



INAOE

Estabilidad de Cuadrotoros con Carga Suspendida.

por

Arturo Muñoz Silva

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN Ciencia y
Tecnología del Espacio**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Agosto 2018

Tonantzintla, Puebla

Bajo la supervisión de:

Dr. Gustavo Rodríguez Gomez

Investigador Titular INAOE

Dr. José Martínez Carranza

Investigador Titular INAOE

©INAOE 2018

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias parcial o totalmente
de esta tesis.



Resumen

En esta investigación se presenta el desarrollo y validación experimental de una técnica de control para la traslación y orientación de un cuadrotor. A tal vehículo se le conectará una carga en el centro de masa por medio de un cable rígido, dando lugar a una carga suspendida.

Primeramente se presenta un modelo matemático que describe la dinámica de la aeronave. Segundo, se presenta el modelo de la carga para realizar un acoplamiento de sistemas entre el cuadrotor y la carga suspendida. A partir del modelo que describe la dinámica del sistema (cuadrotor-carga) se establecen los estados a controlar y las entradas al sistema, lo que brinda la posibilidad de controlar la orientación y posición del vehículo. Posteriormente se realiza una linealización para desarrollar una ley de control bajo la técnica de control óptimo, la cual permite al quadrotor volar de forma autónoma, transportando una carga suspendida. Finalmente se realizan un conjunto de pruebas para validar el modelo del cuadrotor con carga y el controlador propuesto.

Abstract

This research presents the development and experimental validation of a control technique for the translation and orientation of a quadrotor. Such a vehicle is connected to a load in the center of mass by means of a rigid cable, giving rise to a suspended load.

First, a mathematical model that describes the dynamics of the aircraft is presented. Second, the load model is presented to perform a system coupling between the quadrotor and the suspended load. From the model that describes the dynamics of the system (quadrotor-load) the states to control and the inputs to the system are established, which provides the possibility of controlling the orientation and position of the vehicle. Subsequently, a linearization is carried out to develop a control law under the optimal control technique, which allows the quadrotor to fly autonomously, transporting a suspended load. Finally, a set of tests was carried out to validate the quadrotor model with load and the proposed controller.

Agradecimientos

Agradezco a el CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de esta investigación. Agradezco al INAOE por la oportunidad y el apoyo que se me fue brindado durante toda mi estancia en la institución.

Quiero agradecer con profundo sentimiento a mi asesor de tesis, él Dr. Gustavo Rodríguez Gómez por aceptar ser parte de esta trayectoria donde me brindo sus conocimientos con gusto y sin envidia, con nobleza y dedicación, ya que siempre se levantó de su silla para me guiarme en mi vida académica, y de igual forma muchas gracias por compartir sus bonitas anécdotas, (para mi, es conocimiento invaluable de como enfrentar la vida), y sobre todo la gran paciencia para esperar a que esta investigación llegara a su final. Por eso y más, lo considero un padre académico, ya que su forma de ser, es lo mas parecido a los valores que me inculcaron, por ello usted es mi ejemplo a seguir, doc. Nunca cambie y muchas muchas gracias. Siempre seguiré su forma de disciplina para lograr mi sueños. De igual forma agradecer al Dr. José M. Carranza por su apoyo, sugerencias que me brindo para lograr tal proyecto. Gracias.

Agradezco a los miembros del jurado, el Dr. Rogerio Enríquez Caldera por su dedicación que en todo momento mostró para mi y mis compañeros, gracias por la oportunidad y gracias por mostrarme otro tipo de enseñanza académica (con aristocracia y picardía) y a los doctores, él Dr. Israel cruz Vega, y él Dr. Leopoldo Altamirano Robles por las valiosas contribuciones que hicieron al trabajo final y por el tiempo que dedicaron para revisarlo, a pesar de sus actividades que los ocupan.

Gracias al Dr. José S. Guichard Romero por su apoyo y consejos en todo momento.

Agradezco de todo corazón a mi madre la Lic. S. Lorena Silva López por el apoyo, paciencia y consejos que me brindo en todo momento, sin ella nada de esto sería posible. Gracias mamá. Te amo.

A mi hermano Omar, a mis primos y familia, gracias por siempre estar ahí, a mi novia Yolotl por acompañarme y comprenderme en esta bonita trayectoria. A mis amigos que siempre me apoyaron e hicieron amena los momentos de frustración. A todos y cada uno infinita gracias.

Índice general

Índice general	III
1. Introducción	1
1.1. Problemática	1
1.2. Objetivo general	2
1.2.1. Objetivos particulares	2
1.3. Metodología	2
1.4. Estructura de la tesis	3
2. Marco Teórico	5
2.1. Introducción	5
2.1.1. Cuerpo Rígido	5
2.1.2. Ecuación de Lagrange	8
2.2. Control para Cuadrorotor	10
2.2.1. Controlador Proporcional Integral Derivativo	10
2.3. Control Óptimo	11
3. Trabajo Relacionado	13
3.1. Cuadrorotor	14
3.2. Cuadrorotor con carga	15
4. Cuadrorotor	19
4.1. Modelo matemático del Cuadrorotor con carga suspendida	19
4.2. Diseño de Control	26
5. Pruebas y resultados	33
5.1. Pruebas de Orientación y Posición del Cuadrorotor	35
5.1.1. Prueba 1: primer conjunto de parámetros	35
5.1.2. Prueba 2: segundo conjunto de parámetros	39
5.1.3. Prueba 3: tercer conjunto de parámetros	43
5.1.4. Prueba 4: cuarto conjunto de parámetros	47
5.2. Pruebas Posición de la Carga	51
5.2.1. Prueba 1: primer conjunto de parámetros	51
5.2.2. Prueba 2: segundo conjunto de parámetros	54
5.2.3. Prueba 3: tercer conjunto de parámetros	57

5.2.4. Prueba 4: cuarto conjunto de parámetros	60
5.2.5. Entorno de simulación	63
6. Conclusiones y trabajo a futuro	65
6.1. Síntesis de la tesis	65
6.2. Conclusiones	65
6.3. Contribuciones	66
6.4. Trabajo a futuro	67
A. Apéndice	69
Índice de figuras	71
Índice de cuadros	75
Bibliografía	77

Capítulo 1

Introducción

El estado de la tecnología actual permite cubrir necesidades en las áreas de seguridad pública, administración de infraestructura, transporte de cargas, exploración aeroespacial, investigación básica y aplicada. Algunas tareas en las áreas anteriores implican un alto riesgo para el usuario por lo cual es conveniente emplear alguna tecnología que permita dar solución al problema en forma segura para el humano.

La tecnología autónoma aplicada a los los micro vehículos aéreos (Micro Aerial Vehicles, MAV) es una área importante de investigación actualmente. Los MAV autónomos pueden satisfacer necesidades de entrega de paquetería, cartografía, rescate, seguridad, percepción remota, soluciones que en el área aeroespacial resultan ser muy importantes.

El transporte de cargas suspendidas por medio de MAV's es una área de aplicación que actualmente origina gran interés. En este tipo de aplicaciones para alcanzar el éxito hay que asegurar la estabilidad del MAV la cual se puede perder , por ejemplo, debido a las oscilaciones de la carga al ser transportada por el MAV.

Los cuadrotores introducen nuevas métodos en el área aeroespacial, en particular el transporte de cargas por medio de estos en otros planetas resulta ser de gran utilidad. La investigación de esta tesis está dirigida hacia el diseño de un control para este tipo de naves con el objetivo de transportar una carga suspendida sin que pierda su la estabilidad en posición y trayectoria.

1.1. Problemática

Los sistemas aéreos que utilizan propulsores móviles que están conectados perpendicularmente al chasis de la nave son capaces de aterrizar y despegar de forma vertical. Por ejemplo, en los vehículos aéreos no tripulados, los multirotores tiene gran ventaja respecto a un vehículo de ala fija, ya que estos pueden volar permaneciendo

estáticos en un punto, su despegue es completamente vertical VTOL (*Vertical Takeoff and Landing*), siendo similar con las naves espaciales que aterrizan de esta forma. Una característica importante de estos vehículos es su gran margen de maniobrabilidad y su capacidad de volar a bajas velocidades. Por estas características se utilizan los cuadrotos en diferentes aplicaciones, como llevar suministros áreas de difícil acceso, mediciones de estructuras, fotogrametría, inspección aérea, etc.

La problemática es guiar al cuadrotor con una carga suspendida desde el punto inicial al punto deseado sin tener problemas de estabilidad ante perturbaciones, y condiciones donde la carga pueda oscilar. Para combatir esta problemática se desarrolla una estrategia de control que mantiene la estabilidad de éste a pesar de la carga suspendida transportada.

1.2. Objetivo general

Diseñar un control para un cuadrotor que tiene una carga suspendida mediante un cable no rígido que proporcione estabilidad ante perturbaciones en el transporte de la carga.

1.2.1. Objetivos particulares

- Analizar la dinámica del cuadrotor para obtener su modelo matemático con la carga acoplada.
- Diseño e implementación del control óptimo para mantener la estabilidad del cuadrotor.
- Validar el control por medio de simulaciones.

1.3. Metodología

El modelo matemático del cuadrotor es desarrollado bajo el enfoque de *Newton-Euler* que nos permite obtener las ecuaciones diferenciales que describen su dinámica, y mediante el enfoque *Langrange-Euler* obtenemos el modelo de la carga suspendida.

Combinando las fuerzas y momentos de los dos marcos de referencia Inercial y Terrestre (E y B) se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales con ocho grados de libertad que representan al cuadrotor con su carga acoplada.

A partir del modelo del cuadrotor con su carga acoplada se identifican las variables de estado a controlar y el control es obtenido por medio de la teoría de Control Óptimo.

La validación del control se hará por medio de simulaciones. Se diseñaran un conjunto de experimentos que nos permitan validar el comportamiento del cuadrotor con su carga en dos casos: 1) el control puede mantener la orientación y posición del cuadrotor, 2) el control puede mantener la posición de la carga.

La contribución de esta investigación es desarrollar la ley de control óptimo que permiten controlar el vuelo de un cuadrotor con carga suspendida ya que en la literatura no se ha encontrado controladores de este tipo para cuadrotores con esta problemática. Asimismo otra contribución es el acoplamiento de modelos de la dinámica del cuadrotor con las fuerzas producidas por una carga suspendida, obteniendo un solo sistema subactuado no lineal.

1.4. Estructura de la tesis

La siguiente investigación esta integrada por seis capítulos que se describen breve mente a continuación.

El capítulo dos esta conformado por un conjunto de definiciones y conocimientos teóricos para ofrecer conceptos de términos que serán empleados durante el análisis de nuestro tema de investigación. Para posteriormente situar el problema de la estabilidad del cuadrotor con carga suspendida en un problema con valores a la frontera.

El capítulo tres consiste en analizar y presentar las teorías que se encuentran en la frontera del conocimiento, sobre cuadrotores. También incluye los trabajos e investigaciones que existen y los antecedentes sobre los cuadrotores con carga.

En el capítulo cuatro se analiza la dinámica del cuadrotor y de la carga, para sintetizar un modelo matemático del cuadrotor con carga suspendida. Posteriormente se desarrolla una ley de control basado en la teoría de control óptimo.

El capítulo cinco se describen los experimentos realizados, que ponen a prueba el control propuesto, de igual manera, se detalla los resultados obtenidos para dar certeza y confiabilidad sobre esta investigación.

El capítulo seis detalla el análisis del capítulo cinco y ofrece una deducción sobre los resultados obtenidos. También se muestra el trabajo que puede seguir esta linea de investigación para trabajos futuros, sobre los cuadrotores como medio de transporte.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos algunas de las principales estrategias para obtener el modelo matemático de un cuadrotor. En particular describiremos brevemente los enfoques Newton-Euler y Lagrange-Euler.

El control de actitud de un cuadrotor es necesario para las maniobras de conducción de éste, en particular cuando se considera al cuadrotor transportando un carga suspendida por un cable. Por lo que describiremos algunas estrategias de diseño de control de éste.

2.1.1. Cuerpo Rígido

El movimiento de un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad: tres de ellos definen la posición de un punto de referencia en el cuerpo, y tres definen la orientación del cuerpo. Ya que cada uno de los seis grados de libertad toma dos variables de estados (una de posición y una de velocidad), así que un total de doce ecuaciones diferenciales de primer orden son utilizadas para describir completamente el movimiento del cuerpo rígido.

El movimiento de un cuerpo rígido es, gobernado por las ecuaciones de movimiento de Newton

$$\dot{p} = m \frac{dv}{dt} = ma = \sum_{i=0}^n F_i \quad (2.1)$$

$$\dot{h} = I \frac{dw}{dt} + w \times I \frac{dw}{dt} = \sum_{i=0}^n \tau_i \quad (2.2)$$

para $i = 1, \dots, n$.

donde

$p = [p_x, p_y, p_z]^T$ es el momento lineal del cuerpo.

$h = [h_x, h_y, h_z]^T$ es el momento angular del cuerpo.

$F = [F_x, F_y, F_z]^T$ es la fuerza actuante sobre el cuerpo.

$\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ es el torque actuante sobre el cuerpo.

Las dinámicas rotacionales de un cuerpo rígido son mas complicadas que las dinámicas traslacionales por algunas razones: la masa del cuerpo es escalar, pero el momento de inercia I es una matriz de 3×3 . Si los ejes del cuerpo se eligen para que coincidan con los ejes principales, el momento de la matriz de inercia es diagonal, de otra forma la matriz inercial tiene términos fuera de la diagonal.

Para definir la posición del cuerpo se define los ángulos entre los ejes del cuerpo y los ejes de referencia inercial, la orientación del cuerpo es definido por un conjunto de tres ángulos, llamados ángulos de Euler, que describen la orientación de un conjunto ortogonal de ejes fijos en el marco de referencia del cuerpo con respecto a los ejes de referencia inerciales.

Supongamos que los ejes del marco de referencia del cuerpo están inicialmente alineados con los ejes de referencias inerciales. Luego se realiza la siguiente secuencia de rotaciones para colocar los ejes del marco de referencia del cuerpo en posición general:

- Primero, una rotación ψ (guiñada) sobre el eje z
- Segundo, una rotación θ (cabeceo) sobre el eje y
- Tercero, una rotación ϕ (alabeo) sobre el eje x

Así que vemos que

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = T_{BI} \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{bmatrix}$$

donde T_{BI} es la matriz que rota en los ejes del cuerpo de la posición de referencia, y es el producto de tres matrices

$$T_{BI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

cada factor T_{BI} es una matriz ortogonal y por lo tanto T_{BI} es ortogonal, es decir

$$T_{BI} = T_{BI}^{-1}$$

tenga en cuenta que $T_{BI} = T_{BI}^{-1}$ es la matriz que devuelve los ejes del cuerpo desde la posición general a la posición de referencia.

tenga en cuenta que el orden de rotaciones implícitas en T_{BI} es importante: las tres matrices en (2.3) no conmutan, visto en Friedland (1986).

Para obtener los componentes de un vector en un conjunto de ejes, podemos utilizar la transformación (2.3). En particular, supongamos que \vec{a} es cualquier vector en el espacio. Cuando se resuelve en componentes a lo largo de una referencia inercial, adjuntamos el subíndice I y cuando está resuelto en ejes del marco del cuerpo rígido, adjuntamos los subíndices B . Utilizando (2.3) obtenemos

$$\vec{a}_B = T_{BI}\vec{a}_I \quad (2.4)$$

puede ser aplicada en (2.2) para el movimiento angular de un cuerpo rígido, ejemplo, para describir el movimiento de un aeronave rotando a lo largo de sus ejes del marco del cuerpo rígido. En el caso de un cuerpo rígido, el vector del momentum angular es

$$\vec{h} = J\vec{\omega} \quad (2.5)$$

donde J es el momento de la matriz de inercia y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular. Si los ejes a lo largo de los cuales se resuelve \vec{h} se definen como coincidentes con los ejes principales físicos del cuerpo", entonces J es una matriz diagonal. Así cuando \vec{h} es resuelta a lo largo de los ejes del marco del cuerpo rígido, obtenemos de la forma (2.3)

$$\vec{h}_B = \begin{bmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

pero (2.2) solo se cumple cuando el vector \vec{h} se mide con respecto a una referencia inercial, estableciendo la siguiente notación

$$\frac{d\vec{h}_I}{dt} = \frac{d}{dt}(T_{IB}\vec{h}_B) = \vec{\tau}_I \quad (2.7)$$

La transformación T_{BI} sin embargo, no es constante, por lo tanto (2.7) puede ser escrita

$$T_{IB}\dot{\vec{h}}_B + \dot{T}_{IB}\vec{h}_B = \vec{\tau}_I$$

o, multiplicando ambos lados por $T_{BI} = T_{IB}^{-1}$:

$$\dot{\vec{h}}_B + T_{BI}\dot{T}_{IB}\vec{h}_B = T_{BI}\vec{\tau}_I = \tau_B \quad (2.8)$$

en forma de componentes se puede escribir.

$$\begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_{xB} \\ J_y \dot{\omega}_{yB} \\ J_z \dot{\omega}_{zB} \end{bmatrix} + T_{BI}\dot{T}_{BI} \begin{bmatrix} J_x \omega_{xB} \\ J_y \omega_{yB} \\ J_z \omega_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xB} \\ \tau_{yB} \\ \tau_{zB} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

estas ecuaciones diferenciales relacionan las componentes del vector de velocidad angular, proyectado en \vec{w} , en ejes del marco de referencia del cuerpo rígido giratorio con el vector de torque también proyectado a lo largo de los ejes del cuerpo rígido.

$$\vec{w}_B = [w_{xB} w_{yB} w_{zB}]^T \quad (2.10)$$

Para completar, necesitamos la matriz $T_{BI} \dot{T}_{BI}$. Se puede demostrar que

$$\dot{T}_{BI} = T_{BI} \begin{bmatrix} 0 & -w_{zB} & w_{yB} \\ w_{zB} & 0 & -w_{xB} \\ -w_{yB} & w_{xB} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

así que

$$T_{BI} \dot{T}_{BI} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{zB} & w_{yB} \\ w_{zB} & 0 & -w_{xB} \\ -w_{yB} & w_{xB} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

por lo tanto, se convierte

$$\begin{aligned} J_x \dot{w}_{xB} + (J_z - J_y) w_{yB} w_{zB} &= \tau_{xB} \\ J_y \dot{w}_{yB} + (J_x - J_z) w_{xB} w_{zB} &= \tau_{yB} \\ J_z \dot{w}_{zB} + (J_y - J_x) w_{xB} w_{yB} &= \tau_{zB} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Estas son las ecuaciones de Euler que describe cómo los componentes del eje del cuerpo del vector de velocidad angular se envuelven en el tiempo, en respuesta a los componentes del torque en los ejes del marco del cuerpo rígido, visto en [Friedland \(1986\)](#).

