) |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (2.29)$$

que actúa como un operador de desplazamiento cíclico sobre los estados de número

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\Phi}_s) |n\rangle &= |n-1\rangle, & n \neq 0 \\ \exp(i\hat{\Phi}_s) |0\rangle &= \exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

El operador  $\exp(i\hat{\Phi}_s)$  desciende los estados de número una unidad; sin embargo, al aplicarlo al estado de vacío  $|0\rangle$  se recupera el estado  $s$ . La representación de  $\exp(i\hat{\Phi}_s)$ , en la base de estados de número es

$$\exp(i\hat{\Phi}_s) = \sum_{n=1}^s |n-1\rangle \langle n| + \exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle \langle 0|, \quad (2.31)$$

Por simplicidad consideremos una fase de referencia  $\theta_0 = 0$ , tal que

$$\exp(i\hat{\Phi}_s) = |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 2| + \dots + |s-1\rangle \langle s| + |s\rangle \langle 0|. \quad (2.32)$$

Los operadores de creación  $\hat{a}^\dagger$  y de aniquilación  $\hat{a}$ , se pueden construir copiando la definición original de Dirac, y en la representación de los estados de número se expresan como

$$\begin{aligned}\hat{a}_s &\equiv \exp(i\hat{\Phi}_\theta)\hat{n}^{1/2}, \\ &= |0\rangle\langle 1| + 2^{1/2}|1\rangle\langle 2| + \dots + s^{1/2}|s-1\rangle\langle s|.\end{aligned}\quad (2.33)$$

con  $\hat{a}_s^\dagger$  el conjugado hermitiano de  $\hat{a}_s$ , definido como  $\hat{a}_s^\dagger \equiv \hat{n}^{1/2} \exp(-i\hat{\Phi}_\theta)$ . Cuando  $s$  tiende a infinito,  $\hat{a}_s$  se convierte en el operador de aniquilación convencional.

La relación de conmutación entre los operadores  $\hat{a}_s^\dagger$  y  $\hat{a}_s$  tiene una forma distinta a la relación (1.3)

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 - (s+1)|s\rangle\langle s|. \quad (2.34)$$

El segundo término en este conmutador hace que su traza sea cero, como debe ser para un espacio de estado de dimensión finita.

### 2.3.3. El operador de fase y la transformada discreta de Fourier

La representación matricial del operador (2.32) tiene la forma

$$\exp(i\hat{\Phi}_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

con eigenvalores

$$\omega_j = \exp\left[i\frac{2\pi}{s+1}j\right], \quad j = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (2.36)$$



donde  $\omega_j = \exp(2\pi ij/s + 1)$  son las  $(s + 1)$  raíces de la unidad. Se puede verificar fácilmente que

$$\exp(i\hat{\Phi}_s) = F_s Z F_s^\dagger, \quad (2.37)$$

donde  $Z$  es una matriz diagonal cuyos elementos son los eigenvalores de  $\exp(i\hat{\Phi}_s)$  y  $F_s$  es la transformada de Fourier discreta, definida como

$$F_s = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \sum_{k=0}^s e^{i\frac{2\pi}{s+1}nk} |n\rangle \langle k|. \quad (2.38)$$

Su forma matricial se muestra a continuación

$$Z = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_s \end{pmatrix}, \quad F_s = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \cdots & \omega_s \\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & \vdots & \cdots & \omega_s^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \omega_0^s & \omega_1^s & \cdots & \cdots & \omega_s^s \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Definimos ahora un operador  $\hat{\phi}$  mediante la aplicación de la transformada de Fourier discreta  $F_s$  al operador de número finito  $\hat{N}_s$  [20]

$$\hat{\phi} \propto F_s \hat{N}_s F_s^\dagger. \quad (2.40)$$

El operador de número finito  $\hat{N}_s$  se define como

$$\hat{N}_s = \sum_{k=0}^s k |k\rangle \langle k|. \quad (2.41)$$

Además  $\hat{F}_s^\dagger = F_s^{-1}$ . La Transformada de Fourier discreta del operador de número es entonces

$$F_s \hat{N}_s F_s^\dagger = \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^s \sum_{k=0}^s |n\rangle \langle k| \sum_{m=0}^s m e^{i\frac{2\pi}{s+1}(n-k)m}. \quad (2.42)$$

De la definición de los estados de fase (2.19), podemos calcular el proyector

$$|\theta_m\rangle \langle \theta_m| = \frac{1}{s+1} \sum_{n,n'=0}^s e^{i(n-n')\theta_m} |n\rangle \langle n'|, \quad (2.43)$$

y escribir la ecuación (2.42) de forma más compacta como

$$F_s \frac{2\pi \hat{N}_s}{s+1} F_s^\dagger = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (2.44)$$

donde  $\theta_m = \frac{2\pi m}{s+1}$ . Nótese que la parte derecha de (2.44) es la expresión para el operador de fase de Pegg y Barnett definido en (2.22). Esto demuestra que el operador de fase de Pegg-Barnett y el operador de número finito están relacionados por medio de la transformada discreta de Fourier.



# Capítulo 3

## Sistemas cuánticos de dimensión finita

*En los últimos años se ha puesto mucha atención a la investigación de sistemas cuánticos caracterizados por un número finito de estados. Este tipo de sistemas fueron estudiados originalmente por Weyl y Schwinger [1, 21] en su descripción de la cinemática de un sistema cuántico como un grupo abeliano de rotaciones. Estos sistemas pueden ser asociados con sistemas de espín, átomos de varios niveles, campos ópticos con un número finito de fotones, electrones o moléculas con un número finito de sitios, etc. También se han utilizado para la construcción de un operador de fase hermitiano en mecánica cuántica [10, 11]. Los sistemas cuánticos de dimensión finita también son de gran interés debido a su conexión con la criptografía cuántica y la computación cuántica.*

### 3.1. Estados coherentes finitos

Los estados coherentes para el oscilador armónico estándar están bien entendidos; sin embargo, las contrapartes discretas todavía están bajo discusión.

La razón de esto se puede remontar al hecho de que, como es señalado en las referencias [22, 23], en el continuo sólo tenemos un oscilador armónico, mientras que para los sistemas finitos hay varios candidatos para ese papel, cada uno con sus propias virtudes y desventajas.

