



INAOE

**Diseño Y Simulación Del Encuentro,
Acercamiento Y Acoplamiento De Pequeños
Satélites.**

Por

José Fernando Martínez Salazar

Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEL ESPACIO**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica**

Diciembre, 2021

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. José S. Guichard Romero

Dr. Rogerio Enriquez Caldera

©INAOE 2021

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en
partes



Contenido

CONTENIDO	1
RESUMEN.....	4
ABSTRACT	6
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	8
1.1. OBJETIVO	10
1.2. OBJETIVO GENERAL.....	10
1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	10
1.4. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	11
CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES Y TEORÍA	12
2.1. ESTADO DEL ARTE.....	12
2.2. MARCO TEÓRICO.	15
2.3. <i>Antecedentes y conceptos clave.</i>	15
2.4. <i>Leyes de Newton</i>	18
2.5. <i>Leyes de Kepler</i>	19
2.6. <i>Marcos de referencia y sistemas coordinados</i>	22
2.7. <i>Cinemática rotacional de cuerpos rígidos</i>	28
2.7.2. <i>Conservación del momento angular</i>	33
2.7.3. <i>Elementos orbitales</i>	35
2.7.4. <i>Ecuación de Kepler</i>	37
2.7.5. <i>Determinación de órbita</i>	38
2.7.6. <i>Transferencia orbital</i>	42
2.8. <i>Encuentro orbital</i>	50
2.9. <i>Modelado matemático de rotaciones</i>	52
2.9.1. <i>Herramientas matemáticas de la rotación de cuerpos rígidos</i>	53
2.9.2. <i>Ángulos de Euler</i>	53
2.9.3. <i>Matrices de rotación</i>	53
2.9.4. <i>Cuaterniones</i>	56
CAPÍTULO 3 DISEÑO BASADO EN LAS ECUACIONES E IMPLEMENTACIÓN DEL SIMULADOR COMPUTACIONAL	59

3.1.	DESCRIPCIÓN GENERAL.....	59
3.2.	DISEÑO DEL AGENTE ORBITAL	60
3.3.	PROPAGADOR ORBITAL.....	66
3.4.	TRANSFORMACIÓN DE ELEMENTOS ORBITALES A VARIABLES DE ESTADO.....	71
3.5.	INTEGRACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO AL AGENTE ESPACIAL.....	73
3.6.	TRANSFERENCIAS ORBITALES.....	74
CAPÍTULO 4 REALIZACIÓN DEL PROTOTIPO SIMULADOR Y SUS RESULTADOS		78
4.1.	CREACIÓN DE INTERFAZ GRÁFICA DE USUARIO	78
4.2.	PRUEBAS Y RESULTADOS	82
CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO		87
	CONCLUSIONES.....	87
	TRABAJO A FUTURO	88
BIBLIOGRAFÍA		90
	TABLA DE FIGURAS.....	93
APÉNDICES		96
	<i>Apéndice A Transformación de coordenadas.....</i>	<i>96</i>
	<i>Apéndice B Operaciones con cuaterniones.....</i>	<i>108</i>

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Rogerio Enríquez Caldera y al Dr. José S. Guichard Romero por creer en mí, por guiarme a través del proceso de aprendizaje, no únicamente en las cuestiones académicas sino también en lo personal.

Al Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica Y Electrónica (INAOE) por haberme brindado la oportunidad de pertenecer a tan prestigiosa institución, por el apoyo con la beca de ayudantía.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico en la segunda mitad del plan de estudios (agosto de 2020 – agosto de 2021)

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional y aliento en los momentos más difíciles a lo largo de mi trayectoria académica.

Finalmente, pero no menos importante, a mis amigos que me mostraron el camino, aquel que recorrimos juntos; por todo el apoyo.

“This is the way”

Resumen

En trabajos anteriormente realizados en el INAOE, se exploraron ideas de rotación de agentes espaciales para la orientación en su órbita; y, de manera más general, el diseño conceptual de un simulador de navegación aeroespacial. En este trabajo de investigación se unen las rotaciones de una nave espacial (por medio de cuaterniones) con el simulador de navegación, que originalmente era puntual, y que se desarrollaban en el entorno espacial utilizando las leyes de Kepler. Se realizó la programación de un propagador de órbitas circulares considerando el diseño e implementación de la parte nueva del simulador para tomar en cuenta el acercamiento, encuentro y acoplamiento de agentes espaciales. Se inició la descripción de rotación y navegación de un único agente espacial, para posteriormente poder establecer el movimiento conjunto de dos agentes espaciales en órbita.

Las órbitas predefinidas de cada agente fueron calculadas utilizando la técnica de un propagador orbital que fue construido a partir de elementos Keplerianos clásicos y sus correspondientes transformaciones a elementos cartesianos para obtener finalmente las variables de estado más fáciles de interpretar. Luego, con base en la misma, se simuló la puesta en órbita de dos agentes espaciales obteniéndose el total de las variables de estado. Aunado a todo esto la orientación se tratará como una parte clave para el encuentro de los agentes espaciales por lo que se generarán rotaciones en cada uno de estos por medio de cuaterniones

Los conocimientos necesarios para el acercamiento, encuentro y acoplamiento de agentes espaciales se conocen desde hace ya varias décadas, sin embargo, la cantidad de variables que estos estudios abarcan, generan una amplia variedad de posibles misiones espaciales; tomando algunas de estas ideas, el diseñar e implementar un simulador espacial que ponga en práctica algunos de estos conceptos y particularidades es una gran

oportunidad de explorar la investigación en misiones aeroespaciales a nivel mundial.

Esta investigación se inicia con las ecuaciones necesarias para la descripción del movimiento relativo de un agente espacial con respecto a otro que se encuentra en una órbita distinta son las ecuaciones Hill-Clohessy-Wiltshire, así como las ecuaciones de transferencias de Hohmann que describen las maniobras necesarias para generar un cambio en la órbita (aumento o decremento en el radio orbital, considerando que ambas están limitadas a órbitas circulares.

Abstract

In previous work at INAOE, ideas of rotation of space agents for orientation in their orbit were explored; and, more generally, the conceptual design of an aerospace navigation simulator. In this research work, the rotations of a spacecraft are linked (by quaternions) with the navigation simulator, which was originally punctual, and which were developed in the space environment using Kepler's laws. The programming of a circular orbit propagator was carried out considering the design and implementation of the new part of the simulator to consider the rendezvous, encounter and docking of space agents. The description of rotation and navigation of a single space agent began, to later be able to establish the joint movement of two space agents in orbit.

The predefined orbits of each agent were calculated using the technique of an orbital propagator that was constructed from classical Keplerian elements and their corresponding transformations to Cartesian elements to finally obtain the easiest-to-interpret state variables. Then, based on it, the putting into orbit of two space agents was simulated, obtaining all the state variables. In addition to all this, orientation will be treated as a key part for the rendezvous of space agents, so rotations will be generated in each of these through quaternions

The knowledge necessary for the rendezvous, encounter and coupling of space agents has been known for several decades, however, the number of variables that these studies cover generate a wide variety of possible space missions; Taking some of these ideas, designing and implementing a space simulator that puts some of these concepts and particularities into practice is a great opportunity to explore aerospace mission research worldwide.

This investigation begins with the equations necessary for the description of the relative motion of a space agent with respect to another that is in a different orbit are the Hill-Clohessy-Wiltshire equations, as well as the Hohmann transfer equations that describe the maneuvers necessary to generate a change in the

orbit (increase or decrease in the orbital radius, considering that both are limited to circular orbits.

Capítulo 1

Introducción

Las ciencias espaciales son de gran interés desde hace ya algunas décadas, específicamente en los tiempos modernos con la puesta en órbita del primer satélite (Sputnik-1) y siendo éste seguido por una gran cantidad de misiones espaciales, de manera que ahora no sólo se lanzan objetos para orbitar nuestro planeta, sino que se cuenta con misiones de exploración espacial, observación extra e interplanetaria, encuentro de vehículos espaciales (satélites, sondas, naves, etcétera, que en su conjunto llamaremos **agentes espaciales**), entre muchas otras aplicaciones. Pero todo esto no habría sido posible sin la curiosidad de todos los pensadores antiguos que al mirar al firmamento se preguntaban el cómo y por qué de los cuerpos celestes, iniciando un gran viaje de conocimiento. Todo inició con la descripción del movimiento de éstos, ¿Seríamos nosotros el centro del universo?, lastimosamente para el ego del ser humano, no somos más que uno de varios cuerpos celestes que se encuentran en nuestro sistema solar, y con los descubrimientos recientes este antropocentrismo sufrió aún más pues, ni siquiera nuestro sistema solar era el único, tiempo después descubrimos la vastedad del universo en el que nos encontramos sumergidos pues, se han encontrado miles de sistemas estelares, cada uno con sus particularidades. Pero sí que somos especiales en un aspecto, contamos con vida orgánica, evolucionamos y en su mayoría los humanos somos seres racionales y curiosos.

He aquí el inicio de nuestro viaje por este tema tan apasionante, con inquietudes relacionadas con el cómo se mueven en general los agentes espaciales, bajo qué principios se rigen, cuáles son sus elementos clave,

etcétera, algo que antes solo podía ser observado; ahora los parámetros asociados a un agente espacial pueden ser calculados y establecidos, y con esto, pueden ser contruidos y controlados. Tan es así que a través de un esfuerzo integral de varias naciones, se ha logrado concretar una estación espacial internacional que orbita nuestro planeta, a aproximadamente 420 km sobre el nivel del mar, todo un hito en las ciencias espaciales, que ayuda a la humanidad a seguir contestando preguntas, y también generando nuevos retos. El conocimiento se ha adquirido al realizar exploración espacial ha permitido avances tecnológicos en sistemas satelitales de ayuda a la navegación terrestre tales como COMPASS en China, GPS por parte de los Estados Unidos de América, el sistema GLONASS de Rusia, entre algunos otros sistemas con funciones diversas. Se ha llegado al punto que en iniciativas privadas se han alcanzado sistemas satelitales como StarLink por parte de la empresa aeroespacial SpaceX [(Chang, 2016)], por mencionar alguno. Todos estos son logros notorios y la interdisciplinariedad de las iniciativas públicas y privadas refuerzan un objetivo entre varios que es el desarrollo de la tecnología.

Pero también han abierto áreas de oportunidad en la investigación espacial, como en las telecomunicaciones, la observación de la Tierra, la navegación apoyada por satélites, o incluso áreas aún en exploración tal y como lo menciona (Chavez Barranco, 2012) “En un país, a la par de la innovación se encuentra la tarea de ser artífice de su propia tecnología, lo que se traduce en una independencia tecnológica de otras naciones, y así generar oportunidades de desarrollo y por ende beneficios para el propio país. Para ello, es necesario hacerse de herramientas propias, tomar como un apoyo las herramientas de otros sitios de investigación y así darse cuenta de que estos conocimientos están al alcance de cualquiera”.

Con esta investigación se pretende generar herramientas para que aquellos que se encuentran interesados en el sector aeroespacial puedan experimentar los modelos matemáticos que son necesarios para la descripción del encuentro

de agentes espaciales, una primera aproximación con los conceptos primordiales y como es que los eventos espaciales que se buscan desarrollar se pueden modelar a partir del uso de estos conceptos.

1.1. **Objetivo**

Estudiar el encuentro, acercamiento y acoplamiento de agentes espaciales mediante el diseño e implementación de un simulador que describa su movimiento orbital relativo a partir de sus 6 variables de estado.

Los objetivos que son necesarios alcanzar a lo largo de la investigación son los siguientes:

1.2. **Objetivo general**

Diseñar un simulador para analizar las intersecciones orbitales de dos agentes espaciales en un marco de referencia no inercial con el fin de replicar los conocimientos que otros centros de investigación aeroespacial poseen para el encuentro de agentes espaciales, y luego extender este conocimiento para estudiar el acercamiento y acoplamiento de agentes pequeños, sus orientaciones por medio cuaterniones.

1.3. **Objetivos específicos**

- Programar y visualizar las ecuaciones cinemáticas para 2 trayectorias circulares
- Implementar las ecuaciones cinemáticas para 2 cuerpos rígidos rotando
- Diseño de un simulador de agentes espaciales orbitales de 2 elementos.

- Generar un simulador de agentes espaciales orbitales de 2 elementos estableciendo condiciones iniciales de rotación en cada uno de los agentes
- Realizar una GUI donde se permita modificar los parámetros del sistema bajo simulación.
- Desplegar visualización animada de los elementos con los parámetros ingresados y permitir modificaciones de los parámetros.

1.4. **Organización de la tesis**

Este documento inicia con el Capítulo 1 el cual es la introducción a la tesis, se continuará con el Capítulo 2 donde se da una descripción general del trabajo y brinda una breve introducción a varios de los conceptos manejados en este documento (tales como marcos de referencia, rotación de cuerpos rígidos, leyes de Kepler y todo lo necesario para definir los parámetros del simulador) aquí se incluye el estado del arte y antecedentes.

El Capítulo 3, Diseño del Simulador, es la presentación del trabajo hecho en la tesis, y aborda la problemática del diseño del simulador, las consideraciones generales y la descripción en detalle de los puntos necesarios para el desarrollo del simulador y la descripción del prototipo, el Capítulo 4, muestra los resultados del desarrollo del simulador, tanto en interfaces gráficas de usuario, como en las gráficas resultantes de los movimientos orbitales, y por último el Capítulo 5 finaliza mostrando las conclusiones basadas en los resultados del simulador y plantea posibles proyectos que en un futuro podrían efectuarse y que están relacionados a esta tesis. Por último, se enlista la bibliografía usada.

En la parte de apéndices se anexa información matemática referente a la tesis.

Capítulo 2

Antecedentes y teoría

En este capítulo se presentará el estado del arte y una introducción teórica a los conceptos principales que se emplearan durante esta tesis. Se presenta el marco teórico que abarcará los conceptos necesarios para que, partiendo de los modelos matemáticos producto de esos conceptos, se realice la simulación computacional de un sistema aeroespacial referente a la construcción de órbitas, la descripción de agentes espaciales moviéndose en trayectorias orbitales específicas considerando además sus rotaciones.

