



**INAOE**

**Instituto Nacional de Astrofísica,  
Óptica y Electrónica.**

Fotones agregados de estados coherentes como  
estados coherentes no lineales

Por

Lic. Irán Ramos Prieto

Tesis para obtener el grado de  
**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD  
EN ÓPTICA**

Agosto 2014

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa, INAOE  
Dr. Blas Manuel Rodríguez Lara, INAOE

©INAOE 2014

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias de esta tesis en su  
totalidad o en partes mencionando la fuente.



## Dedicatoria

Elige un enemigo grande y esto te obligará a crecer para poder enfrentarlo.

Achica tu miedo porque, si él crece, tú te harás pequeño; Me dijo el Viejo Antonio una tarde de mayo y lluvia, en esa hora en que reinan el tabaco y la palabra. Sub-comandante Marcos.

*Elizabeth O. P.*



## **Agradecimientos**

Quiero agradecer a los profesores Héctor M. Moya Cessa y Blas M. Rodríguez Lara por su apoyo en la realización de este trabajo, por otro lado quiero agradecer a cada uno de los integrantes de la familia Ramos Prieto que sin su apoyo el camino hubiera sido más complicado y finalmente a cada uno de los mexicanos que con las ganas de hacer quizá desencadenen todo y lo conviertan en realidad.



## Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>2. Estados coherentes con fotones agregados.</b>	<b>5</b>
2.1. Estados coherentes no lineales. . . . .	6
2.2. Estados coherentes no lineales de fotones agregados . . . . .	10
2.2.1. Propiedades de los estados coherentes no lineales de fotones agregados de estados coherentes . . . . .	15
2.3. Función de Husimi para un estado coherente no lineal $\hat{V}^{\dagger m}  \alpha\rangle$ .	20
<b>3. Generación de estados coherentes no lineales con fotones agregados de estados coherentes.</b>	<b>25</b>
3.1. Modelo de Jaynes-Cummings en interacción de dos fotones . .	25
3.2. Estados coherentes no lineales de fotones agregados en un ca- vidad electromagnética . . . . .	31
<b>4. Conclusiones</b>	<b>37</b>



## Índice de figuras

2.1.	<i>Número de fotones promedio <math>\bar{n}_0</math>, <math>\bar{n}_1</math> y <math>\bar{n}_2</math>.</i>	14
2.2.	<i>Distribución de fotones para <math>\bar{n} = 6</math> y <math>m = 5</math>.</i>	18
2.3.	<i>Distribución de fotones para <math>\bar{n} = 8</math> y <math>m = 15</math>.</i>	19
2.4.	<i>Función de Husimi para <math>\beta = 1</math>.</i>	22
2.5.	<i>Función de Husimi para <math>\beta = 1</math> y <math>m = 1</math>.</i>	23
2.6.	<i>Función de Husimi para <math>\beta = 1</math> y <math>m = 34</math>.</i>	24
3.1.	<i>El átomo es excitado absorbiendo dos fotones</i>	26
3.2.	<i>El átomo decae al estado base emitiendo dos fotones</i>	27
3.3.	<i>Inversión atómica para un estado coherente con <math>\bar{n} = 1</math>.</i>	30
3.4.	<i>Inversión atómica para un estado coherente con <math>\bar{n} = 4</math>.</i>	31
3.5.	<i>Fidelidad, <math>F(m) = \text{Tr}[\hat{\rho}_{RAm}\hat{\rho}_{Rm}]</math> para <math>m = 20</math>.</i>	35





## Introducción.

Cuando comenzamos a escribir cualquier tipo de texto, en general hablamos de características, propiedades y definiciones que resultan de máxima importancia para el escritor, pero resultan de máxima importancia única y exclusivamente para el escritor. Cuando el lector comienza el camino sugerido por el escritor, el lector puede tener una opinión distinta del orden y temas presentados en el texto, es decir, para cada persona la importancia y el orden de presentar conceptos en general es distinta, pero además el significado después de leer cada concepto y digerirlo es diferente, aunque no opuesto. Es por esto que en este capítulo y en los siguientes hacemos uso del concepto *bunburyzar*<sup>1</sup>, es decir, la mecánica cuántica para cada persona adopta diferentes nombres y por consiguiente la óptica cuántica aquí expuesta también adopta diferentes nombres para cada persona, sin que las diferencias sean opuestas.

El principio de correspondencia de Bohr establece que la teoría cuántica debe reproducir los resultados de la física clásica en el límite de grandes números. Así podemos considerar a la mecánica cuántica como una teoría más general que la mecánica clásica y esta última debe emerger de la primera. Entre otros tipos de representaciones para poder explicar el principio de correspondencia, existe una representación especialmente indicada para establecer comparaciones entre las teorías cuántica y clásica, que es la representación de estados coherentes.

Debido en parte a las dificultades que se enfrentaban en los inicios de la mecánica cuántica, Schrödinger en 1926 [1], propuso unos estados cuánticos

---

<sup>1</sup>Oscar Wilde. *La importancia de llamarse Ernesto*.

que se parecieran lo más posible a los estados clásicos, imponiendo para ello la condición de que éstos fueran de mínima dispersión y que su evolución temporal fuese semejante a la de un estado clásico. Después en 1963 Glauber [2] retomó esta idea, definiendo lo que llamamos estados coherentes del campo. Glauber los construyó como estados propios (eigenestados) del operador de aniquilación del oscilador armónico, con el objeto de estudiar las funciones de correlación electromagnéticas, un tema de gran relevancia en óptica cuántica.

Estos estados fueron inicialmente introducidos como los estados cuánticos “más clásicos posibles” del oscilador armónico; esto es, estados con la mínima incertidumbre permitida por el principio de indeterminación de Heisenberg, que al evolucionar a lo largo de la trayectoria clásica no se deforman con el paso del tiempo, manteniendo su coherencia. Sin embargo, estos estados pueden generalizarse y definirse matemáticamente para cualquier sistema cuántico a partir de las propiedades de su grupo dinámico asociado.

Una generalización de los estados coherentes hecha por una deformación del tipo  $\hat{A} = \hat{a}f(\hat{n})$  es introducida en [3], donde proponen unos nuevos estados llamados estados coherentes no lineales que resultan ser estados no clásicos. En cierto límite, los estados coherentes no lineales se transforman en los usuales estados coherentes. Los estados coherentes no lineales fueron inicialmente introducidos como  $f$  estados coherentes, en conexión con el estudio del oscilador cuya frecuencia depende de la energía. Pero en un trabajo realizado por Sivakumar [4], se demuestra que los estados coherentes no lineales pueden ser encontrados de una forma alternativa, demostrando que los fotones agregados de estados coherentes pueden ser interpretados como estados coherentes no lineales debido al arrastre de una función de deformación al aplicar las relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico.

Una de las motivaciones de este trabajo es demostrar que los operadores de creación y aniquilación agregan y substraen un número arbitrario de fotones, pero los operadores de Susskind-Glogower [7] agregan y substraen sólo un fotón. Es decir, el operador de creación del oscilador armónico aplicado a una base representada por los estados número, tiene como resultado otro estado donde el número promedio de fotones no contiene un fotón más, sin embargo la acción de los operadores de Susskind-Glogower aplicados a una base de número generan un número promedio de fotones que siguen una relación lineal respecto al número de fotones promedio del estado anterior, por lo cual el nuevo estado contiene un fotón más.

En un trabajo realizado por Moya Cessa y colaboradores [8], se utiliza un método para agregar fotones a un estado coherente y estos fotones agregados al estado coherente seguirán una relación lineal ya que el estado coherente está representado por la base de número (Fock), y finalmente utilizando el modelo de Jaynes-Cummings [5] para dos fotones que describe a una cavidad que contiene un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético cuantizado como resultado de absorber o emitir dos fotones en el caso de resonancia, los estados coherentes con fotones agregados son generados.



## Estados coherentes con fotones agregados.

Los estados coherentes son importantes en muchos campos de la física y son definidos como eigenestados del operador de aniquilación del oscilador armónico. Una generalización de los estados coherentes hecha por una deformación tipo  $\hat{A} = \hat{a}f(\hat{n})$  es introducida en [2], y proponen unos nuevos estados llamados estados coherentes no lineales que resultan ser estados no clásicos. En el límite  $f(\hat{n}) = 1$ , los estados coherentes no lineales se transforman a los usuales estados coherentes  $|\alpha\rangle$ . Los estados coherentes no lineales fueron inicialmente introducidos como  $f$  estados coherentes, en conexión con el estudio del oscilador cuya frecuencia depende de la energía.

En este capítulo trabajamos con fotones agregados de estados coherentes y estos estados pueden ser interpretados como estados coherentes no lineales [4], bajo la interacción de un átomo de dos niveles y un campo cuantizado vía dos fotones. En [4] se utilizan los operadores de creación y aniquilación, pero debido a que estos operadores crean o destruyen un número arbitrario de fotones, en este capítulo trabajamos con los operadores de Susskind-Glogower [7]. Primero comenzaremos con el estudio y generalización de los estados coherentes a estados coherentes no lineales, después veremos como los fotones agregados de estados coherentes pueden interpretarse como estados coherentes no lineales.

## 2.1. Estados coherentes no lineales.

En mecánica cuántica, cuando hablamos del oscilador armónico es inherente asociar los operadores de creación y aniquilación al oscilador armónico. Los estados coherentes son definidos por medio de los operadores de creación y aniquilación, proporcionan una conexión entre los osciladores cuánticos y clásicos. El primero en definir a los estados coherentes fue E. Schrödinger [1], y después esta idea fue retomada por R. Glauber [2]. Es posible obtener por tres caminos diferentes a los estados coherentes, las tres posibilidades son las siguientes.