Mediante las ecuaciones 2.1 y 2.2 se pueden formular las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del cuadrotor, vistas en [Bouabdallah & Siegwart \(2007\)](#), [Zhu et al. \(2015\)](#), [Alothman et al. \(2015\)](#), [Feng et al. \(2015\)](#) [Castillo et al. \(2004\)](#), [Pizetta et al. \(2015\)](#),

2.1.2. Ecuación de Lagrange

Las ecuaciones que gobiernan sistemas mecánicos pueden ser obtenidos a través del método desarrollado por Lagrange. Las ecuaciones son derivadas a partir de la leyes de movimiento de Newton.

Esta función depende de las coordenadas generalizadas y del tiempo, de igual manera las velocidades generalizadas.

Entonces, el vector de posición de la partícula se expresa como

$$\tau = x(q_1, q_2, q_3)\hat{i} + y(q_1, q_2, q_3)\hat{j} + z(q_1, q_2, q_3)\hat{z} \quad (2.14)$$

donde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{z}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 . Incorporan en forma automática las restricciones que existen ya que las diferentes partes del sistema se encuentran conectadas entre si.

El principio fundamental de las ecuaciones de Lagrange es la representación del sistema en coordenadas generalizadas $q_i; i = 1, 2, \dots, r$, para cada grado de libertad del sistema. Se puede expresar la energía cinética T en términos de las $q_i, dq_i/dt = \dot{q}_i$, y la energía potencial V en términos de q_i .

Para un sistema que rota con velocidad angular ω constante respecto a un sistema o marco inercial, como el cuadrotor, las ecuaciones de *Lagrange* para una partícula son;

$$\mathcal{L} = T(q_i, \dots, q_r, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_r) - V(q_i, \dots, q_r) \quad (2.15)$$

Con el desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (2.16), se obtienen la dinámica del sistema, sea lineal o no lineal, en nuestra investigación se utilizan para obtener las ecuaciones que modelan la carga del cuadrotor.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.16)$$

donde Q_i son fuerzas generalizadas que son externas al sistema o no son derivables de una función escalar potencial.

De la ecuación (2.16) se obtienen r ecuaciones diferenciales de segundo orden con r grados de libertad, el cual es equivalente a un sistema de con $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

Por esta ventaja los autores de [Dai et al. \(2014\)](#) y [Lee et al. \(2012\)](#) utilizan la ecuación (2.16) para desarrollar el modelo que representa la dinámica del cuadrotor.

2.2. Control para Cuadrotor

A continuación se muestra aspectos para la comprensión sobre el área de control moderno en la resolución que plantea esta investigación sobre micro vehículos aéreos.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de acuerdo a las características y complejidad de los elementos que lo constituyen, otorgando dos tipos de sistemas, lineal y no lineal.

La mayoría de los modelados matemáticos son diseñados bajo el enfoque de sistemas lineales, ya que son más fáciles de manipular y su comportamiento en algunos casos se asemeja como un sistema físico. Sin embargo, muchas veces el modelado de un sistema lineal no ofrece todas las características del sistema, es por ello que se utilizan los modelos de un sistema no lineal para satisfacer fenómenos como: corrimientos en frecuencia, caos, puntos de equilibrio que se encuentran en aplicaciones como navegación de naves espaciales, cohetes, robot manipuladores, satélites.

2.2.1. Controlador Proporcional Integral Derivativo

Una de las técnicas de control utilizadas en el sector aeroespacial, es el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), por su excelente rendimiento, robustez y su facilidad para realizar controladores de seguimiento.

Los controladores *PID* su uso es muy generalizado en los sistemas de control. Tienen una implementación simple ya que el error es medido en función de la desviación de la variable de proceso respecto a la de referencia.

El controlador Proporcional Integral Derivativo, es una combinación de tres componentes, las cuales son las acciones del control proporcional, integral y derivativo. La expresión de esta ley de control es

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.17)$$

donde k_p , k_i , k_d son las ganancias de las acciones proporcional, integral y derivativa, y $e(t)$ el error. Este error $e(t)$ nos indica que tan próximo está la variable de proceso de la posición deseada y se le conoce como error de *offset* o desfaseamiento.

La sintonización del control que consiste en encontrar los valores de las ganancias para

que el control alcance las variables de referencia, presenta dificultades en la práctica. Una estrategia para estimarlos es utilizar algoritmos de optimización.

2.3. Control Óptimo

El problema de control óptimo consiste en encontrar una ley de control u^* que obligue al sistema (2.18) seguir una trayectoria x^* que minimice (maximice) la medida de rendimiento ó función costo (2.19).

$$\dot{x} = a(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.18)$$

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.19)$$

donde, t es el tiempo, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, u es el vector control (entrada de (2.18)), $\dot{x} = dx/dt$, $x(t_0)$ son las condiciones iniciales, t_0, t_f es el tiempo inicial y final respectivamente. Las funciones $h(x, t)$ y $g(x(t), u(t), t)$ de la función costo, se definen de acuerdo al objetivo del problema.

La solución al problema de control óptimo, encontrar u^* , se hace por métodos variacionales, que nos dan las condiciones necesarias para que u^* sea un mínimo o un máximo de la medida de desempeño (2.19).

La función H , conocida como el Hamiltoniano del sistema, se define como,

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + p^T(t)[a(x(t), u(t), t)] \quad (2.20)$$

donde $x(t)$, $u(t)$, t fueron definidos al inicio de esta sección, $p(t) \in \mathbb{R}^n$ es llamado el vector de coestados, $g(x(t), u(t), t)$ es el integrando de (2.19) y $a(x(t), u(t), t)$ está definida por (2.18).

A partir del Hamiltoniano podemos establecer las condiciones necesarias para que u^* sea un mínimo o un máximo de (2.20), estas están dadas por (2.21), también conocidas como el Principio Máximo ó Mínimo de Pontryagin.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), u(t), p(t), t) \\
\dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t) \\
0 &= \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), p(t), t)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

para todo $t \in [t_0, t_f]$, y

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial h}{\partial x}((x(t_f), t_f) - p(t_f)) \right]^T \delta x_f \\
&+ \left[H(x(t_f), u(t_f), p(t_f), t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

para no sobre cargar la notación hemos omitido el súper índice * en $x(t), u(t), p(t), \dot{x}(t), \dot{p}(t)$ en las ecuaciones (2.21) y (2.22).

El conjunto de ecuaciones (2.21) definen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden (estados y coestados) y un conjunto de m ecuaciones algebraicas. Si además, se cumple que la matriz dada por (2.23) es positiva definida nos da la condición de suficiencia para que u^* sea un mínimo local del Hamiltoniano H .

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x(t_f), u(t_f), p(t_f), t) \tag{2.23}$$

Es importante observar que (2.21) constituye un problema de dos valores a la frontera.

Capítulo 3

Trabajo Relacionado

En los últimos años la tecnología ha sido capaz de desarrollar sistemas que realicen actividades o tareas deseadas de forma autónoma, un sistema autónomo de gran aceptación en la industria e investigación son los vehículos aéreos no tripulados (VANT), en inglés UAV. Se han convertido en una plataforma con una amplia gama de aplicaciones de uso aeroespacial y civil tales como: percepción remota, rastreo de objetivos, rescate, transporte de carga, entre otras. Para satisfacer estas necesidades, se han desarrollado varios tipos de configuraciones de VANT lo cual ha dado origen a una clasificación de los tipos de VANT que actualmente existen ([Kenzo Nonami \(2010\)](#)).

- Ala fija, hace referencia a aeroplanos que requieren una pista para despegue y aterrizaje o una catapulta para su lanzamiento. Generalmente tiene mucha resistencia y pueden volar a velocidades altas.
- Ala rotatoria, mejor conocido como multirrotor o VANT de aterrizaje y despegue vertical (*Vertical Take Off and Landing, VTOL*), tiene como ventaja la capacidad de realizar altas maniobras y volar en un punto fijo. Estas habilidades son muy usadas para misiones robóticas especialmente para las aplicaciones civiles. Un multirrotor puede tener varias configuraciones, con un motor principal y uno de timón, motores coaxiales (contra rotación), motores tándem, cuadrotores, entre otros.
- Dirigibles como, globos aéreos y *airships*, siendo más ligeros que el aire, pueden volar a velocidades bajas y generalmente son de gran tamaño.
- Ala de aleteo, pequeños sistemas aéreos inspirados por las aves e insectos voladores, su principal ventaja es la flexibilidad en las alas.

Se han diseñado técnicas de control para lograr la estabilización en los sistemas autónomos antes mencionados, lo que ha mejorado logrando la autonomía y en la ejecución de aplicaciones.

Algunas aplicaciones como: entrega de paquetes, fotogrametría, escaneo de superficies, seguimiento de objetivos, han tenido gran proliferación en los últimos años debido a los

sistemas aéreos de ala rotatoria en configuración de cuadrotor que tienen la capacidad de despegue y aterrizaje vertical (VTOL). Se ha generado así un gran interés en el estudio de su diseño, dinámica, control e implementación para nuevas aplicaciones.

3.1. Cuadrotor

Actualmente, los cuadrotores se han beneficiado en su desempeño debido a la integración en estos de tecnologías como sensores, procesadores y actuadores. Es por ello que se han desarrollado una amplia línea de investigación en estrategias de control que han permitido plantear algunas soluciones al problema de estabilidad para posición y orientación del quadrotor.

Entre las estrategias más comunes empleadas para sistemas lineales se encuentran el control PID, regulador cuadrático lineal (LQR), gaussiano cuadrático lineal (LQG), control adaptativo, lógica difusa, redes neuronales, control genético (Zulu & John (2014)).

Por otra parte, debido a que la dinámica de estos vehículos es compleja y sus modelos matemáticos son no lineales, se han desarrollado controladores no lineales para el control del vuelo. Por ejemplo, se han aplicado técnicas de diseño de control como linealización con realimentación (*Feedback linearization*), *Backstepping*, control de modo deslizante (*Sliding Mode Control*) (Zulu & John (2014)).

La teoría estándar de control requiere del modelo matemático de la dinámica del cuadrotor para diseñar las estrategias de control. Entre los enfoques para la obtención del modelo matemático del cuadrotor están los enfoques de *Newton-Euler* (Bouabdallah & Siegwart (2007), Zhu et al. (2015), Alothman et al. (2015), Feng et al. (2015)) y *Lagrange-Euler* (Castillo et al. (2004), Pizetta et al. (2015), Dai et al. (2014), (Lee et al. 2012)).

Respecto al diseño del control de vuelo, Keun en (Lee et al. 2012) aborda el controlador PID, que es utilizado para el control de posición, y para el control de altitud se utiliza un control de dinámica superficial aplicando la teoría de estabilidad de Lyapunov. Este diseño obtuvo mejoras en el ángulo de cabeceo, mientras que en el ángulo de alabeo se observó un gran error en estado estable. Lo anterior tiene su origen en que el diseño del control PID está basado en modelo lineal lo que simplifica la dinámica del quadrotor.

El controlador proporcional derivativo (PD) para aeronaves VTOL, se emplea en (Walid et al. (2014)) donde sintetizó una estrategia de control basada en el PD para estabilizar las orientaciones y posiciones de la nave.

Lozano en (Castillo et al. (2004)) obtiene un modelo no lineal para un minirotor de cuatro

motores que también es visto como la interconexión de dos aeronaves PVTOL (*Planar Vertical Take – Off Landing*) y propone una estrategia de control basada en el análisis de Lyapunov, la cual consiste en un control de saturación.

Lay Dat en (Minh & Ha (2010)) demostró que con un controlador LQG y una acción integral logra una buena actuación para la estabilidad en posición; es decir, en vuelo estacionario. Un inconveniente surge cuando no se puede obtener toda la información necesaria de los parámetros a controlar ya que pueden ser variantes con el tiempo o inciertos. El inconveniente anterior puede ser manejado con un control adaptativo.

Al existir un cambio en el centro de gravedad del quadrotor en vuelo estacionario los controladores PD y *Feedback linearization* no son capaces de mantener la estabilidad ni de compensar los cambios dinámicos que realiza el quadrotor, en comparación de un control adaptativo que resuelve esta problemática (Palunko & Fierro (2011)).

Un prototipo de control adaptativo, con modo deslizante, es aplicado en (Bouadi et al. (2015)). Se considera las condiciones de navegación ideales para lograr la estabilidad en el cabeceo, verificando la observabilidad y la fase como condiciones mínimas para el seguimiento de trayectoria en altitud y orientación.

Una metodología como basada en el control óptimo y control robusto son aplicados en (Falkenberg et al. (2012)). Emplean un algoritmo de optimización basado en H_∞ que es aplicado a un quadrotor a través de simplificar su dinámica para la identificación de parámetros iterativos. Logran obtener un control de posición con un alto rendimiento para el rechazo de perturbaciones.

Con las técnicas de controles inteligentes, por ejemplo redes neuronales y control difuso, se logra obtener el control en posición y orientación. Se tienen buenos resultados en las simulaciones. Sin embargo, la mayor desventaja fue realizar la sintonía de las variables de salida a prueba y error; ver (Santos et al. (2010)).

3.2. Cuadrotor con carga

El uso de las técnicas de control para sistemas lineales y no lineales antes mencionadas, dan hincapié a la investigación sobre nuevos diseños de control para la estabilidad y orientación para quadrotores con sistemas anclados (cargas suspendidas, brazos, sistemas de localización) o perturbaciones. Se empiezan a encontrar soluciones a aplicaciones como la entrega de objetos, tomas aéreas y seguridad, entre otras.

Igor et al. en (Pizetta et al. (2015)) diseña un control basado en la linealización de realimentación. Su principal objetivo es rechazar el ruido gaussiano que produce la carga. Este ruido es considerada como una perturbación aplicada al sistema del quadrotor.

Un controlador del tipo LQR es empleado en ([Alothman et al. \(2015\)](#)) para que un cuadrotor levante y transporte una carga. El modelo de la dinámica del cuadrotor con su carga tiene ocho grados de libertad. Este controlador, en simulación, mantiene la estabilidad del cuadrotor eficazmente y su desempeño es mejor en comparación con un control del tipo PD.

Feng en ([Ying Feng \(2015\)](#)), también, con un controlador LQR logra controlar la posición y la orientación de un cuadrotor con carga suspendida. El modelo matemático de la carga suspendida es obtenido en forma diferente a como es hecho en ([Alothman et al. \(2015\)](#)). Feng obtiene el modelo de la carga por medio de la estrategia de Lagrange y bajo la suposición que la carga esta suspendida en el centro de masa del cuadrotor. Sus resultados son validados por medio de la simulación.

Un controlador llamado conformación de entrada (*Input Shaping*) es utilizado en ([Klausen et al. \(2015\)](#)) para generar trayectorias que minimicen las oscilaciones residuales de la carga suspendida por el cuadrotor. La carga es modelada como un péndulo sostenido por un cable rígido conectado en el centro de gravedad del cuadrotor.

Otra forma de plantear esta problemática, es mediante un sistema de plano diferencial híbrido, diseñado por Sreenath en ([Sreenath et al. \(2013\)](#)). El modelo del cuadrotor es obtenido con ocho DoF (con carga suspendida) y cuatro grados bajo actuados. Utilizando el enfoque de *Lagrange – d'Albert* y parametrizando todas las salidas como una función del tiempo. Minimizan la sexta derivada de la posición de la carga asegurando el mínimo movimiento instantáneo del cuadrotor.

Una idea distinta plantea Jan en ([Trachte et al. \(2015\)](#)) en donde establece dos tipos de estrategias de control. Un Control de Modelo Predictivo No Lineal (NMPC) que es comparado con un control Regulador Cuadrático Lineal (LQR), el objetivo es lograr la estabilidad de la carga en desplazamiento bajo perturbaciones producidas por el viento. Para asegurar la robustez de todas las condiciones de operación, se utiliza un término de penalización usando la estabilidad de Lyapunov. En esta investigación se concluye que el NMPC es efectivo para el seguimiento de referencias de trayectoria para el cuadrotor y la carga, mientras que el LQR muestra una pobre actuación de seguimiento.

Con el uso de controladores no lineales se obtienen resultados mas cercanos a los de un sistema físico. Una de las desventajas que tienen es que debido a la no linealidad y la inestabilidad del sistema es que la convergencia de los métodos numéricos empleados para diseñar el control sea lenta y corren el riesgo de diverger; ver ([Raffo & de Almeida \(2016\)](#), [Geisert & Mansard \(2016\)](#)).

Algunos de los algoritmos de control mencionados, tienen la característica de ser controles híbridos, ya que tienen la mejor combinación de robustez, adaptabilidad, optimalidad, simplicidad, capacidad de seguimiento, respuesta rápida y rechazo de perturbaciones entre otros factores. Sin embargo, tales algoritmos no garantizan siempre la correcta actuación para el sistema, es por ello que se debe tomar en cuenta en que aplicación se utilizara para

poder realizar un caracterización adecuada del sistema.

En general, podemos concluir que existen pocos enfoques que diseñen los algoritmos de control con la teoría de control óptimo para controlar a un cuadrotor con su carga. Entre estos podemos mencionar a ([Alothman et al. \(2015\)](#), [Ying Feng \(2015\)](#)). Sin embargo, emplean estrategias LQR que utilizan modelos lineales de la dinámica del cuadrotor con su carga.

En esta investigación proponemos el diseño de un control óptimo MIMO diseñado a partir de un modelo que está parcialmente linealizado. El objetivo del control es mantener la estabilidad del cuadrotor en su orientación y posición cuando transporte una carga suspendida a él.

Capítulo 4

Cuadrotror

4.1. Modelo matemático del Cuadrotror con carga suspendida

En este capítulo presentamos el desarrollo del modelo matemático de un cuadrotror que tiene acoplada una carga suspendida por medio de un cable rígido. Tiene asociada una dinámica sobreactuada que consta de cuatro fuerzas de entrada con seis grados de libertad de salida;(ver figura 4.1 (tomada como referencia en [Arturo et al. \(2017\)](#)))

El modelo es obtenido aplicando la teoría expuesta en el capítulo 2: Dinámica Rotación de un Cuerpo Rígido, Ángulos de Euler y la estrategia de Lagrange.

Las suposiciones que hacemos para modelar el cuadrotror con su carga son las siguientes:

- El cuerpo es rígido y simétrico.
- La fricción del viento y el efecto tierra son despreciables.
- El centro de masa del cuadrotror es el mismo que el marco de referencia del cuerpo.
- Una masa puntal es suspendida por un cable sin masa fijado en el centro del cuadrotror.

En la figura 4.1 se puede observar el cuadrotror con su respectiva carga el cual está representado con dos marcos de referencia, el marco inercial denotado por E y el marco del cuerpo fijo denotado por B .

A continuación se muestran los componentes que conforman los momentos que determinan la rotación del cuadrotror y las fuerzas para la traslación, donde (x, y, z) son las tres posiciones, (ϕ, θ, ψ) son los ángulos de Euler que representan el alabeo, cabeceo, guiñada, respectivamente y el punto sobre la variables se interpreta como $\dot{x} = dx/dt$.