2.1. Estado del arte

En esta sección se presenta el estado del arte en donde podemos observar los trabajos de investigación recientes que se consideraron más relevantes para entender el panorama en el que se encuentra el desarrollo actual de los encuentros espaciales tal y como se puede observar en la Tabla 2-1. El estudio se dividió en aquellos trabajos de investigación que contemplan el problema de encuentro (o por su denominación en el argot espacial “space rendezvous”) tales como la descripción de encuentros espaciales a partir de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales, el control para evasión de colisiones y vuelo en formación, y aquellos que contemplan la rotación del agente espacial como cuerpo sólido. Estos trabajos proponen distintos métodos para transferencias orbitales ((Chavez Barranco, 2012) ; Carter, 2002; Chelnokov, 2007), control de agentes espaciales, vuelo en formación (Harleston, 2011; Liang, 2011; Vepa, 2018), e inclusión de perturbaciones de tipo gravitacional o de arrastre (Afanas'eva, 2007; Carter, 2002; Chelnokov, 2007)).

Existen diferentes ecuaciones y soluciones representativas en el problema de encuentro, pero las más exploradas son 2: para órbitas circulares, existen las ecuaciones de Hill-Clohesy-Wiltshire (Carter, 2002; Chelnokov, 2007) mientras que para las órbitas elípticas, existen las ecuaciones de Tschauner-Hemphel (Vepa, 2018). Ambos sistemas son descritos por ecuaciones diferenciales no lineales.

Nombre del artículo	Simulación / algoritmos	Lineal	No lineal	Órbita coplanar	Órbita no coplanar	No especificada	Matrices de rotación	Cuaternione	Ángulos de Euler
A Survey on Formation Control of Small Satellites	x		x			x			x
Dynamical analysis of rendezvous and docking with very large space infrastructures in non-Keplerian orbits						x			x
Hzo and μ -Synthesis for Nanosatellites Rendezvous and Docking	x		x			x			x
Clohesy–Wiltshire Equations Modified to Include Quadratic Drag		x							x
Formation flying control of small satellites	x								x
Viability of Angles-only Navigation for Orbital Rendezvous Operation		x				x		x	
The problem of rendezvous of a controlled space vehicle with an uncontrolled space vehicle moving along an elliptical Keplerian orbit in the central Newtonian gravitational field		x						x	
Suboptimal Power-Limited Rendezvous with Fixed Docking Direction and Collision Avoidance	x	x					x		
The Modeling and Simulation of Rendezvous and Docking		x					x		
Finite-time attitude set-point tracking for thrust-vectoring spacecraft rendezvous	x					x	x		
Angular velocity tracking for satellite rendezvous and docking	x		x						
A new geometric guidance approach to spacecraft near-distance rendezvous problem	x	x				x			
Efficient Computation of Optimal Low Thrust Gravity Perturbed Orbit Transfers	x		x			x			
Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous		x				x			

Tabla 2-1 Trabajos relevantes de encuentros espaciales en los últimos 20 años.

i) Ecuaciones de movimiento relativo Hill-Clohesy-Whiltshire. ((Carter, 2002) (Silva, 2012))

Las ecuaciones de Hill-Clohesy-Wiltshire (de aquí en adelante HCW). se utilizan para representar el movimiento relativo de un satélite alrededor de

un agente espacial “chaser” (perseguidor), de puntos alrededor del agente espacial “target” (objetivo). Estas ecuaciones a menudo pueden ser limitantes porque se derivan del supuesto de pequeñas desviaciones de una órbita de referencia circular y sin perturbaciones orbitales. De acuerdo con Silva (2012) estas ecuaciones del encuentro espacial sólo nos sirven para describir el movimiento relativo a través de una órbita circular, y Pierre Blanc-Paques (2010) nos dice que la resolución de las ecuaciones diferenciales acopladas del modelo HCW resulta difícil, como se verá más adelante en la sección 2.8. El modelo de ecuaciones HCW se ha convertido en uno de los modelos más usados para representar sistemas donde se involucra un agente espacial perseguidor y un agente espacial objetivo.

ii) Ecuaciones de movimiento relativo Tschauner-Hempel (Vepa, 2018).

Las ecuaciones de Tschauner-Hempel nos ayudan a describir el movimiento de una partícula en una órbita kepleriana, relativa a un agente espacial primario en órbita, este sistema de ecuaciones es principalmente utilizado para estimar la posición de un agente espacial respecto a otro en movimiento. Los modelos dinámicos de movimiento relativo de los agentes espaciales en órbita, ambos modelados en términos de ecuaciones de movimiento relativo independientes, incluyen varios efectos de perturbación, donde los más importantes son: el cambio de potencial gravitacional debido a la falta de esfericidad de la Tierra a segundo orden denominado comúnmente J_2 , así como las aceleraciones externas debidas a la atracción gravitacional de la Luna y el Sol.

2.2. Marco teórico.

La simulación, así como los modelos, parten de ideas simples e incrementan su complejidad una vez que las partes más básicas son descritas, por ejemplo, el movimiento rotacional de una partícula en el espacio ayuda a comprender las bases de la rotación y con esto poderlo generalizar a la rotación de un cuerpo sólido o de la rotación en una órbita a partir de sus elementos orbitales rotacionales.

2.3. Antecedentes y conceptos clave.

Desde tiempos inmemoriales la humanidad ha mirado hacia el cielo y se ha preguntado “¿Qué es lo que hay más allá del cielo?”, por esta y más razones al pasar de los años han existido cientos de pensadores y filósofos que han tratado de dar respuesta a todas las interrogantes, desde las dudas más antiguas de “¿Por qué sale y se oculta el Sol?”, “¿Cómo sale y se oculta?”, “¿Cómo se mueven los planetas?”, “¿Existe un centro para esos planetas?”, etcétera , hasta llegar a nuestros días, donde, a pesar de haber contestado muchas de estas preguntas, cada día se encuentran más y más, “¿De qué están compuestas las estrellas?”, “¿Cuánto tiempo ha existido un planeta o estrella?”, “¿Cuándo estos objetos celestes llegarán al fin de su existencia?”. Todo esto tuvo un inicio, pensamientos bellos donde considerábamos a estos cuerpos celestes como “objetos perfectos”, por lo cual su movimiento también tenía que serlo, y justo ahí es donde nosotros iniciaremos nuestro viaje por la astronomía. Ptolomeo como gran pensador, precedido por grandes mentes, trataba de explicar los movimientos de los planetas a base de combinaciones de movimientos circulares y uniformes (véase Figura 2-1), siendo la tierra el centro de todo, porque, siguiendo los pensamientos de Aristóteles, el movimiento que convenía a los astros tendría que ser perfecto como él mismo los denominaba "objetos perfectos" y nosotros tendríamos que ser el centro de todo esto. La concepción de un sistema geocéntrico perduró hasta el siglo XVI, cuando todo cambió.

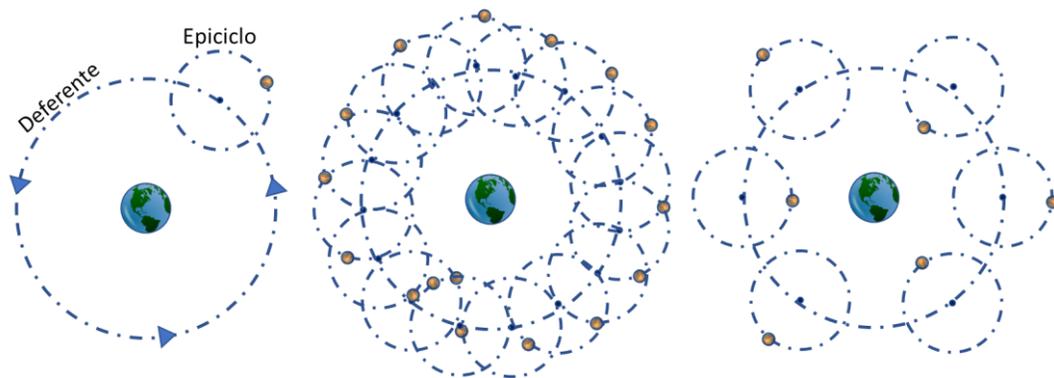


Figura 2-1 Modelo celeste Geocéntrico.

Durante muchos siglos, el problema de la Astronomía consistía en encontrar un sistema, que, combinando movimientos circulares y uniformes, nos definiera las posiciones de los objetos celestes en coincidencia con las posiciones observadas, para ello hubo que recurrir al sistema de epiciclo y deferente, a la órbita excéntrica, al ecuante (Figura 2-1).

Copérnico encontró muy complicado el sistema de Ptolomeo y buscó entre los antiguos filósofos griegos alguna luz que le permitiera encontrar una explicación más sencilla; encontró que Pitágoras y sus seguidores habían admitido ya la posibilidad de que el centro del “cielo” fuera el Sol, a cuyo alrededor se moverían los planetas, y la Tierra no sería sino un planeta más. Con esta hipótesis se suprimían la mitad de los epiciclos que había sido necesario introducir en el sistema de Ptolomeo y al seguir también a Pitágoras, la existencia del movimiento de rotación de la Tierra se encontraba una explicación para el movimiento diurno y simplificaba la dada por Ptolomeo para el fenómeno de la precesión de los equinoccios, pero seguía manteniendo los movimientos circulares uniformes (véase Figura 2-2)

Si la Tierra se mueve alrededor del Sol tiene que aparecer un movimiento aparente de paralaje en las estrellas (que luego se observó en estrellas cercanas), y los planetas, lo mismo que la Luna, deben presentar fases, entre otros efectos. Admitir el movimiento de rotación y traslación de la Tierra no fue nada fácil, pero el uso del telescopio para observar el cielo

permitió a Galileo comprobar en 1610 la existencia de las fases de Venus. Descubriría también las manchas del Sol y sus desplazamientos sobre la superficie solar, lo que le llevaría a afirmar la existencia de un movimiento de rotación en el Sol. Y con ésta surge la interrogante de ¿Por qué no puede hacerlo la Tierra? Descubrió también los satélites de Júpiter, que acompañan al planeta en su movimiento alrededor del Sol, lo que ayuda a admitir que también la Luna puede acompañar a la Tierra en su movimiento, también alrededor del Sol.

El primero en romper con este complicado sistema formado por combinaciones de movimientos circulares uniformes, y proponer un sistema novedoso y simple basado en observaciones astronómicas de muchos años fue Kepler.

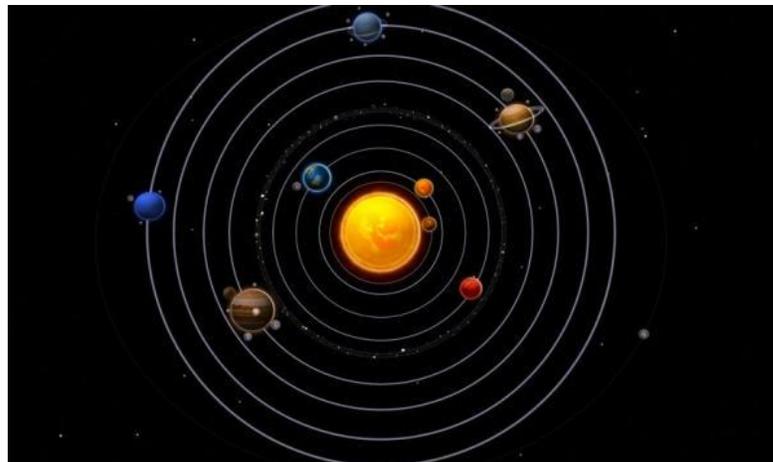


Figura 2-2 Modelo celeste Heliocéntrico. (Tomado de: <https://cutt.ly/3ypRXdy>)

En el sistema de epiciclos y deferentes aparecían diferencias de hasta 8 minutos con las posiciones de Marte obtenidas por Tycho Brahe a lo largo de más de 20 años, diferencias que considera inadmisibles dada la meticulosidad de este observador. Era necesario buscar otra solución y esta búsqueda le llevó al descubrimiento de las leyes que debían regir el movimiento de los planetas. Kepler sintió además curiosidad por la causa que pudiera originar esos movimientos de los planetas alrededor del Sol, en la misma forma en que la Luna se movía alrededor de la Tierra; Kepler llegó a pensar que la misma

acción entre un imán y determinados metales, debería existir una acción análoga entre el Sol y cada uno de los planetas; planteó así una cuestión que habría de ser resuelta por Newton con su ley de la gravitación universal. Para que un planeta describa una órbita alrededor del Sol, como establecía la primera ley de Kepler, era necesaria la existencia de una fuerza que modificara la dirección de su movimiento, compensando la fuerza centrífuga, llegando así a la conclusión de que los movimientos de los astros del sistema solar eran, efectivamente, debidos al hecho de que dos cuerpos cualesquiera están sometidos a la acción de una fuerza proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.

Los movimientos de los cuerpos celestes del sistema solar podrían así explicarse con esta ley de la gravitación universal que Newton dio a conocer en su obra publicada en el mes de julio de 1687 con el título de "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Así nacía una nueva rama de la Astronomía que más tarde habría de llamarse "Mecánica Celeste".

2.4. Leyes de Newton

Issac Newton planteó 3 leyes fundamentales, pilares de la mecánica clásica:

- 1) Toda partícula persistirá en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que actúe sobre él una fuerza externa. (Ley de la Inercia)
- 2) El producto de la masa de un cuerpo por su aceleración es directamente proporcional a la fuerza externa que actúa sobre dicho cuerpo (Ley Fundamental de la Dinámica)
- 3) Si una partícula 1 actúa sobre una partícula 2 con una fuerza \vec{F}_{12} en una dirección a lo largo de la línea recta que une a ambas partículas y si la partícula 2 actúa en la partícula 1 con una fuerza \vec{F}_{21} , se tiene que $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ o dicho en palabras "A toda acción corresponde una reacción"

de igual magnitud, pero de sentido opuesto”. (Ley de la Acción y la Reacción)

2.5. Leyes de Kepler

Johann Kepler (1571-1630), astrónomo, matemático y físico alemán, fue discípulo del astrónomo Michael Mästlin, seguidor de Copérnico. En 1600 se trasladó a Praga invitado por Tycho Brahe; en 1626 supervisó la impresión de las Tablas Rudolfinas, iniciadas por Brahe y completadas en 1624 por él mismo utilizando las leyes relativas a los movimientos planetarios que había establecido; Kepler observó que los planetas más distantes del Sol se movían más lentamente que los interiores (los más cercanos al sol) y propuso que los planetas eran mantenidos en movimiento por la acción de una fuerza ejercida desde el Sol, de manera que la fuerza decrecía al alejarse de él. Esta idea fue la que impulsaría su curiosidad para desarrollar las ya antes mencionadas leyes relativas a los movimientos planetarios; no hubo con anterioridad a Kepler ningún reconocimiento claro de los movimientos del cielo en términos de una fuerza física actuando desde el Sol.

