



**I
N
A
O
E**

Análisis interferométrico de caos óptico

por

Ing. Fabián Camilo Cubillos Morales

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de
**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE
ÓPTICA**

en el

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Agosto, 2020

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Gabriel Martínez Niconoff, INAOE

©INAOE 2020

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias
en su totalidad o en partes de esta tesis



Agradecimientos

A mi familia y amigos por su soporte moral. Al Dr. Gabriel M. Niconoff por su acompañamiento y destacada dirección. Finalmente a Conacyt por permitirme culminar mis estudios de posgrado.

Resumen

Se propone un diseño basado en el arreglo experimental de Young para implementar caos en sistemas interferométricos. En primera instancia se estudia la correlación en un sistema donde las fuentes puntuales se distribuyen de forma aleatoria, esto con la intención de analizar nociones de caos en dicho arreglo. Para ello se utilizó un sistema de péndulo doble rígido con las fuentes puntuales en él. Se muestra que la distribución de irradiancia sigue una ecuación diferencial parcial, no-lineal y de segundo orden, cuya solución permite establecer propiedades análogas a la estructura matemática de la entropía. En adición se realiza una descripción de los procesos de correlación en irradiancia usando el formalismo matricial.

Palabras clave: Caos, correlación, entropía, experimento de Young, péndulo doble .

Abstract

It is proposed a design based on the Young's experimental setup for implement chaos in interferometric systems. First, correlation is studied for a system where the point sources are distributed in random way, this is for analyze the chaos ideas in the setup. For this, a rigid double pendulum system was used with the point sources in it. It is shown that the irradiance distribution follows a partial, non-linear and second order differential equation, whose solution allows to establish properties analogous to the mathematical structure of entropy. In addition, a description of the irradiance correlation processes is made using the matrix formalism.

Key words: Chaos, correlation, double pendulum, entropy, Young's experiment.

Índice general

Agradecimientos	2
Resumen	3
1. INTRODUCCIÓN	5
1.1. Introducción	5
1.2. Objetivos	6
1.2.1. Objetivo general	6
1.2.2. Objetivos específicos	6
1.3. Motivación	6
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	8
2.1. Interferencia	8
2.1.1. Introducción	8
2.1.2. Intensidad en un patrón de interferencia	9
2.1.3. Divisor de frente de onda: Experimento de Young	12
2.1.4. Intensidad y patrón de franjas	14
2.1.5. Aspectos de coherencia en óptica	16
2.1.6. Procesos coherentes e incoherentes	18
2.1.7. Coherencia espacial	20
3. INTERFERÓMETRO DE YOUNG ALEATORIO	21
3.0.1. Ecuación diferencial para la distribución de irradiancia	22
3.0.2. Construcción de la matriz de coherencia	25
3.1. Implementación de caos en el interferómetro de Young	30
4. CONCLUSIONES	33
Bibliografía	34

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

El estudio que es presentado aquí se sustenta en las diferentes aplicaciones que ofrece la difracción de campos libres [2] en la óptica, tales como atrapamiento de iones de átomos, haces fuente para la generación de plasmones superficiales, como pinzas ópticas, etc. [1, 5]. Teniendo en cuenta lo anterior, lo que se desea es analizar los campos ópticos libres difractados generados cuando se incorpora caos. Por ende, nuestro objetivo se centra en describir las propiedades que exhibe la distribución de irradiancia en un interferómetro de Young donde sus fuentes puntuales presentan movimientos aleatorios y caóticos. Para ello se hace uso del teorema de ergodicidad[9], el cual establece que el promedio de fluctuaciones espaciales es igual a los promedios temporales para campos ópticos estacionarios. De esta manera es posible analizar ensambles de campos ópticos utilizando un conjunto de transmittancias con propiedades aleatorias, lo que genera una superposición de irradiancias mutuamente incoherentes, detectadas en un sensor aditivo. Como una alternativa para estudiar estos sistemas complejos que presentan caos, se muestra que la variación de la distribución de irradiancia con respecto a las coordenadas del plano de detección satisface una ecuación diferencial parcial, no-lineal de segundo grado cuya solución presenta propiedades con estructura funcional análogas a la entropía. Lo cual permite establecer una vía para el análisis de la interferencia de sistemas cuyas condiciones de frontera presentan caos.

Complementariamente se realiza una descripción de los procesos de correlación en irradiancia, se construye la matriz de coherencia en un estado de polarización y luego se amplía la idea a dos puntos en el espacio, generando un desdoblamiento del factor

de coherencia en una estructura matricial y permitiendo relacionar los procesos de cuarto orden con el teorema de Van Cittert-Zernike. Finalmente para implementar caos en esta clase de sistemas, se propone un péndulo doble como prototipo, en donde las fuentes puntuales estarán ubicadas sobre el extremo de cada péndulo, y se muestra la evolución de la envolvente en los patrones de irradiancia en los distintos estados del péndulo doble.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

- Analizar la evolución de las franjas de interferencia cuando la posición de las fuentes puntuales sigue fluctuaciones aleatorias o caóticas y mostrar que la distribución de irradiancia sigue una ecuación. Teniendo en cuenta lo anterior, lo que se desea es poder generar campos ópticos libres difractados con un perfil ajustable incorporando caos. Por ende, nuestro objetivo se centra en analizar las propiedades que exhibe la distribución de irradiancia en un interferómetro de Young donde sus fuentes puntuales presentan movimientos aleatorios o caóticos. Para ello se hace uso del teorema de ergodicidad parcial no-lineal cuya solución permite describir procesos con propiedades como de entropía

1.2.2. Objetivos específicos

- Realizar una descripción de procesos de correlación en irradiancia usando un formalismo matricial.
- Utilizar como prototipo el experimento de Young con las fuentes puntuales presentando una distribución de forma aleatoria o caótica.

1.3. Motivación

En el estudio de los campos libres difractados, se han encontrado diversas aplicaciones en la generación de campos ópticos estructurados (interferidos). Cuando agregamos propiedades estadísticas al campo interferido, podemos manipular de cierta

manera su perfil de irradiancia. En este sentido, una de las formas más sencillas para desarrollar la idea principal de esta tesis, es tomar un ensamble de dos fuentes puntuales, donde algunas variables como la separación relativa entre las fuentes o su ángulo de inclinación relativo, son variables aleatorias. Así como también cuando las trayectorias de las fuentes exhiben trayectorias caóticas. De manera que, para nuestro grupo de óptica estadística, es sumamente interesante estudiar el problema de interferencia en los ensambles de fuentes puntuales con comportamientos aleatorios y caóticos.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Interferencia

2.1.1. Introducción

“We are fully authorised to conclude, that there must be some resemblance between the nature of sound and that of light.”

Thomas Young, 1803. Experiments and calculation relative to physical optics.

En esta sección se establecen los principios fundamentales que están involucrados en los fenómenos de interferencia de los campos ópticos. Cuando dos o más haces de luz son superpuestos, la distribución de intensidad no puede describirse de una manera sencilla como lo es la óptica de rayos. En consecuencia, si la luz de una fuente es dividida por un aparato adecuado en dos haces que luego son superpuestos, la intensidad en la región de superposición cambiará de punto a punto entre máximos que sobrepasan la suma de intensidades de los haces, y mínimos que pueden ser cero. A este fenómeno se le conoce como interferencia. Si los dos haces son originados en la misma fuente, las fluctuaciones en los dos haces están en general correlacionadas. Los haces serán completamente o parcialmente coherentes dependiendo si la correlación es parcial o completa. Si por el contrario los haces se producen en fuentes diferentes, las fluctuaciones son completamente no correlacionadas, y los haces se conocen como mutuamente incoherentes. Además, cuando haces de este tipo se superponen, no se genera interferencia bajo condiciones regulares del experimento, y la intensidad total es en todas partes la suma de las intensidades de los haces individuales.

