



**INAOE**

# **Mejoramiento de Decimadores Basados en Filtros Comb a Través de Filtros Sin Multiplicadores**

por

**José Ricardo García Báez**

Tesis sometida como requisito parcial  
para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ELECTRÓNICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,  
Óptica y Electrónica (INAOE).**

Julio de 2014

Santa María Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dra. Gordana Jovanovic Dolecek, INAOE**

© INAOE 2014





# Resumen

En esta tesis se proponen dos estructuras decimadoras que mejoran la respuesta en frecuencia del filtro comb. La primera de ellas utiliza filtros correctores FIR, que tienen como finalidad mejorar la respuesta en banda de paso y rechazo del filtro comb. La segunda estructura se basa en una Función de Cambio de Amplitud (ACF) y se enfoca en la banda de rechazo del comb. Ninguna de las dos propuestas requiere de multiplicadores para su implementación.

Antes de presentar las propuestas, se introducen los conceptos fundamentales del proceso de decimación. En segundo lugar, se describe al filtro comb, enumerando sus ventajas, desventajas y diversas formas de implementación. Finalmente, se presentan algunos métodos que se encargan de mejorar banda de paso, banda de rechazo o ambas bandas del filtro comb. Estos tres capítulos desembocan en las dos propuestas antes citadas.

Cada una de las dos propuestas presenta comparaciones con diversos métodos presentes en la literatura, ejemplos de diseño e implementación.



# Abstract

This thesis proposes two decimation structures that improve the magnitude response of the comb filter. The first one is based on corrector filters, whose aim is the improvement of pass-band and stop-band response of the comb. The second one uses an Amplitude Change Function (ACF) in order to increase attenuation in the stop-band. None of these structures requires multipliers for its implementation.

Before the description of the decimation structures, this work introduces the basis of the decimation process. Secondly, a description of the comb filter is made, numbering its advantages, disadvantages and implementation structures. Finally, it is presented a brief summary of methods that improve pass-band, stop-band and both bands of the comb filter.

The description of the two proposed structures is followed by comparisons with methods available in literature, design and implementation examples.



# Agradecimientos

Le agradezco al Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, por todas las facilidades otorgadas para la realización de mi maestría.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado en estos dos años de estudio.

Le doy las gracias a la Dra. Gordana Jovanovic Dolecek por haber creído en mí y por todo el conocimiento compartido.

Gracias a mis sinodales; el Dr. Roberto Rosas Romero, Dr. Esteban Tlelo Cuautle y al Dr. José de Jesús Rangel Magdaleno, por el apoyarme en la revisión de mi tesis.

A mis hermanos, a mi papá y a mis cuatro mamás.

Le agradezco a mis amigos por soportarme todo este tiempo, en especial a Miriam, David y Geri por haberme ayudado a sacar adelante este trabajo.





# Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Prefacio	IX
<b>1. Proceso de decimación</b>	<b>1</b>
1.1. Decimación . . . . .	1
1.1.1. Sub-muestreo . . . . .	1
1.1.2. Filtro decimador . . . . .	6
1.2. Propiedades e identidades del sub-muestreo . . . . .	6
1.3. Decimación multi-etapa . . . . .	9
<b>2. Filtro comb</b>	<b>11</b>
2.1. Función de transferencia . . . . .	11
2.2. Estructura CIC . . . . .	13
2.3. Estructuras decimadoras no recursivas . . . . .	14
2.3.1. $M$ potencia de dos . . . . .	14
2.3.2. Descomposición polifásica . . . . .	15
<b>3. Revisión de métodos</b>	<b>17</b>
3.1. Mejora en banda de paso . . . . .	17
3.1.1. Compensación en banda ancha [5] . . . . .	17
3.2. Mejora en banda de rechazo . . . . .	20
3.2.1. Sinc rotado (RS)[14] . . . . .	21
3.2.2. Filtro Comb Generalizado (GCF) [2] . . . . .	22
3.3. Mejora en banda de paso y rechazo . . . . .	23
3.3.1. Método sharpening [19] . . . . .	24
3.3.2. Filtros correctores [20] . . . . .	26

<b>4. Estructura decimadora propuesta basada en filtros correctores</b>	<b>31</b>
4.1. Filtro corrector adicional . . . . .	31
4.2. Filtro coseno cuadrado . . . . .	33
4.3. Estructura no recursiva para factores de decimación que son potencia de dos . . . . .	36
4.4. Comparaciones . . . . .	36
4.5. Implementación . . . . .	38
<b>5. Estructura decimadora propuesta basada en una función de cambio de amplitud</b>	<b>47</b>
5.1. Función de cambio de amplitud propuesta . . . . .	47
5.2. Elección de parámetro de ACF . . . . .	53
5.3. Valor de parámetro $a$ para órdenes pares mayores a dos . . . . .	56
5.4. Atenuación entre ceros desplazados . . . . .	56
5.5. Filtro decimador propuesto . . . . .	61
5.6. Comparaciones . . . . .	63
5.7. Filtro comb de primer orden y factor de decimación impar . . . . .	65
5.7.1. Orden impar mayor a uno . . . . .	67
5.7.2. Filtro decimador propuesto basado en filtro comb de orden impar . . . . .	67
5.8. Resumen . . . . .	68
5.9. Implementación . . . . .	69
<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Trabajo a futuro</b>	<b>83</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>85</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>88</b>

# Prefacio

En la actualidad, el filtro comb es uno de los filtros decimadores más populares. Esta popularidad se debe principalmente a la sencillez de su estructura, la cual no requiere multiplicadores y al gran número de posibilidades que se tienen para su implementación. Sin embargo, la respuesta en frecuencia de este filtro no es tan buena, por lo que se han propuesto diversos métodos y técnicas que se encargan de compensar la caída en banda de paso, a incrementar la atenuación en banda de rechazo e incluso, existen técnicas que mejoran ambas bandas.

El objetivo de este trabajo es mejorar la respuesta del filtro comb mediante filtros FIR simples sin multiplicadores. El objetivo se cumple mediante dos propuestas.

Antes de presentar las propuestas, se analiza en el Capítulo 1, tanto en tiempo discreto como en frecuencia, los conceptos básicos del proceso de decimación.

En el Capítulo 2 se describe al filtro decimador comb, enumerando sus ventajas, desventajas y las razones que lo hacen ser el filtro decimador más popular en la primera etapa de decimación.

Debido a que las ventajas prevalecen ante las desventajas, existen métodos que se encargan de mejorar una o las dos bandas de interés. Estos métodos son descritos brevemente en el Capítulo 3 y dan paso a las dos propuestas de este trabajo.

La primera propuesta, descrita en el Capítulo 4, es exclusiva para factores de decimación que son potencias de dos o múltiplos de cuatro. Para estos dos casos se proponen estructuras que utilizan un filtro coseno cuadrado, que mejora la banda de rechazo, y dos filtros correctores, recientemente propuestos en la literatura, que se encargan de compensar la caída en banda de paso y de incrementar la atenuación en banda de rechazo.

La segunda propuesta, utiliza una función de cambio de amplitud para modificar la posición de los ceros del filtro comb y así lograr una mejor respuesta en banda de rechazo. La descomposición polifásica es utilizada, por lo que todo el filtrado se realiza a baja frecuencia. Esta propuesta es presentada en el Capítulo 5.

Finalmente, se presentan las posibles mejoras a las dos propuestas, que dan paso al trabajo a futuro y a una serie de conclusiones.



# Capítulo 1

## Proceso de decimación

Existen diversos sistemas y procesos en los que la frecuencia de muestreo a la entrada tiene que ser modificada para facilitar la realización de diversas tareas. Este cambio o conversión de frecuencia de muestreo puede ser un aumento (interpolación) o un decremento (decimación).

La conversión de frecuencia de muestreo se lleva a cabo principalmente para poder reducir las operaciones a realizar por el procesador de señales digitales (DSP) y así incrementar la eficiencia del proceso.

Dentro de las ventajas que los sistemas multi-razón presentan, es el incremento de velocidad de cómputo, decremento de complejidad en filtrado y a su vez un menor consumo de potencia. En este capítulo se analizará tanto en tiempo como en frecuencia al proceso de decimación.

### 1.1. Decimación

Al proceso que tiene como fin el decremento de frecuencia de muestreo se le conoce como decimación [1]. La decimación está compuesta por dos pasos; filtrado y sub-muestreo, como lo presenta la Figura 1.1.

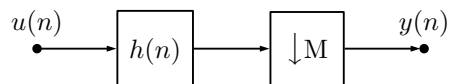


Figura 1.1: Diagrama de bloques de decimación.

#### 1.1.1. Sub-muestreo

El sub-muestreo es el proceso de reducir la frecuencia de muestreo,  $f_s$ , por un factor entero  $M$ , conocido como factor de decimación (Figura 1.2).



Figura 1.2: Sub-muestreo.

Una muestra de salida corresponderá a la muestra de entrada que permanece después de haber descartado  $M-1$  muestras:

$$y(m) = x(nM). \quad (1.1)$$

De la misma forma que el proceso de decimación, el sub-muestreo se divide en dos pasos. En el primero, se toma la señal de entrada y se hacen cero las muestras cuyo índice no sea múltiplo del factor de decimación. El segundo paso elimina los ceros forzados mediante una compresión en tiempo y se obtiene así la señal sub-muestreada.

### Paso uno

El forzar a que las muestras de entrada cuyo índice no sea múltiplo del factor de decimación valgan cero, se logra a través de una simple multiplicación entre la señal de entrada y la función de muestreo discreto,  $c_M(n)$ :

$$c_M(n) = \begin{cases} 1 & n = mM \\ 0 & \text{otros} \end{cases}; m = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

El resultado de esta multiplicación se expresa como  $x_1(n)$ :

$$x_1(n) = x(n)c_M(n). \quad (1.3)$$

La respuesta en frecuencia de este producto se obtiene mediante la transformada discreta de Fourier de  $x_1(n)$ :

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)c_M(n)e^{-j\omega n}. \quad (1.4)$$

Otra forma de expresar  $c_M(n)$  es mediante su serie de Fourier:

$$c_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} C(k)e^{\frac{j2\pi kn}{M}}, \quad (1.5)$$

donde  $C(k)$  son los coeficientes de la serie de Fourier, que en este caso son iguales a uno para toda  $k$ , con esto:

$$c_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{\frac{j2\pi kn}{M}}. \quad (1.6)$$

Usando (1.6) en (1.4), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
X_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left( \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi kn}{M}} \right) e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\left(\omega - \frac{2\pi k}{M}\right)}. \tag{1.7}
\end{aligned}$$

La respuesta en frecuencia del primer paso de sub-muestreo puede ser expresada mediante  $M - 1$  espectros de la señal de entrada, escalados por el factor de decimación  $M$ , cada uno de ellos centrados en múltiplos de la frecuencia  $2\pi/M$ :

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{-jn\left(\omega - \frac{2\pi k}{M}\right)}\right). \tag{1.8}$$

### Paso dos

En el paso dos del sub-muestreo se eliminan los ceros forzados al introducir una escala en tiempo correspondiente a  $1/M$ . El espectro a la salida será representado por  $Y(e^{j\omega})$ , por lo que si se realiza un escalamiento en tiempo igual a  $1/M$ , el espectro a la entrada del paso dos debe ser  $X_1(e^{j\omega/M})$ :

$$X_1(e^{j\omega/M}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) e^{-jn\omega/M}. \tag{1.9}$$

Debido a que sólo los índices que son múltiplos del factor de decimación son útiles, se sustituye  $n = mM$ , con lo que:

$$X_1(e^{j\omega/M}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(Mm) e^{-j(\omega/M)mM} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(Mm) e^{-j\omega m}. \tag{1.10}$$

Al sustituir (1.1) en la expresión anterior, se llega a lo siguiente:

$$X_1(e^{j\omega/M}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) e^{-j\omega m} = Y(e^{j\omega}), \tag{1.11}$$

que también puede ser escrito como:

$$Y(e^{j\omega M}) = X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{M}\right)}\right). \tag{1.12}$$

En muchos casos la transformada  $Z$  es muy útil y puede ser obtenida al sustituir  $z = e^{j\omega}$ :

$$Y(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(ze^{-j2\pi k/M}\right) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^k\right), \tag{1.13}$$

donde:

$$W_M^k = e^{-j2\pi k/M}, k = 0, \dots, M - 1. \quad (1.14)$$

El siguiente ejemplo muestra el comportamiento en tiempo discreto de cada uno de los pasos que componen al proceso de sub-muestreo.

**Ejemplo 1.1.** Se desea que la señal  $x(n)$  sea sub-muestreada, teniéndose un factor de decimación  $M = 4$ .

La Figura 1.3 muestra, en primer lugar, la señal senoidal discreta,  $x(n)$ , a la cual se le aplicará la operación de sub-muestreo. En segundo lugar, se muestra el paso uno del sub-muestreo, donde las muestras de la señal original con índices que no son múltiplos de  $M$  se hacen cero. Finalmente, la tercera parte presenta la compresión en tiempo de la señal producida en el paso uno.

A continuación se estudia al sub-muestreo en el dominio de la frecuencia.

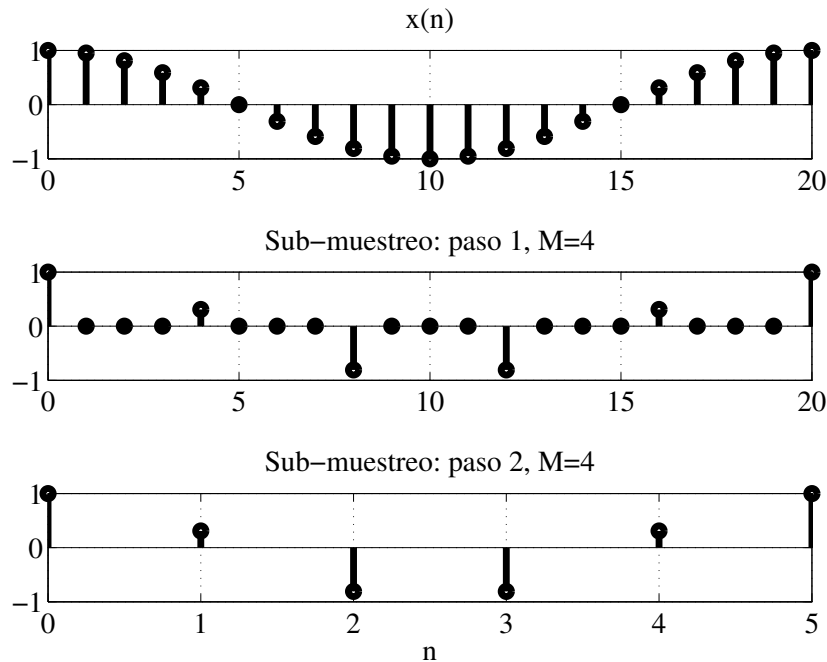


Figura 1.3: Señal  $x(n)$ , paso uno y dos de sub-muestreo para  $M = 4$ .

**Ejemplo 1.2.** En este ejemplo se analiza el comportamiento en frecuencia, tanto del primer paso como del segundo, del proceso de sub-muestreo para  $M = 5$ .

La Figura 1.4 muestra el espectro de una señal  $x(n)$ , la cual se encuentra limitada en frecuencia. La segunda parte de la Figura 1.4 presenta el espectro



producido después del primer paso del sub-muestreo. Se producen cuatro imágenes adicionales al espectro original de la señal de entrada, cada uno de estos espectros se encuentra escalado en magnitud por el coeficiente de decimación. La tercera gráfica muestra el espectro producido después del segundo paso de sub-muestreo, el cual es la respuesta del primer paso expandida en frecuencia por  $M$ .

El siguiente ejemplo presenta, en frecuencia, las consecuencias de un valor elevado de factor de decimación.

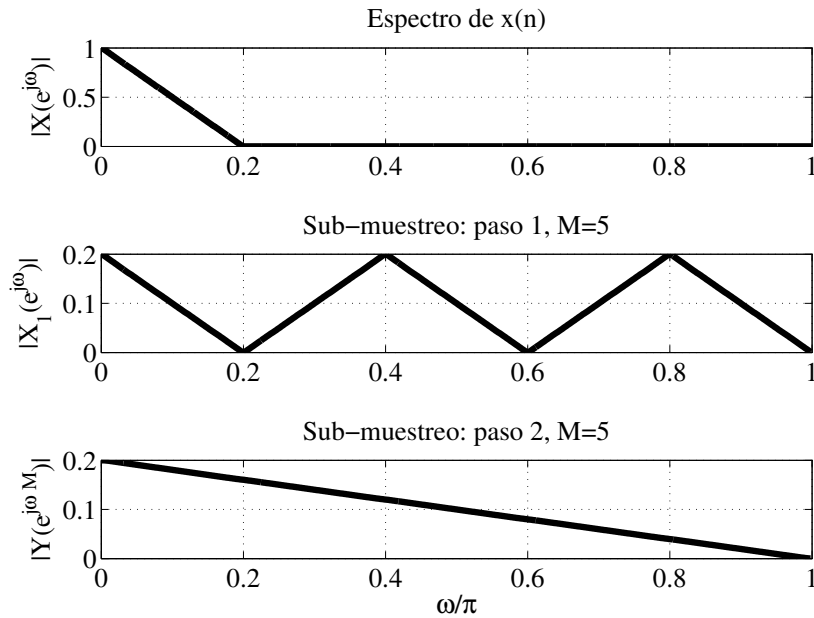


Figura 1.4: Análisis en frecuencia del proceso de sub-muestreo para  $M = 5$ .

**Ejemplo 1.3.** En este ejemplo se analiza la respuesta en frecuencia del paso uno y dos del proceso de sub-muestreo, cuando  $M = 6$ .

La primera parte de la Figura 1.5 es igual a la del ejemplo anterior. La diferencia empieza en la segunda parte, donde se producen  $M - 1$  imágenes del espectro de entrada. Debido a que el espectro de entrada no está limitado, a partir de la frecuencia  $\pi/M$ , se presenta un traslape de espectros que crean así el fenómeno conocido como aliasing. Este fenómeno se puede apreciar en el espectro producido por el paso dos del sub-muestreo, en él se observa que el espectro no tiene magnitud igual a cero en la frecuencia  $\omega = \pi$  o que no es igual a la expansión por  $M$ , en frecuencia, del espectro de entrada. Con este ejemplo se justifica el bloque de filtrado que se encuentra dentro del proceso de decimación.

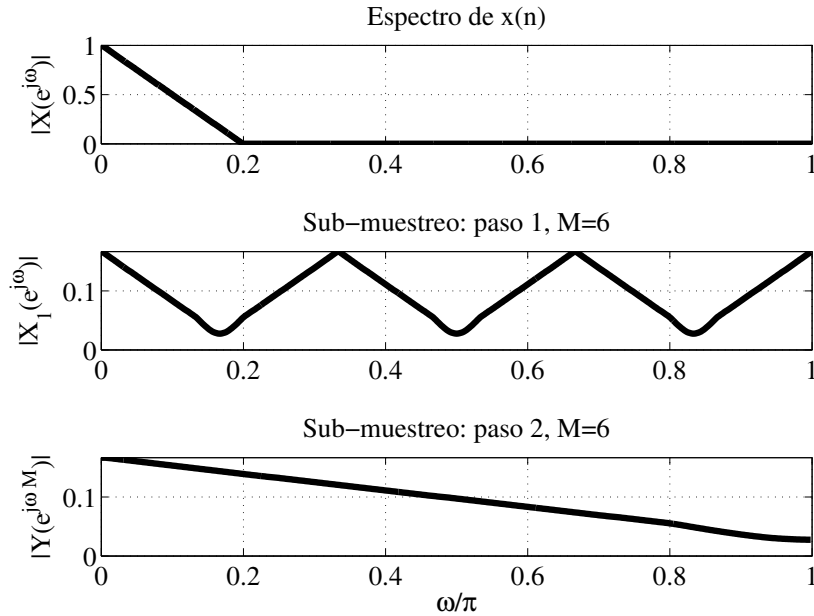


Figura 1.5: Análisis en frecuencia del proceso de sub-muestreo para  $M = 6$ .

### 1.1.2. Filtro decimador

El filtro decimador que limita la señal de entrada debe tener las siguientes características:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c/M \\ 0 & \pi/M \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}, \quad (1.15)$$

donde  $w_c$  es la frecuencia máxima que se desea conservar de la señal a decimar.

**Ejemplo 1.4.** En este ejemplo se limita el espectro de la señal del ejemplo anterior mediante un filtro prácticamente ideal, en el que  $\omega_c = 0.95\pi$ . El resultado en frecuencia del proceso de decimación se observa en la Figura 1.6, donde se aprecia que no ocurre traslape de imágenes y por consiguiente no existe aliasing.

## 1.2. Propiedades e identidades del sub-muestreo

El proceso de sub-muestreo cumple con el principio de superposición, donde el sub-muestreo de la suma de dos señales escaladas es igual a la suma de las dos señales escaladas sub-muestreadas.

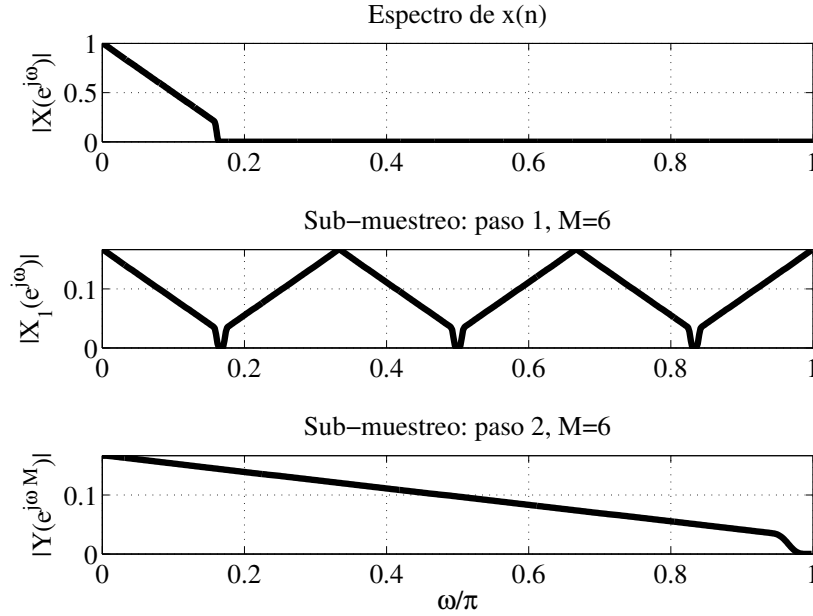


Figura 1.6: Análisis en frecuencia del proceso de sub-muestreo para  $M = 6$ .

El sub-muestreo es una operación variante en el tiempo, debido a que si se aplica un retraso a la señal de entrada, el contenido de la salida no será el mismo que el producido por la señal de entrada sin retraso.

Al considerarse un retraso de  $d$  muestras en la señal de entrada:  $x(mM - d)$ , la salida del sub-muestreador es:

$$y\left(\frac{mM - d}{M}\right) \neq y(m - d). \quad (1.16)$$

Por otra parte, existen tres importantes identidades que hacen uso de las propiedades del sub-muestreo y que ayudan a simplificar o disminuir la complejidad entre un bloque de filtrado y uno de sub-muestreo.

La primera identidad hace uso de la propiedad de linealidad del sub-muestreo.

La segunda identidad establece que un retraso de  $M$  muestras antes de sub-muestrear por  $M$ , es equivalente a un retardo de una muestra después de haber sub-muestreado.

Para demostrar la segunda identidad, se analiza la salida del sub-muestreador en la primera parte de la Figura 1.7, ésta es expresada como:

$$Y(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^k\right) \left(zW_M^k\right)^{-M}, \quad (1.17)$$

teniéndose que  $W_M^{-kM} = 1$ , la relación anterior se simplifica a:

$$Y(z^M) = \frac{1}{M} z^{-M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^k\right). \quad (1.18)$$

Analizando la segunda parte de la Figura 1.7, la señal a la salida del sub-muestreador es:

$$Y_1(z^M) = \frac{1}{M} z^{-M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^k\right). \quad (1.19)$$

Por lo que la señal de salida de la estructura es:

$$Y(z^M) = (z^{-M})^{-1} Y_1(z^M) = \frac{1}{M} z^{-M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^k\right). \quad (1.20)$$

La última expresión es igual a (1.18), demostrándose así la segunda identidad.

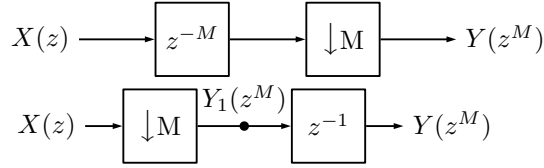


Figura 1.7: Segunda identidad del sub-muestreo.

La tercera identidad indica que el filtrar con un filtro expandido (la expansión de un filtro se logra mediante la sustitución de cada retraso  $z^{-1}$  por un retraso  $z^{-M}$  del filtro original), seguido por un sub-muestreador, es equivalente a sub-muestrear seguido por el filtro sin expandir. La Figura 1.8 muestra gráficamente la tercera identidad.

Para demostrar que estas dos estructuras son equivalentes, se inicia por analizar la salida de la primera estructura de la Figura 1.8:

$$\begin{aligned} Y(z^M) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_1\left(zW_M^k\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^k\right) G\left(z^M W_M^{kM}\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^k\right) G(z^M) \end{aligned} \quad (1.21)$$

De la misma forma, se analiza la segunda estructura:

$$\begin{aligned}
Y(z^M) &= Y_1(z^M)G(z^M) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(zW_M^k)G(z^M)
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Como se puede observar (1.21) y (1.22) son iguales y ambas estructuras equivalentes, también se puede apreciar que la tercera identidad es una generalización de la segunda.

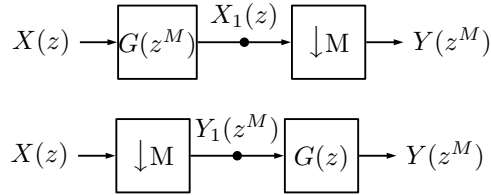


Figura 1.8: Tercera identidad de submuestreo.

### 1.3. Decimación multi-etapa

Desde el punto de vista práctico, la decimación de una señal sobre-muestreada se lleva a cabo mediante dos o más etapas de decimación [2]. La Figura 1.9 presenta una estructura decimadora de dos etapas. Generalmente, la primera etapa consiste de un filtro comb de orden  $K$ , con una decimación de  $M$ , mientras que en la segunda etapa se encuentra un filtro FIR (Finite-Impulse Response), con factor de decimación residual  $R$ , que se encarga de ser más selectivo y muchas veces de compensar la caída en banda de paso que se produce por el filtro comb.

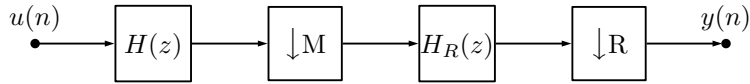


Figura 1.9: Estructura decimadora multi-etapa.

En esta tesis se trabaja en el filtro decimador de la primera etapa, con un factor de decimación residual igual a dos,  $R = 2$ . Tomando esta consideración, la máxima frecuencia a conservar es:  $\omega_p = \frac{\pi}{MR} = \frac{\pi}{2M}$ . De la misma forma, imágenes del espectro de entrada aparecerán centradas en múltiplos de  $\frac{2\pi}{M}$ . Definiéndose así a la banda de paso, como el intervalo de frecuencias:  $[0, \omega_p]$  y a las bandas donde aparecen réplicas del espectro de entrada, folding bands:  $[\frac{2\pi}{M} - \omega_p, \frac{2\pi}{M} + \omega_p]$ .

La Figura 1.10 presenta gráficamente la ubicación de cada una de las bandas de interés del filtro decimador de la primera etapa, para  $M = 9$ .

