



**I  
N  
A  
O  
E**

# **Análisis Teórico y Numérico de la Ecuación de Transporte de Irradiancia**

por

**M.C. Angel Eugenio Martínez Rodríguez**

Tesis sometida como requisito parcial  
para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Marzo 2021, Tonantzintla, Puebla.

Supervisada por:

**Dr. Fermín S. Granados Agustín, INAOE**

**Dr. Manuel Campos García, ICAT**

© INAOE 2021

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir  
y distribuir copias de esta tesis  
en su totalidad o en partes



---

# Agradecimientos

## A mis padres **Irma Gpe. Rodríguez y Agustín Martínez Cantú**

Por darme siempre su apoyo y nunca dejarme caer en los tiempos difíciles, gracias por los consejos, su comprensión y el sacrificio que ustedes hacen por mi. Un logro más dedicado a ustedes.

**A mi familia** Lucero, Célida, Irma, Marcos, Jesús y Oscar.....Gracias por ayudarme en todos los sentidos, por soportarme y por hacerme saber lo valioso que es tener a la familia siempre cerca.

## A mis asesores **Fermín S. Granados Agustín y Manuel Campos García**

Por la ayuda, los consejos y por enseñarme a trabajar con dedicación y entrega, no solo académicamente sino también en lo personal.

**A los doctores** Francisco Renero, Javier Báez, Gabriel Martínez Niconoff, David Sánchez de la Llave, por su comprensión y ayuda para culminar este posgrado.

**A mis amigos del INAOE** Alexis Vázquez , Roberto León y Rafael Izazaga por su ayuda y consejos otorgados a lo largo de mi estancia en el instituto. Gracias por su amistad y su apoyo.

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)** por la beca de doctorado otorgada y sin la cual no hubiera sido posible la terminación de este trabajo.

Agradezco también al **Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE)**, y al **Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología** de la UNAM (ICAT) por todas las facilidades otorgadas, apoyos de viáticos para congresos, materiales y el uso de sus instalaciones.

---

# Resumen

La fase de una onda luminosa, que se obtiene luego de incidir sobre una superficie, nos proporciona información acerca de la forma de la superficie y con ello la calidad de fabricación de la misma. Las técnicas que se utilizan para medir esta fase se pueden dividir en dos grupos principales: técnicas interferométricas y técnicas geométricas (capítulo 1). Sin embargo, las técnicas interferométricas requieren que los instrumentos utilizados se encuentren bien alineados y que cuenten con una fuente altamente coherente, mientras que las técnicas geométricas están limitadas por la aproximación Eikonal. Afortunadamente, existen también técnicas de pruebas ópticas que reconstruyen la fase a partir de la medición de distribuciones de irradiancia en dos o más planos perpendiculares a la dirección de propagación del frente de onda. Estas técnicas tienen sus bases teóricas en la resolución de la ecuación de transporte de irradiancia (ETI). En sus inicios, se ha estudiado la propagación de la radiación electromagnética en distintas regiones del espectro y sobre distintos medios. Es por esto que existen diferentes formas de la ETI. Sin embargo, la ecuación presentada por Teague en 1983 es la más utilizada en el campo de la óptica. En 1988 Ichicawa et al. propusieron por primera vez un método determinístico de la resolución de la ETI, así como una demostración experimental de la recuperación del frente de onda. Para entender el intervalo de validez de la ETI es necesario saber como se deduce esta ecuación (capítulo 2). Es importante hacer notar que la deducción de la ETI se puede lograr tanto por conceptos de la óptica física como por conceptos de la óptica geométrica. Para llegar a la ETI mediante la óptica física partimos del hecho de que la luz es una onda electromagnética y que por lo tanto satisface la ecuación de onda. Si elegimos una onda monocromática que tenga la forma de una multiplicación entre dos funciones, espacial y temporal-armónica respectivamente, y la sustituimos en la ecuación de onda, obtendremos entonces una ecuación diferencial puramente espacial que es conocida como la ecuación de Helmholtz. Después elegimos una onda que tenga una propagación preferencial en el eje  $z$  y que mantenga una forma que presente radios de curvatura locales grandes (superficie suave) durante su propagación. De esta manera lo que obtenemos es la ecuación de onda paraxial. Si sustituimos la ecuación de propagación de Fresnel dentro de la ecuación de

---

onda paraxial, esta se satisface completamente. Esta forma modificada de la ecuación de Fresnel sustituida en la ecuación de onda paraxial da como resultado la ecuación de onda parabólica, por lo que hacemos notar aquí que las ondas utilizadas que satisfagan la ETI deben de ser ondas que cumplan con la aproximación de Fresnel. Por último, se elige que el campo que describe a estas ondas sea producto de una función espacial de intensidad modulada por una función armónica de fase y después de combinarla con la ecuación de onda parabólica obtenemos la ETI propuesta por Teague. Por parte de la óptica geométrica, la ETI se obtiene partiendo de que el promedio del vector de Poynting es proporcional a la intensidad de las ondas electromagnéticas. Se modela una región donde se propagan estas ondas y se realiza una suma de los flujos que entran y salen de esta región. Se concluye que la ETI es una forma de la ecuación de conservación de energía y se identifican dos términos de acuerdo a lo que la fase provoca a las distribuciones de intensidad: término de pendientes y término de curvaturas. Otra forma de la ETI es la obtenida por M. Fernandez Guasti et al. [1] en donde considera una onda monocromática linealmente polarizada viajando en un medio lineal isotrópico, pero inhomogéneo. Hemos mencionado antes que existen dos grandes grupos de técnicas de recuperación del frente de onda. Algunos patrones obtenidos con estas técnicas pueden ser relacionados rápidamente con aberraciones típicas de los frentes de onda (esférica, coma, astigmatismo, etc.) Sin embargo, esta relación entre los patrones de intensidad y las aberraciones (frentes de onda) que los originan, no existen para las técnicas que utilizan a la ETI. En el trabajo de tesis se desarrollará una herramienta que nos permita resolver de manera numérica la ETI para las distribuciones de intensidad y con ello obtener estas distribuciones en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación del frente de onda. Para esto se plantea cubrir objetivos particulares tales como analizar los métodos numéricos para resolver la ETI (capítulo 3) y desarrollar el algoritmo capaz de hacerlo y corroborar los resultados arrojados por este algoritmo mediante el estudio de intensidades-frente de onda de haces conocidos y bien comportados, tales como frentes de onda esféricos o haces gaussianos (capítulo 4).

---

# Abstract

The phase of a light wave that has been illuminated after striking a surface gives us information about the shape of the surface and with it the manufacturing quality of it. The techniques used to measure this phase can be divided into two main groups: interferometric techniques and geometric techniques. However, interferometric techniques require that the instruments used are well aligned and that they have a highly coherent source, while geometrical techniques are limited by the Eikonal approach.

Fortunately, there are also optical testing techniques that reconstruct the phase from the measurement of irradiance distributions in two or more planes perpendicular to the propagation direction of the wavefront. These techniques have their theoretical basis in the resolution of the irradiation transport equation (ITE). Previously, the propagation of the electromagnetic radiation in different regions of the spectrum and on different media has been studied. That is why there are different forms of the ITE. However, the equation presented by Teague in 1983 is the most widely used in the field of optics. In 1988 Ichicawa et al. They proposed for the first time a deterministic method of the resolution of the TIE, as well as an experimental demonstration of the recovery of the wavefront.

To understand the validity interval of the ITE, it is necessary to know how this equation is deduced. It is important to note that the deduction of the ITE can be achieved both by concepts of physical optics and concepts of geometric optics. To arrive at the ITE by means of physical optics we start from the fact that light is an electromagnetic wave and that therefore it satisfies the wave equation. If we choose a monochromatic wave that has the form of a multiplication between two functions, spatial and temporal-harmonic, respectively, and substitute it in the wave equation, we will obtain a purely spatial differential equation that is known as the Helmholtz equation. Then we choose a wave that has a preferential propagation on the  $z$  axis and that maintains a smooth shape during its propagation. In this way what we get is the paraxial wave equation. If we substitute the Fresnel propagation equation within the paraxial wave equation, it is completely satisfied. This modified form of the substituted Fresnel equation in the paraxial

---

wave equation results in the parabolic wave equation, so we note here that the waves used that satisfy the ITE must be waves that comply with the Fresnel approximation.

Finally, it is chosen that the field that describes these waves is the product of a spatial function of intensity modulated by a harmonic phase function and after combining it with the parabolic wave equation, we obtain the ITE proposed by Teague. On the part of geometric optics, the ITE is obtained on the basis that the average of the Poynting vector is proportional to the intensity of the electromagnetic waves. A region is modeled where these waves are propagated and a sum of the flows that enter and leave this region is made. It is concluded that the ITE is a form of the energy conservation equation and two terms are identified according to what the phase provokes to the intensity distributions: prism term and lens term. Another form of the ITE is obtained by M. Fernandez Guasti et al. [1] where it considers a linearly polarized monochromatic wave traveling in an isotropic linear medium, but inhomogeneous.

We have mentioned before that there are two large groups of wavefront recovery techniques. Some patterns obtained with these techniques can be quickly related to aberrations typical of the wavefronts (spherical, coma, astigmatism, etc.). However, this relationship between the intensity patterns and the aberrations (wave fronts) that originate them, do not exist for the techniques that use the ITE. The thesis work aims to develop a tool that allows us to solve numerically the ITE for intensity distributions and thus obtain these distributions in any plane perpendicular to the direction of propagation of the wavefront. For this purpose, specific objectives are presented, such as studying the numerical methods to solve the ITE, developing the algorithm capable of doing so, and corroborate the results retrieved by this algorithm through the study of wavefront intensities of well-known and well-behaved beams, such as spherical wave fronts or Gaussian beams.

# Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	IV
Índice general	VI
Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XII
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA . . . . .	2
1.2. OBJETIVOS GENERALES . . . . .	3
1.2.1. OBJETIVOS PARTICULARES . . . . .	3
1.3. PRUEBAS ÓPTICAS . . . . .	3
1.3.1. INTERFEROMETRO DE FIZEAU . . . . .	4
1.3.2. INTERFEROMETRO DE TWYMAN-GREEN . . . . .	6
1.3.3. PRUEBA DE RONCHI . . . . .	9
1.3.4. MÉTODO DE HARTMANN . . . . .	10
1.3.4.1. MÉTODO DE SHACK-HARTMANN . . . . .	11
1.3.5. MÉTODO DE RODDIER . . . . .	13
1.3.6. RECUPERACIÓN DE FASE . . . . .	14
1.4. POLINOMIOS DE ZERNIKE . . . . .	17
1.5. CONCLUSIÓN . . . . .	17
<b>2. LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA Y SU ANÁLISIS TEÓRICO</b>	<b>19</b>
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	19
2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA. . . . .	20
2.2.1. TEORÍA BÁSICA . . . . .	20
2.2.1.1. ECUACIÓN DE HEMHOLTZ . . . . .	20
2.2.1.2. TEORÍA DE LA DIFRACCIÓN . . . . .	20
2.2.1.3. ECUACIÓN DE ONDA PARAXIAL Y ECUACIÓN PARABÓLICA . . . . .	22

2.2.2.	ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA (ÓPTICA FÍSICA) . . . . .	24
2.3.	OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA. . . . .	27
2.3.1.	ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA (ÓPTICA GEOMÉTRICA) . . . . .	27
2.4.	LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ETI . . . . .	30
2.4.1.	FRENTE DE ONDA ESFÉRICO CON DESPLAZAMIENTO . . . . .	30
2.4.2.	SOLUCIÓN DE LA ETI PARA UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO . . . . .	32
2.4.3.	FRENTE DE ONDA GAUSSIANO . . . . .	33
2.4.3.1.	SOLUCIÓN FORMAL A LA ECUACIÓN DE ONDA PARA HACES GAUSSIANOS . . . . .	34
2.4.3.2.	SOLUCIÓN DE LA ETI PARA UN FRENTE DE ONDA GAUSSIANO . . . . .	36
2.4.3.3.	RELACIÓN ENTRE FRENTE DE ONDA GAUSSIANO Y PARABÓLICO . . . . .	38
2.5.	CONCLUSIONES . . . . .	38
<b>3.</b>	<b>ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA</b>	<b>39</b>
3.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	39
3.2.	TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON . . . . .	40
3.2.1.	MÉTODO DE CAMBIO DE VARIABLE . . . . .	40
3.2.2.	ECUACIÓN DE POISSON: ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES . . . . .	41
3.2.2.1.	CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN . . . . .	41
3.2.3.	MÉTODO EXPERIMENTAL . . . . .	42
3.2.3.1.	SEÑAL DE SENSOR PARA 2 IMÁGENES . . . . .	42
3.2.3.2.	SEÑAL DE SENSOR PARA 4 IMÁGENES . . . . .	43
3.2.4.	CONSIDERACIONES EXPERIMENTALES SOBRE LAS CONDICIONES DE FRONTERA . . . . .	45
3.3.	TÉCNICA NUMÉRICA DE RESOLUCIÓN DE EDPs . . . . .	47
3.3.1.	DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON . . . . .	47
3.3.1.1.	DISCRETIZACIÓN DE LA CONDICIÓN DE FRONTERA TIPO NEUMANN . . . . .	52
3.4.	CONCLUSIONES . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ETI (RESULTADOS SIMULADOS Y EXPERIMENTALES)</b>	<b>53</b>
4.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	53
4.2.	CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS . . . . .	53
4.2.1.	PROCEDIMIENTO DEL CÁLCULO . . . . .	55
4.2.2.	CÁLCULO DE DISTRIBUCIÓN DE INTENSIDAD PARA UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO . . . . .	58
4.2.3.	CÁLCULO DE DISTRIBUCIÓN DE INTENSIDAD PARA POLINOMIOS DE ZERNIKE . . . . .	61
4.3.	SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE . . . . .	63
4.3.1.	SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ETI: FRENTE DE ONDA PARABÓLICO . . . . .	64
4.3.2.	SIMULACIÓN NUMÉRICA . . . . .	64
4.4.	RESULTADOS EXPERIMENTALES . . . . .	67
4.4.1.	APLICACIÓN DE ALGORITMO PARA RESOLVER LA ETI . . . . .	68

4.4.2. APLICACIÓN DE MÉTODO INTERFEROMÉTRICO . . . . .	73
4.5. CONCLUSIONES . . . . .	77
<b>5. CONCLUSIONES GENERALES</b>	<b>78</b>
5.1. TRABAJO FUTURO . . . . .	79
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>
<b>Apéndice A. Publicaciones Generadas</b>	<b>83</b>
<b>Apéndice B. Programa de trazo de rayos en 3D</b>	<b>84</b>
<b>Apéndice C. Programa de recuperación de frente de onda</b>	<b>91</b>

# Índice de figuras

1.1.	Esquema general de una prueba óptica . . . . .	2
1.2.	Clasificación de una prueba óptica por su método de obtención del frente de onda . . . . .	4
1.3.	Arreglo experimental del interferómetro de Fizeau . . . . .	5
1.4.	Interferómetro de Twyman-Green . . . . .	7
1.5.	Arreglo Experimental de la Prueba Ronchi . . . . .	9
1.6.	Modelo gráfico de las aberraciones transversales en el método de Hartmann . . . . .	10
1.7.	a) Pantalla de Shack-Hartmann. b) Puntos luminosos en el plano de detección . . . . .	11
1.8.	Sensor de Shack-Hartmann . . . . .	12
1.9.	Esquema de prueba de Roddier. En el espacio imagen (arriba), las intensidades $I_1$ e $I_2$ aparecen como imágenes desenfocadas del objeto. En el espacio objeto (abajo), aparecen como las imágenes desenfocadas de las pupilas. . . . .	14
1.10.	Esquema general de los algoritmos de recuperación de fase . . . . .	15
2.1.	Geometría de Difracción . . . . .	21
2.2.	Los dos términos de la ETI representan respectivamente efectos de pendiente y de curvatura en el frente de onda . . . . .	26
2.3.	El frente de onda $W$ produce zonas de mayor iluminación que otras sobre el detector . . . . .	27
2.4.	Flujo de energía radiante en la región $\Omega$ . . . . .	28
2.5.	Frente de onda desplazado fuera del origen . . . . .	30
2.6.	Haz Gaussiano . . . . .	37
3.1.	Estimación de la derivada de la distribución de intensidad . . . . .	43
3.2.	Estimación de la derivada de la distribución de intensidad utilizando 4 planos . . . . .	45
3.3.	Perfil de la distribución de irradiancia y su primera derivada en dos planos distintos: a) $z=0$ , b) $z>0$ . . . . .	46
3.4.	Esquema de cinco puntos de discretización de EDP's . . . . .	48

3.5. Malla de 16 elementos. Los valores de los puntos del borde son conocidos como condiciones de frontera. . . . .	49
4.1. Patrones típicos de pruebas ópticas a)Ronchigramas b)Hartmanngramas . . . . .	55
4.2. Proyección de rayos sobre un plano de detección . . . . .	55
4.3. Distancia entre el plano de detección y el valor de W en el punto seleccionado . . .	56
4.4. Valor de la pendiente de W en el punto seleccionado . . . . .	56
4.5. Trazo de triángulo auxiliar para calcular la posición en donde caen los rayos . . . . .	56
4.6. Ajustes de posición de rayos a su valor entero próximo en una malla . . . . .	57
4.7. Frente de onda parabólico en $z=1$ . . . . .	58
4.8. Conteo de rayos que caen en la misma posición para un W parabólico. . . . .	59
4.9. Comparación visual entre (A) el patrón de intensidad real y (B) el patrón de intensidad ajustado . . . . .	59
4.10. Diferencia entre el patrón de intensidad real y el patrón de intensidad ajustado . . .	60
4.11. El frente de onda W tomado como la aberración astigmática en polinomios de Zernike . . . . .	61
4.12. Patrón de intensidad calculado con el método de conteo y trazo de rayos para el astigmatismo de Zernike . . . . .	62
4.13. Frente de onda recuperado con el método de conteo y trazo de rayos . . . . .	62
4.14. Patrón de intensidad calculado con el método de conteo y trazo de rayos . . . . .	63
4.15. Frente de onda parabólico W en $z=100$ . . . . .	65
4.16. Señal de sensor simulada . . . . .	65
4.17. Frente de onda recuperado con diferencias finitas . . . . .	66
4.18. Error de diferencias ente el frente de onda parabólico original y recuperado . . . . .	66
4.19. Esquema del arreglo experimental . . . . .	67
4.20. Implementación del experimento . . . . .	68
4.21. Intensidades Experimentales capturadas a $\Delta z = 25.4\mu m$ . . . . .	69
4.22. Señal de sensor para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva . . . . .	69
4.23. Frente de onda de referencia para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva .	70
4.24. Frente de onda experimental para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva .	71
4.25. Frente aproximado en polinomios de Zernike para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva . . . . .	72
4.26. Coeficientes de Zernike obtenidos con el algoritmo desarrollado . . . . .	73
4.27. Arreglo experimental interferométrico para realizar las pruebas sobre los dobletes acromáticos. . . . .	74

4.28. Interferograma de sobre lente plano-covexa de 26.36mm de radio de curvatura. . .	74
4.29. Gráfica del frente de onda recuperado para lente plano-covexa de 26.36mm de radio de curvatura. (software Durango) . . . . .	75
4.30. Coeficientes de Zernike obtenidos con el software Durango . . . . .	76

# Índice de tablas

1.1. Comparación de las distintas técnicas de recuperación de fase. . . . .	16
1.2. Los primeros siete polinomios ortogonales de Zernike . . . . .	17
3.1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales. . . . .	41
4.1. Cálculo de correlación y RMS entre los frentes de onda de polinomios de Zernike contra los recuperados con el método desarrollado . . . . .	63
4.2. Valores de Coeficientes de Zernike obtenidos con el algoritmo desarrollado . . . . .	72
4.3. Valores de Coeficientes de Zernike obtenidos con el software Durango . . . . .	76

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de algunas ciencias, tal como la biología y la astronomía, el poder obtener imágenes lo más parecido posible a un objeto que se esté estudiando es muy importante, debido a que esta imagen puede conducir a interpretaciones adecuadas de los fenómenos que se estudian. Por ejemplo, el tener una buena imagen de una galaxia distante permitiría a los astrónomos, de una manera eficiente, poder estudiar el comportamiento de éstas y/o conocer su estructura. Sin embargo, en la realidad se encuentra que estas imágenes son deterioradas o confusas, debiéndose principalmente a errores en los sistemas ópticos empleados para obtenerlas, como pueden ser: aberraciones en lentes o espejos, errores en ángulos de prismas, desalineaciones, defectos de fabricación, etc. También esta degradación en las imágenes puede deberse a factores externos al sistema como las vibraciones y la turbulencia atmosférica[2]. Esto nos indica que la calidad en la imagen o imágenes está limitada por la óptica de los sistemas empleados para obtenerlas. Por lo que para controlar y conocer la calidad óptica de los sistemas y no tener una interpretación errónea de la imagen estudiada, es necesario contar con métodos de pruebas ópticas cuya instrumentación sea simple y precisa [3]. En una prueba óptica, generalmente al sistema se le hace interactuar con un haz luminoso cuyo frente de onda  $W'$  puede tratarse de un frente de onda plano o esférico. Posteriormente emergerá del sistema óptico un frente de onda deformado  $W$ , que es el parámetro (o es la cantidad) que se desea conocer, ya que a partir de éste es posible saber cuales son los tipos de errores del sistema óptico. Por lo anterior se hace importante contar con un método adecuado y eficiente para conocer el frente de onda. Sin embargo, por la rapidez con la que se mueven estos frentes de ondas luminosos, es imposible con la tecnología con la que se cuenta actualmente, medir directamente su forma. Lo que sí podemos es utilizar de alguna manera la intensidad luminosa que provocan estos frentes de onda, la cual puede ser capturada sobre un plano de detección, tal y como se muestra en figura 1.1, en la cual se observa cómo una onda

plana se deforma al pasar por un sistema óptico.

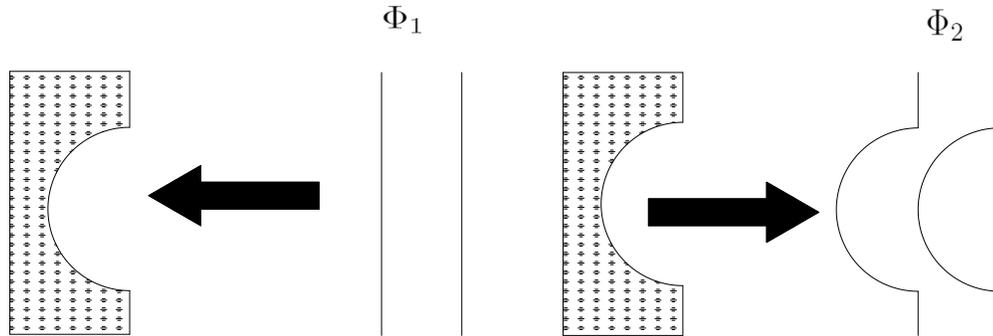


Figura 1.1: Esquema general de una prueba óptica

## 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Debido a la rapidez con la que cualquier frente de onda se propaga, actualmente es imposible medir su forma de manera directa. Es por eso que se pueden utilizar las mediciones de las concentraciones de intensidad para medir las curvaturas del frente de onda de manera indirecta.

En este sentido, la ecuación de transporte de irradiancia (ETI) cobra relevancia, ya que con ella es posible obtener la forma de una onda luminosa a partir de mediciones de intensidad en dos o más planos. Sin embargo como se verá más adelante, la solución analítica de esta ecuación solamente es fácil de obtener para frentes de onda bien conocidos. Es por eso que se pretende verificar la pertinencia de dar solución numérica a la ecuación. Sin embargo, la revisión bibliográfica realizada nos arroja los problemas que se plantean a continuación:

- 1.-Actualmente, no se cuenta con un programa que resuelva la ETI mediante el método de

elementos finitos (FEM) el cual haya sido contrastado con las pruebas ópticas convencionales.

2.-Algunas deformaciones típicas de la superficie pueden ser reconocidas mediante patrones caracterizados en una gran cantidad de trabajos previos (ej. Ronchigramas, Patrones de Hartmann, Interferogramas). Sin embargo, no se tiene idea de cuales serían esos patrones para las técnicas de pruebas ópticas que utilizan a la ETI como base teórica.

## 1.2. OBJETIVOS GENERALES

Se pretende desarrollar una herramienta computacional que nos permita resolver la ETI para obtener el frente de onda proveniente de un sistema óptico aberrado, mediante la adquisición experimental de patrones de intensidad provocados por este sistema óptico. Los resultados serán contrastados con los de un interferómetro comercial. Se desarrollará también una herramienta que calcule de manera aproximada las distribuciones de intensidad provenientes de un frente de onda, para conocer cuales serían los patrones característicos y útiles para reconocer las principales aberraciones.

### 1.2.1. OBJETIVOS PARTICULARES

1.-Estudiar intensidades y frentes de onda de haces conocidos y analizar si estos cumplen con la ETI y si no, bajo que situaciones lo deben hacer. Casos: frente de onda Esférico, Parabólico, Gaussiano.

2.-Estudiar métodos numéricos para resolver EDP. En particular la ETI.

3.-Desarrollar un algoritmo que permita recuperar el frente de onda de un sistema utilizando datos experimentales de la distribución de intensidad luminosa de un haz después de pasar por un sistema óptico.

4.-Desarrollar un algoritmo que nos permita encontrar las distribuciones de intensidad a partir de un frente de onda conocido.

## 1.3. PRUEBAS ÓPTICAS

Actualmente existen gran variedad de métodos para obtener el frente de onda proveniente de un elemento óptico bajo prueba (Figura 1.2), los cuales se pueden clasificar según pertenezcan al régimen de la óptica geométrica, por ejemplo, el método de Ronchi, o al régimen de la óptica física,

por ejemplo, los algoritmos de recuperación de fase. Estos a su vez se pueden clasificar en interferométricos, por ejemplo, el método de desplazamiento lateral, o no interferométricos, por ejemplo, el método de Shack-Hartmann [4]. También hay métodos cualitativos o semi cuantitativos, como el método de la navaja de Foucault, o cuantitativos como el método de Roddier[5].