Existen dos métodos generales para la obtención de haces a partir de un solo haz de luz. En otros términos, los dispositivos interferométricos pueden dividirse en dos grupos: divisores de frente de onda y divisores de amplitud. Para el primer grupo, el haz es dividido pasando a través de aberturas ubicadas lado a lado, y es útil solo con fuentes lo suficientemente pequeñas. Para el segundo grupo, el haz es dividido en una o más superficies reflectantes, en donde parte de la luz es transmitida y parte es reflejada; este puede usarse con fuentes extendidas, lo que implica que los efectos serán de mayor intensidad que en los divisores de frente de onda.

2.1.2. Intensidad en un patrón de interferencia

La intensidad \mathbf{I} de la luz, se define como el promedio temporal de la cantidad de energía que atraviesa en una unidad de tiempo, una unidad de área perpendicular a la dirección de flujo de energía. Para una onda plana, en concordancia con [3],

$$I = v \langle w \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \langle H^2 \rangle \quad (2.1)$$

Estas relaciones se mantienen por lo menos como una aproximación para ondas de tipo más general. Como se comparan las intensidades en el mismo medio, podemos considerar la cantidad $\langle E^2 \rangle$ como una medida de la intensidad. Para nuestros propósitos emplearemos campos monocromáticos y representaremos el vector eléctrico \mathbf{E} , como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}\{\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \quad (2.2)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es un vector complejo con componentes cartesianas rectangulares:

$$\mathbf{A}_x = a_1(\mathbf{r})e^{ig_1(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{A}_y = a_2(\mathbf{r})e^{ig_2(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{A}_z = a_3(\mathbf{r})e^{ig_3(\mathbf{r})} \quad (2.3)$$

Donde a_j y g_j ($j=1,2,3$) son funciones reales. Para una onda plana homogénea las amplitudes a_j son constantes, mientras que las funciones de fase g_j son de la forma $g_j(r) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta_j$, \mathbf{k} es el vector de propagación y las δ_j son las constantes de fase que determinan el estado de polarización.

Tomando (2.2)

$$\mathbf{E}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 e^{-2i\omega t} + \mathbf{A}^{*2} e^{2i\omega t} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*), \quad (2.4)$$

Si tomamos el promedio temporal sobre un intervalo más largo comparado con el periodo $T = 2\pi/w$,

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \frac{1}{2} (|\mathbf{A}_x|^2 + |\mathbf{A}_y|^2 + |\mathbf{A}_z|^2) = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (2.5)$$

A continuación, supongamos dos ondas monocromáticas E_1 y E_2 que son superpuestas en un punto P. Además, asumiremos que las dos ondas se propagan en la misma dirección, están polarizadas con sus vectores de campo en el mismo plano y tienen la misma frecuencia. La amplitud compleja en cualquier punto del patrón de interferencia será la suma de las amplitudes complejas de las dos ondas. Por tanto, podemos escribir

$$A = A_1 + A_2 \quad (2.6)$$

Donde $A_1 = a_1 e^{i\phi_1}$ y $A_2 = a_2 e^{i\phi_2}$ son las amplitudes complejas de las dos ondas. De esta forma, la intensidad resultante es

$$\begin{aligned} I &= |A|^2 \\ &= (A_1 + A_2)(A_1^* + A_2^*) \\ &= |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* + A_1^* A_2 \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \end{aligned} \quad (2.7)$$

I_1 e I_2 son las intensidades debido a las dos ondas que actúan separadamente, y $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ es la diferencia de fase entre ambas. El tercer término es conocido como el término de interferencia y se define como

$$J_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \quad (2.8)$$

Cuando las dos ondas se derivan de una misma fuente, tienen igual fase en el origen, la diferencia de fase $\Delta\phi$ corresponde a una diferencia de camino óptico

$$\Delta p = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\phi, \quad (2.9)$$

o un tiempo de retardo

$$\tau = \frac{\Delta p}{c} = \frac{\lambda}{2c\pi} \Delta\phi \quad (2.10)$$

Con el orden de interferencia

$$N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta p}{\lambda} = v\tau \quad (2.11)$$

Si la diferencia de fase entre los haces varía lineal y transversalmente al campo de observación, la intensidad variará cosenoidalmente, dando lugar a franjas brillantes y oscuras conocidas como franjas de interferencia. Las franjas corresponden a las regiones de diferencia de fase constante. Es decir, cuando la diferencia de camino óptico es constante.

De (2.7) es evidente que existe un máximo de intensidad

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (2.12)$$

cuando $\Delta\phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

y un mínimo de intensidad

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (2.13)$$

cuando $\Delta\phi = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$

Para el caso especial $I_1 = I_2$, (7) se convierte en

$$I = 2I_1(1 + \cos \Delta\phi) = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} \quad (2.14)$$

y la intensidad cambiará entre un valor máximo $I_{max} = 4I_1$, y un valor mínimo $I_{min} = 0$.

Es importante mencionar que el análisis de las franjas se hace usualmente a grandes distancias con respecto a las fuentes. En esta región, podemos considerar ondas planas que vienen de las fuentes cuyo patrón de irradiancia es del tipo coseno cuadrado. Por tanto, se tiene una serie de franjas blancas y negras, rectas y paralelas, las cuales mantienen su forma en la distancia (solamente es ampliado el patrón). Esto es lo que se conoce como campo lejano, y en esta región las amplitudes no varían mucho permitiendo un tratamiento matemático más simple. Por otra parte, en el caso de campo cercano, resulta un análisis más complicado. Esto es debido a que las dos ondas pueden llegar a un punto arbitrario con diferencias de ángulo de fase y amplitud considerables, produciendo patrones de interferencia más variados.

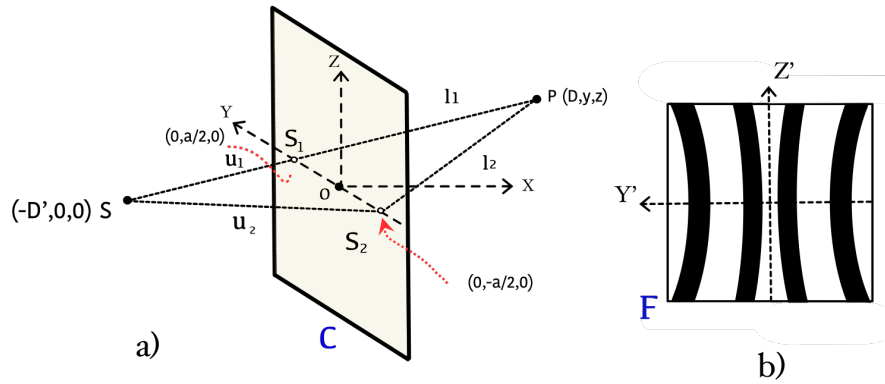


Figura 2.1: a) Arreglo experimental para la formación de las franjas de Young. Un punto S se ubica enfrente de una pantalla opaca C con dos pequeños agujeros en ella S_1 y S_2 . El campo en el punto P al otro lado de la pantalla se puede considerar como el producto de la superposición de los campos correspondientes a los caminos SS_1P y SS_2P . b) Distribución de intensidad resultante que consiste de máximos y mínimos, y que aparece en forma de familias de franjas hiperbólicas en cualquier plano, así como el plano F paralelo a C .

2.1.3. Divisor de frente de onda: Experimento de Young

El experimento de Young es una forma sencilla de hacer interferir dos ondas que se cruzan, y esta fue la primera demostración de la naturaleza ondulatoria de la luz. Para la descripción del arreglo Fig 2.1 consideremos una onda plana monocromática hipotética que ilumina un pequeño agujero, produciendo una fuente puntual, ubicada frente a una pantalla C ; esta tiene dos agujeros S_1 y S_2 . Resulta claro que las asunciones anteriores se hacen para idealizar un arreglo simple dónde se puedan aplicar los conceptos básicos. Si imaginamos cualquier punto P de observación al otro lado de la pantalla, podemos representar el campo en este punto como la superposición de dos campos, cada uno transmitido a través de agujeros lo suficientemente cerca. De nuevo, esta suposición es válida solo en el límite donde los agujeros son lo suficientemente pequeños y su separación relativa es grande con respecto a la longitud de onda de la radiación incidente.