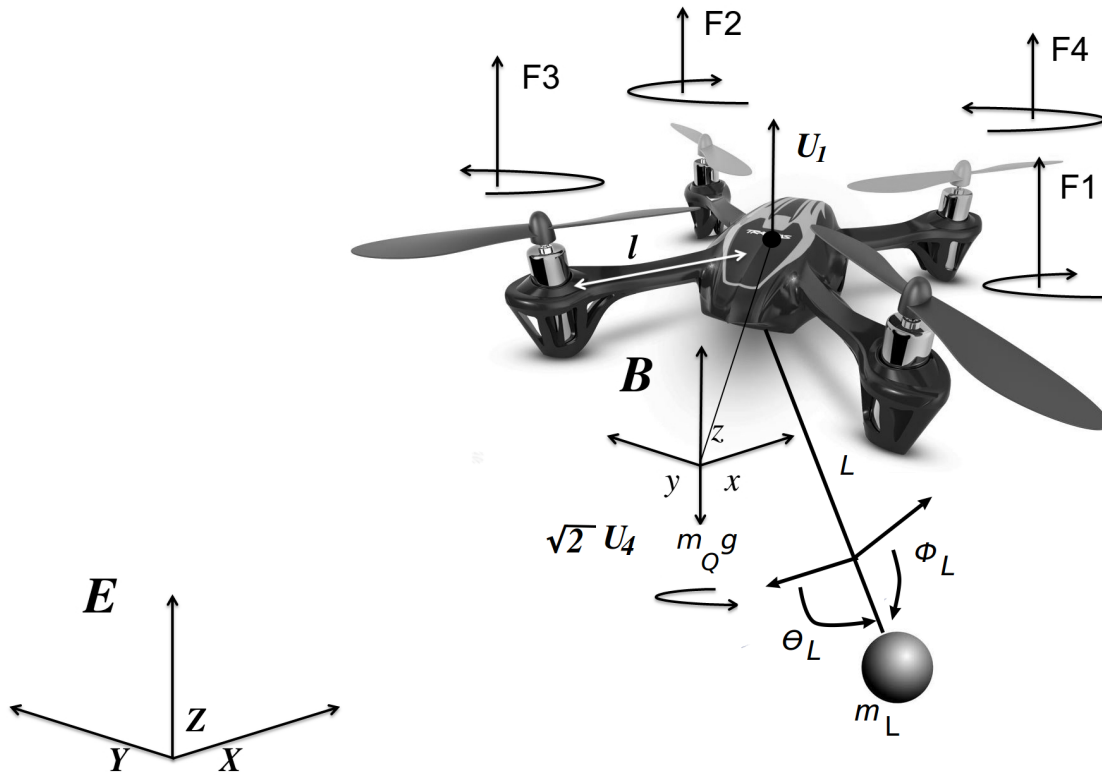


Figura 4.1: Sistemas de referencias para modelar las dinámicas del cuadrotor con carga suspendida.

- Momento de alabeo (*roll*)
Efecto giroscópico: $\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz})$
- Momento de cabeceo (*pitch*)
Efecto giroscópico: $\dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx})$
- Momento de guiñada (*yaw*)
Efecto giroscópico: $\dot{\phi}\dot{\theta}(I_{xx} - I_{yy})$
- Fuerza a lo largo del eje X
Acción de los actuadores: $(\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi)U_1$
- Fuerza a lo largo del eje Y
Acción de los actuadores: $(-\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi)U_1$
- Fuerza a lo largo del eje Z

Acción de los actuadores: $(\cos \psi \cos \phi)U_1$

Peso: mg

Utilizando los dos marcos de referencia E, B y las suposiciones anteriores se formula la dinámica del cuadrotor para el vuelo traslacional-rotacional.

$$\begin{aligned}
 m_Q \ddot{X} &= (\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi)U_1 \\
 m_Q \ddot{Y} &= (-\cos \phi \sin \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \phi)U_1 \\
 m_Q \ddot{Z} &= (\cos \theta \cos \phi)U_1 - m_Q g \\
 I_{xx} \ddot{\phi} &= (I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi} + lU_2 \\
 I_{yy} \ddot{\theta} &= (I_{xx} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\psi} + lU_3 \\
 I_{zz} \ddot{\psi} &= (I_{xx} - I_{yy})\dot{\phi}\dot{\theta} + U_4
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde (x, y, z) son las posiciones, (ϕ, θ, ψ) son los ángulos de Euler que representan el alabeo, cabeceo, guiñada, respectivamente. La constante g es la aceleración de la gravedad; l es la distancia del centro del cuadrotor al motor; m_Q , es la masa de cuadrotor; I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} son momentos de inercia pertenecientes a la matriz de inercia aplicada al centro de masa del cuadrotor, y los puntos sobre las variables significan $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$.

Las entradas al sistema cuadrotor U_i con $i = 1, 2, \dots, 4$ (controles) se proponen de la siguiente manera de acuerdo a la figura 4.1; ver (García et al. (2005))

$$\begin{aligned}
 U_1 &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\
 U_2 &= F_3 - F_1 \\
 U_3 &= F_4 - F_2 \\
 U_4 &= F_1 + F_3 - F_2 - F_4
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde se considera F_i con $i = 1, 2, \dots, 4$ como las fuerzas generadas por los actuadores, cada fuerza es igual al cuadro de la velocidad angular Ω_i del motor. Cada entrada de control definida por U_i se describe como: U_1 es la fuerza total producido por cada motor, provocando el despegue del vehículo, U_2 es la diferencia de fuerzas ejercidas por el motor 1 y 3 para producir el cambio de momento respecto al ángulo de alabeo (*roll*), U_3 produce el cambio de momento respecto al ángulo de cabeceo (*pitch*), provocadas por lo motores 2 y 4, por último U_4 es la diferencia de fuerzas entre los motores 1, 3 y 2, 4, produciendo el cambio en el ángulo de guiñada (*yaw*), en otra palabras, controla el frente del cuadrotor. Las descripciones anteriores están dadas en (Morbidi et al. (2016)).

El modelo del cuadrotor con su carga suspendida es concebido como un solo sistema acoplado.

Con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento del sistema general, la carga útil suspendida se considera como una masa puntual que se comporta como un péndulo

esférico desde un único punto.

Las ecuaciones que describen la dinámica de la carga se obtienen considerando el movimiento con referencia a los ángulos de θ_L en el plano x-z y ϕ_L en el plano y-z, como se muestra en la figura 4.2 (figura tomada en Ying Feng (2015)).

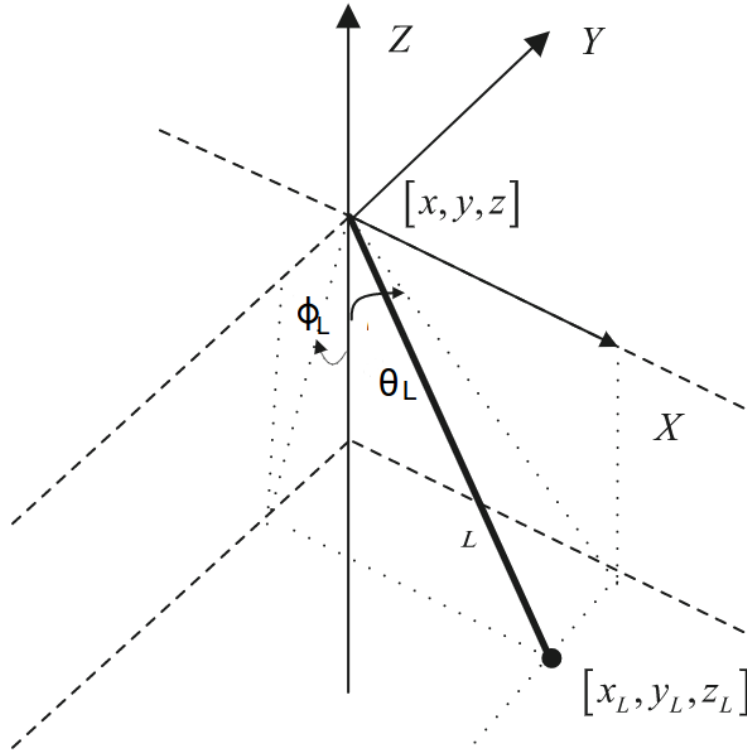


Figura 4.2: Sistemas de referencias para modelar las dinámicas del cuadrotor con carga suspendida.

Para lograr que la carga suspendida sea independiente del cambio de postura del cuadrotor, la posición de la carga útil se obtendrá usando las coordenadas respecto al marco terrestre. La posición de la carga respecto al centro de masa del cuadrotor es

$$r = R [0 \ 0 \ L]^T \quad (4.3)$$

donde R es la matriz de rotación respecto en dirección a las manecillas del reloj. Su expresión está dada por

$$R = Rot(\phi_L)Rot(\theta_L) = \begin{bmatrix} \cos \theta_L & 0 & \text{sen } \theta_L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta_L & 0 & \text{sen } \theta_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_L & -\text{sen } \phi_L \\ 0 & \cos \phi_L & \cos \phi_L \end{bmatrix}$$

Desarrollando la expresión anterior obtenemos

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta_L & \text{sen } \phi_L \text{ sen } \theta_L & \cos \phi_L \text{ sen } \theta_L \\ 0 & \cos \phi_L & -\text{sen } \theta_L \\ -\text{sen } \theta_L & \text{sen } \phi_L \cos \theta_L & \cos \phi_L \cos \theta_L \end{bmatrix}$$

La posición de la carga respecto al marco de referencia terrestre se expresa como

$$r_L = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \cos \phi_L \text{ sen } \theta_L \\ -L \text{ sen } \phi_L \\ L \cos \phi_L \cos \theta_L \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Por lo tanto la velocidad \dot{r}_L está dado por

$$\dot{r}_L = \begin{bmatrix} \dot{x} - L(\dot{\theta}_L \cos \phi_L \cos \theta_L - \dot{\phi}_L \text{ sen } \phi_L \text{ sen } \theta_L) \\ \dot{y} - L\dot{\phi}_L \cos \phi_L \\ \dot{z} - L(\dot{\phi}_L \text{ sen } \phi_L \cos \theta_L + \dot{\theta}_L \cos \phi_L \text{ sen } \theta_L) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

El modelo de la dinámica de la carga suspendida es derivado por medio de las ecuaciones de Lagrange definidas por las ecuaciones (2.15) y (2.16). En consecuencia, obtenemos la energía cinética y potencial del sistema.

Las energía cinética del sistema está formada por la energía cinética traslacional y rotacional, las cuales están dadas por:

$$T_T = \frac{1}{2} m_L \dot{r}_L^T \dot{r}_L \quad (4.6)$$

$$T_R = \frac{1}{2} m_L L^2 (\dot{\phi}_L^2 + \dot{\theta}_L^2) \quad (4.7)$$

respectivamente.

La energía potencial, que depende de la posición del cuerpo respecto al centro del marco de referencia terrestre está dada por:

$$V = -m_L L (\cos \phi_L + \cos \theta_L) \quad (4.8)$$

De acuerdo a (2.15) el Lagrangeano del sistema es

$$\mathcal{L} = (T_T + T_R) - V \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.6), (4.7) y (4.8) en (4.9) obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_L[\dot{r}_L^T \dot{r}_L + L^2(\dot{\phi}_L^2 + \dot{\theta}_L^2) + 2L(\cos \phi_L + \cos \theta_L)] \quad (4.10)$$

Las ecuaciones de movimiento de la carga suspendida, como se muestra en la figura 4.3), son derivadas por medio de las ecuaciones de Lagrange definidas en (2.16), entonces

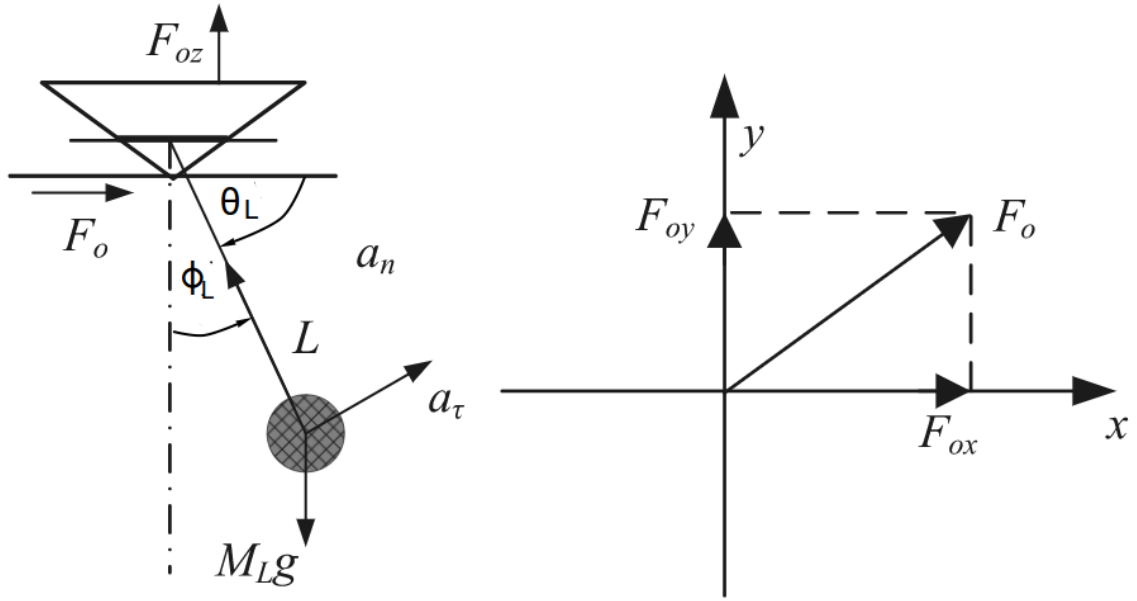


Figura 4.3: Sistemas de referencias para modelar las dinámicas del cuadrotor con carga suspendida. Figura tomada de Ying Feng (2015).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_L} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_L} = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_L} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_L} = 0 \quad (4.12)$$

Desarrollando (4.11) y (4.12) obtenemos

$$m_L L (L \sin \phi_L \cos \phi_L \dot{\theta}_L^2 - \cos \phi_L \ddot{y} - \sin \phi_L (\sin \theta_L \ddot{x} + \cos \theta_L (\ddot{z} - 1)) + 2L \ddot{\phi}_L) = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2}m_L L(2 \cos \phi_L (\cos \theta_L \ddot{x} - 2L \sin \phi_L \dot{\phi}_L \dot{\theta}_L - \sin \theta_L (\ddot{z} - 1) + L(3 + \cos 2\phi_L) \ddot{\theta}_L) = 0 \quad (4.14)$$

A partir de (4.13) y (4.14) obtenemos las expresiones para $\ddot{\phi}_L$ y $\ddot{\theta}_L$

$$\ddot{\phi}_L = \frac{1}{2L} (\sin \phi_L \sin \theta_L \ddot{x} + \cos \phi_L \ddot{y} + \sin \phi_L \cos \theta_L \ddot{z} - \cos \theta_L \sin \phi_L - L \sin \phi_L \cos \phi_L \dot{\theta}_L^2) \quad (4.15)$$

$$\ddot{\theta}_L = \frac{2 \cos \phi_L}{L(3 + \cos 2\phi_L)} (-\cos \theta_L \ddot{x} + \sin \theta_L \ddot{z} + 2L \sin \phi_L \dot{\phi}_L \dot{\theta}_L - \sin \theta_L) \quad (4.16)$$

De esta forma las fuerzas causadas por la carga en los respectivos ejes x, y, z son obtenidas como:

$$\begin{aligned} F_x &= m_L L (\ddot{\phi}_L \cos \phi_L \cos \theta_L - \dot{\phi}_L \cos \phi_L \sin \theta_L) \\ F_y &= m_L L (\ddot{\theta}_L \cos \phi_L \cos \theta_L - \dot{\theta}_L \cos \phi_L \sin \theta_L) \\ F_z &= m_L L (\ddot{\phi}_L \cos \phi_L \cos \theta_L + \dot{\phi}_L \cos \phi_L \sin \theta_L + \ddot{\theta}_L \cos \phi_L \cos \theta_L + \dot{\theta}_L \cos \phi_L \sin \theta_L - \frac{g}{L}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Añadiendo las fuerzas que provoca la carga y combinando las ecuaciones traslacionales con las ecuaciones rotacionales, se obtiene el nuevo modelo dinámico del cuadrotor con carga suspendida, representado en la ecuación 4.18

$$\begin{aligned}
(m_Q + m_L)\ddot{X} &= (\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi)U_1 - F_{\phi L} \\
(m_Q + m_L)\ddot{Y} &= (-\cos \phi \sin \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \phi)U_1 - F_{\theta L} \\
(m_Q + m_L)\ddot{Z} &= (\cos \theta \cos \phi)U_1 - m_Q g + F_{zL} \\
I_{xx}\ddot{\phi} &= (I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi} + lU_2 \\
I_{yy}\ddot{\theta} &= (I_{xx} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\psi} + lU_3 \\
I_{zz}\ddot{\psi} &= (I_{xx} - I_{yy})\dot{\phi}\dot{\theta} + U_4 \\
\ddot{\phi}_L &= \frac{1}{2L}(\sin \phi_L \sin \theta_L \ddot{x} + \cos \phi_L \ddot{y} \\
&\quad + \sin \phi_L \cos \theta_L (\ddot{z} - 1) - L \sin \phi_L \cos \phi_L \dot{\theta}_L^2) \\
\ddot{\theta}_L &= \frac{2 \cos \phi_L}{L(3 + \cos 2\phi_L)}(-\cos \theta_L \ddot{x} \\
&\quad + \sin \theta_L \ddot{z} + 2L \sin \phi_L \dot{\phi}_L \dot{\theta}_L - \sin \theta_L)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2. Diseño de Control

A continuación desarrollaremos el controlador óptimo. A partir de la figura 4.1, se realiza un análisis para visualizar de forma más práctica las fuerzas y momentos que son aplicados al sistema del cuadrotor con carga, añadiendo eventos físicos a la dinámica. Estas ecuaciones se pueden representar de la forma espacio de estados que son utilizadas para diseñar el controlador óptimo.

Para desarrollar esta técnica de control, no se tomara en cuenta, los momentos de arrastre y balanceo, de igual forma se hará lineal el sistema de la carga suspendida alrededor de un punto de equilibrio. Este punto de equilibrio es referente al punto de vuelo estacionario para lograr que el cuadrotor con carga suspendida realice el despegue y aterrizaje.