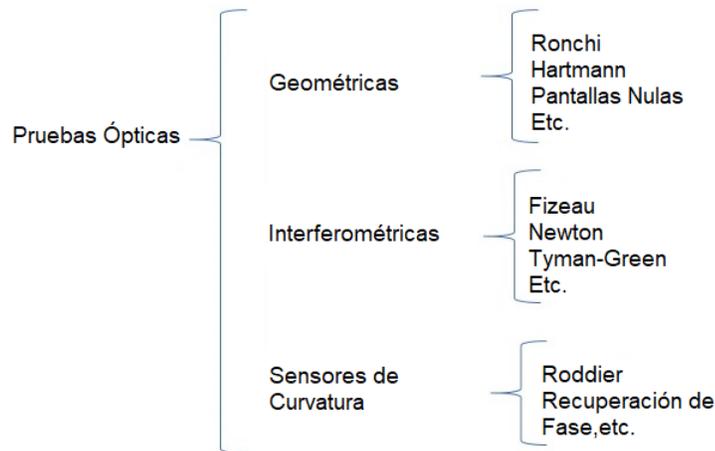


Figura 1.2: Clasificación de una prueba óptica por su método de obtención del frente de onda

En una prueba óptica, factores tales como el tamaño del sistema, el tipo de fuente luminosa empleada, la complejidad o el costo de la instrumentación del sistema o la rapidez con la que se desea recuperar el frente de onda, pueden determinar la precisión del resultado de la prueba. En este trabajo consideraremos sólo aquellos métodos de medición del frente de onda que sean cuantitativos, ya que desde un punto de vista tecnológico, es importante conocer de manera cuantitativa la magnitud de las aberraciones o errores del sistema óptico que se esté probando, para así poderlo corregir. En lo que resta del presente capítulo se revisarán estos métodos, con el fin de tener una perspectiva general de su aplicación experimental y las limitaciones y ventajas que presentan.

### 1.3.1. INTERFEROMETRO DE FIZEAU

El interferómetro de Fizeau es uno de los instrumentos más populares para realizar pruebas sobre elementos ópticos. La figura 1.3 muestra la disposición esquemática de un interferómetro de Fizeau que utiliza una lente para colimación.

### 1.3. PRUEBAS ÓPTICAS

El plano óptico que sirve como referencia, generalmente se monta junto con las lentes, y es pre-ajustado para que la imagen del orificio (pinhole), reflejada por la superficie de referencia, caiga sobre el propio pinhole. Ya sea que la parte posterior del plano tenga un recubrimiento antirreflejante, o más convenientemente que el plano óptico de referencia sea hecho en forma de cuña (aproximadamente 10 a 20 min de arco) tal que se pueda aislar el reflejo de la superficie posterior. Para ver las franjas, un divisor de haz se encuentra cerca del pinhole. La superficie bajo prueba se mantiene debajo del plano de referencia, y el espacio de aire se ajusta al valor más pequeño posible; luego la cuña de aire se reduce gradualmente manipulando el plano bajo prueba. Cuando la cuña de aire es muy grande, se pueden ver dos imágenes distintas del pinhole a través de las dos superficies en el plano **P**.

Haciendo uso de los tornillos provistos para inclinar el plano bajo prueba, se puede observar el movimiento de la imagen del pinhole y se puede detener cuando coincida con el del plano de referencia. Entonces el observador (formador de imagen) coloca su ojo en el plano **P** y ve, localizados en el espacio de aire, las franjas debido a la variación en espesor del espacio de aire. Se pueden hacer más ajustes, mientras se observan las franjas, para alterar el número y dirección de las franjas [4].

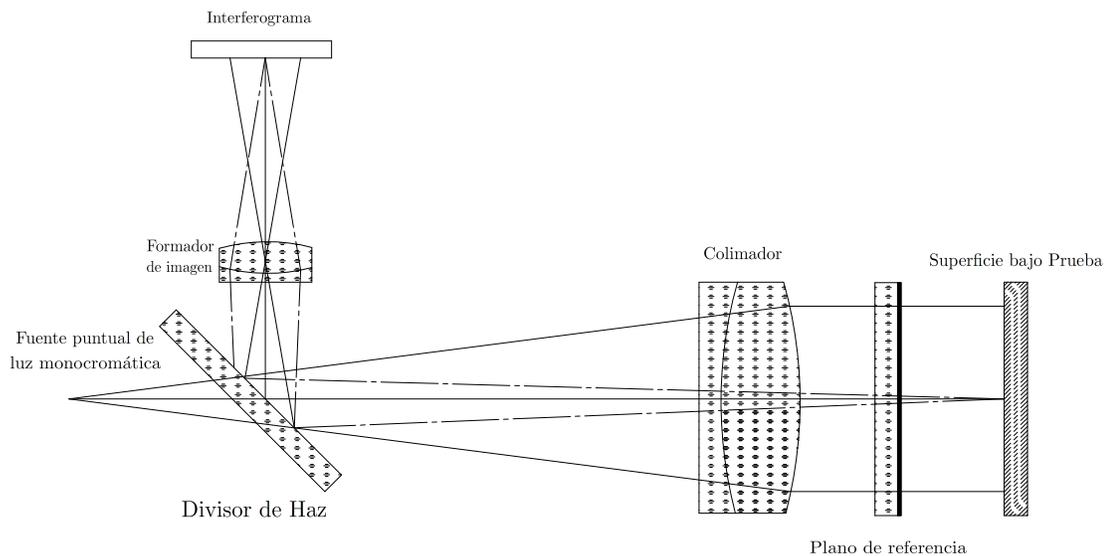


Figura 1.3: *Arreglo experimental del interferómetro de Fizeau*

En este caso, cuando dos superficies pulidas de cuerpos transparentes igualmente pulidos se acercan, se forma una película de aire. Esta película se comporta como una placa de caras, que generalmente no son paralelas. Con luz incidiendo de manera normal a la superficie de prueba se generan franjas de igual espesor. Estas franjas se comportan como curvas de nivel. Los anillos de Newton son un ejemplo de este tipo de franjas, que son formadas por dos superficies, una curva y otra plana [7]. Para una película en forma de cuña con ángulo  $\alpha$  entre dos superficies planas  $d \approx x\alpha$ , donde  $x$  es la posición de observación. La separación entre máximos adyacentes es  $\Delta x = \lambda/2\alpha$ . Para una superficie de radio  $R$  enfrente de otra plana, se cumple que  $x^2 = R^2 - (R - d)^2 \approx 2Rd$  si  $R \gg d$ , entonces el radio del anillo (franja) de orden  $m$  es

$$x_m = (m\lambda r)^{1/2} \quad (1.1)$$

### 1.3.2. INTERFEROMETRO DE TWYMAN-GREEN

Es un interferómetro típico en el cual interfieren dos frentes de onda. El primero de ellos, con forma idealmente plana, llega desde la superficie o lente de prueba, pero muy probablemente tiene algunas deformaciones debido a las imperfecciones en la superficie. El segundo frente de onda no pasa a través de la superficie o lente de prueba, su forma también es plana, y sirve como superficie de referencia en la prueba. Si las franjas son rectas, paralelas y equidistantes una de la otra, el frente de onda bajo prueba es plano semejante al frente de onda de referencia. En este caso el elemento bajo prueba es perfecto. Entonces, si se tiene una superficie óptica perfecta, sin ningún error y bien enfocada, las franjas obtenidas debido a la interferencia serán paralelas y equidistantes.

Si la superficie bajo prueba no tiene una forma perfecta, las franjas no serán rectas y sus separaciones serán variadas. Las deformaciones del frente de onda se pueden determinar por medio de un análisis matemático de la forma de las franjas.

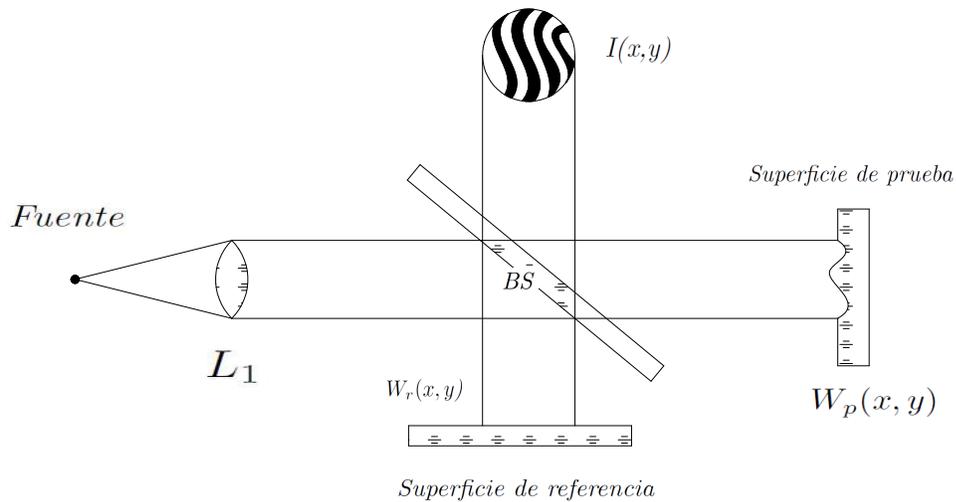


Figura 1.4: Interferómetro de Twyman-Green

En la figura 1.4 se ilustra el interferómetro de Twyman-Green, el cual es un instrumento de gran importancia en el terreno de las pruebas ópticas modernas. Entre sus características físicas más sobresalientes son una fuente puntual cuasimonocromática y una lente  $L_1$  que asegura una fuente de entrada de ondas planas, y por último "Beam Splitter"(BS) que es el divisor del haz del interferómetro.

Se observa que  $W_r(x, y)$  es la función que representa a la superficie de referencia,  $W_p(x, y)$  es la función que representa a la superficie de prueba, y la función  $I(x, y)$  es el patrón de interferencia resultante.

Asumiendo que tiene componentes perfectos y una fuente de luz colimada, las expresiones generales para frentes de onda de referencia y prueba son, respectivamente:

$$W_r(x, y) = a_r(x, y)e^{i[\phi_r(x, y)]} \quad (1.2)$$

y

$$W_p(x, y) = a_p(x, y)e^{i[\phi_p(x, y)]} \quad (1.3)$$

donde  $a_r(x, y)$  y  $a_p(x, y)$  son las amplitudes del frente de onda,  $\phi_r(x, y)$  y  $\phi_p(x, y)$  correspon-

den a las fases del frente de onda. El patrón de intensidad es el siguiente

$$I(x, y) = |W_r(x, y) + W_p(x, y)|^2 \quad (1.4)$$

o

$$I(x, y) = I'(x, y) + I''(x, y)\cos[\phi_p(x, y) - \phi_r(x, y)] \quad (1.5)$$

donde  $I'(x, y)$  es la intensidad promedio y es la suma del cuadrado de las amplitudes del frente de onda;  $I''(x, y)$  es la modulación de las franjas o a la intensidad que corresponde a la raíz cuadrada de la multiplicación de ambas amplitudes por dos.

Si se define a  $\phi(x, y)$  como la diferencia entre ambos frentes de onda: de prueba y de referencia, se obtiene

$$I(x, y) = I'(x, y) + I''(x, y)\cos\phi(x, y) \quad (1.6)$$

siendo la ecuación fundamental que describe un patrón de franjas en la mayoría de las pruebas ópticas. Como ya se mencionó,  $\phi(x, y)$  contiene la información deseada,  $I'(x, y)$  y  $I''(x, y)$  representan variaciones de irradiancia indeseadas debido a la no uniformidad de los rayos de luz reflejada o transmitida por el objeto a prueba.

En el caso de tener dos ondas con longitudes de onda muy cercanas entre sí, y de viajar en el mismo medio, sus frecuencias también serán ligeramente diferentes. Entonces, las fases de las ondas son  $(k_r x - w_r t)$  y  $(k_p x - w_p t)$ , por lo tanto, la suma de estas ondas en la dirección  $x$  tendrá una diferencia de fase dada por

$$\phi(x) = (\Delta k)x - (\Delta w)t \quad (1.7)$$

donde  $\Delta k = k_p - k_r$  y  $\Delta w = (w_p - w_r)$ , sustituyendo la ecuación 1.7 en la 1.6 obtenemos:

$$I(x, y) = I'(x, y) + I''(x, y)\cos[(\Delta k)x - (\Delta w)t] \quad (1.8)$$

donde  $k_r$  y  $k_p$  son los vectores de propagación, y  $w_r$  y  $w_p$  son las frecuencias angulares de los frentes de onda de referencia y de prueba respectivamente.

La distribución de la fase en el interferograma es el objetivo principal de las medidas interferométricas. En las técnicas para determinar la fase del interferograma primero se adquieren los datos del interferograma, después la fase se modula temporal o espacialmente, una vez enviados los datos a una computadora se calcula la fase para realizar un análisis posterior, tanto cualitativo

como cuantitativo [8].

### 1.3.3. PRUEBA DE RONCHI

La configuración de la prueba consiste en iluminar con una fuente extendida la mitad de la rejilla de Ronchi colocada cerca del centro de curvatura paraxial de la superficie bajo prueba y observar la imagen producida por la superficie a través de la otra mitad de la rejilla [9]. Lo anterior produce un patrón de franjas que puede ser observado sobre la pupila de salida del sistema óptico bajo prueba (ver figura 1.5).

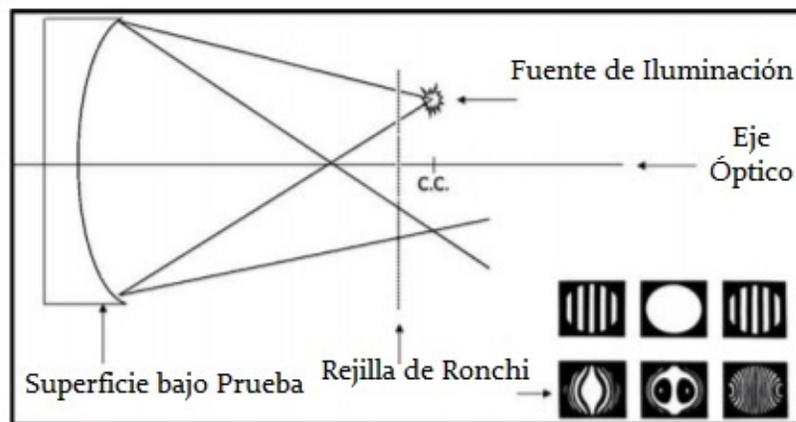


Figura 1.5: Arreglo Experimental de la Prueba Ronchi

La formación de las franjas en la prueba de Ronchi es usualmente estudiada con teoría geométrica, donde las franjas en el ronchigrama son el resultado de las desviaciones de los rayos de su camino ideal, esto provocado por los errores en las pendientes de la superficie bajo prueba. La relación entre la diferencia del frente de onda y las pendientes del frente de onda está dada por

$$\Delta W(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \Delta x \approx \alpha(x, y) \Delta x \quad (1.9)$$

donde  $\alpha(x, y)$  son las pendientes del frente de onda. Tomando la ecuación 1.6 que, como ya se mencionó, aparece en el desarrollo matemático de la mayoría de las pruebas ópticas, para el caso de la prueba de Ronchi se obtiene

$$I(x, y) = I'(x, y) + I''(x, y) \cos\left[\frac{2\pi\alpha(x, y)}{\lambda_{eq}}\right] + c(x, y) \quad (1.10)$$

donde  $\lambda_{eq}$  es conocida como la longitud de onda equivalente y está definida como  $\frac{\lambda}{\Delta x}$ , mientras que el factor  $\Delta x$  está dado por la relación

$$\Delta x = \frac{\lambda r}{d} \quad (1.11)$$

donde  $r$  es el radio de curvatura paraxial de la superficie bajo prueba,  $d$  es el periodo de la rejilla clásica de Ronchi y  $\lambda$  es la longitud de onda utilizada.

### 1.3.4. MÉTODO DE HARTMANN

La técnica de este método consiste en dividir el frente de onda en pequeñas regiones, colocando una pantalla opaca con perforaciones. Cada una de las perforaciones dejará pasar luz en línea recta, cuyas pendientes estarán relacionadas con la posición en donde éstas líneas cruzan el plano de detección. Las ecuaciones 1.12 y 1.13 describen matemáticamente estas pendientes [3][10].

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = -\frac{TA_x}{r} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = -\frac{TA_y}{r} \quad (1.13)$$

Donde  $W(x, y)$  representa las deformaciones del frente de onda,  $TA_x$  y  $TA_y$  son las aberraciones transversales en los dos ejes, y  $r$  la distancia del vértice al plano de observación (ver figura 1.6).

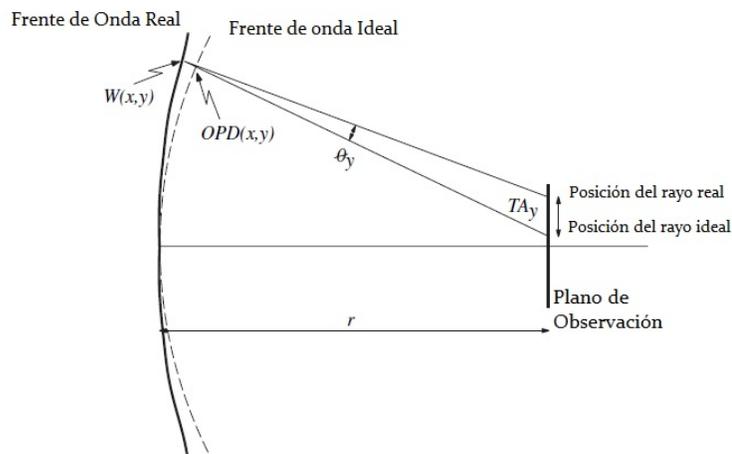


Figura 1.6: Modelo gráfico de las aberraciones transversales en el método de Hartmann

## 1.3.4.1. MÉTODO DE SHACK-HARTMANN

El método de Shack- Hartmann [10] es una derivación del método de Hartmann y es comúnmente empleado por la comunidad astronómica para probar la óptica de telescopios astronómicos. Éste método pertenece al régimen de la óptica geométrica y se emplea en aplicaciones de óptica activa [3].

Al igual que en estos se colocan unos pequeños lentes, detrás del sistema óptico de prueba. Cada perforación actúa como una abertura a través de la cual pasa la luz produciendo un arreglo de puntos luminosos como imagen en el plano de detección (ver figura 1.7).

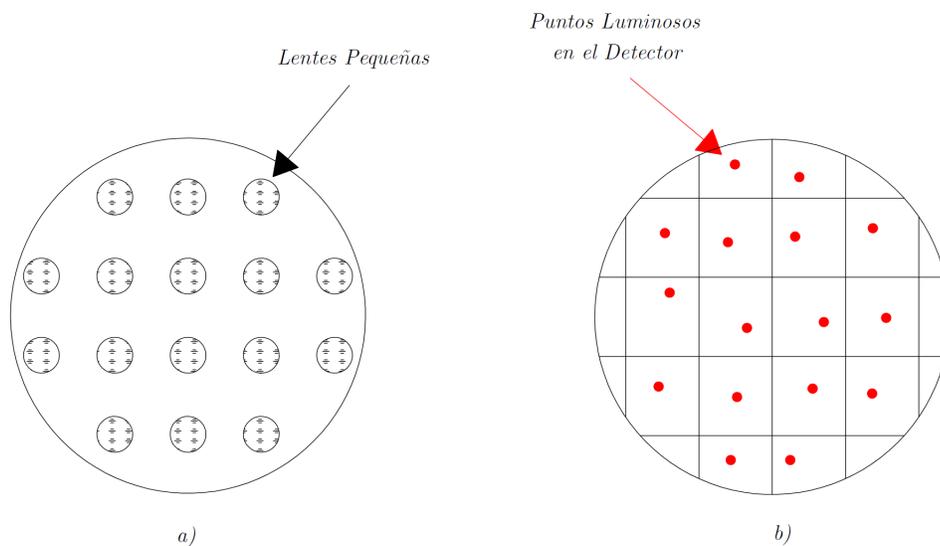


Figura 1.7: a) Pantalla de Shack-Hartmann. b) Puntos luminosos en el plano de detección

Con una calibración adecuada, la posición de los puntos luminosos es proporcional a la inclinación (pendiente) del frente de onda local en cada perforación, proporcionándonos esto una descripción de la calidad del sistema de prueba.

En la figura 1.8 se muestra el sensor de Shack-Hartmann, el frente de onda es dividido por una pantalla que puede ser un arreglo de lentes; cada rayo luminoso en cada una de las subaberturas es enfocado hacia un detector de posición de cuadrantes.

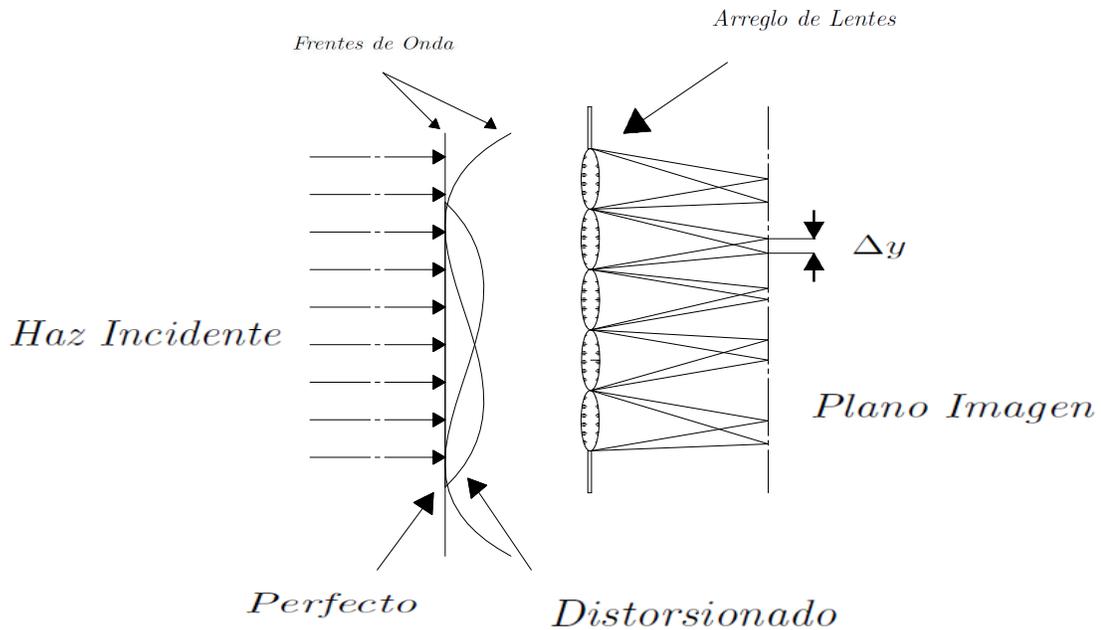


Figura 1.8: Sensor de Shack-Hartmann

Como es fácil observar, para que el sensor de Shack-Hartmann sea eficiente es necesario contar con una pantalla que tenga una alta calidad óptica y con un sensor de posición que sea eficiente; esto, en cuanto a diseño se refiere representa un gran reto para la ingeniería. Sin embargo, aún cuando se reúnen las características anteriores, existen ciertos inconvenientes si el sistema no está calibrado perfectamente. Esto significa que, si los puntos luminosos no caen en el centro del detector de posición cuando se quita el objeto o sistema óptico de prueba, la medición de la iluminación (pendiente) del frente de onda local obtenida será errónea. Es decir, no se podrá saber qué tanto se han desviado los puntos luminosos respecto a una posición de referencia una vez que es colocado el sistema de prueba. El método más fundamental para remover los errores de alineación es la introducción de un haz de referencia. Este haz suele ser una onda plana cuya longitud de onda es diferente a la del haz que tiene el frente de onda desconocido; esto es debido a que no se desea ningún tipo de interferencia entre los dos haces. Con lo anterior lo que se logra es tener un patrón inicial de puntos, respecto a los cuales se medirán los valores de la desviación longitudinal utilizados en este método y por lo tanto evitar cualquier error sistemático.

### 1.3.5. MÉTODO DE RODDIER

Como ya se mencionó en la introducción, el método de Roddier y el método de Shack-Hartmann son no interferométricos y pertenecen al régimen de la óptica geométrica [3], además, según Roddier [5] ambos tienen la misma sensibilidad. Sin embargo, una de las mayores ventajas que nos da el método de Roddier es que su instrumentación es más sencilla que la del sensor Shack-Hartmann. Otra ventaja se encuentra en el hecho de que es más fácil, experimentalmente hablando, el medir un campo escalar, como lo es la irradiancia (el laplaciano o curvatura del frente de onda local) en el método de Roddier, que en un campo vectorial (la inclinación o pendiente del frente de onda local) del método de Shack-Hartmann, donde se tienen que hacer el doble de mediciones  $\Delta x, \Delta y$  (una por cada componente de cada punto de prueba).

Otra ventaja más se encuentra en aplicaciones de óptica activa [11], donde el uso de un espejo bimorfo o un espejo de membrana puede utilizarse como dispositivo analógico para recuperar automáticamente el frente de onda y así corregir el sistema de prueba durante el tiempo de operaciones. De acuerdo a lo anterior, el método de Roddier parece ser un serio candidato para sustituir al método de Shack-Hartmann.

El método de Roddier [5][12] es un método de medición de la curvatura del frente de onda, está basado en las observaciones cuantitativas de imágenes desenfocadas cuyas variaciones en la intensidad reflejan cambios en la curvatura del frente de onda. Dichas variaciones pueden ser empleadas principalmente para la alineación de telescopios [13]. Beckers [14] da una interpretación sobre las imágenes desenfocadas obtenidas en un telescopio de espejos múltiples, en términos de la curvatura del frente de onda.

El método de Roddier consiste básicamente en efectuar mediciones de la distribución de irradiancia en dos planos desenfocados simétricamente colocados en ambos lados del plano focal del sistema óptico que se desea probar (Ver figura 1.9).

La diferencia en las mediciones de la distribución de irradiancia son una medida de la curvatura del frente de onda o el Laplaciano de la superficie del frente de onda (previamente Teague [15] [16] había propuesto como aplicación obvia e inmediata la medición del frente de onda basada solo en mediciones de irradiancia).

Roddier demuestra que la diferencia de las mediciones de irradiancia, consisten en una ecuación de dos términos: el primero es proporcional a las pendientes radiales del frente de onda en el borde de la pupila y se localiza en el borde del haz. El segundo término esquematiza el Laplaciano del frente de onda a través del haz (ecuación 1.14).