**DEFINICIÓN 1** *Los estados coherentes  $|\alpha\rangle$  son estados propios del operador de aniquilación  $\hat{a}$  del oscilador armónico,*

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.1)$$

**DEFINICIÓN 2** *Los estados coherentes  $|\alpha\rangle$  pueden ser obtenidos aplicando el operador de desplazamiento  $\hat{D}(\alpha)$  al estado vacío del oscilador armónico,*

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (2.2)$$

donde el operador de desplazamiento se define como:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (2.3)$$

**DEFINICIÓN 3** *Los estados coherentes  $|\alpha\rangle$  satisfacen la relación de mínima incertidumbre de Heisenberg,*

$$(\Delta\hat{p})(\Delta\hat{q}) = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.4)$$

donde  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  son los operadores de momento y coordenada respectivamente.

Así entonces partiendo de cualquiera de estas 3 definiciones, podemos encontrar utilizando el álgebra del oscilador armónico el estado coherente  $|\alpha\rangle$ .

La noción de los estados coherentes permite el uso del lenguaje y la intuición del desarrollo del estudio de la mecánica clásica de los osciladores armónicos con el fin de tratar su equivalente cuántico, porque la trayectoria del centro del paquete coherente cuántico es la misma que en el caso clásico

y el ancho del paquete es el mínimo posible de acuerdo a la relación de incertidumbre de Heisenberg.

El formalismo de los osciladores armónicos cuánticos es utilizado en muchas situaciones físicas y ha inducido un gran interés en la búsqueda de consecuencias físicas, donde los osciladores son remplazados por deformaciones de los mismos.

En la imagen de Heisenberg las ecuaciones de movimiento para la amplitud del oscilador armónico  $a$  es

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a, \quad (2.5)$$

y el conjugado

$$\frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger. \quad (2.6)$$

Tomando como lo hace Man'ko y colaboradores [2],  $\hat{A} = \hat{a}f(\hat{a}^\dagger\hat{a})$  y  $\hat{A}^\dagger = f(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^\dagger$ , que no es una transformación canónica ya que no preservan las relaciones de conmutación, estos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{A}^\dagger$  evolucionan con las mismas ecuaciones de movimiento, es decir

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -i\omega\hat{A}, \quad \frac{d\hat{A}^\dagger}{dt} = i\omega\hat{A}^\dagger. \quad (2.7)$$

En el espacio de Hilbert sabemos que el estado vacío  $|0\rangle$  satisface

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (2.8)$$

y en completa analogía, también

$$\hat{A}|0\rangle = 0, \quad (2.9)$$

que nos permite construir dos bases en un espacio vectorial teniendo en común este vector. Una base adecuada es la base estándar también llamada de Fock,

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (2.10)$$

que es una base ortonormal. Y otra base es construida utilizando el operador  $\hat{A}^\dagger$ , en analogía con la base anterior, por tanto

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{\hat{A}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.11)$$



Los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{A}^\dagger$  representan las variables dinámicas asociadas con f-osciladores cuánticos. En esta sección discutimos las características algebraicas y las consecuencias de las mismas.

Podemos iniciar recalculando algunas nociones acerca de los operadores del oscilador armónico  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  cuya estructura algebraica indica que  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ . En el espacio de Fock con  $\hat{a} = (\hat{a}^\dagger)^\dagger$  y  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , la base está dada por las eigenfunciones de  $\hat{n}$

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.12)$$

y también se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1; \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \quad (2.13)$$

Introduciendo una función tal que,  $\forall f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ , la función puede ser escrita como

$$f(\hat{n}) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) |j\rangle \langle j|, \quad (2.14)$$

al considerar una distorsión de los operadores de aniquilación  $\hat{a}$  y creación  $\hat{a}^\dagger$  del oscilador armónico de la forma

$$\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1) \hat{a} \quad (2.15)$$

$$\hat{A}^\dagger = f^\dagger(\hat{n}) \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f^\dagger(\hat{n} + 1), \quad (2.16)$$

se encuentran las relaciones de conmutación

$$[\hat{A}, \hat{n}] = \hat{A}, \quad [\hat{A}^\dagger, \hat{n}] = -\hat{A}^\dagger. \quad (2.17)$$

Los estados coherentes fueron originalmente introducidos como eigenestados del operador de aniquilación para el oscilador armónico y son extensamente usados en física, particularmente en óptica cuántica. Por lo tanto este es un concepto de origen algebraico y se pueden construir otros estados utilizando operadores de naturaleza semejante, siguiendo un procedimiento parecido es posible llegar a una clase de estados llamados, estados f-coherentes en el espacio de Fock. Sin embargo los estados f-coherentes pueden no conservarse bajo una evolución temporal.

Construimos los estados f-coherentes de la siguiente forma: tomemos la definición del operador  $\hat{A}$  (2.15), y consideremos a los estados f-coherentes como

eigenestados del operador  $\hat{A}$ , donde estos estados están denotados por  $|\alpha, f\rangle$ . Entonces en un espacio de Hilbert, los estados f-coherentes satisfacen la siguiente relación

$$\hat{A} |\alpha, f\rangle = \alpha |\alpha, f\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.18)$$

Buscando la descomposición de  $|\alpha, f\rangle$  en el espacio de Fock, donde

$$|\alpha, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (2.19)$$

y aplicando el operador  $\hat{A}$  a  $|\alpha, f\rangle$  obtenemos

$$\hat{A} |\alpha, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} f(n+1) \sqrt{n+1} |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (2.20)$$

nos lleva a encontrar los coeficientes  $c_n$ , que están dados por

$$c_n = c_0 \frac{\alpha^n}{[f(n)]! \sqrt{n!}}, \quad \text{con } [f(n)]! = f(0)f(1) \cdots f(n). \quad (2.21)$$

Así que una expresión un poco más detallada para  $|\alpha, f\rangle$  es

$$|\alpha, f\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{[f(n)]! \sqrt{n!}}, \quad (2.22)$$

y la condición de normalización  $\langle \alpha, f | \alpha, f \rangle = 1$  impone que

$$c_0 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n! [f(n)!]^2} \right)^{-1/2}. \quad (2.23)$$

Para enfatizar la dependencia de  $f$  y  $\alpha$ , escribiremos

$$c_0 = N_{f,\alpha} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n! [f(n)!]^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.24)$$

como trabajamos en el espacio de Fock se debe cumplir

$$0 < N_{f,\alpha} < \infty. \quad (2.25)$$

Similar a (2.1) tenemos una definición para los estados coherentes no lineales

DEFINICIÓN 4 *Los estados coherentes no lineales  $|\alpha, f\rangle$  son eigenestados del operador  $\hat{A} = \hat{a}f(\hat{n})$*

$$\hat{A} |\alpha, f\rangle = \alpha |\alpha, f\rangle. \quad (2.26)$$

La definición (2.26) muestra que los estados coherentes no lineales son eigenestados del operador definido por (2.15), y eligiendo  $f(\hat{n}) = 1$  los estados coherentes no lineales  $|\alpha, f\rangle$  se reducen a estados coherentes  $|\alpha\rangle$

## 2.2. Estados coherentes no lineales de fotones agregados

Existe otra forma de llegar a los estados coherentes no lineales. En un trabajo realizado por Sivakumar [4], se encuentran estados coherentes no lineales al agregar fotones al estado coherente  $|\alpha\rangle$ . Para demostrar que los estados coherentes con fotones agregados son estados coherentes no lineales, partimos de la primera de las tres definiciones de los estados coherentes, es decir

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (2.27)$$

multiplicando por  $m$  operadores de creación  $\hat{a}^\dagger$  a esta última ecuación, tenemos que

$$\hat{a}^{\dagger m} \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle, \quad (2.28)$$

utilizando la relación de conmutación  $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger m}] = m\hat{a}^{\dagger(m-1)}$ , la ecuación (??) puede escribirse como

$$\hat{a}^{\dagger m} \hat{a} |\alpha\rangle = (\hat{a}\hat{a}^{\dagger m} - m\hat{a}^{\dagger(m-1)}) |\alpha\rangle = \alpha \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle, \quad (2.29)$$

además sabemos que  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} (\hat{a}\hat{a}^{\dagger m} - \frac{m}{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \hat{a}\hat{a}^{\dagger m}) |\alpha\rangle &= \alpha \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle \\ \hat{a}^{\dagger m} \hat{a} |\alpha\rangle &= (1 - \frac{m}{\hat{n} + 1}) \hat{a}\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle = \alpha \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (2.30)$$

lo cual hace notar que, al conmutar  $\hat{a}^{\dagger m}$  con  $\hat{a}$  deja consigo una función que definimos como

$$f(\hat{n}, m) = 1 - \frac{m}{\hat{n} + 1}, \quad (2.31)$$

entonces

$$f(\hat{n}, m) \hat{a}\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle = \alpha \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle, \quad (2.32)$$

lo cual automáticamente nos lleva a concluir que los estados coherentes con  $m$  fotones agregados  $\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle$  son eigenestados del operador  $f(\hat{n}, m)\hat{a}$ , y comparando (2.3) y (2.32), se concluye que los estados coherentes con fotones agregados son un clase de estados coherentes no lineales y estos a su vez son eigenestados del operador  $f(\hat{n}, m)\hat{a}$ , es decir

$$f(\hat{n}, m)\hat{a}\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle = f(\hat{n}, m)\hat{a} |\alpha, m\rangle = \alpha |\alpha, m\rangle \quad (2.33)$$

donde el estado coherente no lineal es definido como

$$|\alpha, m\rangle = \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sqrt{\frac{(k+m)!}{k!}} |k+m\rangle, \quad (2.34)$$

lo cual finalmente demuestra que los estados  $|\alpha, m\rangle$  son eigenestados del operador  $f(\hat{n}, m)\hat{a}$  y estos eigenestados son reconocidos como estados coherentes no lineales. En otras palabras,  $|\alpha, m\rangle$  es un estado coherente no lineal y éste nace de agregar  $m$  fotones al estado coherente  $|\alpha\rangle$ .

