



**I
N
A
O
E**

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica.**

**La línea de transmisión pasabajo con
capacitores e inductores de variación periódica
en el tiempo**

por

Juan Sabino Martínez Romero

Tesis sometida como requisito parcial

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en electrónica

Supervisada por

Dr. Peter Halevi

Diciembre 2013

Sta. Ma. Tonantzintla, Puebla

© INAOE 2013

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su
totalidad o en partes de esta tesis



RESUMEN

En esta tesis se presenta el estudio de la transmisión de una onda electromagnética en un medio dinámico cuya permitividad y/o permeabilidad varían periódicamente en el tiempo: $\varepsilon(t)$ y/o $\mu(t)$. Dichas propiedades se encuentran moduladas de manera sinusoidal a una frecuencia $\Omega/2\pi$.

Se obtiene la relación de dispersión al solucionar el problema de eigenvalores. Después se hace el análisis de los coeficientes de reflexión y transmisión en una placa dinámica, para después mostrar las condiciones bajo las cuales se presentan las resonancias paramétricas fuertes.

También se presentan los resultados mencionados anteriormente para el caso en el que se consideran pérdidas para observar los efectos que se producen con su presencia, además de que con ello se obtienen resultados más cercanos a la realidad

Por último se presenta la relación que existe entre la placa dinámica y la línea de transmisión dinámica así como las condiciones necesarias para que esta relación sea válida, todo esto para obtener las resonancias paramétricas fuertes en la línea y observar que existe buena concordancia entre la placa y línea dinámicas.

A lo largo del presente trabajo se hacen ciertas comparaciones con algunos resultados obtenidos en las refs. [1], [2] y [4] ya que esta tesis es una generalización de lo hecho en dichas referencias.

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a Dios por acompañarme a lo largo de este camino. A mi familia por el amor y cariño que me ha brindado siempre, apoyándome en todo momento para poder lograr mis sueños. A mi asesor, el Dr. Peter Halevi, por sus consejos, apoyo y confianza, por preocuparse no solo en mi desarrollo profesional sino también en el personal.

Al INAOE y al CONACyT por todo el apoyo brindado durante mis estudios de maestría.

Agradezco también a los doctores Miguel Ángel Gutiérrez de Anda, José Luis Olvera Cervantes y Jorge Roberto Zurita Sánchez por sus comentarios y paciencia durante el desarrollo de la presente tesis.

Maricruz por tu comprensión y paciencia, y por inspirarme a ser una mejor persona, esta tesis tiene gran parte de ti. Gracias.

Son muchas las personas que han formado parte de este logro, y por supuesto de mi vida, a todas ellas les agradezco su amistad, consejos, apoyo, cariño y compañía. Algunas se encuentran conmigo, otras más en mis recuerdos y en mi corazón, y sin importar donde estén quiero agradecerles el formar parte de mí y decirles: ¡LO HEMOS LOGRADO!

DEDICATORIA

Por ser el inicio de una gran historia, abuelitos, esta tesis es suya.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	I
AGRADECIMIENTOS.....	III
DEDICATORIA.....	V
LISTA DE FIGURAS.....	IX
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Motivaciones.....	3
1.3. Objetivos	3
1.4. Descripción de tesis.....	3
2. SISTEMAS PERIÓDICOS	5
2.1. Teorema de Bloch-Floquet.....	5
2.2. Relación de dispersión	6
2.3. Cristales	6
2.4. Cristales Fotónicos	8
2.5. Línea de transmisión	10
2.5.1. Modelo con pérdidas	12
2.5.2. Características de las líneas de transmisión.....	14
2.5.3. Impedancia característica	14
2.5.4. Constante de propagación	15
3. CRISTAL FOTÓNICO TEMPORAL.....	16
3.1. Ecuación de onda	16
3.2. Ecuación de eigenvalores.....	17
3.2.1. Relación de dispersión sin absorción	18
3.2.2. Relación de dispersión con absorción.....	21
3.3. Placa dinámica.....	23
3.3.1. Coeficientes de reflexión y transmisión	24
3.3.1.1. Resultados numéricos sin absorción.....	28
3.3.1.2. Resultados numéricos con absorción.....	31
3.3.2. Resonancias.....	33
3.3.2.1. Simulaciones numéricas sin absorción.....	33
3.3.2.2. Simulaciones numéricas con absorción	36

4.	RESONANCIAS EN LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN DINÁMICA.....	40
5.	CONCLUSIONES	43
6.	BIBLIOGRAFÍA	46

LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1 Red 1-D en cascada.....	5
Fig. 2.2 Formación de una estructura cristalina [6]	7
Fig. 2.3 Ejemplos de cristales fotónicos: (a) 1-D, (b) 2-D y (c) 3-D [5].....	9
Fig. 2.4 La descripción de medio efectivo permite ver a un medio artificial periódico como un cristal fotónico.....	9
Fig. 2.5 Campos eléctrico y magnético en una microcinta.....	11
Fig. 2.6 Red de dos puertos de longitud infinitesimal.....	12
Fig. 2.7 Modelo con pérdidas de una línea de transmisión	13
Fig. 3.1 Relación de dispersión con $M_\epsilon = M_\mu$ y $\theta = 0$ (caso sin absorción).....	19
Fig. 3.2 Relación de dispersión con $M_\epsilon = M_\mu$ y $\theta \neq 0$ (caso sin absorción).....	19
Fig. 3.3 Relación de dispersión con $M_\epsilon \neq M_\mu$ y $\theta = 0$ (caso sin absorción).....	20
Fig. 3.4 Relación de dispersión con $M_\epsilon \neq M_\mu$ y $\theta \neq 0$ (caso sin absorción).....	20
Fig. 3.5 La Relación de dispersión no es sensible al intercambio entre M_ϵ y M_μ	21
Fig. 3.6 Parte real de la relación de dispersión con $M_\epsilon = 0.01619$, $M_\mu = 0.97143$ y $\theta = 0$ y diferentes valores de ϵ_r'' y μ_r'' (caso con absorción).....	22
Fig. 3.7 Relación de dispersión: (a) parte real y (b) parte imaginaria. $M_\epsilon = 0.01619$, $M_\mu = 0.64762$, $\epsilon_r'' = 0.01$, $\mu_r'' = 0$ y $\theta = 0$ (caso con absorción)	23
Fig. 3.8 Relación de dispersión: (a) parte real y (b) parte imaginaria. $M_\epsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0.01619$, $\epsilon_r'' = 0.01$, $\mu_r'' = 0$ y $\theta = 0$ (caso con absorción)	23
Fig. 3.9 Placa con permitividad ϵ y permeabilidad μ periódicas en el tiempo.....	24
Fig. 3.10 Comparación de las magnitudes de los coeficientes de reflexión y transmisión entre PARA 2009[1] y las simulaciones propias. (a) $M_\epsilon = 0.01619$ y $L_N = 0.5$. (b) $M_\epsilon = 0.1619$ y $L_N = 0.5$. (c) $M_\epsilon = 0.01619$ y $L_N = 2$. (d) $M_\epsilon = 0.1619$ y $L_N = 2$	29
Fig. 3.11 Magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión para $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0.1619$, y para $M_\epsilon = 0.1619$ y $M_\mu = 0.64762$ con: (a) $\nu = 2$ y (b) $\nu = 0.5$	30
Fig. 3.12 Magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión para $M_\epsilon = 0.4838$, $M_\mu = 0.1619$ y $\nu = 2$ para $n = 0, \pm 1, 2$	30

Fig. 3.13 Comparación entre modulación eléctrica y magnética en los coeficientes de reflexión y transmisión	31
Fig. 3.14 Comparación de la magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión con y sin absorción	32
Fig. 3.15 Comparación de la magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión con y sin absorción 2	32
Fig. 3.16 Coeficientes de reflexión para $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.658$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso sin absorción)	34
Fig. 3.17 Coeficientes de transmisión para $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.658$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso sin absorción)	34
Fig. 3.18 Coeficientes de transmisión para $M_\epsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0$ y $\theta = 0$ con $\nu = 17.5$ (línea sólida azul) y $\nu = 17.8$ (línea punteada roja) para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso sin absorción).....	35
Fig. 3.19 Coeficientes de reflexión para $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.658$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso con pérdidas).....	36
Fig. 3.20 Coeficientes de transmisión para $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.65$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso con pérdidas).....	37
Fig. 3.21 Coeficientes de transmisión para $M_\epsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0$ y $\theta = 0$ con $\nu = 17.5$ (línea sólida azul) y $\nu = 17.8$ (línea punteada roja) para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso con pérdidas)	38
Fig. 3.22 Coeficiente de transmisión vs ν con $M_\epsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0$ y $\theta = 0$	38
Fig. 4.1 Línea de transmisión dinámica	40
Fig. 4.2 Configuración utilizada para las simulaciones.....	41
Fig. 4.3 Comparación placa dinámica vs línea de transmisión dinámica	42

1. INTRODUCCIÓN

Previamente se presentó una descripción teórica de la respuesta de una placa dinámica (con variación temporal periódica de la permitividad $\varepsilon(t)$) [1] y [2]. Como resultado de dicho estudio se encontró que, para una frecuencia ω , se propagan simultáneamente ondas planas con vectores de onda $k_p(\omega)$, $p = 1, 2, 3, \dots$, dando lugar a bandas prohibidas del vector de onda Δk en la relación de dispersión. Además, en el caso de una placa las ondas reflejadas y transmitidas contienen armónicos de la frecuencia de modulación Ω , es decir, $\omega - n\Omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ [1]. Dicha placa dinámica puede ser considerada como un cristal fotónico temporal. Después se demostró la obtención de resonancias bajo ciertas condiciones [2]. Posteriormente se propuso una forma práctica de realizar la teoría anterior, esto a través del estudio de la línea de transmisión dinámica ideal, reemplazando los capacitores por varactores (en el límite de longitud de onda larga), con lo que se obtuvo gran concordancia con los resultados del medio dinámico [3]. Por último se propuso que la permeabilidad del medio también tuviera variación temporal periódica, $\mu(t)$, para ver qué efectos tiene sobre lo anteriormente estudiado [4]. Además, se han estudiado los pulsos a través de una placa con su función dieléctrica periódica en el tiempo $\varepsilon(t)$ [15].

Este trabajo generaliza lo hecho en [1] y [2], es decir, presenta la relación de dispersión, los coeficientes de reflexión y transmisión, las resonancias paramétricas fuertes y las condiciones necesarias para su presencia cuando varían periódicamente en el tiempo la permitividad y/o permeabilidad, esto se hace para una placa dinámica.

En primera instancia se hace el estudio despreciando las pérdidas, posteriormente para obtener resultados más reales se prosigue a añadirlas en las simulaciones.

Por último se presenta la relación que existe entre la placa dinámica y la línea de transmisión para la obtención de las resonancias paramétricas fuertes.

1.1.Planteamiento del problema

Muchos de los avances tecnológicos vienen dados como resultado del mayor entendimiento de las propiedades de los materiales. Hoy en día contamos con una colección de materiales artificiales con una enorme gama de propiedades. Muy pocos de los materiales artificiales son metamateriales. La mayoría de los últimos se caracterizan por $\epsilon < 0, \mu < 0$.

Nuestro control sobre los materiales se ha extendido para incluir sus propiedades eléctricas y ópticas. Una enorme gama de desarrollos tecnológicos sería posible si pudiéramos diseñar materiales que respondan a las ondas de luz en un rango deseado de frecuencias para ya sea ser atenuados o propagados sin atenuarse sólo en ciertas direcciones, o bien ser confinados dentro de un volumen específico.

Desde hace muchos años se ha contemplado la existencia de medios dinámicos, además se han hecho propuestas para explicar la propagación de las ondas electromagnéticas en este tipo de medios. En los años 60's se propusieron algunos medios dinámicos haciendo uso de circuitos eléctricos los cuales variaban su capacitancia [11] o bien su inductancia [12]. En años recientes se han hecho propuestas de medios dinámicos utilizando circuitos eléctricos obteniendo resultados importantes, como amplificaciones [13,14].

En 2009 se propuso una teoría basada en la periodicidad temporal de la permitividad [1], posteriormente fue incluida la variación temporal de la permeabilidad [4]. En 2010 se continuó el estudio realizado en las ref. [1] y se encontraron resonancias paramétricas fuertes [2]. A partir de los resultados obtenidos en la teoría anteriormente citada se procedió a buscar una manera de llevarla a la práctica y esto se logró mediante la línea de transmisión dinámica [3].

Ahora se busca generalizar los resultados obtenidos en 2009, considerando que tanto la permitividad como la permeabilidad son variantes en el tiempo, además de la inclusión de pérdidas, para hacer este estudio lo más cercano a la realidad. Por otro lado se busca definir las condiciones necesarias para obtener resonancias paramétricas fuertes y su relación con la línea de transmisión.

1.2.Motivaciones

El presente trabajo es motivado por los resultados obtenidos en las refs. [1], [2], [3] y [4], en especial por la obtención de resonancias paramétricas fuertes que se encuentran en [2]. Debido a las conclusiones obtenidas en [4] al modular tanto la permitividad como la permeabilidad y observar que para la obtención de la relación de dispersión es indistinto el intercambio entre la modulación eléctrica y la modulación magnética.

A partir de lo anteriormente dicho surgen las preguntas: ¿Cuáles son las condiciones para la obtención de las resonancias paramétricas fuertes al ser tanto la permitividad como la permeabilidad periódicas en el tiempo? y ¿Existe algún cambio en los coeficientes de reflexión y transmisión al modular la permeabilidad en lugar de la permitividad?

La relación entre los efectos análogos estudiados entre una placa magneto-dieléctrica y la línea de transmisión pasabajo dinámica es otra de las motivaciones de esta tesis.

1.3.Objetivos

Los objetivos de la presente tesis son:

- Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión para una placa con variación temporal periódica de ambos la permeabilidad y la permitividad.
- Establecer las condiciones bajo las cuales se presentan las resonancias paramétricas fuertes.
- Añadir pérdidas a los estudios realizados en [1], [2] y [4] y a partir de ello obtener las relaciones de dispersión, coeficientes de reflexión y transmisión y resonancias paramétricas fuertes.
- Establecer una relación entre la placa dinámica y la línea de transmisión dinámica para la obtención de las resonancias paramétricas fuertes.

1.4.Descripción de tesis

La presente tesis está dividida en cinco capítulos. Después del capítulo introductorio, en el capítulo 2 se presenta una introducción teórica para poder entender mejor la tesis, entre otras cosas se explica lo que es un cristal fotónico y que es una relación de dispersión.

En el capítulo 3 se da una breve explicación de la teoría general de la transmisión de una onda electromagnética a través de un medio dinámico, es decir, con $\epsilon(t)$ y $\mu(t)$. Se continúa con la obtención de la relación de dispersión y posteriormente se hace el análisis para una placa

dinámica obteniendo los coeficientes de reflexión de transmisión y reflexión. Además, se observan las condiciones para tener la presencia de resonancias paramétricas fuertes. Finalmente se prosigue a agregarle pérdidas al medio para obtener resultados más reales.

En el capítulo 4 se muestra la relación que existe entre la placa dinámica y la línea de transmisión para la obtención de las resonancias paramétricas fuertes.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo realizado.

2. SISTEMAS PERIÓDICOS

Una estructura periódica consiste en un número de componentes idénticos colocados juntos de manera ordenada para formar una estructura. Un ejemplo de estructuras periódicas son las redes atómicas de los cristales.

Las estructuras periódicas pueden ser clasificadas de acuerdo a la forma en que son ordenadas espacialmente, pudiendo ser: 1-D, 2-D y 3-D.

Al aplicar los sistemas periódicos a redes eléctricas (en 1-D) se les da el nombre de “redes en cascada”, donde, de manera análoga a lo visto en física de estado sólido [6], a la sección más pequeña la cual se repite periódicamente para formar el sistema se le denomina celda unitaria. El tamaño de la celda unitaria es conocida como constante de red: a .

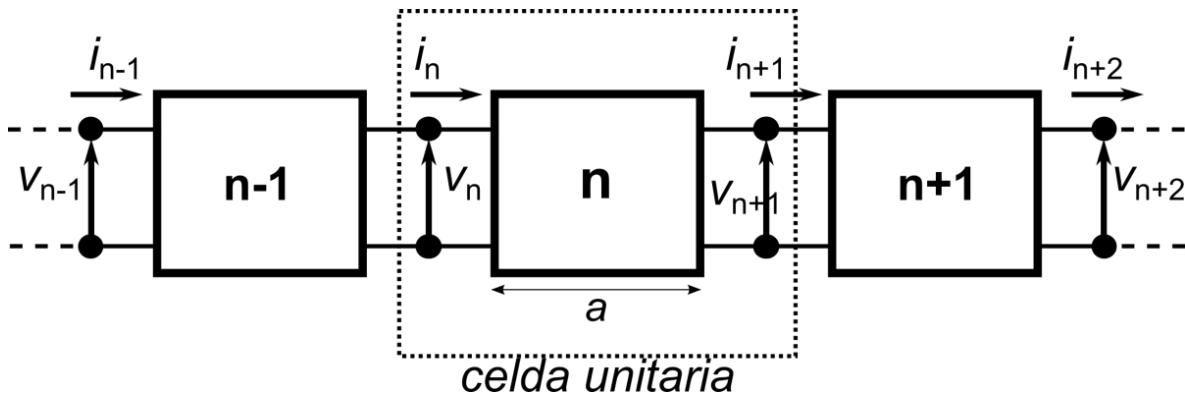


Fig. 2.1 Red 1-D en cascada.

2.1. Teorema de Bloch-Floquet

El teorema de Bloch-Floquet proporciona la estructura general o forma de las funciones de onda de un electrón para un potencial perfectamente periódico. Con este teorema demostró que las soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico deben ser de la siguiente forma:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.1)$$

donde \mathbf{r} es el vector que indica la posición dentro de la red periódica y \mathbf{k} es el vector de onda de Bloch proveniente del análisis de Fourier para sistemas periódicos en el espacio y sus unidades son de longitud inversa. La función $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ posee la periodicidad de la red cristalina con $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{T})$, donde \mathbf{T} es un vector de traslación. La ecuación (2.1) expresa que:

“las eigenfunciones de la ecuación de onda para un potencial periódico son el producto de una plana $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ por una función $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ con la periodicidad de la red cristalina”.

Este teorema se puede generalizar a diferentes tipos de sistemas periódicos, por ejemplo, eléctricos, ópticos, mecánicos, etc.

2.2.Relación de dispersión

La relación de dispersión, $\omega(\mathbf{k})$, se define como la relación entre la frecuencia angular ω y el vector de onda \mathbf{k} . Dicha relación describe los modos de propagación que se pueden encontrar en los sistemas periódicos. El cálculo de $\omega(\mathbf{k})$ se fundamenta en el teorema de Bloch-Floquet temporal; dicho teorema nos ayuda a describir el comportamiento de cualquier sistema periódico ya sea en espacio o tiempo. La representación gráfica de la relación de dispersión se conoce como diagrama de bandas.