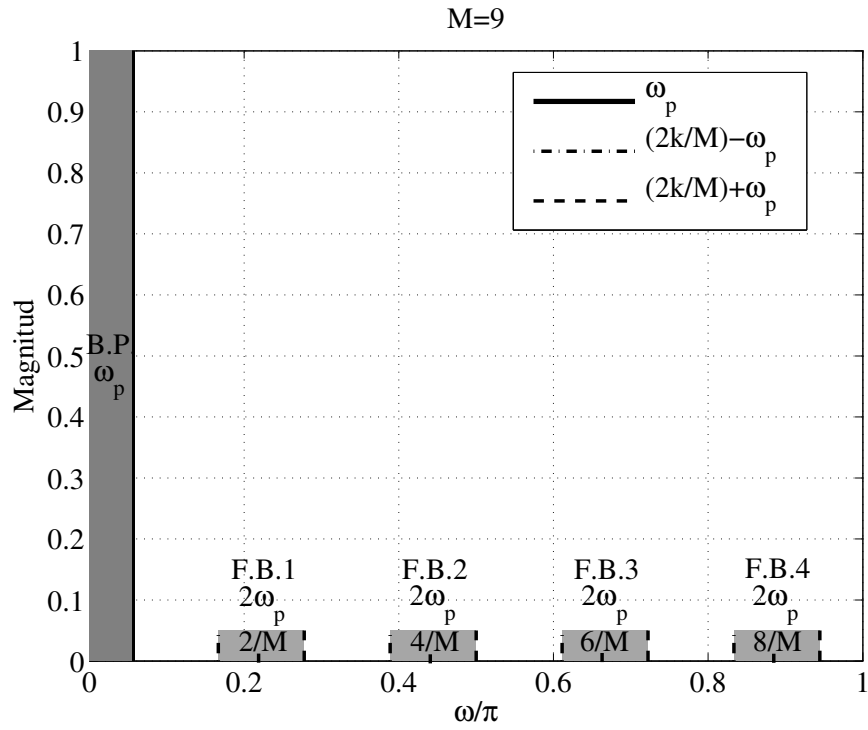


Figura 1.10: Bandas a considerar en el diseño del filtro decimador de la primera etapa.

Una vez definidas las bases del proceso de decimación, se introduce uno de los filtros decimadores más populares, el filtro comb. Esta descripción se lleva a cabo en el siguiente capítulo.

## Capítulo 2

# Filtro comb

El filtro comb es uno de los filtros decimadores más populares, debido a la sencillez de su estructura y sus características en frecuencia. A continuación se presenta una descripción de este filtro.

### 2.1. Función de transferencia

La respuesta al impulso del filtro comb resulta ser el promedio de una serie de  $M$  muestras ingresadas a este filtro:

$$h_{comb}(n) = \frac{1}{M^K} \left[ \sum_{i=0}^{M-1} x(n-i) \right]^K, \quad (2.1)$$

donde  $K$  es el orden del filtro, que es el número de etapas o número de veces que este filtro será aplicado a la señal de entrada.

En dominio discreto, esta respuesta se puede expresar de la siguiente forma:

$$H_{comb}(z) = \frac{1}{M^K} \left[ \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} \right]^K, \quad (2.2)$$

que se conoce como la forma no recursiva de la respuesta del filtro filtro comb. Otra manera de expresarse es de forma recursiva:

$$H_{comb}(z) = \frac{1}{M^K} \left[ \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \right]^K. \quad (2.3)$$

La respuesta en frecuencia de este filtro se obtiene al sustituir  $z^{-1}$  por  $e^{j\omega}$  en (2.3):

$$\begin{aligned}
H_{comb}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M^K} \left[ \frac{1 - e^{-jM\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \right]^K = \frac{1}{M^K} \left[ \frac{e^{-jM\omega/2}(e^{jM\omega/2} - e^{-jM\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \right]^K \\
&= \frac{1}{M^K} \left[ \frac{e^{-jM\omega/2} 2j \sin(M\omega/2)}{e^{-j\omega/2} 2j \sin(\omega/2)} \right]^K \\
&= \frac{1}{M^K} \left[ \frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-jM\omega/2} \right]^K. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

La Figura 2.1 muestra la respuesta en frecuencia de un filtro comb con parámetros:  $M = 8$  y  $K = 1, 2, 4$ .

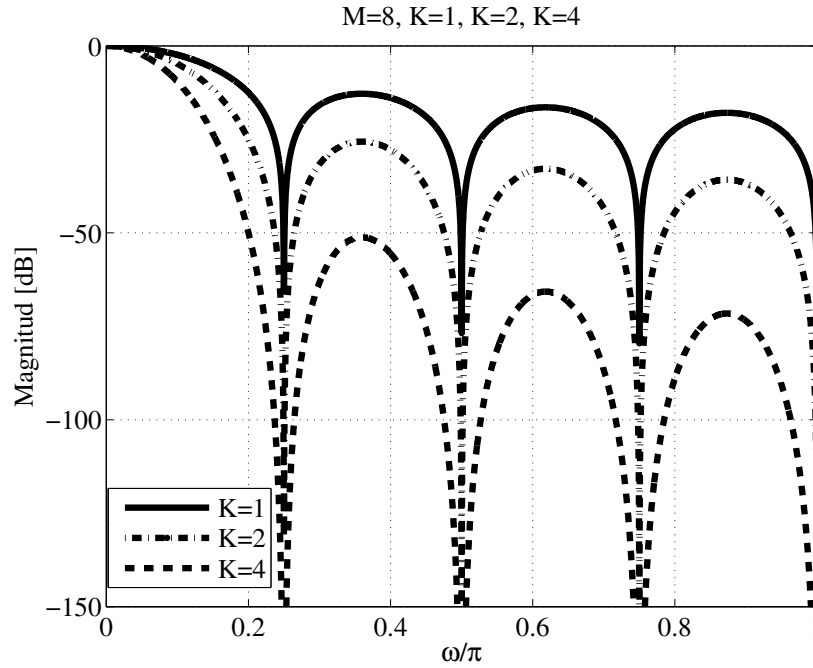


Figura 2.1: Comparación de respuestas en magnitud de filtros comb de diferente orden.

Observaciones de la respuesta en frecuencia (2.4):

- Existen ceros en las frecuencias:

$$\frac{2\pi k}{M}; k = 1, 2, \dots, M - 1. \tag{2.5}$$

- La frecuencia de paso está dada por [3]:

$$\omega_p = \frac{\pi}{MR}. \tag{2.6}$$



- La peor atenuación antialiasing se presenta en la frecuencia [3]:

$$\omega_{wca} = \frac{2\pi}{M} - \omega_p, \quad (2.7)$$

a su vez,  $\omega_{wca}$  es el límite inferior de la primera folding band del filtro comb.

- Un filtro comb cuenta con  $M - 1$  folding bands. Las frecuencias que pertenecen a cada folding band son:

$$\left[ \frac{2\pi k}{M} - \omega_p, \frac{2\pi k}{M} + \omega_p \right]; k = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (2.8)$$

- Al aumentar el orden del filtro se aumenta la atenuación en folding bands. El problema es que al aumentar el orden también se aumenta la caída en banda de paso.
- El término exponencial indica la linealidad en fase del filtro comb, esta fase se verá afectada sólo por el valor de  $K$ , pero permanecerá lineal siempre.

En las siguientes tres secciones se presentan las estructuras más eficientes y utilizadas para la implementación del filtro comb.

## 2.2. Estructura CIC

La estructura decimadora CIC es una de las principales formas de implementación del filtro comb. Propuesta por Hoguenauer, ésta consiste de una sección integradora operando a la frecuencia de muestreo original, y de una sección diferenciadora operando a baja frecuencia [4].

La Figura 2.2 presenta la estructura de un filtro CIC decimador.

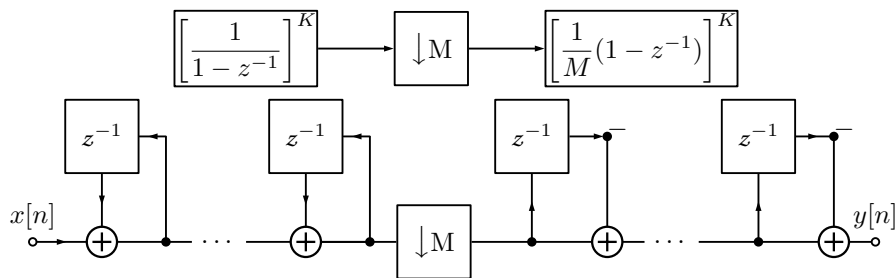


Figura 2.2: Estructura decimadora CIC.

La sección integradora está compuesta por  $K$  integradores que trabajan a la frecuencia  $f_s$ . La función de transferencia de un solo integrador es:

$$H_i(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (2.9)$$

La sección diferenciadora trabaja a baja frecuencia,  $f_s/M$ . A su vez, esta sección consiste de  $K$  etapas. La función de transferencia de una etapa diferenciadora con respecto a la frecuencia de muestreo es:

$$H_c(z) = 1 - z^{-M}. \quad (2.10)$$

Entre estas dos secciones se encuentra un switch que se encarga de decrementar la frecuencia de la señal de entrada.

La principal desventaja de esta estructura es su alto consumo de potencia, debido a que la sección integradora trabaja a alta frecuencia.

### 2.3. Estructuras decimadoras no recursivas

Dentro de las formas más populares de implementación del filtro comb se encuentra la forma no recursiva. Una de las principales características de la forma no recursiva es el ahorro de consumo de potencia.

#### 2.3.1. $M$ potencia de dos

Cuando el factor de decimación  $M$  puede ser expresado como una potencia de dos,  $M = 2^p$ , el filtro comb se expresa de la siguiente forma:

$$H_{comb}(z) = \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} \right]^K = \left[ \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2} (1 + z^{-2^i}) \right]^K \quad (2.11)$$

La figura 2.3 presenta el diagrama de bloques de la estructura decimadora de  $p$  etapas. Esta estructura reduce en gran medida el consumo de potencia con respecto a la estructura CIC. Una desventaja de esta estructura es que la primera de sus etapas sigue trabajando a alta frecuencia. En la siguiente subsección se presenta una estructura que realiza el filtrado a una frecuencia  $f_s/M$ .

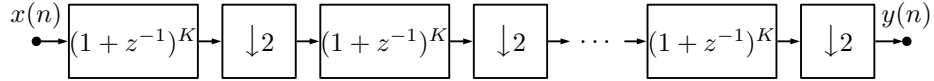


Figura 2.3: Estructura no recursiva

### 2.3.2. Descomposición polifásica

Si un filtro FIR,  $h(n)$ , tiene  $N$  coeficientes, donde  $N$  es un múltiplo del factor de decimación  $M$ , es posible obtener  $M$  componentes diferentes de la respuesta al impulso del filtro [1].

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H_k(z^M), \quad (2.12)$$

donde

$$H_k(z^M) = \sum_{n=0}^{N/M-1} h(nM+k)(z^M)^{-n}; k = 0, \dots, M-1 \quad (2.13)$$

que puede ser expresado a baja frecuencia como:

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N/M-1} h(nM+k)(z)^{-n}; k = 0, \dots, M-1. \quad (2.14)$$

El diagrama de bloques de la descomposición polifásica se presenta en la Figura 2.4.

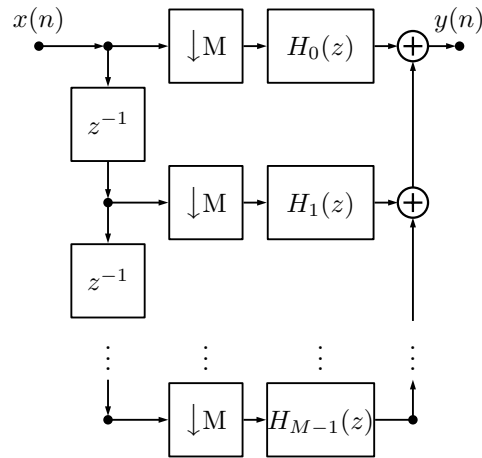


Figura 2.4: Estructura Polifásica

El precio que se debe pagar, por el ahorro de consumo de potencia, es un aumento en el área, ésto debido a que los coeficientes ya no serán unitarios y necesitarán de sumas y corrimientos para poder ser implementados.

A forma de pequeño resumen se listan las principales ventajas y desventajas que el filtro comb presenta.

Ventajas:

- Sus ceros se encuentran justo donde se ubican las imágenes producidas por el sub-muestreo.
- No requiere de multiplicadores.
- No es necesario almacenamiento de coeficientes del filtro.
- Puede ser implementado y expresado tanto de forma recursiva como no recursiva.

Desventajas:

- Caída grande dentro de la banda de paso, ésta aumenta conforme  $K$  aumenta.
- Pobre atenuación en folding bands.
- Reducido número de parámetros de diseño,  $K$  y  $M$ .

Una vez definidos los conceptos principales del proceso de decimación e introducido al filtro decimador más popular, se realiza un repaso de las principales técnicas que mejoran la respuesta en banda de paso, de rechazo y en las dos bandas del filtro comb. Esta revisión se lleva a cabo en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

# Revisión de métodos

Ya que las ventajas del filtro decimador comb prevalecen ante sus desventajas, existen diversos métodos que se encargan de combatir los problemas de caída en banda de paso, de mejorar la atenuación en folding bands e incluso, existen métodos que tratan con estos dos problemas al mismo tiempo. A continuación, se presentan las técnicas que tuvieron mayor influencia en el desarrollo de esta tesis.

### 3.1. Mejora en banda de paso

El diseño de filtros compensadores es la principal técnica de mejora en banda de paso del filtro comb. La idea de esta técnica es que la cascada del compensador con el filtro comb tenga una ganancia unitaria dentro del intervalo definido por  $[0, \omega_p]$ . Se busca obtener un filtro FIR de baja complejidad, que no necesite de multiplicadores para su implementación, cuya respuesta en magnitud dentro del intervalo de frecuencias de interés sea igual al inverso de la magnitud del filtro comb, a su vez se busca que trabaje a baja frecuencia, que no dependa del factor de decimación y que sólo esté en función del orden del comb [5-14].

Existen dos tipos de compensación, de banda ancha ( $R = 2$ ) y angosta ( $R > 2$ ).

A continuación se presenta un método reciente de compensación de banda ancha, que es el caso estudiado en este trabajo, basado en el análisis de intervalos, no requiere de multiplicadores y trabaja a baja frecuencia.

#### 3.1.1. Compensación en banda ancha [5]

En [5] se presenta un método de diseño de filtros FIR compensadores, con coeficientes que son expresados como suma de potencias de dos (SPT). Este método está basado en el criterio de minimax error. A su vez, para obtener los coeficientes SPT, se utiliza la técnica de optimización global basada en el análisis de intervalos. Los compensadores propuestos no requieren multiplicadores,

resultan útiles en compensación de banda ancha para aplicaciones con bajos factores de decimación y trabajan a baja frecuencia.

La respuesta en magnitud de un filtro compensador ideal se define como el inverso de la respuesta en magnitud del filtro decimador comb, relativo a baja frecuencia:

$$H_{comp}(e^{j\omega}) = \frac{1}{H_{comb}(e^{j\omega/M})} = \left[ M \frac{\sin(\omega/(2M))}{\sin(\omega/2)} \right]^K. \quad (3.1)$$

Los compensadores FIR pueden tener un número par o impar de coeficientes, sin embargo, la respuesta de los compensadores con un número impar se acerca más a la respuesta ideal en banda ancha que los de número par. La razón es la presencia de un cero en  $z = -1$  en la función de transferencia de los compensadores con número par de coeficientes. El cero deteriora la respuesta en la vecindad de  $|\omega| = \pi$ . En este método sólo se consideran compensadores con un número impar de coeficientes.

La estructura propuesta está compuesta por un filtro comb en cascada con un filtro FIR compensador de fase lineal. La respuesta en magnitud de este sistema debe aproximarse a la unidad dentro de una banda de frecuencias, conocida como banda de importancia o interés. El objetivo entonces, es encontrar los coeficientes SPT óptimos que resulten de la aproximación minimax.

Tal diseño se describe mediante el problema de optimización:

$$\mathbf{a}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{a}} [\varepsilon(\mathbf{a})] \quad (3.2)$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{a} \text{ es SPT representable,} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{a}$  es el vector de coeficientes del compensador, mientras que la función objetivo,  $\varepsilon$ , es de la forma:

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \max_{|\omega| \leq \omega_c} |1 - H_{comb}(e^{j\omega/M})H_{comp}(e^{j\omega}, \mathbf{a})|, \quad (3.4)$$

$H_{comp}$  es la respuesta en magnitud del compensador y  $\omega_c$  es el límite superior de la banda de interés.

La respuesta en magnitud del compensador a diseñar está dado por:

$$H(e^{j\omega}) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(L-1)/2} a_k \cos(k\omega), \quad (3.5)$$

donde  $L$  es el número de coeficientes del compensador.

Para un tamaño de palabra  $W$ , la representación SPT de los coeficientes del compensador,  $a(m)$ , se expresa como:

$$a(m) = \sum_{k=1}^W b(m, k) 2^{-k}; m = 1, \dots, \frac{L-1}{2}, \quad (3.6)$$

donde  $b(n, k) \in (-1, 0, 1)$ . Cada  $b(n, k) \neq 0$  se conoce como término y el número de términos por coeficiente está limitado a un valor,  $P$ .

Debido a que se desea que la respuesta del sistema abarque una banda ancha, se espera que la energía de la respuesta al impulso esté concentrada en el coeficiente  $a(0)$ , por lo que se asigna un término más a este coeficiente. El término  $a(0)$  es expresado como:

$$a(0) = 1 + \sum_{k=1}^W b(0, k)2^{-k}. \quad (3.7)$$

Se utiliza la optimización basada en el análisis de intervalos para así obtener el compensador óptimo. En el paper [6] se diseñaron filtros FIR con coeficientes SPT, cuya aproximación de magnitud se lleva a cabo mediante minimax. En el paper recién citado, el diseño de filtros FIR es descrito por el problema de optimización:

$$x_{opt} = \arg \min_{\mathbf{x}} [y(\mathbf{x})]. \quad (3.8)$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{x} = [x(m)]; x(m) = \sum_{k=1}^W b(m, k)2^{-k}; m = 0, 1, \dots, \frac{L-1}{2}. \quad (3.9)$$

La función objetivo  $y$  está dada por:

$$y(\mathbf{x}) = \max_{|\omega| \leq \Omega_c} [R(e^{j\omega}) |H_a(e^{j\omega}, \mathbf{x}) - H_d(e^{j\omega})|], \quad (3.10)$$

donde  $H_a(e^{j\omega}, \mathbf{x})$  es la respuesta en magnitud del filtro, mientras que  $H_d(e^{j\omega})$  es la respuesta deseada definida dentro de un rango de frecuencias  $\Omega_c$  y  $R(e^{j\omega})$  es una función positiva de ponderación.

El método propuesto en [6] es modificado para satisfacer las características de diseño del compensador. En este caso, la función objetivo está dada por la siguiente expresión:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \max_{|\omega| \leq \omega_c} |1 - H_{comb}(e^{j\omega/M}) H_{comp}(e^{j\omega}, \mathbf{x})|, \quad (3.11)$$

donde  $H_{comp}(e^{j\omega}, \mathbf{x})$  es:

$$H_{comp}(e^{j\omega}, \mathbf{x}) = 1 + x(0) + 2 \sum_{m=1}^{(L-1)/2} x(m) \cos(m\omega) \quad (3.12)$$

La solución a este problema llega mediante la extensión de intervalos que se obtiene usando la extensión de operaciones elementales descritas en [6].

**Ejemplo 3.1.** Se requiere un filtro compensador de cinco coeficientes,  $L = 5$ , de orden  $K = 5$ , factor de decimación  $M = 32$ . Los coeficientes de este

compensador se obtienen de la Tabla I de [5], teniéndose así la respuesta en magnitud del filtro compensador:

$$\begin{aligned}
 H_{comp}(e^{j\omega}) = & [1 + (2^{-1}) + (2^{-2}) + (2^{-3})] \\
 & + 2 * [-(2^{-1}) - (2^{-5}) + (2^{-8})] * \cos(\omega) \\
 & + 2 * [(2^{-3}) - (2^{-5}) - (2^{-11})] * \cos(2\omega).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

La Figura 3.1 muestra la respuesta en magnitud del filtro comb y del filtro comb compensado [5]. En el acercamiento se observa que la respuesta en magnitud del comb compensado es prácticamente unitaria, lográndose así mejorar la respuesta en banda de paso a costa de un filtro FIR que no requiere de multiplicadores y trabaja a baja frecuencia.

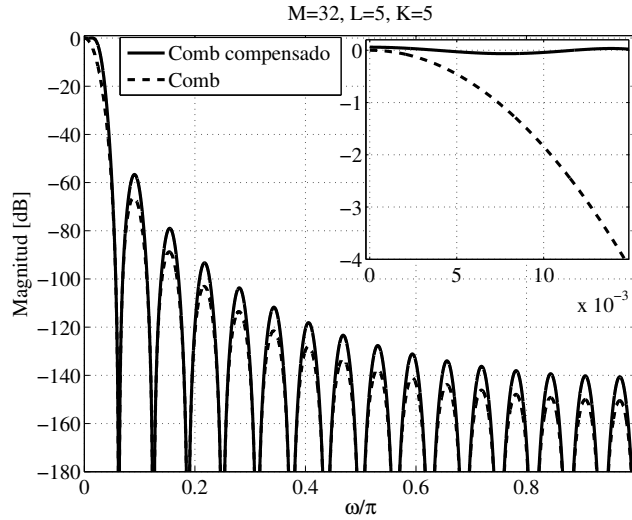


Figura 3.1: Respuesta en magnitud para filtro con banda de interés  $\omega < \pi/2M$ .

### 3.2. Mejora en banda de rechazo

Las dos principales técnicas que mejoran la banda de rechazo son el sinc rotado y el filtro comb generalizado. También existen filtros más simples como los cosenos o cosenos cuadrados que ayudan a mejorar la atenuación en ciertas folding bands. Éstos son muy efectivos, principalmente en aplicaciones que requieren una gran atenuación en la primera folding band [15]. Recientemente, se ha propuesto la aplicación de polinomios ciclotómicos en el diseño de filtros decimadores, los cuales están en función de los ceros de cada polinomio [16-18]. Esta sección presenta al filtro sinc rotado propuesto por Presti y la derivación de los filtros comb generalizados de Laddomada.



### 3.2.1. Sinc rotado (RS)[14]

Debido a que la respuesta en magnitud del filtro comb se comporta como una función sinc, en muchos casos el filtro comb también es conocido como filtro sinc. El filtro sinc rotado [14] parte de la localización de los ceros del filtro comb:

$$z_i = e^{j\frac{2\pi i}{M}}; i = 1, \dots, M - 1. \quad (3.14)$$

A cada uno de estos ceros se le aplica una rotación de  $\alpha$  radianes en contra de las manecillas del reloj:

$$H_u(z) = \frac{z^{-(M-1)}}{M} \prod_{i=1}^{M-1} (z - e^{j\frac{2\pi i}{M} + \alpha}) = \frac{1}{M} \frac{1 - z^{-M} e^{j\alpha M}}{1 - z^{-1} e^{j\alpha}}, \quad (3.15)$$

y  $\alpha$  radianes en sentido de las manecillas del reloj:

$$H_d(z) = \frac{z^{-(M-1)}}{M} \prod_{i=1}^{M-1} (z - e^{j\frac{2\pi i}{M} - \alpha}) = \frac{1}{M} \frac{1 - z^{-M} e^{-j\alpha M}}{1 - z^{-1} e^{-j\alpha}}. \quad (3.16)$$

El producto de estos dos filtros lleva al filtro sinc rotado:

$$H_r(z) = H_u(z)H_d(z) = \frac{1}{M^2} \frac{1 - 2\cos(\alpha M)z^{-M} + z^{-2M}}{1 - 2\cos(\alpha)z^{-M} + z^{-M}}. \quad (3.17)$$

Mediante este producto todos los coeficientes que forman a  $H_r(z)$  son reales y sus ceros estarán ubicados en las frecuencias:

$$\frac{2i}{M} \pm \alpha; i = 1, \dots, M - 1. \quad (3.18)$$

Con el fin de posicionar los ceros rotados dentro de las folding bands, el valor de  $\alpha$  está dado por:

$$\alpha = q2\pi f_c. \quad (3.19)$$

Si  $q < 1$  los ceros estarán ubicados en frecuencias pertenecientes a las de cada folding band.

**Ejemplo 3.2.** Se realiza la rotación de ceros de un filtro comb de orden tres y factor de decimación ocho. El valor de rotación elegido es:  $\alpha = 0.79$ . La Figura 3.2 compara la respuesta entre el filtro comb tradicional y el sinc rotado. Se puede apreciar el gran ancho de atenuación en las folding bands, debido a los ceros rotados.

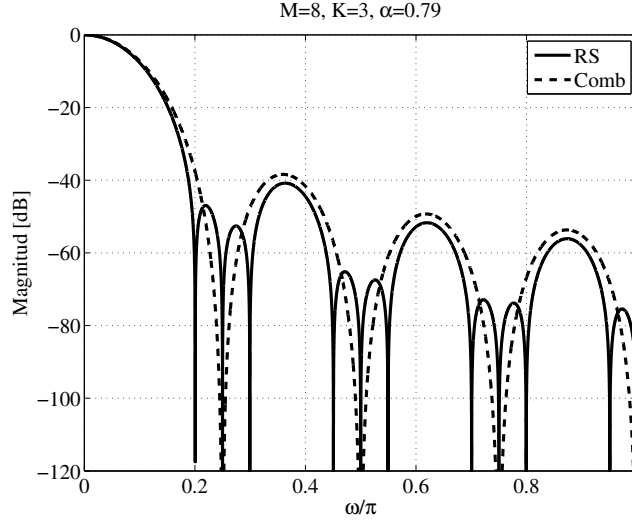


Figura 3.2: Respuesta en magnitud del filtro sinc rotado y el comb, ambos de tercer orden.

### 3.2.2. Filtro Comb Generalizado (GCF) [2]

La idea de rotar una cierta cantidad de ceros y así lograr un mayor ancho en la atenuación de las folding bands del filtro comb, es retomada y generalizada por Ladommada [2].

El principio es que cada folding band cuente con  $K$  ceros que logren decrementar en gran medida el ruido de cuantización.

La función de transferencia de un GCF de orden  $K$  puede ser construida mediante las dos siguientes funciones:

$$H_1(z) = \prod_{i=1}^{M_m} \prod_{p=1}^K (1 - 2\cos((2\pi/M)i - \alpha_p)z^{-1} + z^{-2}), \quad (3.20)$$

donde  $\alpha_p = q_p 2\pi f_c$  con  $q_p \in [-1, 1]$  y  $M_m$ :

$$M_m = \begin{cases} M/2 & M \text{ par} \\ (M-1)/2 & M \text{ impar} \end{cases}. \quad (3.21)$$

El segundo bloque base es:

$$\begin{aligned} H_2(z, \alpha_n) &= (1 - z^{-1}e^{+j\pi - j\alpha_n})(1 - z^{-1}e^{-j\pi + j\alpha_n}) \\ &= (1 - 2\cos(\pi - \alpha_n)z^{-1} + z^{-2}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Estas dos funciones de transferencia permiten expresar la de un GCF de orden  $K$ ,  $H_{GCF_K}(z)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_{o,ev,1}} H_1(z) \prod_{n=1}^{K/2} H_2(z, \alpha_{n+K}), M \text{ par}, K \text{ par}; \\ & \frac{(1+z^{-1})}{H_{o,ev,2}} H_1(z) \prod_{n=1}^{K/2} H_2(z, \alpha_{n+K}), M \text{ par}, K \text{ impar}; \\ & \frac{1}{H_{o,od}} H_1(z), M \text{ impar}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $H_{o,ev,1}$ ,  $H_{o,ev,2}$  y  $H_{o,od}$  son constantes de ganancia unitaria en  $\omega = 0$ .

La optimización de los parámetros de rotación,  $q_p$ , se lleva a cabo mediante la maximización de la atenuación del ruido de cuantización producido por un modulador Sigma-Delta alrededor de las folding bands. Los resultados de la optimización se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Valores óptimos de rotación

$K$	3	4	5	6
$q_1$	-0.79	-0.35	0.55	0.95
$q_2$	0	0.35	0.93	0.675
$q_3$	0.79	-0.88	-0.55	0.25
$q_4$	0.79	0.88	-0.93	-0.25
$q_5$	-	0.88	0	-0.675
$q_6$	-	0.35	0.55	-0.95
$q_5$	-	-	0.93	0.95
$q_5$	-	-	-	0.675
$q_5$	-	-	-	0.25

**Ejemplo 3.3.** Se diseña un filtro comb generalizado de orden seis y factor de decimación ocho. Los valores óptimos de rotación son tomados de la Tabla 3.1 y la respuesta en magnitud es presentada en la Figura 3.3. Se observa que los ceros agregados cubren prácticamente todo el ancho de las folding bands.