Una de las motivaciones para la realización de este texto es que el operador de creación  $\hat{a}^{\dagger}$  agrega un número arbitrario de fotones; es decir, los fotones agregados por el operador de creación  $\hat{a}^{\dagger}$  al estado coherente  $|\alpha\rangle$  son fotones que no siguen una relación lineal. Por lo tanto, el operador de creación  $\hat{a}^{\dagger}$  agrega un número arbitrario de fotones.

Para mostrar esto tomemos en general un estado definido por una combinación lineal de estados número  $|n\rangle$ . Sea  $|\phi_0\rangle$  una combinación lineal de estados número, definida como

$$|\phi_0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} C_k |k\rangle, \quad (2.35)$$

y el número promedio de fotones del estado  $|\phi_0\rangle$  es

$$\bar{n}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 k. \quad (2.36)$$

Ahora apliquemos el operador de creación  $\hat{a}$  al estado  $|\phi_0\rangle$ , pero este nuevo estado resulta no estar normalizado, por lo que después de aplicar la condición de normalización obtenemos una expresión para este nuevo estado que lo denotamos por  $|\phi_{\hat{a}^{\dagger}}\rangle$ , y la expresión para este estado es

$$|\phi_{\hat{a}^{\dagger}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |C_k|^2}} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sqrt{k+1} |k+1\rangle, \quad (2.37)$$

y el número promedio de fotones del estado  $|\phi_{\hat{a}^\dagger}\rangle$  es

$$\begin{aligned}\bar{n}_1 &= \langle \phi_{\hat{a}^\dagger} | \hat{n} | \phi_{\hat{a}^\dagger} \rangle, \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 (k+1)} \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 (k+1)^2,\end{aligned}\quad (2.38)$$

y es notorio que el número de fotones  $\bar{n}_1 \neq \bar{n}_0 + 1$ , es decir, el operador de creación  $\hat{a}^\dagger$  no agrega un solo fotón, sino un número arbitrario de fotones, que para un caso particular como el siguiente, donde el estado  $|\phi_0\rangle$  es

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |k\rangle),\quad (2.39)$$

el número de fotones promedio de  $|\phi\rangle$  resulta

$$\begin{aligned}\bar{n}_0 &= \langle \phi_0 | \hat{n} | \phi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2}(n+k).\end{aligned}\quad (2.40)$$

Mientras que al aplicar el operador de creación  $\hat{a}^\dagger$  a este caso particular del estado  $|\phi_0\rangle$ , obtenemos

$$|\phi_{\hat{a}^\dagger}\rangle = \sqrt{\frac{2}{n+k+2}} \left( \sqrt{k+1} |k+1\rangle + \sqrt{n+1} |n+1\rangle \right).\quad (2.41)$$

Entonces ahora podemos calcular de la misma manera que lo hicimos para el estado  $|\phi_0\rangle$ , el número promedio de fotones para el estado  $|\phi_{\hat{a}^\dagger}\rangle$ , que es resultado de aplicar el operador de creación  $\hat{a}^\dagger$  al estado  $|\phi_0\rangle$ , y por ende el número promedio de fotones para este estado es

$$\bar{n}_1 = \langle \phi_{\hat{a}^\dagger} | \hat{n} | \phi_{\hat{a}^\dagger} \rangle = \frac{(n+1)^2 + (k+1)^2}{n+k+2},\quad (2.42)$$

entonces comparando  $\bar{n}_0$  y  $\bar{n}_1$  nos damos cuenta que el operador de creación  $\hat{a}^\dagger$  no crea un fotón, sino que crea un número arbitrario de fotones.

Con este resultado estamos en la necesidad de encontrar un operador que no agregue un número arbitrario de fotones, sino sólo un fotón. El operador que agrega solo un fotón es el operador de Susskind-Glogower [7], definido como

$$\hat{V}^\dagger = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}.\quad (2.43)$$

Partimos de un caso general como en el anterior, y aplicando el operador  $\hat{V}^\dagger$  al estado  $|\phi_0\rangle$ , tenemos en general que el nuevo estado denotado por  $|\phi_{\hat{V}^\dagger}\rangle$  es

$$|\phi_{\hat{V}^\dagger}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} C_k |k+1\rangle, \quad (2.44)$$

que resulta estar normalizado, es decir,  $\langle\phi_{\hat{V}^\dagger}|\phi_{\hat{V}^\dagger}\rangle = 1$ . El número de fotones promedio de este estado es

$$\begin{aligned} \bar{n}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 (k+1), \\ &= \hat{n}_0 + 1, \end{aligned} \quad (2.45)$$

que significa que el operador  $\hat{V}^\dagger$  es el operador de creación que agrega solo un fotón al estado  $|\phi_0\rangle$ . Nuevamente tomamos el caso particular (2.39) y aplicamos a este estado el operador  $\hat{V}^\dagger$ , es decir,

$$|\phi_2\rangle = \hat{V}^\dagger |\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+1\rangle + |k+1\rangle), \quad (2.46)$$

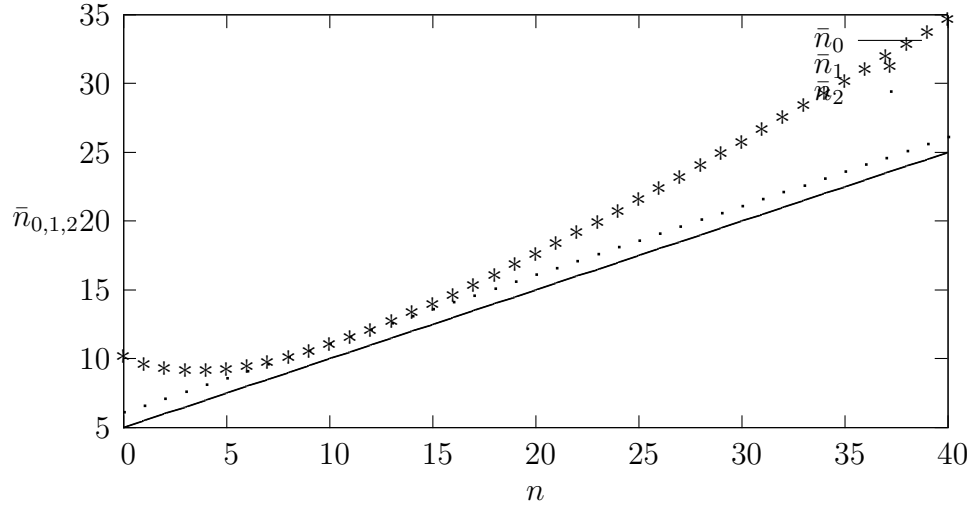
y este estado  $|\phi_2\rangle$  ya se encuentra normalizado y de inmediato podemos calcular el número de fotones promedio para el estado  $|\phi_2\rangle$  después de haber aplicado el operador  $\hat{V}^\dagger$ . Entonces el número promedio de fotones  $\bar{n}_2$  es

$$\bar{n}_2 = \frac{1}{2}(n+k+2), \quad (2.47)$$

que demuestra que el estado  $|\phi_2\rangle$  contiene realmente un fotón más que el estado  $|\phi_0\rangle$ , es decir, el operador de Susskind-Glogower agrega un solo fotón a diferencia del operador  $\hat{a}^\dagger$ . Ejemplificamos en la figura 2.2 el número promedio de fotones del estado  $|\phi_0\rangle$ ,  $|\phi_{\hat{a}^\dagger}\rangle$  y del estado  $|\phi_{\hat{V}^\dagger}\rangle$ .

Retomando la línea de ideas de los estados coherentes no lineales de fotones agregados  $|\alpha, m\rangle = \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle$ , podemos construir de la misma forma utilizando ahora el operador de Susskind-Glogower  $\hat{V}^\dagger$ , estados coherentes no lineales de fotones agregados. Como ya lo hemos hecho, tomemos una de las definiciones para encontrar estados coherentes  $|\alpha\rangle$  y multipliquemos por  $\hat{V}^{\dagger m}$ , por lo tanto

$$\hat{V}^{\dagger m} \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha \hat{V}^{\dagger m} |\alpha\rangle. \quad (2.48)$$


 Figura 2.1: Número de fotones promedio  $\bar{n}_0$ ,  $\bar{n}_1$  y  $\bar{n}_2$ .

Ya que  $\hat{V}^\dagger$  está definido como

$$\hat{V}^\dagger = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n} + 1}}, \quad (2.49)$$

entonces para encontrar una relación de  $\hat{V}^{\dagger m}$ , hacemos uso de las relaciones  $\hat{a}^\dagger f(\hat{n} + 1) = f(\hat{n})\hat{a}^\dagger$ , de la siguiente forma

$$(\hat{V}^\dagger)^m = \overbrace{\hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n} + 1}} \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n} + 1}} \cdots \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n} + 1}}}^{m \text{ veces}} = \hat{a}^{\dagger m} \sqrt{\frac{\hat{n}!}{(\hat{n} + m)!}}. \quad (2.50)$$

Con esto es posible calcular la función  $f(\hat{n}, m)$  y el estado coherente no lineal  $|\alpha, m\rangle$ . De las ecuaciones (2.48) y (2.50) encontramos que

$$\hat{V}^{\dagger m} \hat{a} |\alpha\rangle = \hat{a}^{\dagger m} \sqrt{\frac{\hat{n}!}{(\hat{n} + m)!}} \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha \hat{V}^{\dagger m} |\alpha\rangle, \quad (2.51)$$

que al utilizar las relaciones de conmutación de los operadores  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  y que

$\hat{a}^\dagger f(\hat{n} + 1) = f(\hat{n})\hat{a}^\dagger$ , esta última ecuación se convierte en

$$\hat{V}^{\dagger m} \hat{a} |\alpha\rangle = \left(1 - \frac{m}{\hat{n} + 1}\right) \sqrt{\frac{\hat{n} + 1}{\hat{n} + 1 - m}} \hat{a} \hat{V}^{\dagger m} |\alpha\rangle = f(\hat{n}, m) \hat{a} |\alpha, m\rangle, \quad (2.52)$$

donde el estado coherente no lineal proveniente de agregar fotones al estado coherente  $|\alpha\rangle$  es

$$|\alpha, m\rangle = \hat{V}^{\dagger m} |\alpha\rangle, \quad (2.53)$$

y la función  $f(\hat{n}, m)$  es

$$f(\hat{n}, m) = \left(1 - \frac{m}{\hat{n} + 1}\right) \sqrt{\frac{\hat{n} + 1}{\hat{n} + 1 - m}}. \quad (2.54)$$

**DEFINICIÓN 5** *Los estados coherentes no lineales con fotones agregados  $|\alpha, m\rangle$ , son eigenestados del operador  $f(\hat{n}, m)\hat{a}$*

$$f(\hat{n}, m)\hat{a} |\alpha, m\rangle = \alpha |\alpha, m\rangle \quad (2.55)$$

Tenemos la posibilidad de trabajar con el estado coherente no lineal  $|\alpha, m\rangle$ , y la forma explícita de este estado coherente no lineal viene heredada de agregar fotones al estado coherente  $|\alpha\rangle$ , y es la siguiente

$$|\alpha, m\rangle = \hat{V}^{\dagger m} |\alpha\rangle = e^{|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n + m\rangle. \quad (2.56)$$

Entonces, a partir de este estado coherente no lineal  $|\alpha, m\rangle$ , podemos encontrar una serie de propiedades en analogía con los estados coherentes  $|\alpha\rangle$ .