Los estados coherentes definidos en un espacio de Hilbert de dimensión finita, generalmente se construyen siguiendo el enfoque de Glauber o el procedimiento de truncamiento. Formalmente, un estado coherente  $|\alpha\rangle_{(s)}$  generado por  $(s + 1)$  estados de número puede ser expresado como

$$|\alpha\rangle_{(s)} = \sum_{n=0}^s C_n^{(s)} |n\rangle. \quad (3.1)$$

para un entero positivo arbitrario  $s$ . Una definición de estos estados fue propuesta por Buzek [24], sin embargo una forma analítica de estos estados no fue encontrada; no obstante, Buzek y colaboradores prueban que al menos numéricamente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C_n^{(s)} = \exp(-|\alpha|^2/2) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (3.2)$$

lo que significa que al incrementar  $s$ , el estado  $|\alpha\rangle$  dado por la ecuación (3.1) se aproxima al estado coherente ordinario. Una solución analítica al problema es presentado por Miranowicz, Piatek y Tanaś [25]; ellos encuentran que los coeficientes de la expresión (3.1) son de la forma

$$C_n^s = \frac{s!}{s+1} (n!)^{-1/2} (-i)^n \sum_{k=0}^s \exp(ix_k |\alpha|) \times \frac{He_n(x_k)}{He_s^2(x_k)}, \quad (3.3)$$

donde las funciones  $He_n(x_k)$  son los polinomios de Hermite y  $x_k$  son las raíces de los polinomios de Hermite de orden  $(s + 1)$ , ( $He_{s+1}(x_k) = 0$ ). Los polinomios de Hermite  $He_n(x)$  están relacionados a los polinomios de Hermite  $H_n$  por  $He_n(x) = 2^{-n/2} H_n(x/\sqrt{2})$ .

Otra alternativa para definir estos estados se basa en el truncamiento de los estado de número de un estado coherente ordinario a un número finito de

estados de Fock con amplitudes correctamente normalizadas. Este enfoque ha sido ampliamente desarrollado por Kuang [26, 27] y Opatrny [28]. Nos referiremos a estos estados como “estados coherentes truncados”. Los estados coherentes truncados  $|\bar{\alpha}\rangle_{(s)}$ , donde  $\bar{\alpha} = |\bar{\alpha}| \exp(i\varphi)$  se pueden expresar como

$$|\bar{\alpha}\rangle_{(s)} = N_s \exp(\bar{\alpha} \hat{a}_s^\dagger) |0\rangle = \sum_{n=0}^s \exp(in\varphi) b_n^{(s)} |n\rangle, \quad (3.4)$$

donde

$$b_n^{(s)} = N_s |\bar{\alpha}|^n (n!)^{-1/2}, \quad (3.5)$$

con la constante de normalización

$$N_s = \left( \sum_{n=0}^s \frac{|\bar{\alpha}|^{2n}}{n!} \right)^{-1/2} = \{(-1)^s L_s^{-s-1}(|\bar{\alpha}|^2)\}^{-1/2}, \quad (3.6)$$

donde  $L_s^n(x)$  son los polinomios de Laguerre asociados.

## 3.2. Eigenvectores del operador de aniquilación finito

Copiando la definición propuesta por Susskind- Glogower en (2.11), definimos los operadores escalera  $\hat{a}_s$  y  $\hat{a}_s^\dagger$  en un espacio de dimensión finita como

$$\hat{a}_s = \sqrt{\hat{N}_s + 1} e^{i\hat{\Phi}_s}, \quad (3.7)$$

$$\hat{a}_s^\dagger = e^{-i\hat{\Phi}_s} \sqrt{\hat{N}_s + 1}, \quad (3.8)$$

donde  $\hat{N}_s$  es el operador de número finito y  $e^{i\hat{\Phi}_s}$  es el operador unitario de Pegg y Barnett, definidos en (2.41) y (2.32). En la representación de los estados de

número los operadores  $\hat{a}_s$  y  $\hat{a}_s^\dagger$  se expresan como

$$\hat{a}_s = \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{j+1} |j\rangle \langle j+1| + \sqrt{s+1} |s\rangle \langle 0|, \quad (3.9)$$

$$\hat{a}_s^\dagger = \sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{j+1} |j+1\rangle \langle j| + \sqrt{s+1} |0\rangle \langle s|. \quad (3.10)$$

La representación matricial del operador (3.9) tiene la forma

$$\hat{a}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{s} \\ \sqrt{s+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

con eigenvalores

$$\alpha_k = \eta^{1/s+1} \omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (3.12)$$

donde  $\eta = \sqrt{(s+1)!}$  y  $\omega_k = e^{i\frac{2\pi}{s+1}k}$  son las  $(s+1)$  raíces de la unidad. Se puede comprobar fácilmente que la matriz (3.11) puede ser expresada como

$$\hat{a}_s = \hat{D}_s \hat{F}_s \Lambda_s \hat{F}_s^\dagger \hat{D}_s^{-1}, \quad (3.13)$$

donde  $F_s$  es la transformada de Fourier discreta, definida como

$$F_s = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n,k=0}^s e^{i\frac{2\pi kn}{s+1}} |n\rangle \langle k|, \quad (3.14)$$

$\Lambda_s$  y  $\hat{D}_s$  son las matrices diagonales

$$\Lambda_s = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_s = \frac{\sqrt{s+1}}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\eta}{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta^2}{\sqrt{2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\eta^s}{\sqrt{s!}} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

En la notación de Dirac la matriz  $\hat{D}_s$  se escribe como

$$D = \frac{\sqrt{s+1}}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^s \frac{\eta^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \langle m|, \quad (3.16)$$

con la constante de normalización

$$N = \sum_{m=0}^s \frac{\eta^{2m}}{m!}. \quad (3.17)$$

Del producto de las expresiones (3.14) y (3.16) obtenemos la matriz de vectores propios de  $\hat{a}_s$ .

$$DF_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^s \sum_{k=0}^s \frac{\eta^m}{\sqrt{m!}} e^{i\frac{2\pi}{s+1}mk} |m\rangle \langle k|, \quad (3.18)$$

compuesta por los vectores propios

$$|\alpha_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^s \frac{\eta^m}{\sqrt{m!}} e^{i\frac{2\pi}{s+1}mk} |m\rangle, \quad k = 0, 1, \dots, s. \quad (3.19)$$

Esta definición limita a un número finito de estados coherentes, debido a que los estados coherentes  $|\alpha\rangle$  son justamente los  $(s+1)$  vectores propios de  $\hat{a}_s$ .