Primera ley:

Kepler intentó resolver el problema de las órbitas ajustando estas con una figura geométrica sencilla; estudió cómo variaba la velocidad del planeta en la órbita para llegar a conocer la fuerza que producía el cambio de velocidad y posteriormente intentó determinar la forma de la órbita. Después de varios intentos trató con formas geométricas excéntricas puesto que la órbita parecía estar comprimida en una dirección. Al final encontró a lo que pronto se le conocería como la primera ley de Kepler.

“La órbita de los planetas alrededor del Sol son elipses con el Sol en uno de sus focos”

Que ahora podemos generalizar como:

“La órbita de cualquier cuerpo pequeño alrededor de un cuerpo mucho mayor siempre será una elipse, con el centro de masa del cuerpo más grande en uno de los focos”

Y esto lo podemos observar en la siguiente figura

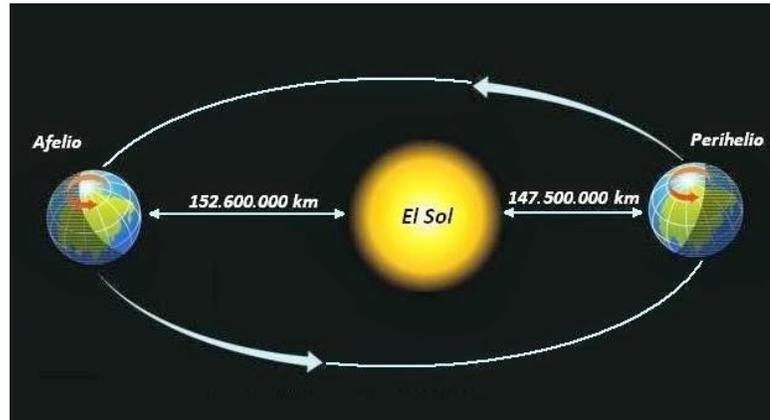


Figura 2-3 Órbita terrestre con el sol en uno de los focos de la elipse (Tomado de: <https://cutt.ly/uypRHS0>)

Excentricidad: Es una cantidad adimensional que nos indica el grado de desviación de una sección cónica (se podría entender como qué tan “achatada” es la sección cónica), y se define como

$$e = \left| \frac{\vec{F}_1 \vec{F}_2}{\vec{D} \vec{E}} \right| \quad (1)$$

donde:

$|\vec{F}_1 \vec{F}_2|$ Es la distancia entre los focos de la elipse.

$|\vec{D} \vec{E}|$ Es la distancia entre el perigeo y el apogeo.

Sección cónica	Excentricidad
Circunferencia	0
Elipse	$0 < e < 1$
Parábola	1
Hipérbola	$e > 1$

Tabla 2-2 Tabla de excentricidades de las secciones cónicas.

Segunda ley:

Esta ley empírica descubierta por Kepler en el año de 1609 surge de la conservación del momento angular. Cuando el planeta está más cerca del Sol, se mueve más rápido, barriendo, la misma área sobre un camino más largo en un determinado tiempo.

“Una línea que une a uno de los planetas con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.”

Que podemos interpretarla de forma general, acorde a la Figura 2-4 como

“El radio vector que une un cuerpo pequeño y otro cuerpo mucho mayor, recorrerá áreas iguales en tiempos iguales.”

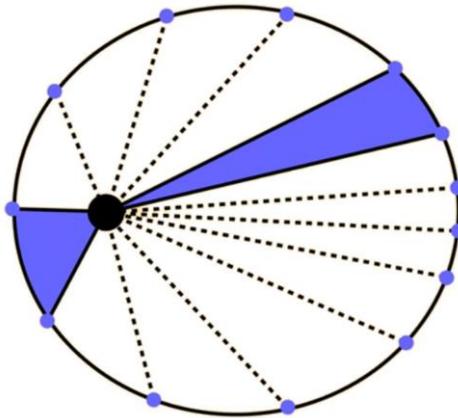


Figura 2-4 Representación gráfica de la Segunda ley de Kepler

Tercera ley:

De igual forma esta ley fue descubierta empíricamente por Kepler en 1619, después de una rigurosa observación de los periodos orbitales de los planetas en relación con sus órbitas al rededor del sol, después de 10 años de haber obtenido su segunda ley, él llegaría a la conclusión que

“El cuadrado del periodo de cualquier planeta, es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.”

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (2)$$

2.6. Marcos de referencia y sistemas coordenados

Parecería fácil referirse a un punto en el espacio, pero en ocasiones el escoger un correcto marco de referencia es la clave, ya que como se observó con los modelos heliocéntricos, en ocasiones el describir un sistema en función de una posición arbitraria complica los cálculos, por eso mismo es que existen diversos sistemas coordenados con los que podemos orientarnos.

2.6.1.1. Sistema heliocéntrico-eclíptico

El sistema heliocéntrico eclíptico es aquel que se encuentra centrado en el Sol, aunque aunado al hecho de que el Sol se mueve en el denominado plano de la eclíptica.

Este sistema coordenado, se define como: el eje X_e que está apuntando en dirección al punto vernal, que se encuentra situado en la constelación de Aries, el eje Y_e es ortogonal al anterior, pero situándose ambos sobre el plano de la eclíptica mientras que el eje Z_e es perpendicular a los anteriores y, por ende, necesariamente en un plano distinto tal y como se muestra en la siguiente figura:

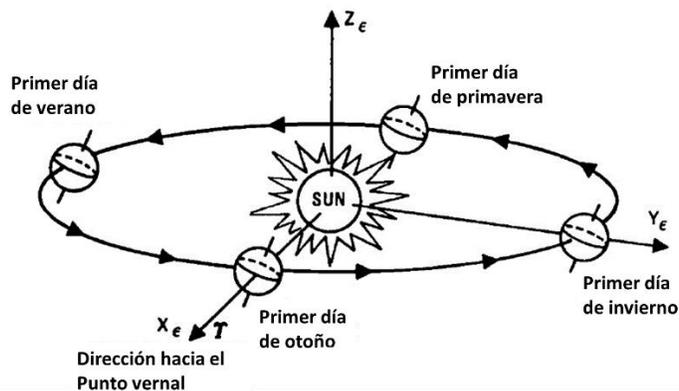


Figura 2-5 Sistema heliocéntrico eclíptico tomado de (Chobotov, 2002).

El eje de rotación de la Tierra se tambalea ligeramente y cambia de dirección lentamente a lo largo de los siglos. Este efecto se conoce como

precesión y hace que la línea de intersección del plano ecuatorial de la Tierra y el plano de la eclíptica se desplace lentamente. Como resultado, el sistema heliocéntrico-eclíptico no es un marco de referencia inercial. Cuando se requiere una precisión extrema, es necesario especificar las coordenadas de un objeto en función de la dirección del equinoccio vernal de un año o época en particular. (Chobotov, 2002)

2.6.2. Sistema inercial centrado en la tierra

El sistema de coordenadas geocéntrico-ecuatorial (o ECI por sus siglas en inglés), por otro lado, tiene su origen en el centro de la Tierra. El plano fundamental es el ecuador celeste, que es la prolongación del ecuador terrestre en la esfera celeste, y el eje X positivo apunta en la dirección del equinoccio vernal, el eje Z apunta hacia el polo norte y el eje Y es un plano ortogonal a estos 2.

Es importante tener en cuenta que el sistema X, Y, Z si bien se mueve con la Tierra alrededor del Sol, no está fijo al centro de la Tierra. La Figura 2-6 muestra que el eje X apunta hacia el equinoccio vernal, que desde nuestro punto de vista dentro de la tierra es un punto fijo y de ahí, no rota conjuntamente con la Tierra respecto a su centro; el eje Z apunta hacia el polo norte mientras que el eje Y se mantiene ortogonal a los anteriores

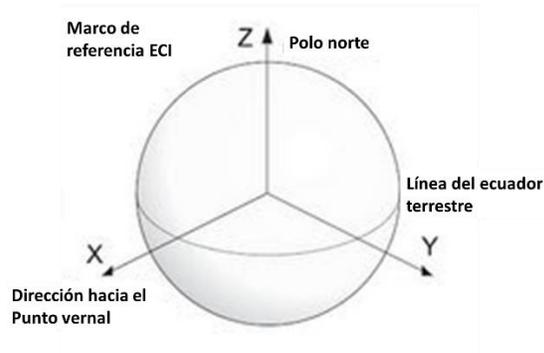


Figura 2-6 Sistema inercial centrado en la tierra (tomado de: <https://cutt.ly/mYRX4jv>)

Los dos ángulos necesarios para definir la ubicación de un objeto en una esfera concéntrica con el globo terrestre; se definen de la siguiente manera

- Ascensión recta (α): Es el ángulo medido hacia el este en el plano del ecuador desde un eje inercial fijo en el espacio (equinoccio vernal) hasta un plano normal al ecuador (meridiano), que contiene el objeto, este puede tener un valor de $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ (véase Figura 2-7)
- Declinación (δ): Es el ángulo entre el objeto y el plano ecuatorial medido en el plano medido a lo largo de un meridiano (positivo sobre el ecuador), que contiene el objeto; este puede tener un valor de $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ (véase Figura 2-7)

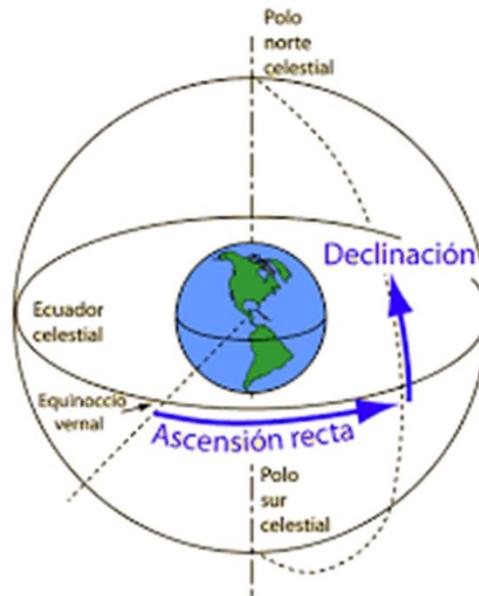


Figura 2-7 Descripción de ángulos de ascensión recta y declinación (tomado de <https://cutt.ly/aYRghyl>).

Considerando un sistema de referencia esférico como éste, entonces también es necesario definir una distancia radial entre el origen del sistema coordenado y la localización del objeto

Para un observador fijo en un marco inercial, la Tierra gira alrededor del sol en una órbita casi circular en el plano de la eclíptica. La Tierra gira a una

velocidad esencialmente constante alrededor de su eje polar. Sin embargo, ese eje de rotación se inclina lejos de la normal a la eclíptica. Esta inclinación hace que los planos ecuatorial y eclíptico formen un ángulo diedro (que es el ángulo formado por dos planos) que se conoce convencionalmente como oblicuidad de la eclíptica y se denota por $\varepsilon \approx 23.5^\circ$.

El Sol en el sistema ECI se utiliza con frecuencia para definir las relaciones celestes. Teniendo en cuenta que el eje X está dirigido hacia el equinoccio de primavera (vernal) y que el eje Z se encuentra a lo largo del eje polar de rotación de la Tierra; el eje Y completa la tríada diestra (es decir que sigue la regla de la mano derecha), esto es que se completa un sistema de referencia. Los tres arcos dibujados en los tres planos de referencia delimitan un octante de la esfera celeste (véase Figura 2-8) que está centrada en la Tierra y de radio arbitrario.

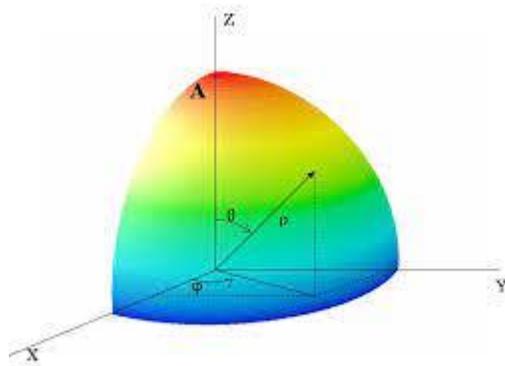


Figura 2-8 Octante de la esfera celeste (tomado de: <https://cutt.ly/fYRgKoC>)

2.6.3. Integrales fundamentales en las órbitas de Kepler

2.6.3.1. Ley de la gravitación universal de Newton

La ley de gravitación universal de Newton establece que 2 partículas cualesquiera, de masa m_1 y m_2 alejadas por una distancia r , son atraídas una a la otra con una fuerza

$$F = G \frac{m_1 * m_2}{r^2} \quad (3)$$

donde

$$G = 6.6726 \pm 0.0005 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg * s^2}$$

= constante de la gravitación universal

Esta misma ecuación se puede expresar en términos del gradiente ∇ de una función potencial gravitacional escalar V de un cuerpo, de esta forma (Chobotov, 2002).

$$F = -\nabla V$$

donde.

$$V = \frac{\mu}{r}$$

Por otro lado μ es el parámetro conocido como parámetro gravitacional estándar y se usa para cálculos astrodinámicos y se determina de la forma

$$\mu = GM_e$$

donde

$$M_e = 5.972 \times 10^{24} Kg$$

2.6.3.2. Problema de los dos cuerpos

Una versión de la ecuación (3) es la formulación vectorial de ésta, como podemos ver en la Figura 2-9: 2 masas m y M se mueven en un sistema inercial de referencia E_1, E_2, E_3 y se desea determinar el movimiento de m relativo a la masa más grande M (Curtis H. D., 2009).

El problema general de dos cuerpos resulta si $a \neq 0$. Entonces para la masa M

$$M\ddot{a} = G \frac{M * m * \mathbf{r}}{r^3} \tag{4}$$

y para la masa m

$$m\ddot{\rho} = -G \frac{M * m * \mathbf{r}}{r^3} \quad (5)$$

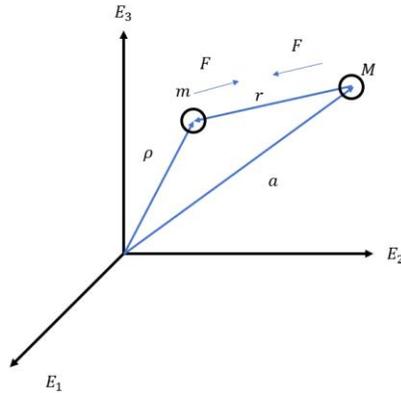


Figura 2-9 Sistema de dos cuerpos.