### 2.2.1. Propiedades de los estados coherentes no lineales de fotones agregados de estados coherentes

Ahora tenemos la posibilidad de encontrar una serie de propiedades de los estados coherentes no lineales  $|\alpha, m\rangle$ , estas propiedades serán discutidas como una analogía de las propiedades de los estados coherentes  $|\alpha\rangle$ . Es importante comenzar mostrando que los estados coherentes  $|\alpha, m\rangle$  ya no minimizan la desigualdad de Heisenberg como en el caso de los estados coherentes  $|\alpha\rangle$ , esto se muestra al calcular los valores esperados del operador de coordenada



$\hat{q}$  y del operador de momento  $\hat{p}$  como sigue. Sabemos que los operadores de coordenada y momento del oscilador armónico están representados en función de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico de la siguiente forma

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.57)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (2.58)$$

y, sabemos que los valores esperados de los operadores de coordenada y momento en la base de los estados coherentes es

$$\langle \hat{q} \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\alpha + \alpha^*) \quad (2.59)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\alpha^* - \alpha), \quad (2.60)$$

que nos lleva al producto

$$(\Delta\hat{p})(\Delta\hat{q}) = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.61)$$

lo cual corresponde al valor mínimo posible para la desigualdad de Heisenberg, es decir, los estados coherentes minimizan el principio de incertidumbre, con varianzas que están igualmente distribuidas sobre un círculo en el espacio fase.

Los estados coherentes no lineales  $|\alpha, m\rangle$  no minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg, debido a que

$$\begin{aligned} \langle \hat{q} \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\langle \alpha, m | \hat{a} | \alpha, m \rangle + \langle \alpha, m | \hat{a}^\dagger | \alpha, m \rangle), \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k} \sqrt{k+m+1}}{\sqrt{k!(k+1)!}} (\alpha + \alpha^*), \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\langle \alpha, m | \hat{a} | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, m | \hat{a}^\dagger | \alpha, m \rangle), \\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k} \sqrt{k+m+1}}{\sqrt{k!(k+1)!}} (\alpha - \alpha^*). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Y en los cálculos de  $\langle \hat{q}^2 \rangle$  y  $\langle \hat{p}^2 \rangle$ , aparecen términos de la siguiente naturaleza,

$$\langle \alpha, m | \hat{a}^2 | \alpha, m \rangle = \alpha^2 e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k} \sqrt{(k+m+2)(k+m+1)}}{\sqrt{k!(k+2)!}}, \quad (2.64)$$

$$\langle \alpha, m | \hat{a}^{\dagger 2} | \alpha, m \rangle = \alpha^{*2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k} \sqrt{(k+m+2)(k+m+1)}}{\sqrt{k!(k+2)!}}, \quad (2.65)$$

$$\langle \alpha, m | \hat{a} \hat{a}^{\dagger} | \alpha, m \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k} (k+m+1)}{k!}, \quad (2.66)$$

$$\langle \alpha, m | \hat{a}^{\dagger} \hat{a} | \alpha, m \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2k} (k+m)}{k!}, \quad (2.67)$$

por lo tanto es imposible conseguir un mínimo para la relación de incertidumbre de Heisenberg, ya que

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{q})^2 &= \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2 \neq \frac{\hbar}{2\omega} \\ (\Delta \hat{p})^2 &= \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \neq \frac{\hbar\omega}{2}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

por esto, a diferencia de los estados coherentes  $|\alpha\rangle$  que minimizan la relación de incertidumbre, los estados coherentes  $|\alpha, m\rangle$  no lo hacen.

Ahora calculamos la distribución de fotones para un estado coherente  $|\alpha, m\rangle$ , que viene dada por la siguiente expresión

$$P(n) = |\langle n | \alpha, m \rangle|^2, \quad (2.69)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle n | \alpha, m \rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \langle n | k + m \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^{n-m}}{\sqrt{(n-m)!}}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

entonces

$$P(n, m) = |\langle n | \alpha, m \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(n-m)}}{(n-m)!}, \quad (2.71)$$

y, como sabemos, el número promedio de fotones de un estado coherente es

$$\bar{n} = |\alpha|^2, \quad (2.72)$$

con esto, finalmente, la distribución de fotones en un estado coherente no lineal resulta ser una distribución Gaussiana dada por la siguiente expresión,

$$P(n, m) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^{n-m}}{(n-m)!}. \quad (2.73)$$

Mostramos en las figuras 2.2 y 2.3 la distribución de fotones en un estado coherente no lineal para diferentes valores  $\bar{n}$  y  $m$ .

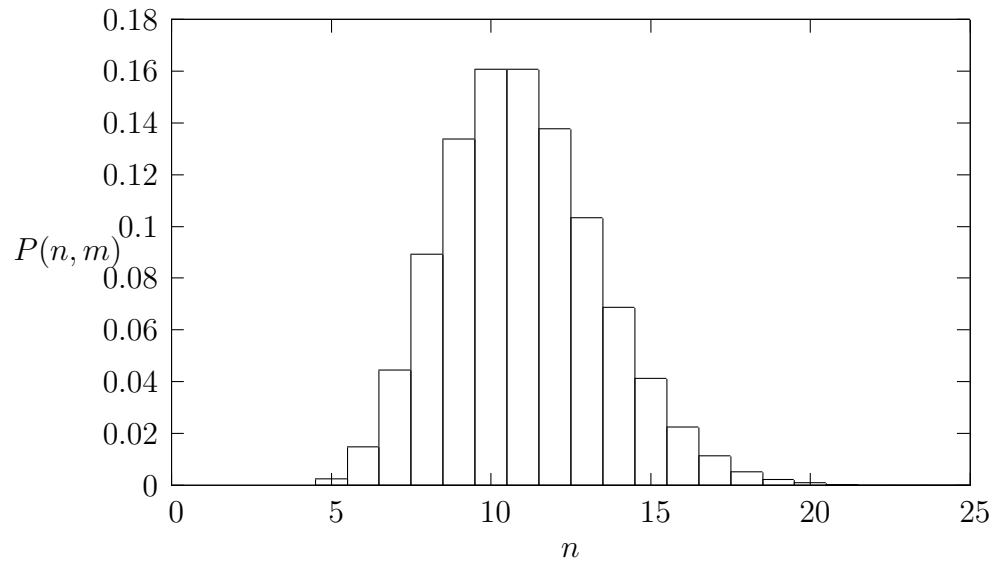


Figura 2.2: *Distribución de fotones para  $\bar{n} = 6$  y  $m = 5$ .*

Una propiedad que no cumplen los estados coherentes no lineales  $|\alpha, m\rangle$  a diferencia de los estados coherentes  $|\alpha\rangle$ , es la relación de completéz. Esto tiene como consecuencia no poder usar a los estados como una base para cualquier otro estado. Para mostrar esto calculamos la integral

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha, m\rangle \langle \alpha, m| d^2\alpha, \quad (2.74)$$

lo cual, al utilizar la forma explícita de los estados coherentes no lineales,

$$|\alpha, m\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k+m\rangle, \quad (2.75)$$

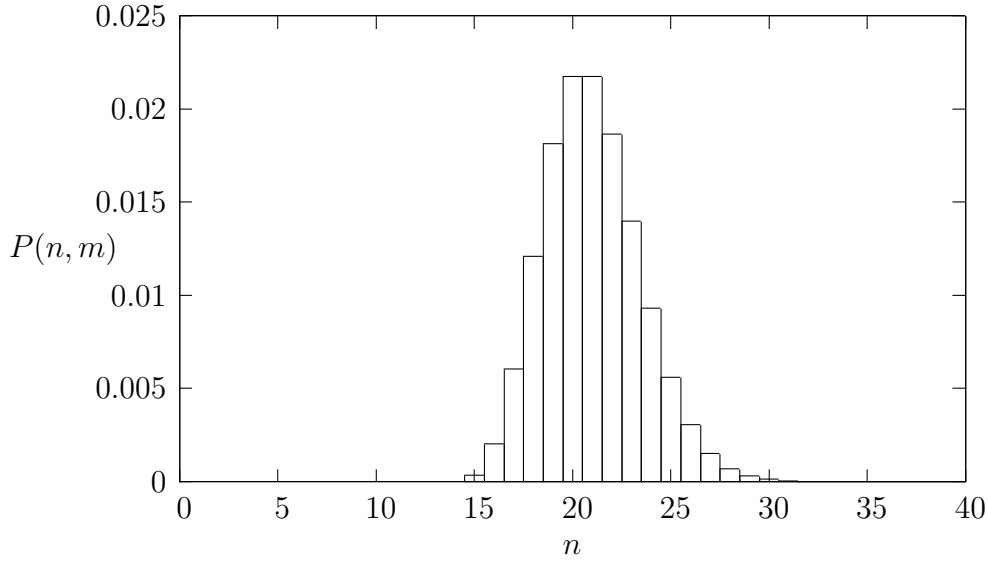


Figura 2.3: Distribución de fotones para  $\bar{n} = 8$  y  $m = 15$ .