En algunos caso, cuando el cuadrotor alcanza altas velocidades (aproximadamente $10ms^{-1}$) puede causar altas oscilaciones en la carga, como en [Ying Feng \(2015\)](#), donde se asume un ángulo pequeño para ϕ_L y θ_L , llegando a la siguiente suposición $\sin \phi_L \rightarrow \phi_L$ y $\sin \theta_L \rightarrow \theta_L$, logrando así una forma simplificada y restringida de los ángulos de la carga, tomando esta referencia, se realizan las siguientes suposiciones; $\sin(\phi_L) \simeq \phi_L$, $\sin(\theta_L) \simeq \theta_L$, $\cos(\phi_L) \simeq 1$, $\cos(\theta_L) \simeq 1$, $\cos(2\phi_L) \simeq 1$, $\dot{\phi}_L^2 \simeq 0$, $\dot{\theta}_L^2 \simeq 0$, $\phi_L \theta_L \simeq 0$, $\phi_L \dot{\phi}_L \simeq 0$,

Estas suposiciones sirven para lograr que el sistema de ecuaciones que modela las fuerzas de la carga se simplifique, dando lugar al siguiente sistema:

$$\ddot{\phi}_L = \frac{1}{2L}(\ddot{y} + \phi_L(\ddot{z} - 1)) \tag{4.19}$$

$$\ddot{\theta}_L = \frac{1}{2L}(\theta_L(\ddot{z} - 1) - \ddot{x}) \quad (4.20)$$

sustituyendo en 4.17, las fuerzas quedan como:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2}m_L(\ddot{y} + \phi_L(\ddot{z} - 1)) \\ F_y &= \frac{1}{2}m_L(\theta_L(\ddot{z} - 1) - \ddot{x}) \\ F_z &= -gm_L \end{aligned} \quad (4.21)$$

Analizando el modelo traslacional del cuadrotor 4.24 obtenido en Castillo et al. (2004)

$$\begin{aligned} m_Q\ddot{X} &= -U \sin \theta \\ m_Q\ddot{Y} &= U \cos \theta \sin \phi \\ m_Q\ddot{Z} &= U \cos \theta \sin \phi - m_Qg \end{aligned} \quad (4.22)$$

se considera la entrada de control como 4.23 para el control de la altura, y de los movimientos longitudinales y laterales.

$$U = -(r_1 + mg)\frac{1}{\cos \phi \cos \theta}; \cos \phi \cos \theta \neq 0 \quad (4.23)$$

donde

$$r_1 = -a_{z1}\dot{z} - a_{z2}(z - z_{ref})$$

a_{z1} , a_{z2} son constantes positivas, z_{ref} es el punto de referencia.

Sustituyendo la entrada de control en las ecuaciones de movimiento longitudinales y laterales.

$$\begin{aligned} m_Q\ddot{X} &= -(r_1 + m_Qg)\frac{1}{\cos \phi \cos \theta} \sin \theta \\ m_Q\ddot{Y} &= (r_1 + m_Qg)\frac{1}{\cos \phi \cos \theta} \cos \theta \sin \phi \end{aligned}$$

Nos queda que

$$\begin{aligned} m_Q\ddot{X} &= -(r_1 + m_Qg)\frac{\tan \theta}{\cos \phi} \\ m_Q\ddot{Y} &= (r_1 + m_Qg) \tan \phi \end{aligned} \quad (4.24)$$

se considera que $r_1 \rightarrow 0$.

Para un tiempo finito el modulo de los ángulos de cabeceo y alabeo se limitan a $|\phi| < 1$, $|\theta| < 1$, por lo tanto la diferencia que existe entre $\tan \phi - \phi$ tiende a ϕ , y $\tan \theta - \theta$ tiende a θ , asegurando los límites de los ángulos, así el movimiento lateral se considera como;

$$\ddot{Y} = g\phi$$

En la ecuación \ddot{x} , el ángulo $\cos \phi \rightarrow 1$, así el movimiento longitudinal se considera de la siguiente forma:

$$\ddot{X} = -g\theta$$

De esta forma el sistema que modela la dinámica del vuelo de cuadrotor se simplifica, introduciendo las entradas de control definidas en la ecuación 4.2, y considerando el sistema que modela la carga útil, el modelo del cuadrotor con carga suspendida puede ser expresado como;

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -g\theta - \frac{F_x}{m_Q + m_L} \\ \ddot{Y} &= g\phi - \frac{F_y}{m_Q + m_L} \\ \ddot{Z} &= \frac{(\cos \theta \cos \phi)U_1 - m_Q g + F_z}{m_Q + m_L} \\ \ddot{\phi} &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi} + lU_2}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} &= \frac{(I_{xx} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\psi} + lU_3}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy})\dot{\phi}\dot{\theta} + U_4}{I_{zz}} \\ \ddot{\phi}_L &= \frac{1}{2L}(\ddot{y} + \phi_L(\ddot{z} - 1)) \\ \ddot{\theta}_L &= \frac{1}{2L}(\theta_L(\ddot{z} - 1) - \ddot{x}) \end{aligned} \tag{4.25}$$

las constantes del sistema son listados en la tabla 4.1.

Cuadro 4.1: Parámetros

Parámetro	Valor	Reseña
m_Q	$1.52kg$	Peso del Cuadrorotor
g	$9.81ms^{-2}$	Gravedad
I_{xx}	$0.03kgs^{-2}$	Momento de inercia del cuadrorotor en x
I_{yy}	$0.03kgs^{-2}$	Momento de inercia del cuadrorotor en y
I_{zz}	$0.03kgs^{-2}$	Momento de inercia del cuadrorotor en z
l	$0.24m$	Distancia del rotor al centro del cuadrorotor

siendo las variables de la carga suspendida, como:

- m_L Peso de la Carga
- L Longitud del Cable

Para representar las ecuaciones 4.25 en espacio de estados es necesario definir los estados, las salidas, las entradas de control, como:

$$X = [x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad z \quad \dot{z} \quad \phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad \phi_L \quad \dot{\phi}_L \quad \theta_L \quad \dot{\theta}_L]^T$$

$$Y = [x \quad y \quad z \quad \psi]$$

$$U = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4]^T$$

Para el uso de la teoría de control óptimo es necesario definir la función costo que asocia un valor a cada función de control. Para el caso del vuelo estacionario del cuadrorotor, se define la siguiente el integrando como:

$$J_{int} = \int_{t_0}^{t_f} [(x_{sp} - x(t))^2 + (y_{sp} - y(t))^2 + (z_{sp} - z(t))^2 + (\phi_{sp} - \phi(t))^2 + (\theta_{sp} - \theta(t))^2 + (\psi_{sp} - \psi(t))^2 + \phi_L(t)^2 + \theta_L(t)^2 + R \sum_{i=1}^4 U_i^2] dt \quad (4.26)$$

donde x_{sp} , y_{sp} , z_{sp} , ϕ_{sp} , θ_{sp} , ψ_{sp} son los puntos de referencia a los cuales se desea que alcance el sistema en un determinado tiempo. Se emplea el error cuadrático y se considera la adición de un factor de escalamiento R para controlar la magnitud de las entradas de control U_1 , U_2 , U_3 , U_4 .

En la practica los movimientos en el plano $x y$, son provocados por el alabeo y cabeceo del cuadrorotor, es por ello que la salida del controlador es la imagen de los ángulos deseados

de ϕ , θ , que son controlados mediante el controlador que controla la postura del cuadrotor. Definiendo así a ϕ_{sp} , θ_{sp} como:

$$\phi_{sp} = \cos \psi U_y - \sin \psi U_x \quad (4.27)$$

$$\theta_{sp} = \sin \psi U_y + \cos \psi U_x \quad (4.28)$$

de acuerdo a [Walid et al. \(2014\)](#), U_x y U_y se definen de la siguiente manera:

$$U_x = x(t) - x_{sp} \quad (4.29)$$

$$U_y = y(t) - y_{sp} \quad (4.30)$$

De esta forma se acopla el sistema de translación (x, y) con el sistema de rotación (ϕ, θ) .

Para obtener la ley de control óptimo es necesario construir el Hamiltoniano de la forma (2.20) y satisfacer las condiciones de valores a la frontera, mostradas en (2.21), en las cuales definen las restricciones del sistema.

Los co-estados obtenidos se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= -2(x(t) - x_{sp}) \\
\dot{p}_2 &= -p_1 \\
\dot{p}_3 &= -2(y(t) - y_{sp}) \\
\dot{p}_4 &= -p_3 \\
\dot{p}_5 &= -2(z(t) - z_{sp}) \\
\dot{p}_6 &= -p_5 \\
\dot{p}_7 &= -gp_4 - 2(\phi(t) - \phi_{sp}) - \frac{p_6(\cos \theta \sin \phi U_1)}{m_Q + m_L} \\
\dot{p}_8 &= -p_7 - \frac{(I_{xx} - I_{yy})p_{12}\dot{\theta}}{I_{zz}} - \frac{(I_{xx} - I_{zz})p_{10}\dot{\psi}}{I_{yy}} \\
\dot{p}_9 &= gp_2 - 2(\theta(t) - \theta_{sp}) - \frac{p_6(\sin \theta \cos \phi U_1)}{m_Q + m_L} \\
\dot{p}_{10} &= -p_9 - \frac{(I_{yy} - I_{zz})p_8\dot{\psi}}{I_{xx}} - \frac{(I_{xx} - I_{yy})p_{12}\dot{\phi}}{I_{zz}} \\
\dot{p}_{11} &= -2(\psi(t) - \psi_{sp}) \\
\dot{p}_{10} &= -p_{11} - \frac{(I_{yy} - I_{zz})p_8\dot{\theta}}{I_{xx}} - \frac{(I_{xx} - I_{zz})p_{10}\dot{\phi}}{I_{yy}} \\
\dot{p}_{13} &= -2\phi_L(t) - \frac{p_{14}(\ddot{z} - 1)}{2L} - \frac{0,5m_L p_2(\ddot{z} - 1)}{m_Q + m_L} \\
\dot{p}_{14} &= -p_{13} \\
\dot{p}_{15} &= -2\theta_L(t) - \frac{p_{16}(\ddot{z} - 1)}{2L} - 0,5m_L p_2(\ddot{z} - 1) \\
\dot{p}_{16} &= -p_{15}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Mediante a los co-estados antes establecidos y a la ecuación (2.21) se obtienen las leyes de control para el controlador realimentado de estados, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
U_1 &= -\frac{\cos \phi \cos \theta p_6}{2R(m_Q + m_L)} \\
U_2 &= -\frac{lp_8}{2RI_{xx}} \\
U_3 &= -\frac{lp_{10}}{2RI_{yy}} \\
U_4 &= -\frac{p_{12}}{2RI_{zz}}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

donde R es el factor de escalamiento, con valor de 10^{-4} .

Una vez encontrado la ley de control óptimo se procede a la solución del sistema descrito por los estados y co-estados.

Capítulo 5

Pruebas y resultados

En este capítulo se describen los experimentos para validar el modelo del cuadrotor desarrollado y sus controles óptimos encontrados (ver capítulo 4).

Cuando a un cuadrotor se le acopla una carga unida a él por medio de un cable rígido se altera la estabilidad del cuadrotor y podría perderse el control de su actitud. Lo anterior puede originar que el cuadrotor se desplome o no logre desplazarse en forma correcta hacia sus objetivos definidos.

Los experimentos realizados en la sección 5.1, se diseñaron para validar que el desplazamiento del cuadrotor con su carga suspendida sea la correcta bajo la acción de los controles óptimos U_i $i = 1, 2, \dots, 4$ (ver sección 4.2) que fueron obtenidos por medio del Principio Mínimo de Pontryagin (PMP).

La posición y orientación del cuadrotor es perturbada por la carga la carga suspendida. Estas perturbaciones son controladas por medio de los controles óptimos U_i $i = 1, 2, \dots, 4$ que actúan en la altura eje z U_1 , y las posiciones (ϕ, θ, ψ) por U_2, U_3 y U_4 respectivamente.

El entorno de desarrollo usado para obtener las expresiones de los controles óptimos fue Mathematica[©] y Matlab[©] se empleó para encontrar la solución numérica del sistema algebraico diferencial utilizando el algoritmo *Boundary Value Problem BVP* visto en (Shampine; 1973), mediante la función *bvp4c* y así realizar la simulaciones que permitieron validar el comportamiento del cuadrotor.

Los parámetros del cuadrotor simulado están dados en la tabla 4.1 que se encuentra en el capítulo 4.

En todos los experimentos realizados se utilizó el mismo intervalo de tiempo de simulación $[t_0, t_f] = [0, 50]$ segundos, ver tabla 5.1 y las mismas condiciones de inicio para el vector de estados $(x(t), y(t), z(t), \phi(t), \theta(t), \psi(t), \phi_L(t), \theta_L(t))^T$ donde $x(t)$ es el movimiento longitudinal, $y(t)$ es el movimiento lateral, z describe el movimiento vertical, los ángulos, ϕ es el alabeo, θ es el cabeceo y ψ es la guiñada, los ángulos de ϕ_L y θ_L representan el movimiento de la carga.

Los experimentos se realizan con los puntos de referencia mostrados en 5.2, con dos tipos de peso para la carga y dos tipos de longitud del cable de la carga (ver tabla 5.3).

Cuadro 5.1: Condiciones Iniciales

Variable	Condición Inicial(m, rad)
$x(t_0)$	0.0
$y(t_0)$	0.0
$z(t_0)$	1.0
$\phi(t_0)$	0.0
$\theta(t_0)$	0.0
$\psi(t_0)$	$\pi / 4$
$\phi_L(t_0)$	0.0
$\theta_L(t_0)$	0.0

Cuadro 5.2: Conjunto de Puntos de Referencia

Variable	Puntos de Referencia 1 (PR1)	Puntos de Referencia 2 (PR2)
$x(t)$	1,75	$1,75 \cos(t)$
$y(t)$	1,2	$1,2 \sin(t)$
$z(t)$	2.0	2.0
$\phi(t)$	0.0	0.0
$\theta(t)$	0.0	0.0
$\psi(t)$	0.0	0.0
$\phi_L(t)$	0.0	0.0
$\theta_L(t)$	0.0	0.0

Cuadro 5.3: Parámetros

Peso de la Carga	Longitud del cable
$m_{L1} = 68g$	$L_{L1} = 0.10 m$
$m_{L2} = 108g$	$L_{L2} = 0.70 m$

5.1. Pruebas de Orientación y Posición del Cuadrotror

Para que el cuadrotror con carga llegue a la altura deseada basta con controlar el movimiento vertical mediante la entrada de control U_1 , los movimientos laterales y longitudinales se controlan por los ángulos de cabeceo θ y alabeo ϕ por medio de las entradas de control U_2, U_3 . La orientación del vehículo, es dada por el ángulo de guiñada ψ controlado por U_4 .

Las pruebas consisten en llevar al cuadrotror a los puntos de referencia (PR1) mostrados en la tabla 5.2, controlando la orientación y posición del cuadrotror con diferentes parámetros para la carga suspendida y la longitud del cable que lo suspende.

A continuación se presentan los resultados de las pruebas que se hicieron con el modelo del cuadrotror, para analizar el movimiento de orientación y posición del cuadrotror utilizando los parámetros de la tabla 5.1, 4.1, 5.3.

La tabla 5.4 señala que parámetros contiene cada prueba

Cuadro 5.4: Parámetros de las pruebas

	m_{L1}	L_{L1}	m_{L2}	L_{L2}
Primera Prueba	*	*		
Segunda Prueba	*			*
Tercera Prueba		*	*	
Cuarta Prueba			*	*

5.1.1. Prueba 1: primer conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en partir de un punto A y llegar al punto B transportando la carga suspendida con un peso de $68gr$ y una longitud de $10cm$, el cuadrotror debe mantener su estabilidad entre un rango aceptable. Tal prueba empieza con el cuadrotror a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo.

Resultados Obtenidos

El movimiento vertical del cuadrotor con carga, alcanza el punto deseado en un tiempo de $0,6s$ con un sobre tiro del 2% respecto a la referencia en el plano z , el movimiento en guiñada, es para darle un frente al cuadrotor respecto al eje z , alcanzando el punto de referencia en $0,1s$ con un sobre tiro de 2% , es decir, que el controlador U_1 y U_4 son admisibles. Como el estado estacionario es muy amplio, se ofrece un acercamiento para mostrar con detalle la actuación de los estados z y ψ causados por el controlador, en la figura 5.1.

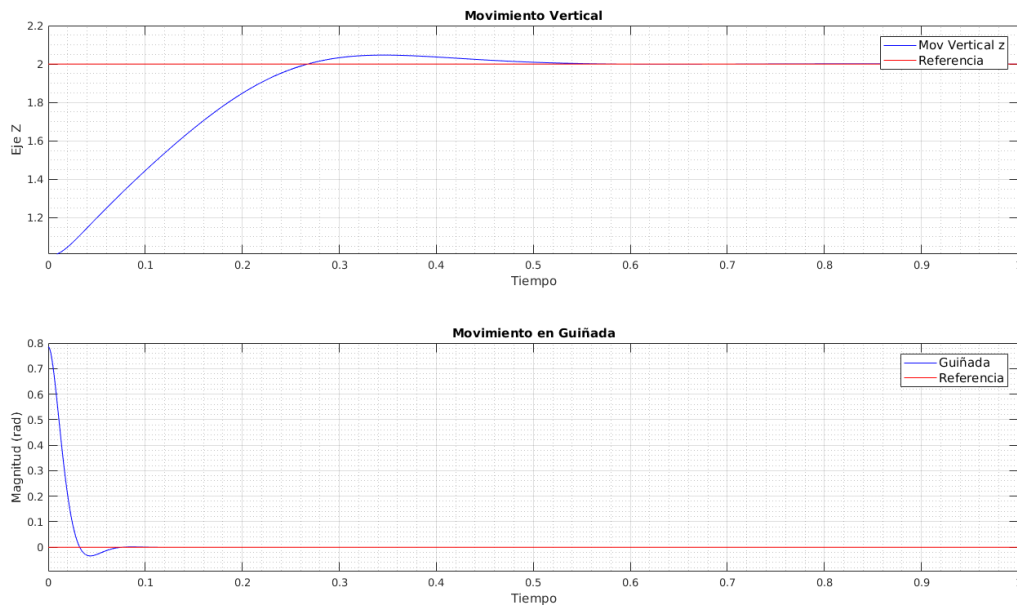


Figura 5.1: Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

En el vuelo lateral, el estado x alcanza el estado estacionario en $3,0s$ con un sobretiro del $14,28\%$ entre el intervalo de tiempo de $0,8 - 2s$, el movimiento del ángulo de cabeceo (θ) actúa en $2,3s$ para llegar al estado estacionario, en la figura 5.2 se aprecia el comportamiento de los estados x y θ .