Restando la ecuación (5) de la ecuación (4)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -G \frac{(M + m)\mathbf{r}}{r^3} \\ \ddot{\mathbf{r}} + G \frac{(M + m)\mathbf{r}}{r^3} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

En un problema restringido de dos cuerpos, se supone que la masa principal M está fija en el espacio inercial. Esto implica que $M \gg m$, por lo que m no afecta el movimiento de M. Refiriendo a M en el origen O.

$$\mathbf{F} = -G \frac{M * m * \mathbf{r}}{r^3} \quad (7)$$

O de acuerdo con la ecuación (5) con $\rho = r$

$$\mathbf{F} = -G \frac{M * m * \mathbf{r}}{r^3} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} + G \frac{M * m * \mathbf{r}}{r^3} &= 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} + G \frac{M * \mathbf{r}}{r^3} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \text{aceleración de la masa } m \text{ relativo al marco de referencia inercial}$$

Nota: La ecuación (8) difiere de la ecuación (6) sólo en el término constante gravitacional. El movimiento del problema restringido de dos cuerpos es, por tanto, similar al del sistema general de dos cuerpos y se ve afectado por la magnitud del término gravitacional. Este último es un efecto insignificante cuando $m \ll M$, que es cierto para los satélites de la Tierra y otros cuerpos planetarios.

2.7. Cinemática rotacional de cuerpos rígidos

Al analizar los cuerpos en movimiento en una órbita, o sobre su mismo eje, debemos tener en cuenta además de las fuerzas que los originan, la descripción de estos a través del tiempo, por esa razón se estudiará la cinemática rotacional.

Velocidad angular

Podemos definir la velocidad como la relación de cambio que existe entre la posición y el tiempo en el que se muestrean estas dos variables. $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, Dado que el vector de posición \vec{r} en un movimiento rotacional significaría que en un tiempo t este recorrería una longitud de arco S descrito por un ángulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ como podemos observar en la Figura 2-10

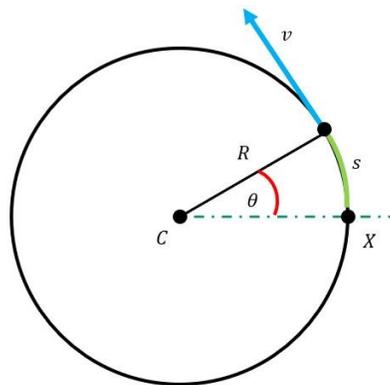


Figura 2-10 Representación geométrica del movimiento circular.

Con esta definición y con ayuda de la Figura 2-10 se deduce $ds = R d\theta$ y al sustituirlo en la ecuación de velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(R\theta + c)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$, donde

llamaremos a $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{velocidad angular}$, por lo tanto, $\vec{v} = R\omega$, en un sistema de referencia propiamente seleccionado se cumple que $\theta = \omega t$, y en una vuelta completa el valor de $\theta = 2\pi$ y el periodo $T = t$, se puede representar como la frecuencia (que es cuántas vueltas se completa por unidad de tiempo) $f = \frac{1}{T}$. Por lo tanto, la velocidad angular se puede expresar como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (9)$$

Del mismo modo que definimos la velocidad angular se puede definir una nueva relación de cambio entre la velocidad angular y el tiempo, o, dicho de otro modo:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (10)$$

E igualmente que, con la velocidad angular, dada esta definición podemos decir que en un marco de referencia propiamente seleccionado se cumple que

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (11)$$

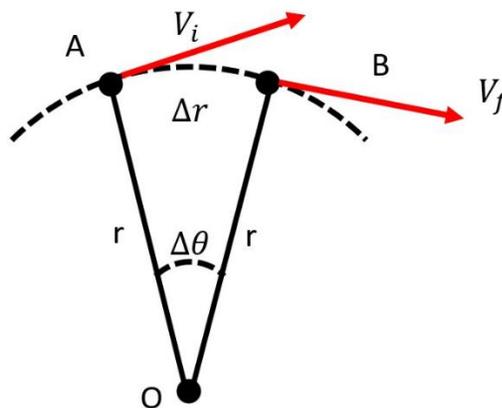


Figura 2-11 Cambio de dirección en el movimiento circular.

Dado que la velocidad es constante la aceleración no puede tener ninguna componente tangencial y describiéndola como el cambio de la velocidad

respecto del tiempo, se puede describir como $\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ y aproximando $\Delta \vec{v}$ a cero, podemos decir que la relación de la Figura 2-12 se cumple

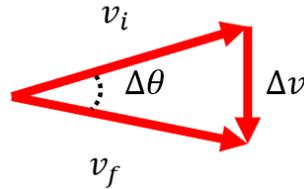


Figura 2-12 Relación geométrica de las velocidades en un movimiento circular.

Por lo que $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$ y dadas estas relaciones, la aceleración se puede describir de la siguiente manera

$$\vec{a}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta r}{r \Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (12)$$

Se define de este modo a la aceleración centrípeta y ésta siempre está dirigida hacia el centro de la circunferencia.

Las fuerzas que generan la aceleración centrípeta son

$$\sum F_r = m \vec{a}_r = m \frac{v^2}{r} \quad (13)$$

Supóngase por un momento que el movimiento circular se está dando en un sistema que no está referido al centro de la circunferencia.

Definimos la velocidad en la trayectoria como

$$\dot{r} = v_i = \dot{r}' + \omega \times r + v_0 \quad (14)$$

donde

$$\dot{r}' = \text{velocidad del objeto respecto al punto } O'$$

$$\omega \times r = \text{Velocidad angular}$$

$$v_0 = \text{velocidad inicial}$$

Como podemos observar en la Figura 2-13

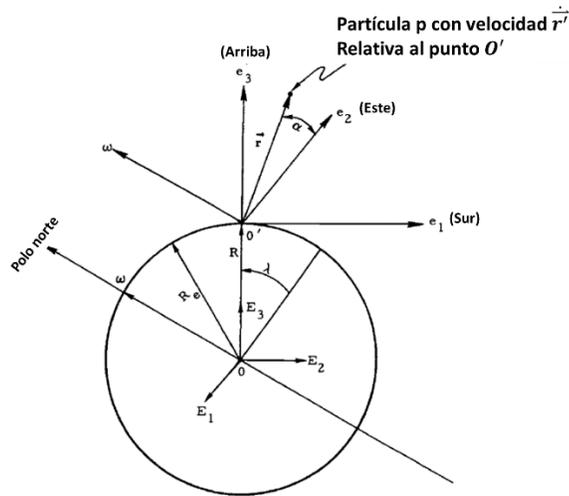


Figura 2-13 Movimiento circular en un marco de referencia no centrado. tomado de (Chobotov, 2002)

dada la ecuación (14) sabemos que la aceleración es la derivada de la velocidad, por lo que en este caso desarrollando la derivada tenemos

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r} = \dot{v}_l = \frac{d}{dt} (\dot{r}' + \omega \times r + v_0)$$

$$\dot{v}_l = \frac{d}{dt} (\dot{r}') + \frac{d}{dt} (\omega \times r) + \frac{d}{dt} (v_0)$$

$$\dot{v}_l = (\ddot{r}') + \dot{\omega} \times r + \omega \times \frac{d}{dt} (r) + \dot{v}_0$$

Ya que el sistema de referencia no se encuentra centrado con la circunferencia donde se está produciendo el movimiento tenemos que la derivada del radio vector r es

$$\frac{d}{dt} (r) = \dot{r}' \cdot \dot{r}$$

que sustituyendo

$$\dot{v}_l = (\ddot{r}') + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\dot{r}' \cdot \dot{r}) + \dot{v}_0$$

Por lo tanto

$$\dot{v}_l = \ddot{r}' + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r}' + \omega \times \dot{r} + \dot{v}_0$$

Y de la ecuación (14) sabemos que \dot{r}

$$\dot{v}_l = \ddot{r}' + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r}' + \omega \times (\dot{r}' + \omega \times r + v_0) + \dot{v}_0$$

$$\dot{v}_l = \ddot{r}' + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r}' + \omega \times \dot{r}' + \omega \times \omega \times r + \omega \times v_0 + \dot{v}_0$$

$$\dot{v}_t = \ddot{r}' + \dot{\omega} \times r + 2(\omega \times \dot{r}') + \omega \times (\omega \times r) + \dot{v}_0 \quad (15)$$

donde

$\ddot{r}' = \text{aceleración observada desde el marco de rotación}$

$\dot{\omega} \times r = \text{aceleración tangencial}$

$2(\omega \times \dot{r}') = \text{aceleración de Coriolis}$

$\omega \times (\omega \times r) = \text{aceleración de Euler}$

$\dot{v}_0 = \text{aceleración inicial}$

Momento angular

De la segunda ley de Newton se define el momento lineal

$$p = m \cdot v$$

que nos indica la cantidad de movimiento que el objeto contiene.

De igual manera podemos definir para un movimiento circular la cantidad de movimiento angular que este contiene y lo podemos calcular como (Curtis H. D., 2009)

$$L = r \times p = mr \times v \quad (16)$$

Recordando que la velocidad puede ser descrita por el vector radial y la velocidad angular sabemos que la ecuación (16) se puede reescribir de la forma

$$L = mr \times (r\omega)$$

$$L = mr^2\omega$$

$$L = mr^2\omega \quad (17)$$

Esto es una cantidad vectorial que caracteriza las propiedades de inercia de un cuerpo, que gira en relación con cierto punto.

2.7.1.1. Conservación de la energía mecánica.

Sustituyendo el parámetro gravitacional estándar en la ecuación (8), podemos escribir

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (18)$$

que al multiplicar por $\dot{\mathbf{r}}$

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (19)$$

dado que

$$\frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{dt} = r\dot{r} + r\dot{r} = 2r\dot{r}$$

podemos reescribirlo de manera que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{2} \right) + \frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{2} \right) = 0 \quad (20)$$

Al integrar esta ecuación podemos obtener lo que se conoce como la energía mecánica específica (Curtis H. D., 2009)

$$\frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon \quad (21)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} &= \frac{v^2}{2} = \text{energía cinética específica} \\ -\frac{\mu}{r} &= \text{energía potencial específica} \end{aligned}$$

Nótese que la energía potencial específica es igual a la función potencial por unidad de masa.

2.7.2. Conservación del momento angular.

El momento angular específico de un cuerpo orbitando a otro puede ser obtenido por el producto vectorial del vector radial \mathbf{r} y la ecuación (18), de modo que se tendría

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}$$

que muestra que

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}\mathbf{L} = 0\end{aligned}\quad (22)$$

donde \mathbf{L} es el momento angular específico, consecuentemente sabemos que $\mathbf{L}=\text{cte}$. Esto significaría que $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ están siempre en el mismo plano, la solución de la ecuación de movimiento para un cuerpo orbital podría ser obtenida realizando el producto cruz de la ecuación (18) y el momento angular específico

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + \frac{\mu(\mathbf{r} \times \mathbf{L})}{r^3} &= 0 \\ \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} &= \frac{\mu(\mathbf{L} \times \mathbf{r})}{r^3}\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) &= \frac{\mu}{r^3}(r^2\dot{\theta})r\hat{\theta} \\ \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) &= \mu\dot{\theta}\hat{\theta} = \mu\frac{d}{dt}(\hat{r})\end{aligned}\quad (23)$$

integrando esta

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = \mu\hat{r} + C$$

donde C es la constante de integración, además, dado que

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) &= \mathbf{r} \cdot (\mu\hat{r} + C) \\ &= (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{L} \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} \\ &= L^2\end{aligned}$$

$$L^2 = \mu r + rC \cos \theta \quad (24)$$

despejando r

$$r = \frac{L^2/\mu}{1 + \left(\frac{C}{\mu}\right) \cos \theta}$$

donde, se puede observar que se trata de la ecuación de una sección cónica y se pueden destacar los elementos (Curtis H. D., 2004)

$$\frac{L^2}{\mu} = \text{semilatus rectum}$$

$$\frac{C}{\mu} = \left(1 + \frac{2eL^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{exentricidad}$$

$$\theta = \text{anomalía verdadera}$$

La ecuación general para el radio de una sección cónica es de la forma

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

2.7.3. Elementos orbitales

También llamados elementos clásicos o Keplerianos (véase Figura 2-14), que ayudan a saber el estado de un cuerpo celeste y que son considerados al observar un cuerpo orbitando a otro cuerpo de mucha mayor masa. Cuando el objeto mayor es la Tierra, entonces se toma el sistema coordinado denominado Sistema de Referencia Geocéntrico Ecuatorial o Sistema de Referencia Geocéntrico Inercial(Chobotov, 2002).

Considerando la Figura 2-14 los parámetros orbitales son:

- a : Semieje mayor de la órbita

Dado un objeto orbitando un cuerpo sabemos por la primera ley de Kepler que su órbita siempre será una elipse donde el objeto de mayor masa sobre el cual se está presentando el movimiento orbital, se encontrará en uno de los focos de la elipse partiendo las distancias hacia el perigeo y afelio en 2 semiejes, el semieje mayor será aquel en el cual la distancia sea mayor.

- Ω : Ascensión recta del nodo ascendente

Nos indica a qué longitud angular se encuentra el nodo ascendente y se mide de la dirección del punto Aries a la intersección de los planos ecuatorial y orbital ascendente; este está descrito entre $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$

- i : Inclinação de la órbita

La inclinación de la órbita será el ángulo medido desde el plano del ecuador celeste hasta el ángulo del plano de nuestra órbita; este está descrito entre $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$

- ω : Argumento del perigeo

Permite definir la posición del perigeo en nuestra órbita, esta es la distancia angular entre la intersección de los planos ecuatorial y orbital hasta el punto del perigeo y está comprendido $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$

- e : Excentricidad de la órbita

Define la forma de la elipse sobre la cual nuestro objeto estará orbitando y está determinada por la ecuación (1)

- M : Anomalía media (Se usa más la anomalía verdadera, la media es de hecho “intermedia” para calcular la verdadera)

La anomalía media es la fracción de un período orbital que ha transcurrido, expresada como ángulo; también es el ángulo que forma con el eje de la elipse un planeta ficticio que gira con movimiento uniforme sobre una circunferencia cuyo diámetro coincide con el eje principal de la elipse y llamada circunferencia principal. A partir de ella se determina la anomalía verdadera f .