que se convierte en

$$\begin{aligned}
 \int |\alpha, m\rangle \langle \alpha, m| d^2\alpha &= \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{\alpha^{*k'} \alpha^k e^{-|\alpha|^2}}{\sqrt{k'!k!}} |k+m\rangle \langle k'+m| d^2\alpha \\
 &= \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|k+m\rangle \langle k'+m|}{\sqrt{k'!k!}} \int \int r^{k'} r^k e^{-r^2} e^{-i\theta k'} e^{i\theta k} r dr d\theta \\
 &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|k+m\rangle \langle k+m|}{k!} \int (r^2)^k e^{-r^2} r dr \\
 &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} |k+m\rangle \langle k+m|, \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

lo cual implica que al sustituir este resultado en (2.74) lo siguiente,

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha, m\rangle \langle \alpha, m| d^2\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} |k+m\rangle \langle k+m| = 1 - \sum_{k=0}^m |k\rangle \langle k|, \tag{2.77}$$

que demuestra que los estados coherentes no lineales de fotones agregados

$|\alpha, m\rangle$  no cumplen con la relación de completez, pues perdemos los primeros elementos de la base.

### 2.3. Función de Husimi para un estado coherente no lineal $\hat{V}^{\dagger m} |\alpha\rangle$ .

Las funciones de cuasi-probabilidad juegan un papel importante en la mecánica cuántica, ya que proporcionan una realidad clásica de una pseudo realidad cuántica. Las funciones de cuasi-probabilidad sirven como herramientas de reconstrucción de estados cuánticos de un sistema dado, campos cuantizados, estados vibracionales de un ión, el estado cuántico de un espejo en movimiento, etc. Pero también las funciones de cuasi-probabilidad son una herramienta para obtener información de fase del oscilador armónico, ya que no existe un operador de fase para obtener dicha información.

En esta sección daremos un vistazo a las funciones de cuasi-probabilidad más importantes, como lo son, la función de Wigner [9], la función  $Q$  de Husimi [10] y la función de Glauber-Sudarshan  $P$ .

Las tres funciones de cuasi-probabilidad están conectadas con el orden en el que se escriben los operadores de creación y aniquilación, es decir

- *Orden normal* Un producto de  $m$  operadores de aniquilación y  $n$  operadores de creación es llamado de orden normal, si todos los operadores de aniquilación están a la derecha, es decir, tienen la forma

$$(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m \quad (2.78)$$

- *Orden anti-normal* Un producto de  $m$  operadores de aniquilación y  $n$  operadores de creación es llamado de orden anti-normal, si todos los operadores de aniquilación están a la izquierda, es decir

$$\hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \quad (2.79)$$

La función de Husimi es usualmente expresada como el valor esperado de estados coherentes del operador de densidad, es decir,

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (2.80)$$

y tiene como representación alternativa

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} Tr[\hat{\rho} e^{-\beta^* \hat{a}} e^{\beta \hat{a}^\dagger}] d^2\beta, \quad (2.81)$$

es importante hacer notar que,  $\hat{\rho}$  es un operador positivo que nos lleva a concluir que,  $Q(\alpha) \geq 0$ . También un resultado de suma importancia es al calcular una integral del tipo

$$\int Q(\alpha) \alpha^k \alpha^{*n} d^2\alpha = Tr \left[ \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| \hat{a}^{\dagger n} \hat{\rho} \hat{a}^k \right]. \quad (2.82)$$

Utilizando la relación de completez  $\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = 1$  y las propiedades de traza, la última ecuación se transforma en

$$\int Q(\alpha) \alpha^k \alpha^{*n} d^2\alpha = Tr[\hat{a}^k \hat{a}^{\dagger n} \hat{\rho}] = \langle \hat{a}^k \hat{a}^{\dagger n} \rangle, \quad (2.83)$$

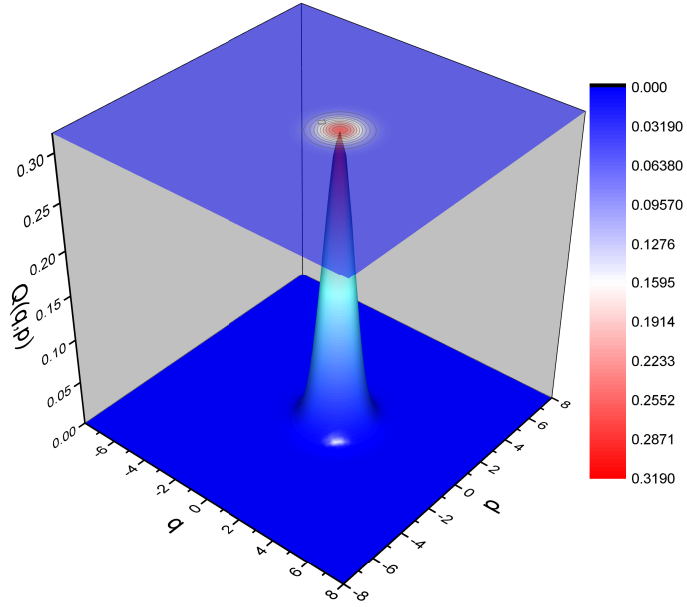
lo cual significa que, la función de Husimi  $Q$  puede ser utilizada para calcular promedios donde los operadores de creación y aniquilación siguen un orden anti-normal.

Para un estado coherente  $\hat{\rho} = |\beta\rangle \langle\beta|$ , la función de Husimi es

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

En la figura 2.4 mostramos la función de Husimi para un estado coherente en el espacio de fase. La figura 2.4 es encontrada en distintos libros de texto, es importante decir que los estados coherentes minimizan el principio de incertidumbre de Heisenberg, y en esta figura es notorio que la proyección de la distribución de probabilidades en el espacio fase representada por la función de Husimi es un disco que se conservara a lo largo de las trayectorias en el espacio fase.

En este trabajo hemos definido a los estados coherentes no lineales y hemos encontrado diferentes propiedades en analogía con los estados coherentes que no son conservadas, en las figuras 2.5 y 2.6 mostramos que los estados coherentes no lineales representados en el espacio fase por la función de Husimi se alejan de la función de Husimi de un estado coherente conforme aumentamos el número de fotones. La función de Husimi para un estado


 Figura 2.4: *Función de Husimi para  $\beta = 1$ .*

coherente no lineal es encontrada de la siguiente manera: si el operador de densidad es  $\hat{\rho} = |\beta, m\rangle \langle \beta, m|$ , entonces la función de Husimi es

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \beta, m \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.85)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta, m \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] \sum_{k', k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*k'}}{\sqrt{k'!}} \frac{\beta^k}{\sqrt{k!}} \langle k' | k + m \rangle, \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*(k+m)}}{\sqrt{(k+m)!}} \frac{\beta^k}{\sqrt{k!}}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

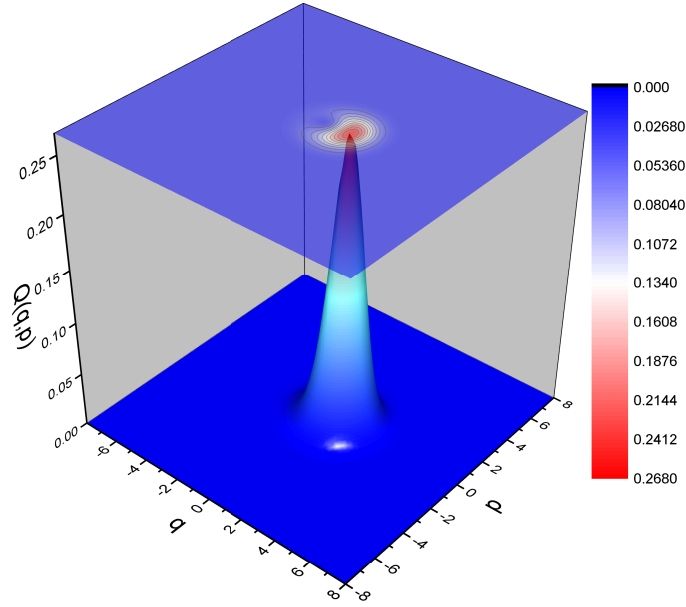


Figura 2.5: *Función de Husimi para  $\beta = 1$  y  $m = 1$ .*

Por lo tanto la función de Husimi para un estado coherente no lineal es

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)] \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*(k+m)}}{\sqrt{(k+m)!}} \frac{\beta^k}{\sqrt{k!}} \right|^2. \quad (2.87)$$

Hasta este momento hemos encontrado algunas de las propiedades de los estados coherentes no lineales  $|\alpha, m\rangle$ , y también hemos encontrado la función de Husimi. Los estados coherentes no lineales con fotones agregados  $|\alpha, m\rangle$ , no conservan todas las características de los estados coherentes  $|\alpha\rangle$ . Uno llega a pensar que al agregar fotones a un estado coherente el nuevo estado heredaría las características de los estados coherentes, sin embargo hemos demostrado que estas características no son heredadas a los estados coherentes no lineales.