Por su simplicidad usaremos la teoría de campo escalar φ , los campos S_1 y S_2 en cualquier instante de tiempo t , debido a la onda esférica monocromática de frecuencia

w en el vacío, emitidos por la fuente S son

$$\varphi_1 = \frac{A}{u_1} e^{i(ku_1 - wt)} \quad y \quad \varphi_2 = \frac{A}{u_2} e^{i(ku_2 - wt)} \quad (2.15)$$

respectivamente, donde u_1 y u_2 representan las distancias SS_1 y SS_2 , y $k = w/c = 2\pi/\lambda$. Se asume que la propagación toma lugar en el espacio libre. De manera general consideramos que los campos al otro lado de los agujeros son

$$\varphi'_1 = A_1 e^{i(ku_1 - wt)} \quad y \quad \varphi'_2 = A_2 e^{i(ku_2 - wt)} \quad (2.16)$$

las amplitudes A_1 y A_2 deben diferir de A/u_1 y A/u_2 en magnitud y fase; esto se debe a que los agujeros hechos por un alfiler pueden variar en tamaño y a que las transparencias ubicadas en esta pueden causar cambios de fase en las ondas transmitidas. Podemos encontrar las ondas que alcanzan el punto de observación P a través de los dos hoyos, cada uno transmitiéndose independientemente del otro invocando la formula de oro [8] como

$$\varphi_1^{(p)} = \varphi'_1 e^{ikl_1} \quad , \quad \varphi_2^{(p)} = \varphi'_2 e^{ikl_2} \quad (2.17)$$

l_1 y l_2 son las longitudes de camino S_1P , S_2P . No se tuvieron en cuenta las variaciones de la amplitud en la propagación puesto que son muy pequeñas comparadas con las variaciones de fase. La función de onda en el punto P para las ondas que se transmiten en el mismo instante a través de los agujeros, se encuentra como la superposición de los campos involucrados, de manera que

$$\begin{aligned} \varphi^{(p)} &= A_1 e^{i(k(u_1+l_1)-wt)} + A_2 e^{i(k(u_2+l_2)-wt)} \\ &= e^{i(k(u_1+l_1)-wt)} \left(A_1 + A_2 \frac{e^{i(k(u_2+l_2)-wt)}}{e^{i(k(u_1+l_1)-wt)}} \right) \\ &= e^{i(k(u_1+l_1)-wt)} \left(A_1 + A_2 e^{ik((u_2+l_2)-(u_1+l_1))} \right) \\ &= e^{i(k(u_1+l_1)-wt)} (A_1 + A_2 e^{i\delta}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

δ es la diferencia de fase entre las ondas que interfieren y está relacionada con la diferencia de camino l de S a P para los dos caminos que pasan por S_2 y S_1 , de manera que

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} l \quad (2.19)$$

aquí se considera la propagación en el espacio libre, mientras que de manera más

general, se tiene que reemplazar la diferencia de camino geométrico l en la ecuación (2.19) por la diferencia de camino óptico. Otra posibilidad es mantener la diferencia de camino geométrico mientras se reemplaza la longitud de onda por la del medio donde ocurre la propagación. De esta manera

$$l = [SS_2P - SS_1P]. \quad (2.20)$$

Los paréntesis [...] denotan la longitud de camino óptico para el caso de propagación en el espacio libre.

2.1.4. Intensidad y patrón de franjas

Se tiene que la intensidad en el punto P con un factor de escala unitario, es

$$\begin{aligned} I^{(P)} &= \langle |\varphi^{(p)}|^2 \rangle \\ &= I_1 + I_2 + I_{12} \cos(\delta + \delta_0), \end{aligned} \quad (2.21)$$

En consecuencia con (2.7), I_1 e I_2 corresponden a las intensidades en el punto P para cada onda que se transmite independientemente desde los agujeros, e $I_{12} \cos(\delta + \delta_0)$ es el termino de interferencia de las ondas que se transmiten en simultaneo. De esta manera

$$I_1 = \langle |A_1|^2 \rangle, \quad I_2 = \langle |A_2|^2 \rangle, \quad I_{12} = 2 \langle |A_1 A_2| \rangle, \quad (2.22)$$

Aquí δ_0) representa la fase de $A_1^* A_2 = |A_1 A_2| \exp(\delta_0 i)$, lo cual significa una fase constante, independiente del punto P de observación. Se asumirá $\delta_0 = 0$ por sencillez.

Como en el caso de (2.12) y (2.13), las intensidades máximas y mínimas correspondientes al arreglo anterior son los siguientes conjuntos de valores para la diferencia de camino

$$\begin{aligned} (\text{maximo}) \quad l &= n\lambda_0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2) \\ (\text{minimo}) \quad l &= (n + \frac{1}{2})\lambda_0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

De manera que, para las diferentes ubicaciones posibles del punto de observación P, los puntos de observación de máxima y mínima intensidad corresponderán a valo-

res fijos de la diferencia de camino $l_2 - l_1 = S_2P - S_1P$; esto se debe a que $u_2 - u_1$ no dependen de la posición de P. Es decir, que las franjas de interferencia constituyen un conjunto de hiperboloides de revolución en el espacio sobre la parte oscura de la pantalla. En concreto, el lugar del punto de observación P correspondiente a un valor dado de l es un hiperboloide de dos hojas, el cual se obtiene rotando una hipérbola al rededor de su eje mayor (es decir, la línea donde se encuentran los focos), que en este caso es la línea que contiene las dos fuentes puntuales. La sección del sistema de hiperboloides correspondiente a varios valores fijos posibles de l por cualquier plano, da en general, una familia de hipérbolas. Por lo que para un plano F paralelo a la pantalla, se obtienen franjas de interferencia hiperbólicas como en Fig.2.1B

Denotemos ahora la diferencia de camino $[S_2P] - [S_1P]$ como q , implicando que dé la geometría de la Fig.2.1a) que $q_2 < d_2$. Entonces, la ubicación de los puntos sobre el plano F corresponden a un valor constante de q dado por

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.24)$$

donde

$$a^2 = \frac{q^2 D^2 (1 + \frac{d^2 - q^2}{4D^2})}{d^2 - q^2}, b^2 = D^2 (1 + \frac{d^2 - q^2}{4D^2}) \quad (2.25)$$

lo cual representa una hipérbola con excentricidad

$$e = \frac{d}{q} \quad (2.26)$$

Debe notarse que a medida que nos alejamos de una pequeña región al rededor del origen en el plano F, la visibilidad de las franjas disminuye. Por simplicidad hagamos las siguientes aproximaciones

$$|q| \ll d \ll D, \quad y \ll D \quad (2.27)$$

en cuyo caso la hipérbola se reduce a una línea recta de la forma

$$y = \frac{qD}{d} \quad (2.28)$$

La geometría del arreglo en la Fig.2.1a) es un caso particular donde $[SS_2] - [SS_1] = 0$, es decir $l = q$. Como se mencionó anteriormente, escogimos que la constante de fase

$\delta_0 = 0$ y con ello se encuentran los mínimos y máximos de intensidad

$$\begin{aligned} (\text{maximo}) \quad q &= n\lambda_0, \\ (\text{minimo}) \quad q &= (n + \frac{1}{2})\lambda_0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Realizando las consideraciones establecidas anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned} (\text{maximo}) \quad y &= n\frac{\lambda_0 D}{d}, \\ (\text{minimo}) \quad y &= (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda_0 D}{d} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dicho de otra forma, cerca al eje O'Y' en el plano F, las franjas de interferencia son pequeños segmentos de líneas rectas con un grosor de franjas

$$w = \frac{\lambda_0 D}{d} \quad (2.31)$$

De manera más general, la ubicación en el espacio del máximo y el mínimo de intensidad corresponden a un sistema de hiperboloides de revolución dados por (2.25) y (2.26), cuyos valores de q satisfacen (2.29). Cuando las franjas del arreglo de la Fig.1 son formadas sobre una región extendida del espacio, se dice que pertenece a la clase de franjas extendidas. En contraste, ciertos arreglos interferométricos, como lo son aquellos con fuentes extendidas, producen franjas localizadas que se forman solo en ciertos planos especiales [3].