La ecuación (3.19) se puede escribir de manera más sencilla como

$$|\alpha_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^s \frac{\alpha_k^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle, \quad (3.20)$$

La distribución de número de fotones  $P_n$  resulta ser

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{1}{N} \frac{\eta^{2n}}{n!}. \quad (3.21)$$

### 3.2.1. Forma analítica de un estado coherente finito

Un estado coherente finito lo definimos como eigenestado del operador de aniquilación finito

$$\hat{a}_s |\alpha_k\rangle = \alpha_k |\alpha_k\rangle. \quad (3.22)$$



Como los estados de número  $|n\rangle$  forman un conjunto completo podemos expandir los estados  $|\alpha_k\rangle$  como

$$|\alpha_k\rangle = \sum_{n=0}^s E_n |n\rangle. \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.23) en (3.22) y operando (3.9) obtenemos la ecuación

$$\sum_{j=0}^{s-1} \sqrt{j+1} E_{j+1} |j\rangle + \sqrt{s+1} E_0 |s\rangle = \alpha_k \sum_{j=0}^s E_j |j\rangle, \quad (3.24)$$

de la cual se puede encontrar la relación de coeficientes

$$E_j = \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} E_0, \quad E_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{s+1}} E_s. \quad (3.25)$$

La ecuación (3.23) se puede expresar entonces como

$$|\alpha_k\rangle = \frac{E_s}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \frac{\alpha_k^{m+1}}{\sqrt{m!}} |m\rangle. \quad (3.26)$$

El coeficiente  $E_s$  se encuentra de la condición de normalización

$$\langle \alpha_k | \alpha_k \rangle = 1 = \frac{|E_s|^2}{s+1} C, \quad (3.27)$$

donde

$$C = \sum_{j=0}^s \frac{\eta^{\frac{2(j+1)}{s+1}}}{j!}. \quad (3.28)$$

El estado coherente  $|\alpha_k\rangle$  queda determinado finalmente como

$$|\alpha_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{j=0}^s \frac{\alpha_k^{j+1}}{\sqrt{j!}} |j\rangle. \quad (3.29)$$

La distribución de número de fotones  $P_n$  es definida como

$$P_n = |\langle n | \alpha_k \rangle|^2 = \frac{1}{C} \frac{\eta^{\frac{2(n+1)}{s+1}}}{n!}. \quad (3.30)$$

### 3.3. Operador de desplazamiento finito

Los operadores de creación  $\hat{a}_s^\dagger$  y aniquilación  $\hat{a}_s$  en un espacio  $s$ -dimensional actúan sobre los estados de número de la siguiente forma

$$\hat{a}_s |0\rangle = \sqrt{s+1} |s\rangle, \quad (3.31)$$

$$\hat{a}_s |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (3.32)$$

$$\hat{a}_s^\dagger |s\rangle = \sqrt{s+1} |0\rangle \quad (3.33)$$

$$\hat{a}_s^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (3.34)$$

La relación de conmutación de los operadores  $\hat{a}_s$  y  $\hat{a}_s^\dagger$  difiere de la relación convencional  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ . En cambio

$$[\hat{a}_s, \hat{a}_s^\dagger] = 1 - (s+1) |0\rangle \langle 0|. \quad (3.35)$$

Dado que los conmutadores  $[\hat{a}_s, [\hat{a}_s, \hat{a}_s^\dagger]]$  y  $[\hat{a}_s^\dagger, [\hat{a}_s, \hat{a}_s^\dagger]]$  son diferentes de cero, no podemos aplicar el teorema de Baker-Hausdorff. Esto impide desentrelazar el operador de desplazamiento

$$\hat{D}_s(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}_s^\dagger - \alpha^* \hat{a}_s}. \quad (3.36)$$

Entonces el estado coherente finito es definido directamente como

$$|\alpha\rangle_s = e^{\alpha \hat{a}_s^\dagger - \alpha^* \hat{a}_s} |0\rangle, \quad (3.37)$$

con  $\hat{a}_s$  y  $\hat{a}_s^\dagger$  definidos en (3.9). La distribución de fotones esta dada por la expresión

$$P_n = \left| \langle n | e^{\alpha \hat{a}_s^\dagger - \alpha^* \hat{a}_s} |0\rangle \right|^2. \quad (3.38)$$

En la figura (3.1) se muestra la distribución de fotones para diferentes valores de  $\alpha$ .

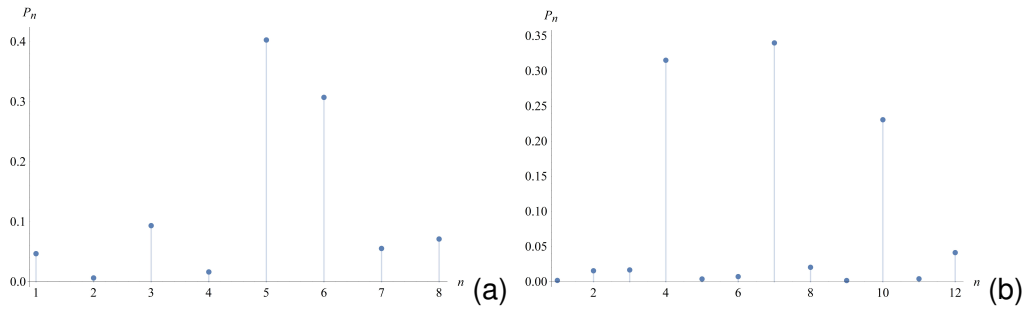


Figura 3.1: Distribución de número de fotones para un estado coherente finito con a)  $s = 7$  y  $\alpha = 1$  y b)  $s = 11$  y  $\alpha = 4$ .

A diferencia del número finito de estados coherentes definidos en la sección (3.2). Aquí tenemos un número infinito de estados coherentes debido a que  $\alpha$  puede tomar una infinidad de valores. Sin embargo, una expresión analítica para la distribución de fotones no fue posible hallar debido a que el cálculo debe hacerse directamente de la definición  $|\alpha\rangle_s = e^{\alpha\hat{a}_s^\dagger - \alpha^*\hat{a}_s} |0\rangle$ .

## Capítulo 4

# Funciones de distribución de probabilidad

*Una forma muy interesante de estudiar estados cuánticos es a través de funciones de cuasi-propabilidad. Estas funciones son consideradas herramientas matemáticas que facilitan los cálculos para obtener una descripción estadística completa del estado cuántico de un sistema físico. La formulación espacio-fase de la mecánica cuántica tiene sus raíces en la obra clásica de Wigner, donde dio a conocer la función de distribución en el espacio-fase, mejor conocida como función de distribución de Wigner. En muchas situaciones, la función de distribución de Wigner hace un trabajo respetable; sin embargo, hay casos en que otras funciones de distribución, que tienen propiedades diferentes a la función de distribución de Wigner, son necesarias. Otras funciones de distribución que se han considerado son las funciones de Glauber-Sudarshan, Husimi y Kirkwood.*

## 4.1. Distribuciones de probabilidad en el espacio fase

Para un conjunto de estados cuánticos  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ , el operador de densidad está dado como

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (4.1)$$

donde  $p_i$  son las probabilidades de encontrar el sistema en el  $i$ -ésimo elemento del conjunto y

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1. \quad (4.2)$$

El valor esperado de un operador  $\hat{O}$  es

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle. \quad (4.3)$$

Podemos introducir en ambos lados del operador de densidad la unidad para obtener

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m |m\rangle \rho_{mn} \langle n|. \quad (4.4)$$

Todos los elementos de matriz  $\rho_{mn} = \langle m | \hat{\rho} | n \rangle$  se requieren para determinar el operador  $\hat{\rho}$ . Los elementos diagonales,  $P_n = \rho_{nn}$ , son justamente las probabilidades de encontrar  $n$  fotones en el campo.