Además, existe una región de valores \mathbf{k} donde se tiene toda la información de $\omega(\mathbf{k})$, que es la primera zona de Brillouin.

2.3.Cristales

Los cristales se caracterizan por una periodicidad perfecta en su estructura atómica; los átomos e iones se encuentran organizados de forma simétrica en redes elementales, que se repiten indefinidamente formando una estructura cristalina.

Como se dijo anteriormente un cristal ideal es construido por la repetición de grupos idénticos de átomos (figura 2.2c). Un grupo es llamado base (fig. 2.2b), mientras que el conjunto de puntos a los que está conectada la base se llama red (fig. 2.2a).

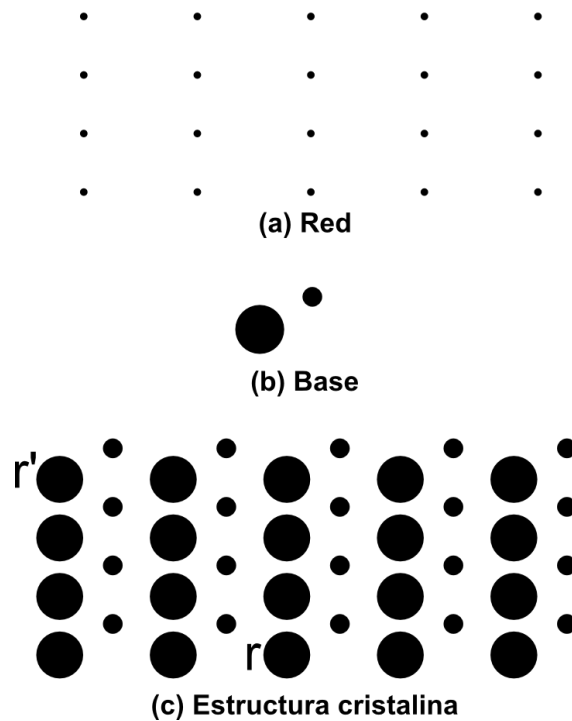


Fig. 2.2 Formación de una estructura cristalina[6]

Como se puede ver en la figura 2.2, la estructura cristalina es formada por la adición de la base (b) a cada punto de la red (a).

La red en tres dimensiones puede ser definida por tres vectores de traslación \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 , de tal modo que el arreglo de átomos en el cristal se vea igual cuando se ve del punto \mathbf{r} que cuando se ve de cualquier punto \mathbf{r}' (ver fig. 2.2c), el cual es trasladado por un múltiplo entero de los vectores de traslación \mathbf{a} :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3 \quad (2.2)$$

aquí, u_1 , u_2 , u_3 son enteros arbitrarios. El conjunto de puntos \mathbf{r}' definido por la ec. (2.2) para todo u_1 , u_2 , u_3 define la red.

Con lo anterior se puede comprender el concepto de celda unitaria, la cual es una región del cristal definida por tres vectores, que al trasladarse por medio de cualquier múltiplo entero de dichos vectores reproduce una región similar del cristal.

2.4. Cristales Fotónicos

Los cristales fotónicos son estructuras periódicas formadas por medios con diferentes constantes dieléctricas, esto afecta la propagación de las ondas electromagnéticas. Las ondas de luz que tiene permitido propagarse se conocen como modos y el conjunto de estos forman bandas. Las bandas de frecuencias no permitidas se llaman bandas prohibidas, $\Delta\omega$.

La propagación de la luz en un cristal fotónico es similar a la propagación de electrones y huecos en un semiconductor. Un electrón pasando a través de un semiconductor experimenta un potencial periódico debido a la red atómica ordenada. La interacción entre el electrón y el potencial periódico da como resultado la formación de bandas prohibidas de energía. No es posible para el electrón pasar a través del cristal si su energía cae en el rango de la banda prohibida. Sin embargo, los defectos en la periodicidad de la red pueden destruir localmente la banda prohibida y dar lugar a interesantes propiedades electrónicas.

Si el electrón se sustituye por un fotón y la red atómica por un material con una constante dieléctrica periódica terminamos con básicamente los mismos efectos. Sin embargo, mientras que los átomos se ordenan de manera natural para formar una estructura periódica, los cristales fotónicos necesitan ser fabricados artificialmente. Una excepción es el ópalo (una piedra preciosa), que se forman por una organización espontánea de las esferas de sílice coloidal en una red cristalina. A fin de que una partícula interactúe con su entorno periódico, su longitud de onda debe ser comparable a la periodicidad de la red. Por lo tanto, en los cristales fotónicos la constante de red debe estar en el rango de 100nm-1 μ m. Esto se puede lograr con técnicas de nanofabricación y autoensamblaje convencionales.

Para el cálculo de los modos ópticos en un cristal fotónico uno necesita resolver las ecuaciones de Maxwell en un medio dieléctrico periódico. Aunque esta tarea es mucho más simple que el cálculo de la propagación de electrones en semiconductores, donde las interacciones de muchas partículas se tienen que tener en cuenta, no es posible resolver analíticamente las ecuaciones de Maxwell para redes periódicas de dos o tres dimensiones. Sin embargo, muchos fenómenos interesantes se pueden deducir considerando el caso más simple que es el de una dimensión, es decir, el medio periódicamente en capas.

En la figura 2.3 se muestran ejemplos de cristales fotónicos de 1-D, 2-D y 3-D. Los diferentes colores representan materiales con diferentes constantes dieléctricas. La característica que define a un cristal fotónico es la periodicidad de un material dieléctrico a lo largo de uno o más ejes.

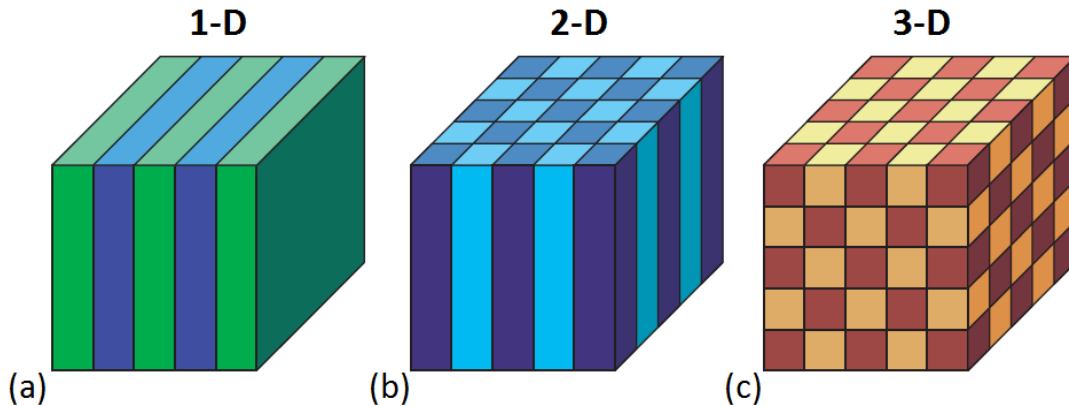


Fig. 2.3 Ejemplos de cristales fotónicos: (a) 1-D, (b) 2-D y (c) 3-D [5].

Los cristales fotónicos se pueden homogeneizar. Un medio homogéneo es aquel que tiene las mismas propiedades en cualquier punto de su espacio permitiendo describir la propagación de ondas electromagnéticas con un número pequeño de parámetros (en nuestro caso la permitividad ϵ y permeabilidad μ). Estos parámetros que caracterizan la homogeneización, o descripción de medio efectivo, sólo es posible obtenerlos cuando la longitud de onda λ que se propaga es mucho mayor que la constante de red a , es decir, $\lambda \gg a$. En resumen, la longitud de onda es tan grande que la onda electromagnética no es sensitiva a detalles pequeños dentro de la celda unitaria.

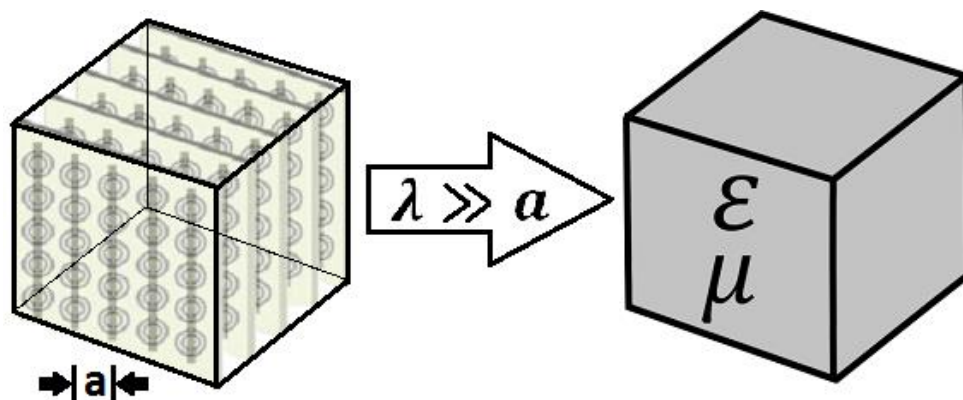


Fig. 2.4 La descripción de medio efectivo permite ver a un medio artificial periódico como un cristal fotónico

El cristal fotónico se propone como una solución para el problema de control óptico y la manipulación de luz. Se pueden diseñar y construir cristales fotónicos con bandas prohibidas específicas, evitando que la luz se propague en ciertas direcciones y/o frecuencias.

2.5.Línea de transmisión

Las líneas de transmisión confinan la energía electromagnética a una región del espacio limitada por el medio físico de la línea, a diferencia de las ondas que se propagan en el aire. La línea está formada por conductores eléctricos con una disposición geométrica específica que condicionará las características de las ondas electromagnéticas en ella.

En los sistemas de comunicaciones, las líneas de transmisión encuentran aplicación no solo en el transporte de señales, sino también como circuito resonante, filtros y acopladores de impedancia.

Para poder analizar las líneas de transmisión se requiere solucionar un conjunto de ecuaciones del campo electromagnético, que dependen de las condiciones de frontera impuestas por la geometría de las líneas. Para obtener los resultados deseados de una manera más sencilla se realiza un análisis que nos dará una muy buena aproximación.

En esta sección se establecen las bases de las líneas de transmisión, y a través de modelos se extraen las principales características de las líneas de transmisión.

Una línea de transmisión es un sistema de conductores metálicos para transferir energía eléctrica desde un punto a otro. En forma más específica, una línea de transmisión consiste en dos o más conductores separados por un aislador.

Una línea de transmisión es un sistema de conductores, semiconductores, o la combinación de ambos, que puede emplearse para transmitir información, en la forma de energía eléctrica o electromagnética, entre dos puntos.

En las líneas de transmisión comúnmente se transmite la información electromagnética de tal manera que el campo eléctrico y el campo magnético de la señal sean transversales o perpendiculares a la dirección de propagación (modo transversal electromagnético, TEM).

La distribución de las líneas de campo eléctrico y magnético en un corte transversal de estas estructuras es diferente en cada caso, pero siempre manteniendo a E y H perpendiculares a la dirección de propagación. También es posible que estas líneas transmitan la información con otras configuraciones de líneas de campo o modos superiores, pero generalmente son utilizadas debajo de la frecuencia de corte del primer modo superior, de tal modo que solo exista el modo TEM. La figura 2.4 muestra la distribución de líneas de campo en el corte transversal de una

microcinta; el modo de propagación es cuasi-TEM pues no es posible satisfacer las condiciones de frontera en la interfase entre la superficie superior del sustrato dieléctrico y el medio que le rodea (aire). A pesar de lo anterior, es posible obtener los parámetros de operación de la línea con una buena aproximación al considerar el modo TEM.

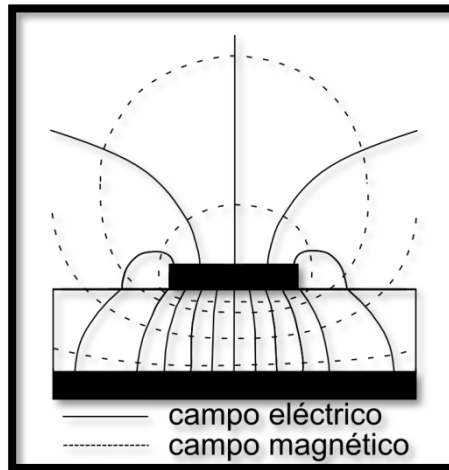


Fig. 2.5 Campos eléctrico y magnético en una microcinta

Una vez obtenida la distribución transversal de los campos eléctrico y magnético, se prosigue a calcular los parámetros circuitales de la línea por unidad de longitud (inductancia L , capacitancia C , resistencia R y conductancia G), y entonces es posible obtener soluciones para la operación completa de la línea aplicando la teoría de circuitos (este método es más sencillo y conduce a los mismos resultados). En dicho método se pueden definir y utilizar las variables de voltaje V , corriente I y potencia P , que en general son más familiares que las variables de campo eléctrico, campo magnético y densidad de potencia.

Para emplear la teoría de circuitos es preciso representar a la línea como una red de parámetros distribuidos. Tales parámetros o constantes son su inductancia L , capacitancia C , resistencia R y conductancia G , especificadas todas ellas por unidad de longitud.

Una línea de transmisión básica se puede ver como un par de electrodos que se extienden paralelos por una longitud grande (en relación con la longitud de onda) en una dada dirección. El par de electrodos se hallan cargados con distribuciones de carga (variables a lo largo de la línea) iguales y opuestas, formando un capacitor distribuido. Al mismo tiempo circulan corrientes opuestas (variables a lo largo de la línea) de igual magnitud, generando un campo magnético que puede expresarse a través de una inductancia distribuida. La potencia fluye a lo largo de la línea.

Para usar un modelo cuasiestático se representa a la línea como una cascada de redes de dos puertos, cada uno de ellos representa un tramo de línea de pequeña longitud frente a la mínima longitud de onda de la señal, por lo que cada tramo puede ser modelado como un circuito usando la aproximación cuasiestática. Este modelo se conoce como modelo de constantes distribuidas.

Se puede ver a la línea de transmisión como una sucesión o cascada de redes de dos puertos de longitud infinitesimal y para cada uno de ellos usar un modelo circuital, cuyos parámetros descriptivos son las tensiones y corrientes a la entrada y salida, ya que las dimensiones de las redes de dos puertos satisfacen la condición cuasiestática. Tomando la dirección del eje z a lo largo de la línea, cada tramo de longitud dz puede asociarse a una red de dos puertos.

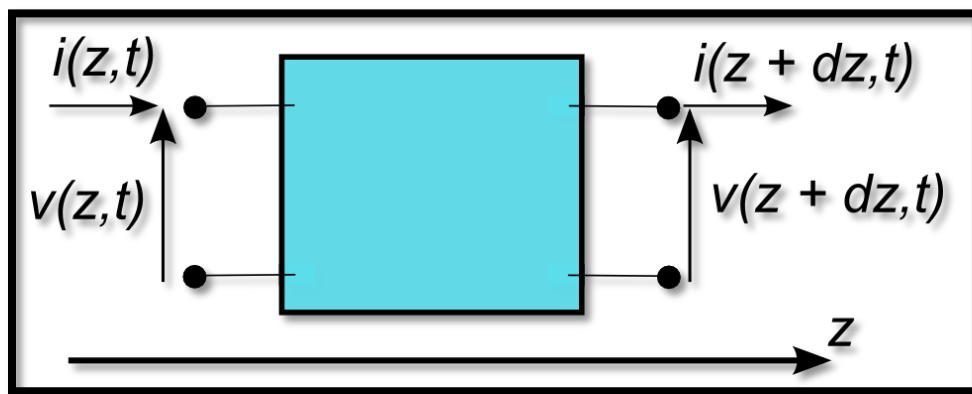


Fig. 2.6 Red de dos puertos de longitud infinitesimal

2.5.1. Modelo con pérdidas

Todos los sistemas reales tienen pérdidas asociadas al efecto Joule en los conductores y a las pérdidas dieléctricas.

Por lo anterior al modelo ideal se le agregan las pérdidas mediante una resistencia en serie, que modela las pérdidas por efecto Joule debidas a la circulación de corriente en los conductores de la línea y una conductancia en paralelo, que modela las pérdidas dieléctricas mediante una conductividad equivalente del material.

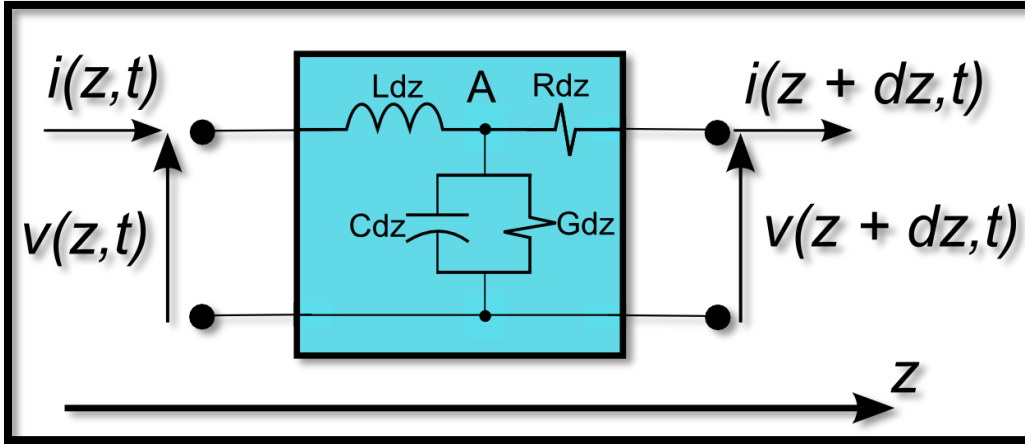


Fig. 2.7 Modelo con pérdidas de una línea de transmisión

Para obtener las ecuaciones del telegrafista para este modelo que incluye pérdidas, aplicamos una vez más la primera ley de Kirchhoff al nodo A:

$$i(z + dz) - i(z) = -Gdzv(z) - Cdz \frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} = -Gv(z) - C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.3, 2.4)$$

Recorriendo ahora la malla que forma el circuito, por la segunda ley de Kirchhoff:

$$v(z + dz) - v(z) = -Rdzi(z) - Ldz \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -Ri(z) - L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.5, 2.6)$$

Las ecuaciones diferenciales acopladas son las ecuaciones del telegrafista para el modelo con pérdidas. Para resolverlas nuevamente se desacoplan las ecuaciones a través de las derivadas cruzadas para obtener:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = RGi + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (2.7, 2.8)$$

Ahora utilizando una oscilación armónica en alguna de estas ecuaciones tenemos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + j\omega(RC + LG)v - \omega LCv \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)v = ZYv = \gamma^2 v \quad (2.10)$$

donde Z es la impedancia serie por unidad de longitud, Y la admitancia paralela por unidad de longitud, y γ la constante de propagación.