2.1.5. Aspectos de coherencia en óptica

En esencia la coherencia es la relación estadística entre un par de campos eléctricos E_1 y E_2 , que pueden representar la luz en dos puntos en el espacio ó también pueden representar las componentes ortogonales en un único punto (estado de polarización). Para la aplicación de coherencia de la luz es importante establecer los principios de la coherencia en radiación. Cuando la radiación emitida desde dos fuentes puntuales mantiene una relación de fase fija entre ellas, se conoce como mutuamente coherentes. Se dice que una fuente extendida es coherente si todos los puntos de la fuente tienen una diferencia de fase constante entre ellas. En teoría electromagnética clásica generalmente se asume que los campos eléctricos y magnéticos pueden me-

dirse siempre en cualquier momento y posición. En este sentido, no es necesaria la teoría de coherencia, pero para ciertas situaciones, como determinar el patrón de difracción causado por la radiación de muchas fuentes, es sumamente útil. De esta manera se puede obtener un ensamble promedio que represente el resultado estadístico más probable de cualquier combinación de fuentes. Resulta mucho más práctico proporcionar una descripción estadística, que seguir el comportamiento dinámico de un campo ondulatorio detalladamente. Supongamos un campo electromagnético ondulatorio que se propaga en el espacio. Denotemos $E_1(t)$ y $E_2(t)$ como las perturbaciones instantáneas de la onda en las posiciones 1 y 2 respectivamente. Se escoge el momento de segundo orden como la cantidad para ser promediada, así

$$\Gamma_{12}(\tau) \triangleq \langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle \quad (2.32)$$

La expresión (2.32) se conoce como la función de coherencia mutua, donde el asterisco representa el complejo conjugado y τ indica una variable de retardo de tiempo. Los paréntesis angulares representan un promedio estadístico, que en óptica, por la ergodicidad del campo, se convierte en un promedio temporal de la forma

$$\Gamma_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^T E_1(t + \tau)E_2^*(t)dt \quad (2.33)$$

De (2.33) podemos identificar que la función de coherencia mutua es esencialmente la función de correlación cruzada temporal entre E_1 y E_2 .

A partir de la función de coherencia mutua puede definirse el grado complejo de coherencia, tal que

$$\gamma_{12}(\tau) \triangleq \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}} \quad (2.34)$$

$\Gamma_{11}(\tau)$ y $\Gamma_{22}(\tau)$ son las funciones de auto-coherencia de $E_1(t)$ y $E_2(t)$ respectivamente. La función de coherencia mutua normalizada $\gamma_{12}(\tau)$ puede medirse aplicando el experimento de Young de la Fig.2.1. Sin embargo, no es necesario tener luz completamente coherente para formar un patrón de interferencia, de manera que, bajo ciertas condiciones, puede obtenerse tal patrón con fuentes incoherentes. Ya que $E_1(t)$ y $E_2(t)$ satisfacen la ecuación escalar de onda dada por

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

se puede escribir la intensidad en el punto P como

$$I_p = \langle E_p(t)E_p^*(t) \rangle = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\langle c_1 E_1(t - \frac{l_1}{c})c_2^* E_2^*(t - \frac{l_2}{c}) \rangle \quad (2.36)$$

si ahora se define $t_1 = l_1/c$, $t_2 = l_2/c$ y $\tau = t_1 - t_2$ podemos reescribir (2.36) como

$$I_p = I_1 + I_2 + 2c_1 c_2^* \text{Re}[G_{12}(\tau)] \quad (2.37)$$

cuando se sustituye $|c_1|^2 G_{11}(0) = I_1$ y $|c_2|^2 G_{22}(0) = I_2$, lo cual es conocido como la mejor condición. Podemos escribir la intensidad como

$$I_p = 2I[1 + |\gamma_{12}(\tau)| \cos \phi_{12}(\tau)] \quad (2.38)$$

de lo cual puede observarse que la visibilidad de las franjas se obtiene a partir del grado de coherencia [7]

$$v = |\gamma_{12}(\tau)| \quad (2.39)$$

En otros términos, en las mejores condiciones, la visibilidad de las franjas será una medida del grado de coherencia.

2.1.6. Procesos coherentes e incoherentes

Asumamos el sistema óptico descrito en la Fig.2.2. La luz que se emite por la fuente S se considera monocromática. La distribución de luz intrincada dS en el plano de entrada es representada por $E(y, z)$, esto para determinar el campo electromagnético en el plano de salida. Cuando la transmitancia de la amplitud compleja del plano de entrada es $f(y, z)$, el campo de luz justo detrás del plano de la señal será $E(y, z)f(y, z)$. Si el sistema óptico es lineal e invariante espacialmente, el campo electromagnético en el plano de salida del sistema a través de dS se puede escribir

$$g(\xi, v) = [E(z, y)f(z, y)] * h(z, y) \quad (2.40)$$

el asterisco representa el operador convolución, y la distribución de intensidad a través de S está dada por

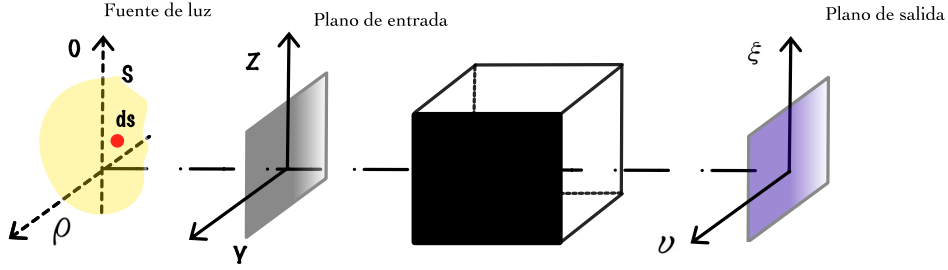


Figura 2.2: Sistema óptico hipotético para el procesamiento de señales.

$$I(\xi, v) = \iint |g(\xi, v)|^2 dS \quad (2.41)$$

lo que puede escribirse como

$$I(\xi, v) = \iiint \Gamma(z, y; z', y') h(\xi - z, v - y) h^*(\xi - z', v - y') \cdot f(z, y) f^*(z', y') dz dy dz' dy' \quad (2.42)$$

donde

$$\Gamma(z, y; z', y') = \iint_S E(z, y) E^*(z', y') dS \quad (2.43)$$

es la función de coherencia espacial, también llamada como la función de intensidad mutua. Escojamos dos puntos arbitrarios P_1 y P_2 en el plano de entrada. Si l_1 y l_2 son las distancias desde P_1 y P_2 hasta dS , las perturbaciones respectivas de luz en P_1 y P_2 a través de dS se puede escribir como

$$E_1(z, y) = \frac{[I(o, \rho)]^{1/2}}{l_1} e^{ikl_1}, \quad E_2(z', y') = \frac{[I(o, \rho)]^{1/2}}{l_2} e^{ikl_2} \quad (2.44)$$

$I(o, \rho)$ representa la distribución de irradiancia de la fuente de luz. Sustituyendo (2.44) en (2.43) se obtiene

$$\Gamma(z, y; z', y') = \iint_S \frac{I(o, \rho)}{l_1 l_2} e^{ik(l_1 - l_2)} dS \quad (2.45)$$

usando la aproximación de rayos de luz paraxiales podemos escribir $l_1 - l_2$ de la siguiente forma

$$l_1 - l_2 \approx \frac{1}{l} [o(z - z') + \rho(y - y')] \quad (2.46)$$

l es la distancia entre la fuente y el plano de la señal. Por tanto la Eq (2.45) se

transforma en

$$\Gamma(z, y; z', y') = \frac{1}{l^2} \iint_S I(o, \rho) e^{i\frac{k}{l}[o(z-z')+\rho(y-y')]} do d\rho \quad (2.47)$$

lo que es, en esencia, la transformada inversa de Fourier de la distribución de intensidad de la fuente. La expresión (2.47) también se conoce como el teorema de Van Cittert. Zernike.