### 3.3. Mejora en banda de paso y rechazo

El método pionero en la mejora de ambas bandas es sharpening [19], del cual se desprenden diversas modificaciones, generalizaciones y aplicaciones. Recientemente, se propusieron filtros correctores con la finalidad de mejorar ambas bandas, los cuales están diseñados para un específico orden, no dependen del

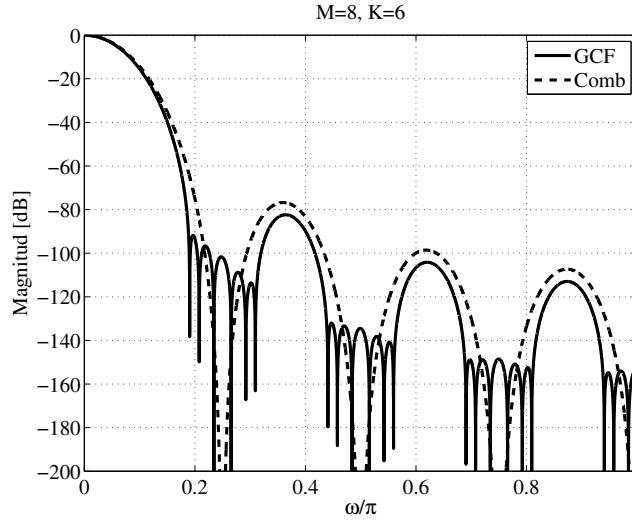


Figura 3.3: Comparación de la respuesta en magnitud del filtro comb original y el generalizado de orden seis.

factor de decimación y no necesitan multiplicadores para poder ser implementados [20]. Otra de las formas de mejorar ambas bandas, se logra mediante la combinación de filtros compensadores y la introducción de ceros, rotaciones de ceros, sinc rotados o filtros comb generalizados [21-31]. En esta sección se describen a detalle dos métodos: sharpening y filtros correctores, que son la base de las propuestas de esta tesis.

### 3.3.1. Método sharpening [19]

A menudo es necesario mejorar la respuesta de un filtro ya sea en banda de paso o rechazo [19]. Un primer intento se hace al pasar los datos a través del mismo filtro una cierta cantidad de veces. Cada repetición mejora la atenuación en banda de rechazo, pero también aumenta el error en banda de paso y se incrementa el orden del filtro equivalente.

La técnica sharpening mejora la respuesta en banda de rechazo sin tener que sacrificar la banda de paso. Este método se basa en la idea de la función de cambio de amplitud (ACF) y está restringido a filtros simétricos no recursivos.

La función de cambio de amplitud para el uso doble del mismo filtro es:

$$H_{out} = H_{in}^2. \quad (3.24)$$

Con esta función la respuesta en la banda de rechazo es el cuadrado que en la de  $H_{in}$ , aumentando así la atenuación. Por otra parte, la respuesta en banda de paso prácticamente se duplica, aumentándose en gran medida el error en estas frecuencias.

Una función de cambio de amplitud que invierte los papeles es la siguiente:

$$H_{out} = H_{in}[2 - H_{in}]. \quad (3.25)$$

Cuando  $H_{in}$  presenta valores cercanos a la unidad  $H_{out}$  tendrá valores mucho más cercanos a la unidad. En cambio, cuando  $H_{in}$  se acerca a cero, los valores de  $H_{out}$  se alejarán el doble del cero.

Las dos últimas ACFs descritas llevan a buscar aquella que pueda reducir los errores tanto en banda de paso como en rechazo. La curva más simple, que es tangente horizontalmente con el cero y la unidad, es cúbica:

$$H_{out} = H_{in}^2[3 - 2H_{in}]. \quad (3.26)$$

Con esta ACF la desviación en banda de paso y rechazo se decreta por un factor cuadrático y debido a que la frecuencia no está involucrada en las transformaciones, la localización de los límites de cada banda no se modifica.

La representación gráfica de las anteriores ACFs, en la que el eje x corresponde a la magnitud de  $H_{in}$  y el eje y a  $H_{out}$ , se presenta en la Figura 3.4; donde la curva A representa a la ACF (3.24), la curva B a (3.25) y la C corresponde a (3.26).

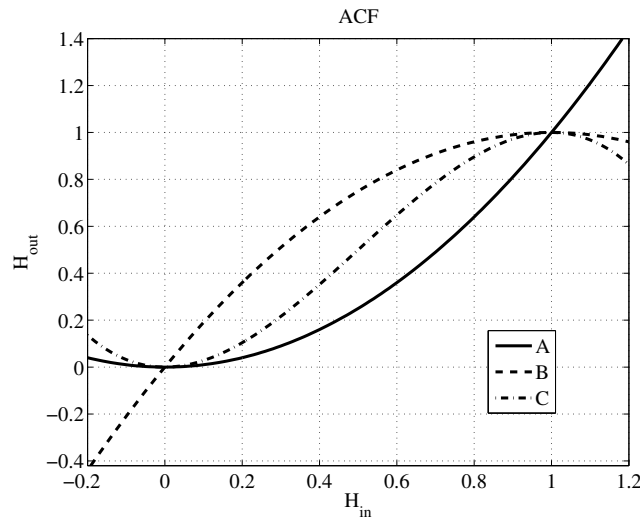


Figura 3.4: Representación gráfica de la función de cambio de amplitud, donde el punto (0,0) representa a la banda de rechazo y (1,1) a la banda de paso.

Una generalización de la construcción de ACFs está dada por la siguiente expresión:

$$H_{out} = H_{in}^{n+1} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)!}{n!k!} [1 - H_{in}]^k, \quad (3.27)$$

donde el valor de  $m$  es el orden de tangencialidad en la unidad (banda de paso), y  $n$  es la tangencialidad en cero (banda de rechazo).

**Ejemplo 3.4.** Considerando que  $H_{in}$  es un filtro comb de segundo orden y factor de decimación de 32, se le aplica el polinomio más simple de sharpening ( $m = n = 1$ ). El resultado de esta transformación es comparado con el filtro comb tradicional de orden seis, Figura 3.5

El acercamiento en banda de paso muestra que la desviación máxima de  $H_{out}$  es de 0.28dB. Por otra parte, se obtiene un mayor ancho de atenuación en folding bands.

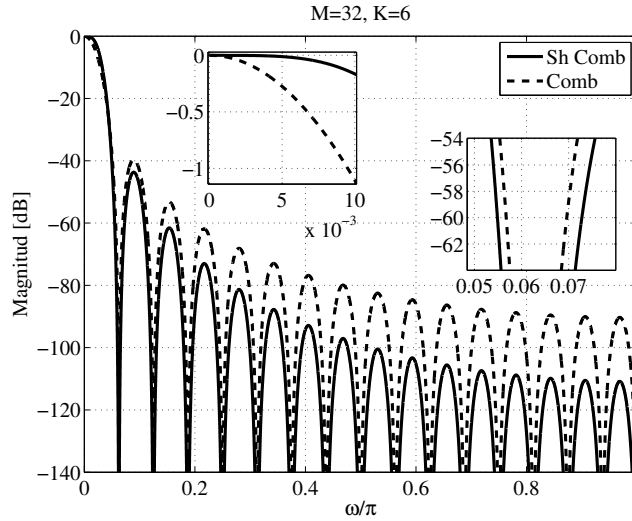


Figura 3.5: Comparación entre filtro comb tradicional de sexto orden y el resultado de aplicar el polinomio más simple a un comb de segundo orden.

### 3.3.2. Filtros correctores [20]

Este método introduce un filtro decimador comb de dos etapas que mejora la respuesta tanto en banda de paso como en folding bands [20]. La mejora se lleva a cabo a través de filtros correctores diseñados mediante la técnica de muestreo en frecuencia y el método IFIR. Los correctores no necesitan de multiplicadores, trabajan a baja frecuencia, pueden ser utilizados para cualquier factor de decimación par y sólo están en función del orden del filtro comb.

Los filtros correctores propuestos están diseñados a través de la técnica IFIR. Un filtro IFIR está compuesto por un filtro modelo y un interpolador, sin embargo éste último no es requerido, debido a que las imágenes del filtro modelo expandido están situadas en la misma posición que los ceros del filtro comb.

Para un factor de decimación par,  $M = 2M_1$ , las especificaciones del filtro modelo son:

$$|G(e^{j\omega})| = \begin{cases} \frac{1}{|H_{comb}(e^{j\omega})|} & \text{para } 0 \leq \omega \leq \alpha\pi/4 \\ 0 & \text{para } \beta\pi/4 \leq \omega \leq \pi \end{cases}, \quad (3.28)$$

donde  $\alpha = 1.4$  y  $\beta = 2.8$  son los valores óptimos.

La cascada del filtro comb y el corrector da como resultado el filtro total:

$$H_r(z) = H_{comb}(z)G_K(z^{M_1}), \quad (3.29)$$

donde  $G_K(z^{M_1})$  es el filtro  $G(z)$  con coeficientes redondeados y expandido por  $M_1$ . Los coeficientes de  $G_K(z)$  pueden ser obtenidos de la Tabla 3.2. Esta tabla contiene cinco filtros, cada uno corresponde a un orden distinto  $K = 1, \dots, 5$ .

Tabla 3.2: Filtros correctores

$K$	$G_K(z)$
1	$G_1(z) = -3 + 2z^{-1} + 17z^{-2} + 17z^{-3} + 2z^{-4} - 3z^{-5}$
2	$G_2(z) = 1 - z^{-1} - 5z^{-2} + 3z^{-3} + 18z^{-4} + 18z^{-5} + 3z^{-6} - 5z^{-7} - z^{-8} + z^{-9}$
3	$G_3(z) = 1 - z^{-1} - 6z^{-2} + 2z^{-3} + 21z^{-4} + 21z^{-5} + 2z^{-6} - 6z^{-7} - z^{-8} + z^{-9}$
4	$G_4(z) = 1 + z^{-1} - 2z^{-2} - 8z^{-3} + z^{-4} + 24z^{-5} + 24z^{-6} + z^{-7} - 8z^{-8} - 2z^{-9} + z^{-10} + z^{-11}$
5	$G_4(z) = 1 + 2z^{-1} - 2z^{-2} - 11z^{-3} + 27z^{-5} + 27z^{-6} - 11z^{-8} - 2z^{-9} + 2z^{-10} + z^{-11}$

La respuesta en magnitud de los cinco filtros es presentada en la Figura 3.6. Se puede ver que en la frecuencia de paso ( $\omega_p = \pi/4$ ) la magnitud es creciente, lo cual compensará de gran manera la caída en banda de paso. Por otra parte, a partir de  $\omega_p = 3\pi/4$ , la magnitud es prácticamente cero.

Una vez definido el filtro completo,  $H_{comb}(z)$  se descompone de la siguiente forma:

$$H_{comb}(z) = H_1^K(z)H_2^K(z^{M_1}) \quad (3.30)$$

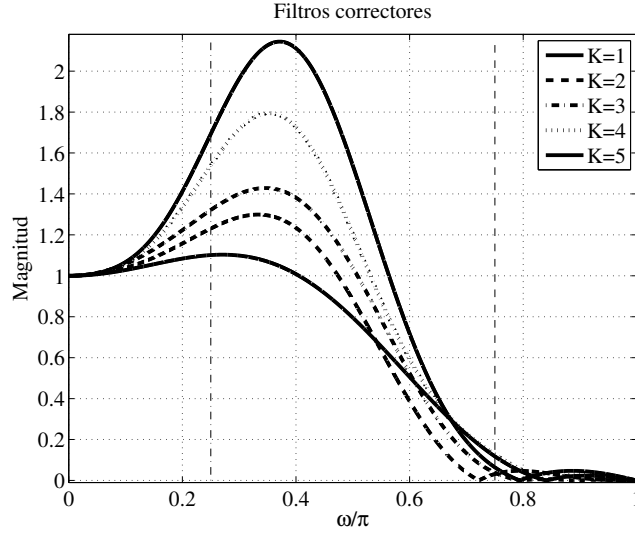


Figura 3.6: Respuesta en magnitud de los cinco filtros correctores diseñados.

donde

$$H_1(z) = \left[ \frac{1}{M_1} \frac{1 - z^{-M_1}}{1 - z^{-1}} \right]^K, \quad (3.31)$$

$$H_2(z) = \left[ \frac{1}{2} (1 + z^{-M_1}) \right]^K, \quad (3.32)$$

La estructura propuesta en [20] está compuesta por dos etapas que son mostradas en la Figura 3.7.

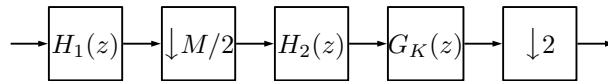


Figura 3.7: Estructura de dos etapas [20].

**Ejemplo 3.5.** Se diseña un filtro decimador para una decimación de doce y orden cuatro. El filtro corrector elegido es el número cuatro de la Tabla 3.2. La respuesta del filtro corrector en cascada con el comb se presenta en la Figura 3.8. La máxima desviación en banda de paso es igual a 0.23dB.



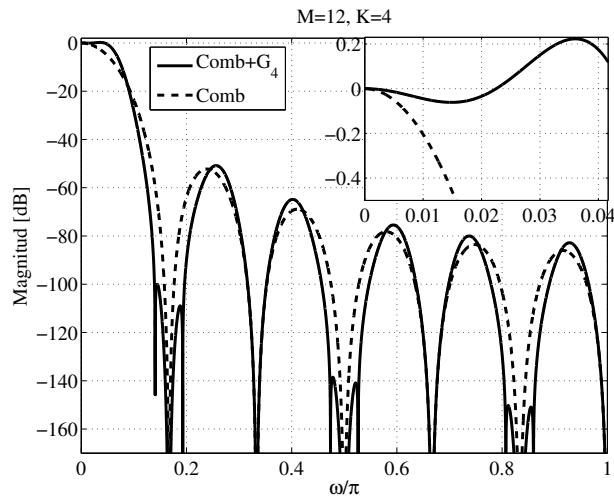


Figura 3.8: Respuesta en magnitud de filtro comb de orden cuatro mas corrector cuatro.

Con el fin de mejorar las folding bands pares, se aumenta en uno el orden de  $H_1(z)$ . El resultado de este incremento se presenta en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.6.** El filtro decimador del ejemplo anterior es retomado y se compara con el filtro resultante de aumentar en uno el orden de  $H_1(z)$ . La comparación de estos dos filtros se muestra en la Figura 3.9, en la que se observa una mejor atenuación en folding bands pares y una menor desviación en banda de paso.

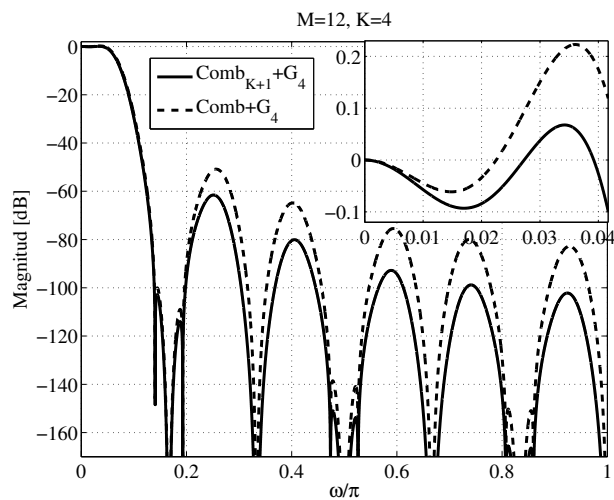


Figura 3.9: Respuesta en magnitud de filtro comb de orden cuatro mas corrector cuatro.

Con esta revisión de métodos e introducciones al filtro comb y al proceso de decimación, se procede a describir las estructuras decimadoras propuestas.

## Capítulo 4

# Estructura decimadora propuesta basada en filtros correctores

En este capítulo se analiza la estructura presentada en [20] y se propone la adición de dos filtros extra que mejorarán la respuesta en las folding bands pares del filtro decimador.

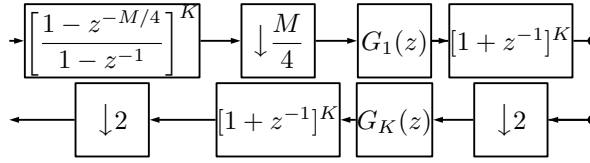
### 4.1. Filtro corrector adicional

Con el fin de mejorar la atenuación en folding bands adicionales a las de la estructura de la Figura 3.7, se propone trabajar con un factor de decimación múltiplo de cuatro. Con este factor, un filtro corrector es introducido justo después de decimar por  $M/4$ . El filtro corrector introducido mejora la atenuación en las folding bands:

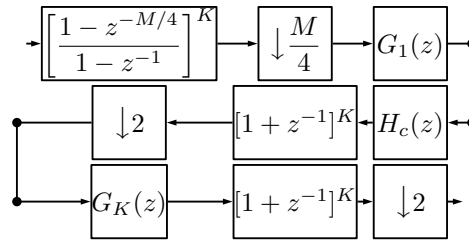
$$l = 4n + 2, n = 0, 1, \dots, (M/4) - 1. \quad (4.1)$$

Por ejemplo, para  $M = 24$ , la primera etapa es decimada por  $M/4 = 6$ , las dos etapas restantes son decimadas por un factor de dos y el rechazo anti-aliasing es mejorado en la segunda, sexta, décima, decimo cuarta, decimo octava y vigésima segunda folding band. En este punto la cuestión es qué filtro corrector agregar a la segunda etapa.

Considerando que el filtro corrector  $G_K(z)$  está en función del parámetro  $K$ , se elige el corrector más simple de la Tabla 3.2, que pertenece a  $K = 1$ . La estructura correspondiente es mostrada en la Figura 4.1a, y en adelante se hará referencia a ella como estructura propuesta 1. Un ejemplo de la aplicación de la estructura propuesta 1 se presenta a continuación.



(a)



(b)

Figura 4.1: Estructura de tres etapas: a) Estructura propuesta 1, b) Estructura propuesta 2.

**Ejemplo 4.1.** Considerando un factor de decimación  $M = 20$  y un orden  $K = 4$ , el factor de decimación de la primera etapa es igual a cinco y en la segunda etapa se agrega el filtro corrector  $G_1(z)$  perteneciente a la Tabla 3.2.

La Figura 4.2 presenta la respuesta en magnitud y un acercamiento a la banda de paso de la estructura propuesta 1 y del método original [20].

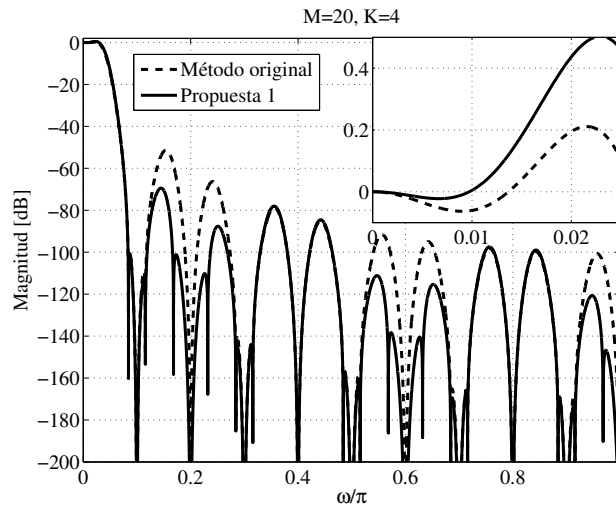


Figura 4.2: Respuesta en magnitud del método [20] y estructura propuesta 1.

Se observa una mayor atenuación en las folding bands adicionales (4.1), sin embargo, la desviación en banda de paso se incrementa. La solución a este último problema se plantea en la siguiente sección.

## 4.2. Filtro coseno cuadrado

Uno de los filtros más utilizados para mejorar la atenuación en folding bands del comb es el filtro coseno cuadrado, el cual tiene la siguiente función de transferencia y respuesta en frecuencia:

$$H_c(z^{M/4}) = 2^{-2}[1 + 2z^{-M/4} + z^{-2M/4}]. \quad (4.2)$$

$$|H_c(\omega)| = \cos^2(\omega M/8). \quad (4.3)$$

En la Figura 4.1b, estructura propuesta 2, se presenta la inclusión del filtro coseno cuadrado, el cual contribuye a mejorar la atenuación en las folding bands (4.1) y también ayuda a resolver el problema en banda de paso que presenta la estructura propuesta 1.

Como ejemplo, la respuesta en magnitud del filtro coseno cuadrado expandido por  $M = 20$  se muestra en la Figura 4.3a junto a la respuesta de la estructura propuesta 1. Se observa que el filtro (4.2) mejorará no solo la respuesta en banda de paso, sino también la atenuación en las folding bands adicionales de la estructura propuesta 1.

Estas dos contribuciones del filtro coseno cuadrado se confirman en la Figura 4.3b, donde se muestra la respuesta en magnitud y un acercamiento a la banda de paso de la estructura original [20] y de la propuesta 2.

En el siguiente ejemplo se ilustra como la misma estructura puede ser utilizada para el mismo parámetro  $K$  y diferentes valores de  $M$ .

**Ejemplo 4.2.** Se tienen los siguientes parámetros:  $M = 28$ ,  $M = 36$ , y  $K = 2$ . La respuesta en magnitud de la estructura propuesta 2 para  $M = 28$  y  $M = 36$  se presenta en la Figura 4.4 y Figura 4.5 respectivamente.

Las dos estructuras utilizan al filtro corrector  $G_2(z)$  en la última etapa, al filtro coseno cuadrado y al corrector  $G_1(z)$  en la penúltima etapa. Con esto se demuestra que la estructura propuesta 2 no está en función del factor de decimación, sino del orden del filtro comb, aspecto o característica que es deseable en los métodos de mejora de respuesta en magnitud del filtro comb.

La siguiente sección introduce una modificación a la estructura propuesta 2, al considerar que el factor de decimación es una potencia de dos.

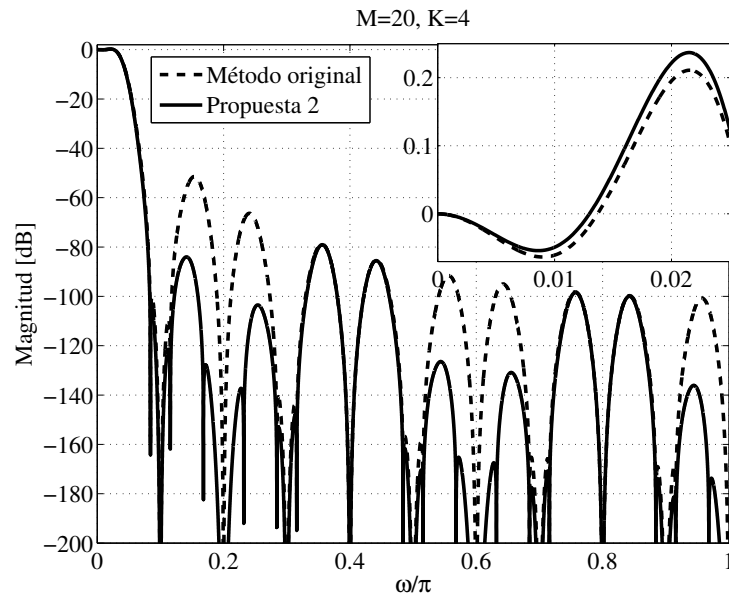
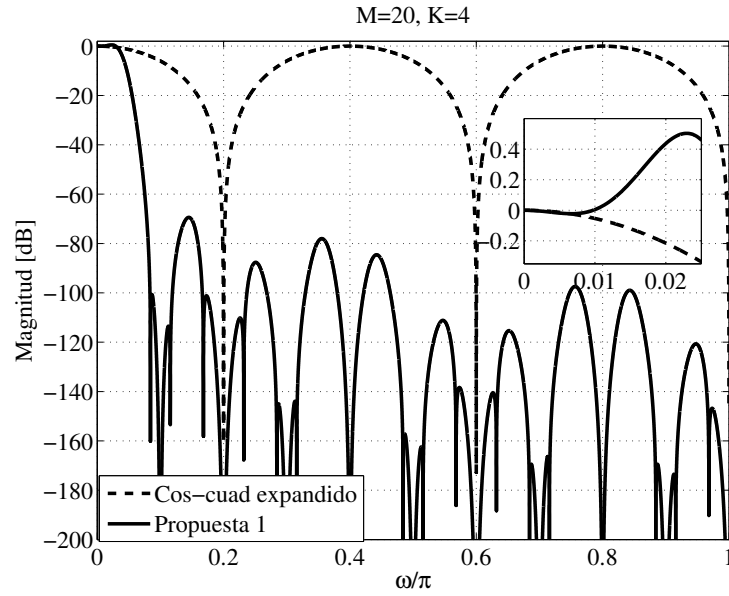


Figura 4.3: Respuestas en magnitud de a) filtro coseno cuadrado y estructura propuesta 1, b) método [20] y estructura propuesta 2

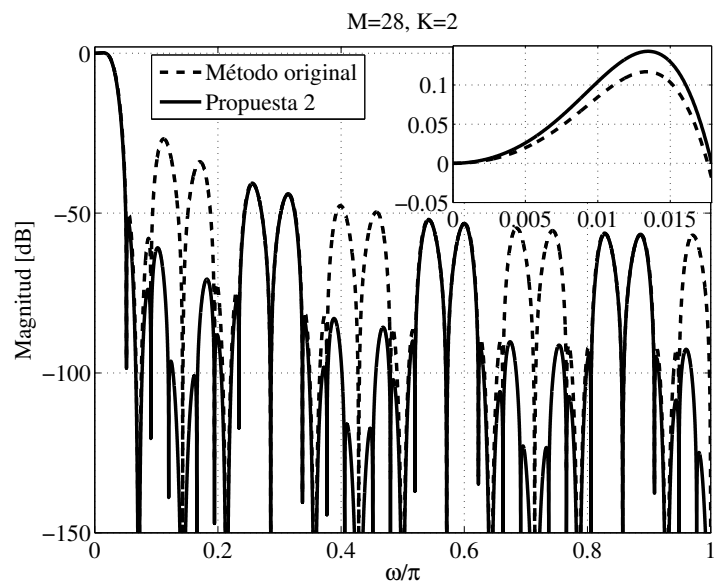


Figura 4.4: Respuesta en magnitud y acercamiento a banda de paso.

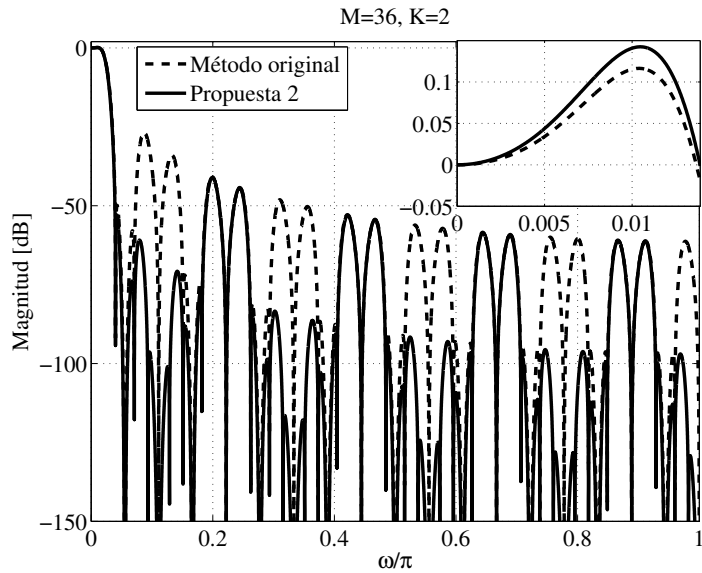


Figura 4.5: Respuesta en magnitud y acercamiento a banda de paso.

### 4.3. Estructura no recursiva para factores de decimación que son potencia de dos

La estructura no recursiva para  $M = 2^p$  cuenta con  $p$  etapas, de acuerdo a la expresión:

$$H_{comb}(z) = \prod_{i=0}^p (1 + z^{-2^i})^K. \quad (4.4)$$

Las primeras  $p - 2$  etapas corresponden a la primera etapa de la estructura propuesta 2, Figura 4.1b. Los filtros  $G_1(z)$  (filtro uno de Tabla 3.2) y  $H_c(z)$ :

$$H_c(z) = 2^{-2}[1 + 2z^{-1} + z^{-2}], \quad (4.5)$$

son añadidos en la etapa  $p - 1$ , mientras que en la última etapa se posiciona al filtro  $G_K(z)$ , como lo muestra la Figura 4.6. De esta forma se obtiene una mejora en la respuesta de la estructura no recursiva del comb y a su vez, se logra preservar su eficiencia en consumo de potencia.

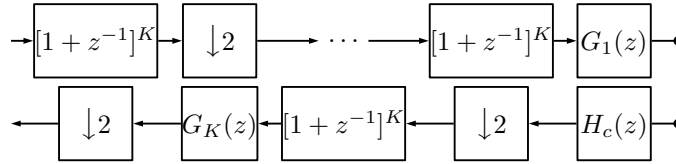


Figura 4.6: Estructura propuesta 2, cuando  $M = 2^p$ .

### 4.4. Comparaciones

En esta sección se compara al método propuesto con métodos que mejoran simultáneamente banda de paso y de rechazo del filtro comb.