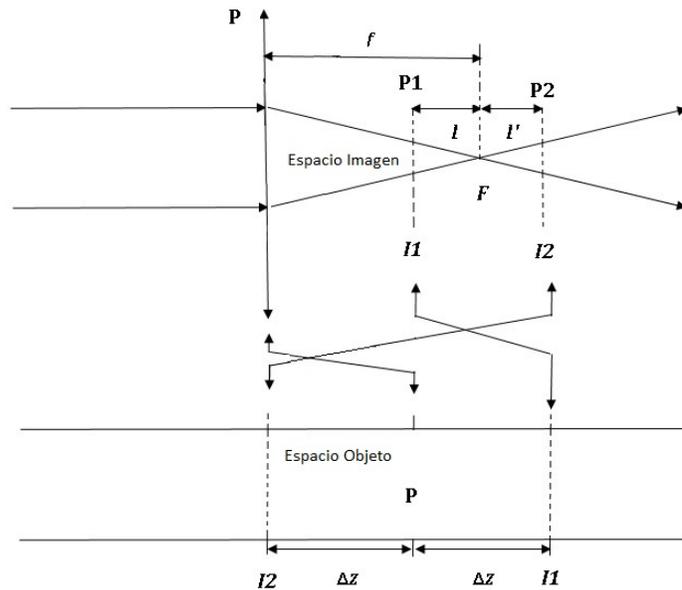


Figura 1.9: Esquema de prueba de Roddier. En el espacio imagen (arriba), las intensidades I1 e I2 aparecen como imágenes desenfocadas del objeto. En el espacio objeto (abajo), aparecen como las imágenes desenfocadas de las pupilas.

$$S = \frac{f(f-l)}{l} \left( \frac{\partial W}{\partial n} \delta_c - P \nabla^2 W \right) \quad (1.14)$$

### 1.3.6. RECUPERACIÓN DE FASE

La recuperación de fase [3] consiste en obtener el frente de onda o fase óptica de un haz luminoso a partir de su factor de difracción. La formulación matemática del patrón de difracción se encuentra en la fórmula de difracción de Rayleigh- Sommerfeld, la cual describe los efectos de la fase en la propagación de la luz de acuerdo al principio de Huygens- Fresnel [18]. Desafortunadamente, no hay manera directa de medir la fase de un solo fotón; no hay forma de interactuar con el haz luminoso para determinar la dirección instantánea de su vector eléctrico. Sin embargo, de acuerdo a los principios de interferencia y difracción, es posible relacionar la fase óptica con la distribución de irradiancia, cantidad que, si puede ser medida, para obtener el frente de onda o fase del haz luminoso que se estudia. El problema de recuperación de fase ha sido abordado por muchos investigadores los que han desarrollado múltiples algoritmos; Fienup [19] hace una revisión y comparación de algunos de ellos. Algunos emplean métodos para evaluar el patrón de difracción

de Fraunhofer, otros calculan los momentos de irradiancia a partir del patrón de difracción [15] y otros más, efectúan múltiples mediciones de irradiancia para extraer la información del frente de onda [16]. Sin embargo, el problema no es trivial debido principalmente a la no unicidad del patrón de difracción [17]. Teague [15] [16] desarrolló dos algoritmos de recuperación de fase que tienen implicaciones directas con el método de Roddier. En estos, Teague propone como aplicación obvia y directa la medición del frente de onda a partir de las mediciones de irradiancia en mínimo dos planos para medir aberraciones de primer orden. Si se desean medir aberraciones de mayor orden se tienen que tomar las irradiancias en más de dos planos. Uno de los algoritmos [15] consiste en la determinación de la fase óptica a partir de mediciones de los momentos de irradiancia medidos en planos múltiples; sin embargo, en principio, dos planos son suficientes para obtener la fase (ver figura 1.10). En el otro algoritmo [16] se determina la fase a partir de mediciones de irradiancia en dos planos; se derivan ecuaciones de propagación para las fases y la irradiancia y se da una solución en términos de las funciones de Green para la fase, que está dada en términos de la irradiancia. De estas últimas ecuaciones se obtienen las ecuaciones de transporte de irradiancia (ETI), fundamental para la descripción de la teoría del método de Roddier, el cual puede ser considerado un caso particular de los algoritmos de recuperación de fase. Esta ecuación puede ser presentada en una de sus formas de la manera siguiente:

$$\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} = -\nabla \cdot [I(x, y, z)\nabla W(x, y, z)]. \quad (1.15)$$

Donde podemos ver que se encuentran involucradas la función de irradiancia de un campo luminoso que se propaga en el eje  $z$  y su correspondiente frente de onda. La tabla 1.10 muestra las diferentes técnicas que se utilizan para resolver dicha ecuación, considerando sus ventajas y desventajas [20].

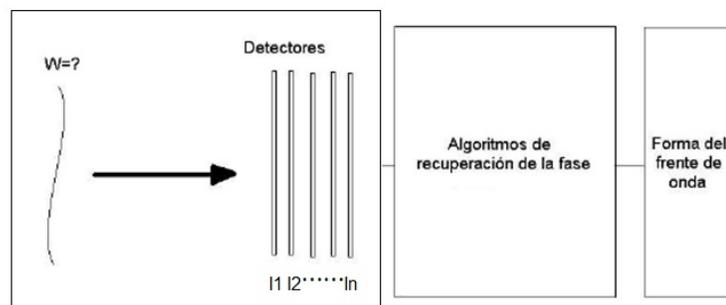


Figura 1.10: Esquema general de los algoritmos de recuperación de fase

Técnica	Ventajas	Desventajas
Funciones de Green	Análisis Teórico	Cálculo extenso y demanda de memoria.
Polinomios de Zernike	Simple y rápida. Representa de manera precisa las aberraciones ópticas.	Ruido en baja frecuencia. Solo para regiones circulares. Dificultad para encontrar detalles.
FFT (Transformada Rápida de Fourier)	Rápida, fácil de implementar, incorpora regularización en la reconstrucción	Implica condiciones de frontera periodicas.
DCT (Transformada Coseno Discreta)	Rápida. Condiciones de frontera de Neumann inhomogeneas.	Aperturas Rectangulares
DCT Iterativo	Condiciones de frontera inhomogeneas. Aperturas de forma arbitraria.	Necesita varias iteraciones.

Tabla 1.1: *Comparación de las distintas técnicas de recuperación de fase.*

## 1.4. POLINOMIOS DE ZERNIKE

Los polinomios de Zernike se utilizan a menudo para expresar datos del frente de onda en forma polinomial, ya que están constituidos por términos cuyas gráficas se parecen a los tipos de aberraciones que se observan en las pruebas ópticas [21]. En coordenadas polares, estos polinomios se expresan de la siguiente manera:

$$Z_n^m(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho)\cos(m\varphi), \quad (1.16)$$

donde los polinomios radiales  $R_n^m$  se definen como

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}. \quad (1.17)$$

En coordenadas cartesianas se consideran las siguientes transformaciones [22]

$$x = \rho\cos\varphi; y = \rho\sin\varphi. \quad (1.18)$$

La siguiente tabla muestra los primeros siete polinomios de Zernike y el nombre de la aberración correspondiente[4].

n	m	R	Coordenadas Cartesianas	Coordenadas Polares	Nombre
0	0	1	1	1	Piston
1	0	2	$y$	$\rho\sin\varphi$	Inclinación en el eje <b>y</b>
	1	3	$x$	$\rho\cos\varphi$	Inclinación en el eje <b>x</b>
2	0	4	$2xy$	$\rho\sin 2\varphi$	Astigmatismo Primario, a 45°
	1	5	$-1 + 2x^2 + 2y^2$	$2\rho^2 - 1$	Defoco
	2	6	$y^2 - x^2$	$\rho^2\cos 2\varphi$	Astigmatismo Primario, a 0° o 90°
3	0	7	$3xy^2 - x^3$	$\rho^3\sin 2\varphi$	Astigmatismo Triangular, 30°, 150°, 270°

Tabla 1.2: Los primeros siete polinomios ortogonales de Zernike

## 1.5. CONCLUSIÓN

En este capítulo se han revisado teóricamente algunas técnicas de pruebas ópticas. Esto con el fin de tener un panorama general de las diferencias entre estas técnicas y aquellas que utilizan a la ETI como base teórica. También se ha revisado a los polinomios de Zernike, los cuales serán

utilizados para caracterizar las principales aberraciones del frente de onda. Sumado a lo anterior, esta última revisión también nos proporcionará las herramientas necesarias para entender como las técnicas que utilizan a la ETI se pueden implementar tanto teórica como experimentalmente.

## Capítulo 2

# LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA Y SU ANÁLISIS TEÓRICO

### 2.1. INTRODUCCIÓN

La teoría básica de los métodos de recuperación de fase se describen a partir de cálculos directos de la irradiancia en dos planos simétricamente desenfocados. Sin embargo, se puede establecer una descripción alternativa de esta teoría, desde un punto de vista más físico, si se parte de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (ETI). La ETI se obtiene de argumentos de óptica física. En particular, surge de trabajos efectuados sobre recuperación de fase basados en la teoría de la difracción. Sin embargo, se puede mostrar que la ETI también puede obtenerse partiendo de argumentos de óptica geométrica. En este capítulo abordamos la deducción de la ETI mediante argumentos sustentados en ambas áreas de la óptica.

## 2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

### 2.2.1. TEORÍA BÁSICA

#### 2.2.1.1. ECUACIÓN DE HEMHOLTZ

Consideremos que  $W(x, y, z, t)$  representa una perturbación óptica en el tiempo  $t$  y en la posición  $P(x, y, z)$ , y la cual puede ser la magnitud del campo magnético o del campo eléctrico.

Supongamos que  $W(x, y, z, t)$  es una onda armónica monocromática escalar de la forma

$$W(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} u(x, y, z). \quad (2.1)$$

Donde  $\omega = Kc$  es la frecuencia angular,  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de onda,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $u(x, y, z)$  es una función compleja que depende sólo de la posición. Como  $W(x, y, z, t)$  representa una onda óptica debe satisfacer la ecuación de onda

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W(x, y, z, t) = 0 \quad (2.2)$$

Donde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el operador Laplaciano. Si sustituimos (2.1) en (2.2) y desarrollamos, obtenemos una ecuación independiente del tiempo

$$(\nabla^2 + K^2) u(x, y, z) = 0 \quad (2.3)$$

que recibe el nombre de Ecuación de Helmholtz. En lo que sigue supondremos que la onda monocromática que dependa sólo de la posición deberá obedecer esta ecuación.

#### 2.2.1.2. TEORÍA DE LA DIFRACCIÓN

Los efectos de la propagación de frentes de onda ópticos que pasan a través de planos que contienen aberturas requieren de la evaluación de la fórmula de difracción de Rayleigh- Sommerfield [23], la cual describe matemáticamente el principio de Huygens- Fresnel, el cual establece que cada punto del frente de onda se puede considerar como una fuente puntual de ondas esféricas (fuentes secundarias), y que la envolvente del conjunto de las ondas secundarias representa el frente de onda resultante en los momentos posteriores:

## 2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

$$u(x, y, z) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{iK(r+r')}}{rr'} \cos(\vec{n}, \vec{r}') dx' dy' \quad (2.4)$$

donde

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (2.5)$$

es la distancia desde un punto  $P'$  sobre el plano de la abertura hasta un punto  $P$  sobre la región del plano de observación,  $\Sigma$  es la abertura,  $(x, y)$  son las coordenadas en plano de observación,  $(x', y')$  son las coordenadas en el plano de la abertura,  $\cos(\vec{n}, \vec{r}')$  es el factor de oblicuidad, y  $\vec{n}$  es un vector unitario perpendicular al plano de la abertura (figura 2.1). La ecuación 2.4 se considera exacta; es decir, es válida en todo el espacio de propagación para encontrar la función compleja  $u(x, y, z)$ .

Sin embargo, a pesar de exacta, su evaluación directa impone algunas dificultades numéricas. Primero, es no separable, debido a que  $r$  contiene a  $x'$  y  $y'$  en una raíz cuadrada común; y segundo, el factor de fase en el integrando  $Kr$  es grande debido a lo pequeño de las longitudes de onda ópticas, lo que implica que el integrando oscile rápidamente.

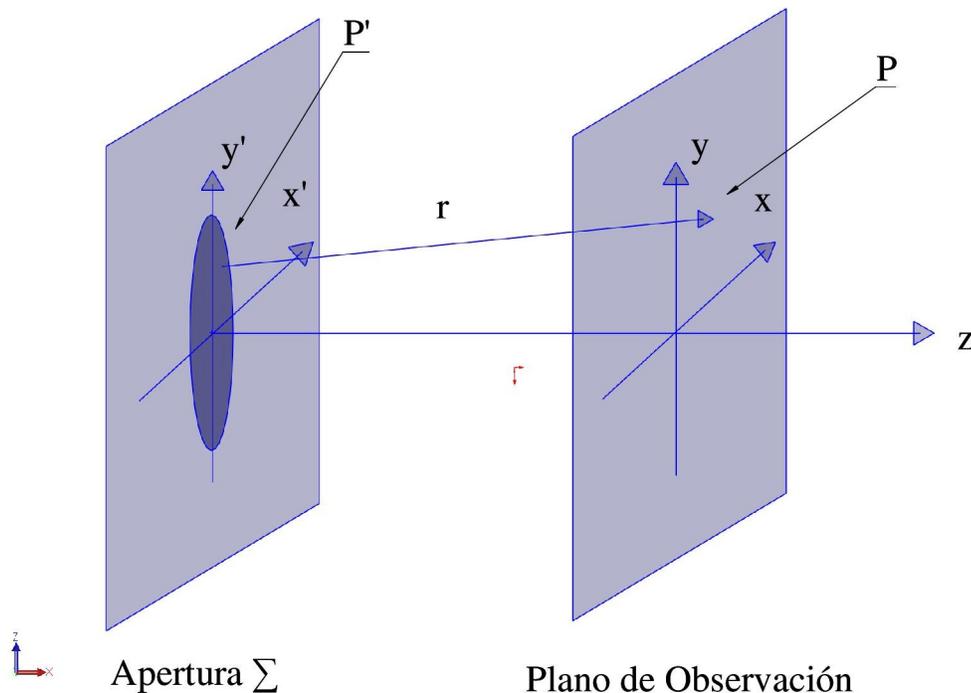


Figura 2.1: Geometría de Difracción

## 2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

Algunas de estas dificultades pueden resolverse mediante algunas aproximaciones. Estas aproximaciones se basan en la suposición de que la distancia  $z$ , entre el plano de la abertura  $\Sigma$  y el plano de observación, sea mucho mayor que la máxima dimensión de la abertura y que la máxima dimensión de la imagen de la abertura en el plano de observación, (figura 2.1). Basados en estas suposiciones el factor de oblicuidad de la ecuación 2.4 puede aproximarse por  $\cos(\vec{n}, \vec{r}) = 1$  y el término  $r$  en el denominador puede sustituirse por  $z$ . La cantidad  $r$  en el exponente no se sustituye por  $z$  debido a que está multiplicado por una cantidad grande que es  $K$  y esto podría generar errores de fase mayores de  $2\pi$  radianes. Sin embargo, este problema se puede resolver si efectuamos una expansión binomial al término raíz cuadrada de la ecuación 2.5, es decir

$$r \approx z + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} - \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{8z^3} + \dots \quad (2.6)$$

Reteniendo los primeros dos términos de esta expresión y sustituyéndolos juntos con las otras suposiciones, la fórmula de difracción de Rayleigh- Sommerfeld (2.4) se reduce a la fórmula de difracción de Fresnel

$$u_{\mathcal{F}}(x, y, z) = \frac{e^{iKz}}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} u(x', y', 0) e^{ik \left[ \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} \right]} dx' dy' \quad (2.7)$$

donde  $u(x', y', 0) = Ae^{iKr'}/r'$ . Para que la aproximación a primer orden sea válida, es suficiente que los errores en fase que producen los términos cuadráticos de la ec. (3.30) (tercer término en la expansión) sean mucho menores que un radián.

### 2.2.1.3. ECUACIÓN DE ONDA PARAXIAL Y ECUACIÓN PARABÓLICA

Sea  $\Psi(x, y, z)$  la parte espacial de una perturbación óptica que se propaga en la dirección de  $z$  y que puede describirse por una onda escalar, que obedece a la ecuación de Helmholtz de la forma

$$\Psi(x, y, z) = u(x, y, z) e^{-iKz} \quad (2.8)$$

Sustituyendo esta perturbación óptica en la ecuación de Helmholtz (2.3) y desarrollando, obtenemos

$$\left( \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2iK \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y, z) = 0 \quad (2.9)$$

Donde  $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es el operador Laplaciano bidimensional. Si suponemos que  $u(x, y, z)$

## 2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

varía muy lentamente en  $z$ , esto es,  $u(x, y, z)$  puede considerarse como casi lineal en  $z$  entonces  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  puede ser depreciada y (2.9) se convierte en

$$\left( \nabla_T^2 - 2iK \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y, z) = 0 \quad (2.10)$$

que es la llamada ecuación de onda paraxial. Nótese que la suposición hecha en (2.9) para obtener la ecuación paraxial (2.10) es equivalente al requerimiento de que

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| \nabla_T^2 u \right| + \left| -2iK \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (2.11)$$

en todas partes de la región de propagación. Puede mostrarse que la ecuación de onda paraxial (2.10) y sus soluciones pueden conducir a una descripción de la difracción equivalente a la formulación de Fresnel [23]. Feiock [24] muestra que mientras que la fórmula de difracción de Rayleigh- Sommerfield (2.4) es una solución exacta a la ecuación de Helmholtz (2.3), la fórmula de difracción de Fresnel (2.7) sin el término  $e^{iKz}$  es una solución exacta de la ecuación de onda paraxial (2.10).

Considerando lo anterior, supongamos una perturbación de Fresnel (2.7) (sin el factor  $e^{iKz}$ , de la forma  $\phi(x, y, z) = u_{\mathcal{F}}(x, y, z) e^{-iKz}$ , es decir

$$\phi(x, y, z) = u_{\mathcal{F}}(x, y, z) e^{-iKz} = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} u(x', y', 0) e^{ik \frac{[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{2z}} dx' dy'. \quad (2.12)$$

Si la sustituimos en la ecuación paraxial (2.10) y desarrollamos resulta

$$\left( \frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i \frac{\partial}{\partial z} \right) u_{\mathcal{F}}(x, y, z) = 0 \quad (2.13)$$

que es llamada ecuación parabólica [16][25]. Teague [16] muestra que la fórmula de difracción de Fresnel (2.7) satisface exactamente a (2.13). Esto se basa en los resultados numéricos efectuados por Southwell [26] sobre la validez de la aproximación de Fresnel en el campo cercano. La ecuación parabólica (2.13) es la ecuación fundamental por medio de la cual se obtiene la Ecuación de Transporte de Irradiancia .

## 2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

### 2.2.2. ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA (ÓPTICA FÍSICA)

Representemos por  $w(x, y, z)$  a una perturbación óptica que se propaga en la dirección de  $z$ . Supongamos que  $w(x, y, z)$  satisface aproximadamente la ecuación parabólica (2.13), de acuerdo al resultado de Teague [16], es decir

$$\left( \frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i \frac{\partial}{\partial z} \right) w(x, y, z) = 0 \quad (2.14)$$

Supongamos también que la normalización de  $w(x, y, z)$  es tal que

$$|w(x, y, z)|^2 = I(x, y, z)$$

nos proporciona la irradiancia en el punto  $P(x, y, z)$ ; y finalmente supongamos que  $w(x, y, z)$  puede expresarse en términos de cantidades reales como la fase  $\phi(x, y, z)$  y la irradiancia  $I(x, y, z)$  mediante la expresión

$$w(x, y, z) = [I(x, y, z)]^{1/2} e^{-i\phi(x, y, z)}$$

Si sustituimos esta expresión en (2.14), resulta

$$\left( \frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i \frac{\partial}{\partial z} \right) [I(x, y, z)]^{1/2} e^{-i\phi(x, y, z)} = 0 \quad (2.15)$$

Multiplicando el lado izquierdo de (2.15) por  $w^*(x, y, z)$  es decir

$$[I(x, y, z)]^{1/2} e^{i\phi(x, y, z)} \left( \frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i \frac{\partial}{\partial z} \right) [I(x, y, z)]^{1/2} e^{-i\phi(x, y, z)} = 0 \quad (2.16)$$

Y multiplicando el lado izquierdo del conjugado de (2.15) por  $w(x, y, z)$ , es decir

$$[I(x, y, z)]^{1/2} e^{-i\phi(x, y, z)} \left( \frac{\nabla_T^2}{2K} - K + i \frac{\partial}{\partial z} \right) [I(x, y, z)]^{1/2} e^{i\phi(x, y, z)} = 0 \quad (2.17)$$

Restando (2.16) de (2.17) y desarrollando, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} I(x, y, z) + \frac{1}{K} \nabla_T \phi(x, y, z) \cdot \nabla_T I(x, y, z) + \frac{I(x, y, z)}{K} \nabla_T^2 \phi(x, y, z) = 0 \quad (2.18)$$

Si hacemos  $\phi(x, y, z) = KW(x, y, z)$ , donde  $W(x, y, z)$  es el frente de onda geométrico de la perturbación, (2.18) se convierte en

## 2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

---

$$\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} + \nabla_T W(x, y, z) \cdot \nabla_T I(x, y, z) + I(x, y, z) \nabla_T^2 W(x, y, z) = 0 \quad (2.19)$$

Esta ecuación obtenida por Teague [16] y de manera alternativa por Streibl [27] recibe el nombre de Ecuación de Transporte de Irradiancia.

La interpretación física, así como la validez experimental de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.19) fueron hechas por Ichikawa y otros [28]. Para ellos el término  $\nabla_T I \cdot \nabla_T W$  representa las variaciones de irradiancia causadas por el desplazamiento transversal del haz inhomogéneo ( $\nabla_T I \neq 0$ ) debido a la inclinación (pendiente) del frente de onda local cuya normal está dada por  $\nabla_T W$ . El término  $I \nabla_T^2 W$  representa las variaciones de irradiancia causadas por la convergencia o divergencia del haz cuya longitud focal es inversamente proporcional a  $\nabla_T^2 W$  (curvatura). El término  $\frac{\partial I}{\partial z}$  expresa las variaciones en irradiancia del haz causadas por pendiente y curvatura conforme  $W$  se propaga a lo largo del eje  $z$ , véase figura 2.2).

La Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.19) se puede escribir como

$$\nabla_T \cdot (I \nabla_T W) = -\frac{\partial I}{\partial z} \quad (2.20)$$

Haciendo una analogía con la ley de conservación de masa o densidad de carga expresada por

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.21)$$

donde  $\rho$  es la masa o densidad de carga y  $\vec{v}$  es la velocidad de flujo. De esto se deduce que la Ecuación de Transporte de Irradiancia representa la ley de conservación de energía luminosa.

En resumen, se puede afirmar que la Ecuación de Transporte de Irradiancia es válida sólo en la región paraxial y representa la ley de conservación de energía luminosa.

## 2.2. OBTENCIÓN DE LA ETI MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

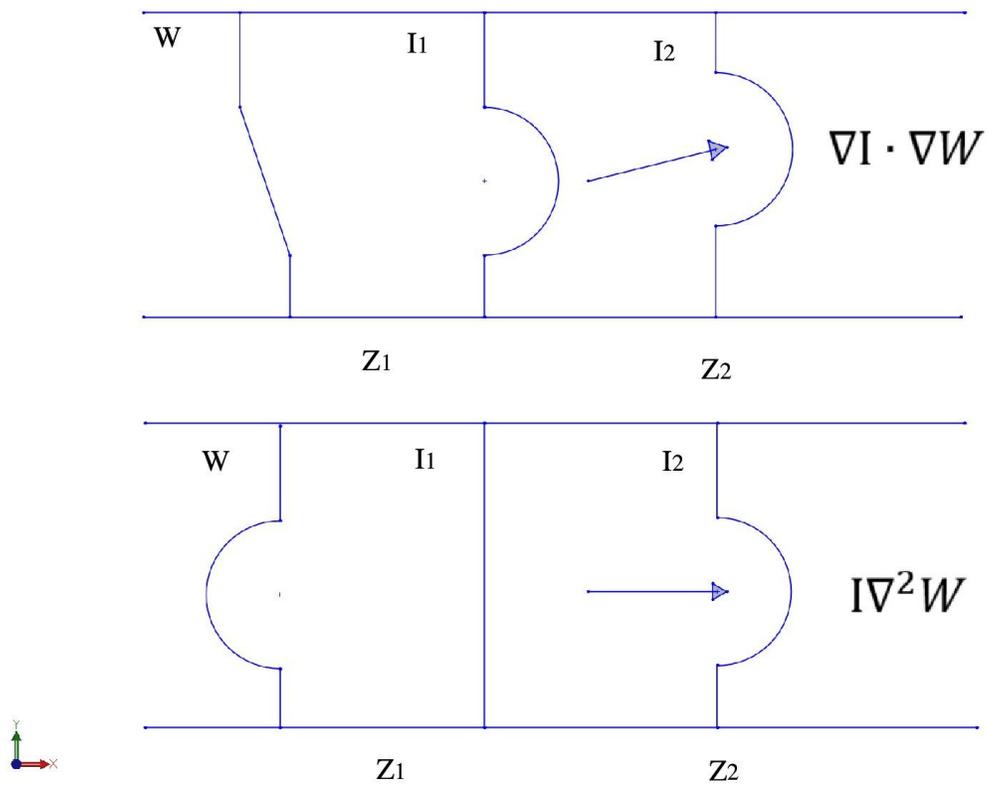


Figura 2.2: Los dos términos de la ETI representan respectivamente efectos de pendiente y de curvatura en el frente de onda

## 2.3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.

### 2.3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.

#### 2.3.1. ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA (ÓPTICA GEOMÉTRICA)

Supongamos que tenemos un frente de onda aberrado  $W$  proveniente de un sistema óptico el cual se encuentra inmerso en un medio homogéneo, y que incide sobre la superficie de algún detector. Como los rayos representan la dirección de flujo de energía radiante y son perpendiculares al frente de onda, se observarán sobre la superficie del detector, zonas más iluminadas que otras debido a la convergencia o divergencia de los rayos en cualquier punto sobre la superficie del detector, (figura 2.3).