2.1.7. Coherencia espacial

Para introducir la coherencia espacial se hace el estudio con una fuente extendida incoherente. Se usa un procesador de señales convencional [11]. Basándonos en la ecuación para la función de coherencia espacial (2.47) se tiene

$$\Gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) = \iint \gamma(\mathbf{x}_1) e^{i2\pi\frac{\mathbf{x}_1}{\lambda f}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2)} d\mathbf{x}_1 \quad (2.48)$$

puede observarse que la función de coherencia espacial y la intensidad de la codificación de la fuente forman un par de transformadas de Fourier, dadas por

$$\gamma(\mathbf{x}_1) = F[\Gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2)] \quad (2.49)$$

$$\Gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) = F^{-1}[\gamma(\mathbf{x}_1)]$$

F representa el operador transformada de Fourier. De manera que, si se tiene una función de coherencia espacial específica, puede obtenerse su correspondiente función de codificación de la fuente a través de la transformada de Fourier. Debe notarse que la función de codificación de la fuente $\gamma(\mathbf{x}_1)$ puede consistir de aperturas de diferentes formas o rendijas, pero esta debe ser una función real positiva que satisface la siguiente restricción físicamente realizable

$$0 \leq \gamma(\mathbf{x}_1) \leq 1 \quad (2.50)$$

Capítulo 3

INTERFERÓMETRO DE YOUNG ALEATORIO

Con el fin de introducir las ideas de caos en los sistemas interferométricos, analizamos en primer lugar un interferómetro de Young con una distribución aleatoria de las fuentes puntuales. En la Fig.3 se muestra el arreglo experimental, donde en concreto, la separación relativa entre las fuentes y su ángulo, son variables aleatorias. Si asumimos por simplicidad que las ondas son monocromáticas, tienen igual intensidad y sus frecuencias son cercanas, de acuerdo a (2.21) y teniendo en cuenta que existen fluctuaciones del campo, podemos expresar la distribución de intensidad como

$$I(x, y, \zeta) = A + B\gamma[\cos a(x\cos\zeta + y\sin\zeta)] \quad (3.1)$$

En el experimento de la Fig.3.1 se usa un detector que superpone todos los patrones de interferencia, teniendo en cuenta que estamos sobre un círculo frecuencial, donde la separación entre las fuentes a y su posición angular ζ , son variables aleatorias con densidad de probabilidad conjunta $\rho(a, \zeta)$. En este sentido, lo que podemos detectar es la distribución de irradiancia promedio dada por

$$\langle I(x, y) \rangle = \int_0^d \int_0^{2\pi} B\gamma[\cos a(x\cos\zeta + y\sin\zeta)]\rho(a, \zeta)dad\zeta \quad (3.2)$$

en donde la estructura de $\rho(a, \zeta)$ permite la generación de haces libres difractados con perfiles sintonizables [4]. Para algunos casos simples donde la función de densidad de probabilidad es uniforme y la separación relativa es una constante, se obtienen distribuciones de irradiancia dadas por funciones de Bessel de orden cero. En el caso general, el núcleo de la ecuación (3.2) representa una resolución laborio-

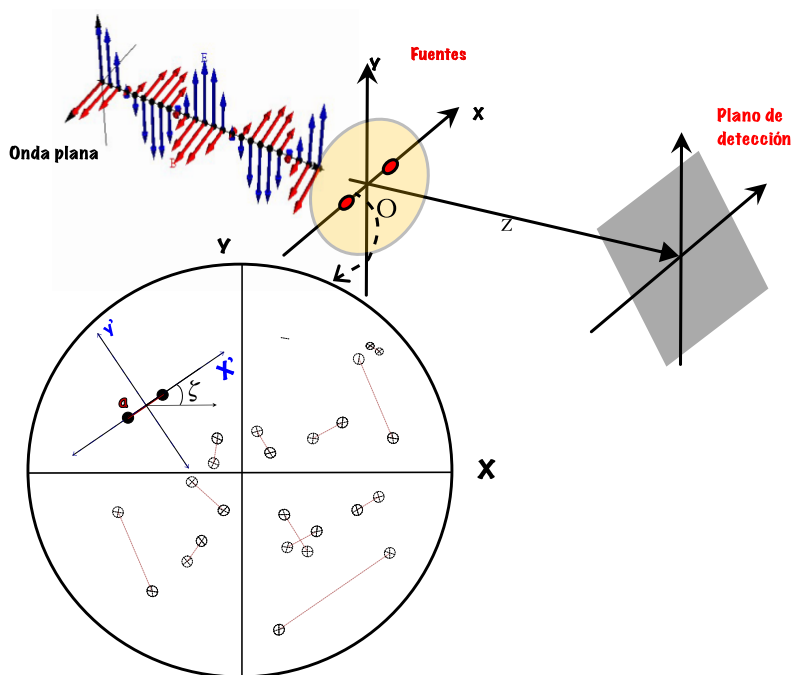


Figura 3.1: Interferómetro de Young con la separación entre las fuentes a y el ángulo ζ relativo como variables aleatorias.

sa y es oscuro cómo introducir características de tipo caótico en este modelo. En consecuencia analizaremos el problema con otro razonamiento descrito en seguida.

3.0.1. Ecuación diferencial para la distribución de irradiancia

Tomemos de nuevo la expresión (3.1) para la irradiancia en el experimento de Young pero en su caso más simple. De manera que

$$I = A + B \cos[\mathbf{a}(\hat{k}_1 - \hat{k}_2) \cdot \hat{r}] \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= (k_{1x}, k_{1y}, k_{1z}), \\ \hat{k}_2 &= (k_{2x}, k_{2y}, k_{2z}), \\ \hat{r} &= (x, y, z). \end{aligned}$$

con el plano de detección en $z = \text{constante}$. De manera alternativa, para un entendimiento más profundo de la ecuación (3.3) y para tener una noción de cómo introducir las ideas de cuando las fuentes del interferómetro presenten distribuciones aleatorias o caóticas, estudiamos cómo son las variaciones de la irradiancia con respecto a sus coordenadas y se encuentra que estas tienen la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \quad (3.4)$$

Siendo esta es una ecuación diferencial, parcial, no lineal, de segundo orden, cuya solución puede encontrarse usando el método de separación de variables. Nos interesa encontrar soluciones que sean de la forma

$$I(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.5)$$

sustituyendo (3.5) en (3.4) tenemos

$$\frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.6)$$

$$X(x)Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} \right)^2$$

dividiendo toda la expresión por $Y(y)$ y separando los términos de (x) y (y) se tiene

$$X(x) \frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} \right)^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{\left(\frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}$$

por tanto ambos lados de la ecuación deben ser constantes, y escribiremos

$$X(x) \frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} \right)^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{\left(\frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}} = \alpha$$

de aquí resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$X(x) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \alpha \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} \right)^2$$

$$\left(\frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right)^2 = \alpha Y(y) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

Tomando la ecuación para (x) y dividiéndola por la derivada parcial con respecto

a (x)

$$\frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{\frac{\partial X(x)}{\partial x}} = \frac{\alpha}{X(x)} \frac{\partial X(x)}{\partial x}$$

realizando la integración

$$\ln \frac{dX(x)}{dx} = \alpha \ln X(x) + c$$

por lo tanto

$$\frac{dX(x)}{dx} = cX^\alpha(x)$$

Esta ecuación soporta soluciones de la forma

$$X(x) = cx^\alpha \quad (3.7)$$

De manera similar se encuentra el resultado para la ecuación que depende de (y). Finalmente se encuentra una solución de la forma

$$I = ax^\alpha y^{1-\alpha}, \quad (3.8)$$

donde la constante de acoplamiento α representará el orden de una franja, cuando $\alpha \in \Re$. En el supuesto de que esta constante sea un número complejo, se recuperará el caso del patrón cosenoidal. Por otro lado, si α tiene un valor definido, estamos analizando el comportamiento de una sola franja de interferencia y se cumple que

$$I = \text{constante}. \quad (3.9)$$

Ahora bien, queremos estudiar la distribución de irradiancia cuando el parámetro α está cambiando. Tomando el \ln en cada lado de la expresión (3.8)

$$\ln I = \alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y \quad (3.10)$$