En el movimiento longitudinal, el estado y alcanza en un tiempo de asentamiento de $1,8s$,

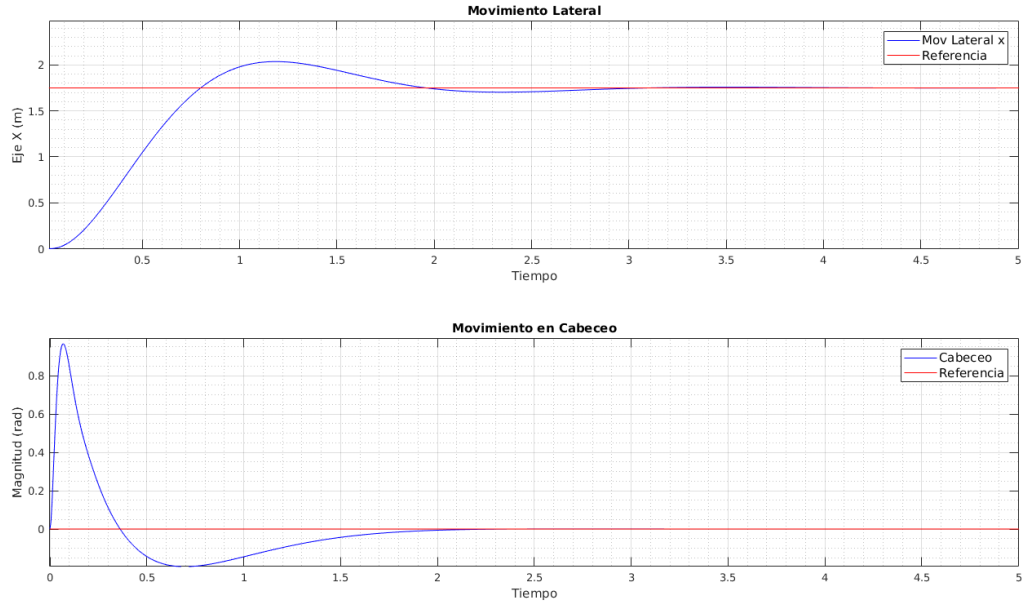


Figura 5.2: Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

y el ángulo de alabeo en un tiempo de $3s$, con sobretiros de 150% entre $0 - 0,3s$ y de 50% entre $0,3 - 1,6s$ como se muestra en la figura 5.3.

En la figura 5.4, se observa la trayectoria realizada por el cuadrotor y la carga suspendida, donde se muestra el comportamiento del vuelo estacionario y el vuelo dirigido, los resultados obtenidos se muestra en la tabla 5.5.

Cuadro 5.5: Resultados

Variable	Puntos de referencia (m, rad)	Puntos alcanzados(m, rad)	Error Relativo(%)
$x(t)$	1.75	1.72	1.71 %
$y(t)$	1.20	1.20	2.5 %
$z(t)$	2.0	1.95	0.41 %
$\phi(t)$	0.0	0.07	0.7 %
$\theta(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\psi(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\phi_L(t)$	0.0	-0.01	0.1 %
$\theta_L(t)$	0.0	-0.02	0.02 %

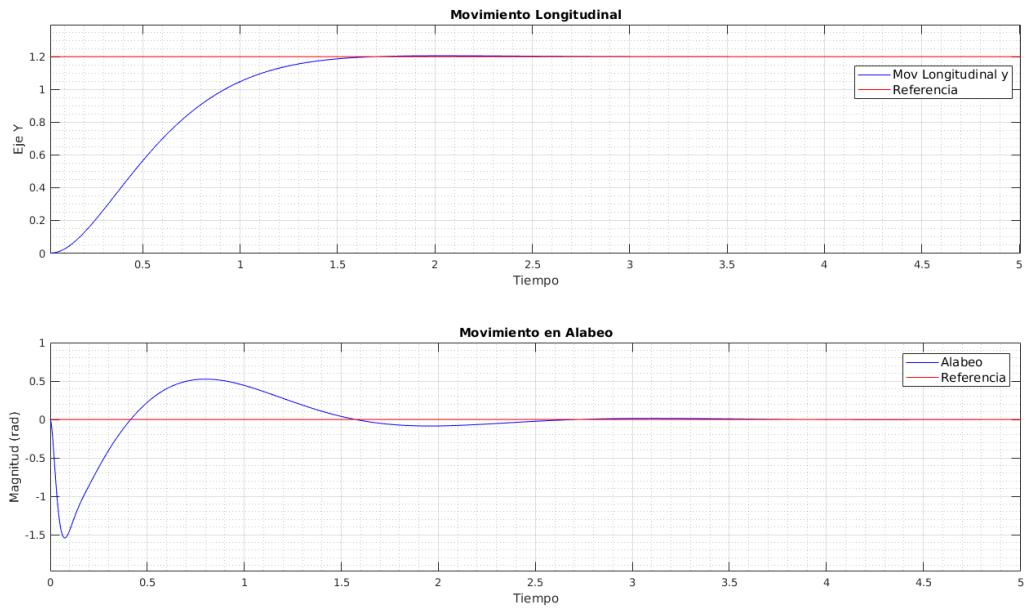


Figura 5.3: Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

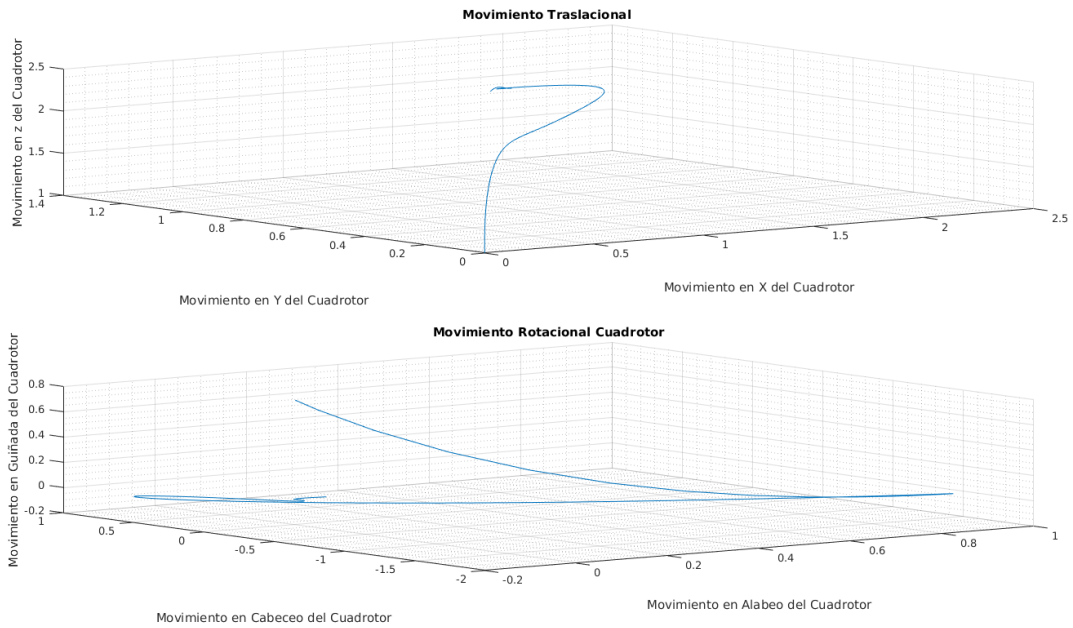


Figura 5.4: Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendeda de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

5.1.2. Prueba 2: segundo conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en partir de un punto A y llegar al punto B transportando la carga suspendida con un peso de $68gr$ y una longitud de $70cm$, el cuadrotor debe mantener su estabilidad entre un rango aceptable. Tal prueba empieza con el cuadrotor a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo.

Resultados Obtenidos

En la simulación el movimiento vertical, no alcanza el punto deseado pero tiene un tiempo de asentamiento de $0.5s$ en la altura de $1.39m$, el movimiento de guiñada, alcanzo el punto el de referencia en $0.1s$ con un sobre tiro de 2% , es decir, que el controlador U_1 no es aceptable para poder alcanzar la altura deseada sin embargo logra mantener una altura considerable para transportar la carga de manera correcta, mientras que U_4 se considera admisible para el control de orientación. En la figura 5.5 se aprecia el movimiento vertical como el movimiento en guiñada.

En el caso del vuelo lateral, el estado x alcanza el estado estacionario en $2.5s$, no más no el punto de referencia, ver figura 5.6. El movimiento del ángulo de cabeceo muestra una actuación en θ de $2.5s$ para llegar al estado estacionario, con un sobre tiro del 40% en los intervalos de tiempo de $0 - 0.3s$ y otro sobre tiro del 7% entre $0.45 - 2s$.

El movimiento longitudinal, se muestra en la figura 5.7, donde el estado y no alcanza el punto de referencia, llegando a un tiempo de asentamiento de $2s$ sin sobretiro, ya que no llega al punto deseado, el ángulo de alabeo causa movimiento en el eje y , tal movimiento es producido en un tiempo de $3s$, con sobre tiros en el intervalo de tiempo de $0 - 0.4s$ de 60% y en $0.45 - 1.6s$ de 20% .

Los resultados obtenidos se muestra en la tabla 5.6, y en la figura 5.4, se muestra la trayectoria realizada por el cuadrotor y la carga suspendida, donde se afirma que las entradas de control U_1, U_2, U_3, U_4 , son aceptables para lograr el control del vuelo estacionario y el vuelo dirigido, mas no son admisibles para lograr llegar al punto

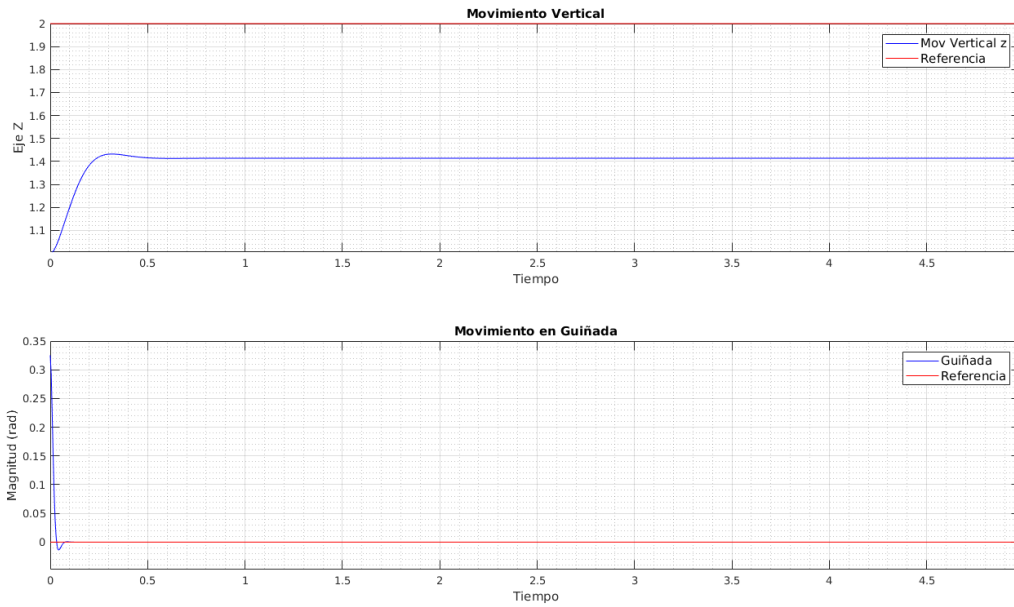


Figura 5.5: Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

deseado.

Cuadro 5.6: Resultados

Variable	Puntos de referencia (m, rad)	Puntos alcanzados(m, rad)	Error Relativo(%)
$x(t)$	1.75	0.71	59.4 %
$y(t)$	1.20	0.51	57.5 %
$z(t)$	2.0	1.39	30.5 %
$\phi(t)$	0.0	0.03	3 %
$\theta(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\psi(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\phi_L(t)$	0.0	-0.15	15 %
$\theta_L(t)$	0.0	-0.25	25 %

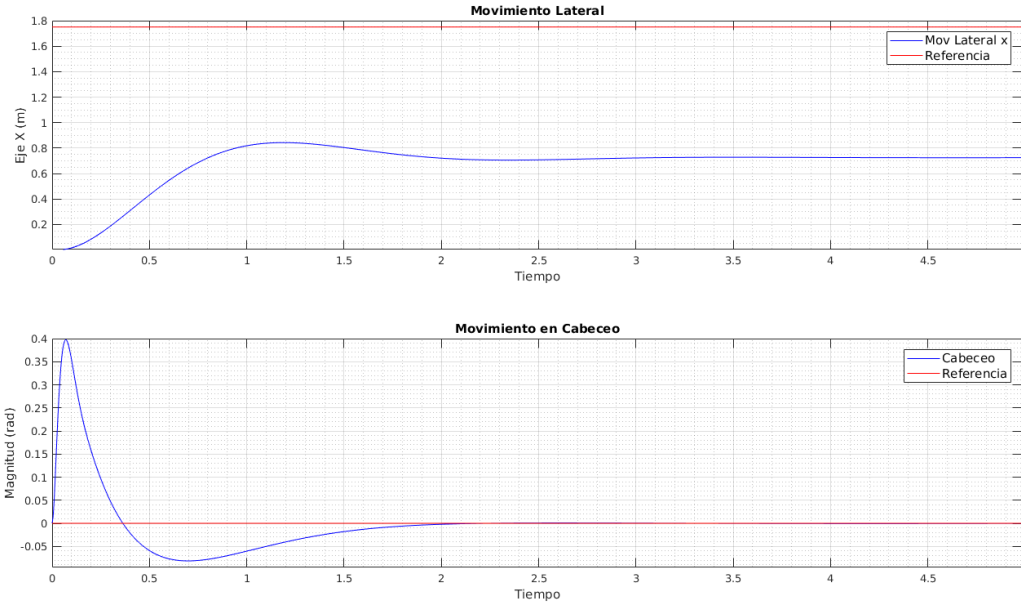


Figura 5.6: Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

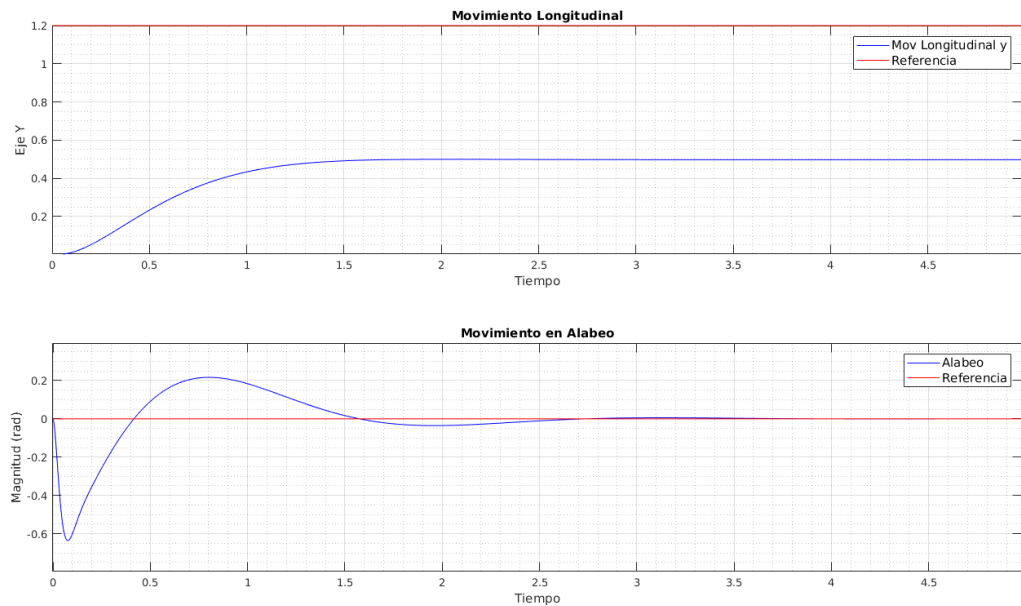


Figura 5.7: Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

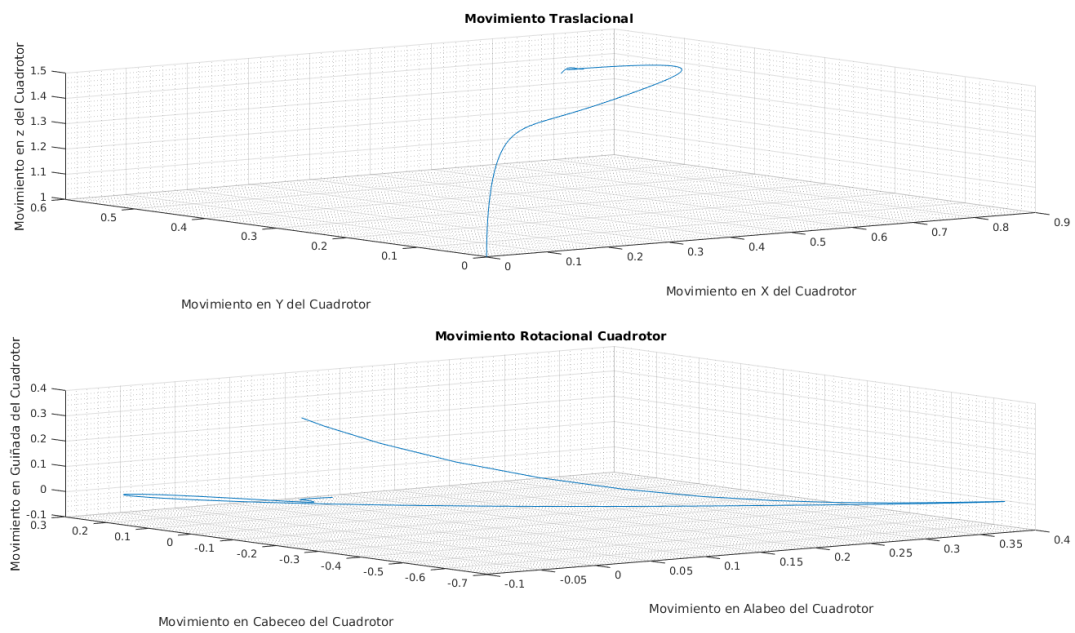


Figura 5.8: Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

5.1.3. Prueba 3: tercer conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en partir de un punto A y llegar al punto B transportando la carga suspendida con un peso de $108gr$ y una longitud de $10cm$ en el cable, el cuadrotor debe mantener su estabilidad entre un rango aceptable. Se empieza la prueba con el cuadrotor a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo.

Resultados Obtenidos

En la figura 5.9, el movimiento vertical alcanza el punto deseado en un tiempo de $0.7s$ con un sobre tiro del 2% respecto a la referencia en el plano z , el movimiento en guiñada, alcanza el punto el de referencia en $0.08s$ con un sobre tiro de 2% , es decir, que el controlador U_1 y U_4 son aceptables.

En la figura 5.10 se observa el comportamiento del vuelo lateral, el estado x alcanza el estado estacionario en $3.0s$ con un sobretiro del 16.15% y el movimiento del ángulo de cabeceo θ , actúa en $1.8s$ para llegar al estado estacionario,

El movimiento longitudinal que se muestra en la figura 5.11, el estado y alcanza en un tiempo de asentamiento de $1.7s$, el movimiento ángulo de alabeo es producido en un tiempo de $3.5s$, con sobretiros de 155% entre $0 - 0.4s$ y de 52% entre $0.45 - 1.57s$.

Los resultados obtenidos se muestra en la tabla 5.7, y en la figura 5.12, se muestra la trayectoria realizada por el cuadrotor y la carga suspendida, donde se afirma que las entradas de control U_1, U_2, U_3, U_4 , son admisibles para lograr el control del vuelo estacionario y el vuelo dirigido.