### 4.1.1. Función de distribución-P de Glauber-Sudarshan

Por otro lado, si resolvemos la unidad con estados coherentes (ver expresión 1.42) en ambos lados de  $\hat{\rho}$  obtenemos la expresión

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \int \int \langle \alpha | \hat{\rho} | \beta \rangle | \alpha \rangle \langle \beta | d^2\alpha d^2\beta. \quad (4.5)$$

Otra forma, introducida por Glauber y Sudarshan, de representar  $\hat{\rho}$  en términos de estados coherentes es

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha, \quad (4.6)$$

donde  $P(\alpha)$  es la función de peso conocida como función-P de Glauber-Sudarshan. Podemos obtener una expresión explícita para la función  $P(\alpha)$  introduciendo (4.6) en la función característica

$$C(\beta) = \text{Tr}\{\hat{\rho} \exp(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})\}. \quad (4.7)$$

Obtenemos

$$C(\alpha) = \int P(\beta) \text{Tr}\{|\beta\rangle \langle\beta| \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})\} d^2\beta. \quad (4.8)$$

Usando la fórmula de Baker-Hausdorff podemos escribir la expresión anterior como

$$C(\alpha) e^{|\alpha|^2/2} = \int P(\beta) \text{Tr}\{|\beta\rangle \langle\beta| e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}\} d^2\beta; \quad (4.9)$$

escribiendo explícitamente la traza

$$C(\alpha) e^{|\alpha|^2/2} = \int P(\beta) \langle\beta| e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} |\beta\rangle d^2\beta. \quad (4.10)$$

Después de una transformada de Fourier, obtenemos  $P(\alpha)$  de la función característica

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \text{Tr}\{\hat{\rho} \exp(\beta\hat{a}^\dagger) \exp(-\beta^*\hat{a})\} d^2\beta. \quad (4.11)$$

### 4.1.2. Función de distribución-Q de Husimi

Bajo ciertas condiciones se pueden representar otros operadores, además de  $\hat{\rho}$  en la forma diagonal de estados coherentes, a veces llamada la representación  $P$ . Para el operador  $\hat{B}$ , la representación  $P$  es

$$\hat{B} = \int B_p(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha. \quad (4.12)$$

El promedio de  $\hat{B}$  esta dado por

$$\begin{aligned}\langle \hat{B} \rangle &= \text{Tr}(\hat{B}\hat{\rho}), \\ &= \sum_n \langle n | \int B_p(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha | \hat{\rho} |n\rangle d^2\alpha, \\ &= \int B_p(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle d^2\alpha.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Evidentemente, el valor esperado del operador de densidad con respecto al estado coherente también juega el papel de una distribución de probabilidad en el espacio de fase. Generalmente se le llama función-Q de Husimi

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle. \quad (4.14)$$

Para  $\hat{B} = \hat{I}$  obtenemos la condición de normalización

$$\int Q(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (4.15)$$

A diferencia de la función  $P$ , la función  $Q$  es positiva para todos los estados cuánticos. Por supuesto, siempre podemos definir la representación  $Q$  correspondiente del operador  $\hat{B}$  como el valor esperado con respecto al estado coherente,

$$\begin{aligned}B_Q(\alpha, \alpha^*) &\equiv \langle \alpha | \hat{B} | \alpha \rangle, \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_n \sum_m \frac{B_{nm}}{\sqrt{n!m!}} (\alpha^*)^n (\alpha)^m,\end{aligned}\quad (4.16)$$

donde  $B_{nm} = \langle n | \hat{B} | m \rangle$ . Una vez más, calculemos  $\langle \hat{B} \rangle$ , pero ahora escribimos  $\hat{\rho}$  en la representación  $P$ ,

$$\begin{aligned}\langle \hat{B} \rangle &= \text{Tr}(\hat{B}\hat{\rho}) = \text{Tr} \int \hat{B}P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha | d^2\alpha, \\ &= \int P(\alpha) \langle \alpha | \hat{B} | \alpha \rangle d^2\alpha, \\ &= \int P(\alpha) B_Q(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Por lo tanto, si usamos la representación  $P$  de  $\hat{\rho}$ , necesitamos la representación  $Q$  de  $\hat{B}$ , o de la ecuación (4.13), si usamos la representación  $P$  de  $\hat{B}$ , necesitamos la representación  $Q$  de  $\hat{\rho}$ .

### 4.1.3. Función de distribución de Wigner

En 1932, Wigner introdujo la función  $W(q, p)$ , conocida como función de distribución de Wigner. La función de distribución de Wigner es quizás la más famosa y conocida de todas las funciones de quasiprobabilidad, debido a que la formulación espacio-fase de la mecánica cuántica tiene sus raíces en la obra clásica de Wigner. La función  $W(q, p)$  se define, para un operador de densidad arbitraria  $\hat{\rho}$ , como

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int du e^{iup} \left\langle q + \frac{u}{2} \left| \hat{\rho} \left| q - \frac{u}{2} \right. \right\rangle. \quad (4.18)$$

la cual contiene información completa sobre el estado del sistema,  $|\psi\rangle$ .

La función de distribución de Wigner puede ser escrita también como

$$W(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \int \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) C(\beta) d^2\beta, \quad (4.19)$$

donde  $\alpha = (q+ip)/\sqrt{2}$ , y  $C(\beta)$  está en términos de los operadores de aniquilación y creación como

$$C(\beta) = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{D}(\beta)\} = \text{Tr}\{\hat{\rho}\exp(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})\}, \quad (4.20)$$

la función  $C(\beta)$  es comúnmente llamada función característica.

### 4.1.4. Función de distribución de Kirkwood-Rihaczek

Existe una función de distribución compleja que tienen la misma cantidad de información que las funciones de distribución reales (Wigner, Glauber-Sudarshan o Husimi), llamada función de distribución de Kirkwood [6]. En 1945, Dirac [29] introdujo esencialmente la misma distribución que Kirkwood para observables que no conmutan, con el objetivo de discutir las trayectorias de movimiento de una partícula en mecánica cuántica. En 1968, la función de distribución de Kirkwood fue redescubierta por Rihaczek [30] para su uso en la teoría de análisis



de frecuencia de señales clásicas. La función de distribución de Kirkwood-Rihaczek puede ser escrita como [31, 32, 33]

$$K(\beta, \beta^*) = \int \int d^2\alpha \exp(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha) \exp\left(\frac{\alpha^2 - \alpha^{*2}}{4}\right) C(\alpha), \quad (4.21)$$

con  $\beta = (q + ip)/2^{1/2}$ ,  $\alpha = (u + iv)/2^{1/2}$  y  $d^2\alpha = dudv$ . La función característica  $C(\alpha)$ , en términos de los operadores de aniquilación  $\hat{a}$  y creación  $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad (4.22)$$

como

$$C(\alpha) = \text{Tr}\{\rho e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}\}, \quad (4.23)$$

donde  $\rho$  es la matriz de densidad. La ecuación (4.21) puede ser expresada como una transformada de Fourier

$$K(q, p) = \int \int dudv e^{iup} e^{-ivq} \text{Tr}\{\rho e^{iv\hat{q}} e^{-iu\hat{p}}\}. \quad (4.24)$$