Y derivando cada lado de la expresión con respecto a α

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{d\alpha} = \ln x - \ln y$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = I \ln x - I \ln y$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = x^\alpha y^{1-\alpha} \ln x - x^\alpha y^{1-\alpha} \ln y$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha} x^\alpha \ln x^\alpha - \frac{x^\alpha}{1-\alpha} y^{1-\alpha} \ln y^{1-\alpha}. \quad (3.11)$$

De la ecuación (3.11) podemos identificar dos funciones en (x) e (y), teniendo en cuenta que estas son variable aleatorias encontramos que la función en y presenta una similitud con la entropía descrita por Claude E. Shannon [10]. Con estas nociones reescribimos (60)

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha} S(x, \alpha) - \frac{x^\alpha}{1-\alpha} S(y, \alpha), \quad (3.12)$$

$S(x, \alpha)$ y $S(y, \alpha)$ son interpretadas como funciones de entropía en el sentido del orden [6]. Es decir, que son funciones que describen cómo se distribuye la irradiancia sobre cada coordenada cuando se está cambiando entre franjas de interferencia. Analizando la ecuación (3.12) resultan dos casos interesantes

$$a) \frac{dI}{d\alpha} = \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha} S(x, \alpha) - \frac{x^\alpha}{1-\alpha} S(y, \alpha) = 0 \quad (3.13)$$

Lo que quiere decir que nos estamos moviendo a lo largo de una sola franja de interferencia con $I = \text{constante}$. En consecuencia, la evolución de las funciones de entropía a lo largo de cada coordenada satisface

$$\frac{S(x, \alpha)}{S(y, \alpha)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x^\alpha}{y^{1-\alpha}} \quad (3.14)$$

En concreto la ecuación (3.14) es una proyección de las entropías en las coordenadas del plano de detección.

$$b) \frac{dI}{d\alpha} = \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha} S(x, \alpha) - \frac{x^\alpha}{1-\alpha} S(y, \alpha) = \text{constante} \quad (3.15)$$

En este caso lo que se indica es cómo va a variar la irradiancia cuando estamos cambiando entre franjas de interferencia. Además de las ideas anteriores, queremos presentar un análisis complementario a través de la evolución de la matriz de coherencia.

3.0.2. Construcción de la matriz de coherencia

Como se mencionó anteriormente, la coherencia en óptica permite realizar una relación estadística entre dos variables. En este caso, son las componentes del campo eléctrico en un solo punto, es decir su estado de polarización. Consideremos un punto

P arbitrario en el espacio cuyas componentes del campo eléctrico son E_x y E_y . Estas componentes en general están correlacionadas y una manera de calcularlo es realizando el producto entre el vector de polarización y su transpuesto conjugado. Si, además, asumimos el caso más simple, donde no existen fluctuaciones de los campos, es decir, que son completamente coherentes, se encuentra que

$$\phi(P) \Rightarrow \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} (E_x E_y)^* = J_c \quad (3.16)$$

$$J_c = \begin{pmatrix} |E_x|^2 & E_x E_y^* \\ E_x^* E_y & |E_y|^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

La expresión (3.17) es la matriz de coherencia del haz, también conocida como matriz de polarización - que contiene en su traza la densidad de energía promedio del campo eléctrico de la luz; y las componentes de la diagonal secundaria J_{xy} y J_{yx} , son, en general, números complejos que representan la correlación entre las componentes (x) y (y). Está claro que J_{xy} y J_{yx} son los complejos conjugados de cada uno, por lo que

$$J_{yx} = J_{xy}^* \quad (3.18)$$

Lo que muestra que la matriz de coherencia es Hermitiana. Cabe notar que para el caso completamente coherente el $\det J_c = 0$. Cuando existen fluctuaciones del campo eléctrico (parcialmente coherente), es necesario tener en cuenta que las componentes serán variables aleatorias, por lo tanto, la matriz de coherencia está dada por

$$J_{pc} = \left\langle \begin{pmatrix} |E_x|^2 & E_x E_y^* \\ E_x^* E_y & |E_y|^2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \langle |E_x|^2 \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_x^* E_y \rangle & \langle |E_y|^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Esta matriz tiene la propiedad de que el $\det J_{pc} \neq 0$. Ahora, se desea conocer qué tanto fluctúan las componentes del campo en el punto P. Para ello, comparamos las matrices completamente coherente y la parcialmente coherente; esto es

$$J_c - J_{pc} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 - \langle |E_x|^2 \rangle & E_x E_y^* - \langle E_x E_y^* \rangle \\ E_x^* E_y - \langle E_x^* E_y \rangle & |E_y|^2 - \langle |E_y|^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

En la expresión (3.20) los elementos de la diagonal secundaria son análogos en su estructura matemática a la intensidad mutua de la teoría escalar [7], de lo anterior

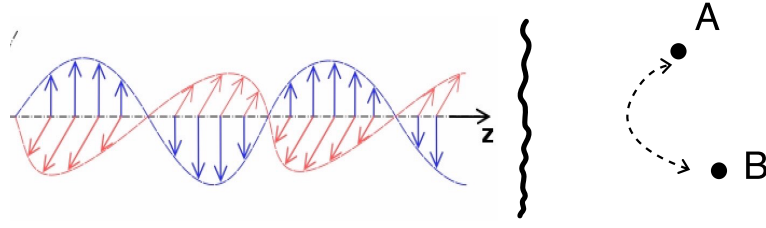


Figura 3.2: 2. Onda plana incidiendo sobre un objeto difractor. A y B representan puntos arbitrarios sobre el campo óptico resultante.

se satisface que

$$\langle E_x E_y^* \rangle = \gamma E_x E_y^* \quad (3.21)$$

donde el factor de coherencia normalizado γ es una medida del grado de correlación que existe entre las componentes E_x y E_y del vector complejo de campo eléctrico en un punto común en el plano $z = \text{constante}$. Reescribiendo (3.20) en términos del grado de coherencia, se tiene

$$J_c - J_{pc} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 - \langle |E_x|^2 \rangle & E_x E_y^* - \gamma E_x E_y^* \\ E_x^* E_y - \gamma E_x^* E_y & |E_y|^2 - \langle |E_y|^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Es importante resaltar que la matriz (3.22) describe la coherencia entre las componentes del campo eléctrico en un mismo punto.

Siguiendo las ideas anteriores, estamos interesados en la correlación que existe entre las matrices de coherencia de dos puntos A y B, como se muestra en la Fig 3.2. Por esto, se establece un isomorfismo con el análisis recientemente presentado.

Este análisis permite conocer las interacciones entre todas las componentes del campo eléctrico, como se muestra en la Fig 3.3. Toda la información de estas interacciones se encontrará en la matriz de coherencia.