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta \\ &= \text{constante de atenuación} + j(\text{constante de propagación}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Las soluciones para V e I son:

$$v(z) = v_0^+ e^{-\gamma z} + v_0^- e^{+\gamma z} \quad (2.12)$$

$$i(z) = i_0^+ e^{-\gamma z} + i_0^- e^{+\gamma z} \quad (2.13)$$

El término exponencial contiene toda la variación con la posición.

2.5.2. Características de las líneas de transmisión

Las características de una línea de transmisión se determinan por sus propiedades eléctricas, como la conductancia del metal y la constante dieléctrica del aislante, y sus propiedades físicas (dimensiones y espaciamentos). Estas propiedades, a su vez determinan las constantes dieléctricas primarias (L, C, R y G).

Como se mencionó anteriormente la resistencia e inductancia ocurren a lo largo de la línea mientras que la capacitancia y conductancia se da entre los dos conductores.

Las características de una línea de transmisión se llaman constantes secundarias y se determinan con las cuatro constantes primarias. Las constantes secundarias son impedancia característica y constante de propagación.

2.5.3. Impedancia característica

Para una máxima transferencia de potencia, desde la fuente a la carga, no debe haber energía reflejada. Para ello una línea de transmisión debe terminarse en una carga puramente resistiva igual a la impedancia característica de la línea.

La impedancia característica (Z_0) de una línea de transmisión es una cantidad compleja, que se expresa en Ohms, que idealmente es independiente de la longitud de la línea.

La impedancia característica es la relación entre la tensión total y la corriente en un punto cualquiera de la línea. En otras palabras es la impedancia que ve la onda de tensión o de corriente mientras viaja a lo largo de la línea de transmisión.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \quad (2.14)$$

Si la frecuencia es suficientemente alta como para que se cumpla que $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.15)$$

2.5.4. Constante de propagación

La constante de propagación (2.11) definida como:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

puede desarrollarse elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, e igualando las partes reales e imaginarias para obtener por separado las constantes de atenuación y de fase:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (2.16a)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (2.16b)$$

Las líneas con bajas pérdidas, es decir, que cumplen con $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$ tienen que (2.16) y (2.17):

$$\alpha \cong \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \quad (2.17a)$$

$$\beta \cong \omega \sqrt{LC} \quad (2.17b)$$

De las ecs. (2.16) (caso con pérdidas) se observa que α , la constante de atenuación, es función de la frecuencia, por lo que la atenuación no es uniforme en toda la banda y la línea introduce distorsión que en algunos casos puede alterar mucho la señal recibida.

3. CRISTAL FOTÓNICO TEMPORAL

En el cristal fotónico temporal su variación periódica, como su nombre lo dice, es temporal a diferencia del cristal fotónico “ordinario” donde la periodicidad es espacial.

Para el presente trabajo se ha considerado que la permitividad ε y/o permeabilidad μ presentan variación temporal periódica: $\varepsilon(t)$ y $\mu(t)$.

La permitividad y permeabilidad magnética del medio son periódicas y pueden ser reescritas como: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(t)$ y $\mu(t) = \mu_0 \mu_r(t)$, donde ε_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad del vacío, $\varepsilon_r(t)$ y $\mu_r(t)$ son la permitividad y permeabilidad relativa.

Al ser funciones periódicas temporales, estas pueden ser expandidas como series de Fourier:

$$\varepsilon_r(t) = \sum_m \varepsilon_m e^{im\Omega t} \quad (3.1)$$

$$\mu_r(t) = \sum_l \mu_l e^{il\Omega t} \quad (3.2)$$

Es importante señalar que $\Omega/2\pi$ es la frecuencia de modulación, es decir, la frecuencia con la cual se varía tanto ε como μ . Esta modulación da lugar a bandas prohibidas del vector de onda Δk en la relación de dispersión.

3.1. Ecuación de onda

Como consecuencia de la variación temporal de la permitividad y permeabilidad las relaciones constitutivas quedan de la siguiente manera:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (3.4)$$

donde \mathbf{D} y \mathbf{B} son el vector de desplazamiento y la inducción magnética respectivamente, mientras que \mathbf{E} y \mathbf{H} son los campos eléctrico y magnético.

Se tiene que las ecuaciones macroscópicas de Maxwell (en unidades mks) en su forma diferencial son:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial/\partial t [\mu(t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.8)$$

A partir de las ecuaciones de Maxwell, ecs. (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8), se obtiene la ecuación de onda tanto para el campo eléctrico como para el magnético:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mu_r(t) \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_r(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \right\} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varepsilon_r(t) \frac{\partial}{\partial t} [\mu_r(t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \right\} = 0 \quad (3.10)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y está definida como $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

3.2. Ecuación de eigenvalores

En esta sección se comprueba lo realizado por Becerra-Fuentes en [4], además se realizan simulaciones numéricas pero, a comparación con la ref. [4], tomando en cuenta la periodicidad de $\mu_r(t)$, además de $\varepsilon_r(t)$. Por otro lado en la subsección 3.2.2 se presentan simulaciones numéricas pero esta vez considerando absorción.

La ecuación de onda, ec. (3.9) tiene soluciones de la forma que corresponde al teorema de Bloch-Floquet temporal:

$$E(x, t) = E(t) e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.11)$$

siendo $E(t)$ una función periódica con el periodo $2\pi/\Omega$.

Tal como la permitividad y la permeabilidad fueron expandidas a series de Fourier se hace lo propio con el campo eléctrico $E(t)$:

$$E(t) = \sum_n e_n(\omega) e^{in\Omega t} \quad (3.12)$$

Realizando las respectivas sustituciones se obtiene un problema de eigenvalores:

$$\sum_m \sum_n [\mu_{l-m} \varepsilon_{m-n} (\omega - m\Omega)(\omega - l\Omega) - k^2 c^2 \delta_{l,n} \delta_{m,0}] e_n(\omega) = 0 \quad (3.13)$$

Al solucionar la ec. (3.13) obtenemos un número infinito de vectores de onda k para cada frecuencia ω dada: $k_1(\omega)$, $k_2(\omega)$, $k_3(\omega)$, ... Por lo anterior se procede a etiquetarlos con el subíndice p : $k_p(\omega)$. Este $k_p(\omega)$ representa al conjunto de eigenvalores que forman la banda p

cuyas eigenfunciones correspondientes serán $e_{pn}(\omega)$. Por lo que la ec. (3.13) se reescribe obteniendo[4]:

$$\sum_m \sum_n [\mu_{l-m} \varepsilon_{m-n} (\omega - m\Omega)(\omega - l\Omega) - k_p^2 c^2 \delta_{l,n} \delta_{m,0}] e_{pn}(\omega) = 0 \quad (3.14)$$

Se prosigue a normalizar tanto la frecuencia angular como el vector de onda, es decir:

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{\Omega} \quad (3.15)$$

$$\hat{k} = \frac{k_p c}{\Omega \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (3.16)$$

Por lo anterior la ec. (3.14) queda de la siguiente manera:

$$\sum_m \sum_n \left[\frac{\mu_{l-m}}{\mu_r} \frac{\varepsilon_{m-n}}{\varepsilon_r} (\hat{\omega} - m)(\hat{\omega} - l) - \hat{k}^2 \delta_{l,n} \delta_{m,0} \right] e_{pn}(\omega) = 0 \quad (3.17)$$

3.2.1. Relación de dispersión sin absorción

En esta subsección se obtienen las relaciones de dispersión para una placa dinámica sin absorción, es decir, no se consideran las pérdidas del medio.

Como se puede apreciar en [4]:

- Si $M_\varepsilon = M_\mu$ y $\theta = 0$ no existen bandas prohibidas de vector de onda $\Delta \hat{k}$, es decir, modulaciones eléctrica y magnética iguales dan lugar a interferencia constructiva para todos los valores de k si no existe diferencia de fase entre los parámetros electromagnéticos.

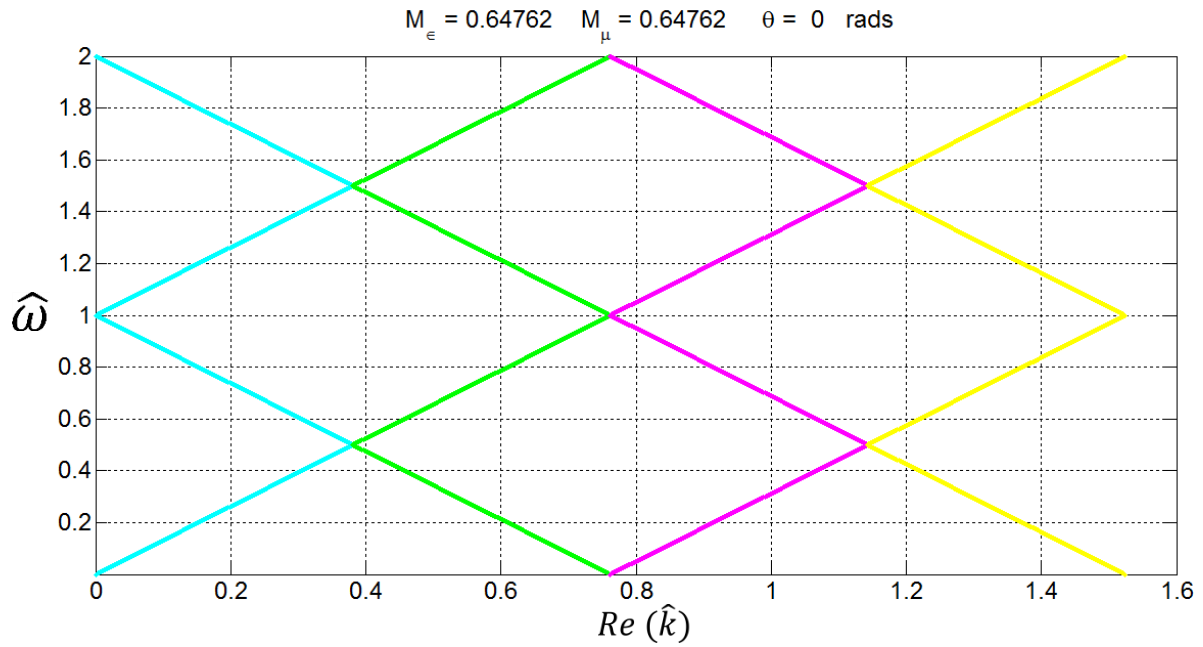


Fig. 3.1 Relación de dispersión con $M_\epsilon = M_\mu$ y $\theta = 0$ (caso sin absorción)

- Si $M_\epsilon = M_\mu$ pero $\theta \neq 0$ surgen bandas prohibidas $\Delta\hat{k}$, alcanzando estas su valor máximo en $\theta = \pi$. Por otro lado, a una diferencia de fase dada, $\Delta\hat{k}$ aumenta a medida que M_ϵ y M_μ lo hacen.

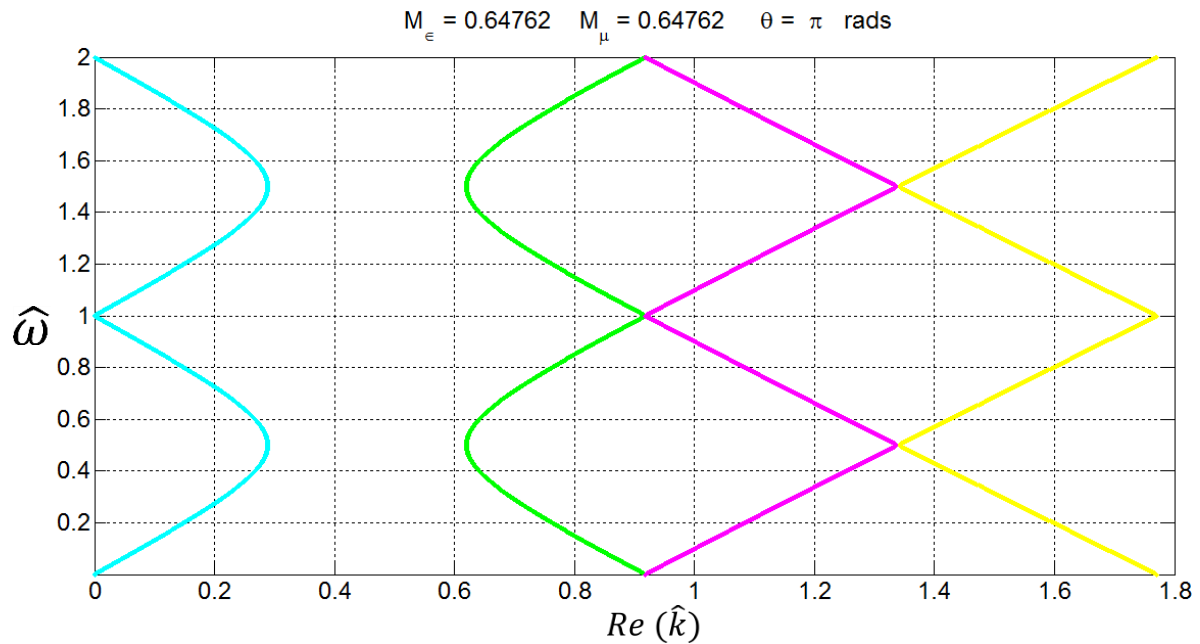


Fig. 3.2 Relación de dispersión con $M_\epsilon = M_\mu$ y $\theta \neq 0$ (caso sin absorción)

- Si $M_\epsilon \neq M_\mu$ y $\theta = 0$ aparecen bandas prohibidas $\Delta\hat{k}$, las cuales se incrementan a medida que aumenta la diferencia entre M_ϵ y M_μ .

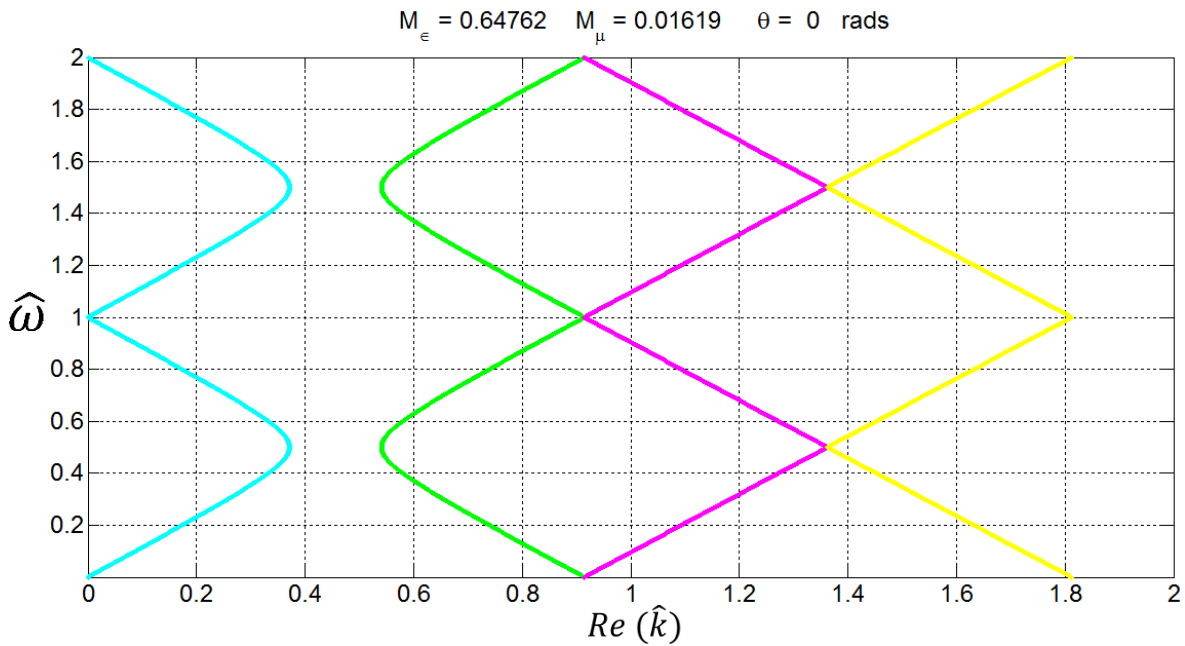


Fig. 3.3 Relación de dispersión con $M_\epsilon \neq M_\mu$ y $\theta = 0$ (caso sin absorción)

- Si $M_\epsilon \neq M_\mu$ y $\theta \neq 0$ aparecen bandas prohibidas $\Delta\hat{k}$, estas alcanzan su máximo valor cuando existe una diferencia de fase π y se alcanza la mayor diferencia entre M_ϵ y M_μ .

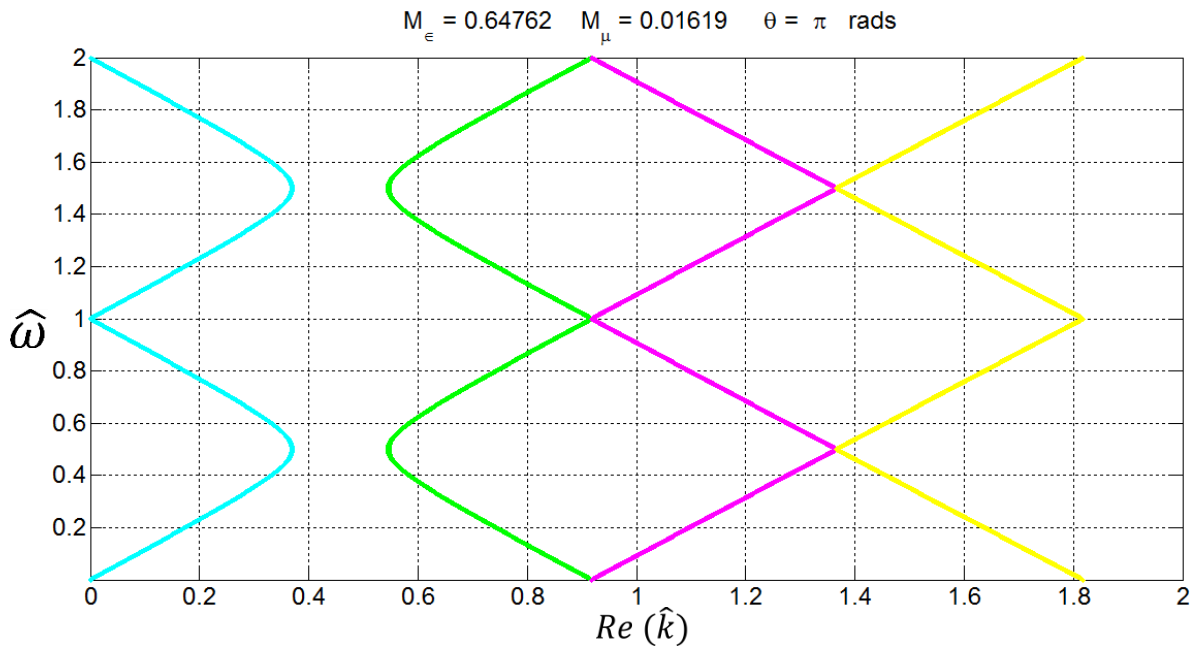


Fig. 3.4 Relación de dispersión con $M_\epsilon \neq M_\mu$ y $\theta \neq 0$ (caso sin absorción)

La relación de dispersión no es sensible al intercambio entre M_ϵ y M_μ . Para entenderse mejor lo anterior se procede a un ejemplo: la estructura de bandas cuando $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ es exactamente la misma que cuando $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$, esto se puede observar en la figura 3.5.