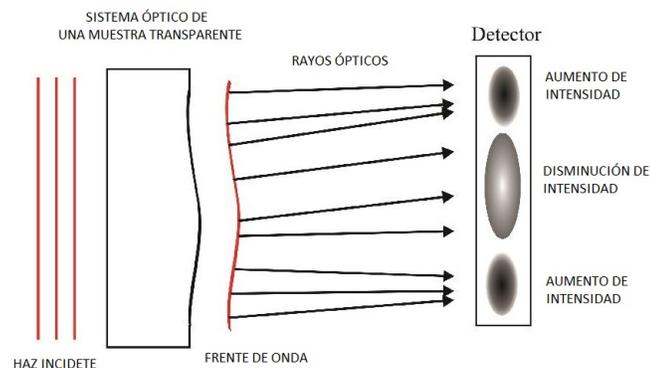


Figura 2.3: El frente de onda  $W$  produce zonas de mayor iluminación que otras sobre el detector

Lo anterior nos hace suponer que debe existir alguna relación entre la distribución de irradiancia y la curvatura del frente de onda. Para conocer esta relación iniciaremos considerando una pequeña porción  $\delta W$  de este frente de onda donde supondremos irradiancia uniforme. Aquí los rayos marginales  $M$ , el área  $\delta W$  y una pequeña área  $\mathbf{A}$  sobre el detector limitan una pequeña región cerrada del espacio  $\Omega$  como se ilustra en la figura 2.4.

## 2.3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.

---

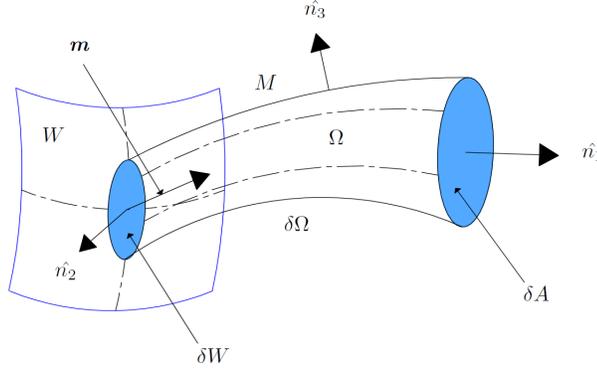


Figura 2.4: Flujo de energía radiante en la región  $\Omega$

Dentro de esta región cerrada  $\Omega$  hay un flujo de energía radiante cuya dirección está dada por

$$\hat{s} = \frac{\nabla W}{|\nabla W|} \quad (2.22)$$

Donde  $\hat{s}$  es un vector unitario perpendicular a la superficie del frente de onda  $W$ . En ausencia de carga dentro de la región  $\Omega$ , encontramos que el flujo de energía  $\phi_{\delta W}$  que cruza el área  $\delta W$  hacia adentro, será igual al flujo de energía  $\phi_A$  que cruza el área  $A$  hacia afuera; esto significa que el flujo total de energía radiante que entra o sale de la región  $\Omega$  es cero. Es decir,

$$0 = \phi_{\delta W} + \phi_A = \int_{\partial\Omega} I \hat{s} \cdot \hat{n}_1 ds + \int_{\partial\Omega} I \hat{s} \cdot \hat{n}_2 ds + \int_{\partial\Omega} I \hat{s} \cdot \hat{n}_3 ds = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Omega} I \hat{s} \cdot \hat{n}_i ds = \int_{\partial\Omega} I \hat{s} \cdot \hat{n} ds \quad (2.23)$$

Donde  $\partial\Omega = \delta W + A + M$  es la superficie que envuelve a la región  $\Omega$  y  $\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular a la superficie  $\delta\Omega$ . La última integral del tercer miembro es cero debido a que  $\hat{s} \cdot \hat{n} = 0$  por tratarse de rayos marginales.

Si aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss [29] a (2.23) se obtiene que

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (I \hat{s})] dv = \int_{\partial\Omega} (I \hat{s}) \cdot \hat{n} ds \quad (2.24)$$

Y como la superficie de integración es arbitraria, para que se cumpla (2.24) es necesario que

$$\nabla \cdot (I \hat{s}) = 0 \quad (2.25)$$

### 2.3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.

---

Esta ecuación significa que en esta región la energía radiante se conserva, en otras palabras, se tiene que el flujo neto que entra o sale de la región  $\Omega$  es cero. Usando la ecuación Eikonal  $\nabla W^2 = n^2$ , o, equivalentemente,  $\nabla W = n\hat{s}$ , donde  $n$  es el índice de refracción del medio, y sustituyendo en (2.25), resulta

$$\nabla \cdot \left( \frac{I \nabla W}{n} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Desarrollando y considerando que se trata de un medio homogéneo, obtenemos

$$\nabla I \cdot \nabla W + \nabla^2 W = 0 \quad (2.27)$$

Esta ecuación puede considerarse como una ecuación de transporte de irradiancia generalizada la cual nos da una relación entre la distribución de irradiancia y el frente de onda geométrico y además representa la ley de conservación de energía luminosa. Es posible, partiendo del teorema de Poynting de la teoría electromagnética, obtener la misma ecuación (2.27), [1].

Si ahora, reescribimos a (2.27) como

$$I \nabla_T^2 W + I \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \nabla_T I \cdot \nabla_T W + \frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

Y suponemos las siguientes condiciones sobre el frente de onda  $W$

$$\begin{aligned} i) & \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right| \approx 1, \\ ii) & \left| \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right| \ll |I \nabla_T^2 W| + |\nabla_T I \cdot \nabla_T W| + \left| \frac{\partial I}{\partial z} \right|, \\ o & \left| I \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right| \approx 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

la ecuación de transporte de irradiancia generalizada (2.27) se convierte en

$$I \nabla_T^2 W + \nabla_T I \cdot \nabla_T W = - \frac{\partial I}{\partial z} \quad (2.30)$$

que es la Ecuación de Transporte de Irradiancia (ver sección 2.2.2) y representa la ley de conservación de la energía radiante, en concordancia con los resultados obtenidos por K. Ishikawa y otros [28]. Todo este análisis demuestra que la Ecuación de Transporte de Irradiancia no pertenece al dominio específico de la óptica física.

## 2.4. LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ETI

En trabajos previos se ha mostrado la distribución de intensidad de un campo luminoso y el frente de onda asociado a dicho campo, los cuales se relacionan mediante la ecuación de transporte de irradiancia (ETI). Sin embargo, los resultados de dichos trabajos, no contemplan la verificación del cumplimiento de la ecuación de transporte de irradiancia. Con el fin de obtener una interpretación más clara sobre el significado físico de la ETI, se verifica su cumplimiento para un frente de onda, esférico, parabólico y su correspondiente distribución de intensidad.

### 2.4.1. FRENTE DE ONDA ESFÉRICO CON DESPLAZAMIENTO

Recordemos que la ecuación de transporte generalizada tiene la forma

$$\nabla I(x, y, z) \cdot \nabla W(x, y, z) + I(x, y, z) \nabla^2 W(x, y, z) = 0. \quad (2.31)$$

Analicemos la figura 2.5, la cual corresponde al frente de onda que provoca una fuente luminosa puntual desplazada del origen.

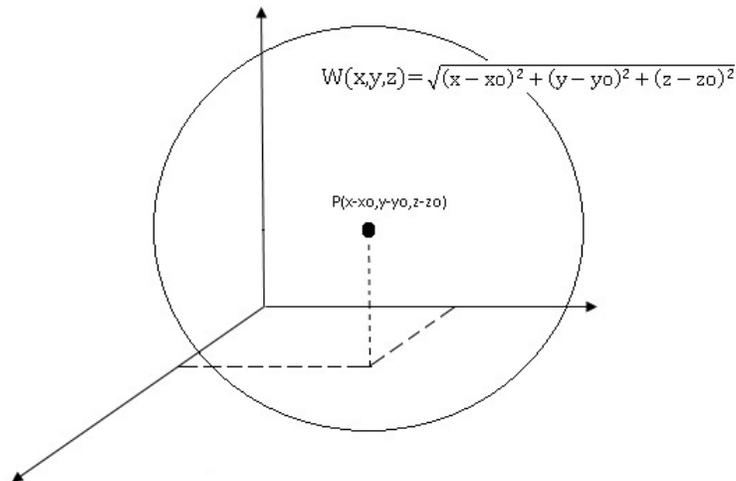


Figura 2.5: Frente de onda desplazado fuera del origen

Si el centro del frente de onda esférico es el punto  $P(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  (2.5) entonces

$$W(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.32)$$

## 2.4. LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ETI

---

y el gradiente de  $W(x, y, z)$

$$\nabla W(x, y, z) = \frac{(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (2.33)$$

y el laplaciano de  $W(x, y, z)$  es

$$\nabla^2 W(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}^3}. \quad (2.34)$$

Ahora bien, de acuerdo a la ley del inverso al cuadrado, tenemos que la irradiancia emitida por una fuente puntual desplazada del origen viene dada por

$$I(x, y, z) = \frac{1}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.35)$$

y su gradiente será

$$\nabla I(x, y, z) = -2 \frac{(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^2} \quad (2.36)$$

Entonces el primer termino de la ecuación 2.31 es

$$\nabla I(x, y, z) \cdot \nabla W(x, y, z) = -\frac{2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (2.37)$$

y el segundo término

$$I(x, y, z) \nabla^2 W(x, y, z) = \frac{2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (2.38)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.31)

$$-\frac{2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} + \frac{2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} = 0. \quad (2.39)$$

Lo cual demuestra que la ETI generalizada se cumple para un frente de onda esférico desplazado en el origen.

### 2.4.2. SOLUCIÓN DE LA ETI PARA UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO

Consideremos un frente de onda parabólico como el que se modela mediante la función siguiente

$$W_p = z \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right] \quad (2.40)$$

Su correspondiente distribución de intensidad viene dado por la función

$$I_p = \frac{1}{z^2} \left[ 1 - \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right] \quad (2.41)$$

Recordemos que la ecuación de transporte de irradiancia (ETI) tiene la forma

$$\nabla W_p \cdot \nabla I_p + I_p \nabla^2 W_p + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (2.42)$$

Vamos ahora a desarrollar todos los términos de la ecuación 2.42. Si primero desarrollamos la divergencia del frente de onda ésta nos queda como sigue

$$\nabla W_p = \frac{1}{z} [x\hat{i} + y\hat{j}], \quad (2.43)$$

y la divergencia de la intensidad sería

$$\nabla I_p = -\frac{1}{z^4} [2x\hat{i} + 2y\hat{j}] \quad (2.44)$$

Por lo tanto, el producto punto entre estas dos divergencias resulta

$$\nabla I_p \cdot \nabla W_p = -\frac{2}{z^5} [x^2 + y^2]. \quad (2.45)$$

Ahora bien el laplaciano transversal del frente de onda  $W$  es

$$\nabla^2 W_p = \nabla \cdot \nabla W_p = \frac{2}{z} \quad (2.46)$$

y entonces el segundo término de la ETI queda

$$I_p \nabla^2 W_p = -2 \left[ \frac{x^2 + y^2 - z^2}{z^5} \right]. \quad (2.47)$$

Finalmente el tercer termino queda

$$\frac{\partial I_p}{\partial z} = \left[ \frac{4(x^2 + y^2) - 2z^2}{z^5} \right]. \quad (2.48)$$

Introduciendo todos los términos en la ecuación 2.42 obtenemos

$$-\frac{2}{z^5} [x^2 + y^2] - 2 \left[ \frac{x^2 + y^2 - z^2}{z^5} \right] + \left[ \frac{4(x^2 + y^2) - 2z^2}{z^5} \right] = 0, \quad (2.49)$$

lo cual demuestra que la ETI se cumple para un frente de onda parabólico.

### 2.4.3. FRENTE DE ONDA GAUSSIANO

Comenzaremos por tener una idea aproximada de la representación matemática de las ondas de luz en haces gaussianos. Usaremos el eje  $z$  como la dirección de propagación del haz, dejando las direcciones  $x$  e  $y$  para describir la dirección transversal del mismo. Los tipos más simples de ondas en tres dimensiones son ondas planas. Una onda plana que se propaga a lo largo de la dirección  $z$  está representada por la función de onda

$$\Psi(x, y, z, t) = Ae^{i(kz - \omega t)} \quad (2.50)$$

La amplitud  $A$  es constante. Esta ecuación no puede describir un rayo láser porque la amplitud se extiende infinitamente en la dirección transversal. Una amplitud más apropiada sería una que disminuya en los puntos alejados sobre el eje  $z$ .

Podemos proponer algo simple, como una función gaussiana:

$$A = A(x, y) = e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{w}} \quad (2.51)$$

donde  $w$  es proporcional al ancho del haz, también conocida como la mancha del haz. Eso se define como la distancia desde el eje del haz donde la amplitud ha disminuido en  $\frac{1}{e}$ .

La expansión del haz puede ser contabilizada por una mancha que aumente a medida que nos desplazamos en el eje  $z$ , aunque la dependencia exacta esté aun por determinarse. Si el haz se expande entonces su "frente de onda" debe tener una forma esférica. Esto porque una onda siempre se propaga en una dirección perpendicular a su frente de onda (por ejemplo, ondulaciones en un estanque). El frente de onda se define como la superficie que contiene todos los puntos de la onda que llevan la misma fase (por ejemplo, la cresta de las ondas). Este frente de onda esférico no está contabilizado totalmente por el término de fase de onda plana  $e^{ikz}$ , por lo que debemos usar una expresión modificada. La parte espacial de un frente de onda esférico tiene la forma  $e^{ikr}$  donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

---

## 2.4. LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ETI

---

Supongamos que estamos examinando la onda lejos del origen pero cerca de la eje  $z$ , tal que  $x \ll z$  y  $y \ll z$ . Entonces podemos aproximar  $r$  usando la aproximación binomial

$$r = z\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \approx z\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}\right) \quad (2.52)$$

Por lo tanto, una mejor aproximación para la fase de la onda incluirá una fase similar a la de una onda esférica. Nuestra mejor respuesta para la expresión de la función de onda de un frente de onda gaussiano es

$$\Psi(x, y, z) \simeq e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2}} e^{i(kz-wt)} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \quad (2.53)$$

El primer factor contiene el perfil gaussiano, el segundo factor tiene el perfil unidireccional de onda, y el tercer factor tiene la corrección al factor anterior que toma en cuenta la curvatura del frente de onda.

### 2.4.3.1. SOLUCIÓN FORMAL A LA ECUACIÓN DE ONDA PARA HACES GAUSSIANOS

De manera obvia, la expresión para la descripción de la luz de un rayo láser no es trivial. Debemos encontrar la solución resolviendo la ecuación de onda. La ecuación de onda tridimensional está dada por

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.54)$$

donde  $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$  es el laplaciano. Si introducimos una solución de prueba de la forma.

$$\Psi(x, y, z, t) = \varepsilon(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (2.55)$$

Aquí  $\varepsilon$  es la parte de la función de onda que depende solo de las coordenadas espaciales. Sustituyendo la ecuación 2.55 en la ec. 2.54 se obtiene la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \varepsilon + k^2 \varepsilon = 0 \quad (2.56)$$

Tenga en cuenta que también podríamos haber elegido utilizar  $e^{+i\omega t}$  en la ecuación 2.55. En ese caso la solución representaría una onda que se mueve hacia la dirección negativa de  $z$ . Así, la solución es independiente de la dirección de propagación.

## 2.4. LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ETI

---

Ahora debemos simplificar esta ecuación dado que la restringiremos para describir el haz Gaussiano. Comenzamos requiriendo que la solución tenga la forma

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0(x, y, z)e^{ikz} \quad (2.57)$$

Reemplazando la ec. 2.57 en la ec. 2.56 y simplificando obtenemos

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} = 0 \quad (2.58)$$

El término  $e^{ikz}$  de la ec. 2.57 explica la oscilación de la onda a lo largo de la dirección de propagación. La dependencia de  $\varepsilon_0$  con  $z$  es de una naturaleza diferente. Es posible tomar en cuenta la disminución lenta en la amplitud de la onda a medida que la onda se propaga. Así podemos decir que  $\varepsilon_0$  varía lentamente con  $z$ , y por lo tanto podemos ignorar el término  $\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial z^2}$  de la ec. 2.58. La ecuación resultante

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} = 0 \quad (2.59)$$

es llamada ecuación de onda paraxial.

Para esta ecuación se propone la solución mostrada en la ecuación 2.60

$$\varepsilon_0(x, y, z) = A e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} e^{ip(z)}. \quad (2.60)$$

Se debe notar aquí como se separan las dependencias  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Al reemplazar la ec. 2.60 en la ec. 2.59 obtenemos ecuaciones separadas para  $q(z)$  y  $p(z)$ . Para  $q(z)$  tenemos que es una función compleja

$$q(z) = z - iz_R \quad (2.61)$$

donde  $z_R$  es una constante llamada constante de Rayleigh. Como  $q(z)$  aparece en el denominador de una fracción en el exponencial de Ec. 2.60, entonces una forma más apropiada de expresarlo es mediante

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + \frac{z_R^2}{z}} + \frac{i}{\frac{z^2}{z_R} + z_R} \quad (2.62)$$

Insertando la ec. 2.62 en el primer término exponencial de la 2.60 obtenemos

$$e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w(z)}} \quad (2.63)$$

---

## 2.4. LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ETI

---

Estos factores tienen la forma a la que se llegó en la ecuación 2.53.  $R(z)$  es conocido como el Radio de curvatura del frente de onda y viene dado por

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \quad (2.64)$$

Para el segundo término de la ec. 2.63 vemos que lo que interpretamos antes como la mancha del haz tiene ahora una dependencia  $z$

$$w(z) = w_0 \sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)} \quad (2.65)$$

donde la constante

$$w_0 = \sqrt{\frac{z_R \lambda}{\pi}} \quad (2.66)$$

es llamada la cintura del haz. Antes de analizar qué significan estos términos, veamos la solución para  $p(z)$ :

$$e^{ip(z)} = \frac{w_0}{w(z)} e^{-i\varphi(z)} \quad (2.67)$$

donde

$$\varphi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (2.68)$$

Es conocida como la fase de Gouy. Concatenaremos ahora estos resultados en la función *Psi* que se propuso para satisfacer la ecuación de onda:

$$\Psi(x, y, z, t) = A \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}} e^{i(kz-\omega t)} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-i\varphi(z)} \quad (2.69)$$

Los tres primeros factores especifican la amplitud de la onda y los tres factores siguientes definen la fase de la onda incluida en los factores exponenciales.

### 2.4.3.2. SOLUCIÓN DE LA ETI PARA UN FRENTE DE ONDA GAUSSIANO

El haz gaussiano de la ecuación 2.69 es una distribución simétrica radial en la cual la variación de su intensidad está dada por

$$I(x, y, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \exp^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \quad (2.70)$$

---

## 2.4. LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ETI

donde  $w_0$  es el radio de cintura del haz,  $w(z)$  es el radio del haz en una distancia  $z$ , y  $x$  e  $y$  son las coordenadas espaciales transversales.

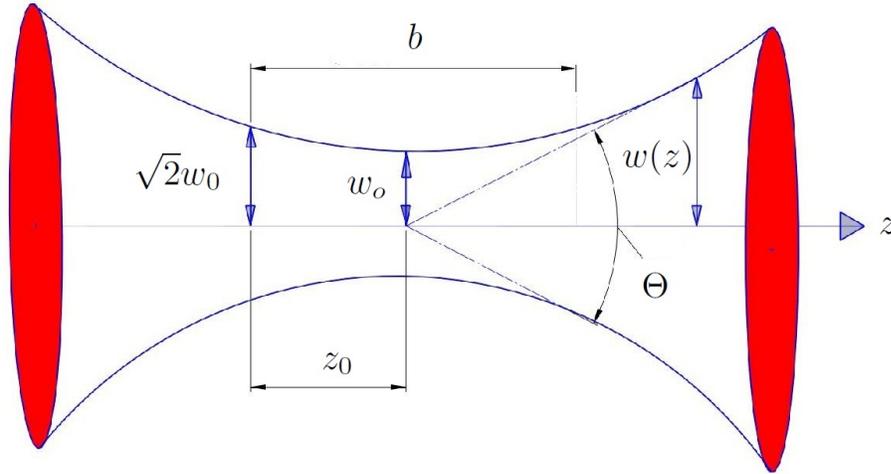


Figura 2.6: Haz Gaussiano

El frente de onda del haz gaussiano es

$$W(x, y, z) = z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{\xi(z)}{k} \quad (2.71)$$

donde  $\xi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$ . Al igual que en la sección anterior, haciendo las operaciones correspondientes

$$\nabla_T I \cdot \nabla_T W = -\frac{4zz_0^4(x^2 + y^2)}{(z^2 + z_0^2)^3 w_0^2} \exp^{-2\frac{(x^2 + y^2)z_0^2}{w_0^2(z^2 + z_0^2)}} \quad (2.72)$$

el segundo término de la ecuación 2.42 resulta

$$I \nabla_T^2 W = \frac{2zz_0^2}{(z^2 + z_0^2)^2} \exp^{-2\frac{(x^2 + y^2)z_0^2}{w_0^2(z^2 + z_0^2)}} \quad (2.73)$$

Finalmente tercer término de la ecuación 2.42 queda

$$\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} = \frac{4zz_0^4(x^2 + y^2)}{(z^2 + z_0^2)^3 w_0^2} \exp^{-2\frac{(x^2 + y^2)z_0^2}{w_0^2(z^2 + z_0^2)}} - \frac{2zz_0^2}{(z^2 + z_0^2)^2} \exp^{-2\frac{(x^2 + y^2)z_0^2}{w_0^2(z^2 + z_0^2)}} \quad (2.74)$$

### 2.4.3.3. RELACIÓN ENTRE FRENTE DE ONDA GAUSSIANO Y PARABÓLICO

Consideremos ahora la ecuación 2.71. Introduciendo las equivalencias hechas en esta sección se llega a que el frente de onda gaussiano se puede escribir

$$W(x, y, z) = z + \frac{(x^2 + y^2)z}{2(z^2 + z_0^2)} - \kappa^{-1} \arctan(z/z_0) \quad (2.75)$$

donde  $\kappa = 2\pi/\lambda$ . Vamos a considerar que se desea que la cintura del haz gaussiano sea lo más pequeña posible, es decir,  $z_0 \rightarrow 0$ . Entonces la ecuación 2.75 se puede escribir como

$$W(x, y, z) \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{\lambda}{4} \quad (2.76)$$

Siendo  $\lambda$  muy pequeña comparada con las dimensiones espaciales entonces

$$W(x, y, z) \approx z \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right] \quad (2.77)$$

La cual es la expresión aplicada para un frente de onda parabólico.

## 2.5. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha mostrado que la Ecuación de Transporte de Irradiancia se puede obtener tanto a partir de argumentos de óptica física como a partir de argumentos de óptica geométrica. Se comprobó también la validez de la ecuación para frentes de onda cuya función de irradiancia es conocida (esférico, parabólico y gaussiano.)

De la deducción analítica para obtenerla se concluye que:

1. La dirección de propagación del frente de onda debe ser preferente en la dirección de  $\mathbf{z}$ .
2. Las curvaturas presentadas durante la propagación del frente de onda deben de ser suaves y de magnitud mucho menor que el número de onda.
3. El frente de onda debe ser casi lineal en  $z$ .

También, se encontró, independientemente de los argumentos seguidos para obtenerla, la Ecuación de Transporte de Irradiancia representa la ley de conservación de energía luminosa y sólo es válida en la región paraxial.

## Capítulo 3

# ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Con el propósito de obtener información cuantitativa sobre el frente de onda a partir de mediciones de irradiancia en planos distintos, se han propuesto algunos métodos numéricos [5] [28] mediante los cuales, a partir de la diferencia entre las mediciones de irradiancia en dos o más planos, que son una medida de la curvatura del frente de onda y de la derivada radial del frente de onda en el borde de la pupila, se puede recuperar el frente de onda resolviendo la ecuación ETI que, como veremos, puede derivar en una ecuación de Poisson con condición de Neumann a la frontera. En este capítulo presentaremos las herramientas matemáticas necesarias para entender el desarrollo de los algoritmos propuestos al final de este trabajo de investigación. Como ya se mencionó en el capítulo 2, la ecuación de transporte de irradiancia es una ecuación diferencial del tipo parcial. Un método muy comúnmente usado para la solución aproximada de ecuaciones parciales es conocido como método de elementos finitos (FEM). El frente de onda puede ser reconstruido mediante métodos numéricos de solución de la ETI. De hecho, Thibbos et. Al. [34] han implementado ya una solución numérica utilizando el método de elementos finitos. Nosotros sugerimos aquí la utilización de este método debido a la sencillez con la que se comprende y se implementa.

## 3.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON

### 3.2.1. MÉTODO DE CAMBIO DE VARIABLE

Como ya se mencionó en el capítulo 2, la ETI puede presentarse en su manera compacta como

$$\nabla_T \cdot [I(x, y, z) \nabla_T W(x, y, z)] = -\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z}. \quad (3.1)$$

Ishizuka et. al. [30] propusieron un cambio de variable de manera que

$$I(x, y, z) \nabla_T W(x, y, z) = \nabla_T \psi(x, y, z) \quad (3.2)$$

y entonces la ecuación (3.2) se convierte en

$$\nabla_T^2 \psi(x, y, z) = -\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} \quad (3.3)$$

la cual es una ecuación diferencial parcial (EDP) de tipo elíptica llamada ecuación de Poisson en dos dimensiones. Un primer paso sería resolver numéricamente dicha ecuación y encontrar la función intermedia  $\psi$ . Ahora, tomemos en cuenta que la ecuación (3.2) da como resultado una función vectorial. Debido a su complejidad, lo mejor sería de alguna manera convertirla en escalar. Si despejamos  $\nabla_T W(x, y, z)$  nos queda

$$\nabla_T W(x, y, z) = \frac{1}{I(x, y, z)} \nabla_T \psi(x, y, z) \quad (3.4)$$

Tomemos en cuenta que  $\nabla_T \cdot \nabla_T W(x, y, z) = \nabla_T^2 W(x, y, z)$ , por lo que la ecuación (3.4) se convierte en

$$\nabla_T^2 W(x, y, z) = \nabla_T \cdot \left[ \frac{1}{I(x, y, z)} \nabla_T \psi(x, y, z) \right] \quad (3.5)$$

La cual ya es una ecuación de una función escalar. Utilizando la ecuación (3.5) obtenemos una solución formal para  $W$  de la siguiente manera

$$W(x, y, z) = \nabla_T^{-2} \nabla_T \cdot \left[ \frac{1}{I(x, y, z)} \nabla_T \psi(x, y, z) \right] \quad (3.6)$$

Donde  $\nabla_T^{-2}$  se le conoce como operador Laplaciano inverso.