Con la idea de la interpretación gráfica de la Fig 3.3 y con los resultados previamente presentados, podemos construir la matriz de correlaciones para esta situación. Entonces

$$J_{12} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} (J_1^\dagger J_2^\dagger) = \begin{pmatrix} J_1 J_1^\dagger & J_1 J_2^\dagger \\ J_2 J_1^\dagger & J_2 J_2^\dagger \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

donde el símbolo \dagger representa la transpuesta conjugada y los subíndices 1 y 2 se refieren a los puntos A y B respectivamente. Los elementos de la matriz (3.23) a su vez, son matrices 2×2 , esto implica que (3.23) es una matriz de 4×4 . Se muestran a continuación las expresiones para J_1 y J_2

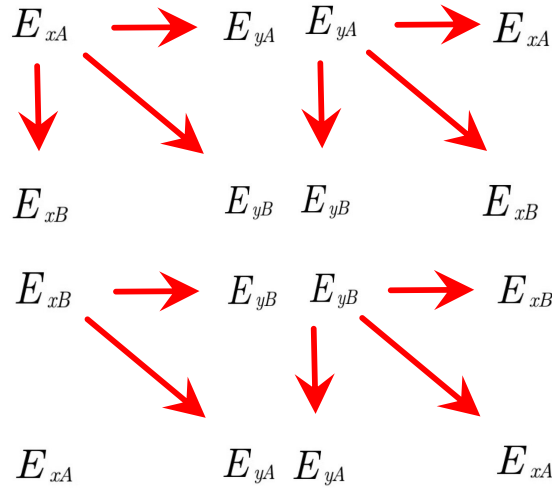


Figura 3.3: Interacción entre las componentes del campo eléctrico.

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(1)} & J_{xy}^{(1)} \\ J_{yx}^{(1)} & J_{yy}^{(1)} \end{pmatrix} \Rightarrow J_1^\dagger = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(1)} & J_{yx}^{*(1)} \\ J_{xy}^{*(1)} & J_{yy}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(2)} & J_{xy}^{(2)} \\ J_{yx}^{(2)} & J_{yy}^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow J_2^\dagger = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(2)} & J_{yx}^{*(2)} \\ J_{xy}^{*(2)} & J_{yy}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Los únicos elementos que llevan a la información de la interacción entre las componentes en la matriz de coherencia, son los de la diagonal secundaria. Dado que estas matrices son Hermitianas, solo es necesario calcular uno de los elementos. De esta manera determinamos los elementos matriciales para los casos coherente y parcialmente coherente, como sigue

$$(J_1 J_2^\dagger)_{pc} = \begin{pmatrix} J_{1xx} J_{2xx} + J_{1xy} J_{2xy}^* & J_{1xx} J_{2yx}^* + J_{1yy} J_{2xy} \\ J_{1yx} J_{2xx} + J_{1yy} J_{2xy}^* & J_{1xy} J_{2yx}^* + J_{1yy} J_{2yy} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$(J_1 J_2^\dagger)_c = \begin{pmatrix} |E_x|_1^2 |E_x|_2^2 + E_{1x} E_{1y} E_{2x}^* E_{2y} & |E_x|_1^2 E_{2y}^* E_{2x} + |E_y|_1^2 E_{2x} E_{2y} \\ E_{1y} E_{1x} |E_x|_2^2 + |E_y|_1^2 E_{2x}^* E_{2y} & E_{1x} E_{1y} E_{2y}^* E_{2x} + |E_y|_1^2 |E_y|_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

En analogía con (3.21), el factor de coherencia para procesos de correlación de

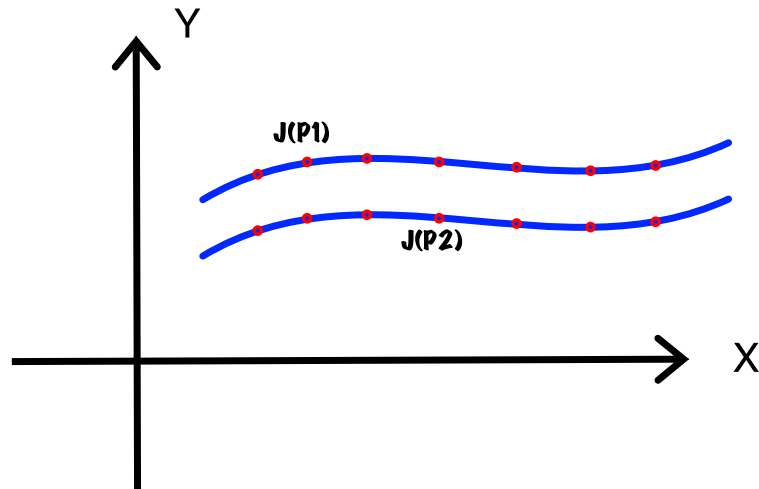


Figura 3.4: Trayectorias franjas de interferencia.

cuarto orden se desdobra en una estructura matricial. De aquí podemos obtener la matriz de correlaciones $\hat{\gamma}$ comparando (3.26) con el caso coherente. De manera simbólica se tiene

$$(J_1 J_2^\dagger)_{pc} = \hat{\gamma} (J_1 J_2^\dagger)_c \quad (3.28)$$

Consideremos ahora que los puntos A y B pueden ubicarse a lo largo de dos franjas de interferencia diferentes como se ilustra en la Fig 3.4. En general, los sistemas interferométricos compuestos de ensambles suelen producir patrones de interferencia donde las franjas ya no son rectas [4]. Cuando correlacionamos estos puntos cualesquiera sobre las franjas, el grado de coherencia matricial será un invariante, es decir, que permanecerá constante a lo largo de estas. Teniendo en cuenta que el grado de coherencia γ está relacionado con el teorema de Van Cittert-Zernike, puede establecerse, en un trabajo posterior, un teorema generalizado para los procesos de correlación de cuarto orden, que ofrecen mayor información del campo óptico interferido y de la estructura de las fuentes.

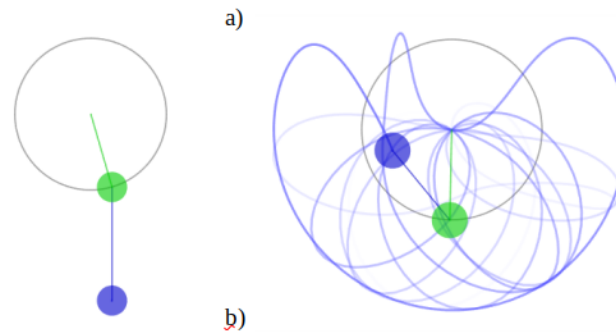


Figura 3.5: a) Sistema de péndulo doble rígido con pequeñas oscilaciones. b) Comportamiento caótico generado al liberar el péndulo en un ángulo de 2π

3.1. Implementación de caos en el interferómetro de Young

Se propone como prototipo un sistema físico muy utilizado para describir caos. Se trata del péndulo doble rígido de la Fig 3.5. Con este arreglo podemos ubicar las dos fuentes puntuales del interferómetro en los extremos de cada péndulo representados por los puntos verde y azul en Fig.3.5a).

Es importante resaltar ciertos aspectos relevantes de la anterior configuración, como lo son: 1. la separación relativa entre las fuentes será una constante, 2. la trayectoria de la fuente más cercana al punto fijo (verde) siempre presentará un movimiento circular. En adición, en un sistema idealizado sin fuerzas de fricción Fig 3.5b). Puede observarse que existen trayectorias preferentes de la fuente azul al rededor del punto fijo que soporta el prototipo. Todo lo anterior implica que el comportamiento caótico estará solamente en las posiciones de la fuente azul, las cuales están descritas por las ecuaciones de movimiento del sistema.