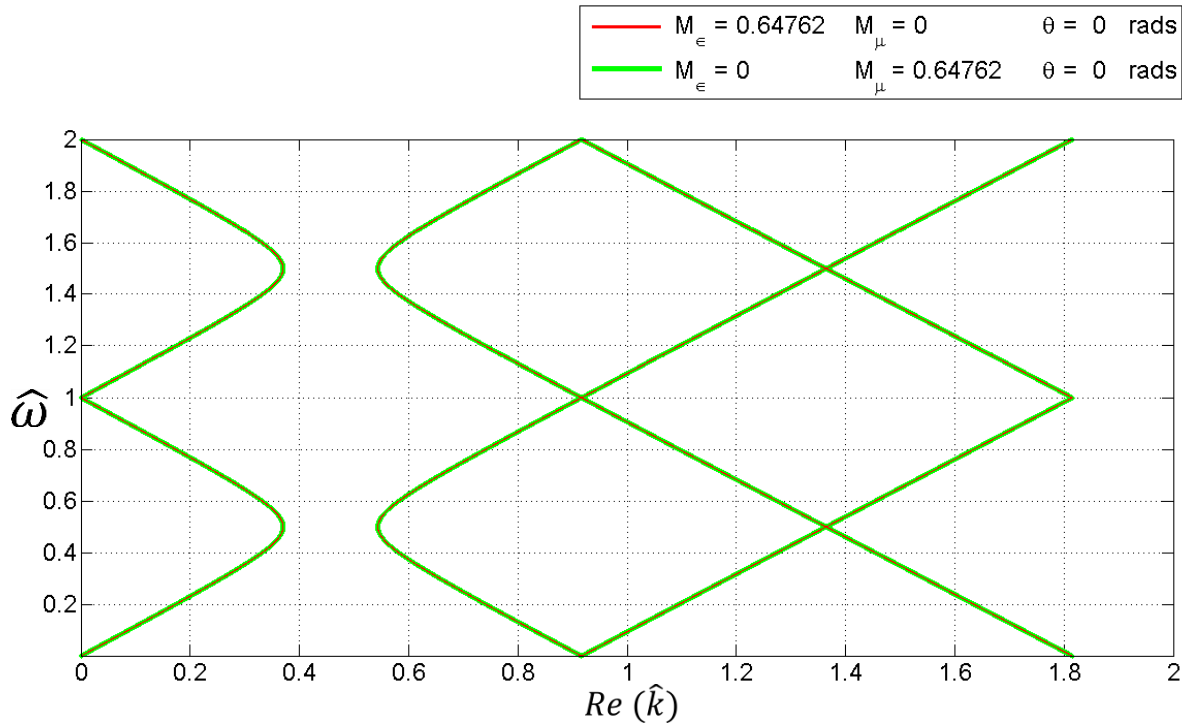


Fig. 3.5 La Relación de dispersión no es sensible al intercambio entre M_ϵ y M_μ

3.2.2. Relación de dispersión con absorción

En esta subsección, a diferencia de la anterior, se consideran las pérdidas para acercarse lo más posible a la realidad donde inevitablemente estas están presentes.

Al considerar las pérdidas en el medio, el vector de onda pasa de ser real a ser complejo pues tendrá tanto una parte real como una parte imaginaria, esta última está relacionada a las pérdidas. Por lo anterior, se obtendrán dos diagramas de bandas, uno donde se grafique la parte real del vector de onda y otro donde se grafique la parte imaginaria del mismo.

Tanto la permitividad como la permeabilidad cuentan con una parte real y una parte imaginaria, es decir:

$$\epsilon_r = \epsilon'_r + i\epsilon''_r \quad (3.18)$$

$$\mu_r = \mu_r' + i\mu_r'' \quad (3.19)$$

La parte real de la relación de dispersión se comporta de manera semejante que en la sección 3.2.1, la diferencia que se puede apreciar es que a medida que las pérdidas aumentan las bandas se desplazan hacia valores más grandes del vector de onda \hat{k} , y las bandas prohibidas $\Delta\hat{k}$ se vuelven más estrechas. Esto se puede observar a detalle en la figura 3.6 donde se eligió $M_\epsilon = 0.01619$, $M_\mu = 0.97143$ y $\theta = 0$ con diferentes valores de las partes imaginarias de la permitividad (ϵ_r'') y permeabilidad (μ_r''). Se nota que, con el aumento de ϵ_r'' y/o μ_r'' , los \hat{k} de todas las bandas aumentan, pero las bandas prohibidas $\Delta\hat{k}$ disminuyen.

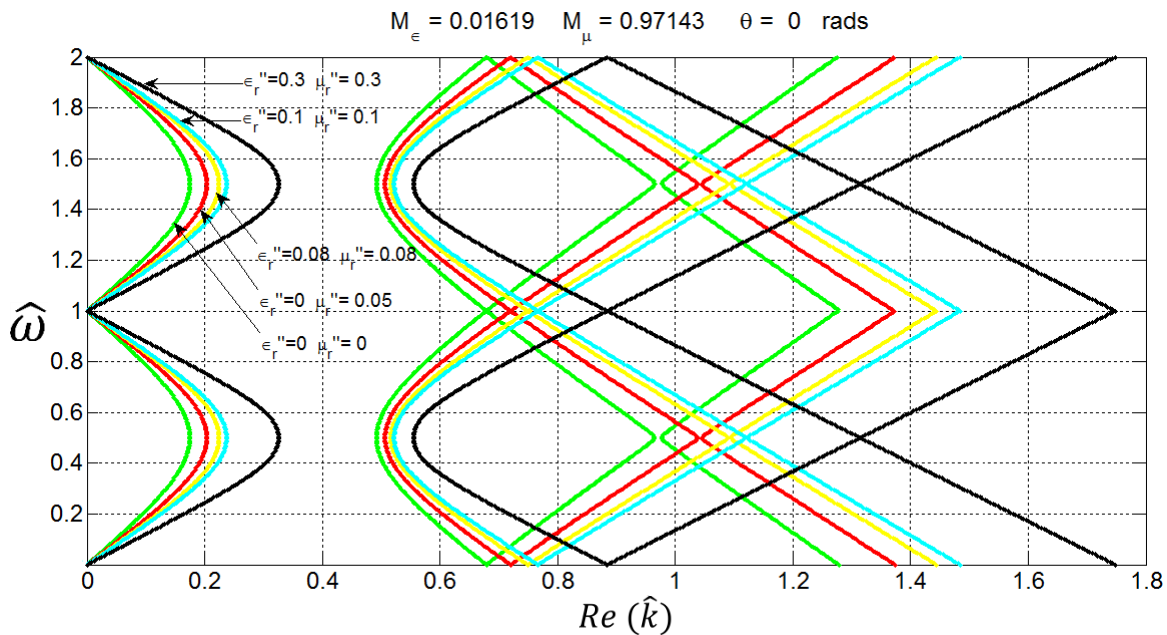


Fig. 3.6 Parte real de la relación de dispersión con $M_\epsilon = 0.01619$, $M_\mu = 0.97143$ y $\theta = 0$ y diferentes valores de ϵ_r'' y μ_r'' (caso con absorción)

En la figura anterior se puede apreciar cómo mientras las pérdidas aumentan la segunda banda prohibida llega al punto de volverse imperceptible. Es importante hacer énfasis en el hecho de que los cambios en ω vs $Re(\hat{k})$ son pequeños solamente mientras $\epsilon_r'' \ll \epsilon_r'$, $\mu_r'' \ll \mu_r'$.

En las figuras 3.7 y 3.8 se muestra una comparación entre la parte real e imaginaria de la relación de dispersión.

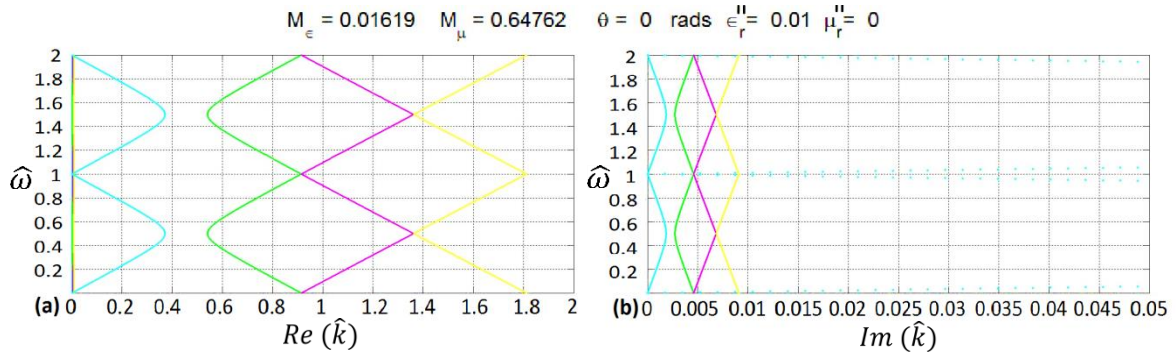


Fig. 3.7 Relación de dispersión: (a) parte real y (b) parte imaginaria. $M_\epsilon = 0.01619$, $M_\mu = 0.64762$, $\epsilon_r'' = 0.01$, $\mu_r'' = 0$ y $\theta = 0$ (caso con absorción)

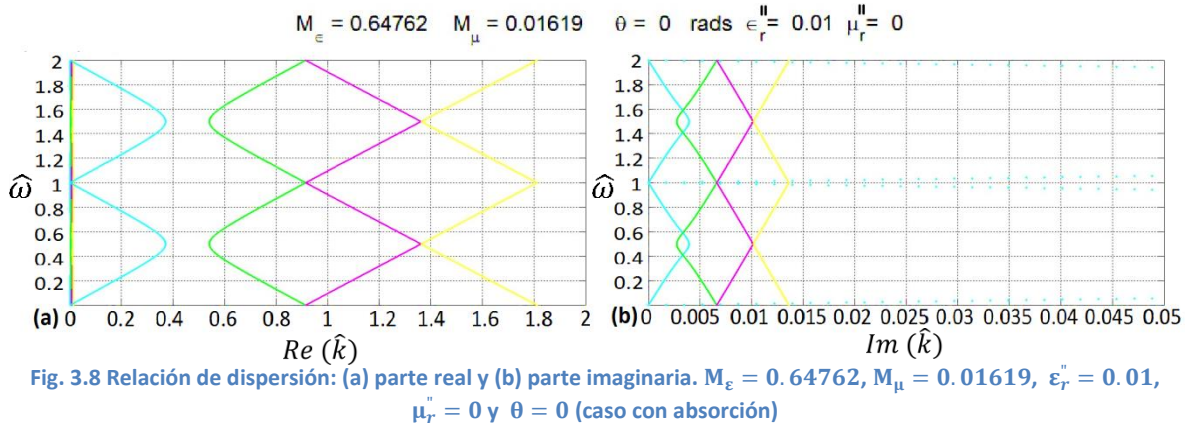


Fig. 3.8 Relación de dispersión: (a) parte real y (b) parte imaginaria. $M_\epsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0.01619$, $\epsilon_r'' = 0.01$, $\mu_r'' = 0$ y $\theta = 0$ (caso con absorción)

Se observa que ambas son de diferentes órdenes de magnitud, relacionándose de la siguiente manera:

$$\frac{Im(\hat{k})}{Re(\hat{k})} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} + \frac{\mu_r''}{\mu_r'} \right) \quad Re(\hat{k}) \sim \pm \hat{\omega} \quad (3.20)$$

Una manera fácil de comprobar dicha relación es mediante los siguientes ejemplos:

- Al tomar el caso presentado en la figura 3.7 con $\hat{\omega} = 1.8$ se tiene que $Im(\hat{k}) \sim 0.009$ lo cual como se puede observar en el inciso b de la misma figura se cumple.
- En la figura 3.8 también se cumple la relación de la ec. (3.20) pues cuando $\hat{\omega} = 0.6$ se tiene que $Im(\hat{k}) \sim 0.003$.

En la presencia de atenuación $\omega(k)$ (la parte imaginaria) ya es sensitivo al intercambio de M_ϵ y M_μ .

3.3.Placa dinámica

Se consideró una placa de grosor D , cuya permitividad ϵ y permeabilidad μ son funciones periódicas del tiempo. El análisis supone la incidencia de una onda plana de $x < -\infty$ con

frecuencia angular ω_0 . Cabe señalar que el campo eléctrico [magnético] solo tiene componente en z [y].

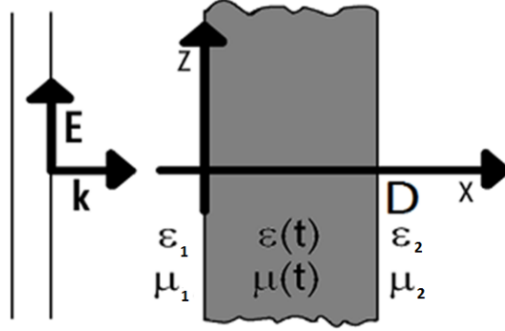


Fig. 3.9 Placa con permitividad ϵ y permeabilidad μ periódicas en el tiempo

Se consideraron modulaciones sinusoidales tanto de la permitividad como de la permeabilidad de la placa:

$$\epsilon_r(t) = \bar{\epsilon}_r [1 + M_\epsilon \sin(\Omega t)] \quad (3.21)$$

$$\mu_r(t) = \bar{\mu}_r [1 + M_\mu \sin(\Omega t + \theta)] \quad (3.22)$$

donde θ es la diferencia de fase entre las modulaciones de $\mu_r(t)$ y $\epsilon_r(t)$. Además, $M_{\epsilon[\mu]}$ representan las modulaciones que se le están aplicando a la permitividad [permeabilidad].

Para la elaboración de las simulaciones numéricas así como para la presentación de los resultados se han utilizado las normalizaciones presentadas en las ecs. (3.15) y (3.16).

3.3.1. Coeficientes de reflexión y transmisión

Los campos electromagnéticos para la onda incidente son:

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 e^{i[k_0(\omega_0)x - \omega_0 t]} \mathbf{n}_z \quad (3.23)$$

$$\mathbf{H}_{inc} = H_0 e^{i[k_0(\omega_0)x - \omega_0 t]} \mathbf{n}_y \quad (3.24)$$

Aquí, $k_0(\omega_0) = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \omega_0 / c$, E_{inc} y H_{inc} son los campos eléctrico y magnético respectivamente..

Debido a la periodicidad de $\epsilon(t)$ y $\mu(t)$ se resuelve la ecuación de onda mediante el teorema de Bloch-Floquet para el campo eléctrico en la placa; pero generalizando para tomar en cuenta que las ondas se propagan en ambas direcciones del eje x :

$$\mathbf{E}_{sl}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (A_p e^{ik_p(\omega)x} + B_p e^{-ik_p(\omega)x}) e_{pn}(\omega) e^{-i(\omega-n\Omega)t} \mathbf{n}_z \quad (3.25)$$

$$\mathbf{H}_{sl}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (C_{pn} e^{ik_p(\omega)x} + D_{pn} e^{-ik_p(\omega)x}) e_{pn}(\omega) e^{-i(\omega-n\Omega)t} \mathbf{n}_z \quad (3.26)$$

Aquí $e_{pn}(\omega)$ son los eigenvectores y A_p, C_{pn}, B_p, D_{pn} son las amplitudes de la onda que se propagan en la placa en la dirección positiva [negativa] x .