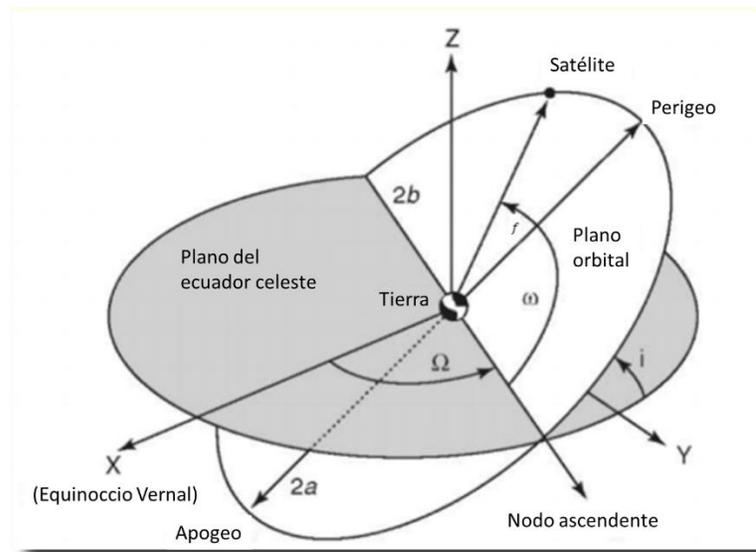


Figura 2-14 Elementos orbitales clásicos o Keplerianos (tomado de <https://cutt.ly/iTpqCEI>)

2.7.4. Ecuación de Kepler

La ecuación de Kepler es una función que permite relacionar la posición de un objeto con el tiempo, por medio de ángulos llamados anomalías. Esta ecuación de Kepler aplica a objetos cuyos movimientos se limitan a órbitas representadas por la ecuación (25) (Chavez Barranco, 2012)

Las anomalías que Kepler propone son 3, la anomalía media M, que es un ángulo medido del centro de la órbita hacia un círculo circunscrito a ésta, la anomalía excéntrica E, que es el ángulo medido en función de la anomalía media sobre la órbita y, finalmente, la anomalía verdadera f, que es el ángulo que existe desde el foco mostrado en la Figura 2-15.

La relación funcional entre estas anomalías es la esencia de la ecuación de Kepler que se denota como

$$M = E - e \sin E \quad (25)$$

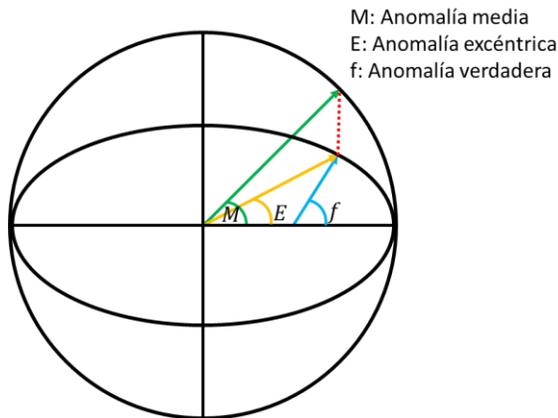


Figura 2-15 Anomalías verdadera, excéntrica y media en una órbita elíptica.

Para la solución de esta ecuación debemos introducir el parámetro temporal y relacionar la posición f_0 al tiempo t_0 transformando así la anomalía verdadera en un tiempo t_0 en su equivalente en la anomalía excéntrica E_0 , de forma que obtendríamos

$$\sin E_0 = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f_0}{1 + e \cos f_0} \quad (26)$$

$$\cos E_0 = \frac{e + \cos f_0}{1 + e \cos f_0} \quad (27)$$

$$E_0 = \arctan\left(\frac{\sin E_0}{\cos E_0}\right) \quad (28)$$

de manera que la ecuación de Kepler describe la relación entre la anomalía excéntrica E_0 con la anomalía media M_0

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0 \quad (29)$$

finalmente, la anomalía media está relacionada con el parámetro temporal de la forma

$$M_0 = n(t_0 - T) \quad (30)$$

donde

n es el movimiento promedio

T es el tiempo en el último pasaje por el perigeo.

El movimiento promedio se determina de la forma

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (31)$$

donde P es el periodo orbital dado como

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (32)$$

2.7.5. Determinación de órbita

2.7.5.1. Método de Gibbs

Este método emplea como entrada tres vectores de posición del satélite (r_1, r_2, r_3) en tres instantes de tiempo sucesivos, $t_1 < t_2 < t_3$. Con esto se pueden obtener los vectores de velocidad asociados a cada uno de los tres vectores de posición, aunque uno es más que suficiente para determinar los elementos orbitales del satélite o nave (Curtis, 2009)

Ya que este método trabaja con el problema de los dos cuerpos, se saca provecho de que los tres vectores son coplanares, y entonces, se debe encontrar la manera de expresar uno de los tres vectores de posición como combinación lineal de los otros dos (Battin, 1999):

$$\mathbf{r}_2 = \gamma \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 \quad (33)$$

donde γ y β son constantes

El vector velocidad se obtiene como

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{ND}} \left(\frac{\mathbf{D} \times \mathbf{r}}{r} \right) + \mathbf{S} \quad (34)$$

donde

\mathbf{r} es cualquiera de los tres vectores radiales

\mathbf{v} es el vector velocidad asociado a \mathbf{r}

N es la magnitud del vector $\mathbf{N} = r_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + r_2(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + r_3(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{r}_1(r_2 - r_3) + \mathbf{r}_2(r_3 - r_1) + \mathbf{r}_3(r_1 - r_2)$$

2.7.5.2. Problema de Lambert

El problema de Lambert es un problema de movimiento kepleriano en el que, dada una posición inicial, una posición final y el tiempo de vuelo entre ambas posiciones del agente espacial, se puede determinar la velocidad inicial y con ellos la órbita del objeto.

Si el tiempo de vuelo $\Delta t = t_2 - t_1$ con $t_2 > t_1$ se transforma a una diferencia de anomalía verdadera $\Delta f = f_2 - f_1$ mediante la ecuación de Kepler, entonces se puede hacer uso de los coeficientes de Lagrange para resolver el problema de Lambert

Curtis (2004) y Battin (1999) presentan métodos empleando los coeficientes de Lagrange, los cuales requieren modificaciones al procedimiento en caso de que la órbita se trate de una elipse o de una parábola. Una mejor idea es usar la anomalía universal, la cual, también tiene una relación con los coeficientes de Lagrange.

La velocidad del estado inicial en está dada como:

$$v_1 = \frac{1}{G} (r_2 - Fr_1) \quad (35)$$

donde F y G son los coeficientes de Lagrange y estas se pueden calcular mediante

$$F = 1 - \frac{y(z)}{r_1}$$

$$G = A \sqrt{\frac{y(z)}{\mu}} \quad (36)$$

donde

$$A = \sin(\Delta f) \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta f}}$$

$$y(z) = r_1 + r_2 + A \frac{zS(z) - 1}{\sqrt{C(z)}} \quad (37)$$

2.7.5.3. Método de Gauss

El método de Gauss se basa en tres observaciones en instantes de tiempo sucesivos, $t_1 < t_2 < t_3$, realizadas en un sistema de referencia ECI, tomemos por ejemplo el sistema topocéntrico. (Harleston, 2011)

La relación entre el sistema topocéntrico y el inercial es

$$r_i = q_i + \rho_i \quad (38)$$

con $i = 1,2,3$

donde

r_i es el vector de posición del objeto observado, referido al sistema ECI.

q_i es el vector de posición del lugar de observación, referido al sistema ECI.

ρ_i es el vector posición del objeto observado, referido al sistema topocéntrico.

El problema radica en encontrar los vectores r_i lo que permitirá obtener algún vector de velocidad y así determinar los elementos orbitales del objeto.

Para este procedimiento se supone que se conocen los vectores \mathbf{q}_i a priori, pero los vectores $\boldsymbol{\rho}_i$ están dados por la ascensión recta y la declinación topográfica, además que el rango es desconocido.

$$\boldsymbol{\rho}_i = [\rho_1 \cos(\delta_1) \cos(\alpha_1), \rho_1 \cos(\delta_1) \sin(\alpha_1), \rho_1 \sin(\delta_1)]^T \quad (39)$$

Para este método la ecuación (33) también se cumple y empelando los coeficientes de Lagrange

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{t_{32}}{t_{31}} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\mu}{r_2^3} (t_{31}^2 - t_{32}^2) \right] \\ \beta &= \frac{t_{12}}{t_{31}} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\mu}{r_2^3} (t_{31}^2 - t_{12}^2) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

donde

$$t_{ij} = t_i - t_j$$

El valor de r_2 se puede encontrar de la forma

$$r_2^8 - (A^2 + 2AE + R_2^2)r_2^6 - 2\mu B(A + E)r_2^3 - \mu^3 B^2 = 0 \quad (41)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{D_0} \left[-D_{12} \frac{t_{32}}{t_{31}} + D_{22} + D_{32} \frac{t_{12}}{t_{31}} \right] \\ B &= \frac{1}{6D_0} \left[D_{12}(t_{32}^2 - t_{31}^2) \frac{t_{32}}{t_{31}} + D_{32}(t_{31}^2 - t_{32}^2) \frac{t_{12}}{t_{31}} \right] \end{aligned}$$

$$E = \mathbf{R}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_2$$

$$D_0 = \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{\rho}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3)$$

$$D_{i1} = \mathbf{q}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{\rho}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3)$$

$$D_{i2} = \mathbf{q}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3)$$

$$D_{i3} = \mathbf{q}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_2)$$

$\hat{\boldsymbol{\rho}}_i$ es el vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{\rho}_i$

El rango de las observaciones es determinado con:

$$\rho_1 = \frac{1}{D_0} \left[-D_{11} + \frac{1}{\gamma} D_{21} - \frac{\beta}{\gamma} D_{31} \right] \quad (42)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{D_0} [-\gamma D_{12} + D_{22} - \beta D_{32}]$$

$$\rho_3 = 1/D_0 \left[-D_{33} + \frac{1}{\beta} D_{23} - \frac{\gamma}{\beta} D_{13} \right]$$

Usando las ecuaciones (38) y (39) y los valores obtenidos con las ecuaciones (42) se pueden encontrar los vectores r_i . Dejando así solo de lado el encontrar el vector velocidad, y para eso se emplean nuevamente los coeficientes de Lagrange

$$v_2 = \frac{1}{F_1 G_3 - F_3 G_1} (F_1 r_3 - F_3 r_1)$$

donde

$$F_i = 1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{r_2^3} t_{i2}^2$$

$$G_i = t_{i2} - \frac{1}{6} \frac{\mu}{r_2^3} t_{i2}^3$$

En el desarrollo de este método se ha hecho la suposición de que el tiempo entre observaciones es corto, lo que se traduce en cambios pequeños de anomalía.

2.7.6. Transferencia orbital

2.7.6.1. **Energía orbital**

Cualquier maniobra orbital significa un cambio en la velocidad en la órbita, la cual podemos describir a partir de la ecuación *vis viva*, la cual nos dice

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (43)$$

donde

v = magnitud de la velocidad orbital en un punto

r = magnitud del radio vector desde el foco al punto en órbita

a = semieje mayor de la órbita

μ = parámetro gravitacional estándar

Reescribiendo la ecuación (43) de manera que tengamos la energía potencial y cinética explícitamente, tenemos

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (44)$$

que proviene de que la velocidad es (Chobotov, 2002)

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$$

$$= \mu \left[\frac{2a - r}{ra} \right]$$

$$\left[\frac{\mu 2a - \mu r}{ra} \right]$$

$$\left(\frac{2}{2} \right) v^2 ra = \mu 2a - \mu r$$

$$\frac{v^2}{2} ra = \frac{\mu 2a - \mu r}{2}$$

$$\frac{v^2}{2} ra = \mu a - \frac{\mu r}{2}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{ra} \left(\mu a - \frac{\mu r}{2} \right)$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

donde se identifica fácilmente las siguientes cantidades

$$\frac{\text{energía cinética}}{\text{masa del satélite}} + \frac{\text{energía potencial}}{\text{masa del satélite}} = \frac{\text{energía total}}{\text{masa del satélite}}$$

Si se considera que para una órbita circular el periodo orbital está dado por

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} \quad (45)$$

con $a = r$, el radio de un círculo, entonces, sustituyendo en las ecuaciones (44) y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** podemos obtener la velocidad orbital en una órbita circular como

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= -\frac{\mu}{2r} \\
\frac{2rv^2}{2} - \frac{2r\mu}{r} &= -\mu \\
rv^2 - 2\mu &= -\mu \\
v_{ci} &= \sqrt{\frac{\mu}{r}}
\end{aligned}
\tag{46}$$

Y cuando $a \rightarrow \infty$ la trayectoria se convierte en una parábola por lo que la ecuación (44) se puede reescribir para conseguir la velocidad de escape de una órbita.

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= 0 \\
\therefore v &= \sqrt{\frac{2\mu}{r}}
\end{aligned}
\tag{47}$$

2.7.6.2. Maniobras de impulso sencillo

Las maniobras orbitales se caracterizan por un cambio en la velocidad orbital. Si una velocidad incrementa en una cantidad ΔV , esta es sumada a la velocidad del satélite V_1 , entonces la nueva velocidad V_2 describirá una nueva órbita (véase Figura 2-16) (Chobotov, 2002)

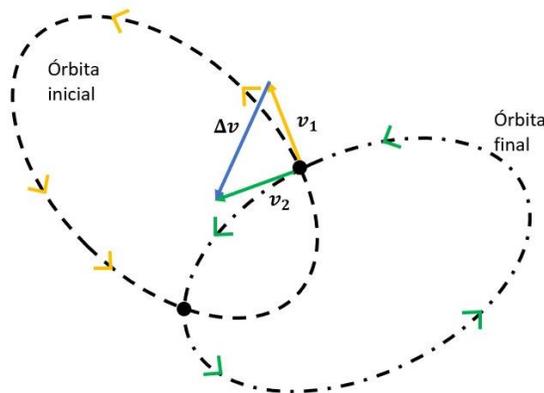


Figura 2-16 Transferencia de impulso sencillo.

En la Figura 2-16 se aprecia que el vector Δv se puede calcular como un vector diferencia, de la forma

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

Por lo que, una maniobra impulsiva o una transferencia entre órbitas coplanares que se intersectan se puede llevar a cabo en los puntos en los que las órbitas se tocan donde incluso, puede realizarse una maniobra de cambio de plano rota el plano orbital mientras mantiene el tamaño y la forma del semi eje mayor y la excentricidad de la órbita fijos.