La Fig 3.6 presenta de forma ilustrativa cómo son los patrones de interferencia para un sistema interferométrico ligado a un péndulo doble. En el caso A), el péndulo está completamente suspendido y no oscila, las franjas de interferencia son las del experimento clásico de Young. Si se cambia la posición de equilibrio del péndulo con un pequeño ángulo, el sistema comenzará a oscilar y generará trayectorias como las de la Fig 3.6b). En el arreglo experimental, el movimiento de las fuentes es detectado por el sensor como un promedio en cierto instante de tiempo. Por eso podemos considerar estas trayectorias como las ranuras del interferómetro y propagamos un haz sobre estas. La envolvente de la intensidad contiene las franjas que se disponen

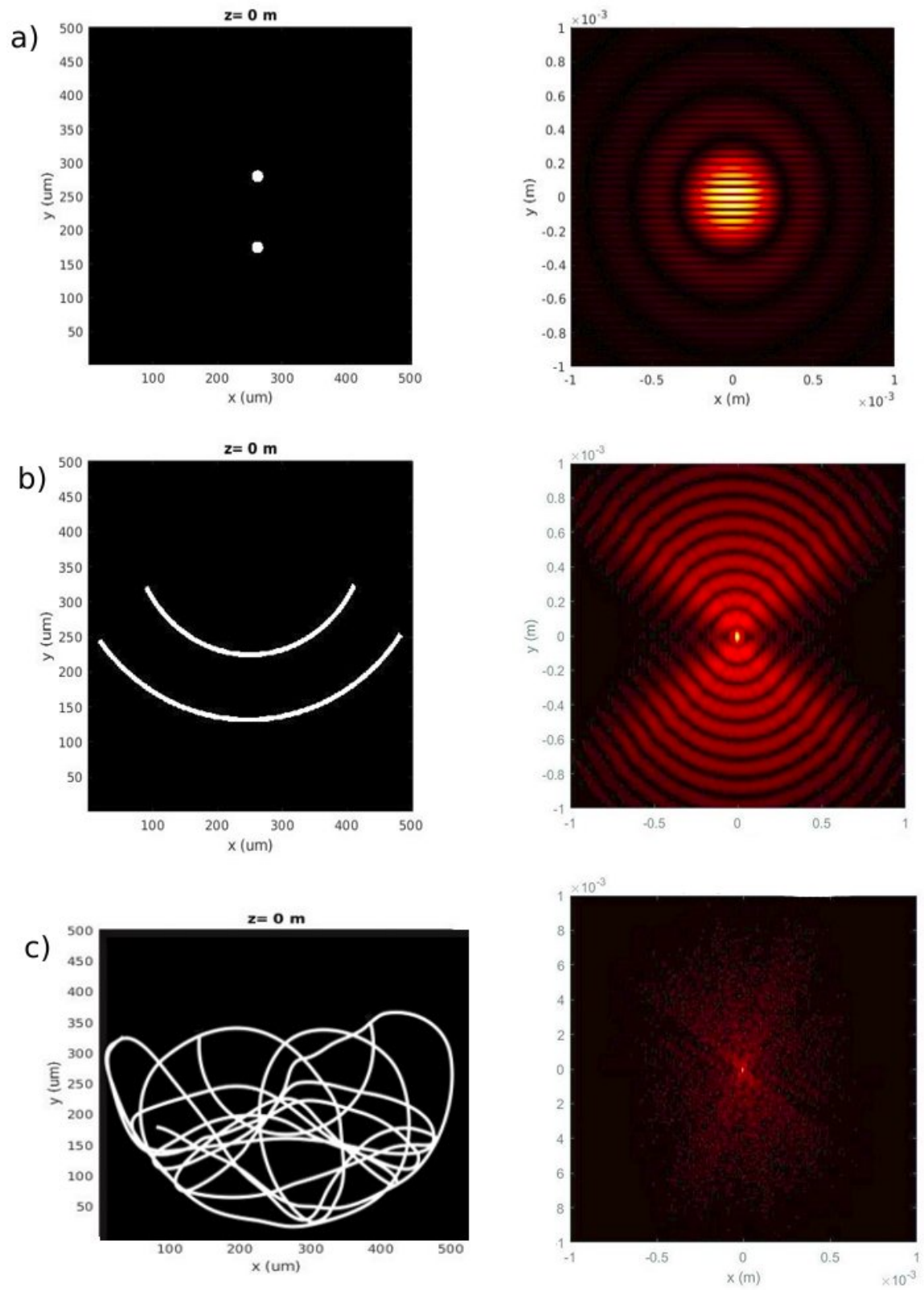


Figura 3.6: Patrones de interferencia para el arreglo de péndulo doble rígido : a) caso estático. b) pequeñas oscilaciones. c) comportamiento caótico.

perpendiculares al movimiento de las fuentes. En este sentido, propagamos un campo sobre las ranuras que se generan cuando el péndulo doble es puesto a oscilar con un ángulo grande (comportamiento caótico) y obtenemos un patrón complicado como el de la Fig 3.6c). Como alternativa para estudiar este tipo de sistemas y evitar incorporar las ecuaciones de Euler-Lagrange, retomamos la expresión (3.8) que satisface la distribución de irradiancia

$$I = ax^\alpha y^{1-\alpha}. \quad (3.29)$$

Ahora, nos interesan los cambios de la irradiancia solo con respecto al parámetro α . tomando el logaritmo de la expresión (3.8) y derivando

$$\begin{aligned} \ln I &= \ln(ax^\alpha y^{1-\alpha}) \\ &= \ln a + \alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y \\ \frac{d}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} (\ln a + \alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y) \\ \frac{1}{I} \frac{dI}{d\alpha} &= \ln x - \ln y \\ \frac{dI}{d\alpha} &= I(\ln x - \ln y) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$I \frac{d^2 I}{d\alpha^2} = \left(\frac{dI}{d\alpha} \right)^2 \quad (3.31)$$

Cuando α cambia aleatoriamente, la expresión (3.31) se convierte en una ecuación diferencial estocástica. Para simplificar el análisis, nos ubicamos sobre una franja de irradiancia constante descrita por la ecuación (3.14)

$$f(x, y, \alpha) = \frac{S(x, \alpha)}{S(y, \alpha)} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{x^\alpha}{y^{1-\alpha}}. \quad (3.32)$$

En cuyo caso tendremos un núcleo mucho más tratable en comparación con la expresión (3.2). Finalmente lo que medimos en el detector es el valor medio

$$\int f(x, y, \alpha) \rho(\alpha) d\alpha = \int \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{x^\alpha}{y^{1-\alpha}} \rho(\alpha) d\alpha, \quad (3.33)$$

donde $\rho(\alpha)$ es la función de densidad de probabilidad. Y cuya estructura nos permitiría generar haces libres difractados con perfiles ajustables, lo cual es de sumo interés en aplicaciones como atrapamiento de nanopartículas o focalización de haces.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

- Se mostró que la distribución de irradiancia para el experimento de Young sigue una ecuación parcial no-lineal, cuya solución permite describir la evolución de las franjas en términos de funciones que contienen la estructura de la entropía, dando información acerca de la organización de estas.
- Se realizó una descripción con las matrices de coherencia de los procesos de correlación en irradiancia, y se propuso una vía para establecer un teorema de Van Cittert-Zernike de cuarto orden.
- Se utilizó como prototipo el experimento de Young para introducir características aleatorias o caóticas en sistemas interferómetros y se encontró una expresión para la irradiancia.

Bibliografía

- [1] J. Livesey D. Mcgloin J. Arlt K. Dholakia D.P. Rhodes, G.P.T. Lancaster. *Opt. Commun*, 247:214, 2002.
- [2] J. Durnin. *J. Opt. Am.*, 651:4, 1987.
- [3] A. Zajac E. Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 2000.
- [4] J. Muñoz Lopez Patricia M. Vara Gabriel M. Niconoff, J.C. Ramirez San Juan. Optical waves in layered media. *Optics Communication*, 275:10–13, 2007.
- [5] W. Sibbett K. Dholakia J. Arlt, V. Garces-Chavez. *Opt. Commun.*, 239:197, 2001.
- [6] Edwin T. Jaynes. *Probability Theory: Thermodynamics*. JBayes.wustl.edu. 2 March 1998, 2009.
- [7] E. Wolf L. Mandel. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge U Press, Cambridge, UK, 1995.
- [8] Avijit Lahiri. *Basic Optics*. Avijit Lahiri,Laketown, Kolkata, 2014.
- [9] M. Yuri M. Pollicot. *CUP*, 1998.
- [10] Daniel V. Schroeder. *An introduction to thermal physics*. San Francisco, CA: Addison Wesley, 2000.
- [11] Francis T. S.YU. *Entropy and information optics*. Marcel Dekker, University park, Pennsylvania, 2000.