Las ondas reflejadas y transmitidas contienen armónicos de la frecuencia de modulación Ω , es decir, $\omega - n\Omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Los campos reflejados son:

$$\mathbf{E}_r = \sum_n E_n^r e^{-i[k_n^r(\omega_0)x + (\omega_0 - n\Omega)t]} \mathbf{n}_z \quad (3.27)$$

$$\mathbf{H}_r = -\sum_n H_n^r e^{-i[k_n^r(\omega_0)x + (\omega_0 - n\Omega)t]} \mathbf{n}_y \quad (3.28)$$

mientras que los transmitidos son:

$$\mathbf{E}_t = \sum_n E_n^t e^{i[k_n^t(\omega_0)(x-D) - (\omega_0 - n\Omega)t]} \mathbf{n}_z \quad (3.29)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_n H_n^t e^{i[k_n^t(\omega_0)(x-D) - (\omega_0 - n\Omega)t]} \mathbf{n}_y \quad (3.30)$$

donde $k_n^{r,t}(\omega_0) = \sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}(\omega_0 - n\Omega)/c$ es el vector de onda del armónico reflejado [transmitido] n . A partir de la ley de Faraday, se obtiene que:

$$E_0 = H_0 \sqrt{\frac{\mu_0\mu_1}{\epsilon_0\epsilon_1}} \quad (3.31)$$

$$E_n^{r,t} = H_n^{r,t} \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{1,2}}{\epsilon_0\epsilon_{1,2}}} \quad (3.32)$$

$$A_p e_{pn}(\omega_0) = \sum_m \frac{\mu_0\mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} C_{pm} e_{pm}(\omega_0) \quad (3.33)$$

$$B_p e_{pn}(\omega_0) = -\sum_m \frac{\mu_0\mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} D_{pm} e_{pm}(\omega_0) \quad (3.34)$$

Para obtener las amplitudes de E_n^t, E_n^r, A_p y B_p se recurre al uso de las condiciones de frontera en las interfaces de la placa ($x = 0$ y $x = D$). Estas condiciones son:

$$E_{inc}(0, t) + E_r(0, t) = E_{sl}(0, t) \quad (3.35)$$

$$H_{inc}(0, t) + H_r(0, t) = H_{sl}(0, t) \quad (3.36)$$

$$E_{sl}(D, t) = E_t(D, t) \quad (3.37)$$

$$H_{sl}(D, t) = H_t(D, t) \quad (3.38)$$

Al usar las ecuaciones (3.31) a (3.34) para expresar a los campos eléctricos en términos de los campos magnéticos junto con las condiciones de frontera se obtiene un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas cuyo índice “libre” es el n , este puede tomar todos los valores enteros, es decir,

$$H_0 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_1}{\epsilon_0 \epsilon_1}} \delta_{n0} + H_n^r \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_1}{\epsilon_0 \epsilon_1}} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} (C_{pm} - D_{pm}) e_{pm}(\omega_0) \quad (3.39)$$

$$H_0 \delta_{n0} - H_n^r = \sum_{p=1}^{\infty} [C_{pn} + D_{pn}] e_{pn}(\omega_0) \quad (3.40)$$

$$H_n^t \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_2}{\epsilon_0 \epsilon_2}} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} [C_{pm} e^{ik_p(\omega_0)D} - D_{pm} e^{-ik_p(\omega_0)D}] e_{pm}(\omega_0) \quad (3.41)$$

$$H_n^t = \sum_{p=1}^{\infty} [C_{pn} e^{ik_p(\omega_0)D} + D_{pn} e^{-ik_p(\omega_0)D}] e_{pn}(\omega_0) \quad (3.42)$$

Se dividen las ec. (3.39) y (3.41) entre $\sqrt{\mu_0 \mu_1 / \epsilon_0 \epsilon_1}$ y $\sqrt{\mu_0 \mu_2 / \epsilon_0 \epsilon_2}$ respectivamente:

$$H_0 \delta_{n0} + H_n^r = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} (C_{pm} - D_{pm}) e_{pm}(\omega_0) \quad (3.39a)$$

$$H_n^t = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\mu_0 \mu_2}} [C_{pm} e^{ik_p(\omega_0)D} - D_{pm} e^{-ik_p(\omega_0)D}] e_{pm}(\omega_0) \quad (3.41a)$$

Se continúa sumando las ecs. (3.39a) y (3.40) y restando la ec. (3.42) de (3.41a) para obtener dos ecuaciones con las cuales se forma un sistema de ecuaciones lineal no homogéneo:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} (C_{pm} - D_{pm}) e_{pm}(\omega_0) + (C_{pn} + D_{pn}) e_{pn}(\omega_0) \right\} = 2H_0 \delta_{n0} \quad (3.43)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\mu_0 \mu_2}} [C_{pm} e^{ik_p(\omega_0)D} - D_{pm} e^{-ik_p(\omega_0)D}] e_{pm}(\omega_0) - [C_{pn} e^{ik_p(\omega_0)D} + D_{pn} e^{-ik_p(\omega_0)D}] e_{pn}(\omega_0) \right\} = 0 \quad (3.44)$$

Este sistema inhomogeneo de ecuaciones lineales tiene soluciones para los C_{pn} y D_{pn} , si el determinante de los coeficientes C_{pn} y D_{pn} no es igual a cero. Cabe mencionar que se requiere la determinación previa de los eigenvectores $e_{pn}(\omega)$ para el medio dinámico “bulk” (sin fronteras). A partir de la solución de este sistema y normalizando con la amplitud H_0 se pueden determinar los

coeficientes de reflexión \mathcal{R}_n y transmisión \mathcal{T}_n de los armónicos generados $\omega - n\Omega$ [$n = 0, \pm 1, 2, \dots$], ya que cuando la placa es iluminada por una onda plana monocromática, dicha placa se convierte en una fuente policromática de luz, radiando todos los armónicos $|\omega_0 - n\Omega|$. Dichos coeficientes quedan de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} \left(\frac{C_{pm}}{H_0} - \frac{D_{pm}}{H_0} \right) e_{pm}(\omega_0) \quad (3.45a)$$

$$\mathcal{R}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0 \mu_1}} \left(\frac{C_{pm}}{H_0} - \frac{D_{pm}}{H_0} \right) e_{pm}(\omega_0) - 1 \quad (3.45b)$$

$$\mathcal{T}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_m \frac{\mu_0 \mu_{n-m}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\mu_0 \mu_2}} \left[\frac{C_{pm}}{H_0} e^{ik_p(\omega_0)(D)} - \frac{D_{pm}}{H_0} e^{-ik_p(\omega_0)(D)} \right] e_{pm}(\omega_0) \quad (3.46)$$

La ec. (3.45a) es el coeficiente de reflexión para el caso específico en que $n = 0$, mientras que la ec. (3.45b) es utilizada para obtener el coeficiente de reflexión para los demás valores de n . En cuanto al coeficiente de transmisión se obtiene a mediante el uso de la ec. (3.46), dicha ecuación es válida para cualquier valor de n .

A continuación se muestra brevemente que cuando $\mu(t) = cte$. los resultados se reducen a los obtenidos en [1].

Al ser $\mu(t) = cte$. solo se tiene el primer coeficiente de la serie de Fourier, por lo que $\mu_{n-m} = \mu_r \delta_{nm}$. Por lo anterior las ecuaciones (3.33) y (3.34) quedan de la siguiente manera:

$$A_p e_{pn}(\omega_0) = \sum_m \frac{\mu_0 \mu_r \delta_{nm}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} C_{pm} e_{pm}(\omega_0) = \frac{\mu_0 \mu_r(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} C_{pn} e_{pn}(\omega_0) \quad (3.47)$$

$$B_p e_{pn}(\omega_0) = - \sum_m \frac{\mu_0 \mu_r \delta_{nm}(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} D_{pm} e_{pm}(\omega_0) = - \frac{\mu_0 \mu_r(\omega_0 - n\Omega)}{k_p(\omega_0)} D_{pn} e_{pn}(\omega_0) \quad (3.48)$$

Con esto, se pueden cancelar los factores $e_{pn}(\omega_0)$ de los dos lados de estas ecuaciones.

Se prosigue a sustituir las ecuaciones de los campos electromagnéticos para la onda incidente, reflejada, transmitida y en la placa en las ecs. (3.35) a (3.36) (condiciones de frontera). Posteriormente se usan las ecs. (3.31), (3.32), (3.47) y (3.48), las cuales relacionan los campos eléctricos y magnéticos. Por último recordando que en [1] se tiene a $\mu_r = 1$ y que la placa se encuentra en el vacío, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E_0 \delta_{n0} + E_n^r = \sum_{p=1}^{\infty} [A_p + B_p] e_{pn}(\omega_0) \quad (3.49)$$

$$\sqrt{\epsilon_1} E_0 \delta_{n0} - \sqrt{\epsilon_1} E_n^r = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e_{pn}(\omega_0) k_p(\omega_0) c}{(\omega_0 - n\Omega)} [A_p - B_p] \quad (3.50)$$

$$E_n^t = \sum_{p=1}^{\infty} [A_p e^{ik_p(\omega_0)(D)} + B_p e^{-ik_p(\omega_0)(D)}] e_{pn}(\omega_0) \quad (3.51)$$

$$\sqrt{\epsilon_2} E_n^t = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k_p(\omega_0) e_{pn}(\omega_0) c}{(\omega_0 - n\Omega)} [A_p e^{ik_p(\omega_0)(D)} - B_p e^{-ik_p(\omega_0)(D)}] e_{pn}(\omega_0) \quad (3.52)$$

Este sistema de ecuaciones es el mismo que se presenta en [1] en las ecs. (45) a (48), comprobando así que [1] es un caso particular donde $\mu(t) = cte$.

Para la realización de las simulaciones numéricas cuyos resultados se presentan en las siguientes secciones se consideró que la placa dinámica se encuentra en el vacío, por lo tanto, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ y $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

3.3.1.1. Resultados numéricos sin absorción

A partir de aquí se considera un nuevo parámetro: v , el cual se está definido como:

$$v = D\Omega\sqrt{\epsilon_r \bar{\mu}_r}/c \quad (3.53)$$

Además es importante señalar que el parámetro v es la generalización del parámetro llamado L_N en [1] y [2] para el caso $\bar{\mu}_r \neq 1$.

Antes que nada, aprovechando la comprobación realizada líneas arriba, donde se dice que cuando $\mu(t) = cte.$, los resultados acá obtenidos se reducen a los mostrados en [1]. Se observa que los resultados obtenidos con nuestras simulaciones son los mismos que en la figura 4 de [1], esto se ve en la figura 3.10.

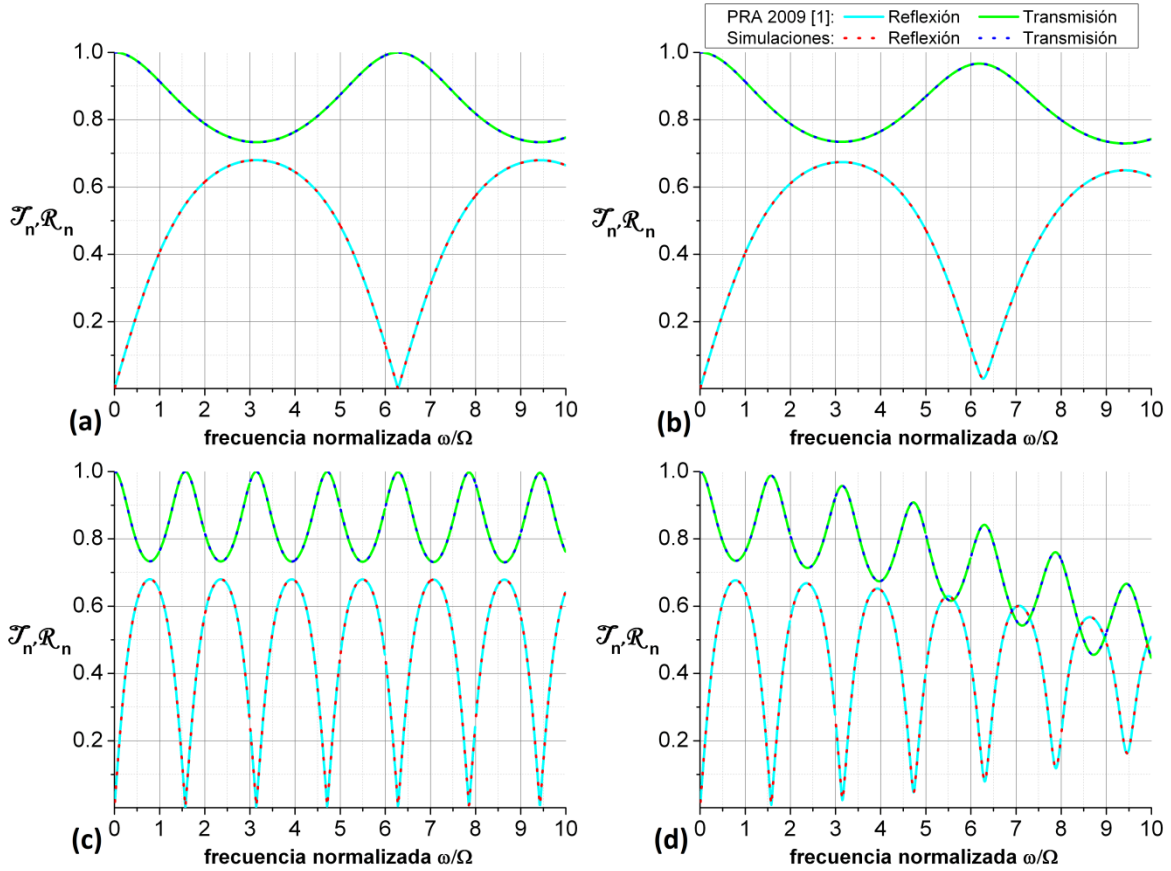


Fig. 3.10 Comparación de las magnitudes de los coeficientes de reflexión y transmisión entre PARA 2009[1] y las simulaciones propias. (a) $M_\varepsilon = 0.01619$ y $L_N = 0.5$. (b) $M_\varepsilon = 0.1619$ y $L_N = 0.5$. (c) $M_\varepsilon = 0.01619$ y $L_N = 2$. (d) $M_\varepsilon = 0.1619$ y $L_N = 2$.

Se obtienen los mismos resultados debido a que los resultados expuestos en [1] son un caso particular de lo trabajado en la presente tesis.

Es importante señalar que tanto en [1] como en [2] se manejaron algunas notaciones diferentes a las del actual trabajo, pues se pretende tener una generalización. Uno de los cambios importantes es el que define a la fuerza de modulación $M_\varepsilon = \Delta\varepsilon/\bar{\varepsilon}_r$, pues en [1] se presentan los resultados para $\Delta\varepsilon$ que representa el cambio en la constante dieléctrica y ε_0 que es el coeficiente de Fourier para $\varepsilon_{n=0}$.

En la figura 3.11 se presentan los coeficientes de reflexión y transmisión para $M_\varepsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0.1619$, y para $M_\varepsilon = 0.1619$ y $M_\mu = 0.64762$ con $\nu = 2$ en el inciso (a) y $\nu = 0.5$ en (b). Se trata de la respuesta fundamental, es decir, $n = 0$. Se puede notar que los coeficientes de reflexión y transmisión son sensibles, a diferencia de la relación de dispersión, al intercambio entre M_ε y M_μ .

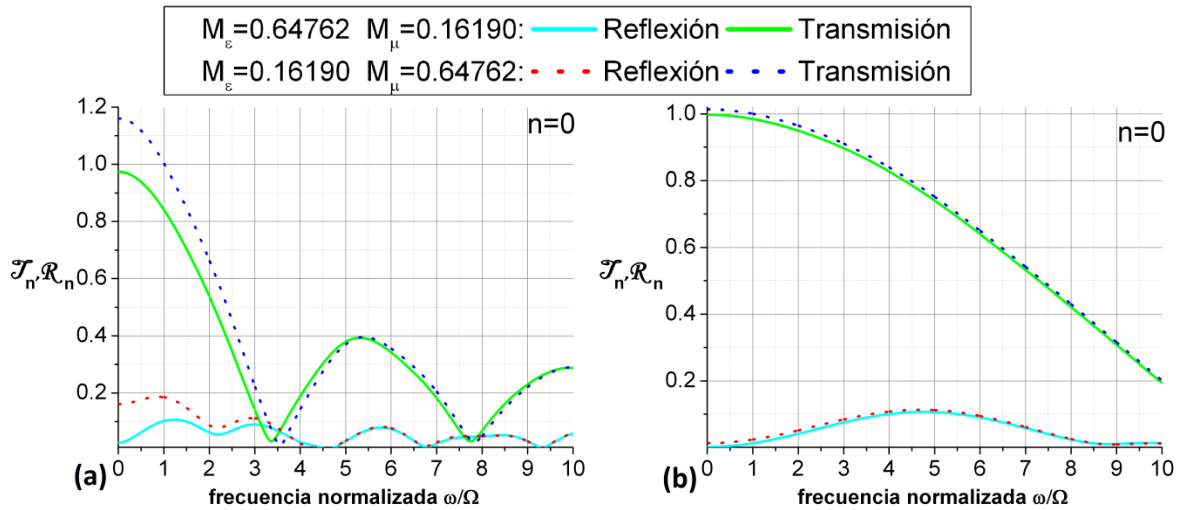


Fig. 3.11 Magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión para $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0.1619$, y para $M_\epsilon = 0.1619$ y $M_\mu = 0.64762$ con: (a) $\nu = 2$ y (b) $\nu = 0.5$

A continuación, en la figura 3.12, se presentan los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso en que $M_\epsilon = 0.4838, M_\mu = 0.1619$ y $\nu = 2$ cuando $n = 0, \pm 1, 2$.

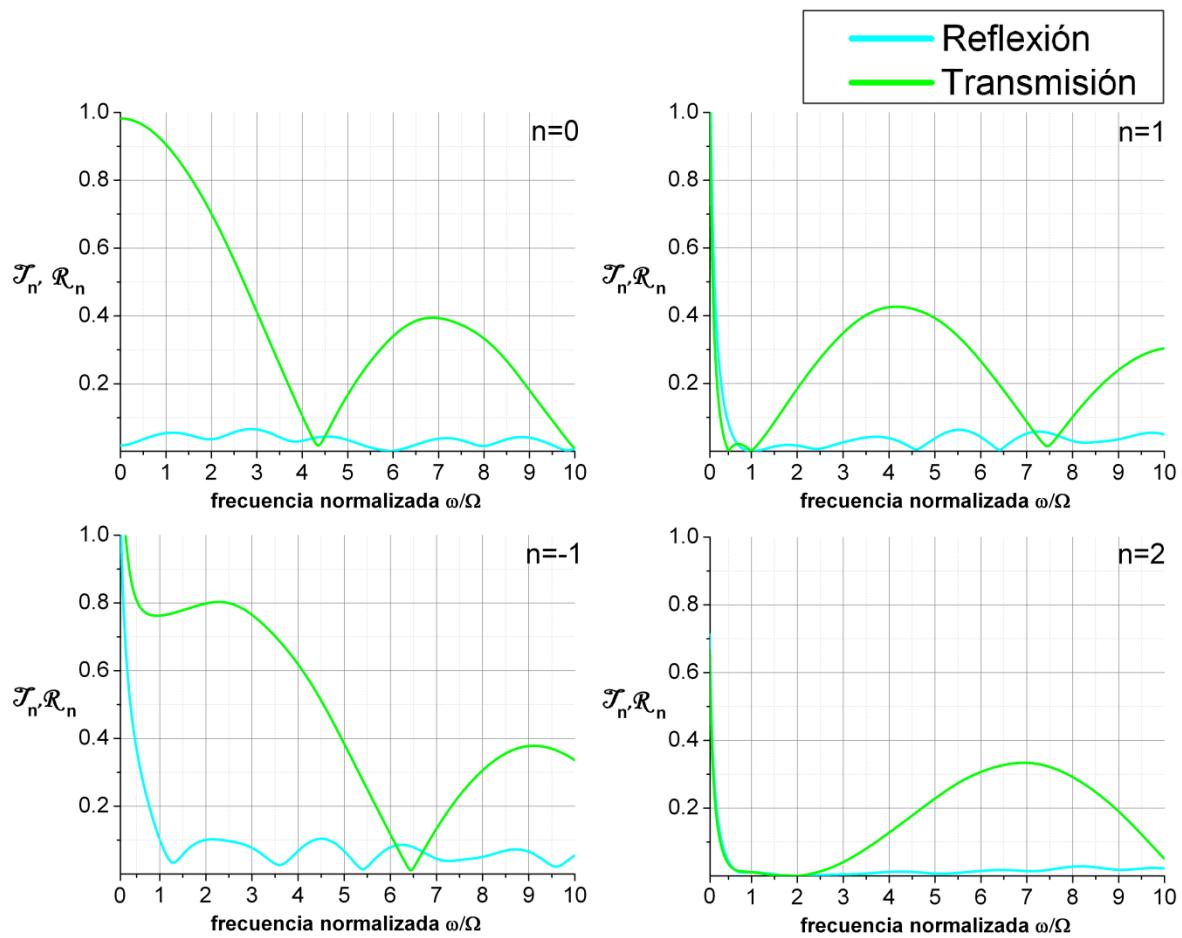


Fig. 3.12 Magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión para $M_\epsilon = 0.4838, M_\mu = 0.1619$ y $\nu = 2$ para $n = 0, \pm 1, 2$

En la figura 3.13 se muestra un caso donde solo se modula la permitividad o solo la permeabilidad, es decir, $M_\mu = 0$ y $M_\varepsilon = 0.6762$ o $M_\mu = 0.6762$ y $M_\varepsilon = 0$. Se realizó esto con el fin de resaltar la diferencia que existe en los coeficientes de reflexión y transmisión cuando la modulación es eléctrica o magnética.