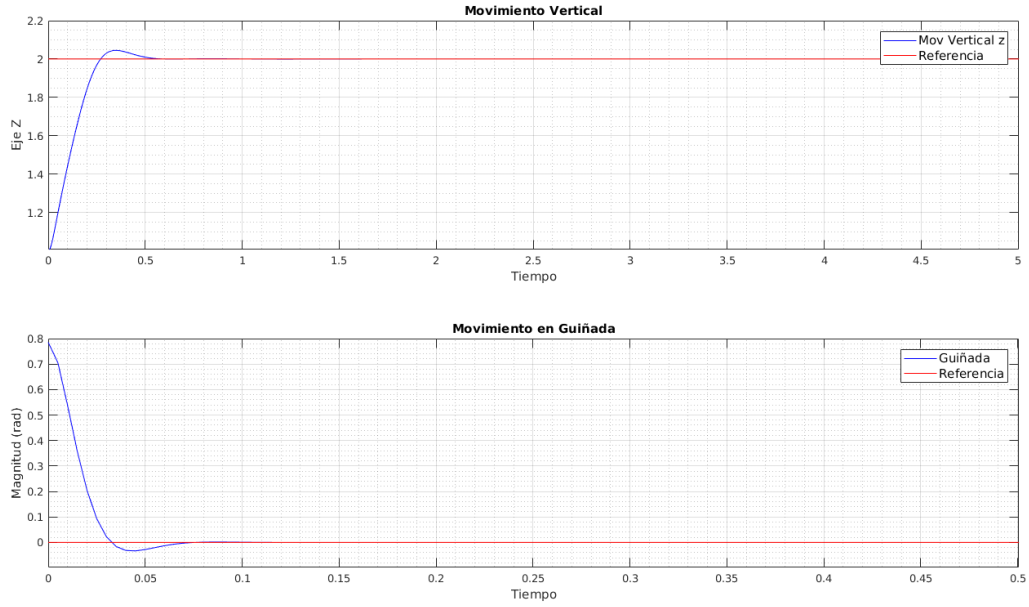


Figura 5.9: Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

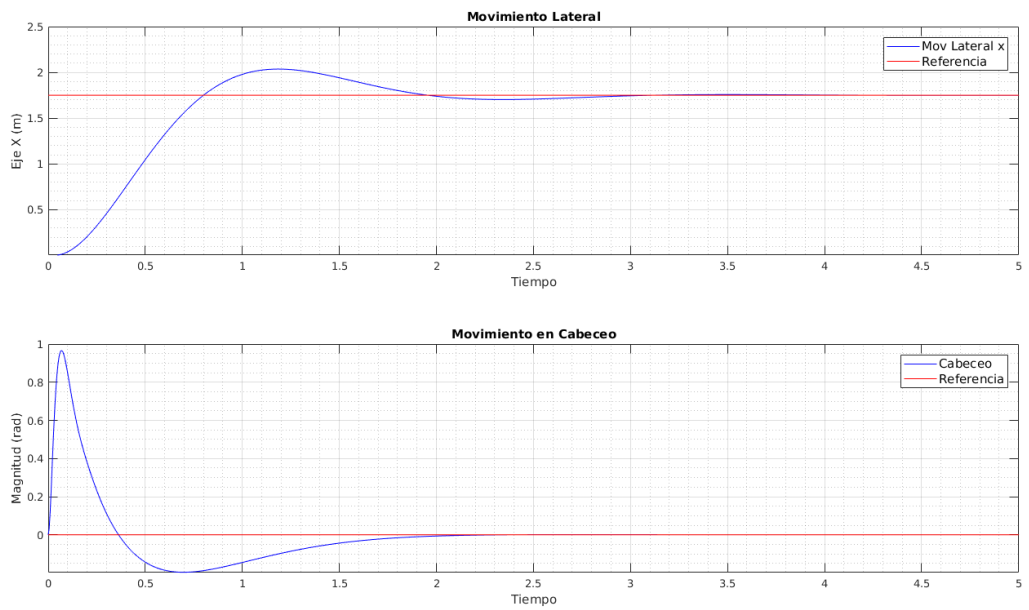


Figura 5.10: Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

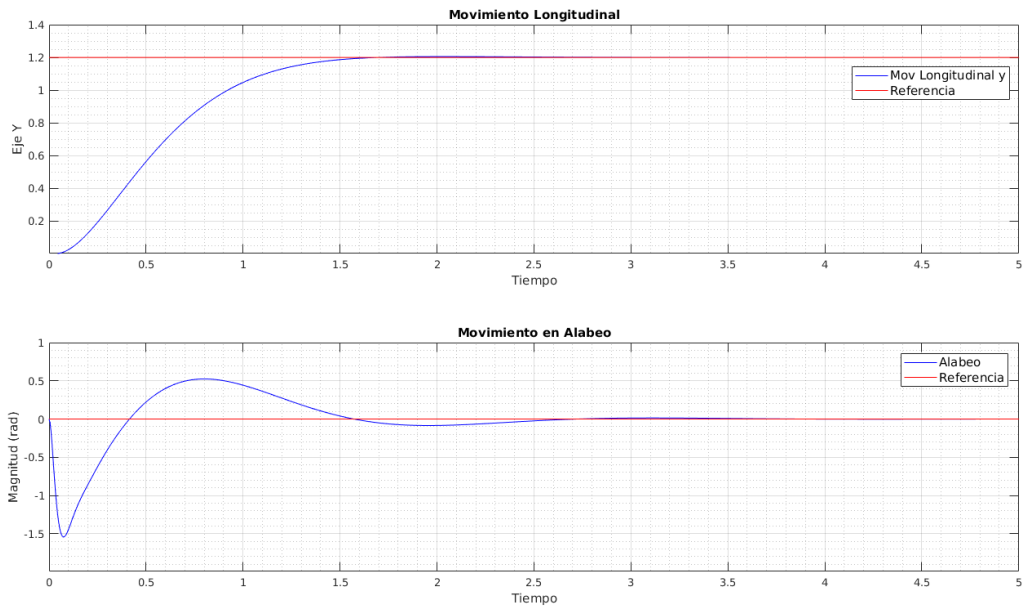


Figura 5.11: Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

Cuadro 5.7: Resultados

Variable	Puntos de referencia (m, rad)	Puntos alcanzados(m, rad)	Error Relativo(%)
$x(t)$	1.75	1.753	0.03 %
$y(t)$	1.20	1.20	0.0 %
$z(t)$	2.0	2.0	0.0 %
$\phi(t)$	0.0	0.11	0.7 %
$\theta(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\psi(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\phi_L(t)$	0.0	-0.01	0.1 %
$\theta_L(t)$	0.0	-0.02	0.02 %

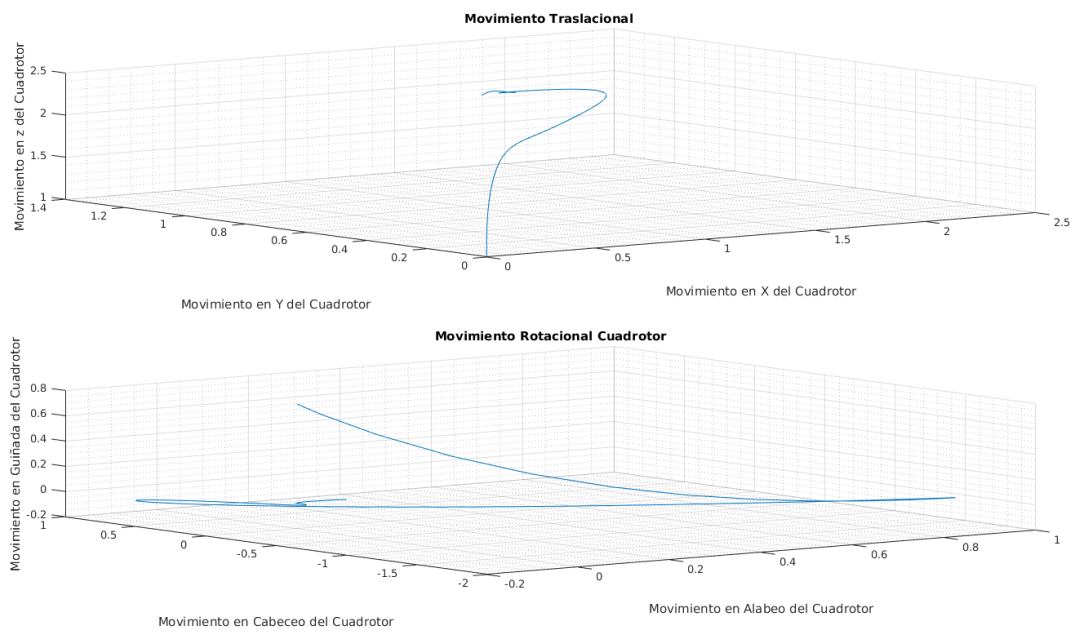


Figura 5.12: Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendeda de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

5.1.4. Prueba 4: cuarto conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en partir de un punto A y llegar al punto B transportando la carga suspendida con un peso de $108gr$ y una longitud de $70cm$ en el cable, el cuadrotor debe mantener su estabilidad entre un rango aceptable. Se inicia la prueba con el cuadrotor a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo.

Resultados Obtenidos

En la figura 5.13 se aprecia el movimiento vertical, el cual no llega el punto deseado, sin embargo, en un tiempo de $0.6s$ alcanza el estado estacionario, respecto a la referencia en el plano z , la guiñada, logra alcanzar el punto de referencia en $0.075s$ con un sobre tiro de 2.2% , es decir, el controlador U_4 es aceptable, mientras que el controlador U_1 no es capaz de lograr llevar el estado z a la altura deseada.

En la figura 5.14, se observa comportamiento del vuelo lateral. En el caso del estado x alcanza el estado estacionario en $3.0s$ sin sobretiro, ya que no alcanza el punto de referencia, el movimiento del ángulo de cabeceo θ , actúa en $2.5s$ para llegar al estado estacionario,

En la figura 5.15, se muestra el movimiento longitudinal, el estado y no alcanza el punto de referencia sin embargo tiene un tiempo de asentamiento de $1.8s$, el ángulo de alabeo se mueve en un tiempo de $3.0s$, con sobretiros de 150% entre $0 - 0.4s$ y de 50% entre $0.45 - 1.57s$,

Los resultados obtenidos se muestra en la tabla 5.8, y en la figura 5.16, se muestra la trayectoria realizada por el cuadrotor y la carga suspendida, donde se afirma que las entradas de control U_2, U_3, U_4 , son admisibles para lograr el control en orientación, sin embargo, no es aceptable el control U_1 aunque logra mantener la estabilidad y recorrer la trayectoria establecida, es decir no se desploma el cuadrotor.

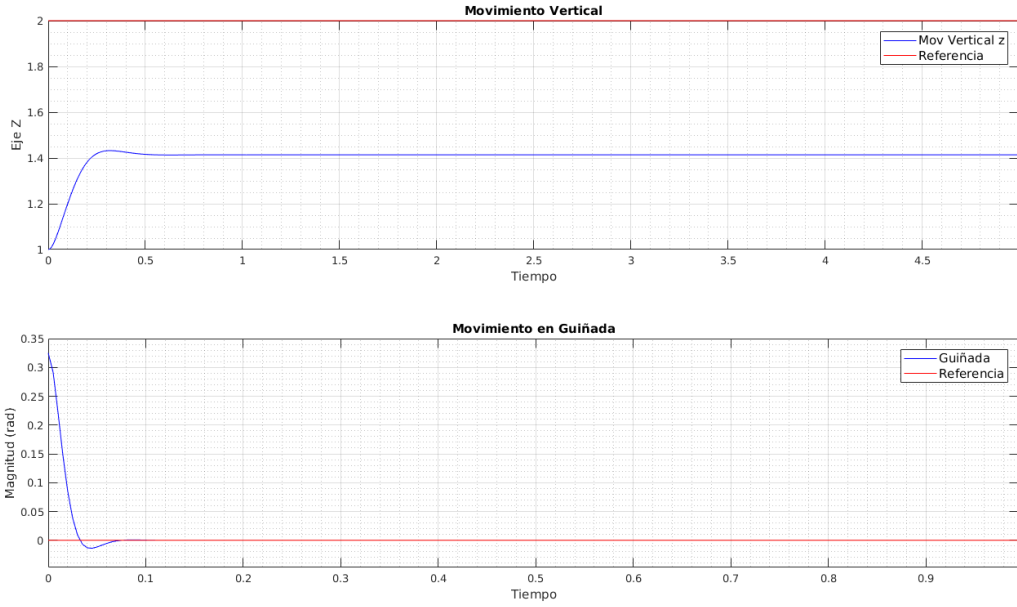


Figura 5.13: Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

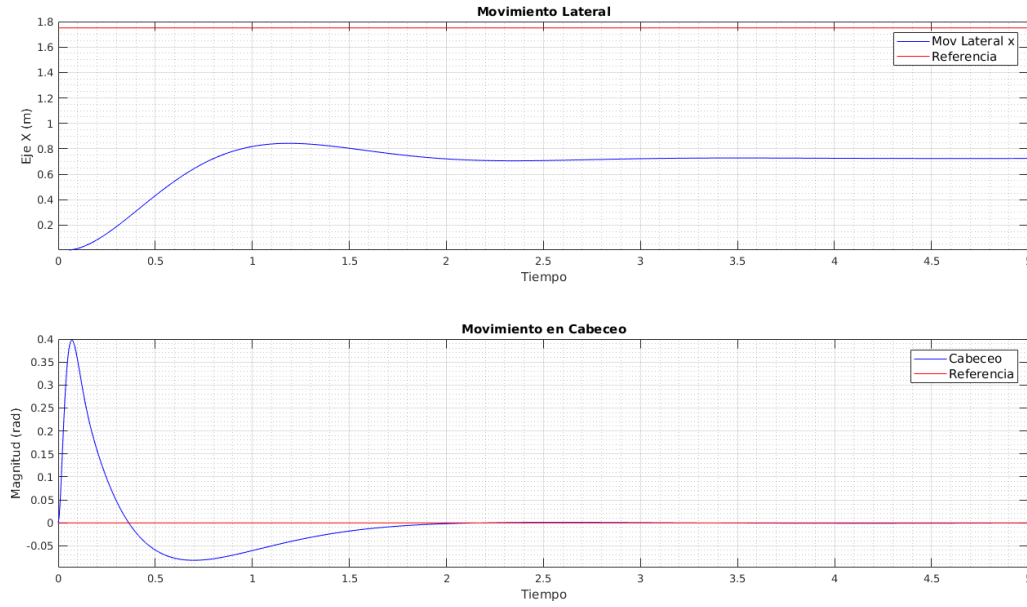


Figura 5.14: Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

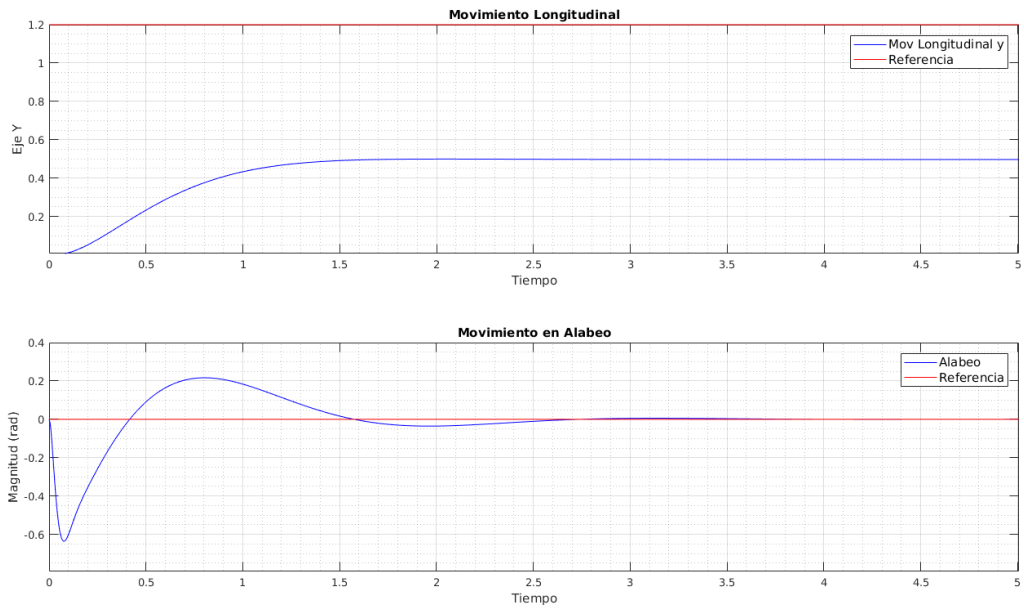


Figura 5.15: Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

Cuadro 5.8: Resultados

Variable	Puntos de referencia (m, rad)	Puntos alcanzados(m, rad)	Error Relativo(%)
$x(t)$	1.75	0.70	60 %
$y(t)$	1.20	0.52	56.6 %
$z(t)$	2.0	1.39	30.5 %
$\phi(t)$	0.0	0.05	0.5 %
$\theta(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\psi(t)$	0.0	0.0	0.0 %
$\phi_L(t)$	0.0	-0.10	1.0 %
$\theta_L(t)$	0.0	-0.10	1.0 %

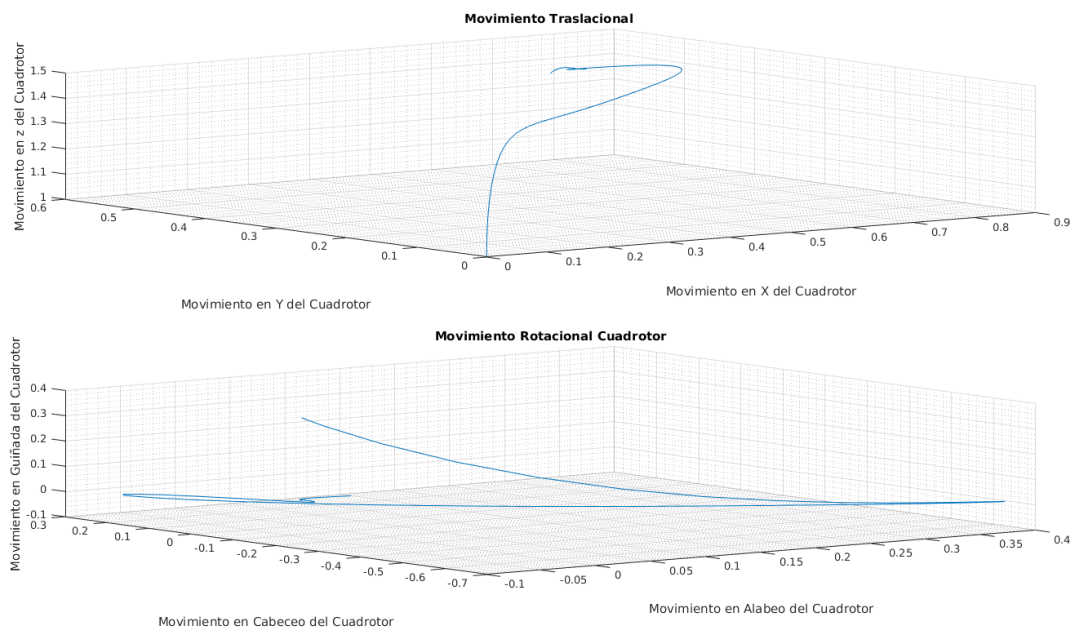


Figura 5.16: Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

5.2. Pruebas Posición de la Carga

Las pruebas consisten en llevar al cuadrotor a los puntos de referencia (PR2) mostrados en la tabla 5.2, controlado la orientación y posición del cuadrotor con diferentes parámetros para la carga suspendida y la longitud del cable que lo suspende.