---

## 3.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON

### 3.2.2. ECUACIÓN DE POISSON: ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES

Una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP)[31], puede describirse como una relación donde aparece una función incógnita  $U$  junto con al menos una derivada parcial. Dado que en una EDP deben aparecer derivadas parciales, se sobrentiende que  $U$  depende de al menos dos variables independientes.

De manera general las EDP's con dos variables se pueden escribir como

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0. \quad (3.7)$$

Nótese como la ecuación 3.7 tiene parecido con la ecuación general de las cónicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (3.8)$$

Estas EDPs pueden ser clasificadas en tres grupos según la tabla 3.1 [31]:

Grupo	Discriminante
EDP Elíptica	$B^2 - 4AC < 0$
EDP Parabólica	$B^2 - 4AC = 0$
EDP Hiperbólica	$B^2 - 4AC > 0$

Tabla 3.1: Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales.

Particularmente, la ecuación de Poisson tiene la forma

$$\nabla^2 U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G(x, y) \quad (3.9)$$

o

$$Au_{xx} + Cu_{yy} = G \quad (3.10)$$

La ecuación de Poisson en dos dimensiones se trata precisamente de una ecuación diferencial parcial Elíptica, puesto que  $A = 1$ ,  $C = 1$  y  $-4AC < 1$

#### 3.2.2.1. CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN

En general, cada ecuación diferencial parcial tiene varias soluciones. Por lo tanto, para plantear problemas que tengan solución única, es necesario complementar el planteamiento con condiciones

---

## 3.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON

---

de frontera adecuadas y con condiciones iniciales. Un problema se considera bien planteado cuando éste posee una solución única.

Para el Laplaciano consideremos el dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  con frontera  $\partial\Omega$  el caso general de problemas con valores en la frontera es: dada las funciones  $f_\Omega$  y  $g_\partial$  ( $f_\Omega$  definida en  $\Omega$  y  $g_\partial$  definida en  $\partial\Omega$ )

$$\begin{cases} \nabla^2 U = f_\Omega \\ \alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U = g_\partial \end{cases} \quad (3.11)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones. Este tipo de condiciones son llamadas condiciones de frontera de Robin. Los casos particulares para esta condición ocurren y han sido estudiados con mucha atención. Si  $\alpha = 0$ , lo que se tiene es el problema de Dirichlet [32]

$$\begin{cases} \nabla^2 U = f_\Omega \\ \beta U = g_\partial \end{cases}, \quad (3.12)$$

y cuando  $\beta = 0$  se obtiene

$$\begin{cases} \nabla^2 U = f_\Omega \\ \alpha \frac{\partial U}{\partial n} = g_\partial \end{cases} \quad (3.13)$$

la cual es la condición de frontera de Neumann y corresponde cuando en el problema se especifican los valores de la derivada direccional de  $U(x, y)$  en la dirección perpendicular al contorno  $\partial\Omega$  [32].

### 3.2.3. MÉTODO EXPERIMENTAL

#### 3.2.3.1. SEÑAL DE SENSOR PARA 2 IMÁGENES

Vamos ahora analizar el término de la derecha de la igualdad 3.3 y considerar la situación experimental general, donde tenemos que evaluar la intensidad y su derivada, (ver Fig. 3.1).

Con esta consideración, el lado derecho de la ETI se calcula al medir las distribuciones de intensidad en dos planos perpendiculares a la dirección de propagación  $z$  y separados por  $\Delta z$ . Se denotan como  $I_1 = I(z + \Delta z)$  y  $I_2 = I(z - \Delta z)$ . Así, por una expansión de Taylor alrededor de  $z = z_0$ , las intensidades están dadas por

$$I(z + \Delta z) = I(z) + \frac{\partial I}{\partial z} \cdot \Delta z + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{2!} \quad (3.14)$$

---

## 3.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON

---

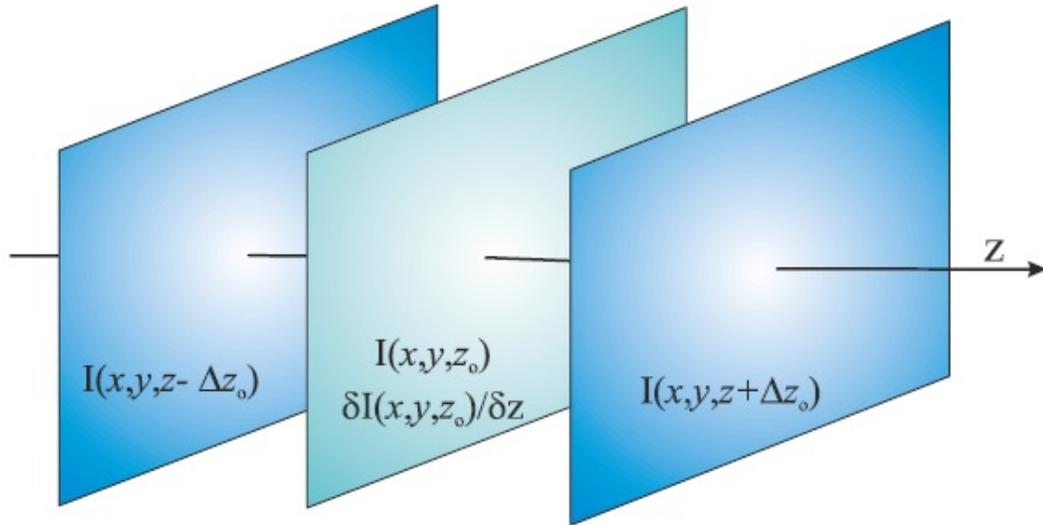


Figura 3.1: Estimación de la derivada de la distribución de intensidad

$$I(z - \Delta z) = I(z) - \frac{\partial I}{\partial z} \cdot \Delta z + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{2!} \quad (3.15)$$

De la diferencia de las ecuaciones (3.14) y (3.15) la derivada de la intensidad alrededor de  $z = 0$  es

$$\frac{\partial I}{\partial z} \approx \frac{I(z + \Delta z) - I(z - \Delta z)}{2\Delta z} = F(x, y) \quad (3.16)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ETI obtenemos

$$\nabla_T^2 \psi = -F(x, y) \quad (3.17)$$

donde  $F(x, y)$  es conocida como *señal del sensor*, y es obtenida experimentalmente con un arreglo plano de píxeles de una cámara (dos imágenes en dos planos desenfocados a la misma distancia  $\Delta z$ ).

### 3.2.3.2. SEÑAL DE SENSOR PARA 4 IMÁGENES

Si queremos usar mas de dos imágenes para estimar la derivada de la intensidad con una mejor precisión, entonces debemos utilizar la expansión de Taylor para las intensidades que se

### 3.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON

---

encuentran en planos más alejados (en este caso, el doble de  $\Delta z$ ) y considerar más términos en esta expansión. Aquí se utilizará la expansión de Taylor hasta el cuarto término para encontrar la derivada de la intensidad con 4 imágenes (este cuarto término se elige para relacionarlo con el cuarto término de la expansión en Taylor para dos imágenes), es decir

$$I(z + 2\Delta z) = I(z) + \frac{\partial I}{\partial z} \cdot 2\Delta z + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \cdot \frac{4\Delta z^2}{2!} + \frac{\partial^3 I}{\partial z^3} \cdot \frac{8\Delta z^3}{3!} \quad (3.18)$$

$$I(z - 2\Delta z) = I(z) - \frac{\partial I}{\partial z} \cdot 2\Delta z + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \cdot \frac{4\Delta z^2}{2!} - \frac{\partial^3 I}{\partial z^3} \cdot \frac{8\Delta z^3}{3!} \quad (3.19)$$

Restando 3.18 de 3.19 nos queda

$$I(z + 2\Delta z) - I(z - 2\Delta z) = \frac{\partial I}{\partial z} \cdot 4\Delta z - \frac{\partial^3 I}{\partial z^3} \cdot \frac{16\Delta z^3}{3!} \quad (3.20)$$

Haciendo lo mismo para cuando se tiene solamente  $\Delta z$

$$I(z + \Delta z) - I(z - \Delta z) = \frac{\partial I}{\partial z} \cdot 2\Delta z - \frac{\partial^3 I}{\partial z^3} \cdot \frac{2\Delta z^3}{3!} \quad (3.21)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores llegamos a

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{I(z - 2\Delta z) - I(z + 2\Delta z)}{12\Delta z} + 2 \frac{I(z + \Delta z) - I(z - \Delta z)}{3\Delta z} \quad (3.22)$$

La cual es la derivada de la intensidad calculada desde la información obtenida de cuatro imágenes desenfocadas (ver figura 3.2). Lo anterior nos indica que, bajo un criterio que conduce a un límite de desenfoque, se pueden utilizar más de dos imágenes desenfocadas para calcular la señal de sensor [30].

## 3.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON

---

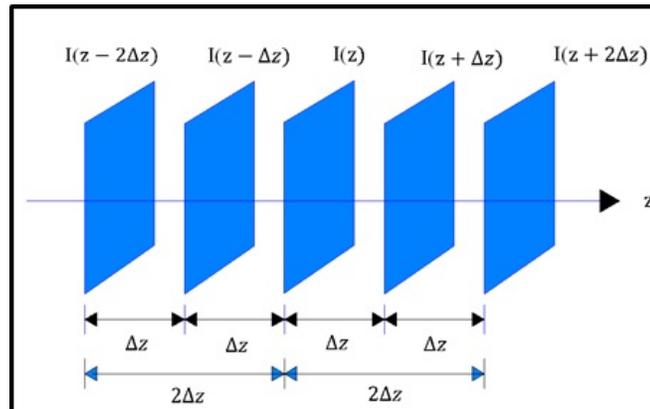


Figura 3.2: Estimación de la derivada de la distribución de intensidad utilizando 4 planos

### 3.2.4. CONSIDERACIONES EXPERIMENTALES SOBRE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

Como ya se discutió, la técnica más utilizada consiste en obtener las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  en dos secciones transversales del haz incidente.

Ahora, supongamos que sobre el sistema de prueba incide una onda plana sobre el plano de la pupila ( $z=0$ )(figura 3.3).

### 3.2. TRANSFORMACIÓN DE LA ETI EN LA ECUACIÓN DE POISSON

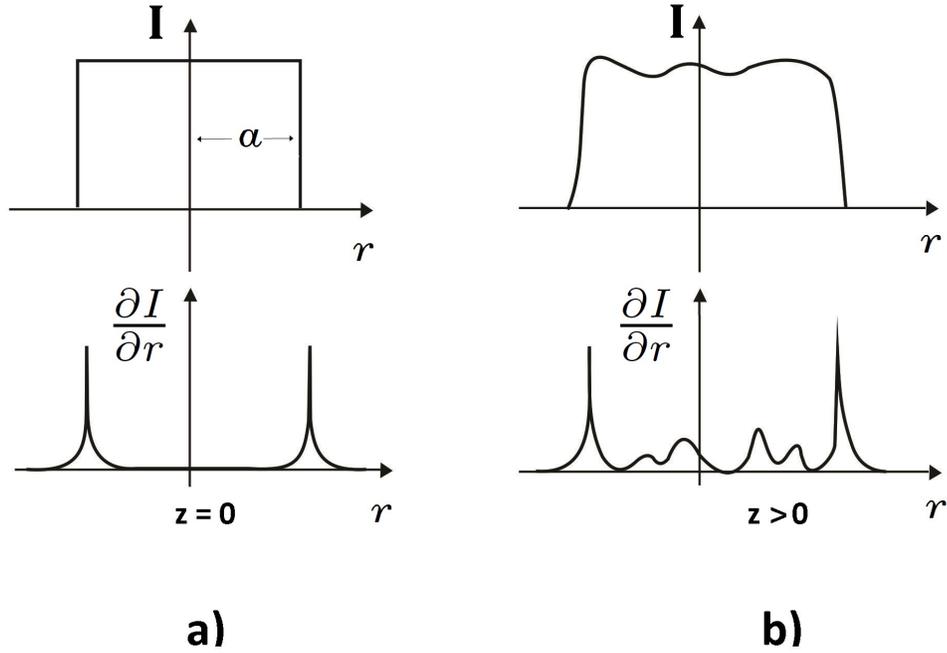


Figura 3.3: Perfil de la distribución de irradiancia y su primera derivada en dos planos distintos: a)  $z=0$ , b)  $z>0$

Entonces en este plano se tiene que

$$\nabla I|_{z=0} \begin{cases} 0 & \text{En todas partes de la pupila menos el borde} \\ -I|_{z=0} \hat{n} \delta(r-a) & \text{En el borde de la pupila} \end{cases} \quad (3.23)$$

Donde  $\delta(r-a)$  es una delta de Dirac (es cero en todos lados menos en el borde de la pupila donde vale uno),  $-\hat{n}$  es un vector unitario normal al borde de la pupila que apunta hacia adentro en dirección radial, e  $I|_{z=0}$  es la intensidad uniforme sobre el plano de la pupila. Sustituyendo (3.23) en la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.30), resulta

$$\left. \frac{\partial I}{\partial z} \right|_{z=0} = - \left( -I \delta(r-a) \frac{\partial W}{\partial n} + P(\vec{r}) I \nabla_T^2 W \right) \Big|_{z=0} \quad (3.24)$$

Donde  $P(\vec{r})$  es la función de transmitancia de la pupila (es igual a uno dentro de ella y a cero afuera) y  $\hat{n} \cdot \nabla W = \frac{\partial W}{\partial n}$  es la derivada direccional del frente de onda.

Mediante una aproximación a primer orden de Taylor, la irradiancia  $I_1$  en el plano  $z_1$  cercano al plano  $z=0$ , es

---

### 3.3. TÉCNICA NUMÉRICA DE RESOLUCIÓN DE EDPs

$$I_1 = I_0 + \frac{\partial I_0}{\partial z} \cdot \Delta z \quad (3.25)$$

Si hacemos la diferencia de intensidades entre el plano  $z = 1$  y el plano  $z = 0$  y dividimos el resultado por la irradiancia en el plano  $z = 0$ , resulta

$$\frac{I_1 - I_0}{\Delta z \cdot I_0} = \frac{1}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial z} \quad (3.26)$$

Si sustituimos (3.24) en (3.26), obtenemos

$$\frac{I_1 - I_0}{\Delta z \cdot I_0} = \delta(r - a) \frac{\partial W}{\partial n} - P(x, y) \nabla_T^2 W \quad (3.27)$$

Los dos términos de la ecuación 3.27 se encuentran ubicados en dos regiones distintas dentro de la pupila, por lo que no se traslapan, por lo que podemos escribir de manera general que dentro de la pupila

$$\nabla_T^2 W = -\frac{I_1 - I_0}{\Delta z \cdot I_0} \quad (3.28)$$

y en el borde

$$\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{I_1 - I_0}{\Delta z \cdot I_0} \quad (3.29)$$

lo cual representa una vez más la ecuación de Poisson, pero con condición de Neumann a la frontera. Esta forma de representar la ETI tiene la ventaja de que se calculará únicamente una sola vez el Laplaciano  $\nabla_T^2 W$  de manera numérica para encontrar el valor del frente de onda  $W$ , lo cual reduce significativamente el tiempo de computo si se pretende determinarlo por el método de elementos finitos como se verá en el siguiente capítulo.

## 3.3. TÉCNICA NUMÉRICA DE RESOLUCIÓN DE EDPs

### 3.3.1. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON

En la búsqueda de una descripción cualitativa de un determinado fenómeno, por lo general se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, válidas para cierto dominio y donde se imponen sobre este, una serie de condiciones en la frontera y de condiciones iniciales. Después de esto, el modelo matemático se considera completo, y es aquí donde aparece la mayor dificultad, dado que solamente en la forma más simple de la ecuación, con fronteras con geometría

### 3.3. TÉCNICA NUMÉRICA DE RESOLUCIÓN DE EDPs

regular, puede ser resuelta en forma exacta con los métodos matemáticos que disponemos.

La idea de estos métodos consiste en aproximar las derivadas que aparecen en los problemas de ecuaciones diferenciales de forma que se reduzca a resolver un sistema algebraico de ecuaciones que representa la solución de la ecuación diferencial en algunos puntos. Una vez teniendo el sistema lineal  $AX = B$ , se procede a resolver dicho sistema, utilizando las técnicas de álgebra lineal que nos ofrezcan mejor desempeño computacional.

Por ejemplo, en los problemas físicos a menudo se necesita calcular el Laplaciano  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Utilizando una fórmula de diferencias centradas [35] para la segunda derivada, obtenemos la forma del laplaciano en diferencias finitas

$$\nabla^2 u(x_0, y_0) \approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (3.30)$$

A menudo suele tomarse  $\Delta x = \Delta y = h$  y así se obtiene la aproximación estándar de diferencias finitas de cinco puntos para el Laplaciano. Estos cinco puntos son mostrados en la figura 3.4

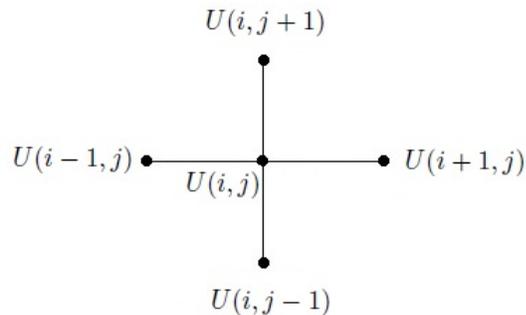


Figura 3.4: Esquema de cinco puntos de discretización de EDP's

Ahora bien, si decimos que, de acuerdo a la figura 3.4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (3.31)$$

y que

### 3.3. TÉCNICA NUMÉRICA DE RESOLUCIÓN DE EDPs

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (3.32)$$

entonces la ecuación (3.30) se puede escribir como

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} \quad (3.33)$$

la cual se puede utilizar para transformar en ecuación discreta el Laplaciano de una función. Supongamos por ejemplo que el problema involucra a una malla de 16 puntos como el que se muestra en la figura 3.5

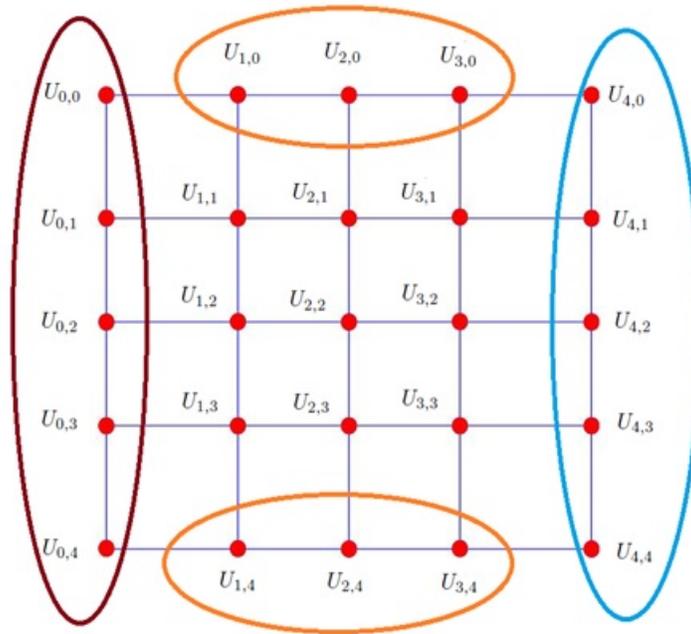


Figura 3.5: Malla de 16 elementos. Los valores de los puntos del borde son conocidos como condiciones de frontera.

Trabajando con la primera columna de los puntos interiores de la malla, y sustituyendo  $k$  por  $j$ , resulta

$$\begin{aligned} i = 1, k = 1 : 4U_{1,1} - U_{1,2} - U_{2,1} &= h^2 f_{1,1} + U_{1,0} + U_{0,1} \\ i = 2, k = 1 : 4U_{2,1} - U_{1,1} - U_{3,1} - U_{2,2} &= h^2 f_{2,1} + U_{2,0} \\ i = 3, k = 1 : 4U_{3,1} - U_{2,1} - U_{3,2} &= h^2 f_{3,1} + U_{3,0} + U_{4,1} \end{aligned}$$

Arreglando estas ecuaciones en la forma de matriz-vector se llega a

### 3.3. TÉCNICA NUMÉRICA DE RESOLUCIÓN DE EDPs

---

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1,0} + U_{0,1} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} + U_{4,1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

La segunda columna de los puntos interiores de la malla nos da

$$\begin{aligned}
 i = 1, k = 2 : 4U_{1,2} - U_{2,2} - U_{1,1} - U_{1,3} &= h^2 f_{1,2} + U_{0,2} \\
 i = 2, k = 2 : 4U_{2,2} - U_{1,2} - U_{3,2} - U_{2,1} - U_{2,3} &= h^2 f_{2,2} \\
 i = 3, k = 2 : 4U_{3,2} - U_{2,2} - U_{3,1} - U_{3,3} &= h^2 f_{3,2} + U_{4,2}
 \end{aligned}$$

De igual manera, arreglando estas ecuaciones en la forma de matriz-vector se llega a

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,2} \\ 0 \\ U_{4,2} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Por último, la tercera columna nos da

$$\begin{aligned}
 i = 1, k = 3 : 4U_{1,3} - U_{2,3} - U_{1,2} &= h^2 f_{1,3} + U_{0,3} + U_{1,4} \\
 i = 2, k = 3 : 4U_{2,3} - U_{1,3} - U_{3,3} - U_{2,2} &= h^2 f_{2,3} + U_{2,4} \\
 i = 3, k = 3 : 4U_{3,3} - U_{2,3} - U_{3,2} &= h^2 f_{3,3} + U_{4,3} + U_{3,4}
 \end{aligned}$$

y la forma de matriz-vector sería

### 3.3. TÉCNICA NUMÉRICA DE RESOLUCIÓN DE EDPs

---

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,3} + U_{1,4} \\ U_{2,4} \\ U_{4,3} + U_{3,4} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Finalmente el arreglo matricial completo, incluyendo condiciones de frontera (CF), se muestra a continuación

- CF DERECHA
- CF SUPERIOR
- CF IZQUIERDA
- CF INFERIOR

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ U_{3,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \\ f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1,0} + U_{0,1} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} + U_{4,1} \\ U_{0,2} \\ 0 \\ U_{4,2} \\ U_{1,4} + U_{0,3} \\ U_{2,4} \\ U_{3,4} + U_{4,3} \end{bmatrix}$$

### 3.3.1.1. DISCRETIZACIÓN DE LA CONDICIÓN DE FRONTERA TIPO NEUMANN

Como ya se mencionó en este capítulo, esta condición se da cuando se especifican los valores de la derivada normal en el contorno del problema. De tal manera que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y) \quad (3.37)$$

La ecuación discreta de derivación numérica para la primera derivada es

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{u_{n+1,j} - u_{n-1,j}}{2h} \quad (3.38)$$

Donde el valor de  $u_{n-1,j}$  es desconocido pues está fuera del dominio de  $\mathfrak{R}^n$ . Pero combinando la ecuación (3.33) con (3.38) se obtiene

$$4u_{n,j} - u_{n,j+1} - u_{n,j-1} - 2h \cdot g(n, j) - 2u_{n+1,j} = h^2 f(n, k) \quad (3.39)$$

La cual es una ecuación que relaciona a  $u_{n,j}$  con sus valores adyacentes.

## 3.4. CONCLUSIONES

La Ecuación de Transporte de Irradiancia (ETI) puede convertirse, considerando la configuración experimental de su aplicación práctica, en una ecuación en derivadas parciales conocida como ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera. Esto tiene la ventaja de que este tipo de ecuaciones ha sido resuelta de manera numérica en otras áreas de la física por métodos en donde se discretizan estas derivadas. Si se quisiera obtener la fase resolviendo la ETI es posible también discretizar la derivada direccional de la Intensidad con respecto al eje de propagación. Lo anterior da como resultado métodos de recuperación de frente de onda donde se utilicen dos, cuatro o más imágenes de intensidad. El número de imágenes utilizadas disminuirá el error entre el frente de onda real y el recuperado.

## Capítulo 4

# SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ETI (RESULTADOS SIMULADOS Y EXPERIMENTALES)

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se procederá a dar solución a los problemas inicialmente planteados: Por una parte, resolver numéricamente la ETI nos ayudará a validar un algoritmo que pueda recuperar frentes de onda cuya función de intensidad sea conocida. Luego con la ayuda de este algoritmo y los datos experimentales de patrones de intensidad provenientes de un arreglo experimental implementado para probar una lente, se recuperará la función de frente de onda y se caracterizarán sus principales aberraciones. Por otro lado, utilizando el método de conteo de rayos, se construirá un algoritmo capaz de obtener una función de intensidad propuesta, a partir de un frente de onda conocido.

### 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

La ecuación de transporte de irradiancia (ETI) utilizada en óptica, es una ecuación que relaciona la función espacial que describe un frente de onda óptico  $W$  y la correspondiente distribución

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

---

de intensidad  $I$  en cualquier sistema de coordenadas [16]. En algunos trabajos se ha sintetizado esta ecuación y se ha propuesto que, bajo condiciones específicas, la ETI puede derivar en una ecuación de Poisson con las condiciones de frontera de Neumann[5]. La recuperación del frente de onda óptico se reduce con ello a un problema numérico y que ofrece la ventaja de conocer completamente la forma de las superficies ópticas sometidas a prueba y no solo en lugares específicos, como en el caso de franjas localizadas, que son el producto de pruebas interferométricas.

Las principales limitaciones de los métodos que utilizan a la ETI son: las superficies a prueba deben ser superficies suaves (sin cambios bruscos de forma) y el número de píxeles del detector debe ser tal, que la prueba obtenga la resolución que se quiera lograr. Además de eso, el cálculo del frente de onda debe realizarse de forma numérica, y si el número de datos es grande, el cálculo requiere algoritmos computacionales sofisticados [36]. Este método ha sido ampliamente estudiado en trabajos anteriores. Recientemente Campos et al. [37] han propuesto un algoritmo para resolver la ETI de manera numérica y recuperar el frente de onda con distribuciones de intensidad conocidas (por ejemplo, superficie parabólica). Por otro lado, se ha desarrollado un método general para calcular la intensidad de la luz que se propaga en un medio cuyo índice de refracción  $n(r)$  varía lentamente con la posición, basándose en una ecuación diferencial de la curvatura de los frentes de onda [38]. Además, existe un método de conteo de rayos para determinar la PSF de un sistema óptico, contando los rayos que impactan en una cuadrícula hipotética [39].