En un cambio de plano orbital de una órbita circular a través de un ángulo θ , el impulso Δv es aplicado para rotar el plano, el triángulo de velocidad resultante es un triángulo isósceles, dado que la órbita no cambia de velocidad orbital, sólo cambia de plano y la velocidad orbital se encuentra definida por la ecuación (46)

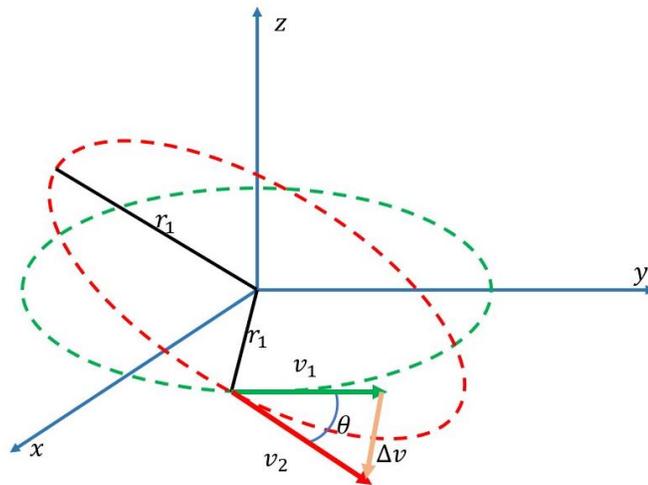


Figura 2-17 Maniobra de cambio de plano en una órbita circular. De donde podemos observar que al partir en 2 el triángulo de velocidades obtendremos las relaciones

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\Delta v}{v_{ci}}$$

$$2 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\Delta v}{v_{ci}}$$

Otra maniobra de impulsos simples es aplicar un Δv tangencial a una órbita circular o elíptica en el perigeo y de esta manera modificar su excentricidad (o para generar una elipse de transferencia), esto se puede apreciar mejor en la Figura 2-18

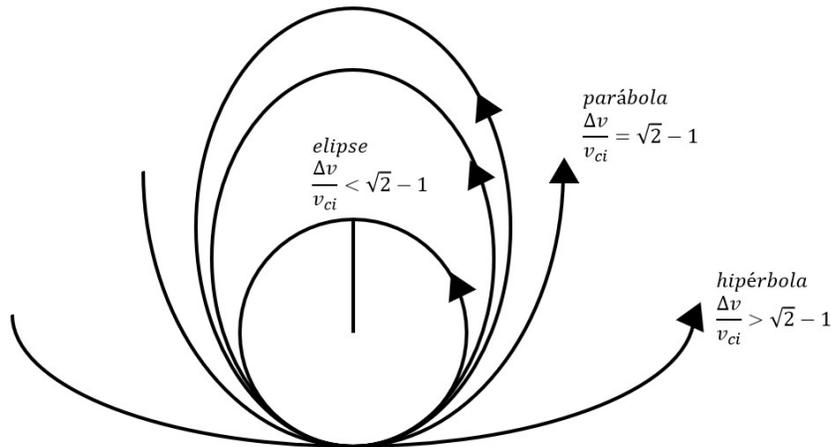


Figura 2-18 Relación geométrica entre Δv y v_{ci}

2.7.6.3. Transferencia de Hohmann

La transferencia de Hohmann es una maniobra de dos impulsos, y desde el punto de vista de la energía, se le considera que es la maniobra más eficiente (Chobotov, 2002). Se emplea para hacer transferencia entre dos órbitas coplanares y coaxiales, sean estas circulares o elípticas. Dos órbitas se dice que son coaxiales si tienen el mismo semieje mayor, si, además, el perigeo está del mismo lado, se habla de órbitas coaxiales directas. La órbita inicial puede tener un semieje mayor (o radio) más grande o pequeño que la órbita final (Chavez Barranco, 2012)

Acorde a la Figura 2-19, trayectoria entre la órbita inicial (en azul) y la órbita final (en rojo) se llama órbita de transferencia u órbita intermedia (en verde) y que es la mitad de una elipse. Esta órbita de transferencia comienza en el perigeo o el apogeo de la órbita inicial al aplicársele un cambio de velocidad instantáneo al agente espacial. La órbita de transferencia finaliza cuando se llega al apogeo o perigeo de la órbita final, donde se agrega un segundo cambio de velocidad para colocar al satélite en la órbita deseada

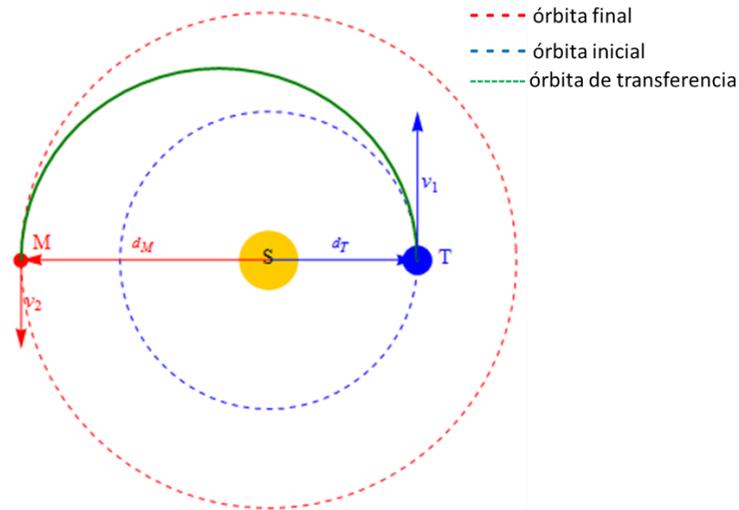


Figura 2-19 Transferencia de Hohmann.

2.7.6.4. Requisitos de velocidad y tiempos de transferencia

Usando la ecuación (43) con

$$2a = r_i + r_f = r_i \left(1 + \frac{r_f}{r_i} \right)$$

Podemos reescribir la ecuación como

$$v_i^2 = \mu \left[\frac{2}{r_i} - \frac{2}{2a} \right] = \mu \left[\frac{2}{r_i} - \frac{2}{r_i \left(1 + \frac{r_f}{r_i} \right)} \right]$$

$$v_i^2 = \frac{\mu}{r_i} \left[2 - \frac{2}{1 + \frac{r_f}{r_i}} \right]$$

$$v_i^2 = \frac{\mu}{r_i} \left[\frac{2 \left(1 + \frac{r_f}{r_i} \right) - 2}{1 + \frac{r_f}{r_i}} \right]$$

con

$$v_{ci} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

$$v_i^2 = v_{cri}^2 \left[\frac{2 + \frac{2r_f}{r_i} - 2}{1 + \frac{r_f}{r_i}} \right]$$

$$\frac{v_i}{v_{cri}} = \sqrt{\frac{\frac{2r_f}{r_i}}{1 + \frac{r_f}{r_i}}}$$

con

$$\Delta v_i = v_i - v_{cri}$$

$$\frac{\Delta v_i}{v_{cri}} = \frac{v_i - v_{cri}}{v_{cri}} = \frac{\sqrt{2 \frac{r_f}{r_i}}}{\sqrt{1 + \frac{r_f}{r_i}}} - 1 \quad (48)$$

análogamente para v_f

$$v_f^2 = \mu \left[\frac{2}{r_f} - \frac{2}{2a} \right]$$

donde ahora

$$2a = r_i + r_f = r_f \left(\frac{r_i}{r_f} + 1 \right) = r_f \left(1 + \frac{1}{\frac{r_f}{r_i}} \right)$$

$$v_f^2 = \mu \left[\frac{2}{r_f} - \frac{2}{r_f \left(1 + \frac{1}{\frac{r_f}{r_i}} \right)} \right]$$

$$v_f^2 = \frac{\mu}{r_f} \left[2 - \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{r_f}{r_i}}} \right]$$

$$v_f^2 = v_{crf}^2 \left[2 - \frac{2 \frac{r_f}{r_i}}{\frac{r_f}{r_i} + 1} \right]$$

$$v_f^2 = v_{crf}^2 \left[\frac{2 \left(\frac{r_f}{r_i} + 1 \right) - 2 \frac{r_f}{r_i}}{\frac{r_f}{r_i} + 1} \right]$$

$$v_f^2 = v_{crf}^2 \left[\frac{2}{\frac{r_f}{r_i} + 1} \right]$$

dado que

$$v_{crf}^2 = \frac{\mu}{r_f} \leftrightarrow \frac{\mu r_i}{r_i r_f}$$

$$v_{crf}^2 = v_{cri}^2 \frac{r_i}{r_f}$$

podemos reescribirlo como

$$v_f^2 = v_{cri}^2 \frac{r_i}{r_f} \left[\frac{2}{\frac{r_f}{r_i} + 1} \right]$$

$$\frac{v_f}{v_{cri}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{r_f}{r_i} \left(1 + \frac{r_f}{r_i} \right)}}$$

$$\frac{\Delta v_f}{v_i} = \frac{v_{crf} - v_f}{v_{cri}} = \frac{v_{cri} \sqrt{\frac{r_i}{r_f}}}{v_{cri}} - \sqrt{\frac{2}{\frac{r_f}{r_i} \left(1 + \frac{r_f}{r_i} \right)}}$$

$$\frac{\Delta v_f}{v_i} = \sqrt{\frac{1}{\frac{r_f}{r_i}}} - \sqrt{\frac{2}{\frac{r_f}{r_i} \left(1 + \frac{r_f}{r_i} \right)}}$$

(49)

El requerimiento de velocidad total es

$$\Delta v_{total} = \Delta v_{cri} + \Delta v_{crf}$$

de la ecuación del periodo orbital

$$\frac{\text{Tiempo de transferencia}}{P_1} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{\mu} \left[\frac{(r_f + r_i)}{2} \right]^{\frac{3}{2}}}}{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \right) r_i^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{r_f}{r_i} \right)^{\frac{3}{2}}$$

donde P_1 es el periodo de la órbita inicial.

2.8. Encuentro orbital

En muchas ocasiones las maniobras de transferencia orbital son llevadas a cabo para que los agentes involucrados se encuentren en la misma órbita. Por facilidad, la descripción del movimiento relativo de los dos objetos orbitales se realiza en esta sección donde se describirá el sistema de referencia de Hill.

El sistema de referencia Hill puede apreciarse en la Figura 2-20 para 2 agentes espaciales (Chobotov, 2002)

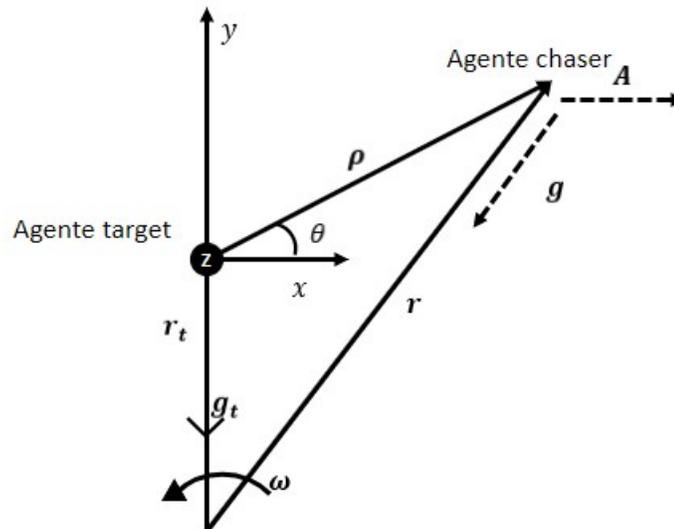


Figura 2-20 Representación gráfica del marco de referencia de Hill (Chobotov, 2002)

Así pues, si se considera el movimiento circular bajo la ecuación (15) podemos reescribirla en términos del marco de referencia de Hill

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_t + \dot{\mathbf{\rho}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{\rho}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \quad (50)$$

donde

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + \mathbf{A} \quad (51)$$

Con \mathbf{g} es la aceleración gravitacional y \mathbf{A} es la aceleración aplicada por fuerzas externas

Resolviendo las ecuaciones (50) y (51) para las componentes x, y, z y resolviendo las aceleraciones relativas, tenemos como resultado

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g \frac{x}{r} + A_x + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y + \omega^2y \\ \ddot{y} &= -g \left(\frac{y + r_T}{r} \right) + A_y + g_T - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x + \omega^2y \\ \ddot{z} &= -g \frac{z}{r} + A_z \end{aligned} \quad (52)$$

Suponiendo que la distancia satélite chaser a satélite objetivo esté en una distancia mucho menor que la del radio de la órbita

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \ll r_T^2 \quad (53)$$

Las siguientes aproximaciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned} r &= [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \approx r_T \left(1 + \frac{y}{r_T} \right) \\ g &= \frac{g_T r_T^2}{r^2} \approx g_T \left(1 - \frac{2y}{r_T} \right) \\ -g \frac{x}{r} &\approx -g_T \frac{x}{r_T} \\ -g \frac{z}{r} &\approx -g_T \frac{z}{r_T} \\ -g \left(\frac{y + r_T}{r} \right) &\approx -g_T \left(1 - \frac{2y}{r_T} \right) \end{aligned}$$

Y finalmente al linealizar las ecuaciones del sistema de la ecuación (52) se pueden expresar como

$$\ddot{x} = -g_T \frac{x}{r_T} + A_x + 2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y + \omega^2x \quad (54)$$

$$\ddot{y} = +2g_T \frac{y}{r_T} + A_y - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x + \omega^2y$$

$$\ddot{z} = -g_T \frac{z}{r_T} + A_z$$

Cuando el satélite objetivo se encuentra en una órbita circular $\dot{\omega} = 0$ y además $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{r_T^3}}$ y se supone que no existen aceleraciones externas $A_x = A_y = A_z$, por lo que el sistema de ecuaciones (54) se convierte en

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = 0 \quad (55)$$

$$\ddot{z} + \omega^2z = 0$$

Como podemos observar en el sistema de ecuaciones (55) para la ecuación de movimiento en x se encuentra una variable de y , y para la ecuación de movimiento en y tenemos elementos de x . Y a este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se les conoce como HCW.

Una solución a las ecuaciones HCW, es entregada por (Chobotov, 2002) teniendo como resultado la matriz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6(\omega t - \sin(\omega t)) & 0 & -3t + \frac{4}{\omega} \sin(\omega t) & \frac{2}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) & 0 \\ 0 & 4 - 3(\cos(\omega t)) & 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega t) & 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ 0 & 6\omega(1 - \cos(\omega t)) & 0 & -3 + 4 \cos(\omega t) & 2 \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 3\omega \sin(\omega t) & 0 & -2 \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \omega \sin(\omega t) & 0 & 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

2.9. Modelado matemático de rotaciones

Dada la importancia de las rotaciones en los movimientos de un agente espacial, aquí describiremos las formas de modelarlas tanto para cada uno en su propio sistema de referencia, esto quiere decir que los agentes además de

moverse en su órbita estarán rotando respecto a su centro de masa o, dicho de otra manera, rotarán en un sistema de referencia local.

2.9.1. Herramientas matemáticas de la rotación de cuerpos rígidos¹

Existen diferentes formas de representar rotaciones en un espacio de tres dimensiones, ayudándonos de los ángulos de Euler, primordialmente se estudiaron las matrices de rotación y los cuaterniones como se demuestra posteriormente en 2.9.3 y 2.9.4 y con estos modelar diferentes rotaciones para seleccionar la más adecuada. (Harleston, 2011)

2.9.2. Ángulos de Euler.