A continuación se presentan los resultados de las pruebas que se hicieron con el modelo del cuadrotor, para analizar el movimiento de orientación y posición del cuadrotor y de la carga suspendida utilizando los parámetros de la tabla 5.1, 4.1, 5.3.

5.2.1. Prueba 1: primer conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en que el cuadrotor tiene que alzar el vuelo a $2m$ de altura y volar en forma circular transportando la carga suspendida con un peso de $68gr$ y una longitud de $10cm$, el cuadrotor debe mantener su estabilidad en todo el intervalo de tiempo. Se inicia la prueba con el cuadrotor a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo, trazando como trayectoria un círculo.

Resultados Obtenidos

En la figura 5.17 se aprecia el movimiento traslacional del cuadrotor y la carga, trazando una trayectoria circular, y en la figura 5.18 se aprecia los movimientos realizado por el cuadrotor.

El movimiento vertical, no alcanza el punto deseado permaneciendo a $0.17cm$ del objetivo, llegando al estado estacionario en un tiempo de $0.64s$ con un error del 9.29% , un sobre tiro del 1.87% respecto a la referencia en el plano z . El movimiento en guiñada alcanzo el punto el de referencia en $0.075s$ con un sobre tiro de 4% , es decir, que el controlador U_1 a pesar de que no logra llevar al estado z al punto requerido, se queda a muy poco de la meta aproximadamente a 8.5% , considerando así el control U_1 como tolerable, respecto a U_4 es aceptable, por el tiempo en respuesta rápida.

En el caso del vuelo lateral, el estado x alcanza la amplitud máxima de $1.44m$ en $3.11s$ con un un error del 17.3% , respecto a la amplitud requerida de $1.75m$, el movimiento

del ángulo de cabeceo θ , actúa en $1.8s$ para llegar al estado estacionario. El movimiento longitudinal (estado y) no alcanza la amplitud, llegando a $0.994m$ de $1.2m$ en un tiempo de respuesta de $4.7s$.

Los ángulos de la carga ϕ_L, θ_L permanecen cerca del punto de equilibrio, cerca del cero.

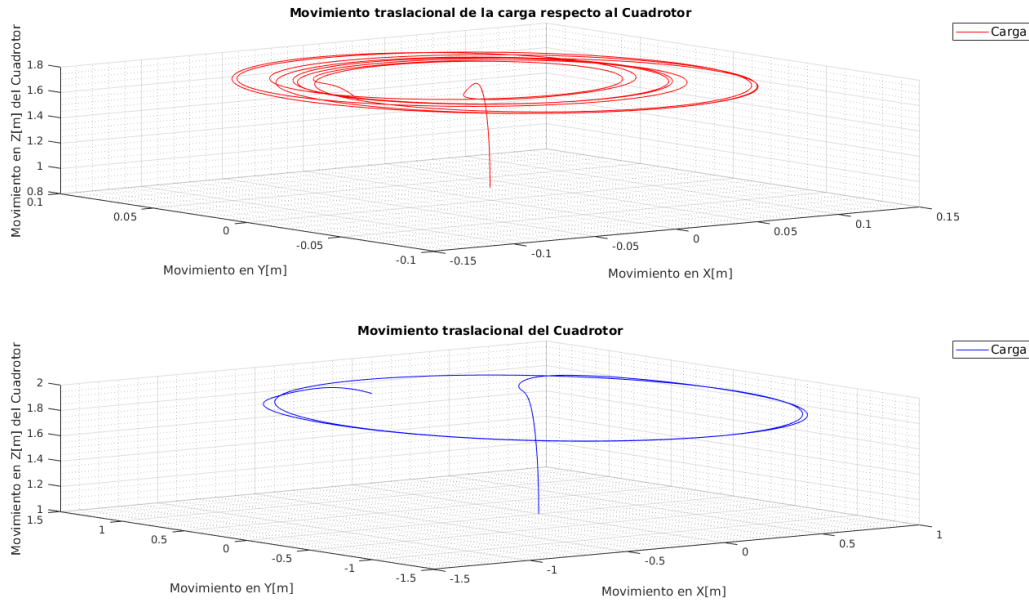


Figura 5.17: Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendeda de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

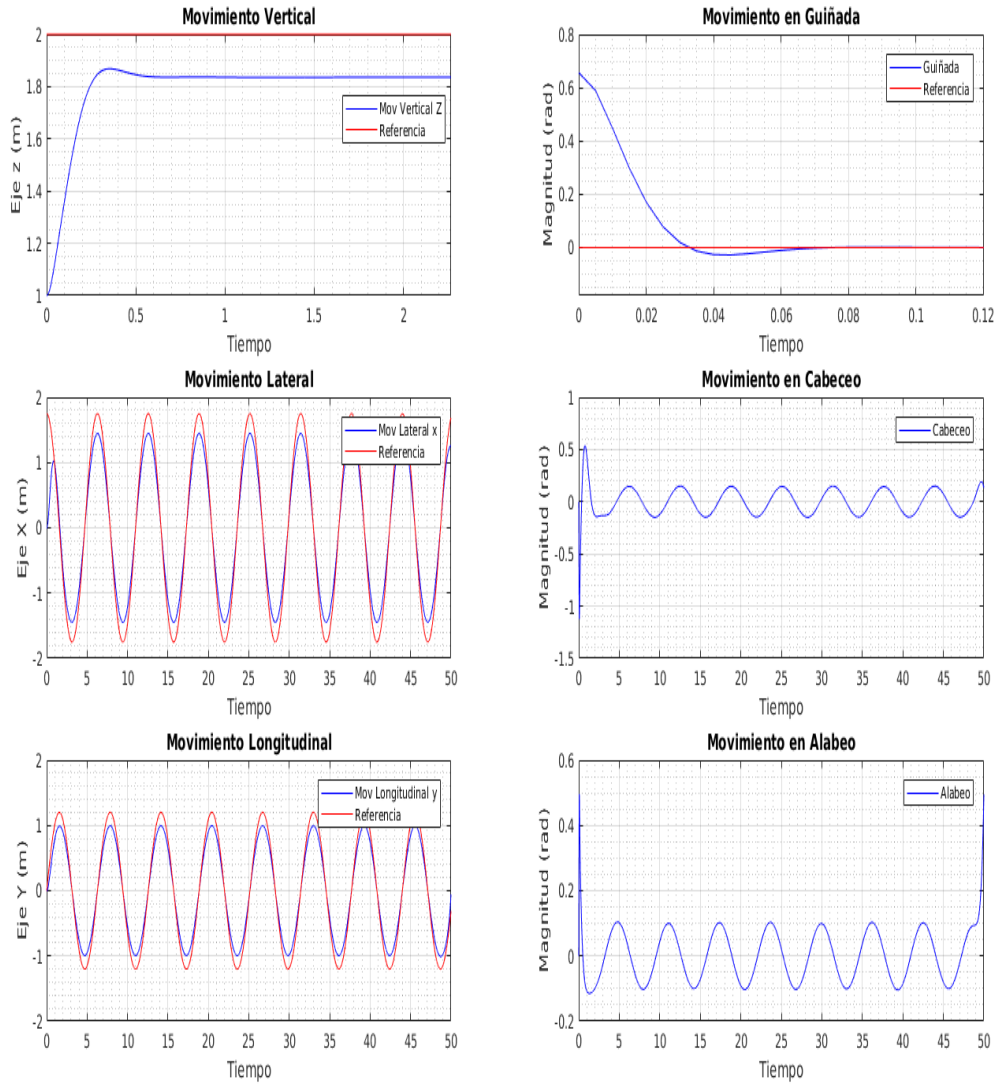


Figura 5.18: Movimiento del Cuadroter con Carga Suspensa de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

5.2.2. Prueba 2: segundo conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en que el cuadrotor tiene que alzar el vuelo a $2m$ de altura y volar en forma circular transportando la carga suspendida con un peso de $68gr$ y una longitud de $70cm$, el cuadrotor debe mantener su estabilidad en todo el intervalo de tiempo. La prueba empieza con el cuadrotor a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo, trazando como trayectoria un círculo.

Resultados Obtenidos

En la figura 5.19 se aprecia el movimiento traslacional del cuadrotor y la carga, donde se observa que el cuadrotor no alcanza el punto deseado (del movimiento vertical) permaneciendo a $1.41cm$ del nivel del suelo, llegando al estado estacionario en un tiempo de $0.70s$ con un error del 29.5% , un sobre tiro del 1.9% respecto a la referencia en el plano z , el movimiento en guiñada alcanzo el punto el de referencia en $0.1s$ con un sobre tiro de 4% , es decir, que el controlador U_1 a pesar de que no logra llevar al estado z al punto requerido, se queda a muy poco de la meta aproximadamente a $60cm$.

El estado x alcanza la amplitud máxima de $0.704m$ en $0.5s$ con un un error del 59.9% , respecto a la amplitud requerida de $1.75m$, el ángulo de cabeceo θ , actúa en $2.5s$ para llegar al estado estacionario. El estado y no alcanza la amplitud, llegando a $0.49m$ de $1.2m$ en un tiempo de respuesta de $2.5s$.

En la figura 5.20 se aprecia los movimientos realizado por el cuadrotor en trayectoria circular, donde se muestra que los ángulos de la carga ϕ_L, θ_L permanecen cerca del punto de equilibrio, cerca del cero.



Figura 5.19: Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendeda de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

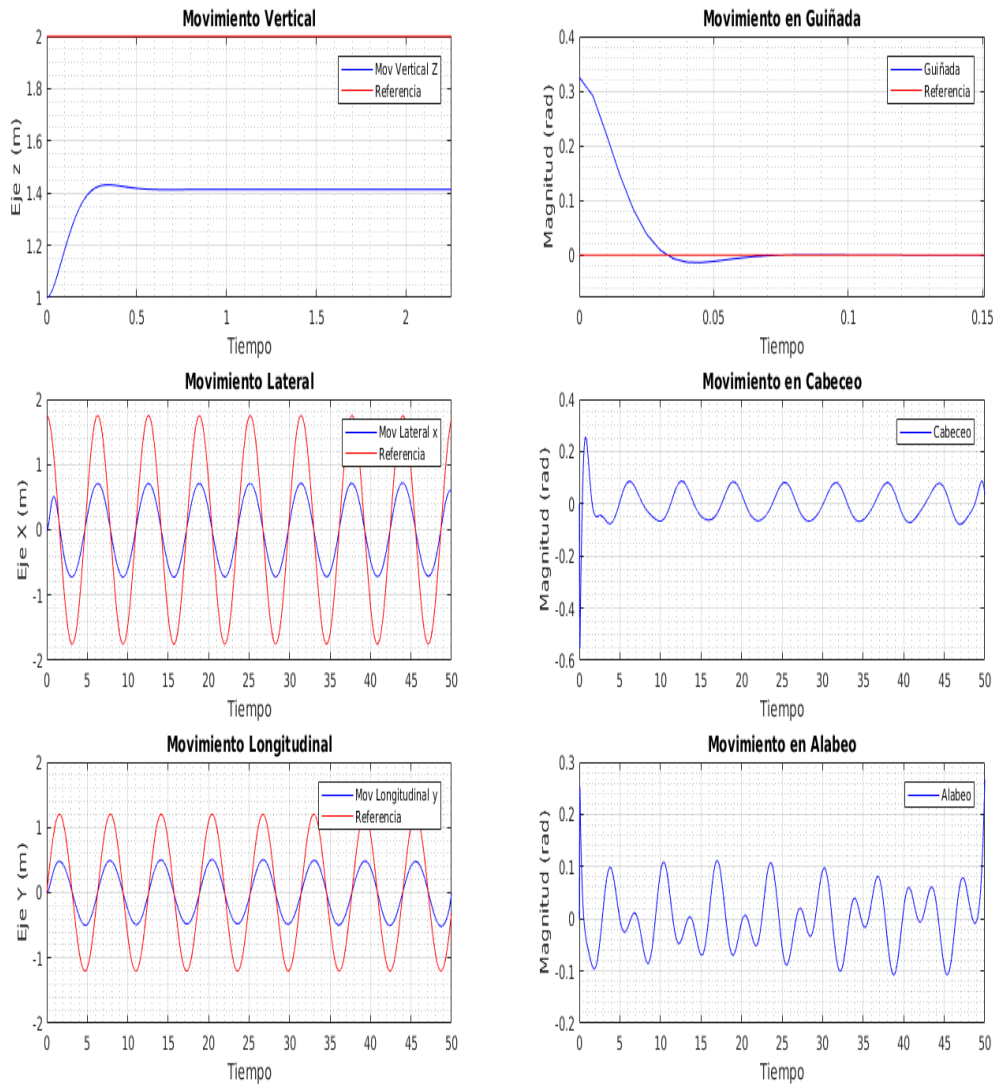


Figura 5.20: Movimiento del Cuadrotor con Carga Suspensa de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

5.2.3. Prueba 3: tercer conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en que el cuadrotor tiene que alzar el vuelo a $2m$ de altura y volar en forma circular transportando la carga suspendida con un peso de $108gr$ y una longitud de $10cm$, el cuadrotor debe mantener su estabilidad en todo el intervalo de tiempo. Se comienza la prueba con el cuadrotor a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo, trazando como trayectoria un círculo.

Resultados Obtenidos

En la figura 5.22 se aprecia los movimientos realizado por el cuadrotor, como el movimiento vertical, que llega al estado estacionario en un tiempo de $0.60s$ con un error del 0.01% , un sobre tiro del 2% respecto a la referencia en el plano z , el movimiento en guiñada alcanzo el punto el de referencia en $0.070s$.

En el caso del vuelo lateral, el estado x alcanza la amplitud máxima de $1.75m$ en $3.25s$ con un un error del 0.01% , respecto a la amplitud requerida de $1.75m$, el movimiento del ángulo de cabeceo θ , actúa en $1.8s$ para llegar al estado estacionario. El estado y alcanza la amplitud, llegando a $1.2m$ de $1.2m$ en un tiempo de respuesta de $1.19s$.

Los ángulos de la carga ϕ_L, θ_L permanecen cerca del punto de equilibrio, (ver figura 5.21) donde se aprecia el comportamiento del movimiento traslacional del cuadrotor y la carga. En la cual se observa un movimiento con poca oscilación ya que esta cerca del punto de equilibrio.

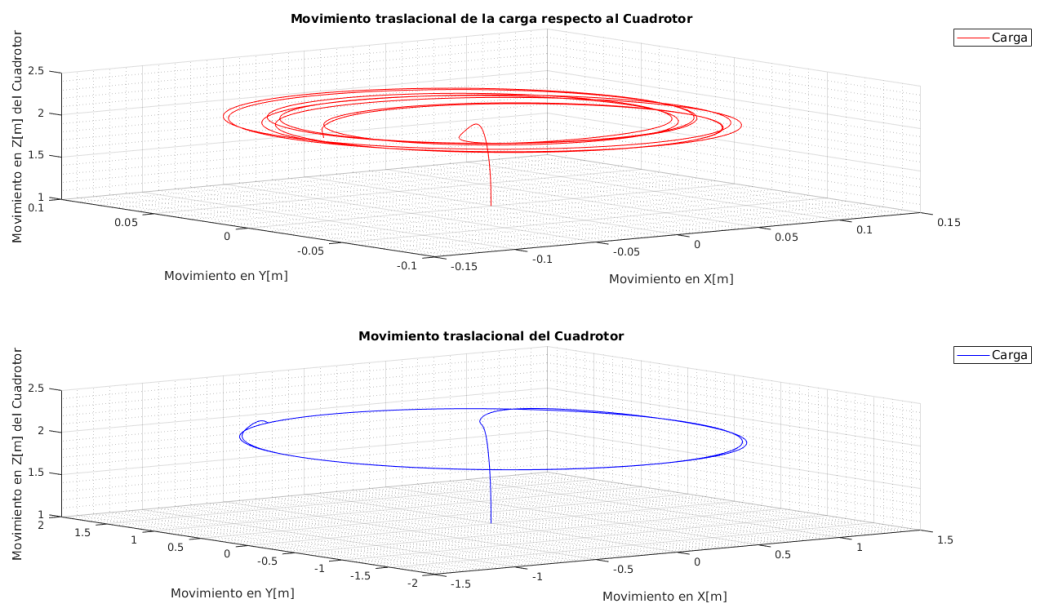


Figura 5.21: Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

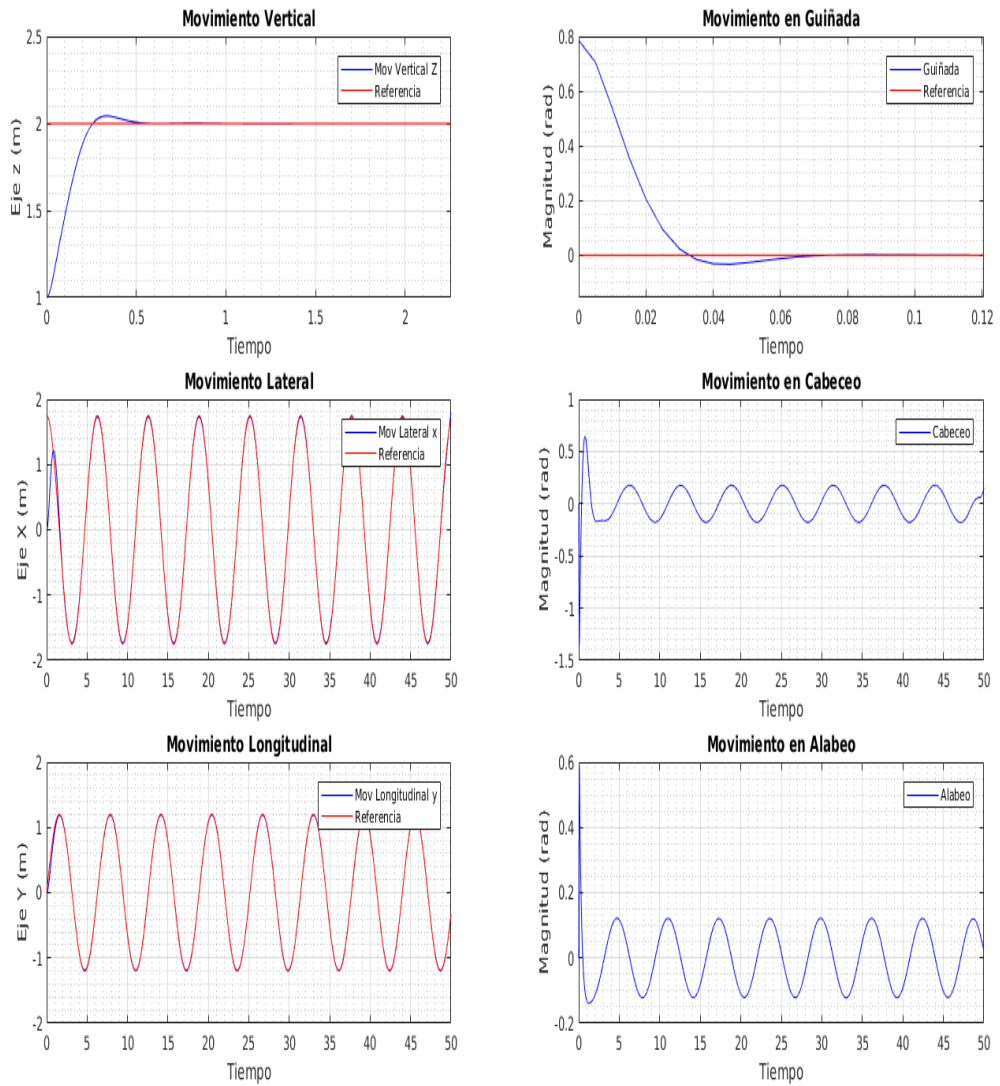


Figura 5.22: Movimiento del Cuadrotor con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$

5.2.4. Prueba 4: cuarto conjunto de parámetros

Descripción de la prueba.