## 4.2. Distribuciones de probabilidad discretas

La investigación de sistemas cuánticos en un espacio de Hilbert de dimensión finita se ha utilizado ampliamente para la introducción de un operador de fase hermitiano. Los estados de sistemas cuánticos en espacios de Hilbert de dimensión finita pueden describirse mediante vectores  $n$ -dimensionales o mediante los operadores de densidad correspondientes (que son iguales a matrices  $n \times n$ ) [34]. En este punto surge una pregunta natural: ¿es posible aplicar un formalismo en el espacio-fase para una descripción de los estados cuánticos en un espacio de Hilbert de dimensión finita?. El trabajo pionero en esta dirección ha sido realizado por Wootters [35] y por Galetti y Toledo Piza [36]; estos autores han introducido la función de Wigner en espacios de fase discretos, que están asociados con estados en un espacio de Hilbert finito. Vaccaro y Pegg

han aplicado el enfoque de Wootters y han introducido una función de Wigner para el número y la fase dentro del marco del formalismo de Pegg-Barnett.

### 4.2.1. Función de Wigner para número y fase

Consideremos la función de Wigner en la forma [37]

$$W(\alpha) = \int C(\beta) \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) d^2\beta, \quad (4.25)$$

donde la función característica  $C(\beta)$  esta definida como

$$C(\beta) = \text{Tr}[\hat{D}(\beta)\hat{\rho}], \quad (4.26)$$

con  $\hat{\rho}$  la matriz de densidad del sistema y  $\hat{D}(\beta) = \exp(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})$  el operador de desplazamiento de Glauber. En analogía se puede definir la función

$$C_{\hat{n}-\hat{\phi}}(k, \theta) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\hat{D}_{\hat{n}-\hat{\phi}}(k, \theta)e^{-i(k\phi-n\theta)} + \text{c.c.})\hat{\rho}], \quad (4.27)$$

donde

$$\hat{D}_{\hat{n}-\hat{\phi}}(k, \theta) = e^{i\theta} e^{-i\theta\hat{n}} (\hat{V}^\dagger)^k, \quad (4.28)$$

con  $\hat{V}^\dagger$  el operador de Susskind-Glogower definido en (3.25). Escribiendo la matriz de densidad  $\rho$  en la base de estados de número como

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} Q_{m,l} |m\rangle \langle l|, \quad (4.29)$$

la expresión (4.27) se puede escribir como

$$\begin{aligned} C_{\hat{n}-\hat{\phi}}(k, \theta) &= \frac{e^{i\theta k}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} Q_{m,l} \text{Tr}[e^{-i\theta\hat{n}} (\hat{V}^\dagger)^k |m\rangle \langle l|] e^{-i(k\phi-n\theta)} + \text{c.c.} \\ &= \frac{e^{i\theta k}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} Q_{m,l} \text{Tr}[|m+k\rangle \langle l|] e^{-i\theta(m+k)} e^{-i(k\phi-n\theta)} + \text{c.c.} \\ &= \frac{e^{i\theta k}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} Q_{m,m+k} e^{-i\theta(m+k)} e^{-i(k\phi-n\theta)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (4.30)$$

La doble integral sobre todo el espacio en la expresión (4.25) se convierte en una sumatoria y una integral simple

$$W(n, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=-n}^{\infty} \int_0^{2\pi} C_{\hat{n}-\hat{\phi}}(k, \theta) d\theta, \quad (4.31)$$

Insertando la ecuación (4.30) en (4.31) y usando la identidad  $\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta = 2\pi\delta_{n,m}$ , obtenemos finalmente una expresión de la distribución de Wigner para número y fase

$$W(n, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-n}^{\infty} (Q_{n,n+k} e^{-ik\phi} + Q_{n+k,n} e^{ik\phi}). \quad (4.32)$$

La función de Wigner para número y fase para un estado coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4.33)$$

está dada por

$$W(n, \phi) = \frac{e^{-|\alpha|^2} \alpha^n}{2\pi\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k \cos[(n-k)\phi]}{\sqrt{k!}}. \quad (4.34)$$

En la figura (4.1) graficamos la función de Wigner para número y fase con amplitud  $\alpha = 4$ .

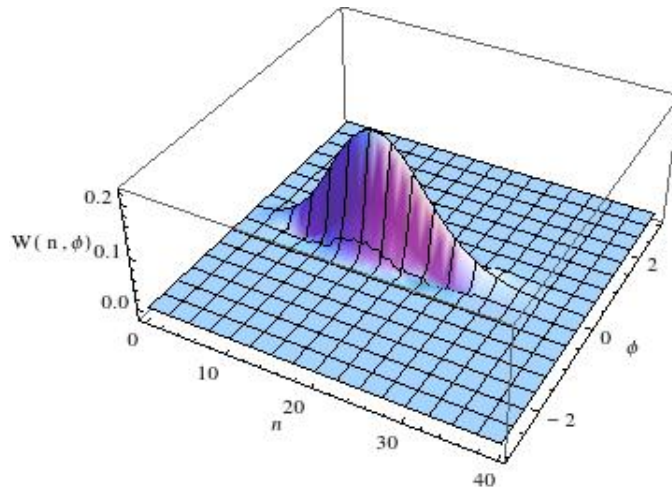


Figura 4.1: Función de Wigner para número y fase para un estado coherente con amplitud  $\alpha = 4$ .

### 4.2.2. Función de Kirkwood-Rihaczek para número y fase

De la misma forma en que se relacionan las variables canónicas de posición y momento se encuentran relacionadas las variables de número y fase. En ese sentido, cambiamos los operadores  $(\hat{q}, \hat{p})$  por  $(\hat{\Phi}_s, \hat{N}_s)$  en la expresión (4.24) para obtener una expresión de Kirkwood para número y fase.