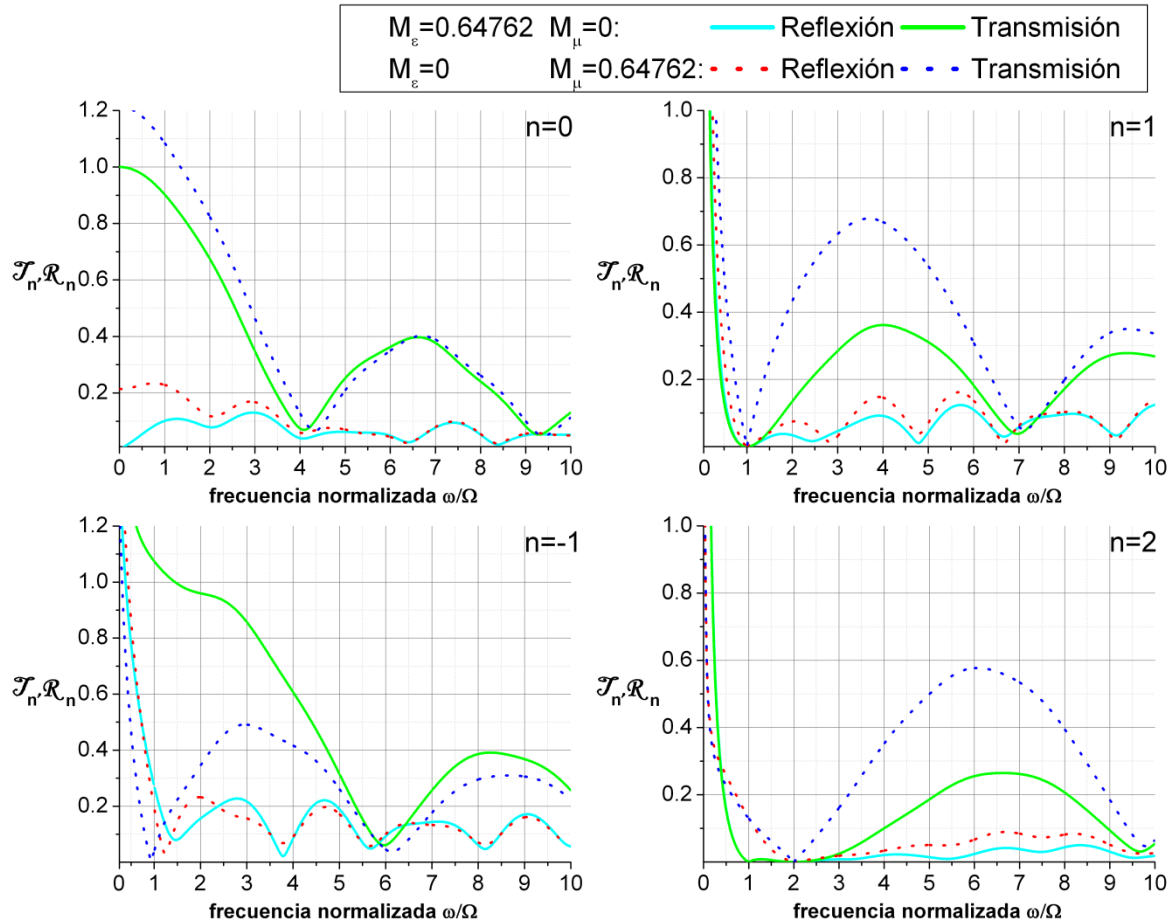


Fig. 3.13 Comparación entre modulación eléctrica y magnética en los coeficientes de reflexión y transmisión

3.3.1.2. Resultados numéricos con absorción

En esta subsección se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión considerando pérdidas.

La figura 3.14 hace una comparación de las magnitudes de los coeficientes de reflexión y transmisión con y sin absorción. Para realizar una comparación con los resultados obtenidos en [1] los cuales fueron hechos sin considerar absorción, se retoma el caso de la figura 3.10 pero en esta ocasión se le agregan pérdidas. Se ha propuesto que: $|\varepsilon_r''/\varepsilon_r'|=0.01$.

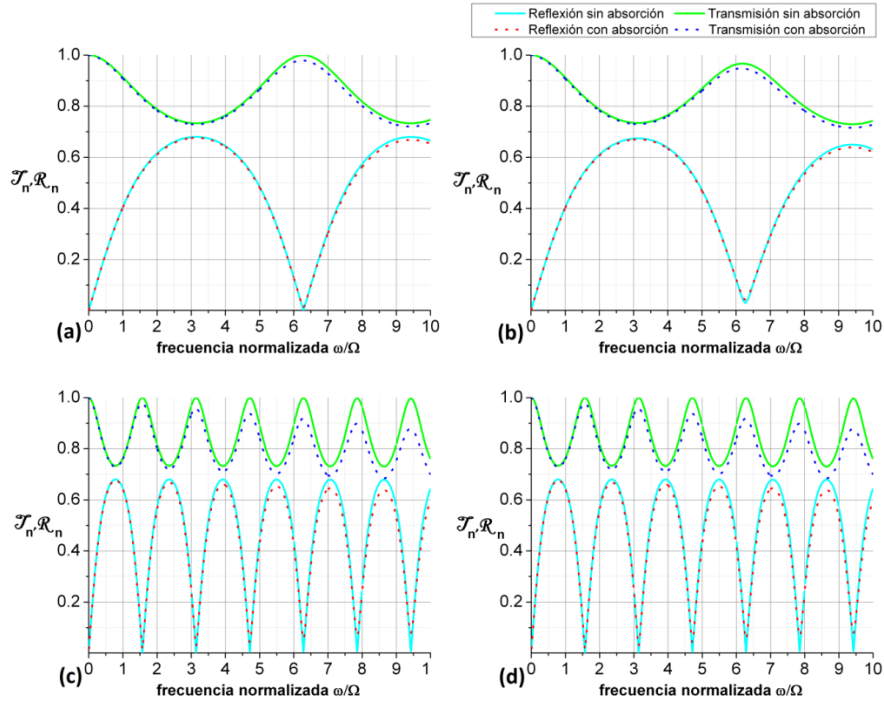


Fig. 3.14 Comparación de la magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión con y sin absorción.

Como era de esperarse, al considerar la absorción la magnitud de los coeficientes disminuye. Además, a medida que incrementa la frecuencia la diferencia de las magnitudes se hace mayor.

Se repitió lo hecho para la obtención de los resultados de la figura 3.13, en el caso de la modulación magnética) pero esta vez se le agregaron pérdidas, los resultado se presentan a continuación.

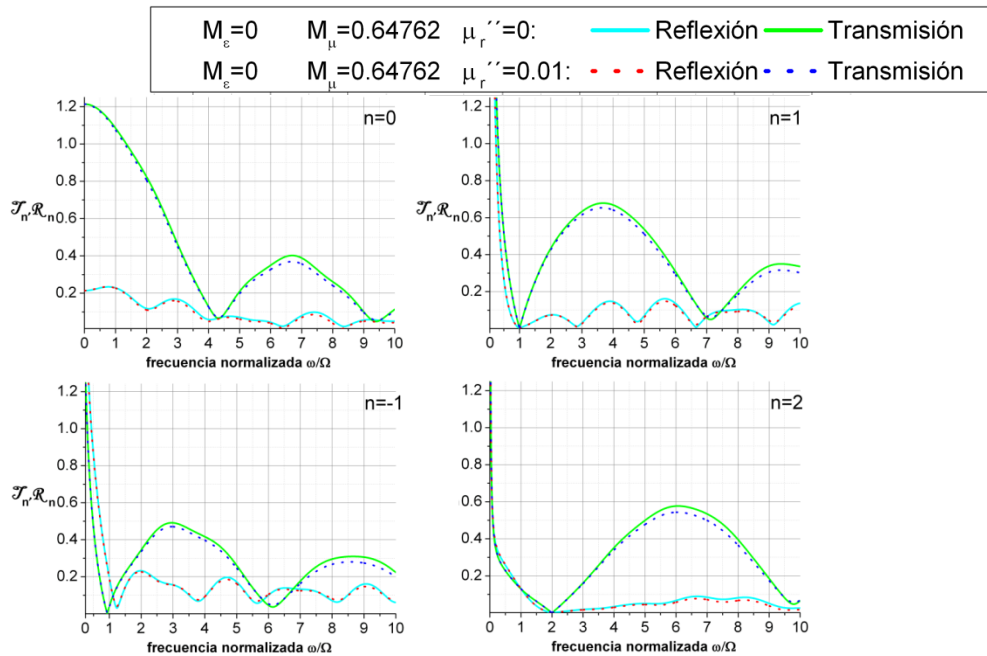


Fig. 3.15 Comparación de la magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión con y sin absorción 2

Tanto en la fundamental como en los armónicos se puede observar que al considerar absorción la amplitud de los coeficientes disminuye.

3.3.2. Resonancias

En las simulaciones numéricas desarrolladas en [2] se encontró que las amplitudes de los armónicos reflejados y transmitidos pueden ser muchos órdenes de magnitud mayores a la amplitud de la onda incidente.

Para que este efecto ocurra es necesario que se cumplan dos condiciones [2]:

- Que la frecuencia angular de la onda incidente sea

$$\omega_0 = \frac{\Omega(2n+1)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.54)$$

Estas frecuencias coinciden con las frecuencias resonantes impares de la amplificación paramétrica.

- Condición geométrica, las resonancias solo se presentan para ciertos valores del parámetro ν , el cual se ha definido anteriormente en la ec. (3.53).

Esta fórmula generaliza el resultado de la ref. [2] para el caso $\bar{\mu}_r \neq 1$. El valor numérico de ν depende solamente de las amplitudes de modulación M_ε y M_μ , ver las ecs. (3.21) y (3.22).

Cabe mencionar que aquí nos estamos limitando a los casos de modulación o de $\varepsilon(t)$ o de $\mu(t)$, pero no de modulación de ambos simultáneamente. Es decir, $M_\mu = 0$ y $M_\varepsilon \neq 0$ o $M_\mu \neq 0$ y $M_\varepsilon = 0$.

Todas las figuras presentadas en esta sección se calcularon a partir de las ecs. (3.39)-(3.44).

3.3.2.1. Simulaciones numéricas sin absorción

En esta sección se presentan los coeficientes de transmisión y reflexión sin considerar la absorción, solo se muestran dichos coeficientes para los primeros armónicos.

En las figuras 3.16 y 3.17 se puede observar que resonancias paramétricas fuertes aparecen en ambos los coeficientes de reflexión y transmisión, en las frecuencias $\omega_0 =$

$\Omega(2n + 1)/2$ con $n = 0, \pm 1, 2, \dots$ tal y como sucede en la ref. [2], además dichas resonancias ocurren solo para ciertos valores del parámetro ν (ver ec. (3.53)).

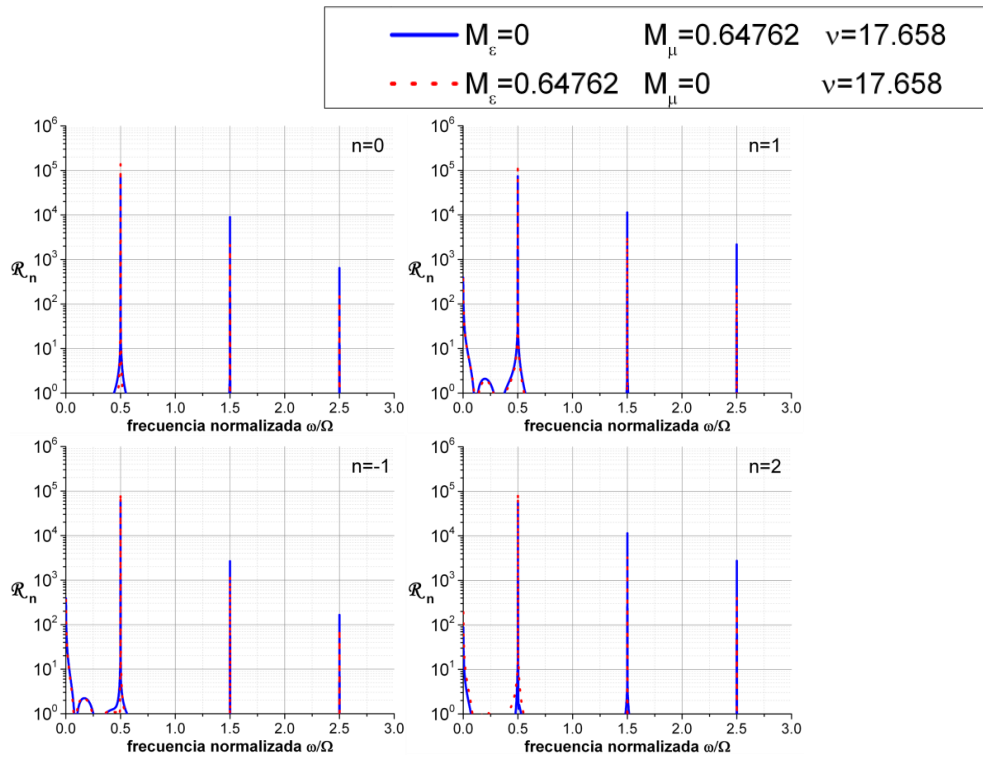


Fig. 3.16 Coeficientes de reflexión para $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.658$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso sin absorción)

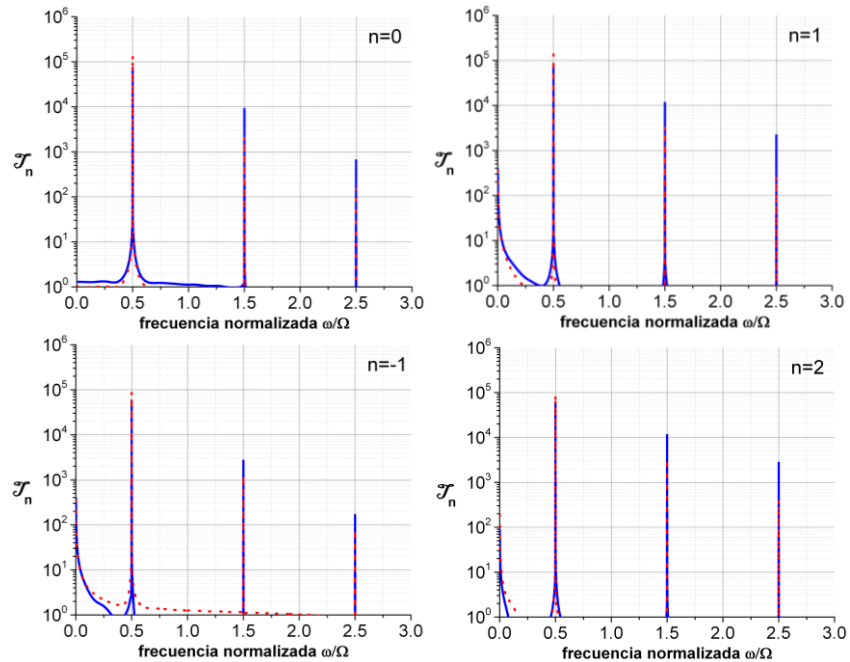


Fig. 3.17 Coeficientes de transmisión para $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.658$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso sin absorción)

En las figuras anteriores se muestran las amplitudes de los coeficientes de reflexión \mathcal{R} y transmisión \mathcal{T}_n de los primeros armónicos n con $\nu = 17.658$ para los casos en que $M_\varepsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\varepsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja). De estos resultados se pueden ver claramente las resonancias paramétricas fuertes, pues se obtienen amplitudes con varios órdenes de magnitud superiores a la unidad.

A continuación en la figura 3.18 se muestran los coeficientes para cuando $\nu = 17.5$ (línea sólida azul) y 17.8 (línea punteada roja), esto para denotar una de las condiciones antes mencionadas: “las resonancias paramétricas fuertes ocurren solo para ciertos valores del parámetro ν ”.

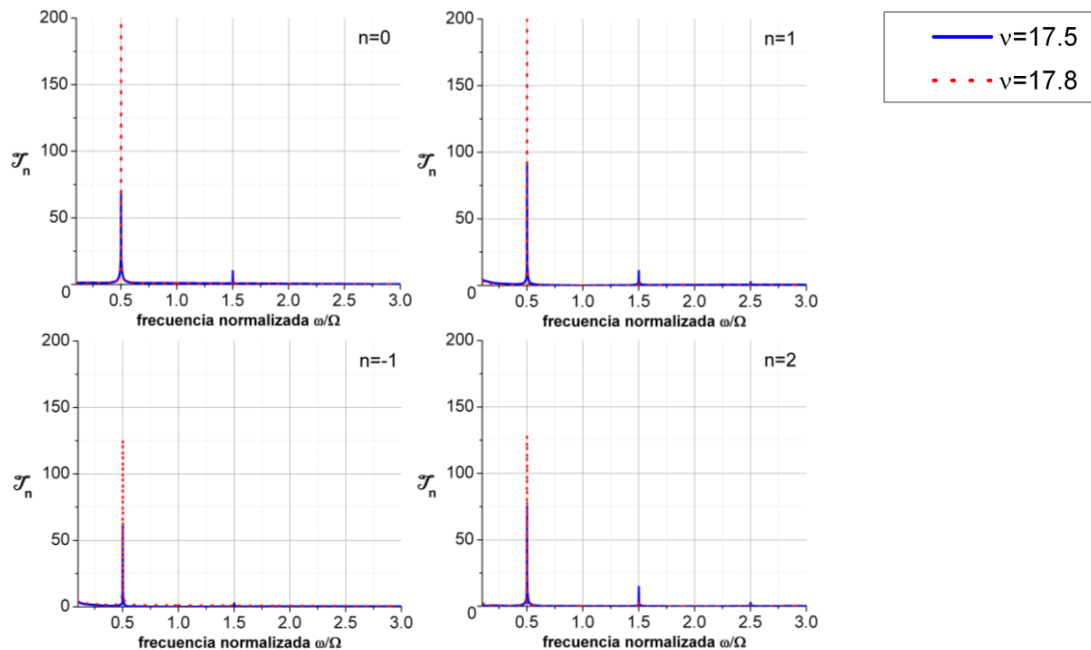


Fig. 3.18 Coeficientes de transmisión para $M_\varepsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0$ y $\theta = 0$ con $\nu = 17.5$ (línea sólida azul) y $\nu = 17.8$ (línea punteada roja) para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso sin absorción)

Al comparar las amplitudes obtenidas en las figuras 3.17 y 3.18 se puede ver como un pequeño aumento (de 17.658 a 17.8) o disminución (de 17.658 a 17.5) del parámetro ν causa disminuciones fuertes de los coeficientes de transmisión y reflexión, esto es debido a que cuando ν está en el valor preciso el campo eléctrico de la placa es una superposición de ondas estacionarias simétricas o antisimétricas lo cual produce las resonancias paramétricas fuertes [2].