**Ejemplo 4.3.** Este ejemplo compara la estructura propuesta con el método sharpening [3]. Los parámetros de diseño son:  $M = 24$ ,  $K = 4$ . Los correctores usados son:  $G_1(z)$  y  $G_4(z)$ . Para el método [3] se utiliza el polinomio más sencillo:  $H_{out} = H_{in}^2[3 - 2H_{in}]$ , usando al filtro comb de segundo orden como filtro de entrada. La respuesta en magnitud, junto a un acercamiento a la banda de paso se presentan en la Figura 4.7.

Nótese que el método propuesto mejora el rechazo anti-aliasing en la mayoría de folding bands y presenta una mejor respuesta en banda de paso que el método sharpening.



En cuanto a recursos, el método [3] requiere de 12 sumadores, mitad de ellos para la parte recursiva y la otra mitad para la no recursiva. Por otro lado, para el método propuesto se requieren 8 sumadores para el comb, 2 para el coseno cuadrado, 9 para  $G_1(z)$  y 13 para  $G_4(z)$ , dando un total de 32 sumadores. El problema que se presenta en [3], es que la mitad de sus sumadores trabajan a alta frecuencia.

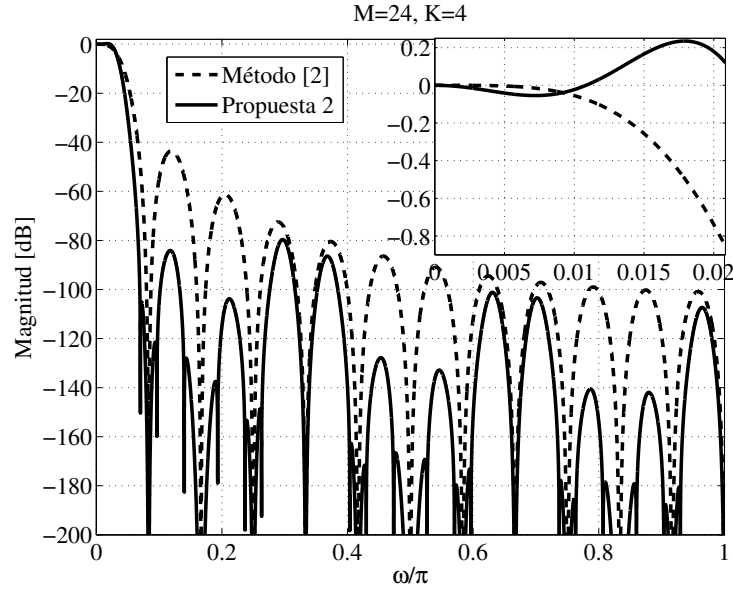


Figura 4.7: Respuesta en magnitud del método sharpening y la estructura propuesta 2.

**Ejemplo 4.4.** : Este ejemplo toma el método propuesto en [31], con parámetros  $b = -1$ ,  $N_1 = 15$ ,  $N_2 = 17$ ,  $M = 32$ ,  $K = 5$  y lo compara con el método propuesto, que utiliza al corrector  $G_1(z)$  y  $G_5(z)$  de la Tabla 3.2.

La respuesta en magnitud se presenta en la Figura 4.8, mostrando una menor desviación en banda de paso y mejor atenuación en folding bands.

Debido a que el factor de decimación es una potencia de dos, los sumadores que necesita el filtro comb son  $(\log_2 M) * K = 25$ . Para el método [31] son requeridos cuatro sumadores más, dos para el sub-filtro que mejora la atenuación y dos más para el compensador, dando un total de 29 sumadores. Por otra parte, la estructura propuesta requiere de los 25 sumadores del comb, de 9 para  $G_1(z)$ , 17 para  $G_5(z)$  y 2 para el coseno cuadrado, dando un total de 53 sumadores. El aumento en número de sumadores es el precio que se tiene que pagar por una mejor respuesta en magnitud.

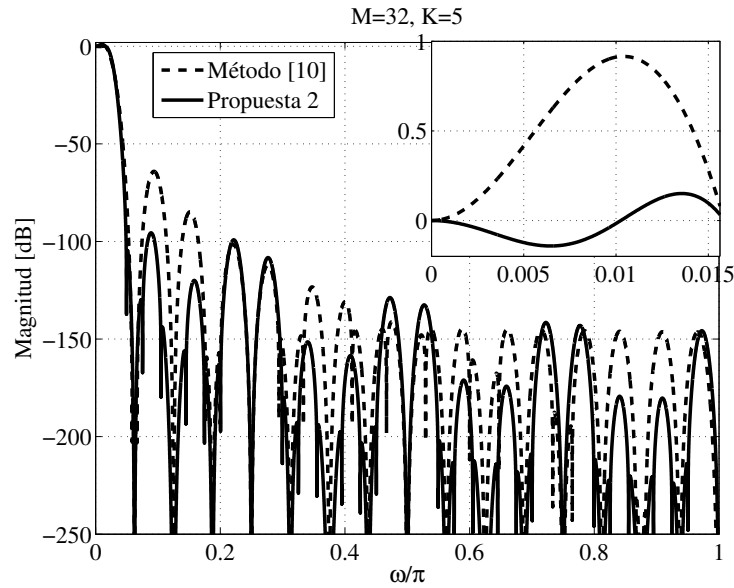


Figura 4.8: Respuesta en magnitud de método [31] y estructura propuesta 2, cuando  $M = 32$ ,  $K = 5$ .

## 4.5. Implementación

En esta sección se presenta la implementación de dos estructuras decimadoras propuestas; la primera con factor de decimación potencia de dos y la segunda con un factor múltiplo de cuatro. Se muestran los diagramas de bloques de las estructuras, las respuestas al impulso y al escalón de los filtros diseñados, a su vez, se presentan tablas con los recursos utilizados en la FPGA Artix-7 xc7a100t-3csg324, poniendo especial atención en el número de sumadores necesarios.

**Ejemplo 4.5.** Se diseña un filtro decimador de tercer orden y factor de decimación  $M = 16$ . El diagrama del filtro propuesto se muestra en la Figura 4.9.

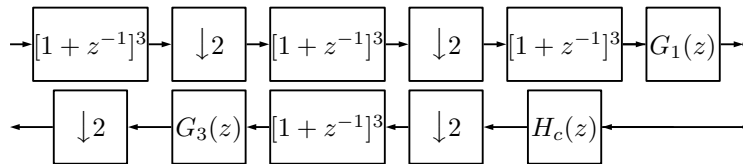


Figura 4.9: Estructura no recursiva para  $M = 16$  y  $K = 3$ .

Se desarrolló un código en VHDL que implementa la estructura no recursiva propuesta. El diagrama de bloques de la implementación está dado en la Figura 4.10. Cabe destacar que cada uno de los coeficientes, de los filtros correctores y coseno cuadrado, fueron realizados mediante corrimientos y sumas.

Los resultados de la simulación en Matlab y en Active HDL se comparan en la Figura 4.11, para un impulso como señal de entrada. Se puede observar que los valores de la respuesta en Matlab y Active coinciden, por lo que el código VHDL corresponde a la estructura de la Figura 4.9.

Una segunda prueba es realizada mediante el escalón unitario como entrada. Las respuestas de la simulaciones se muestran en la Figura 4.12, en ella se comprueba que el código VHDL generado corresponde con el filtro decimador propuesto.

Finalmente se sintetiza en Xilinx el código VHDL. Los recursos que se emplearon en la FPGA Artix-7 xc7a100t-3csg324 están contenidos en la Tabla 4.1.

Una estimación de los sumadores requeridos se lleva a cabo, ésta dice que se necesitarán  $(\log_2 M) * K = (\log_2 16) * 3 = 12$  sumadores para el filtro comb, 9 para el corrector  $G_1(z)$ , 15 para el corrector  $G_3(z)$  y 2 para el filtro coseno cuadrado, dando un total de 38 sumadores. En la tabla 4.1 se tiene que se requirieron un total de 42 sumadores para la implementación de este filtro. De los 42 sumadores que Xilinx reporta, 4 fueron necesarios para generar las señales de habilitación correspondientes a las cuatro etapas (CE0, CE1, CE2 y CE3 de la Figura 4.10), los 38 restantes son los que la estructura propuesta requiere; 36 para sumas y 2 para restas.

El número de APOS (Additions Per Output Sample) para este ejemplo es de 158, que corresponde a un aumento de 36 APOS con respecto a método [20].

Tabla 4.1: Resumen de diseño utilizando Artix-7

Utilidades Lógicas	Usado	Disponibile	Utilización
Total de elementos lógicos	1307	63400	2 %
Total de registros	1760	126800	1 %
Elementos sumadores	42	-	-
Elementos multiplicadores	0	-	-
APOS	158	-	-

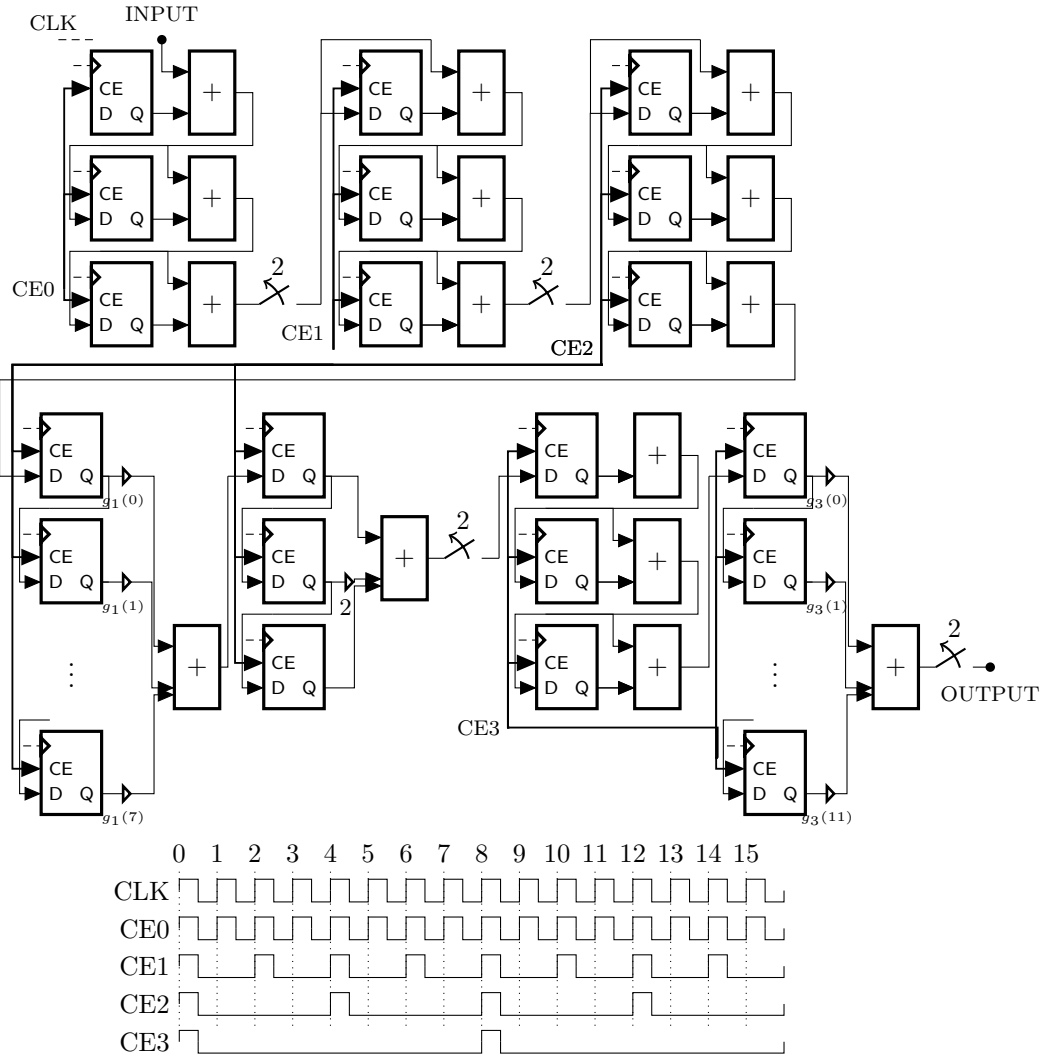
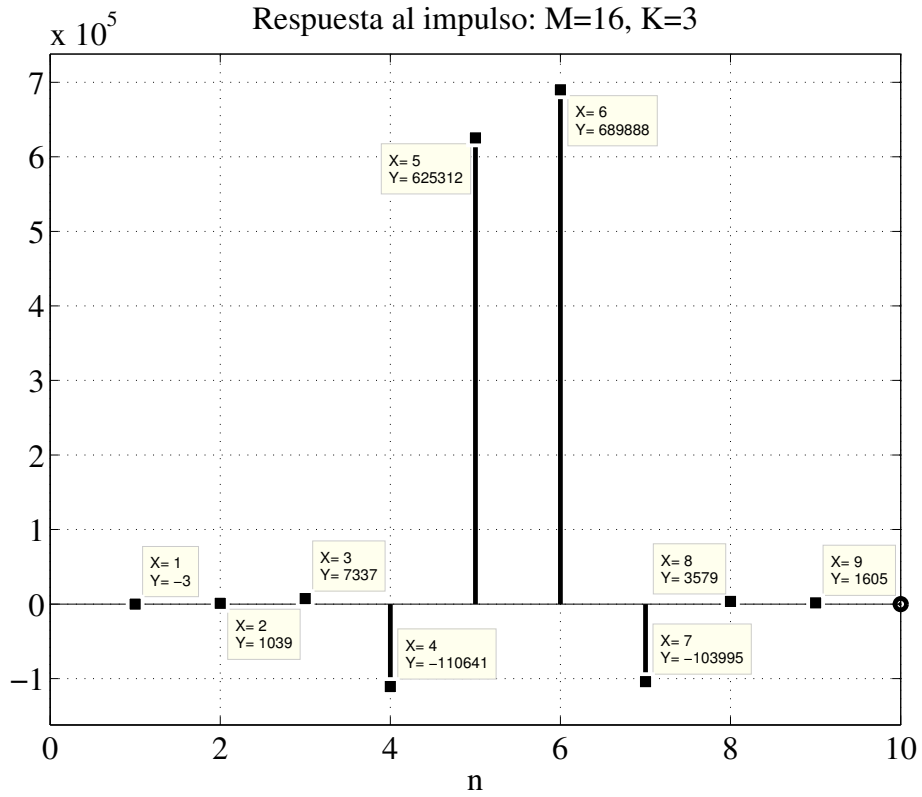
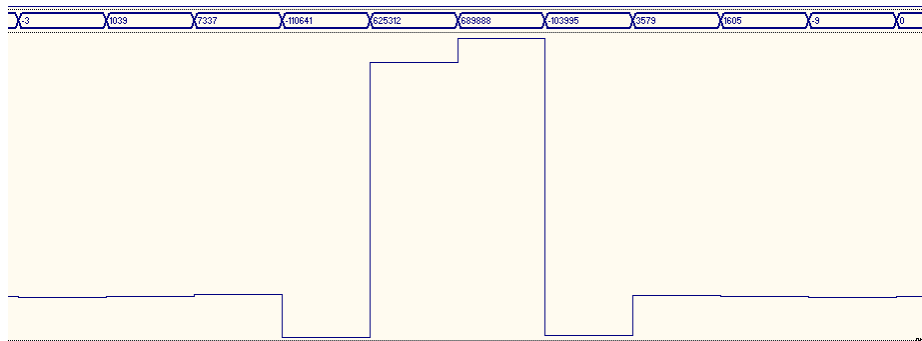


Figura 4.10: Diagrama de bloques de implementación de estructura propuesta.

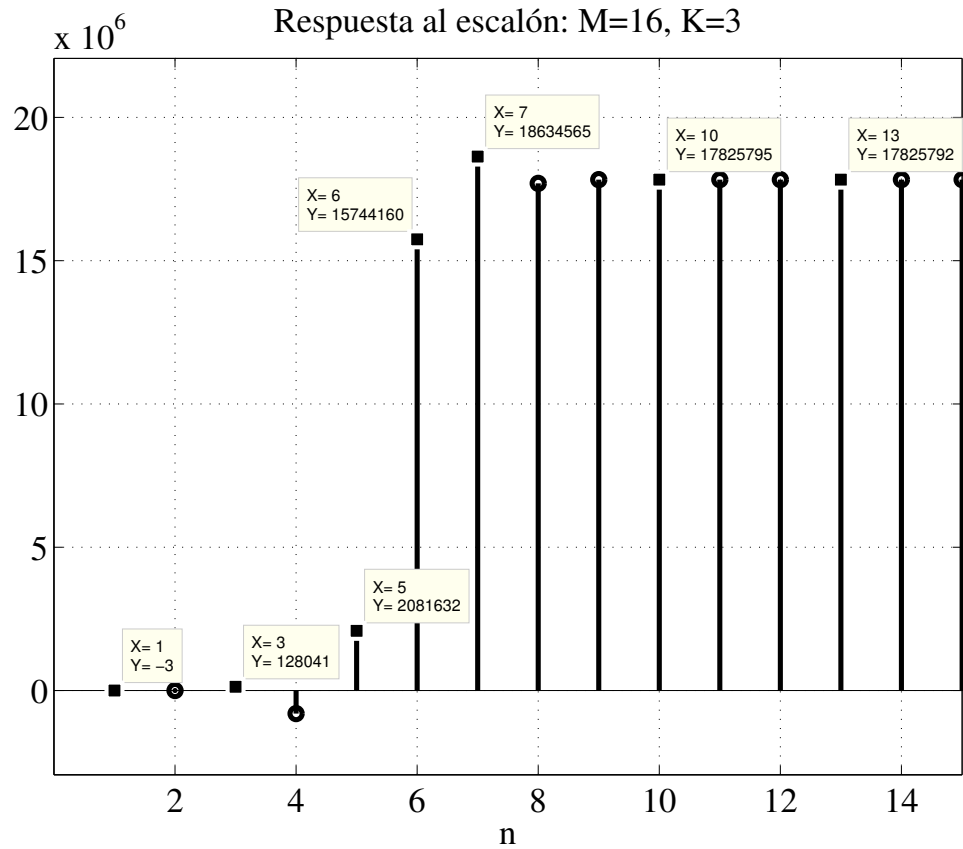


(a)

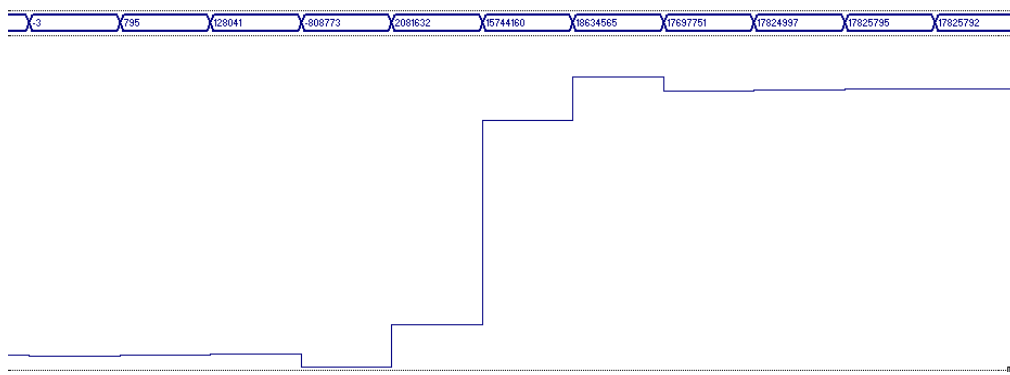


(b)

Figura 4.11: Comparación de respuesta al impulso generada en Matlab contra la generada en Active HDL.



(a)



(b)

Figura 4.12: Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL.

**Ejemplo 4.6.** Se diseña un filtro decimador considerándose un factor de decimación igual a veinte y un orden igual a cuatro. El diagrama del filtro propuesto se muestra en la Figura 4.13.

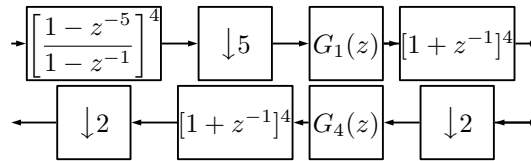


Figura 4.13: Estructura propuesta para filtro decimador con  $M = 20$  y  $K = 4$ .

De la misma forma que en el ejemplo anterior, se lleva a cabo la implementación de esta estructura que está basada en el diagrama de bloques de la Figura 4.14. Los resultados de la simulación en Matlab y en Active HDL se comparan en la Figura 4.15, teniéndose como entrada al impulso unitario. Al comparar los valores obtenidos en estas dos simulaciones, se llega a que las respuestas son iguales.

La Figura 4.16 presenta las respuestas cuando se ingresa un escalón unitario a la estructura 4.13.

Los resultados de sintetizar en Xilinx el código VHDL, se presentan en la Tabla 4.2.

En este ejemplo también se realiza una comparación entre la estimación de sumadores necesarios y el número de sumadores que Xilinx nos presenta en sus reportes. Se estimaron 16 sumadores para el filtro comb, 9 para el corrector  $G_1(z)$ , 2 para el coseno cuadrado y 13 para el corrector  $G_4(z)$ , para un total de 40 sumadores. Xilinx arroja un total de 43 sumadores, 3 de ellos para las señales habilitadoras (CE0, CE1 y CE2, véase Figura 4.14) y 40 para la estructura decimadora (34 sumas y 6 restas).

El número de APOS para este ejemplo es de 180, que igual al ejemplo anterior corresponde a un aumento de 36 APOS con respecto al método [20]. El aumento de APOS es constante ya que el corrector  $H_1(z)$  y el filtro coseno cuadrado  $H_c(z)$  siempre trabajan a la misma frecuencia:  $M/4$  y el número de sumadores requeridos también es constante.

Tabla 4.2: Resumen de diseño utilizando Artix-7

Utilidades Lógicas	Usado	Disponibile	Utilización
Total de elementos lógicos	2827	63400	4 %
Total de registros	4238	126800	3 %
Elementos sumadores	43	-	-
Elementos multiplicadores	0	-	-
APOS	180	-	-

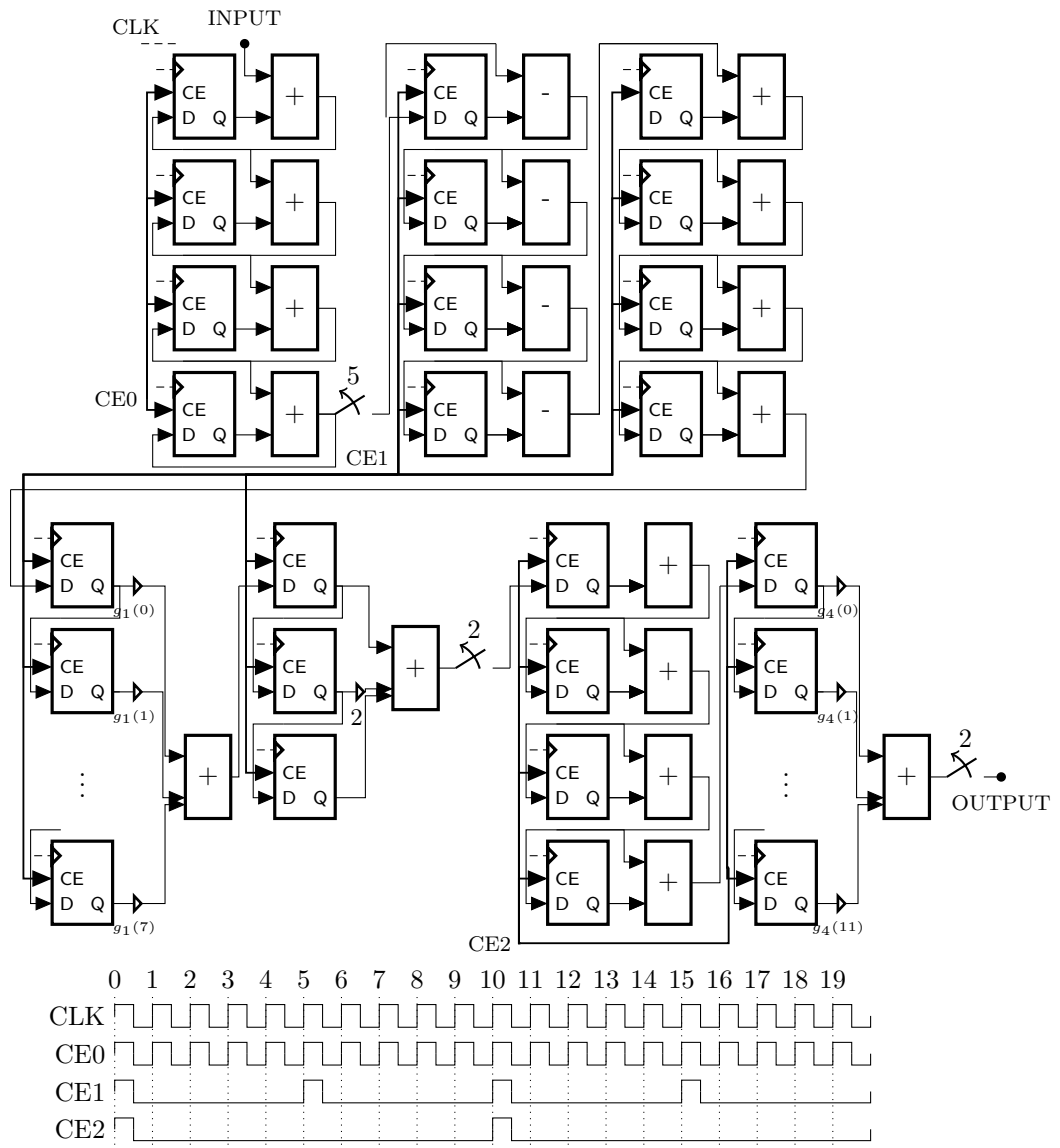
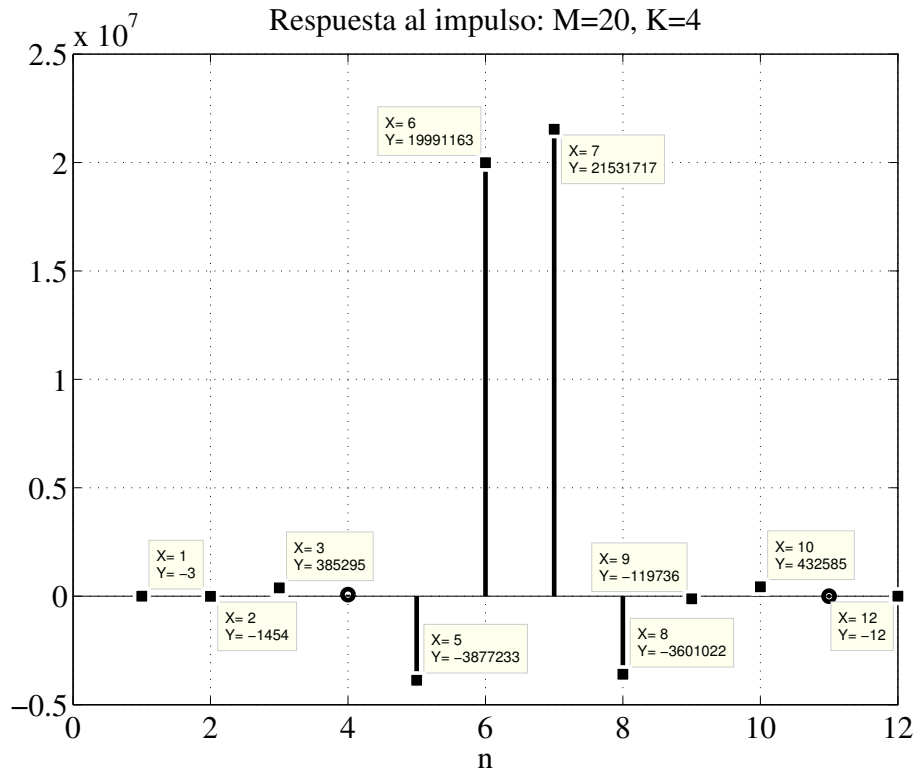
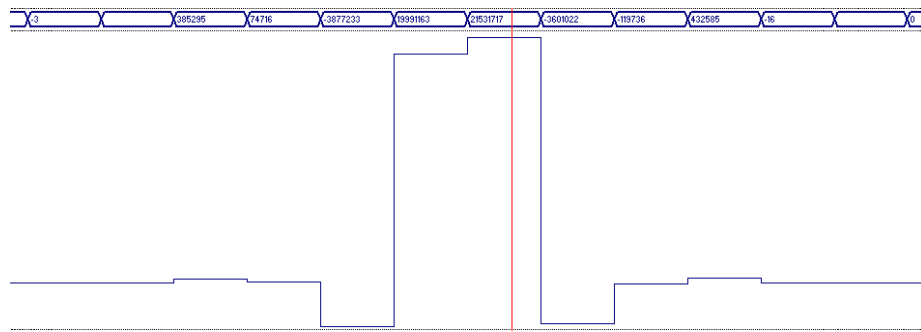


Figura 4.14: Diagrama de bloques de implementación de estructura propuesta.