En esta sección desarrollamos un algoritmo (Anexo 1), que calcula la distribución de intensidad causada por un frente de onda óptico mediante el método de conteo de rayos. El algoritmo tiene soporte teórico en la propagación de los rayos de luz producidos por cada punto sobre el frente de onda: Para un medio isotrópico y no conductor, los rayos de luz geométricos se definen como las trayectorias ortogonales al frente de onda  $W(x, y)$ ; coinciden con la dirección del vector promedio de Poynting. En un plano perpendicular a la propagación del frente de onda, se obtiene una distribución espacial de la intensidad debido a la divergencia y convergencia de los rayos a lo largo del plano de observación.

La concentración de estos rayos es un parámetro que nos da una idea de la intensidad luminosa que existe en un plano de detección dado.

Tal y como sucede en otros métodos (ver figura 4.1), esperamos que este algoritmo sea una herramienta que proporcione datos que nos lleven a obtener patrones de Intensidad característicos en las superficies ópticas probadas bajo los métodos de recuperación de fase.

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

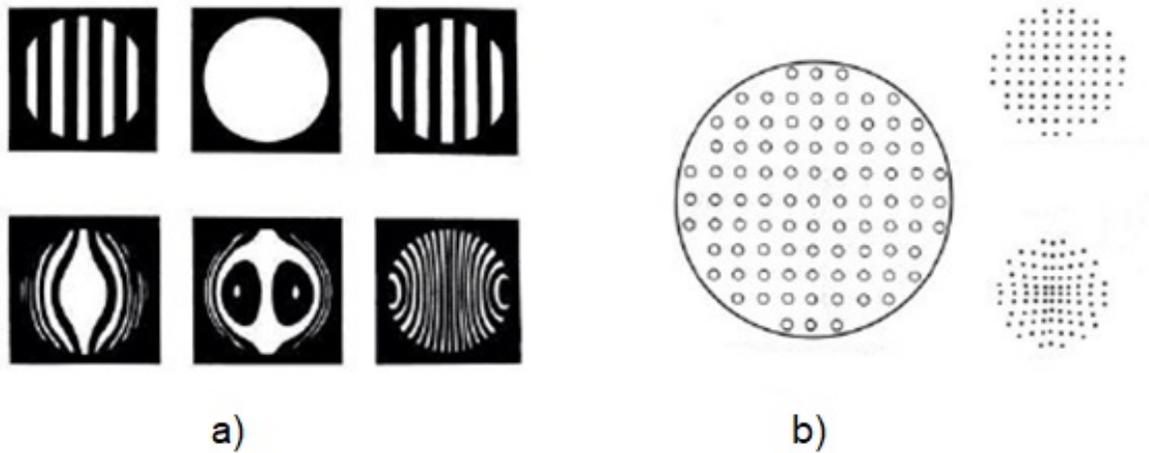


Figura 4.1: Patrones típicos de pruebas ópticas a) Ronchigramas b) Hartmannogramas

### 4.2.1. PROCEDIMIENTO DEL CÁLCULO

Considere la siguiente figura, la cual muestra el análisis geométrico de un frente de onda, para encontrar la posición  $x_{di}$  de cada rayo óptico en un plano de detección.

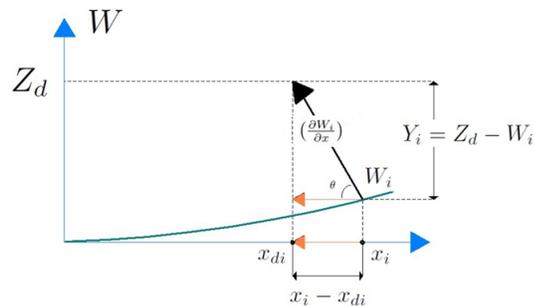


Figura 4.2: Proyección de rayos sobre un plano de detección

A continuación se describen los pasos que constituyen este algoritmo:

Paso 1: Definir una distancia  $Z_d$  del origen al plano de detección.

Paso 2: Calcular la diferencia de la distancia de todos los puntos del frente de onda al plano de detección (Representado gráficamente en figura 4.3).

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

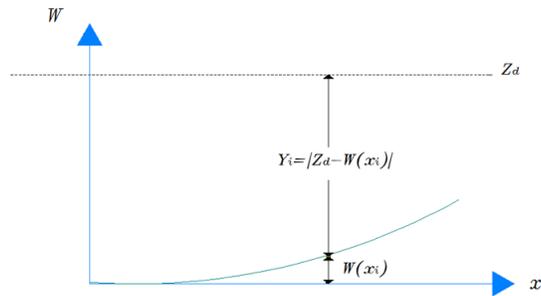


Figura 4.3: Distancia entre el plano de detección y el valor de  $W$  en el punto seleccionado

Paso 3: Trazar rayos normalmente al frente de onda en cada punto; es decir calcular el valor de la pendiente numérica en esos puntos (Representado gráficamente en figura 4.4).

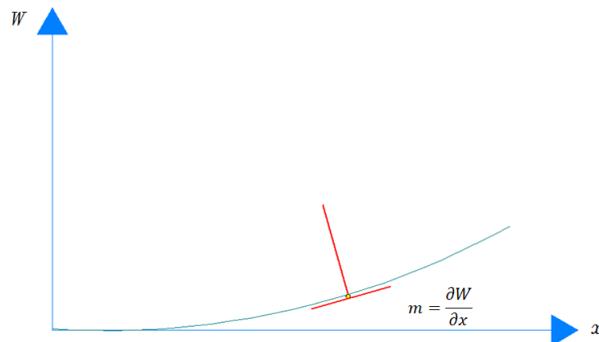


Figura 4.4: Valor de la pendiente de  $W$  en el punto seleccionado

Paso 4: Proyectar esos rayos para conocer sus posiciones en el plano de detección; en la figura 4.5 se observa que se forma un triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa al rayo trazado, y que sus catetos son  $Y_i$  y  $x_i - x_{di}$ .

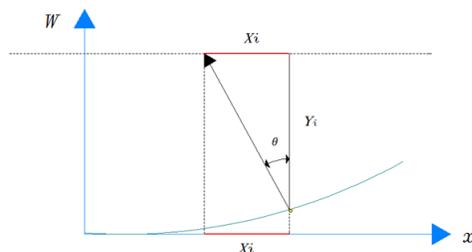


Figura 4.5: Trazo de triángulo auxiliar para calcular la posición en donde caen los rayos

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

---

El primer cateto viene dado por

$$Y_i = Z_d - W_i. \quad (4.1)$$

Por otro lado sabemos que  $\tan\theta = \frac{Y_i}{x_i - x_{di}}$ , por lo que

$$x_{di} = x_i - \frac{Y_i}{\tan\theta}. \quad (4.2)$$

Y finalmente, sabiendo que el valor de la tangente del ángulo  $\theta$  corresponde a la pendiente calculada por  $-\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)^{-1}$ , tenemos que

$$x_{di} = x_i + \frac{\partial W_i}{\partial x} \cdot [Z_d - W_i] \quad (4.3)$$

en donde se puede apreciar que la posición del rayo en el detector queda en función de valores todos conocidos.

Paso 5: Redondear estas posiciones a su valor entero próximo tal que todos los rayos que sean adyacentes coincidan en esa posición, tal y como se muestra en la figura 4.6.

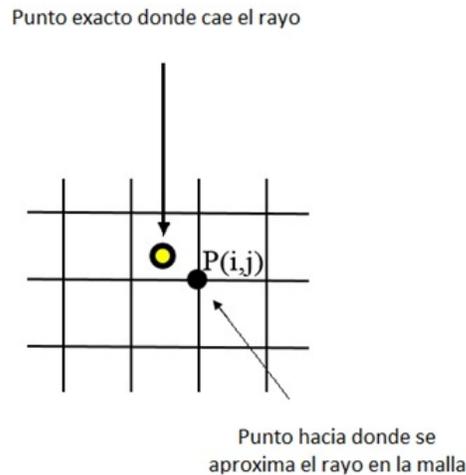


Figura 4.6: Ajustes de posición de rayos a su valor entero próximo en una malla

Paso 6: Hacer el conteo de rayos que tengan la misma posición, para así obtener un histograma de intensidad.

Paso 7: Hacer un ajuste polinómico de la función discreta de intensidad obtenida en el paso anterior.

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

### 4.2.2. CÁLCULO DE DISTRIBUCIÓN DE INTENSIDAD PARA UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO

El algoritmo fue aplicado a un frente de onda parabólico  $W = z \left[ 1 + \frac{x^2+y^2}{2z^2} \right]$ , en una cuadrícula (malla) de 2000x2000 datos, contándose un rayo por dato. El resultado de este algoritmo se muestra a continuación:

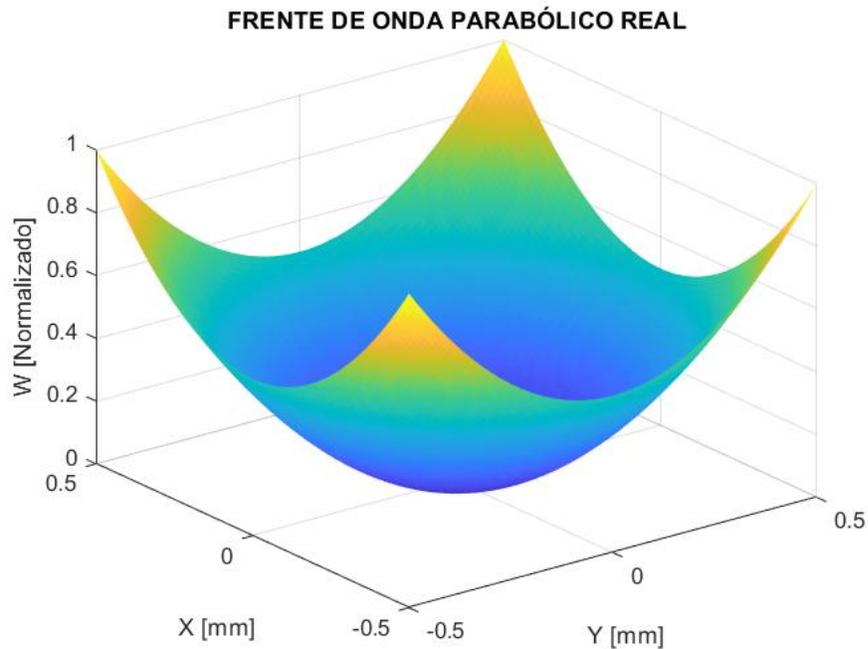


Figura 4.7: Frente de onda parabólico en  $z=1$ .

Se seleccionó una distancia normalizada del origen al detector  $z_d = 1$ . La gráfica correspondiente al conteo de rayos que caen en un mismo punto en ese plano se muestra en la figura 4.8. Nótese que la mayor cantidad de rayos caen cerca del centro de la gráfica, lo cual resulta lógico para un frente de onda cóncavo, como es el caso de un frente de onda parabólico.

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

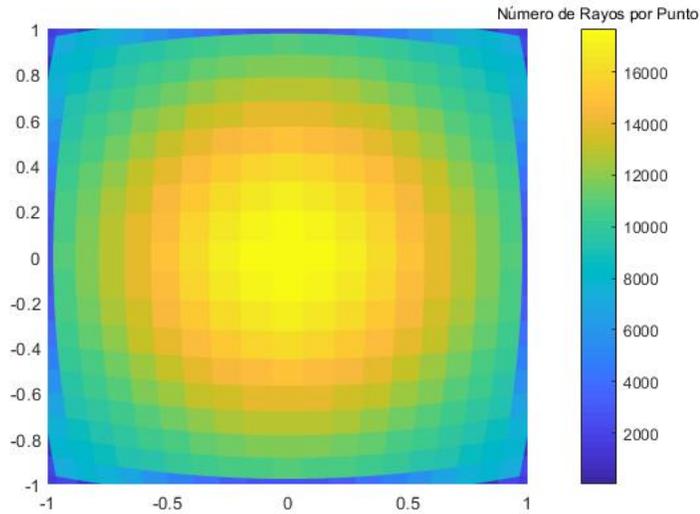


Figura 4.8: *Conteo de rayos que caen en la misma posición para un  $W$  parabólico.*

Se realizó un ajuste polinómico con el método de mínimos cuadrados a la función anterior. La siguiente figura muestra la comparación visual entre la función de intensidad ajustada y la real  $I = \frac{1}{z^2} \left[ 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2} \right]$  para un frente de onda parabólico.

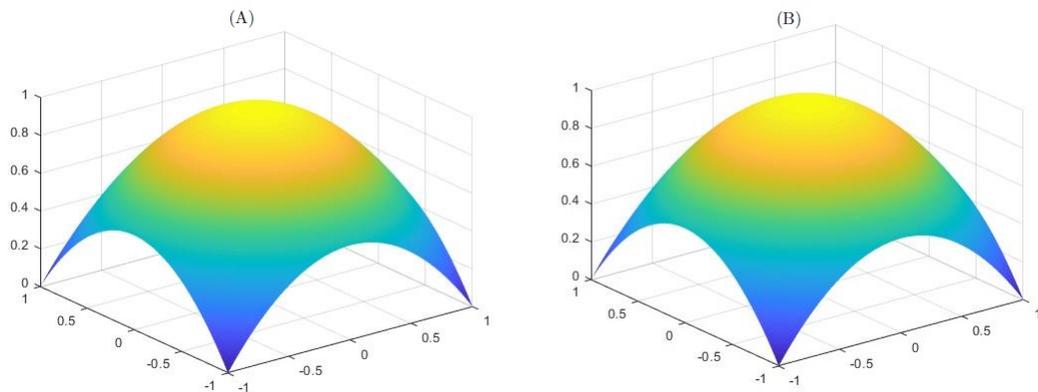


Figura 4.9: *Comparación visual entre (A) el patrón de intensidad real y (B) el patrón de intensidad ajustado*

La raíz del error cuadrado medio entre estas dos funciones numéricas es de  $rmse = 2.44e-15$ . Nótese sin embargo la similitud de la forma geométrica entre las dos funciones. En la figura 4.10 se muestra una gráfica de diferencias entre la intensidad real y la calculada

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

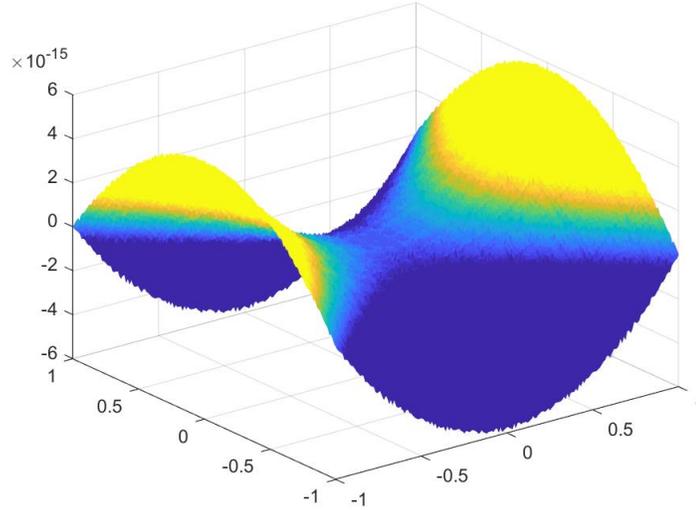


Figura 4.10: *Diferencia entre el patrón de intensidad real y el patrón de intensidad ajustado*

Hasta ahora, existe un método de simulación de recuperación de frente de onda (dadas dos distribuciones de intensidad en el eje  $z$ , el frente de onda  $W$  se recupera). El algoritmo propuesto aquí también está disponible: proporciona la distribución de intensidad  $I$  para un frente  $W$  y una posición  $z$  dada.

Por lo anterior, se propone aquí un algoritmo completo para el cálculo iterativo de las distribuciones de intensidad correspondientes a un frente  $W(x, y)$ .

Paso 1.- Calcular dos funciones de intensidad  $I_1$  e  $I_2$  en dos posiciones distintas  $z_0$  y  $z_1$  respectivamente, usando el algoritmo presentado en este trabajo, para un mismo  $W(x, y)$  dado. Lo anterior es válido puesto que, como ya se argumentó anteriormente, los cambios en  $W(x, y)$  a medida que se propaga en el eje  $z$  no son considerables. Por lo tanto, podemos usar la misma  $W(x, y)$  para calcular estas dos distribuciones de intensidad.

Paso 2.- De la fórmula de diferencias centradas para la primera derivada discreta de la ETI se tiene que:

$$\frac{I_{n+1} - I_{n-1}}{2\Delta z} = -\nabla \cdot (I_n \nabla W) \quad (4.4)$$

donde  $\Delta z = z_1 - z_2$ . Por lo tanto, se pueden calcular las siguientes distribuciones de intensidad a lo largo del eje  $z$  como sigue

$$I_{n+1} = -2\Delta z [\nabla \cdot (I_n \nabla W)] + I_{n-1} \quad (4.5)$$

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

---

Paso 3.- Se repite el paso 2 para siguientes valores de  $z$ , hasta que la diferencia entre el lado izquierdo y derecho de la ecuación 4.5 sea la mínima deseada.

### 4.2.3. CÁLCULO DE DISTRIBUCIÓN DE INTENSIDAD PARA POLINOMIOS DE ZERNIKE

Con el fin de probar que el método de conteo de rayos propuesto en la sección anterior puede generalizarse para otros frentes de onda, seleccionamos como ejemplo el polinomio de Zernike correspondiente al astigmatismo a  $90^\circ$  ( $W = Y^2 - X^2$ ), el cual se grafica en la figura 4.11.

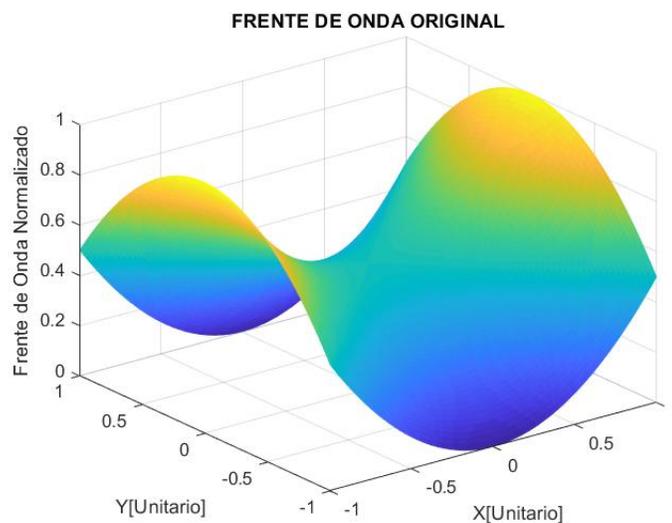


Figura 4.11: El frente de onda  $W$  tomado como la aberración astigmática en polinomios de Zernike

Ahora, con el método de trazo calculamos la intensidad en tres planos distintos para poder calcular la derivada numérica presentada en la ecuación 3.16. En la figura 4.12 se muestra la gráfica que describe este cálculo para el primer plano.

## 4.2. CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE UN FRENTE DE ONDA PARABÓLICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE CONTEO DE RAYOS

---

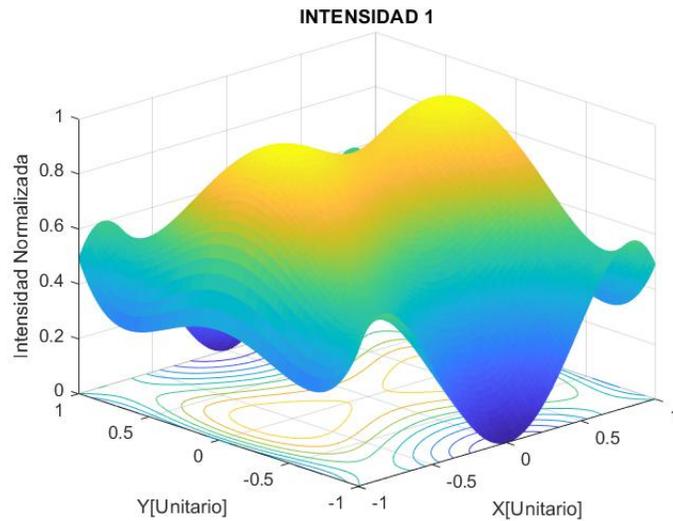


Figura 4.12: *Patrón de intensidad calculado con el método de conteo y trazo de rayos para el astigmatismo de Zernike*

Después de esto, se utilizó el algoritmo de solución numérica de Poisson en coordenadas rectangulares para obtener un frente de onda recuperado.

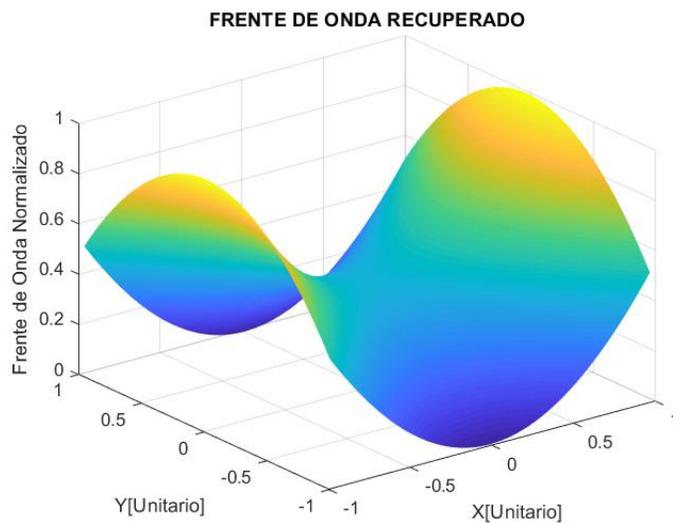


Figura 4.13: *Frente de onda recuperado con el método de conteo y trazo de rayos*

Por último se calculo la función de diferencias entre el frente de onda de entrada y el frente de onda recuperado.

### 4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE

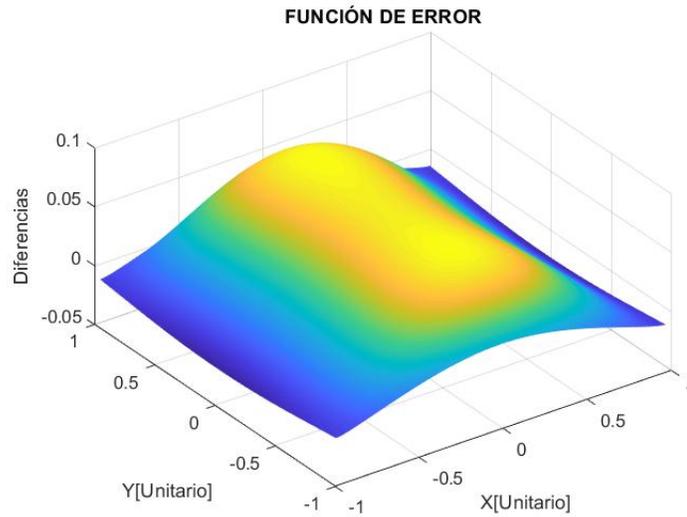


Figura 4.14: Patrón de intensidad calculado con el método de conteo y trazo de rayos

Con el fin de darnos una idea de la eficiencia del método para otros términos de los polinomios de Zernike, en la siguiente tabla se muestran los resultados tanto como para el valor rms y el coeficiente de correlación entre el frente de onda real y recuperado de 12 polinomios de Zernike.

R	Nombre	Término	Correlación	RMS
4	Astigmatismo Primario, a 45°	$2xy$	0.9776	7.117e-04
6	Astigmatismo Primario, a 0° o 90°	$y^2 - x^2$	0.9947	4.353e-04
7	Astigmatismo Triangular, 30°, 150°, 270°	$3xy^2 - x^3$	0.9627	8.162e-04
9	Coma a lo largo del eje <b>y</b>	$-2y + 3y^3 + 3x^2y$	0.6952	11.618e-04
15	Cenicero a 0°	$y^4 - 6x^2y^2 + x^4$	0.9868	5.077e-04

Tabla 4.1: Cálculo de correlación y RMS entre los frentes de onda de polinomios de Zernike contra los recuperados con el método desarrollado

### 4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE

Recientemente, Campos et al. [37] han propuesto un algoritmo para resolver la ecuación ETI utilizando un algoritmo iterativo. Utilizando la teoría de los métodos numéricos revisada en el

---

### 4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE

---

capítulo anterior, en esta sección desarrollamos una herramienta computacional que recupera un frente de onda  $W(x, y)$  conocido, a partir de dos distribuciones de intensidad también conocidas, pero en dos posiciones de  $z$  distintas.

#### 4.3.1. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ETI: FRENTE DE ONDA PARABÓLICO

El problema directo de la ETI consiste en lo siguiente: conocidas las distribuciones de intensidad en dos planos separados una distancia  $\Delta z$ , encontrar el frente de onda que las originan. Por lo anterior, hemos desarrollado un algoritmo de recuperación de fase (Anexo 2), basado en la teoría del método de elementos finitos, y en la derivación de la ETI en una ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Neumann, lo cual fue revisado en el capítulo anterior. El algoritmo quedaría como sigue:

Paso 1.- Seleccionamos primero un frente de onda parabólico como el mostrado en la sección 2.4.2, de el cual se conoce exactamente su función de intensidad real. Seleccionamos también la distancia  $z_0$  y la distancia  $\Delta z$  de separación entre los dos planos en los cuales se desea calcular la distribución de intensidad. De tal manera que

$$I(x_i, y_j) = I_0 \left[ 1 - \frac{x_i^2 + y_j^2}{(z_0 \pm \Delta z)^2} \right] / (z_0 \pm \Delta z)^2 \quad (4.6)$$

Estas funciones de intensidad se calculan numéricamente mediante una malla plana cuyos separaciones  $\Delta x$  y  $\Delta y$  se elijen de acuerdo a la precisión que se requiera.

Paso 2.- Se calcula la función de sensor  $F(x, y)$  revisada en la sección 3.2.3.1.

Paso 3.- Se aplica el método de solución numérica de matrices  $AU = F$  revisado en la sección 3.3.1.

Paso 4.- Se compara el frente de onda obtenido con este método con el frente de onda original.