Debido a que el operador de fase se encuentra definido en un espacio de Hilbert  $s$ -dimensional, la doble integral en (4.24) se convierte en una suma y una integral simple

$$K(n, \theta) = \sum_{k=0}^s \int_0^{2\pi} d\phi e^{in\phi} e^{-ik\theta} \text{Tr}\{\rho e^{ik\hat{\Phi}_s} e^{-i\phi\hat{N}_s}\}. \quad (4.35)$$

Escribiendo la matriz de densidad  $\rho$  en la base de estados de número como

$$\rho = \sum_{l=0}^s \sum_{p=0}^s Q_{l,p} |l\rangle \langle p|. \quad (4.36)$$

La expresión (4.35) se puede escribir como

$$K(n, \theta) = \sum_{k,l,p=0}^s \int_0^{2\pi} d\phi Q_{l,p} e^{in\phi} e^{-ik\theta} \text{Tr}\{e^{ik\hat{\Phi}_s} e^{-i\phi\hat{N}_s} |l\rangle \langle p|\}. \quad (4.37)$$

Se debe tener cuidado al aplicar el operador exponencial de Pegg-Barnett, debido a que opera sobre los estados de número de manera cíclica. Los eigenestados del operador exponencial de Pegg y Barnett pueden ser localizados en un reloj de módulo<sup>1</sup>  $(s + 1)$ ,

$$e^{ik\hat{\Phi}} |l\rangle = |\text{Mod}[l - k, s + 1]\rangle. \quad (4.38)$$

Después de algunas simplificaciones, la expresión (4.37) se puede expresar como

$$\begin{aligned} K(n, \theta) &= 2\pi \sum_{k=0}^s \sum_{p=0}^s Q_{n,p} \text{Tr}\{|\text{Mod}[n - k, s + 1]\rangle \langle p|\} e^{-ik\theta}, \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^s Q_{n, \text{Mod}[n-k, s+1]} e^{-ik\theta}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

<sup>1</sup> Para mayor información de la función modulo se recomienda revisar el apéndice A.

### 4.2.3. Distribución de Kirkwood-Rihaczek para un estado coherente finito

En el capítulo tres definimos un par de expresiones para un estado coherente discreto. A continuación se muestra analíticamente la expresión de Kirkwood-Rihaczek para dichos estados. **Definición uno:** La distribución de Kirkwood-Rihaczek para número-fase para el estado coherente finito definido en (3.20), es de la forma

$$K(n, \theta) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^s \frac{\alpha_k^n \alpha_k^{*M}}{\sqrt{n!} \sqrt{M!}} e^{-ik\theta}, \quad (4.40)$$

donde

$$\alpha_k = \eta^{1/s+1} \omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (4.41)$$

$\eta = \sqrt{(s+1)!}$  y  $\omega_k = e^{i\frac{2\pi}{s+1}k}$  son las  $(s+1)$  raíces de la unidad. La constante de normalización es  $N = \sum_{m=0}^s \frac{\eta^{2m}}{m!}$ , y  $M = \text{Mod}[n - k, s + 1]$ .

En la figura (4.2) graficamos la ecuación (4.40) para un espacio con  $s = 11$ .

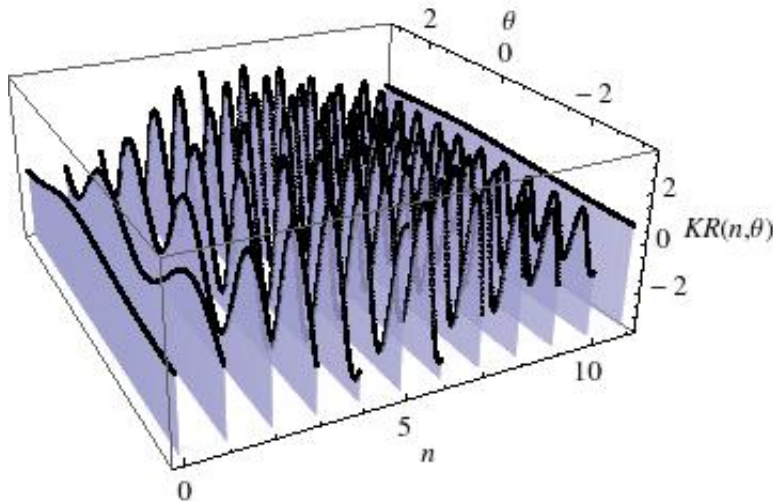


Figura 4.2: Distribución de Kirkwood-Rihaczek para el estado coherente finito, definido en (3.20) para un espacio con  $s = 11$ .

**Definición dos:** La distribución de Kirkwood-Rihaczek para número-fase para un estado coherente finito, definido en (3.29), es de la forma

$$K(n, \theta) = \frac{2\pi}{C} \sum_{k=0}^s \frac{\alpha_k^{n+1} \alpha_k^{*M+1}}{\sqrt{n!} \sqrt{M!}} e^{-ik\theta}, \quad (4.42)$$

donde

$$\alpha_k = \eta^{1/s+1} \omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (4.43)$$

$\eta = \sqrt{(s+1)!}$  y  $\omega_k = e^{i\frac{2\pi}{s+1}k}$  son las  $(s+1)$  raíces de la unidad. La constante de normalización es  $C = \sum_{j=0}^s \frac{\eta^{\frac{2(j+1)}{s+1}}}{j!}$  y  $M = \text{Mod}[n - k, s + 1]$ .

En la figura (4.3), graficamos la ecuación (4.42) para un espacio  $s = 11$ .

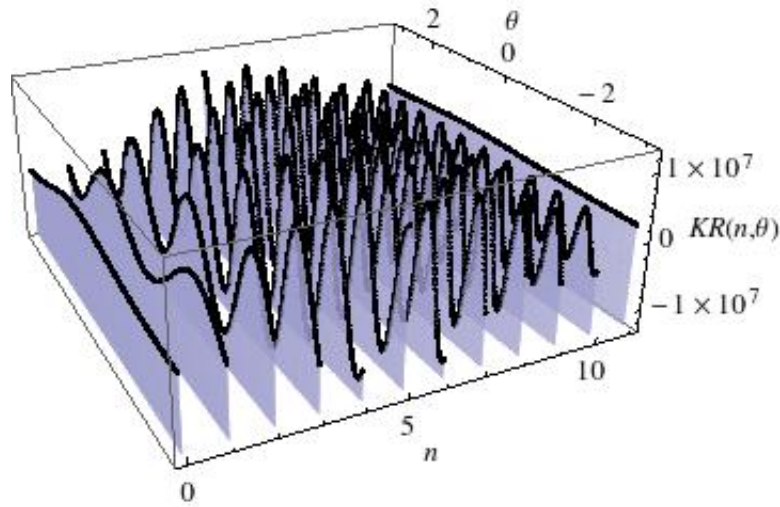


Figura 4.3: Distribución de Kirkwood-Rihaczek para el estado coherente finito, definido en (3.29) para un espacio con  $s = 11$ .

**Definición tres:** En la figura (4.4) se muestra la distribución de Kirkwood-Rihaczek para número y fase, obtenida numéricamente para un estado coherente finito

$$|\alpha\rangle_s = e^{(\alpha \hat{a}_s^\dagger - \alpha^* \hat{a}_s)} |0\rangle \quad (4.44)$$

con  $\hat{a}_s$  y  $\hat{a}_s^\dagger$  definidos en (3.9) con  $s = 11$ ,  $\alpha = 1$ .