Pero después de hablar un poco acerca de las propiedades de los estados coherentes no lineales  $|\alpha, m\rangle$  es necesario extender el contexto y llegar a la



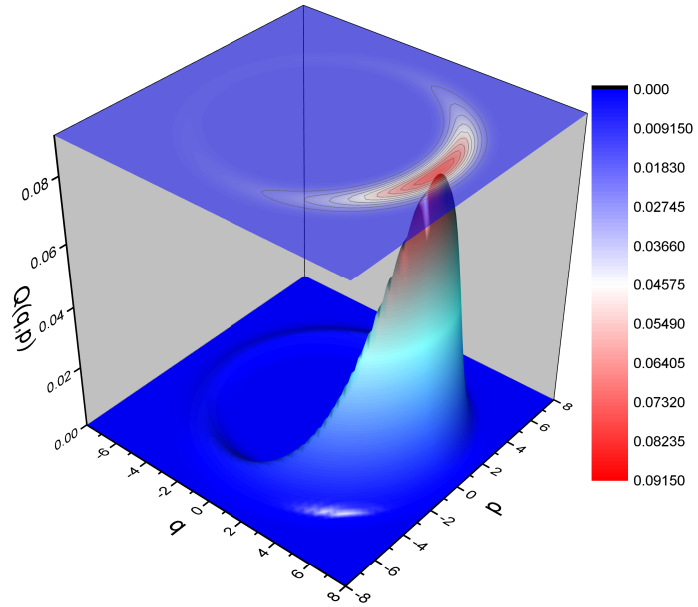


Figura 2.6: *Función de Husimi para  $\beta = 1$  y  $m = 34$ .*

generación de este tipo de estados coherentes no lineales. En la siguiente sección veremos cómo podemos generar este tipo de estados coherentes no lineales.

## Generación de estados coherentes no lineales con fotones agregados de estados coherentes.

En este capítulo estudiamos la generación de estados coherentes no lineales  $|\alpha, m\rangle$ , para la generación de este tipo de estados, utilizamos un modelo que describe la interacción de un átomo de dos niveles mas un campo electromagnético cuantizado y estos interactuando mediante la absorción y emisión de dos fotones, el modelo que describe estos procesos es el modelo de Jaynes-Cummings para dos fotones [11]. Aquí encontraremos el operador de evolución del sistema, lo cual nos llevará a calcular los resurgimientos y colapsos para ciertas condiciones al resolver la ecuación de Schrödinger en la imagen de interacción. Al obtener el operador de evolución podemos obtener toda la información necesaria del sistema, pero con este resultado propondremos cómo ir obteniendo estados coherentes no lineales con fotones agregados.

### 3.1. Modelo de Jaynes-Cummings en interacción de dos fotones

Cuando tenemos un modelo tan sencillo, pero al mismo tiempo tan poderoso, como el modelo de Jaynes-Cummings [5], es posible obtener mucha información de la evolución temporal del sistema que describe dicho modelo. En esta sección mostraremos como, a partir del modelo de Jaynes-Cummings, generar estados coherentes no lineales  $|\alpha, m\rangle$ . Comenzaremos utilizando el hamiltoniano de Jaynes-Cummings cuando la luz interactúa con la materia en

una transición resonante emitiendo dos fotones o absorbiendo dos fotones. Entonces el Hamiltoniano que describe este tipo en la aproximación de onda rotante es

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z + \omega \hat{n} + g(\hat{a}^2 \hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{S}_-), \quad (3.1)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento,  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación respectivamente,  $\hat{S}_+ = |e\rangle \langle g|$  y  $\hat{S}_- = |g\rangle \langle e|$ , donde identificamos al estado base como  $|g\rangle$  y al estado excitado como  $|e\rangle$ . Entonces el hamiltoniano (3.1) puede ser visto como la contribución de un hamiltoniano no perturbado

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{S}_z + \omega \hat{n}, \quad (3.2)$$

que no es más que la suma de las energías del átomo libre y el campo electromagnético dentro de una cavidad. Donde

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}(|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

mientras que la perturbación, en este caso el término de interacción del átomo-campo, es representado por

$$\hat{H}_1 = g(\hat{a}^2 \hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{S}_-). \quad (3.4)$$

En la figura 3.1 se muestra uno de los términos del hamiltoniano  $H_1$ , en

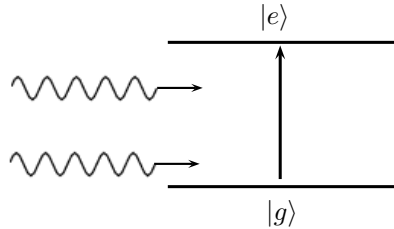


Figura 3.1: *El átomo es excitado absorbiendo dos fotones*

donde el átomo se encuentra en el estado base y en el caso de resonancia absorbe dos fotones y el átomo sube al estado excitado. De la figura 3.2 podemos notar que el segundo término del hamiltoniano describe procesos

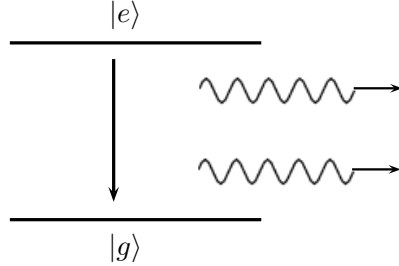


Figura 3.2: *El átomo decae al estado base emitiendo dos fotones*

donde el átomo se encuentra en un estado excitado y decae al estado base emitiendo dos fotones.

El Hamiltoniano  $\hat{H}_1$  es conocido como el Hamiltoniano de interacción que describe procesos de absorción y emisión de dos fotones respectivamente en aproximación de onda rotante, en un cavidad donde se encuentra un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético vía dos fotones.

Debido a que el hamiltoniano (3.1) puede ser expresado como una suma de hamiltonianos, es decir

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z + \omega \hat{n} + g(\hat{a}^2 \hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{S}_-) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (3.5)$$

trabajando en la imagen de interacción, la ecuación de de Schrödinger se puede escribir como

$$i \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}_I |\psi\rangle \quad (\hbar = 1), \quad (3.6)$$

donde el hamiltoniano de interacción está dado por

$$\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_1 e^{-i\hat{H}_0 t}, \quad (3.7)$$

al desarrollar el hamiltoniano  $\hat{H}_I$  encontramos que

$$\hat{H}_I = e^{i\omega_0 \hat{S}_z t} e^{i\omega \hat{n} t} \hat{H}_1 e^{-i\omega_0 \hat{S}_z t} e^{-i\omega \hat{n} t}, \quad (3.8)$$

donde aparecen términos al expresar  $\hat{H}_1$  explícitamente como los siguientes

$$e^{i\omega \hat{n} t} \hat{a}^2 e^{-i\omega \hat{n} t} \quad e^{i\omega \hat{n} t} \hat{a}^{\dagger 2} e^{-i\omega \hat{n} t} \quad (3.9)$$

$$e^{i\omega_0 \hat{S}_z t} \hat{S}_+ e^{-i\omega_0 \hat{S}_z t} \quad e^{i\omega_0 \hat{S}_z t} \hat{S}_- e^{-i\omega_0 \hat{S}_z t} \quad , \quad (3.10)$$

que al utilizar el Lema de Hadamard,

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (3.11)$$

y la relación

$$\hat{a}^\dagger f(\hat{n} + 1) = f(\hat{n})\hat{a}^\dagger \quad \hat{a}f(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1)\hat{a}, \quad (3.12)$$

podemos transformar las relaciones (3.9) y (3.10) en

$$e^{i\omega\hat{n}t}\hat{a}^2e^{-i\omega\hat{n}t} = \hat{a}^2e^{-i2\omega t} \quad e^{i\omega\hat{n}t}\hat{a}^{\dagger 2}e^{-i\omega\hat{n}t} = \hat{a}^{\dagger 2}e^{i2\omega t} \quad (3.13)$$

$$e^{i\omega_0\hat{S}_z t}\hat{S}_+e^{-i\omega_0\hat{S}_z t} = \hat{S}_+e^{i\omega_0 t} \quad e^{i\omega_0\hat{S}_z t}\hat{S}_-e^{-i\omega_0\hat{S}_z t} = \hat{S}_-e^{-i\omega_0 t} \quad , \quad (3.14)$$

con estos resultados el hamiltoniano de interacción (3.7) se convierte en

$$\hat{H}_I = g(\hat{a}^2\hat{S}_+e^{i(\omega_0-2\omega)t} + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{S}_-e^{-i(\omega_0-2\omega)t}). \quad (3.15)$$

En resonancia, es decir  $\omega_0 = 2\omega$ , el hamiltoniano de interacción se reduce a

$$\hat{H}_I = g(\hat{a}^2\hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{S}_-). \quad (3.16)$$

Al regresar a la ecuación de Schrödinger (3.6), podemos integrarla ya que que el hamiltoniano  $\hat{H}_I$  no depende explícitamente del tiempo, por lo tanto

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(t=0)\rangle, \quad (3.17)$$

donde  $\hat{U}(t)$  es el operador de evolución del sistema átomo-campo de un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético cuantizado emitiendo o absorbiendo dos fotones respectivamente, y está dado por

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}_I t}. \quad (3.18)$$

Ahora tenemos la posibilidad de encontrar la evolución del vector de estado  $|\psi(t)\rangle$ , aplicando el operador de evolución  $\hat{U}(t)$ , al vector de estado al tiempo  $t = 0$ . Pero primero tenemos que encontrar una expresión mas detallada del operador de evolución. Esto se hace al tomar la serie de Taylor del operador de evolución  $\hat{U}(t)$  de la siguiente manera,

$$\hat{U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (gt)^{2k} (\hat{a}^2\hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{S}_-)^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (gt)^{2k+1} (\hat{a}^2\hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{S}_-)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (3.19)$$

Al revisar la propiedades de las matrices,

$$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

nos lleva a relaciones del siguiente tipo,

$$(\hat{a}^2 \hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{S}_-)^{2k} = \begin{pmatrix} (\hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2})^k & 0 \\ 0 & (\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2)^k \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$(\hat{a}^2 \hat{S}_+ + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{S}_-)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (\hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2})^k \hat{a}^2 \\ (\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2)^k \hat{a}^{\dagger 2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Utilizando estas dos relaciones en la ecuación (3.19), el operador de evolución del sistema toma la forma