La prueba consiste en que el cuadrotor tiene que alzar el vuelo a $2m$ de altura y volar en forma circular transportando la carga suspendida con un peso de $108gr$ y una longitud de $70cm$, el cuadrotor debe mantener su estabilidad en todo el intervalo de tiempo. La prueba inicia con el cuadrotor a una altura de $1m$.

Resultados Esperados

Se espera que el cuadrotor llegue a los puntos de referencia transportando la carga manteniendo la estabilidad en el vuelo, trazando como trayectoria un círculo.

Resultados Obtenidos

En la figura 5.24 se observan los movimientos realizado por el cuadrotor. El movimiento vertical, no alcanza el punto deseado permaneciendo a $1.41cm$ del suelo, llegando al estado estacionario en un tiempo de $52s$ con un error del 39% , un sobre tiro del 1.85% respecto a la referencia en el plano z , el movimiento en guiñada alcanzo el punto el de referencia en $0.075s$ con un sobre tiro de 4% , es decir, que el controlador U_1 a pesar de que no logra llevar al estado z al punto requerido, se queda a muy poco de la meta aproximadamente a $0.6cm$, considerando así el control U_1 como tolerable, respecto a U_4 es admisible, por el tiempo en respuesta rápida que obtiene.

En el estado x alcanza la amplitud máxima de $0.7136m$ en $3.2s$ con un un error del 59.2% . El estado y (movimiento longitudinal) no alcanza la amplitud, llegando a $0.482m$ de $1.2m$ en un tiempo de respuesta de $1.45s$.

En la figura 5.23 se aprecia el movimiento traslacional del cuadrotor y la carga en trayectoria circular. Donde los ángulos de la carga ϕ_L, θ_L generan oscilaciones pequeñas que no afectan el comportamiento del cuadrotor, es decir, los ángulos de la carga se mantienen cerca del cero.



Figura 5.23: Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendeda de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

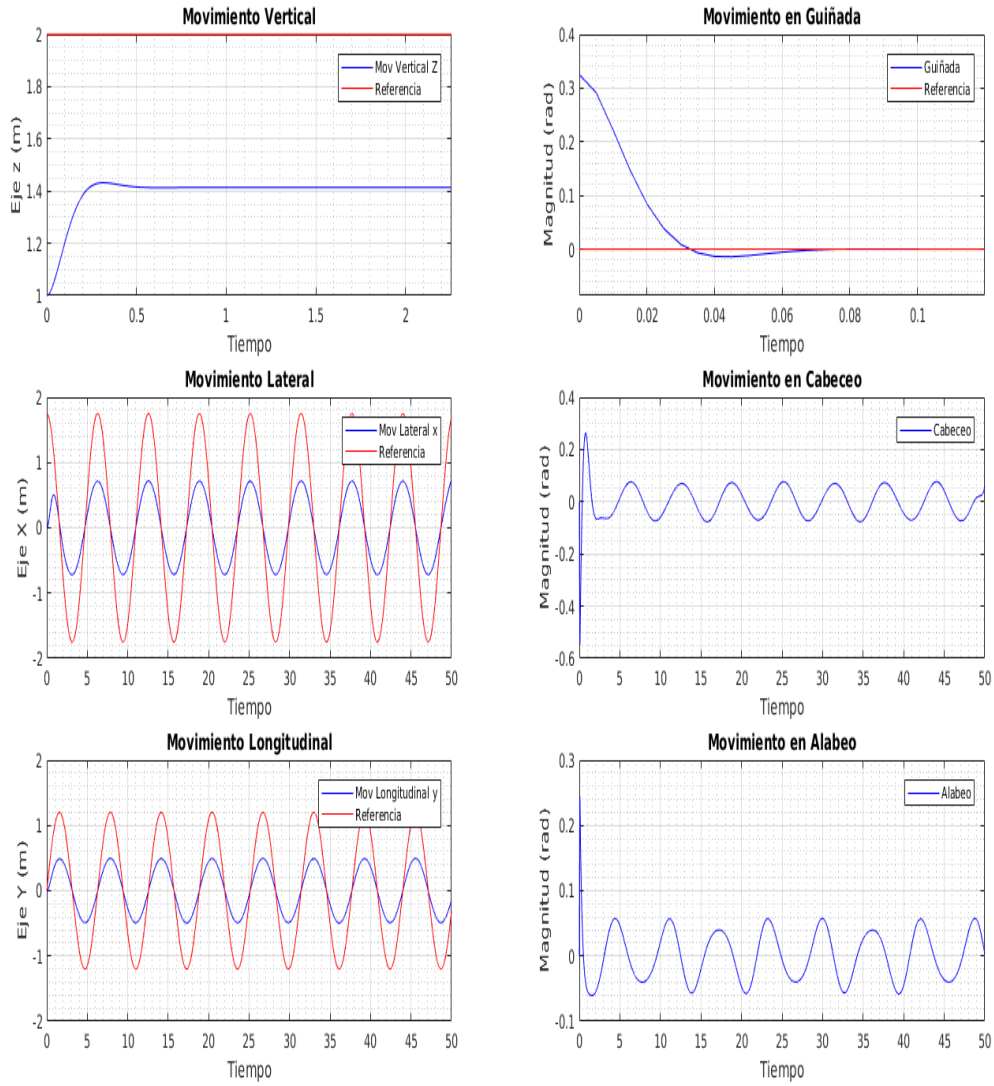


Figura 5.24: Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspensiva de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$

5.2.5. Entorno de simulación

Las pruebas se realizaron en el ambiente de simulación Matlab R2017a, Mathematica 10. Las especificaciones del equipo utilizado para la verificación de los controles y la simulación son los siguientes: procesador Intel Core i7-3632QM CPU a 2.20GHz \times 8 ,memoria 8GB, Intel Ivybridge Mobile , con un SSD de 1TB, sistema operativo Ubuntu 16.04LTS de 64 bits.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

6.1. Síntesis de la tesis

En esta investigación se realizó el análisis del modelo de la dinámica del cuadrotor con carga suspendida para controlar los movimientos (vertical, lateral y longitudinal), tomando como referencia las ecuaciones que describen la dinámica de vuelo del cuadrotor con carga suspendida en [Ying Feng \(2015\)](#).

También analizamos los modelos del cuadrotor y sus estrategias de control mostradas en [Castillo et al. \(2004\)](#) y [Walid et al. \(2014\)](#) para deducir un modelo dinámico del cuadrotor con carga suspendida, el cual se unifica en un sistema, el sistema del cuadrotor con el sistema de la carga suspendida, donde se ligan los movimientos de los estados x , y , con los estados de θ y ϕ . Se logra así el control en traslación por medio de los estados de rotación.

6.2. Conclusiones

Los controladores LQR ver [Ying Feng \(2015\)](#), no eliminan el error en estado estacionario. Para eliminar el error en estado estacionario, se propuso un controlador óptimo aplicando el PMP, el método propuesto trata la optimización como un problema de valores a la frontera. Con esta estrategia de control se logró un error casi nulo en el estado estacionario de los estados de traslación (x , y , z) con una respuesta rápida en el tiempo.

Se analizó y se concluye que diferentes longitudes de cables causan que el cuadrotor

alcance el éxito. El cable con longitud de 10cm alcanza el punto deseado, mientras que el cable con longitud de 70cm no alcanza el punto deseado, y se consideran no superadas por no alcanzar los puntos de referencia, sin embargo, no tiene oscilaciones, con el cable de 10cm se observa que cuando el cuadrotor alcanza los puntos deseados, existe un tiempo de respuesta rápido con poco sobretiro controlando así la estabilidad, es decir no tiene oscilaciones en todo el intervalo de tiempo.



Las pruebas de orientación y posición muestran **una** movimiento curvo del punto A al punto B, esto es causado por los sobretiros que tienen los estados x y y al momento de intentar llegar a la posición establecida.

Las pruebas de posición de la carga indican que el cuadrotor se mantiene en todo tiempo volando en trayectoria circular controlado la carga suspendida sin presentar cambios en la orientación del cuadrotor. A pesar de que en las pruebas 2 y 4 no se logra llegar a la altura requerida, esto no implica que el cuadrotor deje de volar ni tampoco que se derribe en todo el intervalo de tiempo, no se desestabiliza a pesar de que no llega a ciertos criterios, como el punto de referencia.

La estrategia de control óptimo definida es adecuada y factible para que el cuadrotor alcance las metas, teniendo en cuenta que la meta del cuadrotor aparte de llegar al punto deseado, es haciéndolo con una carga suspendida conectado al centro de masa del cuadrotor por medio un cable rígido. En los eventos que no tuvieron éxito el cuadrotor no se desestabiliza, sin embargo no se alcanza el punto deseado con un error promedio del 27 %.

Cabe señalar la ventajas de optimizar procesos de control bajo estrategias del PMP en comparación con estrategias de control clásicas, moderno, las cuales son: mayor tiempo de respuesta, mayor periodo de estabilidad, menor error en estado estacionario, menor error en seguimiento, menor sobre impulso.

6.3. Contribuciones

Se desarrollo un controlador de vuelo, el cual se formulo bajo el enfoque de control óptimo considerando un sistema subactuado.

El movimiento vertical z , se toma como un subsistema no lineal para obtener menor error y mayor estabilidad en el vuelo estacionario, de igual forma, se diseño una combinación con los controles de el ángulo de cabeceo θ y el ángulo de alabeo ϕ para generar movimientos laterales x y longitudinales y .

Mediante el uso de PMP, se linealizan en un punto de equilibrio todas las variables de estados que conforman los movimientos del cuadrotor, excepto el estado z que modela la

altura, a diferencia de los trabajos existentes donde abordan el control óptimo, utilizando el controlador LQR.

Este trabajo combina los dos movimientos del cuadrotor con la carga en un esquema donde se pudo reducir las perturbaciones presentes en trabajos relacionados.

6.4. Trabajo a futuro

Algunas ideas para un trabajo a futuro son presentadas a continuación.

- Control. Obtener un control que pueda satisfacer el cambio en la longitud del cable, sin perder la estabilidad.
- Trayectoria. Generar diferentes escenarios y trayectorias para poner a prueba el controlador.
- Prototipo. El objetivo a mediano o largo plazo de esta investigación es que el prototipo pueda ser construido físicamente. Si se considera el modelo como un requisito para el desarrollo de plataformas viables de exploración, se debe considerar en los modelos y prototipo efectos no contemplados o simplificados en nuestro modelo

Apéndice A

Apéndice

E Marco de referencia Terrestre
B Marco de referencia Inercial
DoF Degree of Freedom
IMU Unidad de medida inercial
Input Shaping Conformación de entrada
LQG Gaussiano Cuadrático Lineal
LQR Regulador Cuadrático Lineal
MAV Micro Aerial Vehicles
PD Proporcional Derivativo
PI Proporcional Integrativo
PID Proporcional Intregodiferencial
PMP Principio Mínimo de Pontryagin
Pitch Cabeceo
Roll Alabeo
RCAC Restrospective Cost Adaptive Control
UAV Unmanned Aerial Vehicles
VANT Vehículos aéreos no tripulados
VTOL Vertical TakeOff and Landing
Yaw Guiñada

Índice de figuras

4.1. Sistemas de referencias para modelar las dinámicas del cuadrotor con carga suspendida.	20
4.2. Sistemas de referencias para modelar las dinámicas del cuadrotor con carga suspendida.	22
4.3. Sistemas de referencias para modelar las dinámicas del cuadrotor con carga suspendida. Figura tomada de Ying Feng (2015).	24
5.1. Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	36
5.2. Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	37
5.3. Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	38
5.4. Movimiento del Cuadrotor con Carga Suspendida de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	38
5.5. Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	40
5.6. Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	41
5.7. Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	41
5.8. Movimiento del Cuadrotor con Carga Suspendida de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	42

5.9. Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	44
5.10. Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	44
5.11. Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	45
5.12. Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	46
5.13. Orientación y Movimiento Vertical con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	48
5.14. Movimiento Lateral con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	48
5.15. Movimiento Longitudinal con Carga de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	49
5.16. Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	50
5.17. Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	52
5.18. Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	53
5.19. Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	55
5.20. Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 68g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	56
5.21. Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	58
5.22. Movimiento del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 10cm$	59
5.23. Movimiento Circular del Cuadrotror con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$	61

5.24. Movimiento del Cuadro con Carga Suspendida de $m_L = 108g$ y con longitud de cable $m_L = 70cm$ 62

Índice de cuadros

4.1. Parámetros	29
5.1. Condiciones Iniciales	34
5.2. Conjunto de Puntos de Referencia	34
5.3. Parámetros	35
5.4. Parámetros de las pruebas	35
5.5. Resultados	37
5.6. Resultados	40
5.7. Resultados	45
5.8. Resultados	49

Bibliografía

- Alothman, Y., Jasim, W., & Gu, D. 2015, in 2015 21st International Conference on Automation and Computing (ICAC), 1–6
- Arturo, M. S., Rodriguez-Gomez, G., & Jose, M.-C. 2017, in Hovering Controller for a Quadrotor Using Stochastic Test Signals. Congreso Nacional de Control Automático 2017 Monterrey, Nuevo León, Mexico, Octubre 4-6, 2017, 373–380
- Bouabdallah, S., & Siegwart, R. 2007, Full Control of a Quadrotor. Intelligent Robots and Systems, 2007. IROS 2007. IEEE/RSJ International Conference on
- Bouadi, H., Aoudjif, A., & Guenifi, M. 2015, in Adaptive flight control for quadrotor UAV in the presence of external disturbances, 2015 6th International Conference on Modeling, Simulation, and Applied Optimization (ICMSAO), 1–6
- Castillo, P., Lozano, R., & Dzul, A. 2004, in Stabilization of a mini-rotorcraft having four rotors, 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566), Vol. 3, 2693–2698 vol.3
- Dai, S., Lee, T., & Bernstein, D. S. 2014, in Adaptive control of a quadrotor UAV transporting a cable-suspended load with unknown mass, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, 6149–6154
- Falkenberg, O., Witt, J., Pilz, U., Weltin, U., & Werner, H. 2012, in Intelligent Robotics and Applications, ed. C.-Y. Su, S. Rakheja, & H. Liu (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg), 460–471
- Feng, Y., Rabbath, C. A., Rakheja, S., & Su, C. Y. 2015, in 2015 IEEE 28th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE), 1135–1139
- Friedland, B. 1986, Control System Design: An Introduction to State-Space Methods. McGraw Hill, 1st edn. (McGraw Hill)
- Garcia, P. C., Lozano, R., & Dzul, A. E. 2005, Modelling and Control of Mini-Flying Machines. Springer-Verlag London, 81
- Geisert, M., & Mansard, N. 2016, in Trajectory generation for quadrotor based systems using numerical optimal control, 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2958–2964

- Kenzo Nonami, F. Kendoul, S. S. W. D. N. 2010, *Unmanned Aerial Vehicle and Micro Aerial Vehicles*. Springer
- Klausen, K., Fossen, T. I., & Johansen, T. A. 2015, in *Nonlinear control of a multirotor UAV with suspended load*, 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 176–184
- Lee, K. U., Kim, H. S., Park, J. B., & Choi, Y. H. 2012, in *Hovering control of a quadrotor*, 2012 12th International Conference on Control, Automation and Systems, 162–167
- Minh, L. D., & Ha, C. 2010, in *Modeling and control of quadrotor MAV using vision-based measurement*, International Forum on Strategic Technology 2010, 70–75
- Morbidi, F., Cano, R., & Lara, D. 2016, in *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 1492–1498
- Palunko, I., & Fierro, R. 2011, *Adaptive Control of a Quadrotor with Dynamic Changes in the Center of Gravity*. Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011
- Pizetta, I. H. B., Brandão, A. S., & Sarcinelli-Filho, M. 2015, in *Modelling and control of a quadrotor carrying a suspended load*, 2015 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS), 249–257
- Raffo, G. V., & de Almeida, M. M. 2016, in *Nonlinear robust control of a quadrotor UAV for load transportation with swing improvement*, 2016 American Control Conference (ACC), 3156–3162
- Santos, M., López, V., & Morata, F. 2010, in *Intelligent fuzzy controller of a quadrotor*, 2010 IEEE International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering, 141–146
- Shampine, R. C. A. L. F. 1973, in *Numerical computing: an introduction*
- Sreenath, K., Michael, N., & Kumar, V. 2013, in *Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable-suspended load - A differentially-flat hybrid system*, 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 4888–4895
- Trachte, J. E., Toro, L. F. G., & McFadyen, A. 2015, in *Multi-rotor with suspended load: System Dynamics and Control Toolbox*, 2015 IEEE Aerospace Conference, 1–9
- Walid, M., Slaheddine, N., Mohamed, A., & Lamjed, B. 2014, in *Modeling and control of a quadrotor UAV*, 2014 15th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 343–348
- Ying Feng, C. Rabbath, C.-Y. S. 2015, 1257–1272
- Zhu, J., Liu, E., Guo, S., & Xu, C. 2015, in *A gradient optimization based PID tuning approach on quadrotor*, The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC), 1588–1593

Zulu, A., & John, S. 2014, A Review of Control Algorithms for Autonomous Quadrotors.
Open Journal of Applied Sciences, 547-556