Es importante señalar que las magnitudes de las amplitudes tienden a infinito debido a que en esta sección no se consideran pérdidas y la magnitud depende directamente de la

resolución que se le esté dando en $\hat{\omega}$ durante la simulación. Para tener una buena idea del comportamiento las simulaciones se realizaron bajo las mismas condiciones, es decir, se utilizaron los valores $M_\varepsilon = 0$, $M_\mu = 0.64762$ y $M_\varepsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0$ para $\nu = 17.5, 17.658$ y 17.8 .

3.3.2.2. Simulaciones numéricas con absorción

Al introducir las pérdidas en las simulaciones numéricas las amplitudes de los coeficientes de transmisión ya no tienden a infinito a pesar de aumentar la resolución ya que dichas pérdidas hacen que las amplitudes converjan con mayor rapidez.

Se realizaron las mismas simulaciones que en la sección 3.5.1.2 pero esta vez considerando algunas pérdidas, $\varepsilon_r'' = 0.01$ o $\mu_r'' = 0.01$.

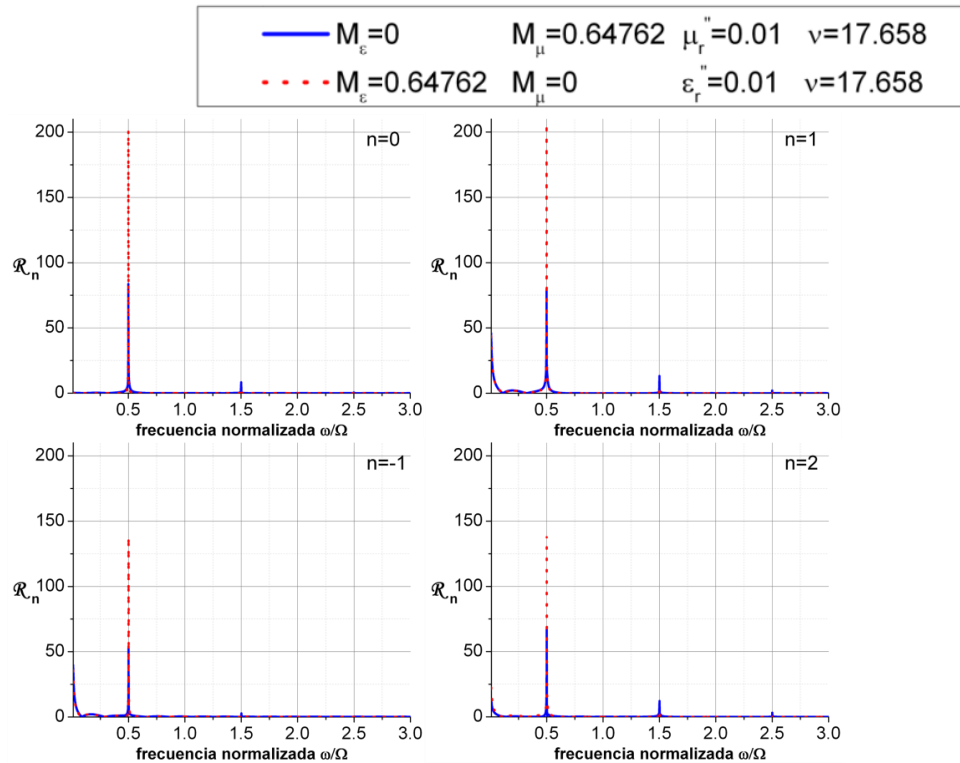


Fig. 3.19 Coeficientes de reflexión para $M_\varepsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\varepsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.658$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso con pérdidas)

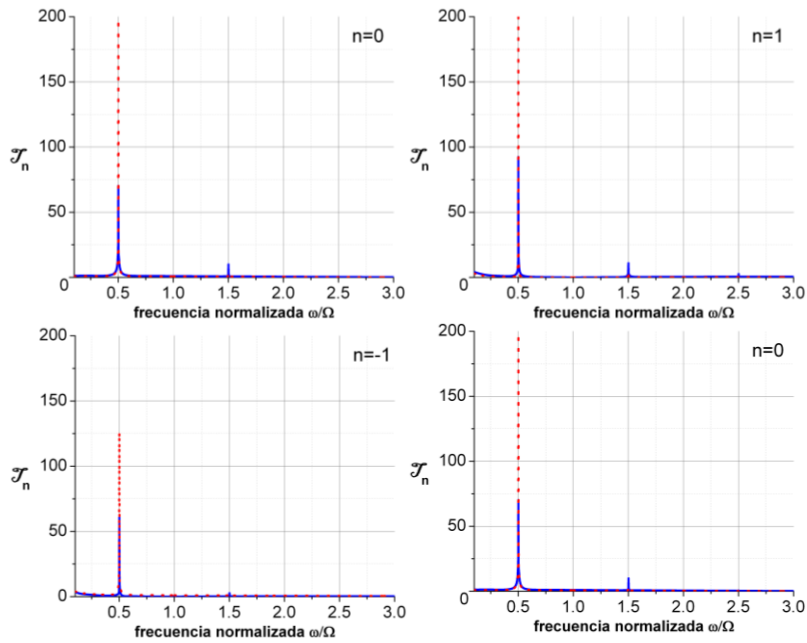


Fig. 3.20 Coeficientes de transmisión para $M_\epsilon = 0$ y $M_\mu = 0.64762$ (línea sólida azul) y $M_\epsilon = 0.64762$ y $M_\mu = 0$ (línea punteada roja) con $\theta = 0$ y $\nu = 17.65$ para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso con pérdidas)

Como se puede observar en las figuras 3.16, 3.17, 3.19 y 3.20 con la modulación eléctrica, aquí no se obtienen las mismas amplitudes con la modulación magnética. Además, se obtienen coeficientes de transmisión grandes comparadas con la unidad, mas no tienden a infinito. Este es un resultado que si sería esperado en la práctica.

En estas últimas figuras se nota una diferencia entre las magnitudes de los coeficientes de transmisión cuando $n = 0$ y $n = 1$, y para $n = -1$ y $n = 2$, situación que no se notaba en el caso sin absorción, esto es debido a la resolución que se manejó para dicho caso, pues pequeñas diferencias no eran notorias en las gráficas.

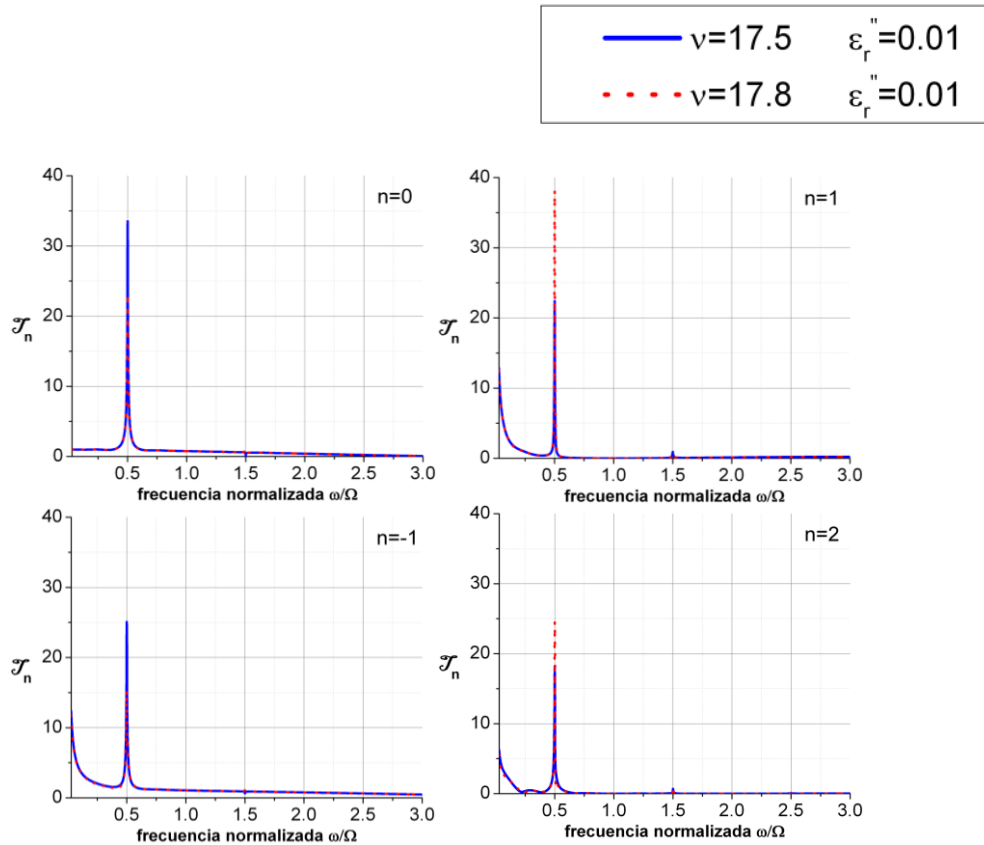


Fig. 3.21 Coeficientes de transmisión para $M_\varepsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0$ y $\theta = 0$ con $\nu = 17.5$ (línea sólida azul) y $\nu = 17.8$ (línea punteada roja) para $n = 0, \pm 1$ y 2 (caso con pérdidas)

La figura 3.21 nos ayuda simplemente a comprobar que sucede lo mismo que en la figura 3.18, es decir, con o sin pérdidas la obtención de las resonancias paramétricas fuertes solo se dan dentro de un rango reducido de valores del parámetro ν alrededor de ciertos parámetros críticos que dependen de M_ε y M_μ .

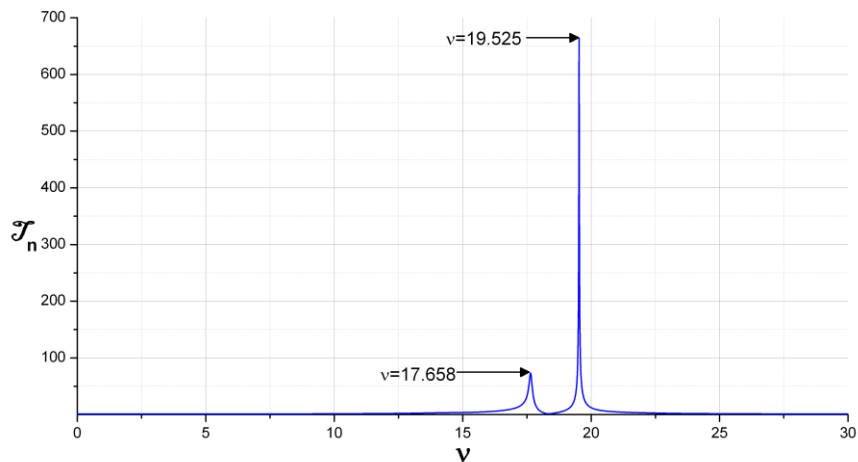


Fig. 3.22 Coeficiente de transmisión vs ν con $M_\varepsilon = 0.64762$, $M_\mu = 0$ y $\theta = 0$

Se puede apreciar claramente en la figura 3.22 que el primer valor de ν donde se encuentra una resonancia es 17.658, lo cual concuerda con el valor establecido en las simulaciones anteriores donde se muestran las resonancias paramétricas fuertes.

4. RESONANCIAS EN LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN DINÁMICA

En este capítulo se muestra la relación que existe entre la placa dinámica y la línea de transmisión en el caso exclusivo de las resonancias.

Como se puede ver en las refs. [3] y [4] un medio dinámico puede ser realizado mediante una línea de transmisión dinámica pasa-bajo. Para la realización práctica de dicha línea de transmisión dinámica se ha propuesto sustituir los capacitores e inductores estáticos por unos que cambien sus valores en el tiempo (ver figura 4.1). Esto funciona de manera correcta cuando se trabaja en el límite de longitud de onda larga: $ka \ll 1$, y junto con las ecs. (4.3) y (4.4) constituyen las condiciones para la existencia del medio efectivo.

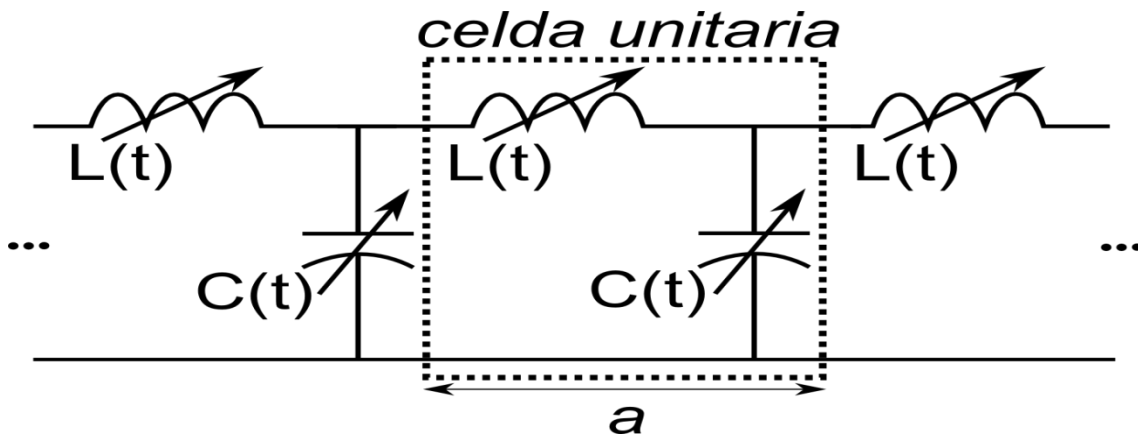


Fig. 4.1 Línea de transmisión dinámica

En la figura 4.1 se muestra la línea de transmisión dinámica sin considerar pérdidas, es decir, con $R = 0$ y $G = 0$. Se propuso que la capacitancia e inductancia se modulen de la siguiente manera:

$$C(t) = \bar{C}[1 + M_C \sin(\Omega t)] \quad (4.1)$$

$$L(t) = \bar{L}[1 + M_L \sin(\Omega t + \theta)] \quad (4.2)$$

Por otro lado, para longitudes de onda largas las propiedades electromagnéticas de la placa dinámica (permitividad y permeabilidad) y los parámetros circuitales de la línea de transmisión dinámica (capacitancia e inductancia) cumplen las siguientes relaciones:

$$\epsilon_0 \bar{\epsilon}_r = \bar{C}/a \quad (4.3)$$

$$\mu_0 \bar{\mu}_r = \bar{L}/a \quad (4.4)$$

Además, se introduce el parámetro $\hat{\Omega}$, el cual ha sido utilizado en las refs. [3] y [4] y se define como:

$$\hat{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (4.5)$$

donde como se sabe $\omega_0 = 1/\sqrt{\bar{L}\bar{C}}$, por lo que se puede observar que $\hat{\Omega}$ depende de la frecuencia de modulación Ω , la inductancia promedio \bar{L} y de la capacitancia promedio \bar{C} .

$$\hat{\Omega} = \Omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}} \quad (4.6)$$

Finalmente utilizando las ecs. (4.3), (4.4) y (4.6) en (3.52) se consigue una relación entre la placa dinámica y la línea de transmisión dinámica.

$$\nu = \frac{D\Omega}{c}\sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}} = D\Omega\sqrt{\frac{\bar{L}\bar{C}}{a^2}} = \frac{D\Omega}{a}\sqrt{\bar{L}\bar{C}} = N\Omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}} = N\hat{\Omega} \quad (4.7)$$

Aquí N es el número de celdas del sistema. La ecuación anterior nos ayuda con la obtención de las resonancias en la línea de transmisión dinámica a partir de los valores que se tienen para la placa dinámica.

En la ec. (4.7) se puede observar claramente que mientras en la placa dinámica el parámetro ν depende del grosor de la placa, la frecuencia de modulación, la permitividad y la permeabilidad promedios (medio efectivo), en la línea de transmisión dinámica ν solo se depende del número de celdas y el parámetro $\hat{\Omega}$, este último a su vez depende de la inductancia y capacitancia promedios.

Una vez obtenida la ecuación (4.7) se prosiguió a realizar simulaciones en HSpice con el fin de comprobar que tan válida es esta relación.

La configuración utilizada para las simulaciones es la siguiente:

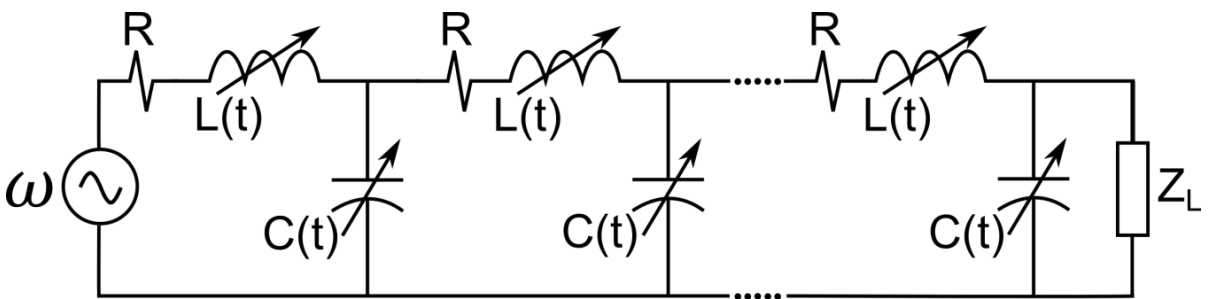


Fig. 4.2 Configuración utilizada para las simulaciones

donde Z_L es la impedancia característica para la línea de transmisión estática.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para la línea de transmisión dinámica con $\bar{C} = 100\text{pF}$, $\bar{L} = 0.01\mu\text{H}$, $R = 4\Omega$, $M_C = 0.64762$, $M_L = 0$, $N = 50$, $\Omega/2\pi = 352\text{MHz}$, $\omega/2\pi = 176\text{MHz}$ y $Z_L = 10\Omega$ en comparación con el caso de la placa dinámica presentado en la figura 3.18 para modulación eléctrica.