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) & -i \sin(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) \frac{1}{\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}} \hat{a}^2 \\ -i \sin(gt\sqrt{\hat{n}(\hat{n}-1)}) \frac{1}{\sqrt{\hat{n}(\hat{n}-1)}} \hat{a}^{\dagger 2} & \cos(gt\sqrt{\hat{n}(\hat{n}-1)}) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Tomando la expresión de los operadores de Susskind-Glogower encontramos finalmente, una expresión para el operador de evolución,

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) & -i \sin(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) \hat{V}^2 \\ -i \hat{V}^{\dagger 2} \sin(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) & \cos(gt\sqrt{\hat{n}(\hat{n}-1)}) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Ahora tenemos la posibilidad de calcular una expresión de suma importancia como lo es la inversión atómica, definida como la diferencia de la población del estado excitado menos la población del estado base, es decir,  $W(t) = P_e(t) - P_g(t)$ , y que tiene la siguiente expresión

$$W(t) = \langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle, \quad (3.25)$$

ya que el vector de estado del sistema está descrito por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle, \quad (3.26)$$

y ya conocemos el operador de evolución del sistema  $\hat{U}(t)$ , entonces, sólo nos queda saber cuál es la condición inicial para el vector de estado. Como un caso más o menos general consideremos en el tiempo  $t = 0$ , un estado

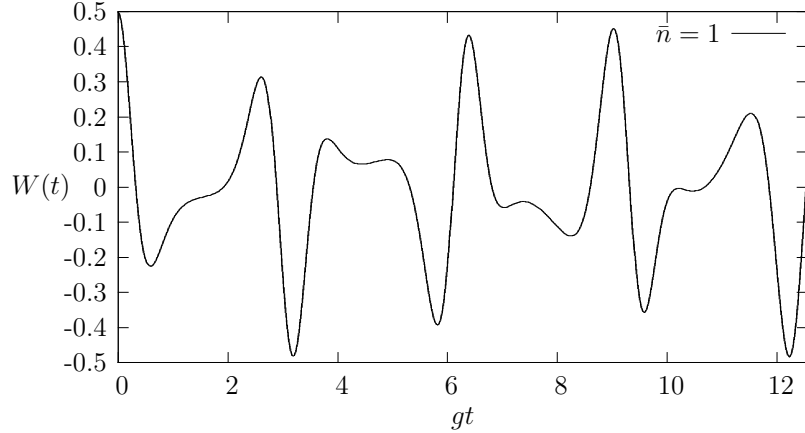


Figura 3.3: *Inversión atómica para un estado coherente con  $\bar{n} = 1$ .*

como combinación lineal de estados de número que se encuentra en el estado excitado del átomo de dos niveles, es decir,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle |e\rangle, \quad (3.27)$$

entonces el vector de estado queda expresado a cualquier tiempo  $t$  como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(gt\sqrt{(n+1)(n+2)}) |n\rangle |e\rangle \\ &\quad - i\hat{V}^{\dagger 2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(gt\sqrt{(n+1)(n+2)}) |n\rangle |g\rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

y al calcular la inversión atómica se encuentra la siguiente expresión,

$$W(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos(2gt\sqrt{(n+1)(n+2)}), \quad (3.29)$$

donde  $|C_n|^2$  es la probabilidad de encontrar al estado inicial en un estado número  $|n\rangle$ . Por lo tanto al tomar un caso particular como lo son los estados coherentes, que corresponden a una superposición de estados número de una

forma particular, se encuentra que para los estados coherentes como ya hemos estudiado en capítulos anteriores, la probabilidad  $P(n) = |C_n|^2$  es

$$P(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (3.30)$$

Con este resultado podemos obtener la inversión atómica  $W(t)$  para un estado que al tiempo  $t = 0$ , es un estado coherente, por lo tanto para este caso particular pero significativo, la inversión atómica es

$$W(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{n!} \cos(2gt \sqrt{(n+1)(n+2)}) \quad (3.31)$$

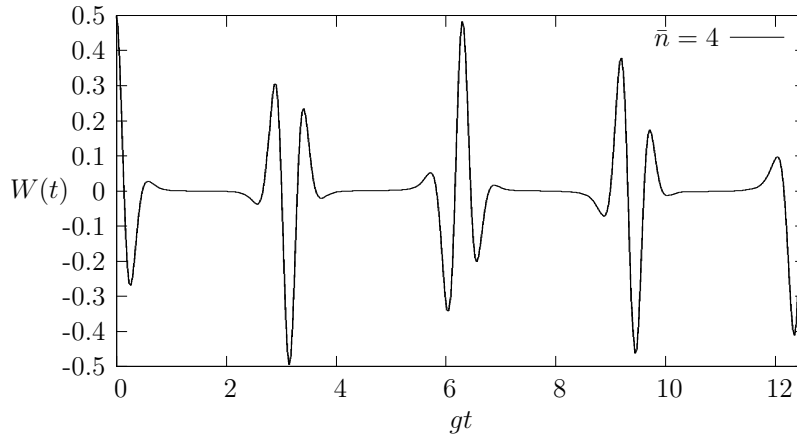


Figura 3.4: *Inversión atómica para un estado coherente con  $\bar{n} = 4$ .*

### 3.2. Estados coherentes no lineales de fotones agregados en un cavidad electromagnética

En esta sección trabajaremos en uno de los objetivos principales de este texto, tomaremos por un lado el hamiltoniano de Jaynes-Cummings en el caso



de resonancia (3.15) y, por consiguiente, el operador de evolución encontrado en la sección anterior

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) & -i\sin(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)})\hat{V}^2 \\ -i\hat{V}^{\dagger 2}\sin(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) & \cos(gt\sqrt{\hat{n}(\hat{n}-1)}) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

En esta sección utilizaremos el operador de evolución para poder mostrar cómo agregar fotones a un estado que inicialmente al tiempo  $t = 0$  es un estado coherente y esto nos llevará al concepto de estados coherentes no lineal con fotones agregados.

Partiendo de la relación (3.17) la evolución del estado  $|\psi(t)\rangle$  esta determinada, salvo consideraciones del estado  $|\psi(t)\rangle$  al tiempo  $t = 0$ . Para nuestro caso tomaremos como estado inicial un estado coherente y, como estamos trabajando en un átomo de dos niveles, el estado inicial al tiempo  $t = 0$  es

$$|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle |e\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle |e\rangle, \quad (3.33)$$

que quiere decir que el estado inicial del sistema es un átomo de dos niveles que se encuentra en el estado excitado y la cavidad tiene un campo electromagnético inicial descrito por un estado coherente.

Con esta consideración inicial el vector de estado al tiempo  $t$  es según (3.26)

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\alpha\rangle |e\rangle, \quad (3.34)$$

que al tomar la expresión del operador de evolución (3.32), el vector de estado al tiempo  $t$  se convierte en

$$|\psi(t)\rangle = \cos(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) |\alpha\rangle |e\rangle - i\hat{V}^{\dagger 2} \sin(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) |\alpha\rangle |g\rangle, \quad (3.35)$$

ya que,

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

el vector de estado que describe al sistema a un tiempo  $t$ , también se puede representar por

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) |\alpha\rangle \\ -i\hat{V}^{\dagger 2} \sin(gt\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) |\alpha\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

realizado la serie de Taylor del argumento de las funciones seno y coseno y tomando los dos primero términos de dicha serie, tenemos que

$$\sqrt{(\hat{n} + 1)(\hat{n} + 2)} \approx \hat{n} + \frac{3}{2}, \quad (3.38)$$

entonces

$$|\psi(t)\rangle \approx \begin{pmatrix} \cos(gt(\hat{n} + 3/2)) |\alpha\rangle \\ -i\hat{V}^{\dagger 2} \sin(gt(\hat{n} + 3/2)) |\alpha\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Podemos notar de la expresión anterior que las funciones seno y coseno tienen el mismo argumento. La función seno cumple con  $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$ , por lo tanto,

$$\sin(gt(\hat{n} + 3/2)) = \sin(gt\hat{n}) \cos(3gt/2) + \sin(3gt/2) \cos(gt\hat{n}), \quad (3.40)$$

y para el tiempo  $t = \pi/g$  la función seno es máxima y la función coseno evaluada en este tiempo es cero. Entonces,

$$\sin(\pi(\hat{n} + 3/2)) = -\cos(\pi\hat{n}) = -(-1)^{\hat{n}} \quad \text{y} \quad \cos(\pi(\hat{n} + 3/2)) = 0. \quad (3.41)$$

Con este resultado encontramos una expresión para el vector de estado (3.39) al tiempo  $t = \pi/g$ ,

$$|\psi(\pi/g)\rangle \approx \begin{pmatrix} 0 \\ i\hat{V}^{\dagger 2} (-1)^{\hat{n}} |\alpha\rangle \end{pmatrix} = i\hat{V}^{\dagger 2} |\alpha\rangle |g\rangle, \quad (3.42)$$

mientras que proyectando el vector de estado en el estado base del átomo de dos niveles conseguimos la siguiente expresión

$$|\eta_1(\pi/g)\rangle = i\hat{V}^{\dagger 2} |\alpha\rangle. \quad (3.43)$$

Moya-Cessa y colaboradores en [8] proponen un método para agregar fotones a un estado coherente, donde depositan el estado  $|\eta_1(\pi/g)\rangle$  en la condición inicial al tiempo  $t = 0$ , es decir, ahora el vector de estado es

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\eta_1(\pi/g)\rangle |e\rangle. \quad (3.44)$$

Recordando la forma explícita del operador de evolución (3.32), podemos hacer las mismas aproximaciones para los argumentos de las funciones seno y coseno, además de nuevamente evaluar el vector de estado al tiempo  $t = \pi/g$ , lo cual nos lleva a tener el vector de estado como:

$$|\psi(\pi/g)\rangle \approx i\hat{V}^{\dagger 2} (-1)^{\hat{n}} (i\hat{V}^{\dagger 2} (-1)^{\hat{n}} |\alpha\rangle) |g\rangle = -\hat{V}^{\dagger 4} |\alpha\rangle |g\rangle. \quad (3.45)$$