Los llamados ángulos de Euler son un conjunto de coordenadas angulares que nos ayudan a especificar la orientación de un sistema de referencia rotado; este sistema rotado debe ser ortogonal a un sistema de referencia no rotado. Fueron introducidos por Leonhard Paul Euler en sus estudios de mecánica de un cuerpo rígido para describir la orientación de un sistema de referencia de un cuerpo rígido en movimiento.

Debido a las restricciones de ortogonalidad de las matrices de transformación de coordenadas (véase Apéndice A Transformación de coordenadas. Cartesianas 3D a Esféricas) solo son necesarios 3 ángulos para describir la matriz de rotación A . Lo que puede entenderse sistema de coordenadas esféricas donde solo dos ángulos son requeridos para especificar un punto en el espacio, pero aun así se requiere un tercer ángulo para establecer la rotación de coordenadas.

Este tercer ángulo debe referirse a uno de los ejes que también especifican los dos ángulos iniciales

2.9.3. Matrices de rotación.

¹ En los apéndices se encuentra la teoría de cambio de coordenadas necesario para ángulos de Euler.

Las matrices de rotación son un conjunto de 3 matrices las cuales nos ayudan a representar matemáticamente y calcular un punto en el espacio de \mathbb{R}^3 , estas mismas observan el cambio de coordenadas no como si el objeto rotara sobre un sistema de referencia, sino que propiamente el sistema de referencia es el que rota, es decir, en una analogía podríamos intentar representar esto como si yo tuviera un objeto cualquiera que este sea, lo puedo referir a mí mismo, y matemáticamente tendría la misma representación si yo tomara este objeto y lo rotara sobre sus ejes, a que yo rotara sobre mis propios ejes generando una rotación equivalente a la que podría tener este objeto. (Harleston, 2011)

Para el eje Z tenemos que si este lo fijamos y generamos una rotación de valor θ sobre este obtendríamos la matriz

$$R_z(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Como podemos observar, esta matriz de rotación no afecta al eje Z, pero genera dos nuevos ejes que llamaremos x' y y' .

De igual manera podemos hacer rotaciones tanto para el eje x, quedándonos así

$$R_x(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Esta matriz hará rotar los planos z y y' . Generando de esta manera un nuevo eje z'

Y como podemos suponer con lo anterior, cualquier punto en el espacio se puede alcanzar si se vuelve a rotar sobre el eje z' en un ángulo ψ , cuya matriz de rotación sería

$$R_z(\psi) = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Por lo que al multiplicar las matrices correspondientes para generar una rotación al marco de referencia del punto en el espacio tendríamos como resultado.

$$A = \begin{vmatrix} \cos \psi * \cos \theta - \cos \varphi * \sin \psi * \sin \theta, & \cos \theta * \sin \psi + \cos \varphi * \cos \psi * \sin \theta & \sin \varphi * \sin \theta \\ -\cos \psi * \sin \theta - \cos \varphi * \cos \theta * \sin \psi & \cos \varphi * \cos \psi * \cos \theta - \sin \psi * \sin \theta & \cos \theta * \sin \varphi \\ \sin \varphi * \sin \psi & -\cos \psi * \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \quad (57)$$

Llamando a los ejes x, y, z como 1, 2 y 3 respectivamente podemos nombrar a cada una de las permutaciones posibles como el orden de su permutación, por lo que la (57) se describiría como matriz de rotación 313.

No porque no sea necesario el rotar uno de los 3 ejes para alcanzar cualquier punto en el espacio significa que la matriz de rotación (en este caso del eje y), no se pueda realizar; en este caso la matriz de rotación del eje y en términos del ángulo β nos resultaría

$$R_y(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}$$

Realizando una rotación en cada uno de los ejes x, y, z para generar un sistema rotado x', y', z' , la matriz de rotación 321 equivalente sería

$$A = R_z(\varphi) * R_y(\beta) * R_x(\theta)$$

$$A = \begin{vmatrix} \cos \beta * \cos \theta & \cos \varphi * \sin \theta + \sin \beta * \cos \theta * \sin \varphi & \sin \varphi * \sin \theta - \cos \varphi * \sin \beta * \cos \theta \\ -\cos \beta * \sin \theta & \cos \varphi * \cos \theta - \sin \beta * \sin \varphi * \sin \theta & \cos \theta * \sin \varphi + \cos \varphi * \sin \beta * \sin \theta \\ \sin \beta & -\cos \beta * \sin \varphi & \cos \beta * \cos \varphi \end{vmatrix} \quad (58)$$

Definiendo de este modo las transformaciones pasivas, donde lo que rota no es el vector (o punto en el espacio) en cuestión, sino que es el mismo marco de referencia el que rota, se debe aclarar que para que estas rotaciones de cuerpo rígido se puedan llevar a cabo, es completamente necesario que el sistema que desea rotar cumpla con la restricción de ortogonalidad del sistema (que ambos sistemas, el rotado y no rotado tengan el mismo origen).

Como podemos observar en la Figura 2-21 un vector cualquiera que este sea, que vaya del origen a un punto en el espacio (x, y, z) , puede ser descrito en el sistema rotado como un punto en (x', y', z')

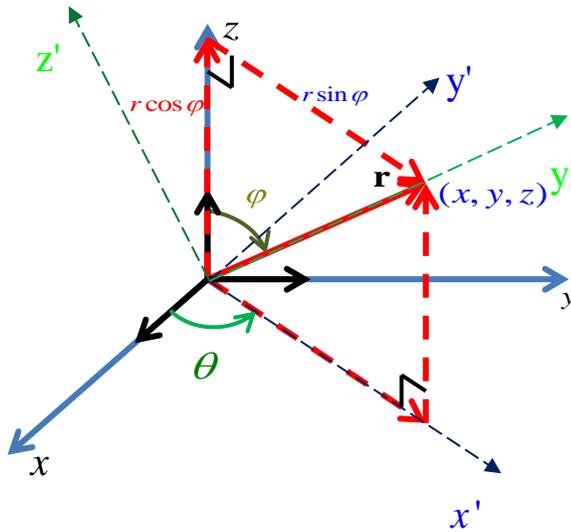


Figura 2-21 Representación geometroalgebraica de un vector en \mathbb{R}^3 con un sistema de referencia ortogonal rotado.

2.9.4. Cuaterniones.

Un cuaternión es una herramienta matemática de 4 elementos donde el primero es un número real y los tres restantes son elementos imaginarios, que puede representarse como se muestra en la ecuación (59) que se describirá luego (Chavez Barranco, 2012)

Los cuaterniones son una extensión de los reales que contienen por sí mismos a los números complejos (es decir, los números complejos son un subespacio vectorial de estos, refiérase al Apéndice B Operaciones con cuaterniones.)

Los cuaterniones tienen la capacidad de representar la orientación o posición angular de un cuerpo cualquiera que este sea sin que se tenga que recurrir al problema de invertir una matriz singular, por lo que su utilidad en programación es ideal.

$$\mathbf{q} = [\lambda, \mathbf{a}] \quad (59)$$

donde:

$\lambda =$ la parte real del cuaternión (escalar)

$$\mathbf{a} = xi + yj + zj = \text{parte imaginaria}$$

Y las componentes de esta parte imaginaria del cuaternión pueden representarse como componentes vectoriales con las bases imaginarias tales que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Los cuaterniones unitarios pueden representar rotaciones en tres dimensiones. Si q es un cuaternión unitario, este puede pensarse como una esfera de radio 1 en el espacio de \mathbb{R}^4 . Y podemos representar una rotación en el espacio \mathbb{R}^4 , en donde la parte imaginaria del cuaternión son las componentes vectoriales de cualquier eje arbitrario.

La rotación alrededor de un vector unitario \hat{n} y un ángulo θ puede pensarse como un cuaternión.

Sea

$$\vec{n} = n_1i + n_2j + n_3k$$

Cuya norma es

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1$$

El cuaternión que representa la rotación alrededor del eje es

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (n_1i + n_2j + n_3k) \quad (60)$$

Se puede observar que este es un cuaternión de rotación dado que su norma es

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)}$$

Con

$$(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = 1$$

Tenemos

que

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$|q| = 1$$

Transformación de puntos

Para rotar un punto p en el espacio alrededor de un vector unitario \hat{n} y un ángulo θ y encontrar así un nuevo punto rotado, se realiza la operación

$$p' = q \cdot p \cdot \bar{q} \quad (61)$$

Pudiendo generalizar para versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ tenemos que las rotaciones alrededor de estos ejes estarían dados por los cuaterniones de rotación

$$\begin{aligned} q_x &= \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} (1i + 0j + 0k) \\ q_y &= \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} (0i + 1j + 0k) \\ q_z &= \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} (0i + 0j + 1k) \end{aligned} \quad (62)$$

Dada la no conmutabilidad de la multiplicación de cuaterniones (véase Producto de cuaterniones en Apéndice B Operaciones con cuaterniones.) podremos definir la permutación de las rotaciones pudiendo generar de la misma manera que con las matrices de rotación rotaciones 313, 123 y todas sus permutaciones y combinaciones posibles.

Capítulo 3

Diseño basado en las ecuaciones e implementación del simulador computacional

3.1. Descripción general

El crear un simulador computacional para el acercamiento y encuentro de agentes espaciales es una tarea interdisciplinaria que considera aspectos varios, tales como el diseño de un agente orbital, el propagador de órbitas, el cálculo de rotaciones locales y globales, la descripción del movimiento y sus variables de estado, etcétera. Así mismo el emular a través de la programación las condiciones reales de ingravidez, perturbaciones del ambiente espacial y vacío no son tan factibles como el movimiento y orientación del agente espacial que es en lo que este trabajo se enfoca.

Este capítulo planea describir de una forma general el sistema de simulación teniendo en cuenta el panorama general del funcionamiento, iniciando desde lo más básico y los pasos que se llevaron a cabo y así llegar a la culminación del simulador, recopilando todos estos conocimientos y uniéndolos en un solo proyecto integral como se observa en la Figura 3-1.

Para iniciar con el simulador se requiere el subdividirlo en sus partes más fundamentales las cuales son

- Diseño del agente espacial
- Modelado matemático de rotaciones.
- Propagador orbital
- Transformación de elementos orbitales a variables de estado
- Inserción de las variables de estado al agente espacial.

- Transferencias orbitales
- Creación de interfaz gráfica de usuario

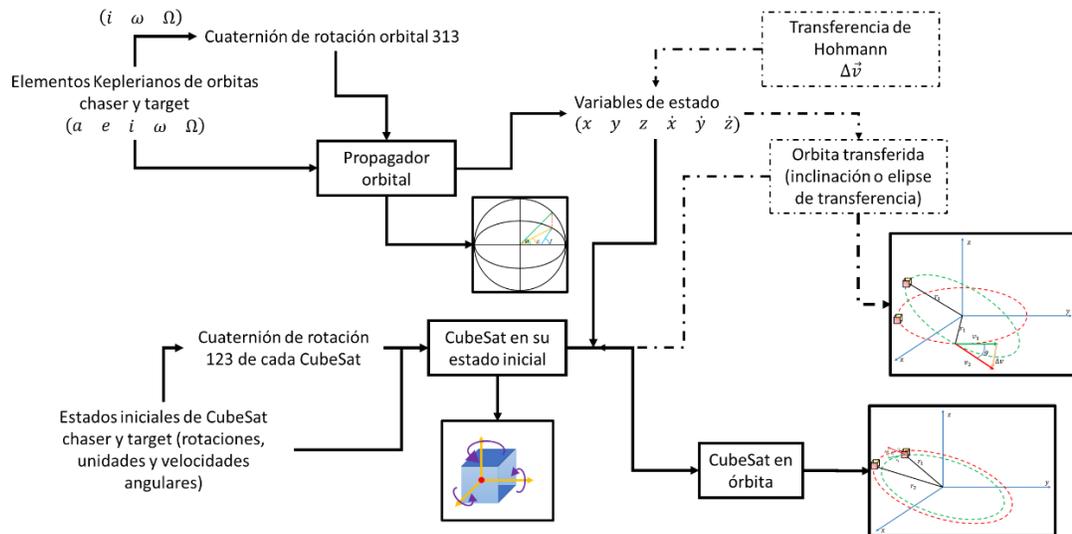


Figura 3-1 Diseño conceptual del simulador

3.2. Diseño del agente orbital

Inicialmente se planteó el diseñar el agente orbital de manera sólida, a partir de un modelo 3d del mismo, generado en algún software de diseño (SolidWorks) pero la primer limitante que se encontró fue la falta de manejo en las proporciones, por lo que se planteó realizar el primer diseño a partir de solo las aristas del cubo referenciadas a un origen local, teniendo como resultado un objeto de 12 elementos de línea cuyas longitudes y propiedades (grosor de línea, color, estilo de línea, etcétera) podían ser modificables.