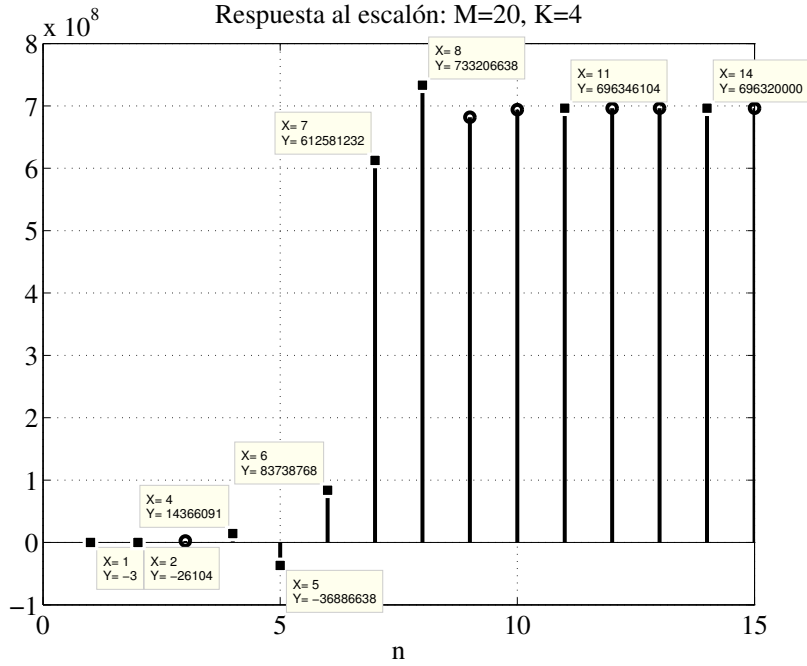


(a)

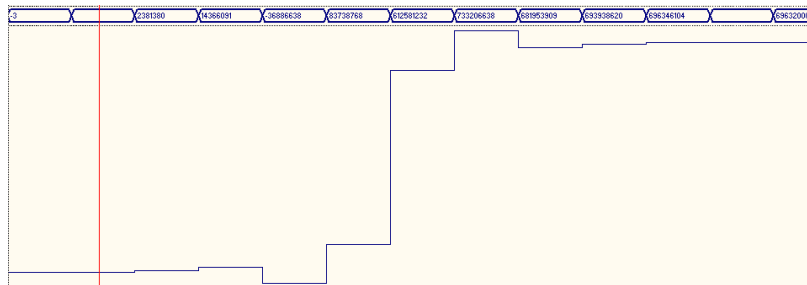


(b)

Figura 4.15: Comparación de respuesta al impulso generada en Matlab contra la generada en Active HDL.



(a)



(b)

Figura 4.16: Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL.

Las estimaciones de sumadores necesarios para la implementación de la estructura decimadora propuesta coinciden con los reportes de Xilinx. Estos números ayudarán, en un futuro, al análisis y reducción del consumo de potencia de esta propuesta.

Para finalizar, los resultados de estos dos ejemplos confirman que esta propuesta no necesita de multiplicadores para poder mejorar la respuesta en banda de paso y de rechazo del filtro comb, cumpliendo así con el objetivo de este trabajo.

## Capítulo 5

# Estructura decimadora propuesta basada en una función de cambio de amplitud

El propósito que se tiene al aplicar una ACF (Función de Cambio de Amplitud) al filtro comb, es mejorar la respuesta en magnitud de las folding bands. Esta mejora se logra mediante la ampliación de su ancho de atenuación.

Las funciones de cambio de amplitud trabajan con amplitudes normalizadas, tanto del filtro de entrada como del de salida, por lo que en su representación gráfica se establece como banda de paso a la región cercana al punto  $(1, 1)$ , mientras que la banda de rechazo se ubica en los linderos de  $(0, 0)$ . En este trabajo, la zona de análisis será la cercana al punto  $(0, 0)$  y por simplicidad la magnitud no estará normalizada.

Como se mencionó en el capítulo de revisión de métodos, las funciones de cambio de amplitud son aplicables a filtros de simetría tipo uno, por lo que esta propuesta va dirigida a este tipo de filtros.

### 5.1. Función de cambio de amplitud propuesta

Se parte de la siguiente función lineal de cambio de amplitud:

$$H_{out} = H_{in} - a, \quad (5.1)$$

donde  $a$  es una constante, la cual hace que la ACF corte al eje de las ordenadas en el punto  $(0, -a)$ .

Los ceros de  $H_{out}$  estarán ubicados donde  $H_{in} = a$ , mientras que la magnitud de salida será igual a  $a$  cuando  $H_{in} = 0$ . La Figura 5.1 muestra la ACF resultante

cuando  $a = 0.5$ . (Esta figura representa la zona de rechazo y, como se mencionó anteriormente, las magnitudes de  $H_{in}$  y  $H_{out}$  no están normalizadas.)

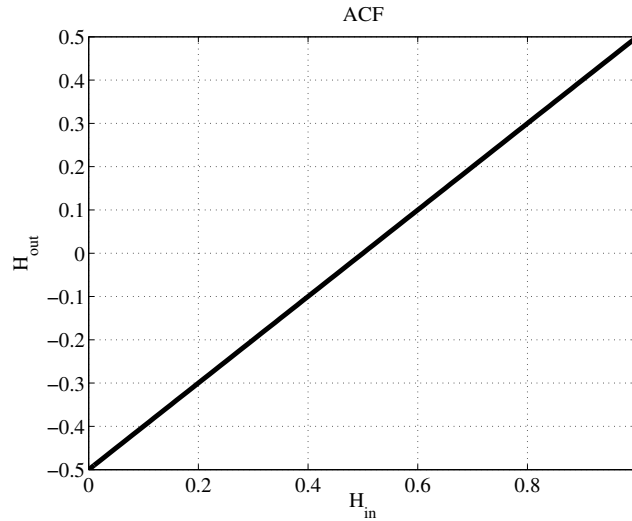


Figura 5.1: Función de cambio de amplitud:  $H_{out} = H_{in} - 0.5$ .

La ACF cambia la posición de los ceros originales del comb y los posiciona  $\alpha_-$  y  $\alpha_+$  radianes de diferencia con respecto a su posición original:  $2\pi k/M, k = 1, 2, \dots, M - 1$ . El siguiente ejemplo muestra el desplazamiento de los ceros de un filtro comb de segundo orden en el plano  $z$ .

**Ejemplo 5.1.** Se considera como amplitud de entrada a la respuesta del comb de segundo orden y factor de decimación  $M = 16$ :

$$\begin{aligned} H_{in}(z) &= \left( \frac{1 - z^{-16}}{1 - z^{-1}} \right)^2 \\ &= 1 + 2z^{-1} + \dots + 16z^{-15} + 15z^{-16} + \dots + z^{-30}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

La ubicación de los ceros de  $H_{in}$  en el plano  $z$  es mostrada en la Figura 5.2a. Los ceros de  $H_{out}$  son presentados en la Figura 5.2b.

Al aplicarse la ACF:  $H_{out} = H_{in} - 0.5$ , los ceros de  $H_{out}$  no estarán en el mismo sitio que los de  $H_{in}$ . Uno de ellos se moverá  $\alpha_-$  radianes, mientras que el otro lo hará  $\alpha_+$  radianes. En la Figura 5.3 se observa gráficamente el movimiento de  $\alpha_{\pm}$  radianes al comparar la ubicación de los dos primeros ceros del filtro de entrada y salida en el plano  $z$ .

El efecto de esta ACF lineal en la respuesta en magnitud de un filtro comb se presenta en el siguiente ejemplo.

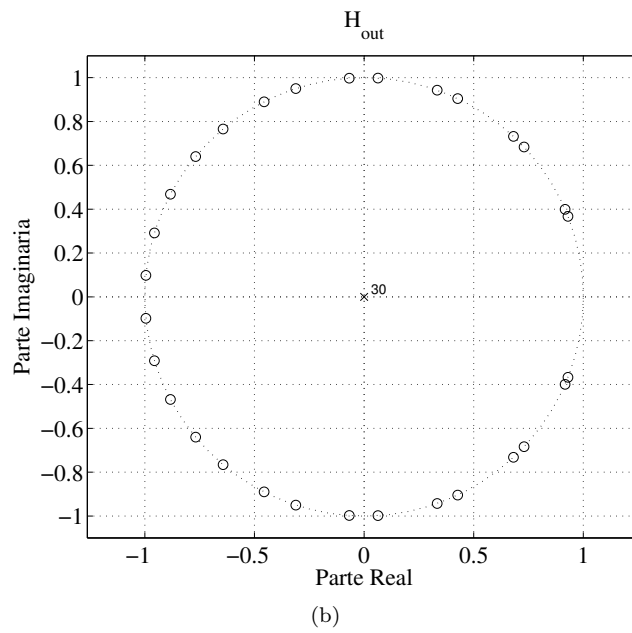
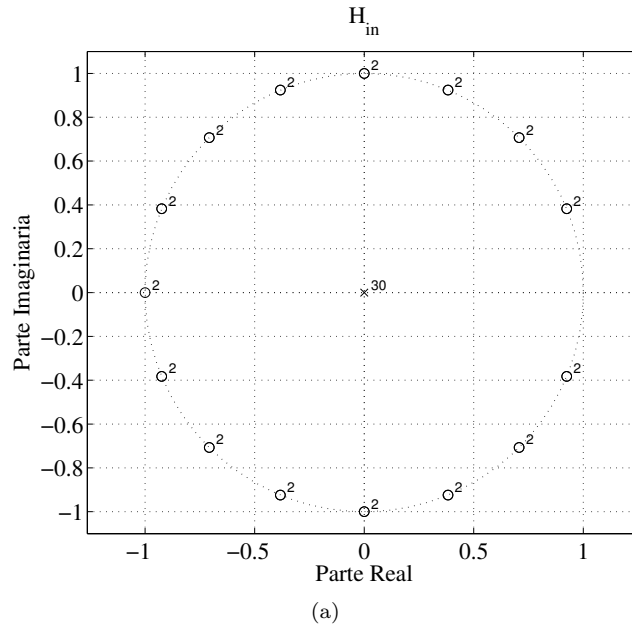
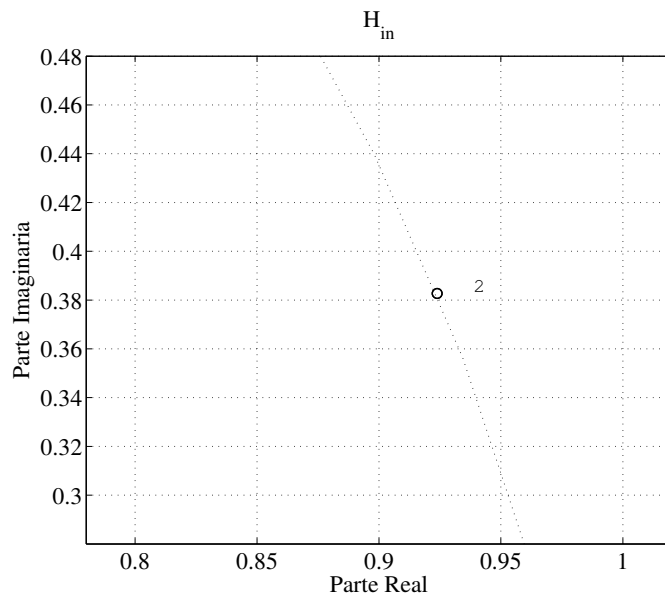
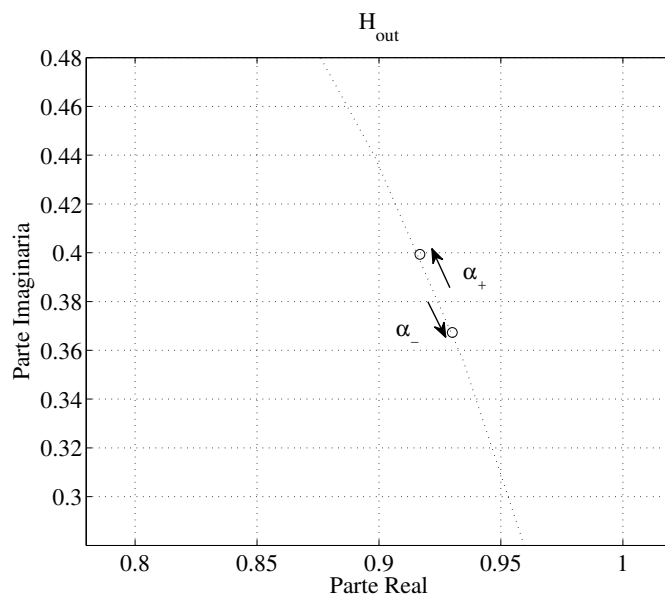


Figura 5.2: Ubicación de ceros de  $H_{in}$  y  $H_{out}$  en el plano  $z$ .



(a)



(b)

Figura 5.3: Acercamiento a los primeros dos ceros de  $H_{in}$  y  $H_{out}$  en el plano  $z$ .

**Ejemplo 5.2.** Teniéndose que  $a = 0.3$ , la respuesta resultante  $H_{out} = H_{in} - 0.3$  se muestra en la Figura 5.4 junto con la magnitud de entrada, que es la respuesta del comb de segundo orden y factor de decimación ocho.

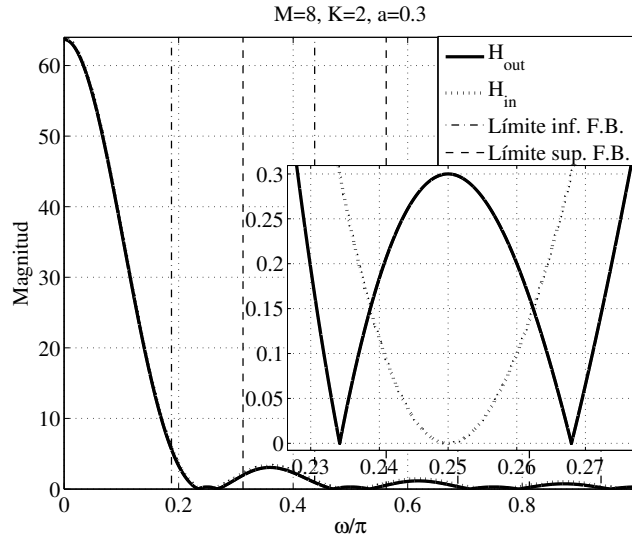


Figura 5.4:  $H_{in}$  y  $H_{out}$  cuando  $a = 0.3$ , para un factor de decimación  $M = 8$ . A su vez, y para mayor claridad, se muestran los límites de cada folding band.

En el acercamiento a la primera folding band, se observa que los ceros originales del filtro comb han cambiado de ubicación, provocando un cambio en la respuesta en magnitud.

En la Figura 5.5 se presenta la respuesta de salida, en escala logarítmica, en la que se observa que el ancho de las folding bands se incrementa conforme aumenta la frecuencia (Este punto se discutirá a continuación). La última observación también se puede apreciar en la ubicación de los ceros de  $H_{out}$  en el plano  $z$ , dada en la Figura 5.6, donde la separación de los ceros de  $H_{out}$  crece al aumentar la frecuencia.

Siguiendo la lógica, se busca aumentar el ancho de atenuación mediante un incremento del parámetro  $a$ .

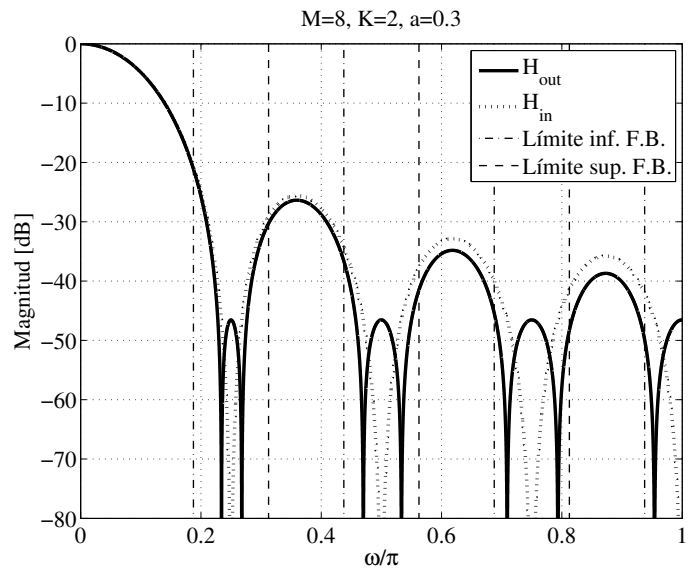


Figura 5.5: Respuesta en escala logarítmica de  $H_{in}$  y  $H_{out}$  cuando  $a = 0.3$  y factor de decimación  $M = 8$

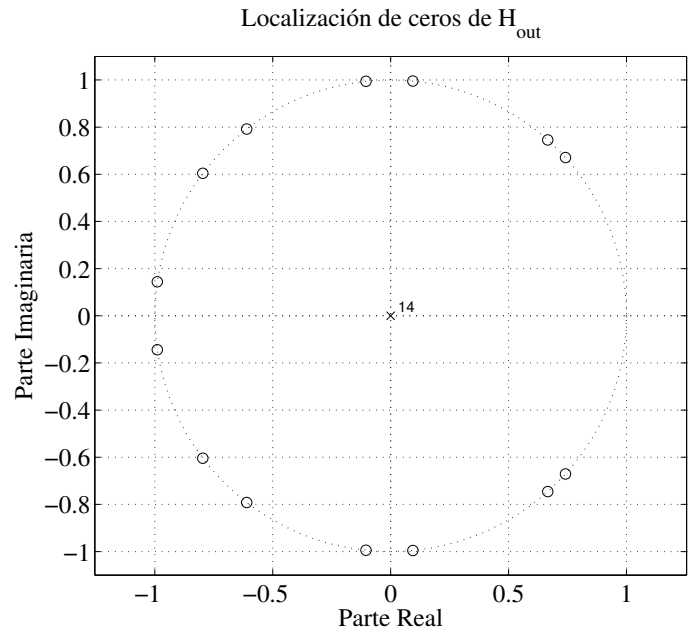


Figura 5.6: Localización de ceros en plano  $z$  para  $H_{out}$ .



**Ejemplo 5.3.** Considerando al filtro comb de entrada del ejemplo anterior y  $a = 0.7$ , se tiene que el filtro resultante,  $H_{out} = H_{in} - 0.7$ , se comporta de acuerdo a lo mostrado en la Figura 5.7.

Puede observarse que las primeras folding bands tienen un mayor ancho que cuando  $a = 0.3$ , pero en las folding bands número 3 y 4 los ceros desplazados no se encuentran dentro del rango de frecuencias de su correspondiente folding band.

Con este ejemplo se introduce el problema de elección del valor de  $a$ , que entre menor sea se tendrá un menor ancho de atenuación, pero a su vez, un excesivo aumento produce que los ceros cercanos a las últimas folding bands no contribuyan al rechazo de aliasing. En la siguiente sección se discute como obtener el valor del parámetro  $a$ .

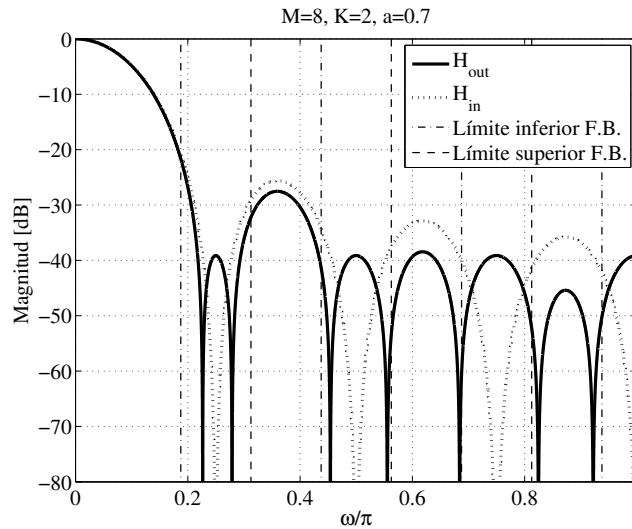


Figura 5.7:  $H_{in}$  y  $H_{out}$  cuando  $a = 0.7$ , para un factor de decimación  $M = 8$ .

## 5.2. Elección de parámetro de ACF

Para obtener el valor máximo del parámetro de la función de cambio de amplitud,  $a$ , se debe buscar la menor magnitud en los límites de todas las folding bands del filtro comb. Esta magnitud se presenta en la folding band número  $F B n = M/2$  para decimaciones pares y  $F B n = (M - 1)/2$  para impares. A continuación se analiza la respuesta, en esta folding band, de varios filtros comb de orden  $K = 2$  y factor residual  $R = 2$ .

**Ejemplo 5.4.** Estableciendo un orden constante,  $K = 2$ , se consideran los factores de decimación  $M = 2, 5, 8$  y se busca la magnitud en el límite de la folding band número,  $F B n$ .

La respuesta para  $M = 2$  está dada en la Figura 5.8, donde se aprecia que la respuesta en magnitud, en el límite de la folding band FBn, es  $H_{comb} = 0.5858$ . Por otra parte, para  $M = 5$  (Figura 5.9) se tiene que  $H_{comb} = 0.5129$  y finalmente cuando  $M = 8$  la respuesta es  $H_{comb} = 0.5049$  (Figura 5.10). Estos tres valores hacen creer que la respuesta en magnitud del comb de segundo orden converge a  $H_{comb} = 0.5$ .

La última suposición se confirma al evaluar la respuesta en magnitud del comb de segundo orden, para los factores de decimación  $M = 2, 3, \dots, 256$ . La Figura 5.11a comprueba que con un valor  $a = 0.5$  todos los ceros permanecerán dentro del rango de frecuencias que definen a cada folding band; ésto se cumple para cualquier valor de factor de decimación. Adicionalmente, el valor de esta constante es una potencia de dos, lo que en implementación no es muy costoso ya que no necesita de multiplicadores.

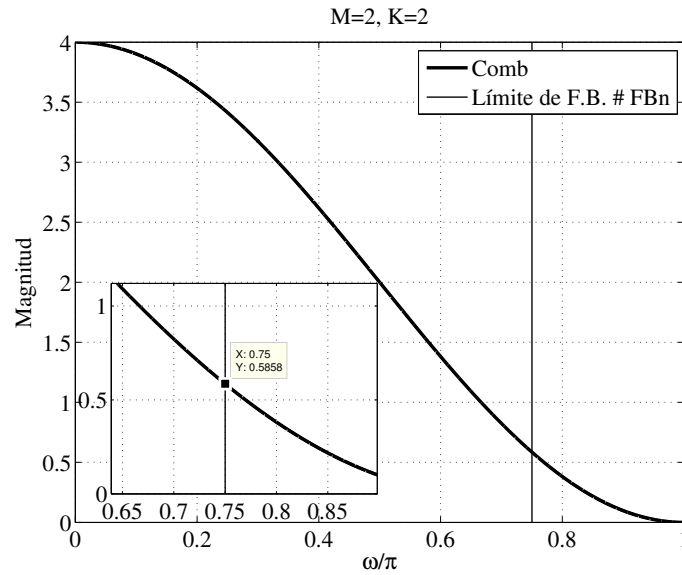


Figura 5.8: Respuesta en magnitud de filtros comb de segundo orden y  $M = 2$ .

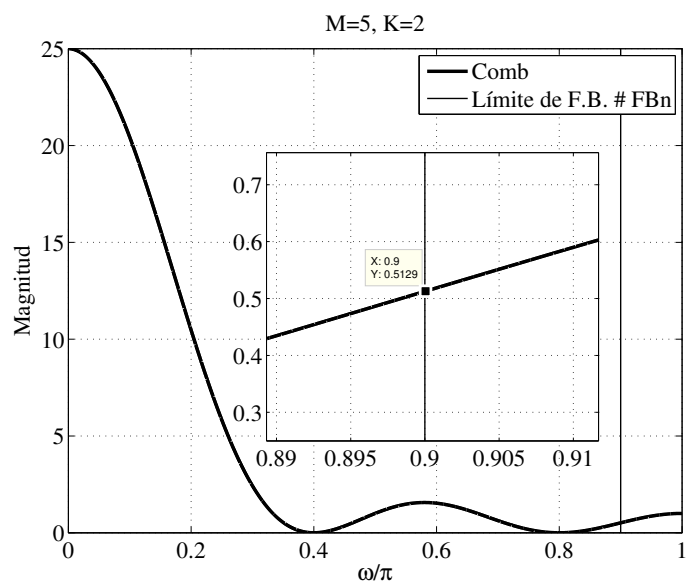


Figura 5.9: Respuesta en magnitud de filtros comb de segundo orden y  $M = 5$ .

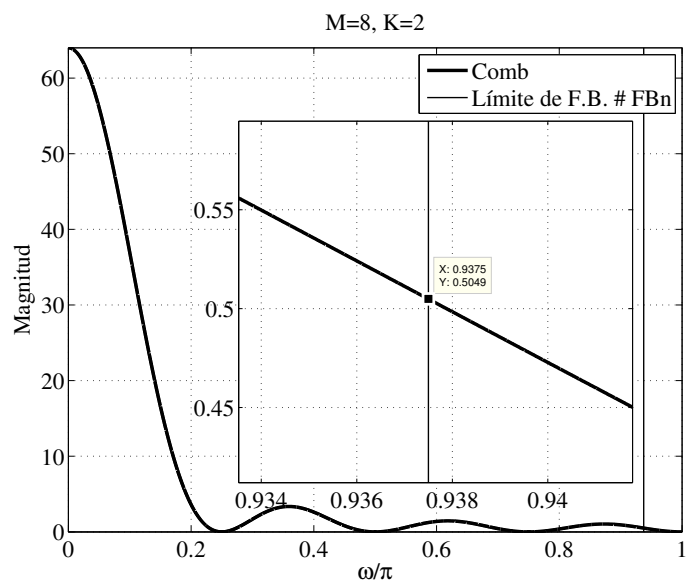


Figura 5.10: Respuesta en magnitud de filtros comb de segundo orden y  $M = 8$ .

### 5.3. Valor de parámetro $a$ para órdenes pares mayores a dos

El valor de  $a$  para órdenes pares mayores a dos se presenta en la Figura 5.11. Estos valores fueron obtenidos de la misma forma que se obtuvo el valor de  $a$  para  $K = 2$  y  $R = 2$ . Se puede observar que conforme se aumenta en dos el orden del filtro, la constante se reduce a la mitad, a consecuencia de esto los valores de  $a$  permanecen como potencias de dos.

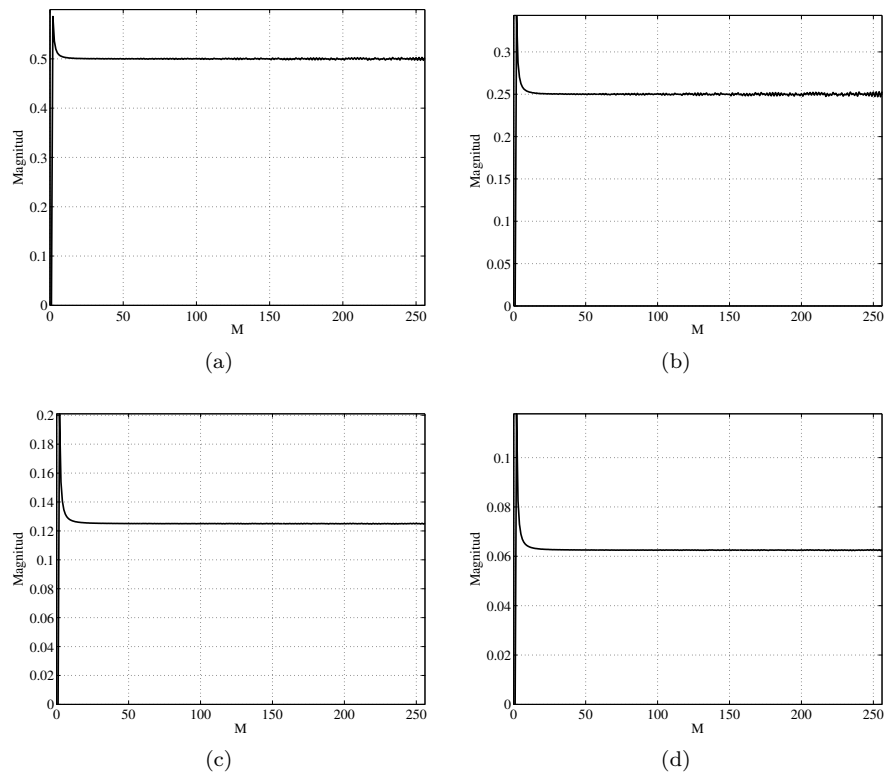


Figura 5.11: Valor de magnitud en límite de folding band número  $FBn$  para  $R = 2$ ,  $K = 2, 4, 6, 8$  y  $M = 1, 2, \dots, 256$ .