Entonces al proyectar el vector de estado sobre el estado base, se consigue un nuevo estado coherente con 4 fotones agregados

$$|\eta_2(\pi/g)\rangle = -\hat{V}^{\dagger 4} |\alpha\rangle. \quad (3.46)$$

El proceso se vuelve recursivo y nos lleva a la siguiente relación, después de haber realizado  $m$  repeticiones,

$$|\psi_m(\pi/g)\rangle \approx (i\hat{V}^{\dagger 2}(-1)^{\hat{n}})^m |\alpha\rangle |g\rangle, \quad (3.47)$$

que al proyectar sobre el estado base del átomo obtenemos

$$|\eta_m(\pi/g)\rangle = (i\hat{V}^{\dagger 2}(-1)^{\hat{n}})^m |\alpha\rangle. \quad (3.48)$$

Este resultado representado por la ecuación (3.48) significa que, el estado coherente no lineal con fotones agregados es realizable dentro de un marco experimental al agregar  $2, 4, 6, \dots, 2m$ , al estado coherente  $|\alpha\rangle$ . Recurriendo a la expresión (2.56), se puede ver que esto no es más que un estado coherente no lineal que nace de agregar  $2m$  fotones a un estado coherente. Comparando

$$|\alpha, m\rangle = \hat{V}^{\dagger m} |\alpha\rangle \quad (3.49)$$

y

$$|\eta_m(\pi/g)\rangle = (-i\hat{V}^{\dagger 2}(-1)^{\hat{n}})^m |\alpha\rangle, \quad (3.50)$$

encontramos cómo generar estados coherentes no lineales dentro de un ámbito realizable experimentalmente.

Para finalizar podemos recurrir a la matriz de densidad  $\hat{\rho}$ , para darnos cuenta que las aproximaciones hechas en los argumentos de las funciones seno y coseno traen consigo una aproximación que aumenta el rango de error conforme agregamos fotones al estado coherente inicial. Es decir, ahora compararemos la matriz de densidad sin ninguna aproximación y la llamaremos matriz de densidad ideal. Esta matriz de densidad ideal es construida de la siguiente manera, el operador de evolución del sistema es al tiempo  $t = \pi/g$  el siguiente

$$\hat{U}(\pi/g) = \begin{pmatrix} \cos(\pi\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) & -i\sin(\pi\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)})\hat{V}^2 \\ -i\hat{V}^{\dagger 2}\sin(\pi\sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}) & \cos(\pi\sqrt{\hat{n}(\hat{n}-1)}) \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

con esto es posible calcular la matriz de densidad  $\hat{\rho}_1$ , considerando la matriz de densidad inicial como

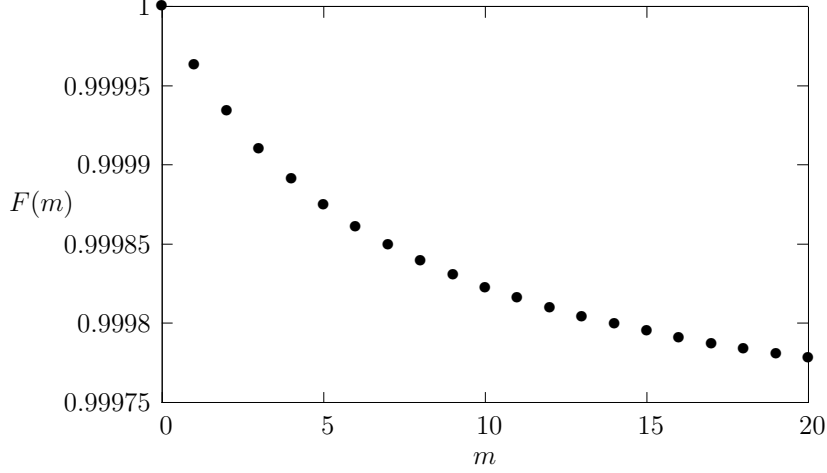


Figura 3.5: *Fidelidad*,  $F(m) = Tr[\hat{\rho}_{RAm}\hat{\rho}_{Rm}]$  para  $m = 20$ .

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_0 &= |\psi(t=0)\rangle \langle \psi(t=0)|, \\ &= \hat{\rho}_{0f} \otimes |e\rangle \langle e|,\end{aligned}\tag{3.52}$$

entonces, ayudados del operador de evolución tenemos que

$$\hat{\rho}_1 = \hat{U}(\pi/g)\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger(\pi/g),\tag{3.53}$$

lo cual nos permite poder escribir una matriz de densidad reducida para el campo como

$$\hat{\rho}_{R1} = \cos(\pi f(\hat{n}))\hat{\rho}_{0f} \cos(\pi f(\hat{n})) + \hat{V}^{\dagger 2} \sin(\pi f(\hat{n}))\hat{\rho}_{0f} \sin(\pi f(\hat{n}))\hat{V}^2,\tag{3.54}$$

donde  $f(\hat{n}) = \sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)}$ , que, al acumular  $m$  repeticiones la matriz de densidad reducida, resulta ser

$$\hat{\rho}_{Rm} = \cos(\pi f(\hat{n}))\hat{\rho}_{R(m-1)} \cos(\pi f(\hat{n})) + \hat{V}^{\dagger 2} \sin(\pi f(\hat{n}))\hat{\rho}_{R(m-1)} \sin(\pi f(\hat{n}))\hat{V}^2.\tag{3.55}$$

Es importante señalar que esta matriz de densidad reducida no contiene aproximaciones en el argumento de las funciones coseno y seno. Por esto compararemos esta matriz de densidad con la matriz de densidad que se obtiene a partir de la expresión (3.47), que llamaremos matriz de densidad reducida en aproximación, y la denotamos así

$$\hat{\rho}_{RAm} = |\psi_m(\pi/g)\rangle \langle \psi_m(\pi/g)|.\tag{3.56}$$

Ahora tomamos un concepto de suma importancia como lo es la traza de una matriz, en mecánica cuántica podemos encontrar el valor esperado de un operador calculando la traza de la matriz densidad que representa al ensamble multiplicada por el operador del cual queremos conocer su valor esperado. Es decir, el valor esperado de un operador  $\hat{A}$  se define como

$$\hat{A} = Tr[\hat{\rho}\hat{A}], \quad (3.57)$$

por lo tanto utilizando este mismo concepto podemos comparar las dos matrices de densidad  $\hat{\rho}_{Rm}$  y  $\hat{\rho}_{RAm}$ , para poder verificar cuanto nos alejamos de los resultados sin aproximación de los resultados con aproximación, y a la traza del productos de estas dos matrices la llamamos, fidelidad. Es decir

$$F(m) = Tr[\hat{\rho}_{RAm}\hat{\rho}_{Rm}], \quad (3.58)$$

y, como podemos notar en la figura 3.5, la fidelidad disminuye de acuerdo al número de fotones agregados al estado coherente  $|\alpha\rangle$ , pero la disminución de la fidelidad es mínima, y por tanto nuestro método para agregar fotones resulta ser eficiente.

## Conclusiones

Los estados coherentes con fotones agregados,  $|\alpha, m\rangle$  son un tipo de estados coherentes no lineales. Es importante decir que los estados coherentes con fotones agregados son un tipo, o una sub-familia de estados coherentes no lineales, desafortunadamente las características que cumplen los estados coherentes  $|\alpha\rangle$ , no son heredadas a los estados coherentes con fotones agregados, ya que estos estados por ejemplo, no minimizan el principio de incertidumbre de Heisenberg, y tampoco sirven como base para otros estados a diferencia de los estados coherentes. Es decir, los estados coherentes con fotones agregados no son los estados cuánticos más clásicos posibles a diferencia de los estados coherentes.

Por otro lado, la realización experimental de los estados coherentes con fotones agregados lleva consigo aproximaciones en el operador de evolución del sistema, y estas aproximaciones tienen el mismo número de repeticiones que el número de fotones agregados al estado coherente, sin embargo la fidelidad muestra que aún agregando 20 fotones al estado coherente nuestro método resulta confiable, ya que la fidelidad disminuye de 1 a 0,99975. Por último, los fotones que se agregan dentro de un marco experimental al estado coherente sólo pueden ser en pares de fotones, es decir, el método propuesto agrega  $2, 4, 6, 8, \dots, 2m$  fotones.



## Bibliografía

- [1] E. Schrodinger (1926) *Naturwissenschaften* 14, 664.
- [2] R. J. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field”, *Phys. Rev.* 131, 2766-2788 (1963).
- [3] V. I. Man’ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, “f-oscillators and nonlinear coherent states,” *Phys. Scr.* 55, 528-541 (1997).
- [4] S. Sivakumar, “Photon-added coherent states as nonlinear coherent states”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 32 3441 3447 (1999).
- [5] E.T. Jaynes y F.W. Cummings, “Comparison of quantum and semi-classical radiation theories with application to the beam maser”, *Proc. IEEE*, 51, 89 (1963).
- [6] R. de J. León-Montiel, H. Moya-Cessa, and F. Soto-Eguibar, “Nonlinear coherent states for the Susskind-Glogower operators”, *Revista Mexicana de Física*, Julio 2011
- [7] L. Susskind and J. Glogower, “Quantum mechanical phase and time operator”, *Physics* 1, 49-61 (1964).
- [8] H. Moya-Cessa, S. Chavez-Cerda, and W. Vogel, “Adding and subtracting energy quanta of the harmonic oscillator”, *J. Mod. Opt.* 46, 1641-1656 (1999)



- [9] E. P. Wigner, Phys. Rev. 40, 749 (1932)
- [10] K. Husimi, Proc. Phys.Math. Soc. Jpn. 22, 264 (1940).
- [11] B. Buck and C. V. Sukumar, “Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival”, Phys. Lett. 81, 132-135 (1981).
- [12] P.A.M.Dirac, The principle of quantum mechanics, 4th ef., (Clarendon, Oxford, 1958)
- [13] W.H.Louisell, Quantum statistical properties of radiation (Wiley, New York, London, 1974).