#### 4.3.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA

El frente de onda parabólico normalizado  $W(x, y, z) = z[1 + (x^2 + y^2)/2z]$  para un  $z = 100$  con una rejilla de 100x100 elementos y un  $\Delta z = 0.001$  se muestra a continuación:

### 4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE

---

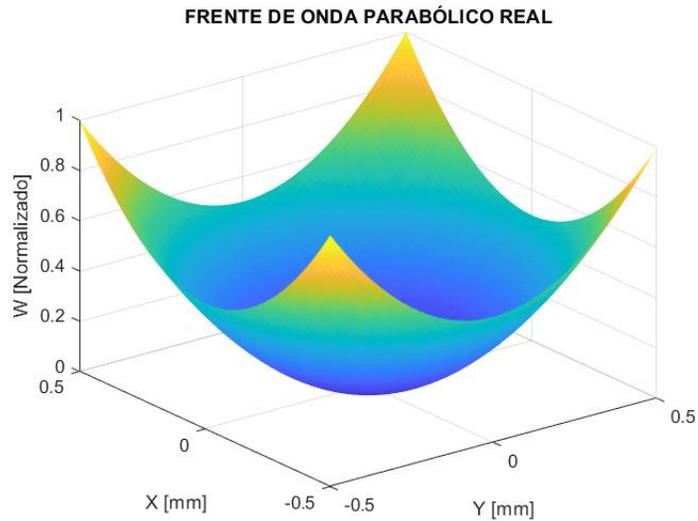


Figura 4.15: Frente de onda parabólico  $W$  en  $z=100$

La señal del sensor simulada con las intensidades obtenidas mediante la ecuación (4.6) se muestra en la figura 4.16

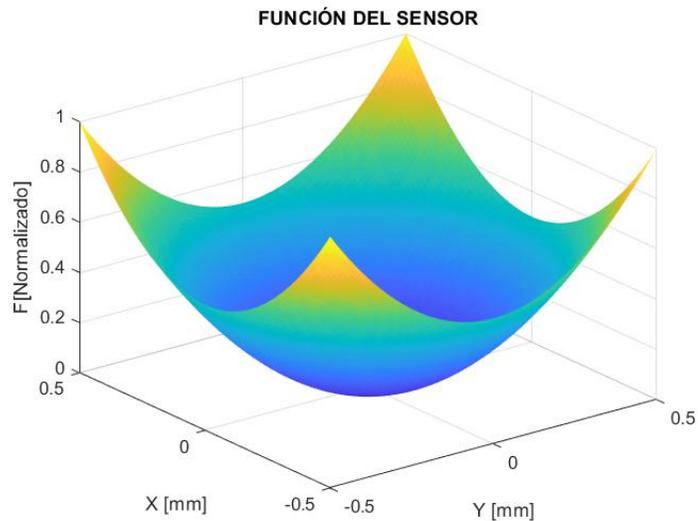


Figura 4.16: Señal de sensor simulada

Y finalmente, el frente de onda recuperado mediante el método de elementos finitos para la onda parabólica propuesta se muestra en la figura 4.17

### 4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE

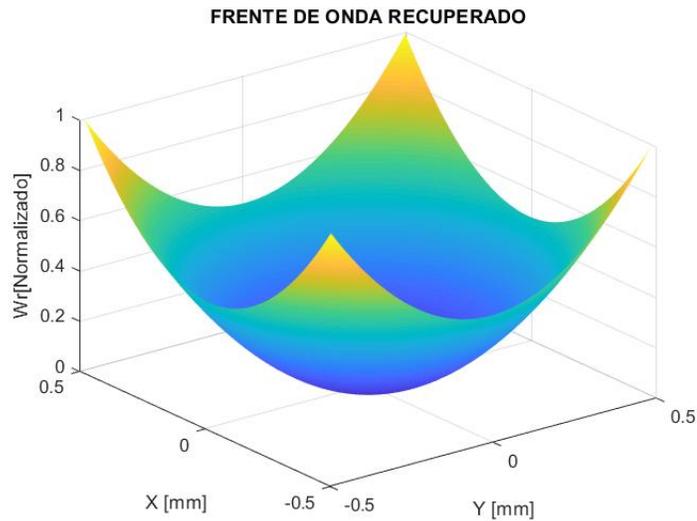


Figura 4.17: *Frente de onda recuperado con diferencias finitas*

Haciendo un análisis puramente cualitativo de la gráfica anterior y comparándola con la obtenida para el frente de onda parabólico (figura 4.15), podemos concluir que son parecidas en su forma, por lo que se sospecha que el frente de onda se pudiera recuperar con alguna cantidad de error. La siguiente gráfica muestra las diferencias entre el frente de onda parabólico original y el recuperado. El valor de la raíz cuadrática media para esta función de diferencias es de  $rms = 2.0453 \times 10^{-9} mm$ .

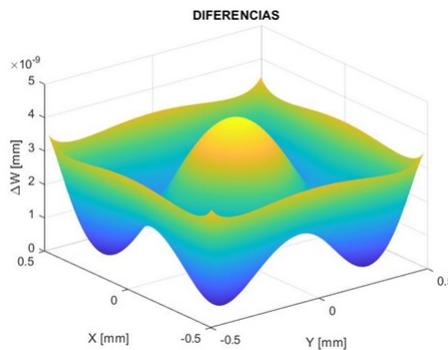


Figura 4.18: *Error de diferencias ente el frente de onda parabólico original y recuperado*

## 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la figura 4.19, se muestra un esquema de la configuración experimental. Utilizamos una fuente de láser con una longitud de onda de 632.8 nm. Se colocó un objetivo de microscopio con el fin de provocar frentes de onda esféricos y dirigirlos hacia el sistema de prueba. El sistema se separa una distancia que es muy próxima a su distancia focal. Dicha distancia es medida desde la salida del objetivo de microscopio hasta el vértice del sistema, tal que, si éste tuviera una forma perfecta, el haz se encontraría colimado a su salida. Es decir, tendríamos un frente de onda plano a la salida del sistema. Sin embargo, si el sistema tiene deformaciones o aberraciones, el frente de onda se deformará. Para obtener las mediciones de intensidad usamos un sensor CMOS. Como se muestra en esta misma figura 4.19, las mediciones de intensidad se realizan en dos planos diferentes.

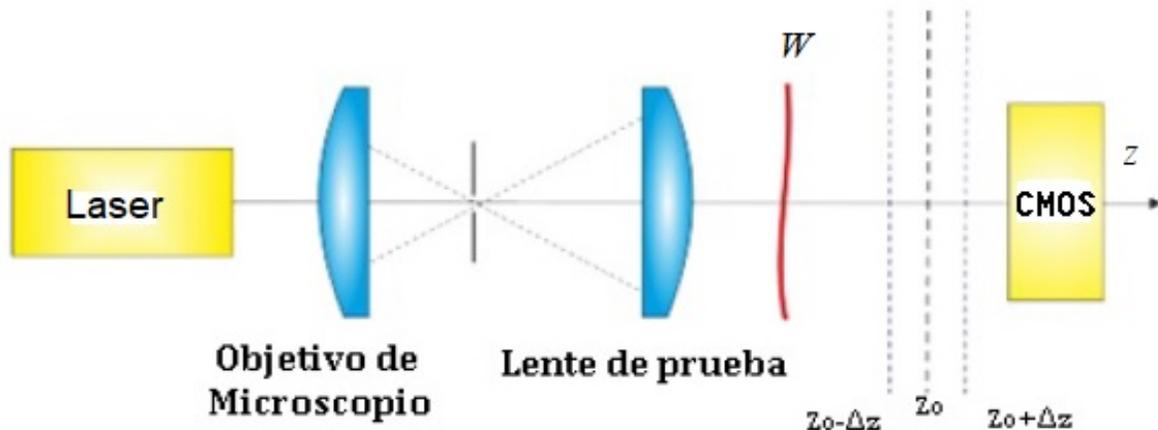


Figura 4.19: Esquema del arreglo experimental

El sistema evaluado fue un doblete acromático de la empresa Edmund Optics (**eo**®) de 12.5 mm de diámetro y de 50 mm de distancia focal efectiva. El sensor CMOS que se utilizó fue el contenido en la cámara **Pixelink**® PL-B776 de 3.1 megapixels. El experimento se muestra en la figura 4.20.

## 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

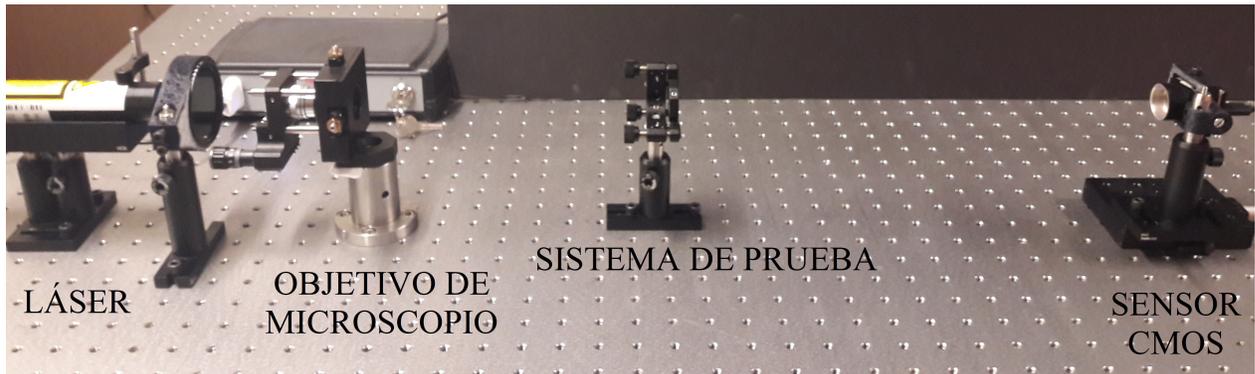


Figura 4.20: *Implementación del experimento*

### 4.4.1. APLICACIÓN DE ALGORITMO PARA RESOLVER LA ETI

En la figura 4.21 podemos observar dos patrones de intensidad, correspondientes al haz luminoso que atraviesa una lente plano-convexa de 13.82 mm de diámetro y 26mm de radio de curvatura, capturados con el arreglo experimental de la figura 4.20. Dichas imágenes se encuentran separadas 25.4 micrómetros una respecto de la otra. Esta distancia se eligió por ser la distancia alcanzada con el mínimo desplazamiento que permite el micrómetro que utilizamos. Martínez-Carranza et. al. [40] han estudiado los factores que influye en la selección óptima de dicha separación cuando se utiliza el método FFT para la solución de la ETI. Sin embargo, este tipo de estudio no se encuentra reportado para el caso del método de elementos finitos.

#### 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

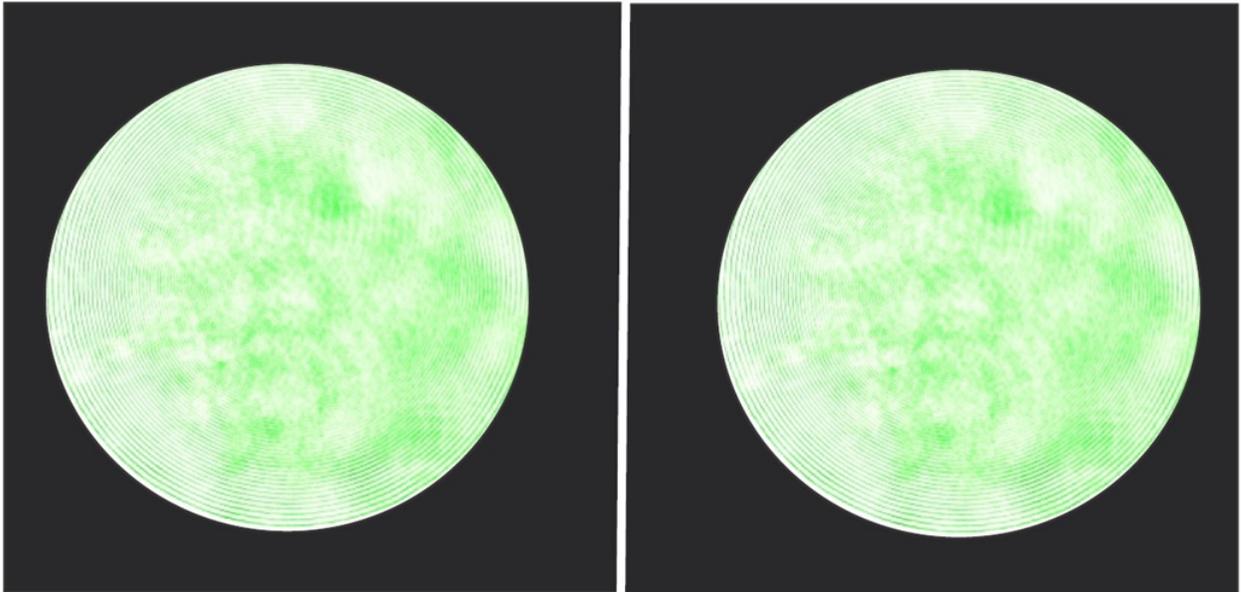


Figura 4.21: *Intensidades Experimentales capturadas a  $\Delta z = 25.4\mu m$*

Ahora bien, se utilizó el algoritmo propuesto en la sección anterior, sobre las distribuciones de intensidad experimental de la figura 4.21, tomando una distancia  $\Delta z$  de 25.4 micrómetros para esta lente. La señal de sensor obtenida es la que muestra en la figura 4.22. Note como la información útil sobre la forma de la lente solo se encuentra en una región del sensor.

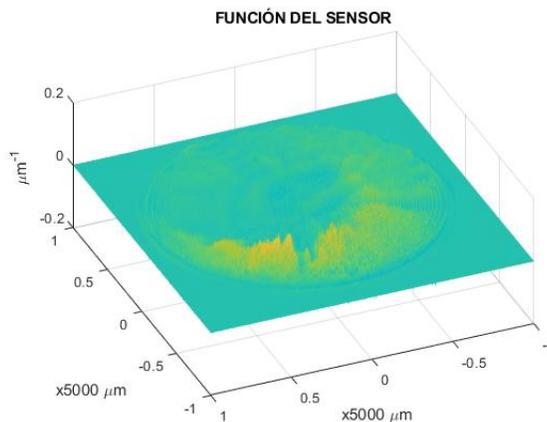


Figura 4.22: *Señal de sensor para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva*

Ahora bien, tal como lo muestra la figura 4.19, la función de frente de onda  $W$  de referencia debe de ser idealmente un plano si el frente de onda no estuviera aberrado. Este frente de onda

---

#### 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

se muestra en la figura 4.23

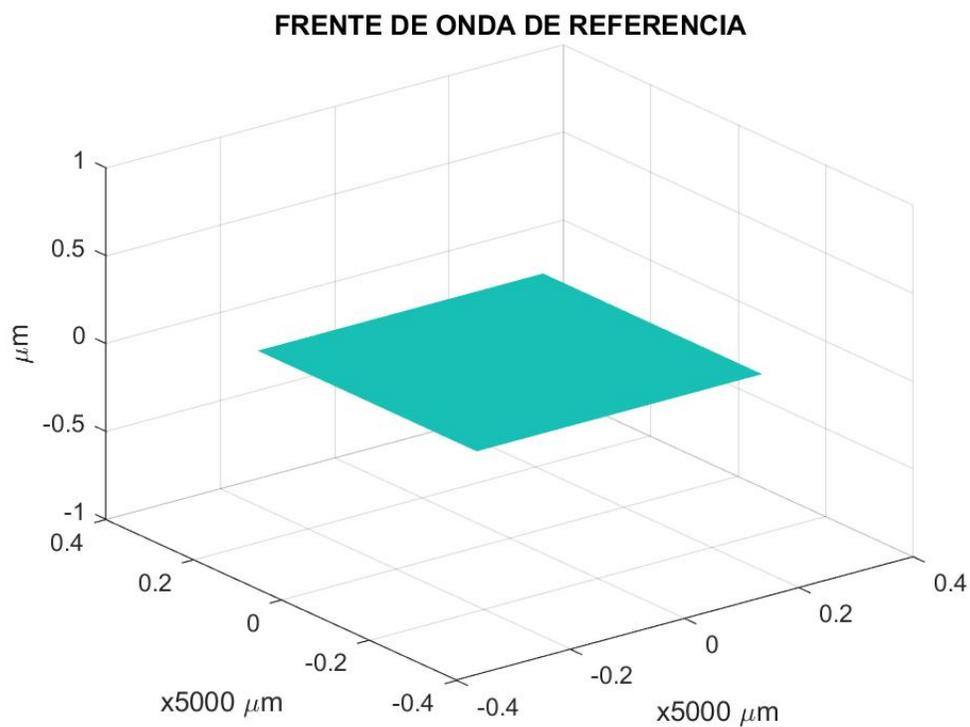


Figura 4.23: *Frente de onda de referencia para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva*

La función resultante después de aplicado el algoritmo a los datos experimentales es la que se muestra en la figura 4.24.

## 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

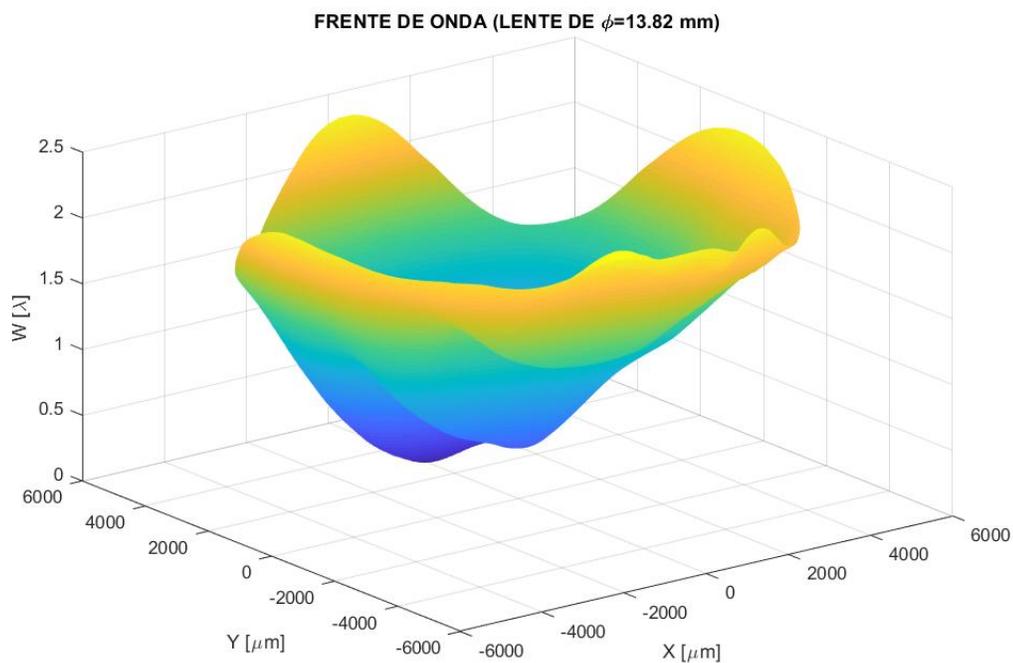


Figura 4.24: *Frente de onda experimental para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva*

En la figura 4.25 se muestra la aproximación en polinomios de Zernike de la función anterior.

## 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

OPD: AJUSTE EN POLINOMIOS DE ZERNIKE, SIN LOS TÉRMINOS 1,2,3 Y 5

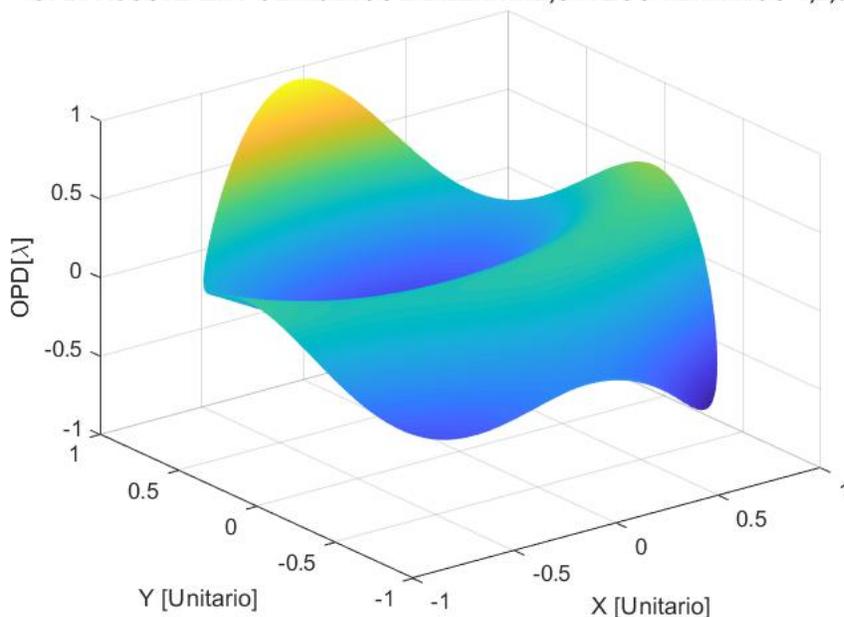


Figura 4.25: Frente aproximado en polinomios de Zernike para un doblete de 50mm de distancia focal efectiva

El error pico valle obtenido fue de  $p-v=1.5018\lambda$  y el error  $rms=0.5752\lambda$ . La tabla 4.3 muestra los coeficientes para los primeros 15 polinomios de Zernike con los que se construyó la función anterior

R	Nombre	Valor
4	Astigmatismo Primario, a $0^\circ$ o $90^\circ$	-0.027
6	Astigmatismo Primario, a $45^\circ$	-0.197
7	Astigmatismo triangular a $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$	-0.094
8	Coma en <b>x</b>	-0.013
9	Coma en <b>y</b>	0.440
10	Astigmatismo Triangular, $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$	0.056
11	Cenicero	-0.010
12	Astigmatismo de 5° Orden a $0^\circ$ o $90^\circ$	0.053
13	Aberración Esférica	0.104
14	Astigmatismo de 5° orden a $45^\circ$	0.232
15	Cenicero $22.5^\circ$	0.281

Tabla 4.2: Valores de Coeficientes de Zernike obtenidos con el algoritmo desarrollado

---

## 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Finalmente la figura 4.26 muestra los coeficientes de Zernike para dicha función.

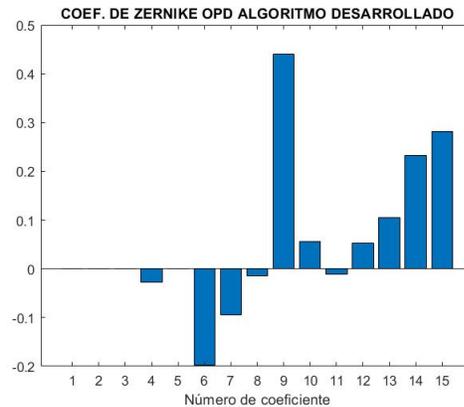


Figura 4.26: Coeficientes de Zernike obtenidos con el algoritmo desarrollado

### 4.4.2. APLICACIÓN DE MÉTODO INTERFEROMÉTRICO

Estos mismo doblete fue probado con el interferómetro **Zygo**®. El arreglo experimental para realizar esta prueba se muestra en la figura 4.27, donde  $f$  es la distancia focal de la lente y  $R$  corresponde al radio de curvatura de un espejo auxiliar, el cual se coloca a una distancia tal que el radio de curvatura medido desde el vértice del espejo coincida con el punto focal de la lente de prueba. Lo anterior se realiza para que los rayos provenientes la lente de prueba regresen por la misma trayectoria y pueda observarse los interferogramas en la pantalla del **Zygo**®.

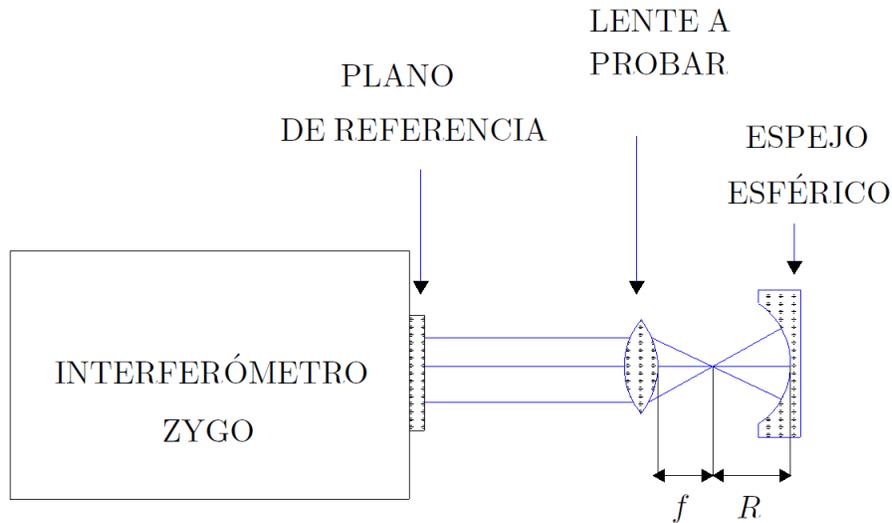


Figura 4.27: *Arreglo experimental interferométrico para realizar las pruebas sobre los dobletes acromáticos.*

El interferograma obtenido para la misma lente utilizada en la sección anterior se muestran en la figura 4.28

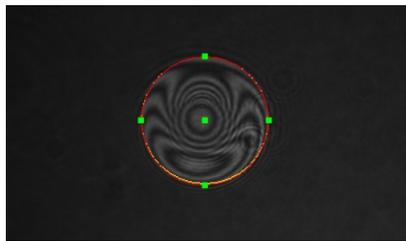


Figura 4.28: *Interferograma de sobre lente plano-cóncava de 26.36mm de radio de curvatura.*

El interferograma capturado fue sometido a un análisis interferométrico con un método convencional, incluido en el programa Durango. La figura 4.29 muestra la gráfica obtenida para la lente plano-cóncava de 26.36mm de radio de curvatura con los coeficientes arrojados por el software

#### 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Durango. El error pico-vals para el análisis de este doblete es de  $p-v= 2.0273\lambda$  y el  $rms=1.2236\lambda$ .