### 5.4. Atenuación entre ceros desplazados

Una de las principales características que presenta la magnitud de  $H_{out}$ , es que el peor caso de atenuación en el intervalo de frecuencias limitado por los ceros ubicados en  $[2\pi k/M + \alpha_+; 2\pi k/M - \alpha_-]$ ,  $k = 1, 2, \dots, M - 1$ , es constante para todas las folding bands. El siguiente ejemplo se centra en esta característica.

**Ejemplo 5.5.** Se busca ampliar el ancho en las folding bands de un filtro decimador con parámetros:  $M = 20$  y  $K = 4$ . La figura 5.12 muestra la respuesta en magnitud de  $H_{out} = H_{in} - 0.25$ .

La atenuación entre los ceros desplazados es de  $-116.1$  dB, que es aproximadamente igual al valor de la atenuación en el borde de la última folding band en la respuesta de  $H_{in}$ .

Conforme se aumenta el orden de  $H_{in}$ , la atenuación entre ceros permanece más constante o plana. Ésto se muestra en el siguiente ejemplo.

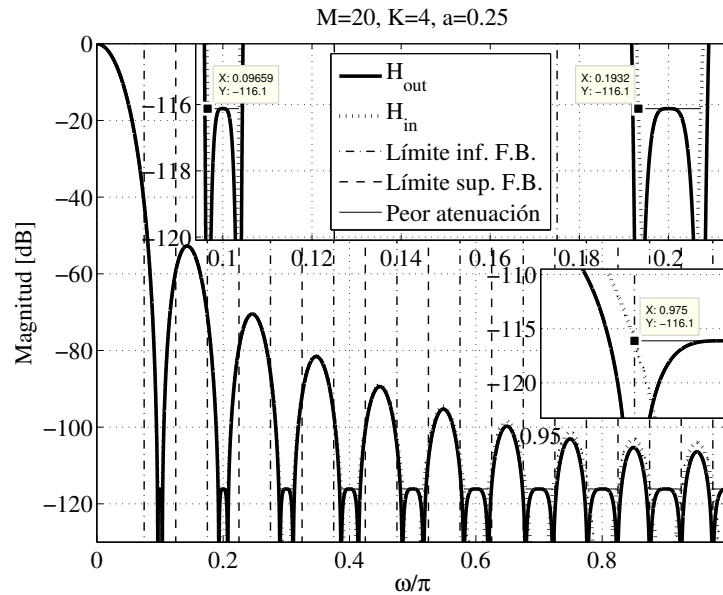


Figura 5.12: Respuesta de  $H_{out}$  en la que el peor caso de atenuación, entre ceros, es constante.

**Ejemplo 5.6.** Se tiene como filtro  $H_{in}$  a un comb de sexto orden y factor de decimación  $M = 15$ . La figura 5.13 compara la magnitud de  $H_{out}$  y  $H_{in}$ .

El valor de atenuación es igual a  $-159.2$  dB. Un acercamiento a la última folding band se presenta en la Figura 5.14, en la que se observa que el peor caso de atenuación se aproxima en gran medida a la intersección de la respuesta de  $H_{in}$  con la recta que define el límite superior de la folding band  $F B_n$ .

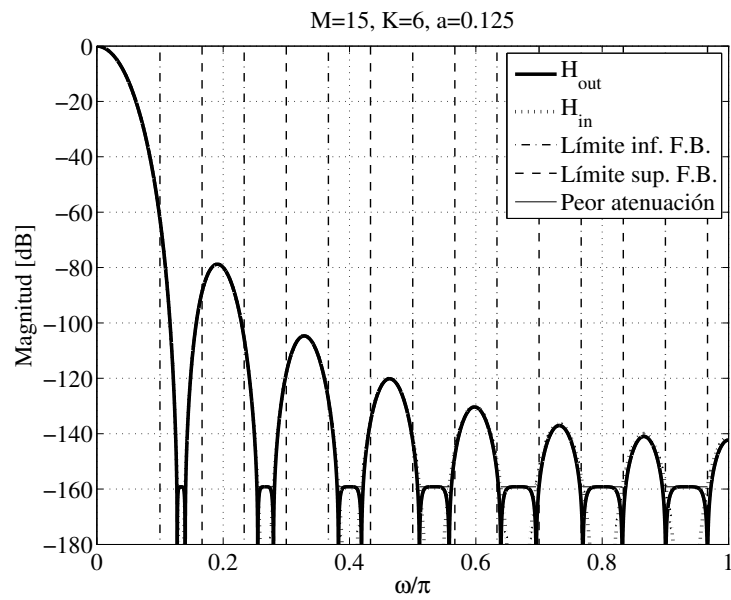


Figura 5.13: Respuesta de  $H_{out}$  con atenuación que permanece más constante entre los ceros desplazados.

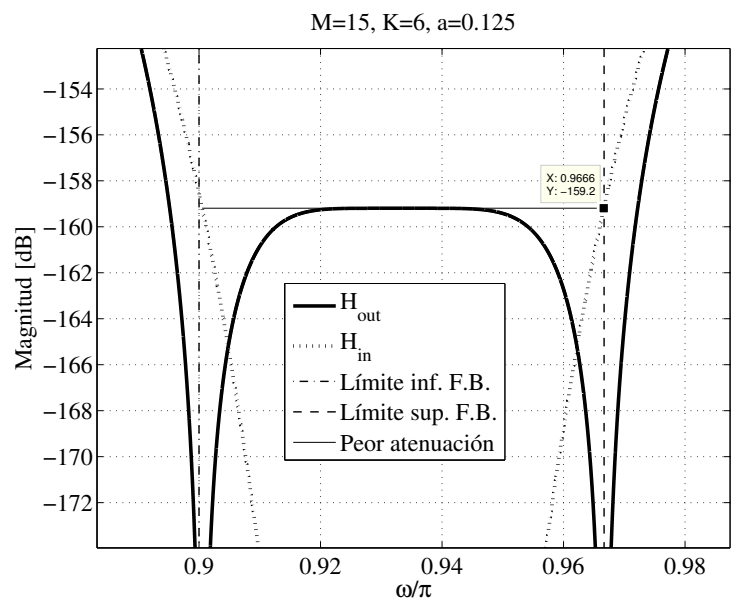


Figura 5.14: Acercamiento a la folding band  $FBn$  de  $H_{out}$ .

La Figura 5.15 compara la respuesta de  $H_{out}$  para  $K = 2, 4, 6$  y muestra el aplanamiento progresivo de la atenuación.

Analizando la posición de los ceros del filtro de orden  $K = 4$ , se llega a que dos de sus ceros se ubican en el mismo lugar que los ceros de  $H_{out}$  de segundo orden. Los dos ceros restantes no cambian su ángulo de fase, lo que cambia es su magnitud, por lo que uno se encuentra dentro del círculo unitario ( $r < 1$ ) y el otro afuera ( $r > 1$ ), como lo muestra la Figura 5.16. Lo mismo sucede para  $K = 6$ , donde dos ceros tendrán magnitud unitaria y estarán ubicados en las mismas frecuencias que los ceros de  $H_{out}$  de segundo orden, otros dos estarán ubicados entre las frecuencias de los ceros de segundo orden pero con magnitud menor a la unidad, y los dos restantes tendrán magnitud inversa a los que se encuentran dentro del círculo unitario. La Figura 5.17 muestra la configuración de ceros en el plano  $z$  para  $H_{out}$  de sexto orden.

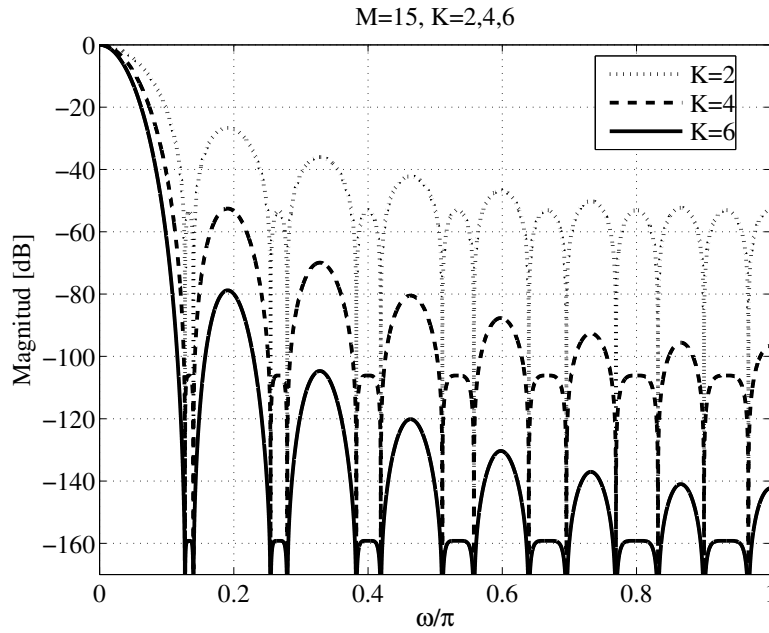


Figura 5.15: Comparación entre filtros de segundo, cuarto y sexto orden para un factor de decimación  $M = 15$ .

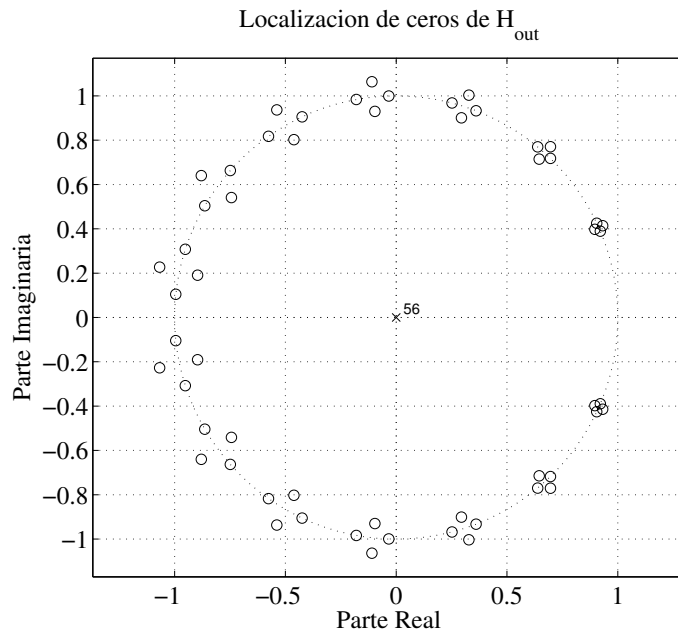


Figura 5.16: Localización de ceros de  $H_{out}$  de cuarto orden.

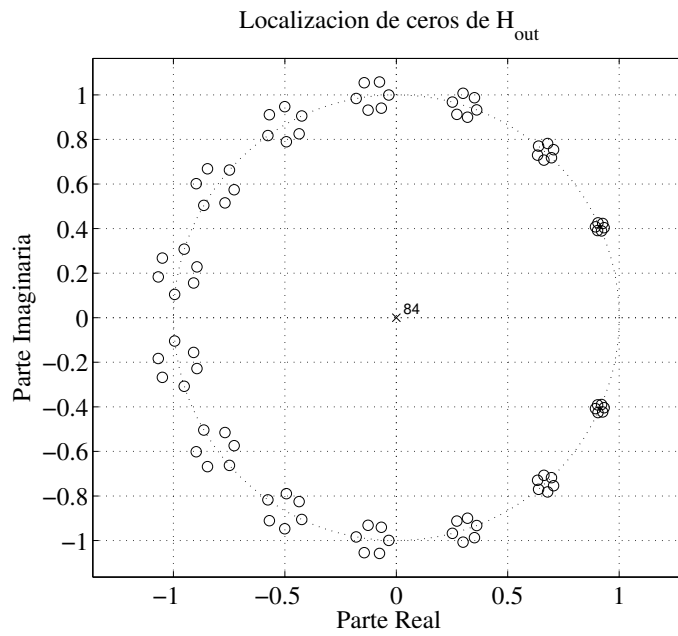


Figura 5.17: Localización de ceros de  $H_{out}$  de sexto orden.



## 5.5. Filtro decimador propuesto

Una vez definida la función de cambio de amplitud que ayuda a lograr un mayor ancho en atenuación en las folding bands, se propone a la cascada de un filtro de salida con un filtro comb de orden  $K_1$  como filtro decimador:

$$H_p(z) = H_{out}(z)H_{comb}^{K_1}(z), \quad (5.3)$$

El orden de  $H_p(z)$  es:  $Kp = K + K_1$ , donde  $K$  es el orden de  $H_{out}(z)$ . La estructura decimadora propuesta está dada en la Figura 5.18.

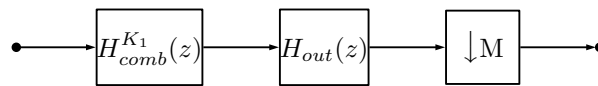


Figura 5.18: Estructura decimadora propuesta.

**Ejemplo 5.7.** Se diseña un filtro decimador con los siguientes parámetros:  $M = 10$ ,  $K = 2$ ,  $K_1 = 1$ . La figura 5.19 muestra la respuesta en magnitud del filtro propuesto y del comb de tercer orden.

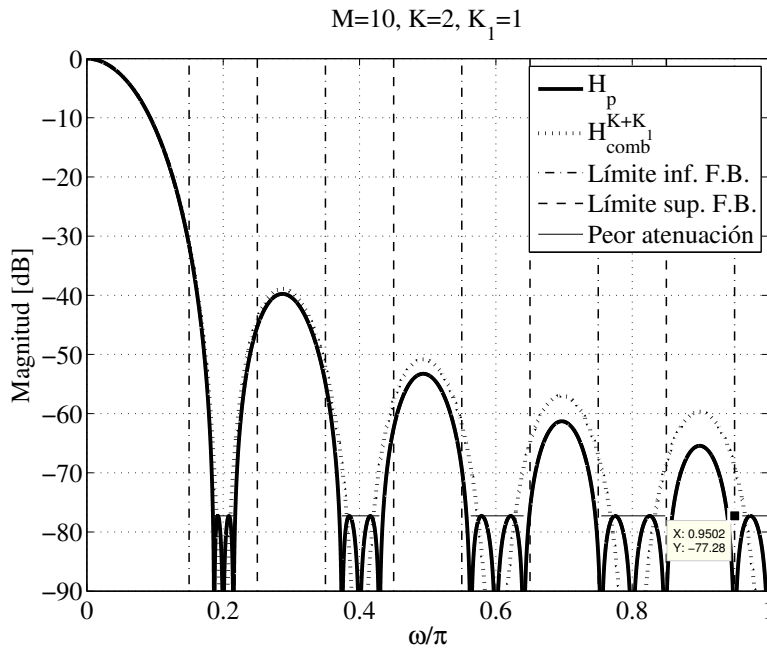


Figura 5.19: Respuesta en magnitud de filtro decimador propuesto.

La Figura 5.20 presenta un zoom de la cuarta folding band. En ella se puede observar que el cero de  $H_{out}$  que está a la derecha del cero del comb, se encuentra

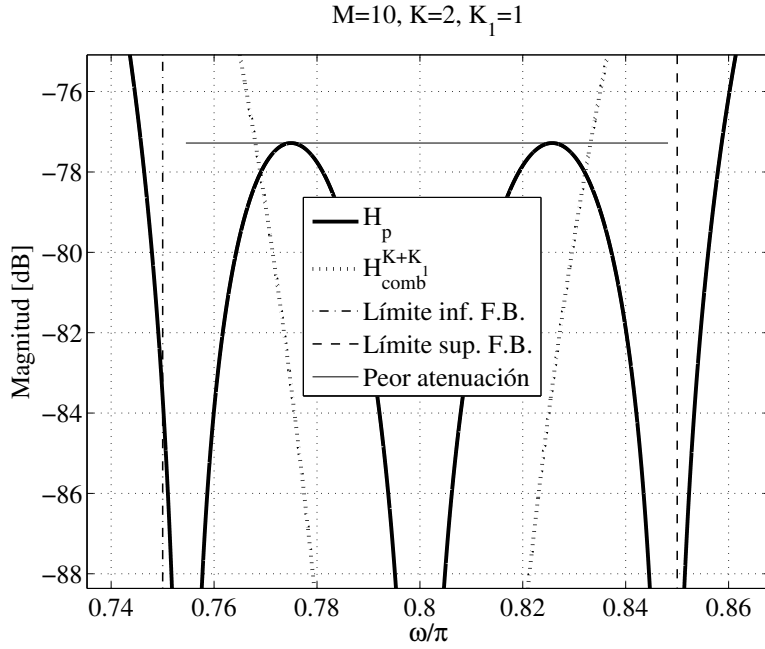


Figura 5.20: Acercamiento a la cuarta folding band.

más alejado que el de la izquierda, en otras palabras, está más pegado al límite de la folding band. Ésto quiere decir que  $\alpha_- < \alpha_+$ . Como se ha podido observar, en cada ejemplo, el ancho de atenuación aumenta conforme lo hace la frecuencia y por consecuencia lo harán tanto  $\alpha_+$  como  $\alpha_-$ . La anterior observación no sucede en la rotación de ceros de Presti [14], ni en el filtro comb generalizado de Ladommada [2], en donde  $\alpha_- = \alpha_+$  para todas las folding bands.

Se define así a  $\alpha_{\pm}$  como:

$$\alpha_{\pm} = 2\pi f_c q_{\pm}, \quad (5.4)$$

donde  $q_{\pm} \in [0, 1]$ .

En la Figura 5.21 se grafica el valor de  $q_+$  y  $q_-$  en las folding bands del filtro decimador del ejemplo anterior. Como se mencionó anteriormente, se puede observar que  $q_- < q_+$  y que ambos incrementan su valor en cada folding band. A su vez se comprueba que todos los ceros permanecen dentro del rango de frecuencias que define a cada folding band.

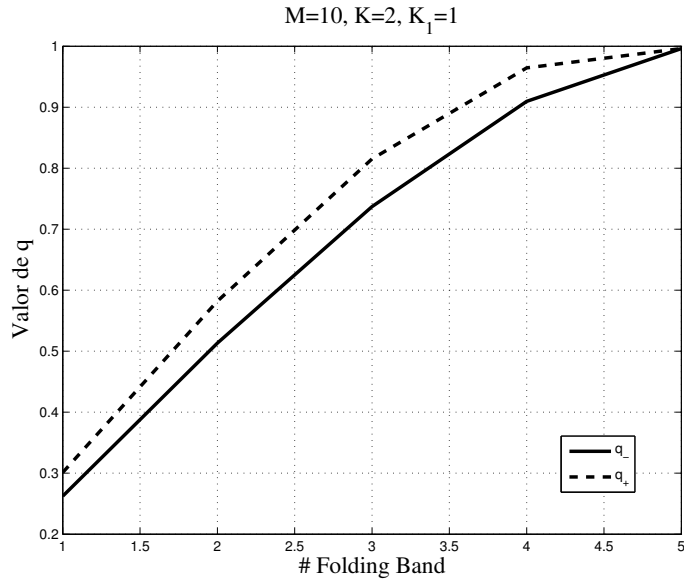


Figura 5.21: Valor de  $q_+$  y  $q_-$  en folding bands.

## 5.6. Comparaciones

En el siguiente ejemplo se realiza una comparación entre el filtro comb generalizado y el propuesto.

**Ejemplo 5.8.** Se busca diseñar un filtro comb generalizado de tercer y quinto orden, con factor de decimación igual a diez y residual de dos.

La Figura 5.22 compara la respuesta de un filtro comb generalizado y la del propuesto. En ella se aprecia que las primeras dos folding bands del comb generalizado son más anchas que las del filtro propuesto. A partir de la tercera, el ancho del filtro propuesto es mayor o igual al del generalizado. En cuanto a atenuación, el filtro propuesto presenta como mínimo -77.28 dB en todas sus folding bands, superando así la atenuación del comb generalizado.

Por otra parte, en la Figura 5.23 se presenta la respuesta de los filtros de quinto orden. En este caso, es a partir de la cuarta folding band en la que el ancho del filtro propuesto es mayor o igual al del generalizado. La atenuación que presenta el filtro propuesto es de -120dB.

En ambos casos, la complejidad del filtro comb generalizado es mayor, debido a que sus coeficientes necesitan ya sea de multiplicadores o de un gran número de corrimientos y sumas para ser expresados.

En la siguiente sección se considera al comb de orden y factor de decimación impar como  $H_{in}$ . Se obtienen los valores máximos de  $a$  y se propone un filtro decimador.

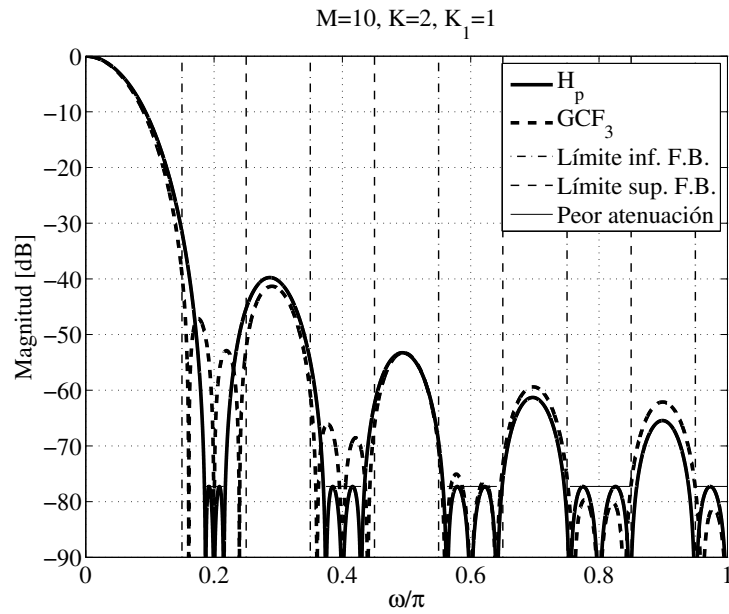


Figura 5.22: Comparación de GCF y filtro propuesto, ambos de orden tres.

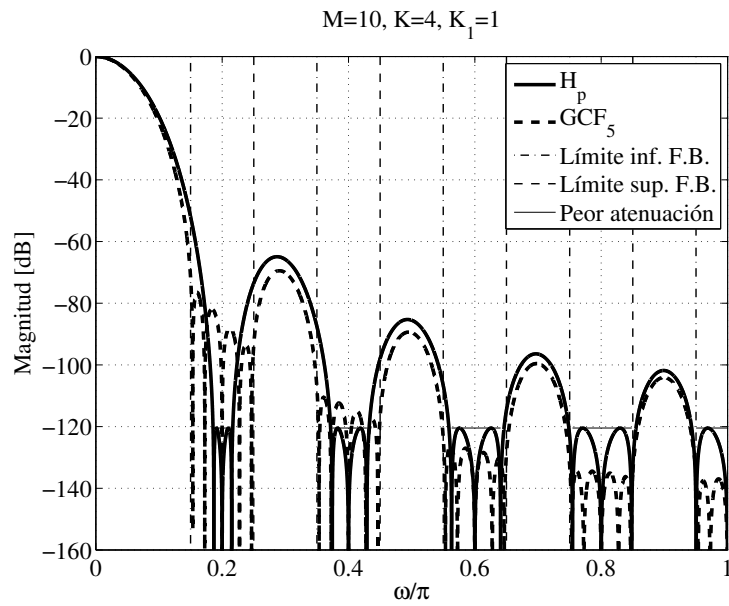


Figura 5.23: Comparación de GCF y filtro propuesto de quinto orden.

## 5.7. Filtro comb de primer orden y factor de decimación impar

En las pasadas secciones se estudiaron los efectos de la ACF lineal en filtros comb de orden par. Para un orden par, el número de coeficientes de  $H_{in}$  siempre será impar y tendrá simetría de tipo uno. Debido a que el parámetro de rotación  $a$  siempre afectará al punto de simetría del filtro de entrada, se propone aplicar una función de cambio de amplitud lineal a filtros comb de orden impar diseñados específicamente para factores de decimación impar.

En la Figura 5.24 se presenta la respuesta de un filtro comb de primer orden, con un factor de decimación  $M = 7$ . Se realizan las siguientes observaciones de esta respuesta:

- La respuesta toma tanto valores positivos como negativos, cosa que no sucedería si el orden fuera par.
- Se puede aplicar la función de cambio de amplitud:

$$H_{out} = H_{in} \pm a. \quad (5.5)$$

- El valor de la respuesta en el límite inferior de la folding band  $FBn$  es igual a  $-0.7089$ .

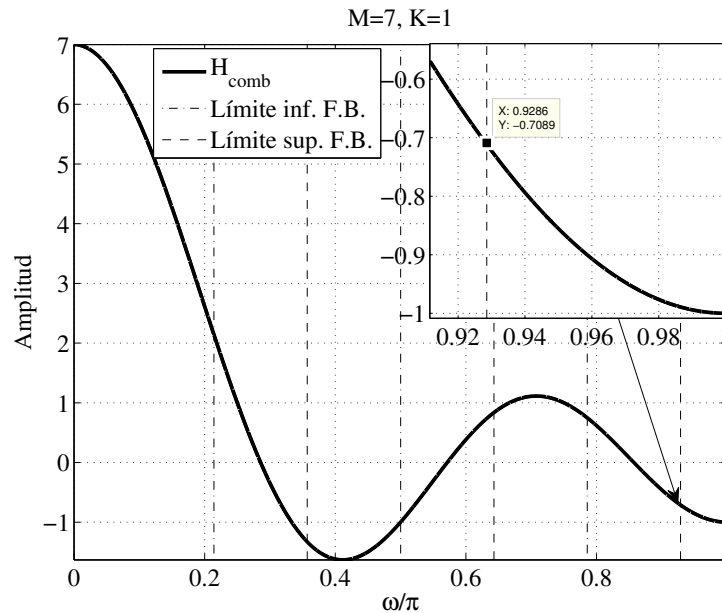


Figura 5.24: Respuesta de filtro comb de primer orden y factor de decimación siete.

Si siguiendo estas observaciones, se aplica la función de cambio de amplitud para:  $a = \pm 0.7$ . Las respuestas en magnitud de estas dos transformaciones y del filtro original se presentan en la Figura 5.25.

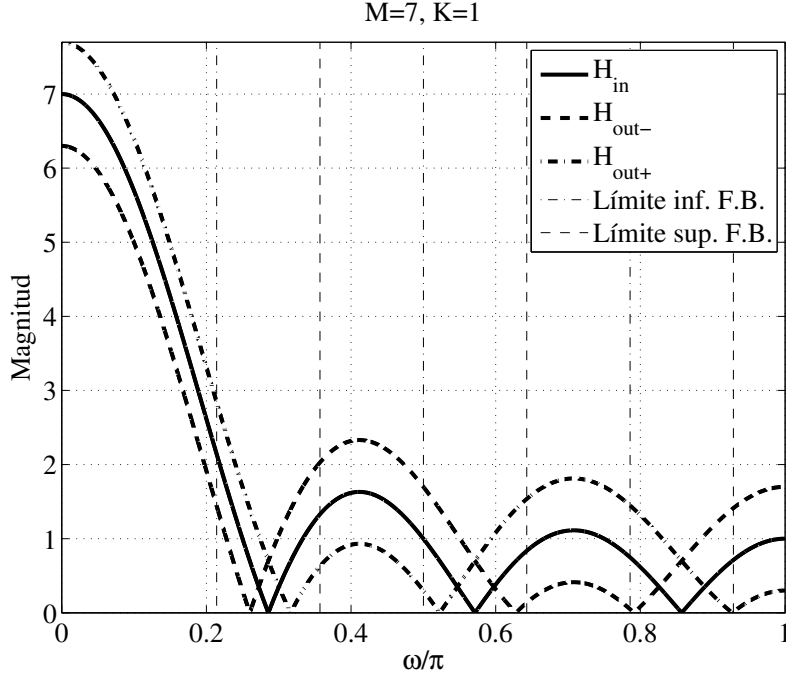


Figura 5.25: Respuesta en magnitud de la aplicación de la ACF con  $a = \pm 0.7$ .

En el acercamiento a la primera folding band, se aprecia que  $H_{out-}$  ( $H_{out-} = H_{in} - 0.7$ ) podría ayudar a mejorar el peor caso de atenuación de un filtro decimador, si se pone en cascada con el filtro comb original.