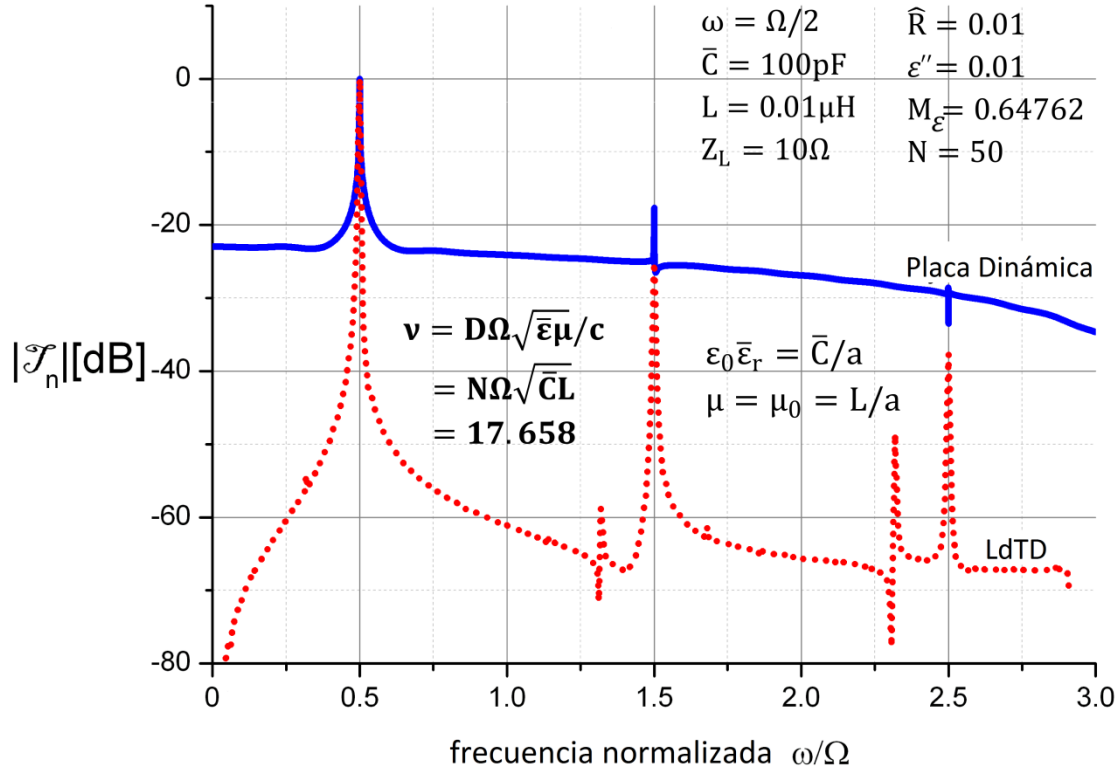
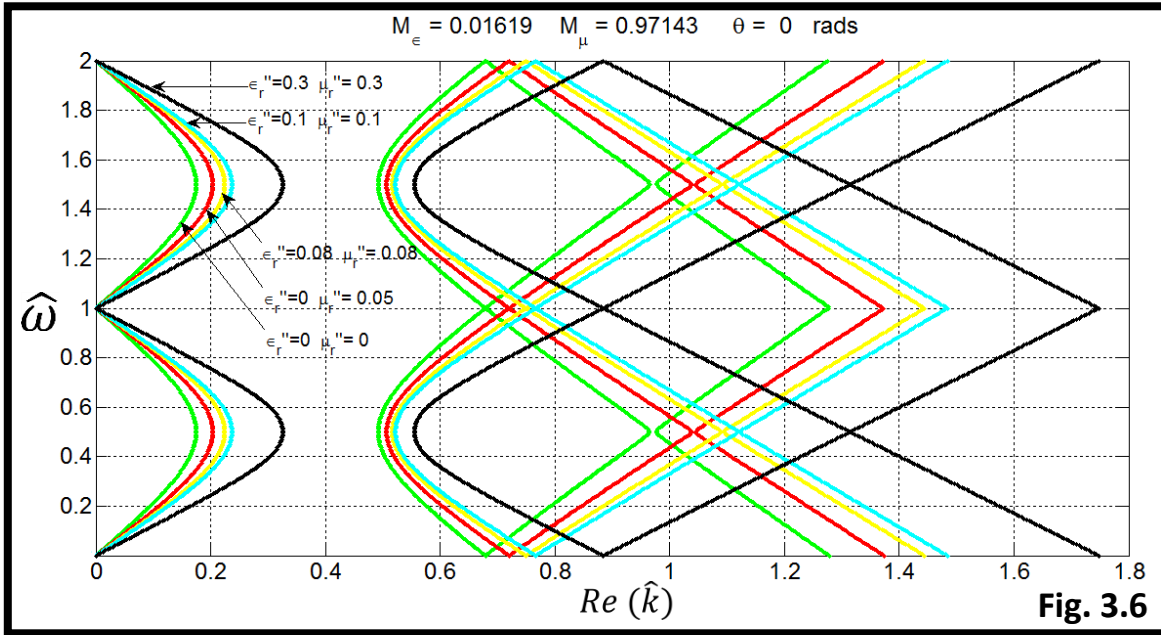


Fig. 4.3 Comparación placa dinámica vs línea de transmisión dinámica

En la figura 4.3 se comprueba que con la ayuda de la ecuación (4.7) se puede pasar del caso de la placa dinámica al de la línea de transmisión dinámica en cuanto a la obtención de la resonancia. Otro punto a destacar es que se cumple con una de las condiciones planteadas en la ref. [10], en la cual se dice que se espera buena concordancia entre la placa dinámica y la línea de transmisión dinámica cuando $\hat{\Omega} < 1$ y mientras $\hat{\Omega}$ sea más pequeño se encontrará mejor concordancia. Para el caso presentado anteriormente se tiene que $\hat{\Omega} = 0.352$ lo cual cumple con la condición anteriormente mencionada.

5. CONCLUSIONES

- Cuando se consideran las pérdidas del medio ($\epsilon_r'' \neq 0$ y/o $\mu_r'' \neq 0$), a medida que estas aumentan, las bandas de la relación de dispersión se desplazan hacia valores más grandes del vector de onda \hat{k} y las bandas prohibidas $\Delta\hat{k}$ se vuelven más estrechas, inclusive en algunos casos la segunda banda prohibida se vuelve imperceptible.

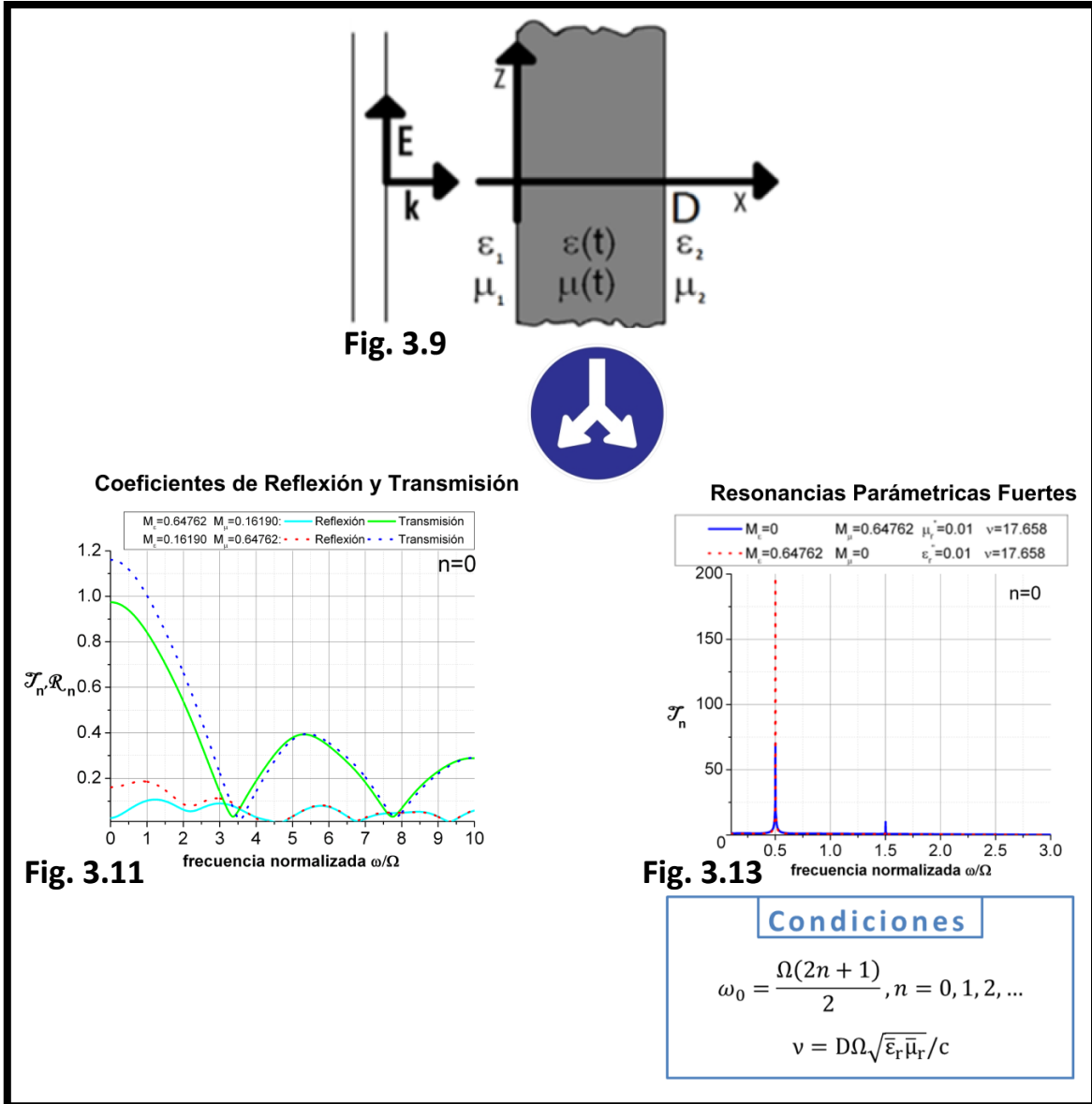


- Al considerar una placa cuya permitividad y/o permeabilidad varían periódicamente en el tiempo, se encontró que:
 - Como consecuencia de la interacción de la onda incidente con la placa, las ondas reflejadas y transmitidas contienen armónicos de la frecuencia de modulación Ω , $\omega_0 - n\Omega$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
 - Los coeficientes de reflexión y transmisión son sensibles, a diferencia de la relación de dispersión, al intercambio entre M_ϵ y M_μ .
 - Al incluir pérdidas al análisis de la placa la magnitud de los coeficientes tanto de reflexión como de transmisión, para cualquier valor de n , disminuyen.
 - Se obtienen resonancias paramétricas fuertes bajo las siguientes condiciones:

$$\omega_0 = \frac{\Omega(2n+1)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ec. (3.54)}$$

$$v = D\Omega\sqrt{\bar{\epsilon}_r\bar{\mu}_r}/c \quad \text{ec. (3.53)}$$

Cabe señalar que Las resonancias paramétricas fuertes solo se dan dentro de un rango reducido del parámetro ν alrededor de ciertos parámetros críticos que dependen de M_ε y M_μ .



- Cumpliendo las condiciones para la existencia del medio efectivo:

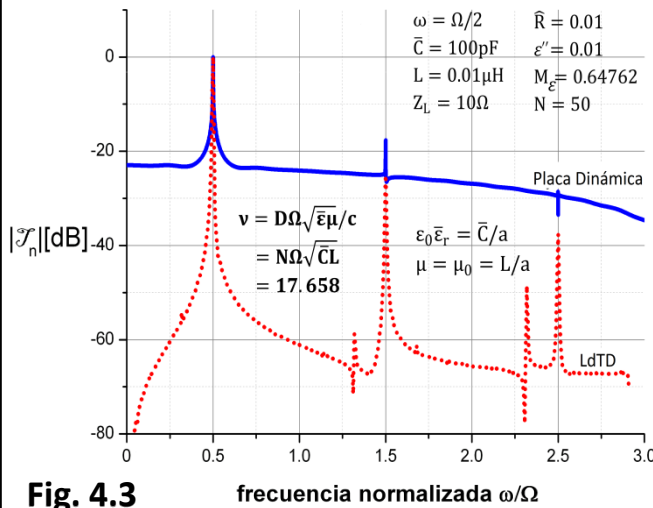
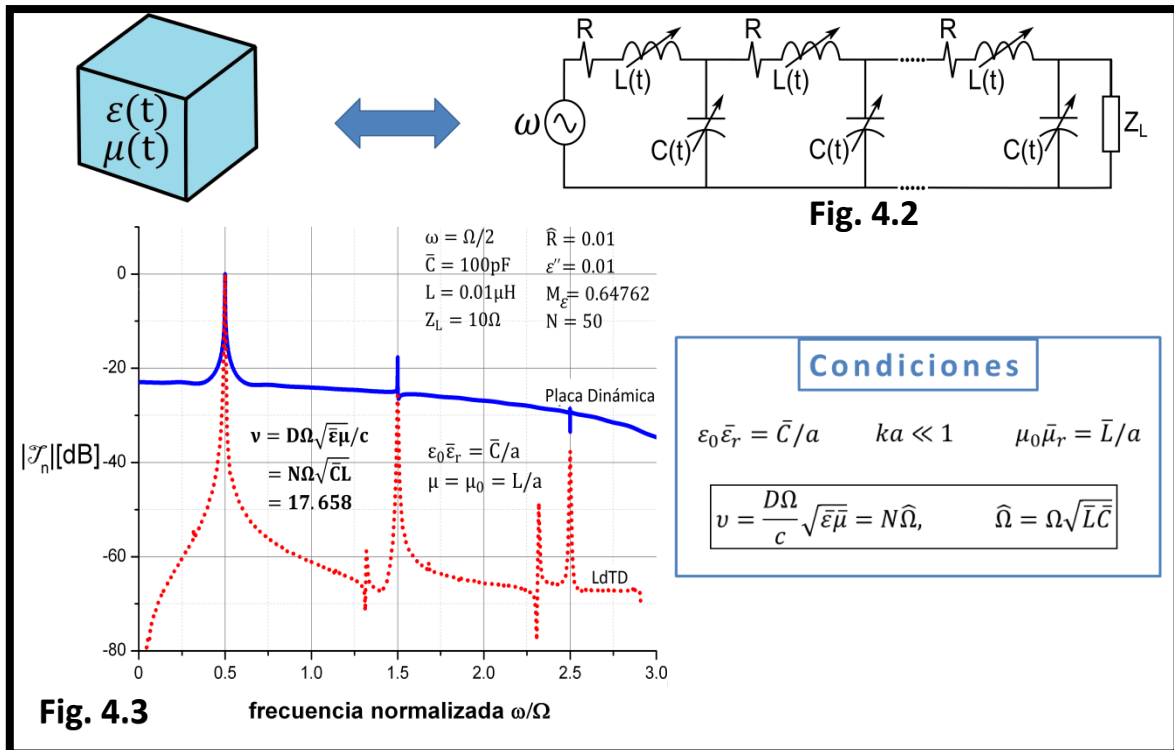
$$ka \ll 1$$

$$\varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r = \bar{C}/a \tag{ec. (4.3)}$$

$$\mu_0 \bar{\mu}_r = \bar{L}/a \tag{ec. (4.4)}$$

se encontró una relación entre la placa dinámica y la línea de transmisión dinámica para la obtención de las resonancias paramétricas fuertes en la línea, en donde, mientras en la placa dinámica el parámetro v depende del grosor de la placa, la frecuencia de modulación, la permitividad y la permeabilidad promedio, en la línea de transmisión dinámica v solo se depende del número de celdas y el parámetro $\hat{\Omega}$, este último a su vez depende de la inductancia y capacitancia promedio.

$$v = \frac{D\Omega}{c} \sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}} = N\hat{\Omega} \quad ; \quad \hat{\Omega} = \Omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}} \quad \text{ecs. (4.7) y (4.6)}$$



Condiciones

$$\epsilon_0\bar{\epsilon}_r = \bar{C}/a \quad ka \ll 1 \quad \mu_0\bar{\mu}_r = \bar{L}/a$$

$$v = \frac{D\Omega}{c} \sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}} = N\hat{\Omega}, \quad \hat{\Omega} = \Omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}}$$

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Jorge R. Zurita-Sánchez, P. Halevi, Juan C. Cervantes-González, "Reflection and transmission of a wave incident on a slab with a time-periodic dielectric function $\epsilon(t)$," *Phys. Rev. A* **79**, 053821 (2009).
- [2] Jorge R. Zurita-Sánchez, P. Halevi, "Resonances in the optical response of a slab with time-periodic dielectric function $\epsilon(t)$," *Phys. Rev. A* **81**, 053834 (2010).
- [3] P. Halevi, Uriel Algreto-Badillo, Jorge R. Zurita-Sánchez, "Optical response of a slab with time-periodic dielectric function $\epsilon(t)$: Towards a dynamic metamaterial ," *Proc. SPIE* **8095**, 80950I (2011).
- [4] Becerra Fuentes Olga Mariana, *Propagación de ondas electromagnéticas en un medio con variación temporal periódica de su permitividad y permeabilidad*, Tesis de maestría, (INAOE, Puebla 2012).
- [5] Joannopoulos J., Meade R. y Winn J., "Photonic Crystals: molding the flow of light", Princeton University Press, 1995.
- [6] Kittel C., "Introduction to Solid State Physics", John Wiley and Sons, 8ª edición, 2005.
- [7] Jackson J., "Classical Electrodynamics", John Wiley and Sons, 3ª edición, 1999.
- [8] Novotny L. y Hecht B., "Principles of Nano-Optics", Cambridge University Press, 2006.
- [9] Algreto-Badillo, *Refracción negativa y enfocamiento en líneas de transmisión L-C acopladas magnéticamente*, Tesis de maestría, (INAOE, Puebla 2006).
- [10] Algreto-Badillo, *Líneas de Transmisión Dinámicas-Periódicas y su Descripción por Medio Efectivo*, Tesis de doctorado, (INAOE, Puebla 2011).
- [11] E. S. Cassedy, and A. A. Oliner, *Proc. of the IEEE* **51**, 1342 (1963).
- [12] M. R. Currie, and R. W. Gould, *Proc. of the IRE* **48**, 1960 (1961).
- [13] W. Lee, and E. Afshari, *IEEE JSSC*. **45**, 1834 (2010).
- [14] W. Lee, and E. Afshari, *IEEE Trans. on Circ. and Syst.* **58**, 479 (2011).

[15] Jorge R. Zurita-Sánchez, J. H. Abundis-Patiño, and P. Halevi, “Pulse propagation through a slab with time-periodic dielectric function $\varepsilon(t)$ ”, *Optics Express* **20**, 5586 (2012).