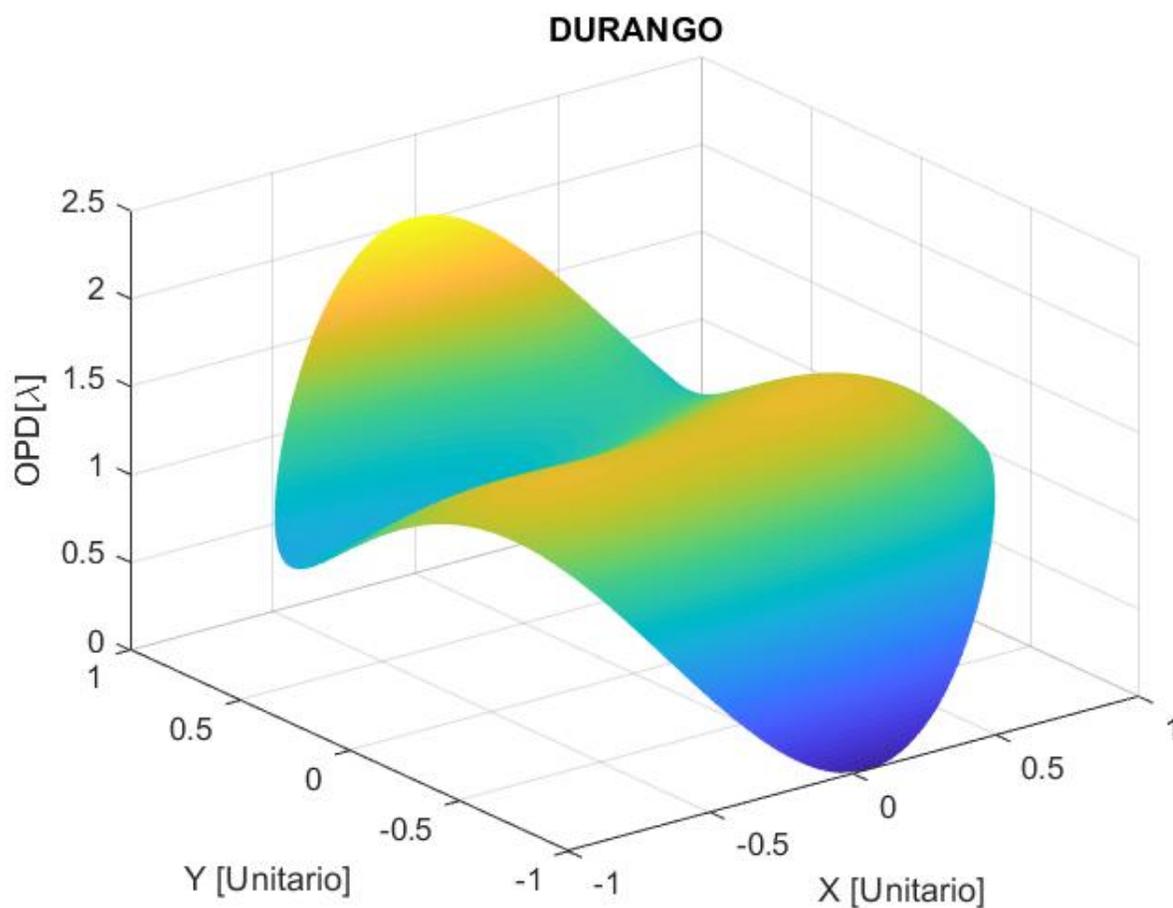


Figura 4.29: Gráfica del frente de onda recuperado para lente plano-covexa de 26.36mm de radio de curvatura. (software Durango)

Finalmente la figura 4.30 muestra los coeficientes de Zernike obtenidos con el software Durango.

#### 4.4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

R	Nombre	Valor
4	Astigmatismo Primario, a $0^\circ$ o $90^\circ$	0.056
6	Astigmatismo Primario, a $45^\circ$	0.103
7	Astigmatismo triangular a $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$	0.006
8	Coma en <b>x</b>	-0.153
9	Coma en <b>y</b>	0.675
10	Astigmatismo Triangular, $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$	-0.014
11	Cenicero	-0.006
12	Astigmatismo de $5^\circ$ Orden a $0^\circ$ o $90^\circ$	-0.069
13	Aberración Esférica	-0.052
14	Astigmatismo de $5^\circ$ orden a $45^\circ$	-0.058
15	Cenicero $22.5^\circ$	0.003

Tabla 4.3: Valores de Coeficientes de Zernike obtenidos con el software Durango

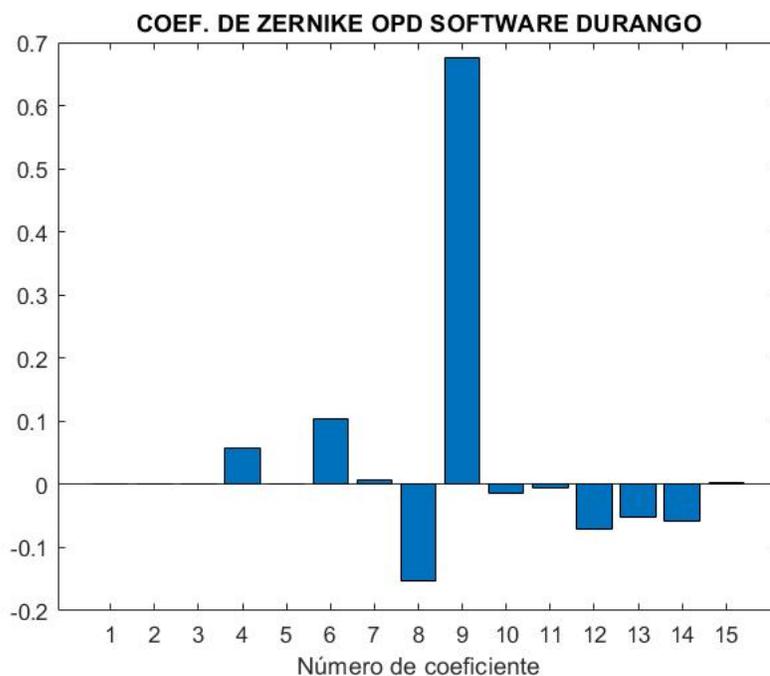


Figura 4.30: Coeficientes de Zernike obtenidos con el software Durango

## **4.5. CONCLUSIONES**

Se ha desarrollado un algoritmo para obtener una función numérica de la distribución de intensidad que causa un frente de onda óptico parabólico. Esta función se comparó con la función real y se obtuvo el error cuadrático medio, el cual se puede utilizar como parámetro de convergencia para encontrar la función numérica de la intensidad de frentes de onda no convencionales, mediante el algoritmo completo propuesto en este trabajo.

Para resolver numéricamente el ETI, se propone un algoritmo que utiliza un frente de onda parabólico y una distribución de intensidad numérica. El medir las distribuciones de intensidad en dos planos simétricos permite escribir el ETI como una ecuación de Poisson con condiciones de frontera de Neumann. Por lo tanto, utilizando el método de diferencias finitas, de la ecuación de Poisson obtenemos un sistema de ecuaciones lineales que pueden resolverse mediante el algoritmo propuesto. Se logró mediante este algoritmo realizar un análisis de frentes de onda calculados y los reales conocidos.

Por último se realizó un procedimiento experimental en donde se comprobó por comparación que este algoritmo puede ser útil en el análisis de las formas geométricas de un sistema óptico. Una comparación visual entre la imagen del ajuste en polinomios de Zernike con el algoritmo de recuperación de fase desarrollado y la obtenida con el analizador Durango (figura 4.29), permite ver como los frentes de onda obtenidos con estos dos métodos presentan semejanzas notables. Los valores de rms y p-v también demuestran que sí lo son.

## Capítulo 5

# CONCLUSIONES GENERALES

En este trabajo se lograron construir los dos algoritmos planteados en los objetivos : el primero resuelve de manera numérica la ecuación de transporte de irradiancia mediante el método de elementos finitos en coordenadas cartesianas, teniendo como datos de entrada las mediciones de intensidad provenientes de un haz luminoso, el cual previamente ha pasado por un elemento óptico; el segundo utiliza el método de trazo y conteo de rayos, para encontrar una función aproximada de intensidad, utilizando como datos de entrada una función de frente de onda, la cual cumple con las condiciones donde la ecuación de transporte es válida. Con el primer algoritmo se encontraron los valores de error entre la función de frente de onda calculada contra el frente de onda original. Se encontró que el error tiene valores bajos a medida que nos acercamos al centro de la pupila, lo cual indica que el algoritmo tiene un comportamiento que es coincidente con la funcionalidad paraxial de la ecuación de transporte. Después, se realizó el contraste entre una prueba óptica convencional contra los resultados obtenidos con el primer algoritmo aplicado sobre una lente de prueba. Según la literatura revisada, esta sería la primera vez que se realiza este tipo de comparación cuando se utiliza esta técnica cuando han sido utilizadas coordenadas cartesianas. Se pudo comprobar que la forma de los frentes de onda obtenidos con ambas técnicas son similares de manera cualitativa. Sin embargo se necesita trabajar en la interpretación de las escalas, para poder comparar cuantitativamente las deformaciones con las dos técnicas. No obstante, el hecho de contar con este algoritmo y poder contrastarlo con las pruebas ópticas convencionales, representa un avance importante en esta área de las pruebas ópticas, ya que esta técnica no requiere de óptica adicional, es rápida de montar y resulta comparativamente más barata de implementar.

Con el segundo algoritmo, lo que se encontró es que, por lo menos para el frente de onda parabólico, la función de intensidad calculada es, según la función de error, muy similar a la co-

rrespondiente función de intensidad real, lo cual nos hace suponer que el método propuesto puede servir para encontrar los patrones de intensidad que caracterizan a las principales aberraciones en las técnicas basadas en la ETI.

## 5.1. TRABAJO FUTURO

- 1.-Realizar una comparación cuantitativa entre los frente de onda obtenidos con un software comercial y los obtenidos con nuestro algoritmo de recuperación de frente de onda.
- 2.-Desarrollar un algoritmo iterativo con el fin de verificar que algoritmo de conteo de rayos obtiene funciones de intensidad que satisfacen la ecuación de transporte.
- 3.- Encontrar los patrones de intensidad característicos de aberraciones ópticas.

# Bibliografía

- [1] M. F. Guasti, J.L. Jimenez and F. G. Agustín, A.C. Rodríguez, Amplitud and phase representation of monochromatic fields , (2003), J. Opt. Soc. Am. A, 20,1629 (1634).
- [2] C. Roddier, F. Roddier. New optical testing methods developed at the University of Hawaii; results on ground- based telescopes and Hubble space telescope. SPIE 1531, 37-43 (1991).
- [3] R.K.Tyson; Principles of Adaptive Optics, Academy Press, Inc. (1991).
- [4] D. Malacara, Optical Shop Testing, Third edition., Hoboken, New Jersey (2007).
- [5] F. Roddier, C. Roddier, N. Roddier. Curvature Sensing: A new Wavefront sensing method. SPIE 976, 203-209 (1988).
- [6] J. García-Márquez, N. Alcalá, M. Montoya, C. , M. Gutiérrez, J. Moya. Calibración de un interferómetro fizeau: cálculo de incertidumbres. Revista mexicana de física, 51(1), 114-120 (2005).
- [7] G. Rodríguez-Zurita. Apuntes de Interferometría Óptica Contemporánea: ideas fundamentales (2013). Obtenido de <https://www.fcm.buap.mx/gzurita/assets/InterferometriaContemporanea.pdf>
- [8] A. Sánchez Alvarez. Técnicas Avanzadas de demodulación de patrones de franjas (Tesis de Maestría). Centro de Investigaciones en Óptica, México (2007).
- [9] D. Aguirre Aguirre . Prueba nula de Ronchi dinámica (Doctorado). INAOE, Puebla (2014).
- [10] D. Malacara, Optical Shop Testing , Wiley (1978)
- [11] C. Schwartz. E. Ribak, S.G. Lipson. Bimorph adaptive mirrors and curvature sensing. J. Opt. Soc. Am. 11, 895-902 (1994).
- [12] F. Roddier. Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics. Appl. Opt. 27, 1223-1225 (1988).
- [13] E. Ruiz, S.Cuevas, R. Langarica, R. Enriquez, I. Gutiérrez, L. Salas. Offset guider/alignment system for the 2.1 m UNAM telescope. SPIE 627, 231-235 (1986).
- [14] J. M. Beckers. Interpretation of out-of-focus star images in terms of wave-front curvature. J. Opt. Soc. Am II, 425-427 (1994).

- [15] M. R. Teague. Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase. *J. Opt. Soc. Am* 72, 1199-1209 (1982).
- [16] M. R. Teague. Deterministic phase retrieval: a Green's Function Solution. *J. Opt. Soc. Am.* 73, 1434 (1983).
- [17] J. Li, T. Zhou. On Relaxed Averaged Alternating Reflections (RAAR) Algorithm for Phase Retrieval from Structured Illuminations (2016).
- [18] M. Born, E. Wolf. *Principles of Optic*. Sixth Ed (Pergamon, Oxford, 1980).
- [19] J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Appl. Opt.* 21, 2758-2769 (1982).
- [20] N. Chen, C. Zuo, E. Y. Lam, and B. Lee. 3D Imaging Based on Depth Measurement Technologies. *Sensors* (Basel, Switzerland), 18(11), 3711 (2018).
- [21] J. C. Wyant. Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology. *Applied Optics and Optical Engineering*, XI, 27-39. <http://wyant.optics.arizona.edu/zernikes/Zernikes.pdf> (1992).
- [22] R. J. Mathar. Zernike basis to cartesian transformations. *Serbian Astronomical Journal*, 179, 107-120. <https://doi.org/10.2298/saj0979107m> (2009).
- [23] R. Guenther. *Modern Optics*. John Wiley and Sons Inc. (1990).
- [24] F. D. Feiock. Wave propagation in optical systems with large apertures. *J. Opt. Soc. Am.* 68, 485-489 (1978).
- [25] A. Papoulis. *Systems and transforms with applications in optics*. McGraw-Hill Inc. (1968).
- [26] W. H. Southwell. Validity of the Fresnel approximation in the near field. *J. Opt. Soc. Am* 71, 7 - 14 (1981).
- [27] N. Streibl, Phase imaging by the transport of intensity, *Opt. Commun.* 49, 6 - 10 (1984).
- [28] K. Ichikawa, A.W. Lohmann, M. Takeda, "Phase retrieval based on the irradiance transport Equation and the Fourier transform method: experiments"
- [29] J. E. Marsden, A. J. Tromba. *Cálculo vectorial, tercera edición*. Addison- Wesley Iberoamericana, S.A. (1991).
- [30] K. Ishizuka, B. Allman, Phase measurement of atomic resolution image using transport of intensity equation, *Journal of Electron Microscopy*, Volumen 54, Páginas 191 - 197 (2005)
- [31] Nagel, James. "Numerical Solutions to Poisson Equations Using the Finite-Difference Method". *IEEE Antennas and Propagation Magazine* (2014).
- [32] Mendoza Bernal O. *Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Mediante el Método de Diferencias Finitas y su Paralelización*". (2016).
- [33] E. Hecht, A. Zajac. *Óptica*. Fondo Educativo Interamericano (1977).

- [34] Barbero Sergio, Thibos Larry . Error analysis and correction in wavefront reconstruction from the transport of intensity equation. *Optical Engineering* 2006; 094001: 45(9).
- [35] Shinde, Gurunath, *Introduction to Finite Element Method*.(2015)
- [36] G.R. Brady, J.R. Fienup, Measurement range of phase retrieval in optical surface and wavefront metrology. *Applied optics* 48 (3), 442-449 (2009).
- [37] Campos-García, M., Granados-Agustín, F., Cornejo-Rodríguez, A., Estrada-Molina, A., Avendaño-Alejo, M. and Moreno-Oliva, V., 2013. Numerical evaluation of the intensity transport equation for well-known wavefronts and intensity distributions. 8th Iberoamerican Optics Meeting and 11th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Applications,.
- [38] R.M. More, K. Kosaka, Wave-front curvature in geometrical optics. *Phys. Rev. E* 57, 6127 (1998).
- [39] C.S. Liu, P.D. Lin ,Computational method for deriving the geometric point spread function of an optical system. *Applied Optics* 49(1), 126-136 (2010).
- [40] J. Martinez-Carranza, K. Falaggis, and T. Kozacki, "Optimum plane selection for transport-of-intensity-equation-based solvers," *Appl. Opt.* 53, 7050-7058 (2014)

# Apéndice A

## Publicaciones Generadas

[1] Manuel Campos-García, Ángel Eugenio Martínez-Rodríguez, and Fermín Salomon Granados-Agustín. "Calculation of intensity distribution from a wavefront using ray-counting method", Proc. SPIE 11057, Modeling Aspects in Optical Metrology VII, 110571L (21 June 2019); <https://doi.org/10.1117/12.2526245>

[2] Manuel Campos-García, Ángel Eugenio Martínez-Rodríguez, Oliver Huerta-Carranza, Celestino Vargas-Alfredo, Agustín Santiago-Alvarado, and Victor Iván Moreno-Oliva. "Evaluation of the aberrations of a PDMS lens", Proc. SPIE 11057, Modeling Aspects in Optical Metrology VII, 110571N (21 June 2019); <https://doi.org/10.1117/12.2526276>

## Apéndice B

### Programa de trazo de rayos en 3D

Listing B.1: Código Matlab

```
clear all
radio=42;
% Define domain
a = -1; b = 1;
c = -1; d = 1;
% Define grid sizes
M =101; % number of points
N =101; % number of points
hx = (b-a)/(M-1); % length of sub-intervals in x-axis
hy = (d-c)/(N-1); % length of sub-intervals in y-axis
% Generate 2D arrays of grids
[X,Y] = meshgrid(a:hx:b,c:hy:d);

% z es la distancia donde se desea conocer el patron de intensidad
% debe ser muy grande para que z^2 sea mucho mayor que x^2+y^2
z=100;
delta_z=0.001;
z1=z-delta_z;
z2=z+delta_z;
```

---

```

%FRONTE DE ONDA
W=z+(X.^2+Y.^2)/(2*z);

%calculo de las intensidades en tres planos
l=(1/z^2)*(1-(X.^2+Y.^2)/(z^2));
l1=(1/z1^2)*(1-(X.^2+Y.^2)/(z1^2));
l2=(1/z2^2)*(1-(X.^2+Y.^2)/(z2^2));

% % %señal del sensor
%F=delta_z^-1*((l1-l)./(l));

%F=delta_z^1*((l1-l2)./(l1+l2));
F=(1/(2*delta_z)).*(l1-l2);

%Grafica de la señal del sensor
figure(2)
surf(X,Y,F,'EdgeColor','none')

% % %Derivada direccional
% Radio=sqrt(X.^2+Y.^2);
% unitariox=(X./Radio);
% unitarioy=(Y./Radio);
% [Fx,Fy]=gradient(W,hx,hy);
% direccional=(Fx.*unitariox+Fy.*unitarioy);

%Boundary conditions
G=zeros(size(W));

G(:,1)=F(:,1); % left
G(:,M)=F(:,M); % right

```

---

---

```

G(M,:)=F(M,:); % bottom
G(1,:)=F(1,:); % top

%convertir en un vector para compatibilidad con programa de
  poisson
F=(reshape(F',1,(M)*(N)))';

% Build matrix B
r2 = 2*ones(M,1);
r = -ones(M-1,1);
B = diag(r2,0) + diag(r,1) + diag(r,-1);
B(1,2)=-2;
B(M,M-1)=-2;
% Sparse matrix B
B = sparse(B);

V=full(B);
% Build sparse identity matrix
I = speye(M);
% Build tridiagonal block matrix A
A = kron(B,I) + kron(I,B);

O=full(A);

%condicion de frontera en las cuatro esquinas
G=2*G;
for i=1:N
for j=1:M
    if i==1&&j==1

```

---

---

```

    G(i , j)=2.*G(i , j);
    elseif i==1&&j==M
    G(i , j)=2.*G(i , j);
    elseif i==M&&j==1
    G(i , j)=2.*G(i , j);
    elseif i==M&&j==M
    G(i , j)=2.*G(i , j);
    end
end
end

G=(reshape(G' , 1 , (M) *(N))) ' ;

F=hx ^2.*F+hx .*G;

x=zeros ( size (F) );

%A=0;

[ u , err , iter , flag ] = sor(A , x ,F,0.001 , 1e10 , 1e-5);

u=reshape (u ,M,N) ;

%$ALIDA

%
%mascara para pupila circular

[R,S]=size (W) ;
for i=1:R
    for j=1:S
if sqrt (((R/2)-i)^2+((S/2)-j)^2)<=radio %qui va la palabra radio
    W(i , j)=W(i , j);

```

---

---

```

else
    W(i , j)=NaN;
end
    end
end

%Acondicionando y normalizando la gráfica
W=W-min(min(W));
W=W./max(max(W),[],'omitnan');

figure (1)
surf(X,Y,W,'EdgeColor','none')

% mascara para pupila circular

[R,S]=size(u);
for i=1:R
    for j=1:S
if sqrt(((R/2)-i)^2+((S/2)-j)^2)<=radio
    u(i , j)=u(i , j);
else
    u(i , j)=NaN;
end
    end
end

u=u-min(min(u));
u=u./max(max(u),[],'omitnan');

figure (3)
surf(X,Y,u,'LineStyle','none','EdgeColor',[0 0 0],'FaceColor','
    interp')

```

---

---

**shading interp**

```
error=u-W;
% %
% % figure(4)
% % surf(X,Y,error,'LineStyle','none','EdgeColor',[0 0 0],'
% % FaceColor','interp')
% % shading interp
% %

%
%funcion que calcula el rms
c=0;
meanse=0;
[R,S]=size(error);
for i=1:R
    for j=1:S
if isnan(error(i,j))~=1
    meanse=error(i,j)^2+meanse;
c=c+1;
end
    end
end

meanse=meanse/c;

rr=[1;
    0.9000000000000000;0.8000000000000000;0.7000000000000000;0.6000000000000000

yy=[0.00119224903678732;
    0.000767707451060122;0.000471842429787704;0.000275119041683516;0.0001465
    e-05;2.94868784482393e-05;9.95899650532569e-06;2.22023312691972
```

---

```
e-06;2.66846413915054e-07;0];
```

```
% yy=yy./max(max(yy));
```

```
figure(6)
```

```
plot(rr,yy);
```

```
xlabel('Pupila_Unitaria_Adimensional')
```

```
ylabel('Error_Cuadratico_Medio')
```

```
y=rr.^2;
```

# Apéndice C

## Programa de recuperación de frente de onda

Listing C.1: *Código Matlab*

```
clear all
hx=0.01;
hy=0.01;
x=(-1:hx:1);
y=(-1:hy:1);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

zo=0.01;

W=zo+((X.^2+Y.^2)/2*zo);
W=W./max(max(W));

figure(1)
surf(X,Y,W, 'LineStyle', 'none');

%Paso1: Encontrar el gradiente numérico para cada punto de W
[FX,FY] = gradient(W,hx,hy);

% Paso2: Seleccionar una distancia z (zd para el plano de
detección) mayor que el
```

---

```

% máximo valor de W y definir la diferencia de longitud vertical
  Yi entre esta
% distancia y el valor de W para cada uno de los puntos W(x,y)

z_d=max(max(W));

Yi=z_d-W;

%Nota: cuidar que Yi sea positivo siempre

% Paso3: Encontrar las pendientes de las rectas normales a cada
  uno de los
% puntos en las direcciones x e y

mx=1./FX;
my=1./FY;

[M,N]=size(mx);

Intensity=zeros(M,N);

xdi=zeros(M,N);
ydi=zeros(M,N);

xi=Yi./mx;
yi=Yi./my;

% Paso4: Proyectar esos rayos para saber su posición en el plano
  zd
xdi=(X-xi)*10;
ydi=(Y-yi)*10;
%
%
%
% Paso5: Redondear esas posiciones a su valor entero próximo

```

---

---

*para que rayos adyacentes coincidan en esa posición*  
redondeox=**round**(xdi);  
redondeoy=**round**(ydi);

vuxp=**unique**(redondeox);  
vuyp=**unique**(redondeoy);

m=**length**(vuxp);  
n=**length**(vuyp);

*%Paso6: Hacer el conteo de rayos tienen una misma posición , para  
obtener una función discreta de intensidad*  
conteo=**zeros**(m,n);

```
for i=1:m
    for j=1:n
        for k=1:M
            for h=1:N
                if redondeox(k,h)==vuxp(i) && redondeoy(k,h)==vuyp(
                    j)
                    conteo(i,j)=conteo(i,j)+1;
                end
            end
        end
    end
end
```

**end**

```
for k=1:M
    for h=1:N
```

---

```

    for i=1:m
        for j=1:n
            if vuxp(i)==redondeox(k,h) && vuyp(j)==redondeoy(k
                ,h)
                Intensity(k,h)=conteo(i,j);
            end
        end
    end
end

end

end

prueba=cat(3,X,Y,Intensity);

Intensity = smooth3(prueba);

Intensity = squeeze(Intensity(:, :, 3));

figure(2)

surf(X,Y,Intensity , 'LineStyle' , 'none')
zlabel( 'Número_de_Rayos_por_Punto')
hcb=colorbar;
title(hcb, 'Número_de_Rayos_por_Punto')
%
%
%
%
%
%
%Paso7: Ajuste polinomico de la función discreta obtenida en el
paso anterior

[xData , yData , zData] = prepareSurfaceData( X, Y, Intensity );

```

---

```

%Set up fittype and options.
ft = fittype( 'poly22' );
opts = fitoptions( ft );
opts.Lower = [-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf];
opts.Upper = [Inf Inf Inf Inf Inf Inf];

%Fit model to data.
[fitresult , gof] = fit( [xData , yData] , zData , ft , opts );

coeficientes=coeffvalues(fitresult);

l=coeficientes(1) + coeficientes(2)*xData +coeficientes(3)*yData +
    coeficientes(4)*xData.^2 + coeficientes(5)*xData.*yData +
    coeficientes(6)*yData.^2;

l=reshape(l ,M,N);
l=l-min(min(l));
l=l./max(max(l));

figure(3)
surf(X,Y,l , 'LineStyle' , 'none')

%intensidad real reportada

IR=(1/zo^2)*(1-(X.^2+Y.^2)/(zo^2));
%
IR=IR-min(min(IR));

IR=IR./max(max(IR));
%
figure(4)

surf(X,Y,IR , 'LineStyle' , 'none')

%error
figure(5)

```

---

---

```
error=I-IR;  
surf(X,Y,error , 'LineStyle' , 'none')
```

```
SQE = error.^2;  
MSE = mean(SQE(:));  
RMSE = sqrt(MSE);
```