Otra observación es que al convolucionar el filtro  $H_{out-}$  con  $H_{out+}$  se obtiene  $H_{out} = H_{in} - 0.5$ , donde  $H_{in}$  es la respuesta en magnitud del filtro comb de segundo orden. El siguiente ejemplo muestra esta observación para un factor  $M = 7$ .

**Ejemplo 5.9.** Se aplica la ACF lineal:  $H_{out\pm} = H_{in} \pm 0.7$  al filtro comb de primer orden y factor de decimación  $M = 7$ . La función de transferencia de  $H_{out-}$  es:

$$\begin{aligned}
 H_{out-}(z) &= H_{in}(z) - 0.7 & (5.6) \\
 &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + (1 - 0.7)z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6}, \\
 &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.3z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6},
 \end{aligned}$$

mientras que para  $H_{out+}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
H_{out+}(z) &= H_{in}(z) + 0.7 \\
&= 1 + z^{-1} + z^{-2} + 1.7z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

La convolución en tiempo es igual al producto en frecuencia, por lo que:

$$\begin{aligned}
H_{out+}(z)H_{out-}(z) &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 6.51z^{-6} \\
&\quad + 6z^{-7} + 5z^{-8} + 4z^{-9} + 3z^{-10} + 2z^{-11} + z^{-12}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

que es aproximadamente igual a tener:

$$\begin{aligned}
H_{out}(z) &= H_{in}(z) - 0.5 \\
&= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 6.5z^{-6} \\
&\quad + 6z^{-7} + 5z^{-8} + 4z^{-9} + 3z^{-10} + 2z^{-11} + z^{-12}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde  $H_{in}(z)$  es la función de transferencia del filtro comb de segundo orden y factor de decimación de siete.

### 5.7.1. Orden impar mayor a uno

Para obtener el máximo valor de  $a$  para  $K = 3, 5, 7$ , se realizó el mismo procedimiento con el que se obtuvieron los máximos valores de  $a$  para órdenes pares. Como era de esperar, el valor máximo de  $a$  se reduce a la mitad conforme se aumenta en dos el orden de  $H_{in}$ , partiendo de  $a = 0.7$  para  $K = 1$ ,  $a = 0.35$  para  $K = 3$ , etc. El problema que se presenta cuando  $K$  es impar, es que el valor de  $a$  no es una potencia de dos. La posible solución es expresar esta constante a base de sumas de potencias de dos.

### 5.7.2. Filtro decimador propuesto basado en filtro comb de orden impar

El filtro decimador propuesto está dado por la expresión (5.3), pero en este caso el orden de  $H_{out}$  es impar. A continuación se presenta un ejemplo de este filtro decimador.

**Ejemplo 5.10.** Se diseña un filtro  $H_p$  de orden cuatro, factor de decimación  $M = 9$  y donde  $H_{out} = H_{in} - 0.35$ . Debido a que  $a = 0.35$  se tiene que  $H_{in}$  es un comb de tercer orden. La respuesta de este filtro se observa en la Figura 5.26, en ella se aprecia que el peor caso de atenuación se mejora a costa de un muy bajo costo. También se puede observar que todos los ceros permanecen dentro de los límites de las folding bands y que los ceros de  $H_{out}$  no siempre se desplazan a la derecha de los ceros del comb, debido a que la respuesta de  $H_{in}$  toma valores tanto positivos como negativos.

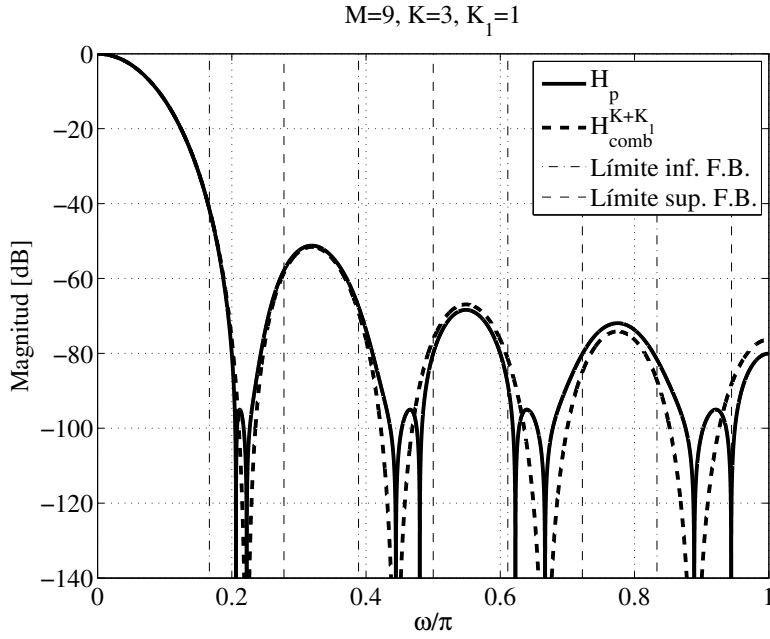


Figura 5.26: Respuesta en magnitud de la aplicación de la ACF con  $a = 0.35$ .

## 5.8. Resumen

Antes de presentar la implementación de la estructura propuesta, se resumen en la Tabla 5.1 los valores de la constante de rotación  $a$  y los factores de decimación para los que se puede aplicar la función de cambio de amplitud, para diversos órdenes de  $H_{in}(z)$ .

Tabla 5.1: Resumen de estructura propuesta

Orden de $H_{in}$	Factor de decimación	Valor de $a$
1	Impar	0.7
2	Par/Impar	0.5
3	Impar	0.35
4	Par/Impar	0.25
5	Impar	0.175
6	Par/Impar	0.125



## 5.9. Implementación

En esta sección se lleva a cabo la implementación, mediante descomposición polifásica, de dos filtros decimadores propuestos. Estas dos implementaciones tienen como fin demostrar que la estructura es implementable y que requiere de un bajo número de recursos comparado con los que necesita un comb tradicional y un filtro comb generalizado.

**Ejemplo 5.11.** Se diseña un filtro decimador para un factor de decimación  $M = 4$  y un orden  $K_p = 3$ .

Se parte de la estructura decimadora de la Figura 5.27a. En la Figura 5.27b,  $H_{out}(z)$  se expresa mediante sus componentes polifásicas y  $H_{comb}(z)$  es presentado en su forma no recursiva. Al hacer el producto de  $H_{out}(z)$  y  $H_{comb}(z)$ , se obtiene la Figura 5.27c, que comparada con la Figura 5.27d (estructura correspondiente al filtro comb tradicional de tercer orden), necesita de cuatro restas adicionales para su implementación.

El diagrama de bloques que se siguió en la implementación puede observarse en la Figura 5.28. Como en las implementaciones anteriores, cada uno de los coeficientes del filtro propuesto se realiza mediante corrimientos y sumas, por lo que la estructura propuesta está libre de multiplicadores.

Para comprobar que el filtro programado en VHDL es igual a la estructura propuesta, se ingresa un escalón unitario a la entrada del filtro y se analiza su respuesta mediante Matlab y Active HDL. Las respuestas obtenidas se comparan en la Figura 5.29.

Los recursos necesarios para la implementación del filtro propuesto, están contenidos en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Resumen de diseño utilizando Artix-7

Utilidades Lógicas	Usado	Disponible	Utilización
Total de elementos lógicos	376	63400	1 %
Total de registros	497	126800	1 %
Elementos multiplicadores	0	-	-
Elementos sumadores	22	-	-

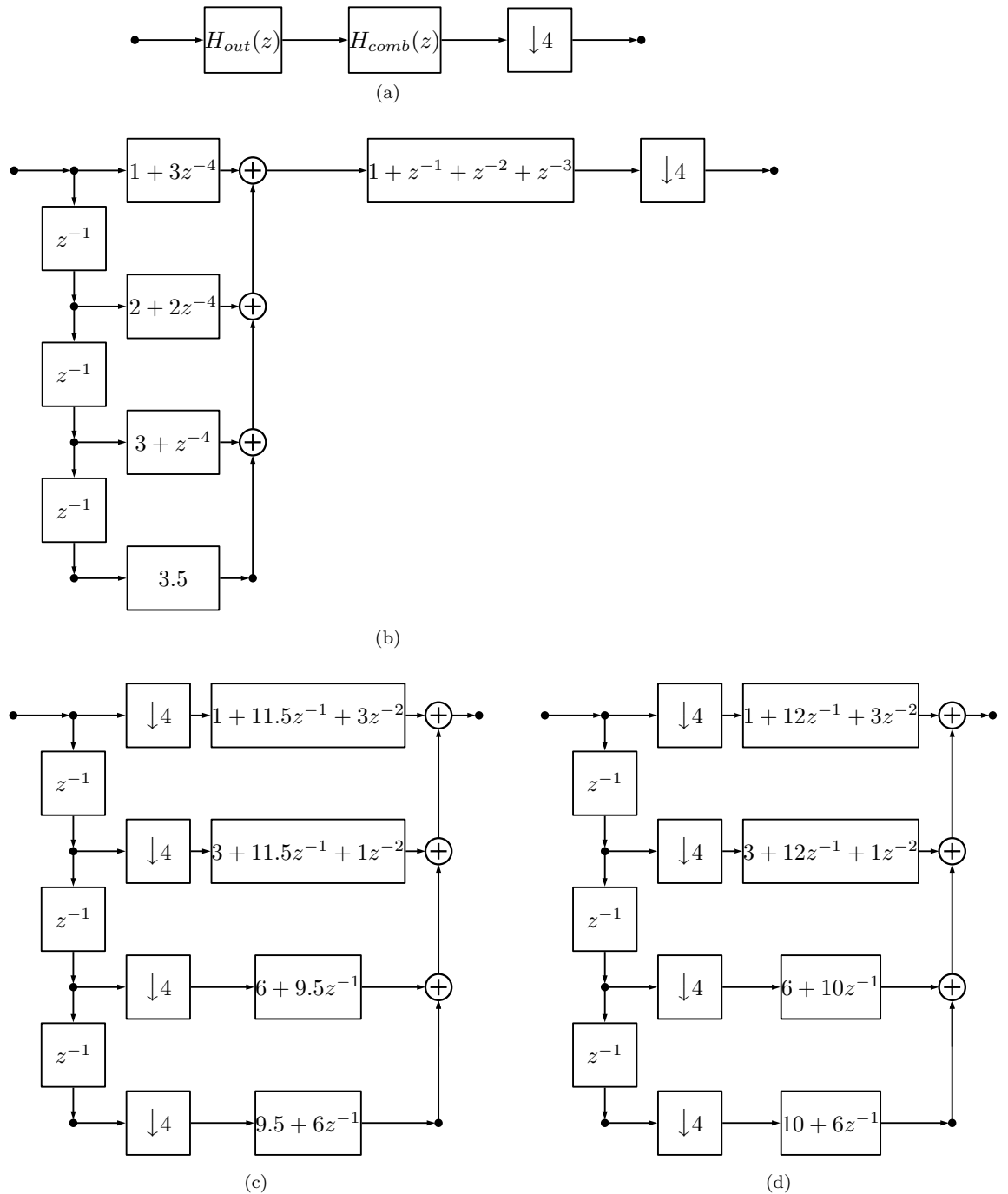


Figura 5.27: a) Estructura decimadora propuesta, b)  $H_{out}(z)$  se presenta mediante sus componentes polifásicas, mientras que  $H_{comb}(z)$  de forma no recursiva, c) Estructura polifásica de  $H_p(z)$ , d) Estructura polifásica de  $H_{comb}^3(z)$ .

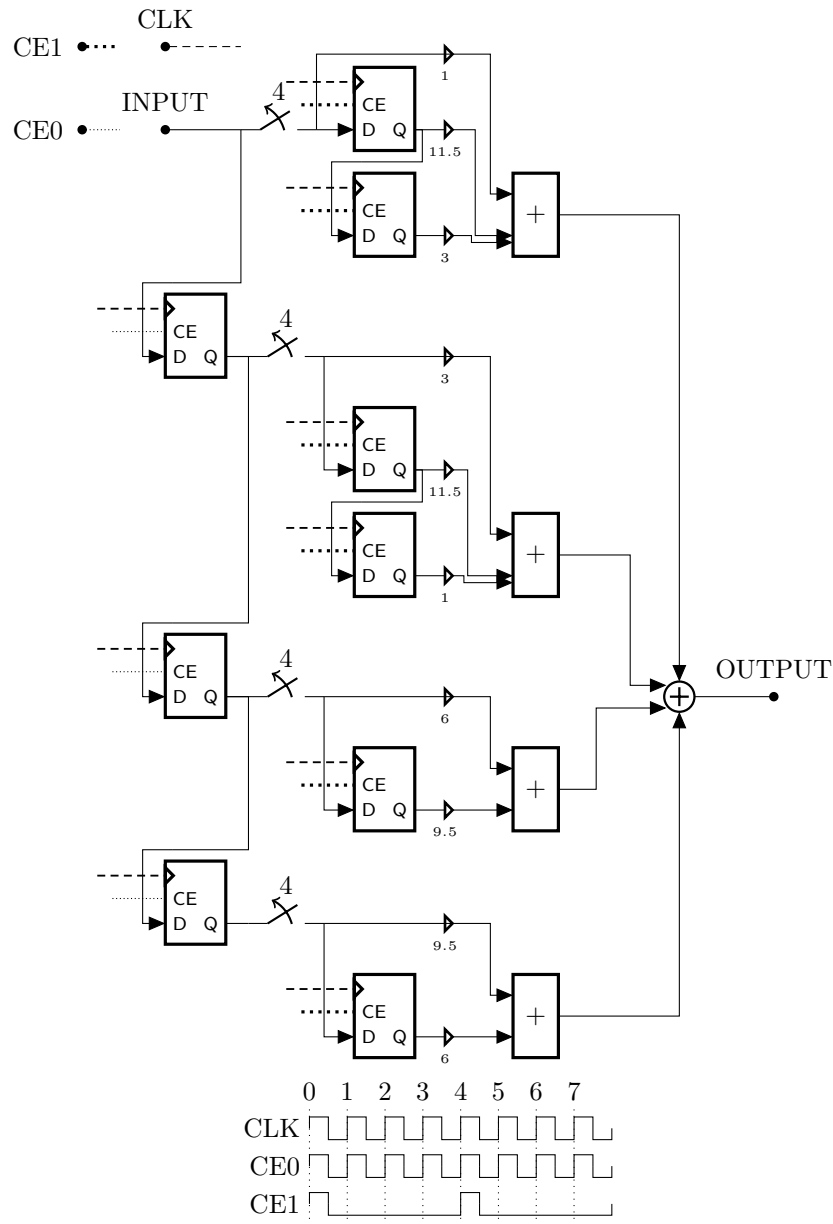
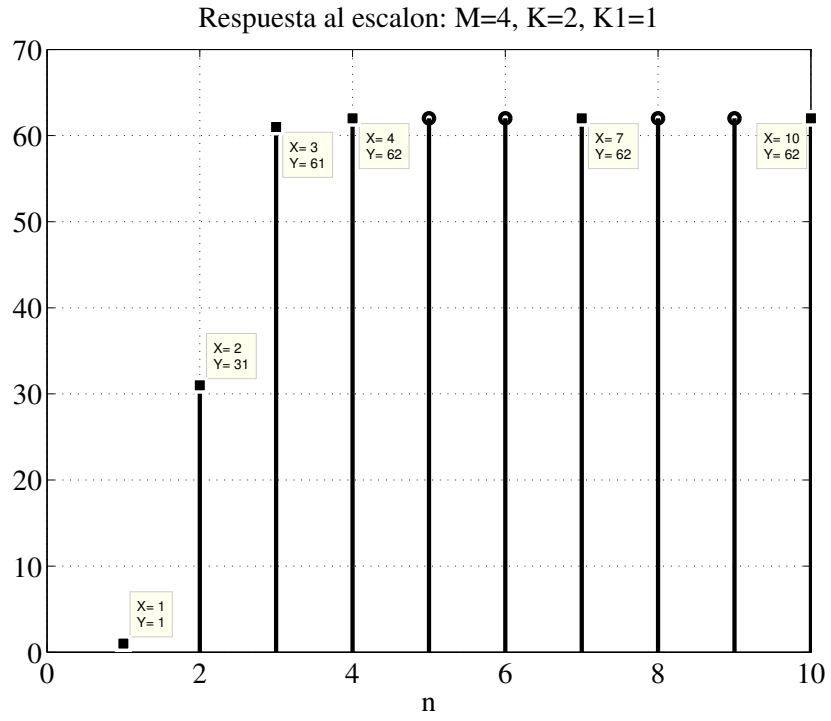
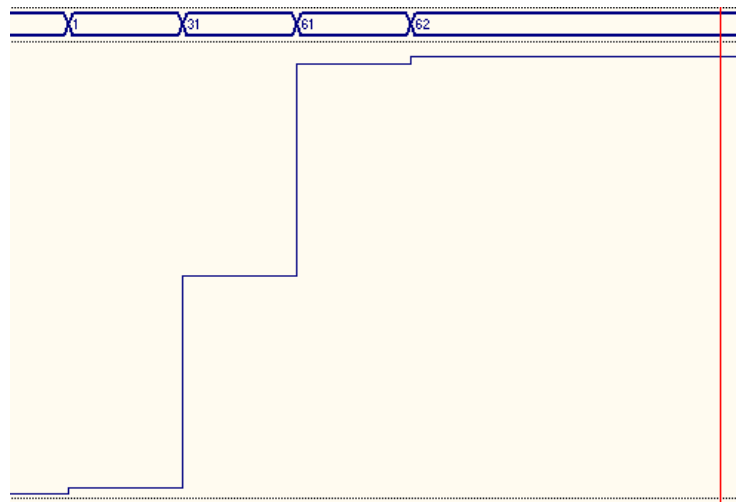


Figura 5.28: Estructura polifásica para  $M = 5$ ,  $K = 1$ ,  $K_1 = 1$  y  $a = 0.6875$ .



(a)



(b)

Figura 5.29: Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL.

**Ejemplo 5.12.** En este ejemplo se implementa la estructura decimadora propuesta para un factor de decimación  $M = 5$ , orden  $K_p = 2$  y parámetro de rotación  $a = 0.6875 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}$ .

De la misma forma que en el ejemplo anterior,  $H_p(z)$  es expresado mediante sus componentes polifásicas, teniendo como resultado la estructura mostrada en la Figura 5.30.

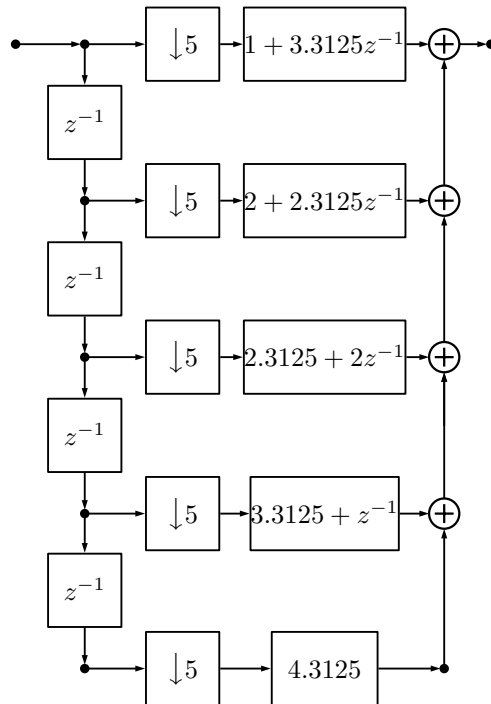


Figura 5.30: Estructura polifásica para  $M = 5$ ,  $K = 1$ ,  $K_1 = 1$  y  $a = 0.6875$ .

El diagrama de bloques que se programó en VHDL se presenta en la Figura 5.31. La respuesta al escalón de esta estructura es mostrada en la Figura 5.32b, mientras que la respuesta obtenida en Matlab es presentada en la Figura 5.32a. Se observa que la respuesta en Active es 32 veces mayor a la de Matlab, lo que indica que la parte fraccionaria del dato de salida se encuentra en los primeros cinco bits de la palabra de salida.

Finalmente, la Tabla 5.3 contiene los recursos necesarios para la implementación del filtro propuesto.

En general,  $H_p(z)$  requiere de  $M$  sumadores/restadores adicionales, a los necesarios por el comb tracional. A continuación se presenta un ejemplo en el que el orden del filtro comb es mayor a uno dentro de la estructura propuesta.

Tabla 5.3: Resumen de diseño utilizando Artix-7

Utilidades Lógicas	Usado	Disponible	Utilización
Total de elementos lógicos	351	63400	1 %
Total de registros	420	126800	1 %
Elementos multiplicadores	0	-	-
Elementos sumadores	21	-	-

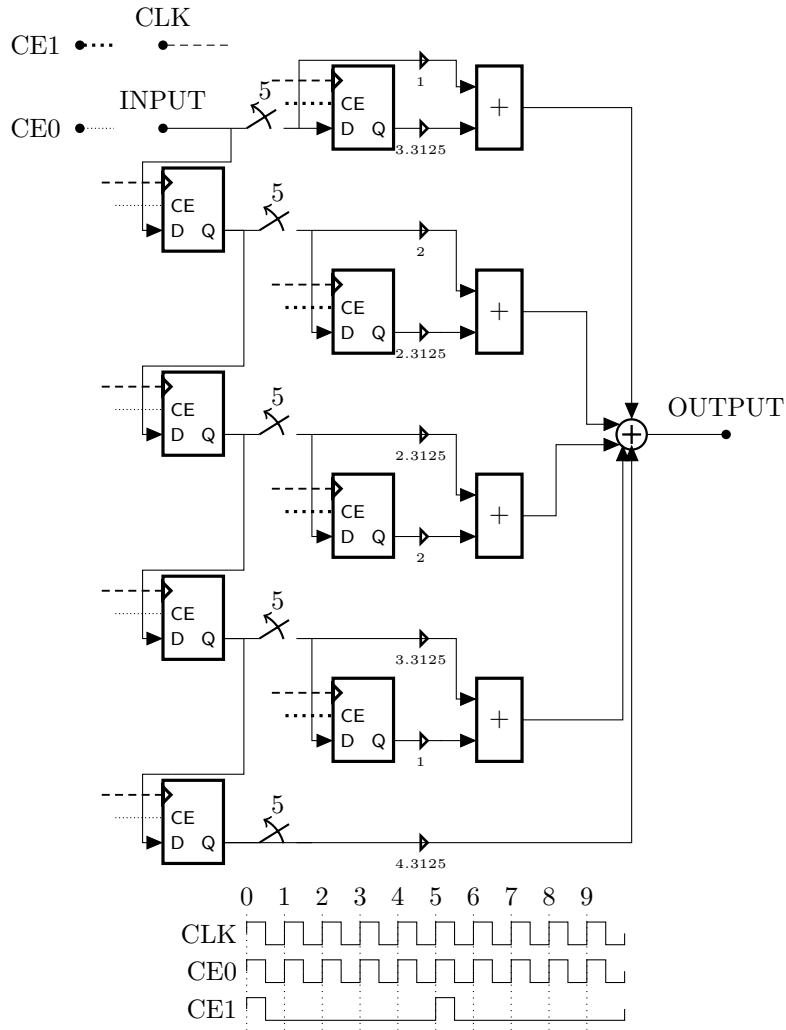


Figura 5.31: Estructura polifásica para  $M = 5$ ,  $K = 1$ ,  $K_1 = 1$  y  $a = 0.6875$ .

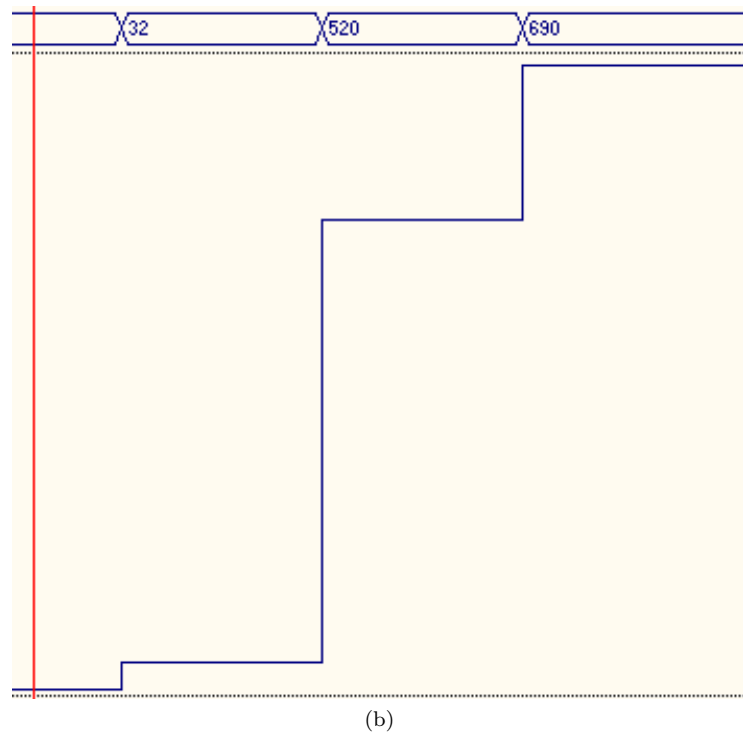
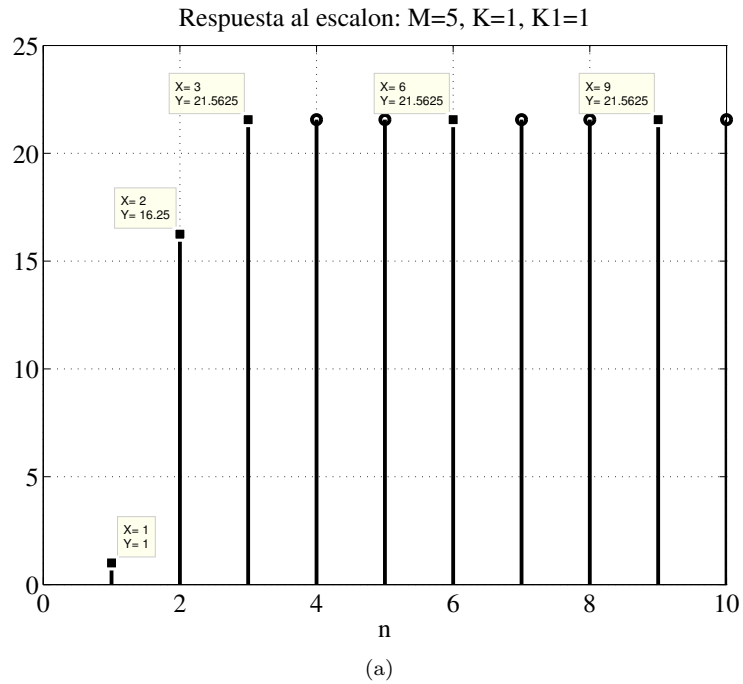
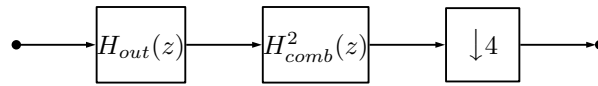


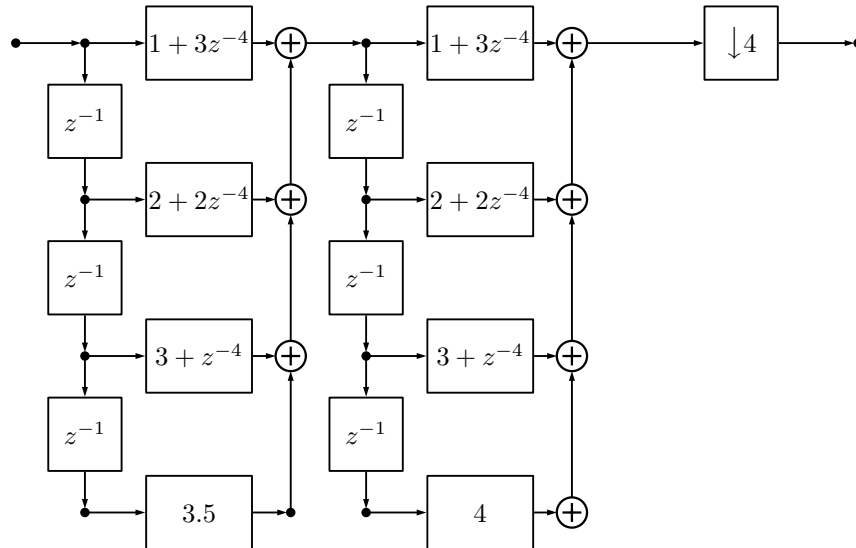
Figura 5.32: Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL.

**Ejemplo 5.13.** Se diseña una estructura decimadora con los siguientes parámetros:  $M = 4$ ,  $K = 2$ ,  $K_1 = 2$ . El desarrollo de esta estructura es presentado en la Figura 5.9.