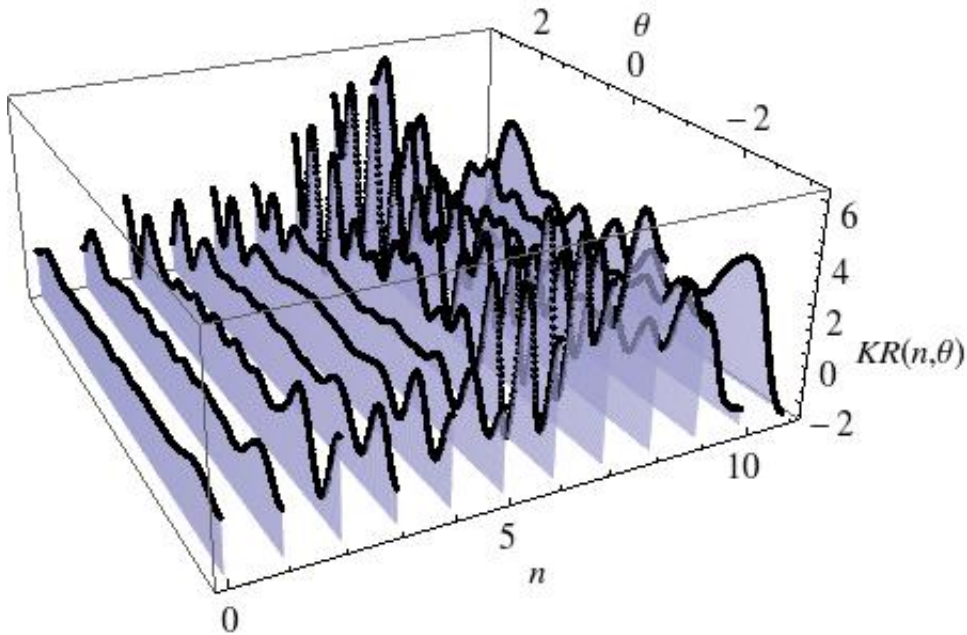


Figura 4.4: Distribución de Kirkwood-Rihaczek para el estado coherente finito, definido en (3.37) para un espacio con  $s = 11$ ,  $\alpha = 1$ .

Debido a que el operador de desplazamiento en (4.44) no es posible desentrelazarlo, una expresión analítica para la distribución de Kirkwood-Rihaczek fue imposible de hallar. La gráfica de la distribución de Kirkwood-Rihaczek se obtuvo directamente al sustituir el estado (4.44) en la definición (4.39).

# Capítulo 5

## Conclusiones

Para finalizar esta tesis hacemos las conclusiones y comentarios finales:

En el presente trabajo se realizó un estudio de una función de distribución no tan utilizada en la óptica clásica, conocida como función de Kirkwood-Rihaczek. La función de Kirkwood-Rihaczek para número y fase se construyó en analogía con la definición para posición y momento. Y se estudió en un espacio de Hilbert de dimensión finita  $s + 1$ .

Se definieron los operadores de creación  $\hat{a}_s^\dagger$  y aniquilación  $\hat{a}_s$  circulares usando el formalismo de Pegg y Barnett, definidos en (3.7). Los cuales son la base para presentar nuevos estados coherentes en un espacio de dimensión finita.

Se analizaron dos enfoques esenciales para definir estados coherentes en un espacio de Hilbert de dimensión finita: i) Como eigenestados del operador de aniquilación finito. ii) Como aplicación del operador de desplazamiento en un espacio de dimensión finita sobre el estado vacío.

En el primer enfoque fue posible obtener una nueva expresión analítica de estados coherentes finitos. Sin embargo, solo se tiene un número finito de estados coherentes. En el segundo enfoque, la relación de conmutación de los



operadores  $[\hat{a}_s, \hat{a}_s^\dagger] = 1 - (s + 1) |0\rangle \langle 0|$ , no permitió aplicar el teorema de Baker-Hausdorff, lo que impide desentrelazar el operador de desplazamiento y hace necesario que los cálculos se obtengan numéricamente. En cambio al primer enfoque, aquí se tiene un número infinito de estados coherentes debido a que  $\alpha$  puede tomar una infinidad de valores.

Representaciones gráficas de la función de distribución de Kirkwood-Rihaczec para número y fase para cada definición de un estado coherente fueron presentadas.

# Apéndice A

Para encontrar una expresión de  $e^{ik\hat{\Phi}_s |l\rangle}$ , debemos hacer uso de la función modulo. La cuál es muy útil para encontrar relaciones de congruencia entre números enteros. El ejemplo más claro es la aritmética del reloj, ya que los números dan la vuelta tras alcanzar cierto valor llamado módulo. Se dice que dos números  $a$  y  $b$  son congruentes modulo  $n$ , si ambos dejan el mismo residuo si los divides entre  $n$ , o de manera equivalente si  $a - b$  es múltiplo de  $n$ . En la notación de Gauss se lee  $a \equiv b \pmod{n}$ . Por ejemplo,  $38 \equiv 14 \pmod{12}$  por que  $38 - 14 = 24$ , es un múltiplo de 12. La misma regla se mantiene para valores negativos,  $-8 \equiv 7 \pmod{5}$ . Para entender mejor el concepto de módulo es útil visualizarlo como un reloj. Para encontrar el resultado de  $A \bmod (B)$ , podemos seguir estos pasos:

- Construye un reloj de tamaño  $B$ , escribiendo 0 en la parte superior de un círculo y continuando en sentido de las manecillas del reloj escribiendo enteros 1, 2, ... hasta uno menos que el módulo.
- Empieza en 0 y muévete alrededor del reloj  $A$  pasos.
- Donde quiera que caigamos es nuestra solución.

(Si el número es positivo, damos un paso en sentido de las manecillas del reloj, si es negativo damos un paso en sentido contrario a las manecillas del reloj).

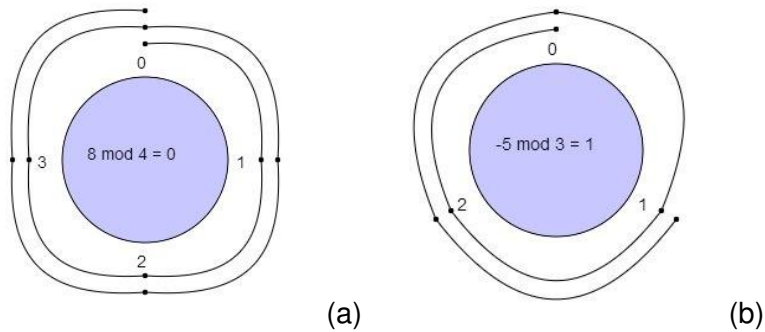


Figura 5.1: a) Reloj módulo 4 y b)Reloj módulo 3.

Ejemplo:  $8 \bmod 4 = ?$

Con un módulo de 4 hacemos un reloj con los números 0, 1, 2, 3 (Fig. 5.1.a). Empezamos en 0 y nos movemos 8 números en una secuencia en sentido de las manecillas del reloj, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0. Terminamos en 0, así que  $8 \bmod 4 = 0$ .