Al compararse los coeficientes de la Figura 5.32c con los de la Figura 5.32d, se llega a que cuatro coeficientes de  $H_p(z)$  no son enteros. Debido a que la parte decimal es una potencia de dos ( $2^{-1} = 0.5$ ), estos coeficientes se pueden implementar mediante su parte entera, un corrimiento a la derecha y la suma entre estos dos, por lo que no es necesario multiplicadores.

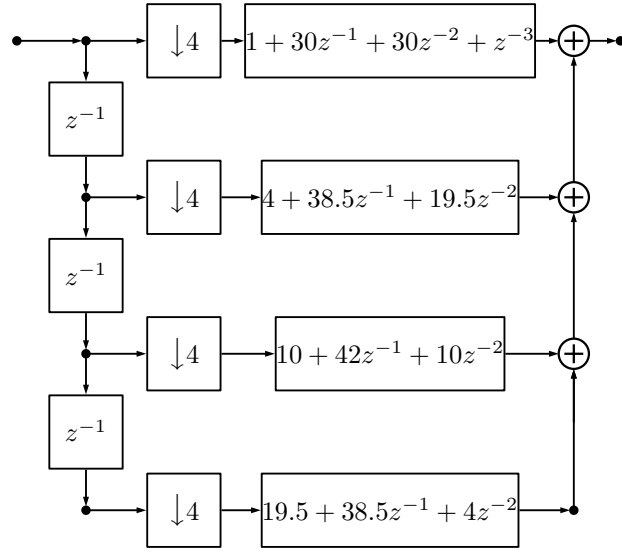


(a)

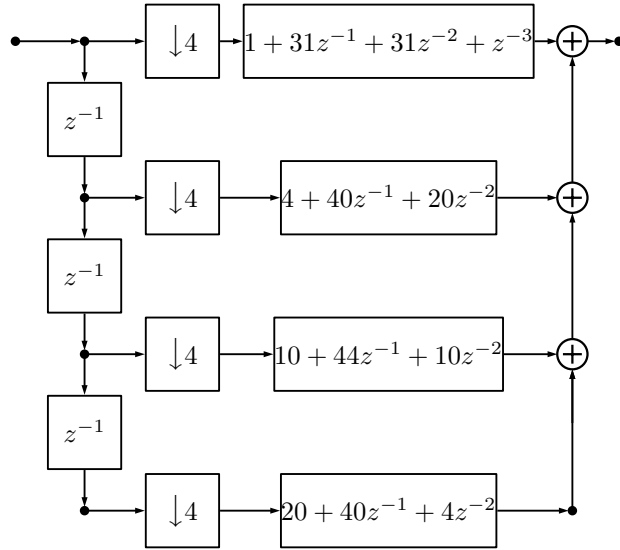


(b)





(c)



(d)

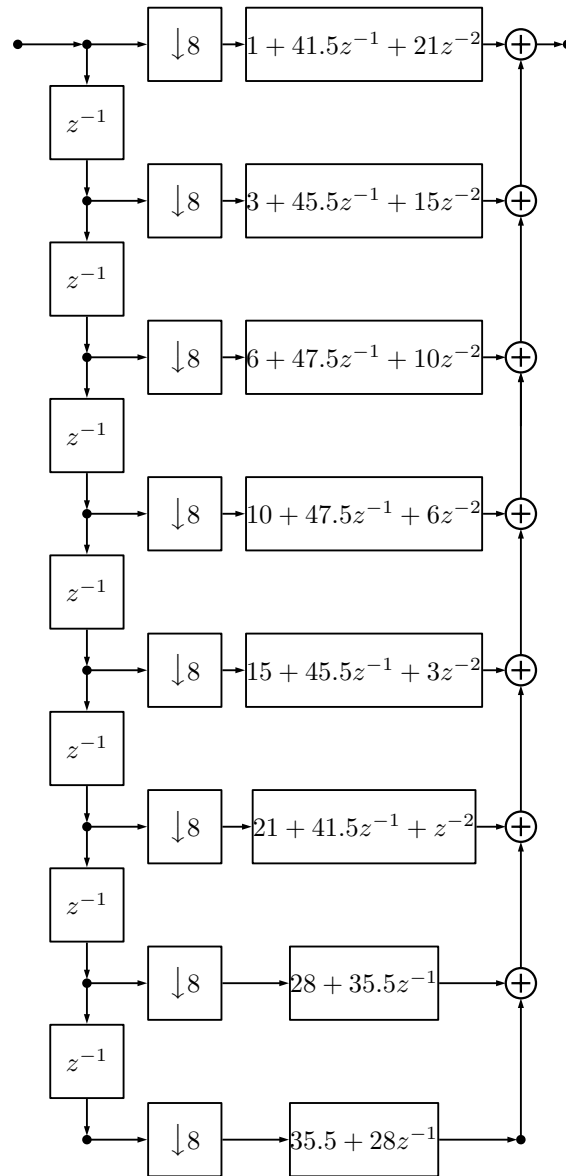
Figura 5.32: a) Estructura decimadora propuesta, b)  $H_{out}(z)$  y  $H_{comb}^2(z)$  se presentan mediante sus componentes polifásicas, c) Estructura polifásica de  $H_p(z)$ , d) Estructura polifásica de  $H_{comb}^4(z)$ .

A continuación se compara la estructura propuesta, con el filtro comb gene-

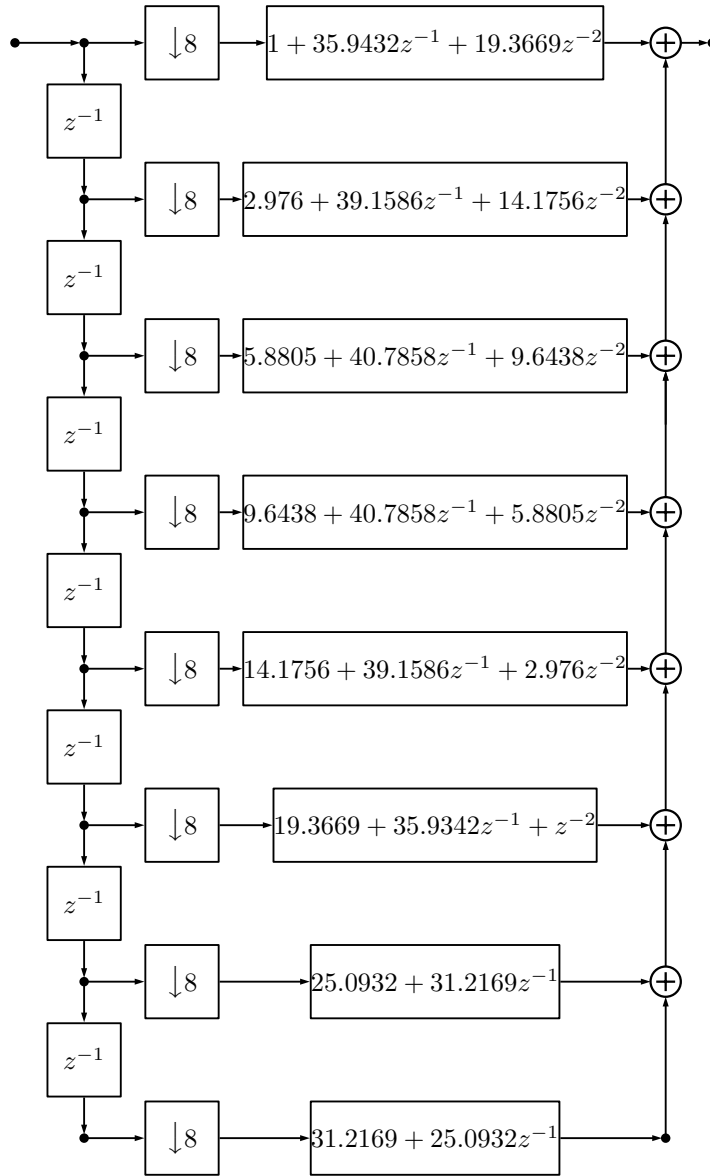
realizado.

**Ejemplo 5.14.** La estructura propuesta para una decimación  $M = 8$ ,  $K = 2$ ,  $K_1 = 1$  y  $a = 0.5$ , se compara con el filtro comb generalizado de tercer orden y  $q = 0.79$ .

Las dos estructuras decimadoras pueden observarse en la Figura 5.32



(a)



(b)

Figura 5.32: Comparación de estructura propuesta y el filtro comb generalizado.

El número de coeficientes enteros, del filtro comb generalizado, es igual a dos, mientras que para el propuesto, se tienen catorce. Para formar los veinte coeficientes del comb generalizado, que no son enteros, se requiere de su parte entera mas su parte fraccionaria, la cual no puede ser expresada directamente por

una potencia negativa de dos, la opción sería representar esta parte fraccionaria mediante sumas de potencias de dos, requiriéndose así al menos dos sumas por cada parte fraccionaria. Por otra parte, para la estructura propuesta se tienen solo ocho coeficientes que no son enteros, los cuales pueden ser representados por la suma de su parte entera más su parte fraccionaria ( $2^{-1}$ ). En resumen, para la implementación del filtro comb generalizado se necesitarían al menos 40 sumas más que para la implementación del comb tradicional de tercer orden, mientras que para la estructura propuesta se requieren de 8 sumas adicionales al comb tradicional.

La respuesta en frecuencia de la estructura propuesta también es la opción intermedia del filtro comb clásico y el generalizado, esto se puede ver en la Figura 5.33. Inclusive llega a mejorar la respuesta del comb generalizado en las últimas folding bands. El problema del poco ancho de atenuación en las primeras folding bands puede ser arreglado mediante la introducción de ceros rotados o cosenos cuadrados.

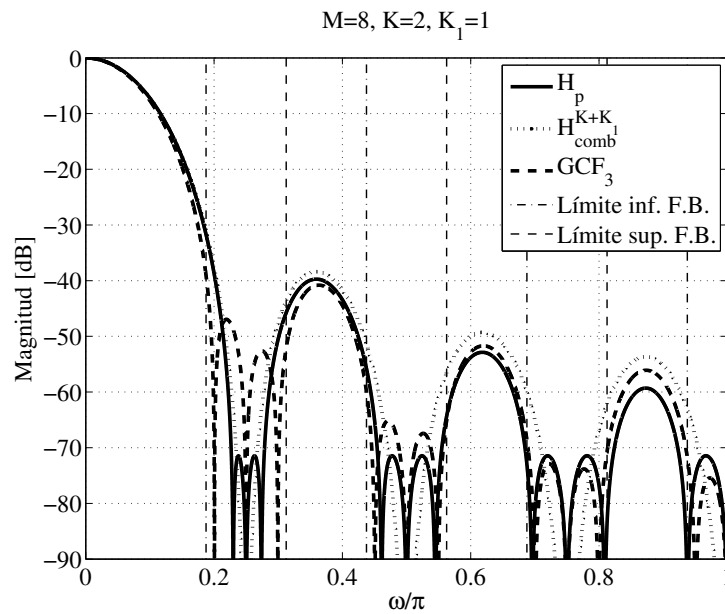


Figura 5.33: Respuesta en frecuencia del filtro comb, comb generalizado, y del filtro decimador propuesto, con parámetros:  $M = 8$ ,  $K = 2$ ,  $K_1 = 2$ .

Con los resultados de implementaciones y simulaciones, se comprueba que esta propuesta es una estructura decimadora viable, debido a su respuesta en frecuencia y a los pocos recursos que necesita para su implementación.

# Conclusiones

El objetivo de mejorar la respuesta del filtro comb mediante filtros FIR simples que no requieran multiplicadores, se logra mediante las dos propuestas.

La primera de ellas reduce en gran medida la caída en banda de paso y también ayuda a obtener una gran atenuación en folding bands pares. Los filtros necesarios para esta mejora fueron dos filtros correctores y un coseno cuadrado. El filtro corrector más simple y el coseno cuadrado trabajan a una frecuencia  $M/4$  menor a la frecuencia de muestreo. El filtro corrector correspondiente al orden del filtro comb opera a una frecuencia  $M/2$  menor a la de entrada. El precio que se debe pagar es un incremento de 36 APOS con respecto al método original [20].

La segunda propuesta, se basa en una función de cambio de amplitud lineal, que logra ampliar el ancho de las folding bands a costa de un incremento de  $M$  sumadores comparándose con el filtro comb tradicional, que es la estructura más sencilla. La complejidad está muy por debajo de la del comb generalizado y el sinc rotado, los cuales necesitan de multiplicadores o de un gran número de sumadores para poder implementar sus coeficientes. Adicionalmente, la estructura polifásica permite que el filtrado se realice a baja frecuencia, lográndose así llegar a una propuesta que es eficiente en términos de consumo de potencia.



# Trabajo a futuro

Con respecto a la estructura decimadora basada en filtros correctores, se proponen los siguientes puntos:

- Trabajar en mejorar la atenuación de todas las folding bands del filtro comb.
- Buscar una estructura en la que todo el filtrado sea realizado a baja frecuencia.
- Analizar el consumo de potencia y tratar de reducir este consumo mediante la descomposición polifásica de los filtros correctores, para que así éstos trabajen a baja frecuencia.

El trabajo a futuro correspondiente a la estructura decimadora basada en función de cambio de amplitud, es el siguiente:

- Compensar la caída en banda de paso de la estructura propuesta.
- Aumentar el ancho de la primera folding band, que es donde se presenta el peor caso de atenuación.
- Buscar una ACF adecuada para filtros comb de orden impar y factor de decimación par.
- Trabajar en reducir el número sumadores/restadores adicionales necesarios para su implementación.





# Índice de figuras

1.1.	Diagrama de bloques de decimación. . . . .	1
1.2.	Sub-muestreo. . . . .	2
1.3.	Señal $x(n)$ , paso uno y dos de sub-muestreo para $M = 4$ . . . . .	4
1.4.	Análisis en frecuencia del proceso de sub-muestreo para $M = 5$ . . . . .	5
1.5.	Análisis en frecuencia del proceso de sub-muestreo para $M = 6$ . . . . .	6
1.6.	Análisis en frecuencia del proceso de sub-muestreo para $M = 6$ . . . . .	7
1.7.	Segunda identidad del sub-muestreo. . . . .	8
1.8.	Tercera identidad de submuestreo. . . . .	9
1.9.	Estructura decimadora multi-etapa. . . . .	9
1.10.	Bandas a considerar en el diseño del filtro decimador de la primera etapa. . . . .	10
2.1.	Comparación de respuestas en magnitud de filtros comb de diferente orden. . . . .	12
2.2.	Estructura decimadora CIC. . . . .	13
2.3.	Estructura no recursiva . . . . .	14
2.4.	Estructura Polifásica . . . . .	15
3.1.	Respuesta en magnitud para filtro con banda de interés $\omega < \pi/2M$ . . . . .	20
3.2.	Respuesta en magnitud del filtro sinc rotado y el comb, ambos de tercer orden. . . . .	22
3.3.	Comparación de la respuesta en magnitud del filtro comb original y el generalizado de orden seis. . . . .	24
3.4.	Representación gráfica de la función de cambio de amplitud, donde el punto $(0,0)$ representa a la banda de rechazo y $(1,1)$ a la banda de paso. . . . .	25
3.5.	Comparación entre filtro comb tradicional de sexto orden y el resultado de aplicar el polinomio más simple a un comb de segundo orden. . . . .	26
3.6.	Respuesta en magnitud de los cinco filtros correctores diseñados. . . . .	28
3.7.	Estructura de dos etapas [20]. . . . .	28
3.8.	Respuesta en magnitud de filtro comb de orden cuatro mas corrector cuatro. . . . .	29
3.9.	Respuesta en magnitud de filtro comb de orden cuatro mas corrector cuatro. . . . .	29

4.1.	Estructura de tres etapas: a)Estructura propuesta 1, b)Estructura propuesta 2. . . . .	32
4.2.	Respuesta en magnitud del método [20] y estructura propuesta 1. . . . .	32
4.3.	Respuestas en magnitud de a) filtro coseno cuadrado y estructura propuesta 1, b) método [20] y estructura propuesta 2 . . . . .	34
4.4.	Respuesta en magnitud y acercamiento a banda de paso. . . . .	35
4.5.	Respuesta en magnitud y acercamiento a banda de paso. . . . .	35
4.6.	Estructura propuesta 2, cuando $M = 2^p$ . . . . .	36
4.7.	Respuesta en magnitud del método sharpening y la estructura propuesta 2. . . . .	37
4.8.	Respuesta en magnitud de método [31] y estructura propuesta 2, cuando $M = 32, K = 5$ . . . . .	38
4.9.	Estructura no recursiva para $M = 16$ y $K = 3$ . . . . .	38
4.10.	Diagrama de bloques de implementación de estructura propuesta. . . . .	40
4.11.	Comparación de respuesta al impulso generada en Matlab contra la generada en Active HDL. . . . .	41
4.12.	Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL. . . . .	42
4.13.	Estructura propuesta para filtro decimador con $M = 20$ y $K = 4$ . . . . .	43
4.14.	Diagrama de bloques de implementación de estructura propuesta. . . . .	44
4.15.	Comparación de respuesta al impulso generada en Matlab contra la generada en Active HDL. . . . .	45
4.16.	Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL. . . . .	46
5.1.	Función de cambio de amplitud: $H_{out} = H_{in} - 0.5$ . . . . .	48
5.2.	Ubicación de ceros de $H_{in}$ y $H_{out}$ en el plano $z$ . . . . .	49
5.3.	Acercamiento a los primeros dos ceros de $H_{in}$ y $H_{out}$ en el plano $z$ . . . . .	50
5.4.	$H_{in}$ y $H_{out}$ cuando $a = 0.3$ , para un factor de decimación $M = 8$ . A su vez, y para mayor claridad, se muestran los límites de cada folding band. . . . .	51
5.5.	Respuesta en escala logarítmica de $H_{in}$ y $H_{out}$ cuando $a = 0.3$ y factor de decimación $M = 8$ . . . . .	52
5.6.	Localización de ceros en plano $z$ para $H_{out}$ . . . . .	52
5.7.	$H_{in}$ y $H_{out}$ cuando $a = 0.7$ , para un factor de decimación $M = 8$ . . . . .	53
5.8.	Respuesta en magnitud de filtros comb de segundo orden y $M = 2$ . . . . .	54
5.9.	Respuesta en magnitud de filtros comb de segundo orden y $M = 5$ . . . . .	55
5.10.	Respuesta en magnitud de filtros comb de segundo orden y $M = 8$ . . . . .	55
5.11.	Valor de magnitud en límite de folding band número $FBn$ para $R = 2, K = 2, 4, 6, 8$ y $M = 1, 2, \dots, 256$ . . . . .	56
5.12.	Respuesta de $H_{out}$ en la que el peor caso de atenuación, entre ceros, es constante. . . . .	57
5.13.	Respuesta de $H_{out}$ con atenuación que permanece más constante entre los ceros desplazados. . . . .	58
5.14.	Acercamiento a la folding band $FBn$ de $H_{out}$ . . . . .	58

5.15. Comparación entre filtros de segundo, cuarto y sexto orden para un factor de decimación $M = 15$ . . . . .	59
5.16. Localización de ceros de $H_{out}$ de cuarto orden. . . . .	60
5.17. Localización de ceros de $H_{out}$ de sexto orden. . . . .	60
5.18. Estructura decimadora propuesta. . . . .	61
5.19. Respuesta en magnitud de filtro decimador propuesto. . . . .	61
5.20. Acercamiento a la cuarta folding band. . . . .	62
5.21. Valor de $q_+$ y $q_-$ en folding bands. . . . .	63
5.22. Comparación de GCF y filtro propuesto, ambos de orden tres. . . . .	64
5.23. Comparación de GCF y filtro propuesto de quinto orden. . . . .	64
5.24. Respuesta de filtro comb de primer orden y factor de decimación siete. . . . .	65
5.25. Respuesta en magnitud de la aplicación de la ACF con $a = \pm 0.7$ . . . . .	66
5.26. Respuesta en magnitud de la aplicación de la ACF con $a = 0.35$ . . . . .	68
5.27. a)Estructura decimadora propuesta, b) $H_{out}(z)$ se presenta mediante sus componentes polifásicas, mientras que $H_{comb}(z)$ de forma no recursiva, c)Estructura polifásica de $H_p(z)$ , d)Estructura polifásica de $H_{comb}^3(z)$ . . . . .	70
5.28. Estructura polifásica para $M = 5$ , $K = 1$ , $K_1 = 1$ y $a = 0.6875$ . . . . .	71
5.29. Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL. . . . .	72
5.30. Estructura polifásica para $M = 5$ , $K = 1$ , $K_1 = 1$ y $a = 0.6875$ . . . . .	73
5.31. Estructura polifásica para $M = 5$ , $K = 1$ , $K_1 = 1$ y $a = 0.6875$ . . . . .	74
5.32. Comparación de respuesta al escalón generada en Matlab contra la generada en Active HDL. . . . .	75
5.32. a)Estructura decimadora propuesta, b) $H_{out}(z)$ y $H_{comb}^2(z)$ se presentan mediante sus componentes polifásicas, c)Estructura polifásica de $H_p(z)$ , d)Estructura polifásica de $H_{comb}^4(z)$ . . . . .	77
5.32. Comparación de estructura propuesta y el filtro comb generalizado. . . . .	79
5.33. Respuesta en frecuencia del filtro comb, comb generalizado, y del filtro decimador propuesto, con parámetros: $M = 8$ , $K = 2$ , $K_1 = 2$ . . . . .	80

# Índice de tablas

3.1. Valores óptimos de rotación . . . . .	23
3.2. Filtros correctores . . . . .	27
4.1. Resumen de diseño utilizando Artix-7 . . . . .	39
4.2. Resumen de diseño utilizando Artix-7 . . . . .	43
5.1. Resumen de estructura propuesta . . . . .	68
5.2. Resumen de diseño utilizando Artix-7 . . . . .	69
5.3. Resumen de diseño utilizando Artix-7 . . . . .	74

# Bibliografía

- [1] Jovanovic Dolecek, G., "Introduction to multirate systems," *Idea Group Publishing*, 2002.
- [2] Laddomada, M., "Generalized Comb Decimation Filters for  $\Sigma\Delta$  A/D Converters: Analysis and Design," *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, vol.54, no.5, pp. 994-1005, May 2007.
- [3] Kwentus, A.Y.; Jiang, Z.; Willson, A.N., Jr., "Application of Filter Sharpening to Cascaded Integrator-Comb Decimation Filters," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol.45, no.2, pp.457-467, Feb 1997.
- [4] Hogenauer, E., "An Economical Class of Digital Filters for Decimation and Interpolation", *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol.29, no.2, pp.155-162, Apr 1981.
- [5] Pecotic, M.G.; Molnar, G.; Vucic, M., "Design of CIC Compensators With SPT Coefficients Based on Interval Analysis," *MIPRO, 2012 Proceedings of the 35th International Convention*, vol., no., pp.123-128, 21-25 May 2012.
- [6] Vucic, M.; Molnar, G.; Zgaljic, T., "Design of FIR filters based on interval analysis," *MIPRO, 2010 Proceedings of the 33rd International Convention*, vol., no., pp.171-176, 24-28 May 2010.
- [7] Molnar, G.; Vucic, M., "Closed-Form Design of CIC Compensators Based on Maximally Flat Error Criterion," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol.58, no.12, pp.926-930, Dec 2011.
- [8] Kim, S.; Lee, W.; Ahn, S.; Choi, S. "Design of CIC roll-off Compensation Filter in a W-CDMA Digital Receiver," *Digital Signal Processing*, (Elsevier), vol.16, pp. 846-854, 2006.
- [9] Yeung, K. S.; Chan, S.C., "The Design and Multiplier-less Realization of Software Radio Receivers With Reduced System Delay," *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, vol.51, no.12, pp.2444-2459, Dec 2004.
- [10] Dolecek, G.J.; Mitra, S.K., "Simple Method for Compensation of CIC Decimation Filter," *Electronic Letters*, vol.44, no.19, pp.1162-1163, Sep 2008.

- [11] Dolecek, G.J., "Simple wideband CIC compensator," *Electronic Letters*, vol.45, no.24, pp.1270-1272, Nov 2009.
- [12] Fernandez-Vazquez, A.; Dolecek, G.J., "Maximally Flat CIC Compensation Filter: Design and Multiplierless Implementation," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol.59, no.2, pp.113,117, Feb 2012.
- [13] Dolecek, G.J.; Harris, F., "Design of wideband compensator filter for a digital IF receiver," *Digital Signal Processing*, (Elsevier), vol.19, pp.827-837, 2009.
- [14] Lo Presti, L., "Efficient Modified Sinc-Filters for Sigma-Delta A/D Converters," *Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol.47, no.11, pp.1204,1213, Nov 2000.
- [15] Laddomada, M., "Design of Multistage Decimation Filters Using Cyclotomic Polynomials: Optimization and Design Issues," *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, vol.55, no.7, pp.1977,1987, Aug 2008.
- [16] Laddomada, M.; Troncoso, D. E.; Jovanovic-Dolecek, G., "Design of Multiplierless Decimation Filters Using an Extended Search of Cyclotomic Polynomials," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol.58, no.2, pp.115-119, Feb 2011.
- [17] Romero, D.E.T. Jovanovic Dolecek, G. Laddomada, "Cyclotomic polynomial filters based on cascaded recursive building blocks with minimum number of additions," *Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), 2011 7th International Symposium on*, vol., no., pp.20-25, 4-6 Sept 2011.
- [18] Dolecek, G.J.; Fernandez-Vazquez, A., "On nonrecursive rotated comb filter," *Circuits and Systems (MWSCAS), 2012 IEEE 55th International Midwest Symposium on*, vol., no., pp.474-477, 5-8 Aug 2012.
- [19] Kaiser, F. and Hamming, R.W. (1977), "Sharpening the Response of a Symmetric Nonrecursive Filter by Multiple Use of the Same Filter," *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol.25, no.5, pp.415-422, Oct 1977.
- [20] Dolecek, G.J.; Fernandez-Vazquez, A., "Novel droop-compensated comb decimation filter with improved alias rejections," *Int. J. Electron. Commun., (AEU)*, vol.67, pp.387-396, 2013.
- [21] Jovanovic-Dolecek, G.; Mitra, S.K., "A new two-stage sharpened comb decimator," *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, vol.52, no.7, pp.1414-1420, Jul 2005.
- [22] Quan Liu; Jun Gao, "Efficient Comb Decimation Filter with Sharpened Magnitude Response," *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2009. WiCom '09. 5th International Conference on*, vol., no., pp.1-4, 24-26 Sept 2009.

- [23] C. Jeong, Y.J. Min, and S.W. Kim, "Double-sharpened decimation filter employing a pre-droop compensator for multistandard wireless applications," *ETRI J*, vol.33, pp.175-189, 2011.
- [24] Zaimin He; Yonghui Hu; Kang Wang; Jianfeng Wu; Juan Hou; Langming Ma, "A Novel CIC Decimation Filter for GNSS Receiver Based on Software Defined Radio," *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing (WiCOM), 2011 7th International Conference on*, vol., no., pp.1-4, 23-25 Sept 2011.
- [25] Jovanovic-Dolecek, G.; Laddomada, M., "An Economical Class of Droop-Compensated Generalized Comb Filters: Analysis and Design," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol.57, no.4, pp.275-279, Apr 2010.
- [26] Troncoso Romero, D.E.; Jovanovic Dolecek, G.; Laddomada, M., "Efficient design of two-stage comb-based decimation filters using Chebyshev sharpening," *Circuits and Systems (MWSCAS), 2013 IEEE 56th International Midwest Symposium on*, , vol., no., pp.1011-1014, 4-7 Aug 2013.
- [27] Laddomada, M.; Mondin, M., "Decimation schemes for Sigma-Delta A/D converters based on Kaiser and Hamming sharpened filters," *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings -* , vol.151, no.4, pp.287-296, 30 Aug 2004.
- [28] Laddomada, M., "Comb-Based Decimation Filters for  $\Sigma\Delta$  A/D Converters: Novel Schemes and Comparisons," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol.55, no.5, pp.1769-1779, May 2007.
- [29] Fernandez-Vazquez, A.; Dolecek, G.J., "A General Method to Design GCF Compensation Filter," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol.56, no.5, pp.409-413, May 2009.
- [30] Jovanovic-Dolecek, G.; Laddomada, M., "An Economical Class of Droop-Compensated Generalized Comb Filters: Analysis and Design," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol.57, no.4, pp.275-279, Apr 2010.
- [31] Dolecek, G.J.; Laddomada, M., "An Improved Class of Multiplierless Decimation Filters: Analysis and Design," *Elsevier Digital Signal Processing*, vol.23, Issue 5, pp. 1773-1782, Sep 2013.