Ejemplo:  $-5 \bmod 3 = ?$

Con un módulo de 3 hacemos un reloj con los números 0, 1, 2 (Fig. 5.1.b). Empezamos en 0 y nos movemos 5 números en una secuencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, 2, 1, 0, 2, 1. Terminamos en 1, así que  $-5 \bmod 3 = 1$ .

Para entender mejor como opera  $e^{i\hat{\Phi}_s}$ , utilizaremos su representación matricial. Ejemplo: Consideremos  $s = 3$ , la dimensión del espacio es  $3 + 1$ , tal que los estados de número son  $(|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$ .

Calcular:  $e^{ik\hat{\Phi}_s} |n\rangle$  para  $k = 3$ .

$$e^{i(3)\hat{\Phi}_s} |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle, \quad (5.1)$$

$$e^{i(3)\hat{\Phi}_s} |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle, \quad (5.2)$$

$$e^{i(3)\hat{\Phi}_s} |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |3\rangle, \quad (5.3)$$

$$e^{i(3)\hat{\Phi}_s} |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle. \quad (5.4)$$

Como se puede ver en el ejemplo anterior, el operador  $e^{ik\hat{\Phi}_s}$  desplaza  $k$  veces los estados de número de manera cíclica, análogamente al sumar o restar las horas en un reloj.



# Bibliografía

- [1] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1950.
- [2] L. Lutterbach and L. Davidovich, *Method for Direct Measurement of the Wigner Function in cavity QED and ion traps*, Phys. Rev. Lett 78, 2547 (1997).
- [3] M. S. Kim, G. Antesberger, C. Bodendorf and H. Walther, *Scheme for direct observation of the Wigner characteristic function in cavity QED*, Phys. Rev. A 58, R65 (1998).
- [4] S. Wallentowitz and W. Vogel, *Reconstruction of the quantum mechanical state of a trapped ion*, Phys. Rev. Lett 75, 2932 (1995).
- [5] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano and D. J. Wineland, *Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom*, Phys. Rev. Lett 77, 4281 (1996).
- [6] J. C. Kirkwood, *Quantum statistics of almost classical assemblies*, Phys. Rev. 44, 31-37 (1933).
- [7] Robert Lynch, *The quantum phase problem: A critical review*, Physics Reports 256, 367-436, (1995).

- [8] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proc. R. Soc. Lond. A114, 243 (1927).
- [9] L. Susskind and J. Glogower, *Quantum mechanical phase and time operator*, Physics 1 49 (1964).
- [10] D.T. Pegg, S.M. Barnett, *Unitary phase operator in quantum mechanics*, Europhys. Lett. 6, 483, Vol (1989).
- [11] D.T. Pegg, S.M. Barnett, *Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field*, Physical Review A, Vol. 39, Number 4 (1989).
- [12] J. A. Vaccaro, D. T. Pegg, *Wigner function for number and phase*, Physical Review A, Vol. 4, Number 9 (1990).
- [13] H. M. Moya Cessa, F. S. Eguibar, "Introduction to quantum optics", Rinton Press, 2011.
- [14] R. J. Glauber, Phys Rev 130, 2529 (1963).
- [15] R. J. Glauber, Phys Rev 131, 2766 (1963).
- [16] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. 10, 277 (1963).
- [17] London F. (1926) Z. Phys. 40 193.
- [18] M.M. Nieto, *Quantum Phase and Quantum Phase Operators: Some Physics and some History*, Physica Scripta. Vol. T48, 5-12, (1993).
- [19] Vlasta Perinová, Antonín Luks and Jan Perina, *Phase in optics*, World Scientific, 1998.
- [20] A. Perez-Leija, L.A. Andrade-Morales, F. Soto-Eguibar, A. Szameit, H.M. Moya-Cessa, *The Pegg-Barnett phase operator and the discrete Fourier Transform*, Phys. Scr. 9 043008 (2016).

- [21] J. Schwinger, *Unitary operator bases* Proc. Nat. Acad. Sci 46 (1960).
- [22] M. Ruzzi, *Jacobi J-functions and discrete Fourier transforms* J. Math. Phys. 47, 063507 (2006).
- [23] A. B. Klimov, C. Muñoz, L. L. Sánchez-Soto, *Discrete coherent and squeezed states of many-qudit systems*, Physical Review A 80, 043836(2009).
- [24] V. Buzek, A.D. Wilson-Gordon, P.L. Knight, W.K. Lai, *Coherent states in a finite-dimensional basis: Their phase properties and relationship to coherent states of light*, Physical Review A, Vol. 45, Number 11 (1992).
- [25] A. Miranowicz, K. Piatek, R. Tanaś, *Coherent states in a finite-dimensional Hilbert space*, Physical Review A, Vol. 50, Number 4 (1994).
- [26] L. M. Kuang, F. B. Wang, Y. G. Zhou, *Dynamics of a harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space*, Physics Letters A 183 (1993).
- [27] L. M. Kuang, F. B. Wang, Y. G. Zhou, *Coherent states of a harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space and their squeezing properties*, Journal of Modern Optics, Vol. 41, No. 7 (1994).
- [28] T. Opatrny, A. Miranowicz, J. Bajer, *Coherent states in finite-dimensional Hilbert space and their Wigner representation*, Journal of Modern Optics, Vol. 43, No. 2 (1996).
- [29] P. A. M. Dirac, *On the analogy between classical and quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. 17, 195 (1945).
- [30] A. N. Rihaczek, *Signal energy distribution time and frequency*, IEEE Trans. Inf. Theory 14, 369-374 (1968).
- [31] Hai-Woong Lee, *Theory and application of the quantum phase-space distribution functions*, Physics Reports 259, 147-211, (1995).



- [32] J.R. Moya-Cessa, H. Moya-Cessa, L.R. Berriel-Valdos, O. Aguilar-Loreto, P. Barberis-Blostein, *Unifying distribution functions: some lesser known distributions*, Applied Optics Vol. 47, No. 22 (2008).
- [33] H. M. Moya-Cessa, *Relation between the Glauber-Sudarshan and Kirkwood-Rihaczek distribution functions*, Journal of Modern Optics Vol. 60, No. 9, 726-730 (2013).
- [34] T. Opatrny, V. Buzek, J. Bajer, G. Drobny, *Propensities in discrete phase space: Q function of a state in a finite-dimensional Hilbert space*, Physical Review A, Vol. 52, Number 3 (1995).
- [35] W. K. Wootters, *A Wigner function formulation of finite-state quantum mechanics*, Ann. Phys. 176, 1 (1987).
- [36] D. Galetti and A. F. R. de Toledo Piza, Physica A, 149, 267 (1988).
- [37] H. M. Moya-Cessa, *A number-phase Wigner function*, Journal Optics B: Quantum Semiclass. Opt. 5, S339-S341, (2003).