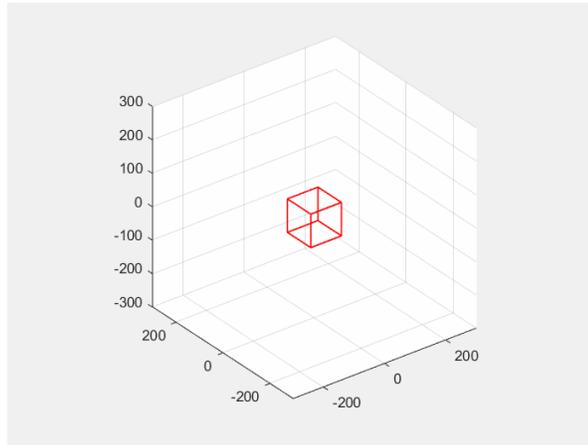


Figura 3-2 Primer diseño de agente orbital

Posteriormente la descripción de los 12 elementos a considerar se pudo agrupar por medio de una matriz de vértices, donde los vértices del cubo se describen a partir de una matriz de acomodo de caras del cubo.

$$vertices = [v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8]$$

donde cada elemento v_n contiene las coordenadas $[x, y, z]$ de cada vértice del paralelepípedo observando cada uno de los vértices del cubo se puede representar como en la Figura 3-3

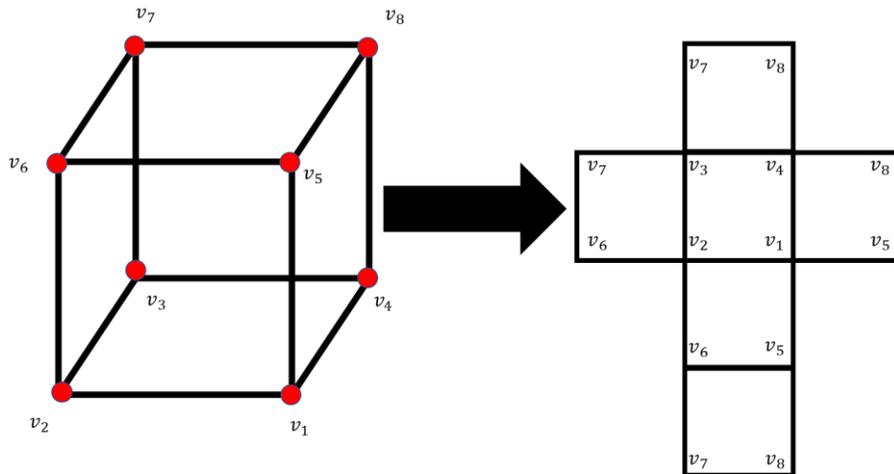


Figura 3-3 Descripción conceptual de un cubo a partir de sus vértices

al asignar a cada uno de estos vértices un número de la forma

$$v_1 \rightarrow 1$$

$$v_2 \rightarrow 2$$

$$v_3 \rightarrow 3$$

$$v_4 \rightarrow 4$$

$$v_5 \rightarrow 5$$

$$v_6 \rightarrow 6$$

$$v_7 \rightarrow 7$$

$$v_8 \rightarrow 8$$

podemos representar cada cara como una combinación de los vértices, esto es

$$cara_1 = \{1,2,6,5\}$$

$$cara_2 = \{2,3,7,6\}$$

$$cara_3 = \{3,4,8,7\}$$

$$cara_4 = \{4,1,5,8\}$$

$$cara_5 = \{1,2,3,4\}$$

$$cara_6 = \{5,6,7,8\}$$

específicamente para un paralelepípedo una matriz de caras donde se conectan los vértices correspondientes con un arreglo de la forma

$$caras = [1\ 2\ 6\ 5; 2\ 3\ 7\ 6; 3\ 4\ 8\ 7; 4\ 1\ 5\ 8; 1\ 2\ 3\ 4; 5\ 6\ 7\ 8]$$

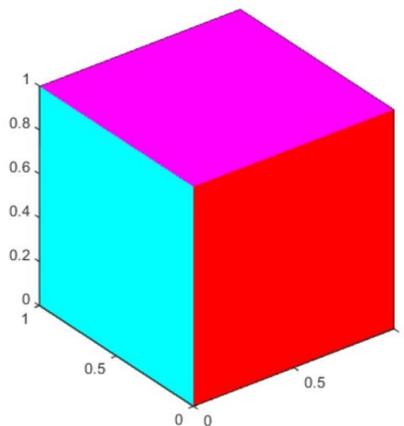


Figura 3-4 Cubo generado por matrices de vértices y caras.

Este tipo de arreglos donde se definen los vértices de un paralelepípedo y una matriz de acomodo de vértices para crear diferentes parches en cada cara se le conoce como parche multifacético (véase (The MathWorks, 2020)).

Sabiendo que cada uno elemento de la matriz de vértices v_n es un componente con la coordenada $[x, y, z]$ del mismo, se puede generalizar y modificarlo de forma que las unidades del agente puedan ser variables y así poder construir paralelepípedos de altos, anchos y largos desiguales (véase Figura 3-5), de manera que la matriz de vértices queda expresada de la forma

$$vértices = \begin{bmatrix} \left[\frac{tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, \frac{-tcz}{2} \right] \\ \left[\frac{tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right] \\ \left[\frac{tcx}{2}, \frac{-tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right] \\ \left[\frac{tcx}{2}, \frac{-tcy}{2}, \frac{-tcz}{2} \right] \\ \left[\frac{-tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, \frac{-tcz}{2} \right] \\ \left[\frac{-tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right] \\ \left[\frac{-tcx}{2}, \frac{-tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right] \\ \left[\frac{-tcx}{2}, \frac{-tcy}{2}, \frac{-tcz}{2} \right] \end{bmatrix}$$

donde

$tcx =$ tamaño del cubo en el eje x

$tcy =$ tamaño del cubo en el eje y

$tcz =$ tamaño del cubo en el eje z

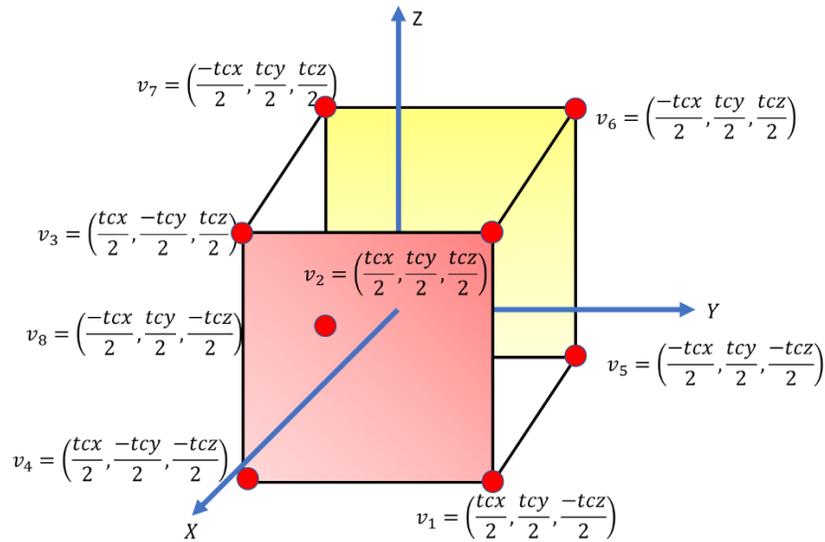


Figura 3-5 Descripción del agente espacial

Teniendo definido el agente espacial como un parche multifacético en Matlab, podemos ahora trabajar con él más fácilmente ya que para generar una rotación en él, solo hace falta multiplicar la matriz de vértices por la herramienta de rotación seleccionada, que, como ya se ha mencionado para nosotros a lo largo de este trabajo de investigación la herramienta son los cuaterniones;

Apoyándonos de la sección 2.9.4, de donde sabemos que la rotación de un punto en el espacio puede ser calculado a partir de un cuaternión de rotación que a su vez puede ser descompuesto en cada uno de los cuaterniones de rotación particulares para cada eje

$$\begin{aligned}
 q_x &= \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} i + 0j + 0k \\
 q_y &= \cos \frac{\beta}{2} + 0i + \sin \frac{\beta}{2} j + 0k \\
 q_z &= \cos \frac{\gamma}{2} + 0i + 0j + \sin \frac{\gamma}{2} k
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

donde

α, β y γ : son las cantidades angulares para rotar en cada uno de los ejes respectivamente.

Calculando con estos un cuaternión de rotación total de la forma

$$Q_t = q_x * q_y * q_z$$

Y ayudándonos por el cuaternión conjugado

$$\overline{Q}_t = conj(Q_t)$$

podemos obtener un punto rotado con el uso de la ecuación.

$$Pr = Q_t * P * \overline{Q}_t \quad (64)$$

donde

$$Pr = \text{Punto rotado}$$

$$Q_t = \text{cuaternión de rotación total}$$

$$P = \text{Punto a rotar}$$

$$\overline{Q}_t = \text{cuaternión de rotación conjugado}$$

Es evidente que para nosotros los puntos a rotar son los vértices de nuestro agente espacial, es aquí donde tenemos que describir nuestro agente espacial de la Figura 3-5 en un sistema cuaternión.

Cada uno de los vértices ahora se describe de la forma

$$\begin{aligned} aq &= \text{quaternion} \left(0, \frac{tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, -\frac{tcz}{2} \right); \\ bq &= \text{quaternion} \left(0, \frac{tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right); \\ cq &= \text{quaternion} \left(0, \frac{tcx}{2}, -\frac{tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right); \\ dq &= \text{quaternion} \left(0, \frac{tcx}{2}, -\frac{tcy}{2}, -\frac{tcz}{2} \right); \\ eq &= \text{quaternion} \left(0, -\frac{tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, -\frac{tcz}{2} \right); \\ fq &= \text{quaternion} \left(0, -\frac{tcx}{2}, \frac{tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right); \\ gq &= \text{quaternion} \left(0, -\frac{tcx}{2}, -\frac{tcy}{2}, \frac{tcz}{2} \right); \\ hq &= \text{quaternion} \left(0, -\frac{tcx}{2}, -\frac{tcy}{2}, -\frac{tcz}{2} \right); \end{aligned}$$

y se agrupa en un arreglo de vértices cuaterniones

$$a = [aq, bq, cq, dq, eq, fq, gq, hq];$$

Que contiene toda la información de los vértices de nuestro agente espacial, en forma de cuaternión, para así poder realizar las operaciones de rotación pertinentes con el uso de la ecuación (64)

$$Vr = Q_t * a * \overline{Q_t}$$

donde

$V_r =$ Matriz de vértices rotados

$Q_t =$ Cuaternión de rotación total

$a =$ Matriz de vertices cuaterniones

$\overline{Q_t} =$ Cuaternión de rotación total conjugado

finalmente, como nuestro parche multifacético no puede ser construido con puntos cuaterniones, se tiene que extraer la información de la matriz de vértices rotados y transformarlos a una matriz de vértices de 3 elementos, donde los elementos a seleccionar son aquellos que contienen la información vectorial del agente espacial.

3.3. Propagador orbital

Para la construcción del generador orbital es necesario como ya vimos en el capítulo 2 un sistema de referencia en el cual podamos basarnos, específicamente la construcción y/o descripción de una órbita se hace a partir de los elementos clásicos de Kepler, los cuales son el semi eje mayor de la órbita, la excentricidad, la ascensión recta del nodo ascendente, el argumento del perigeo, la anomalía media y la inclinación de la órbita. (Chobotov, 2002)

$$OE = [a, e, i, \Omega, \omega, M] \quad (65)$$

donde

$OE =$ Matriz de elementos orbitales

$a =$ semieje mayor de la órbita

$e =$ excentricidad orbital

$i = \text{inclinación orbital}$

$\Omega = \text{Ascención recta del nodo ascendente}$

$\omega = \text{longitud del perigeo}$

$M = \text{anomalía media}$

A partir de estos elementos tendremos descrito nuestro sistema, pero la descripción del movimiento a través de la órbita no puede ser definido con exactitud, ya que la anomalía media no indica el cambio de ángulo en el foco orbital, sino que este es respecto al centro de una circunferencia auxiliar como se observa en la Figura 2-15, y para poder describir con mayor veracidad el cambio angular en cada momento del periodo orbital se tendrá que resolver la ecuación de Kepler.

Recordando la ecuación de Kepler

$$M = E - e \sin(E)$$

donde

$M = \text{Anomalía media}$

$E = \text{Anomalía excéntrica}$

$e = \text{excentricidad orbital}$

que define la relación entre la evolución angular en la órbita de un cuerpo celeste en función del tiempo medido desde un punto inicial. Al tratarse de una ecuación trascendente no podemos obtener su valor al realizar algún conjunto de operaciones con la variable ya que por definición son un tipo de ecuaciones que no pueden reducirse a una ecuación, de la forma $f(x) = 0$, para resolver mediante operaciones algebraicas.

Como nos indica (Chobotov, 2002) en un tiempo $t \geq 0$, la anomalía media es conocida e inclusive puede ser calculada a partir de

$$M = n * t$$

donde

$n = \text{Movimiento orbital medio}$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Ecuación 3-1

Resolviendo la ecuación de Kepler por medio del método de Newton-Raphson

Primeramente, se despeja la anomalía media de la ecuación (29) y se define de esta manera a una función auxiliar $f(E)$, de la cual se buscarán sus raíces en $f(E) = 0$

$$f(E) = E - e \sin(E) - M \quad (66)$$

Por definición cuando E es negativo, M también lo es, y, para valores negativos de E y de M , $f(E)$ es una función par, o, dicho de otra manera

$$f(-E) = -E + e \sin(E) + M$$

Al tratarse de un valor angular dentro de una elipse, se puede notar que para $0 \leq E \leq \pi$

$$f(2n\pi - E) = (2n\pi - E) - e \sin(2n\pi - E) - (2n\pi - M)$$

donde $n = 1,2,3,4,5 \dots$ y

$$f(2n\pi - E) = -f(E) \quad (67)$$

limitando a

$$0 \leq E \leq \pi$$

Por lo tanto, para cada valor de E , se tiene solo que considerar la solución en el intervalo de $0 \leq E \leq \pi$ y ajustar los resultados por signo y múltiplos de 2π según corresponda.

Considerando la expansión de las series de Taylor de E de la forma

$$f(E + \Delta E) = f(E) + f'(E)\Delta E + \frac{f''(E)}{2!}\Delta E^2 + \frac{f'''(E)}{3!}\Delta E^3 + \dots \quad (68)$$

Si se descartan los términos de ΔE^2 y mayores, tenemos que

$$f(E + \Delta E) = f(E) + f'(E)\Delta E \quad (69)$$

Cuya interpretación puede darse si se supone que tenemos E como una aproximación de una raíz de la función $f(E)$, se tiene que encontrar un ΔE apropiado para derivar la función en el punto $(E + \Delta E)$ a su raíz o cero de la función, transformando así la ecuación (69) en

$$0 = f(E) + f'(E)\Delta E \quad (70)$$

de donde se obtiene

$$\Delta E = -\frac{f(E)}{f'(E)} \quad (71)$$

El cuál es el termino de corrección en el método de Newton-Raphson de aproximación sucesiva.

en nuestro caso

$$f(E) = E - e \sin(E) - M \quad (72)$$

Y

$$f'(E) = 1 - e \cos(E) \quad (73)$$

Dado que nuestro sistema inicia la simulación desde un punto inicial en $t_0 = 0$, al escoger un valor inicial para E_0 el más apropiado será M , posteriormente se calcula

$$f(E_i) = E_i - e \sin(E) - M$$

$$f'(E_i) = 1 - e \cos(E_i)$$

$$\Delta E_i = -\frac{f(E_i)}{f'(E_i)}$$

Se determina un nuevo E con $E_{i+1} = E_i + \Delta E_i$

Y se repiten los cálculos iterativamente hasta que la condición de

$$|\Delta E| < \varepsilon$$

donde

$\varepsilon = \text{constante de ajuste}$

Esta es una constante apropiadamente pequeña para corresponder al grado de precisión deseado en el cálculo.

De igual forma que con la anomalía media, la anomalía excéntrica no es en nuestro caso, la apropiada para la descripción angular a través del tiempo, ya que se trata de la evolución angular a partir del centro de una circunferencia auxiliar y no de la evolución angular en nuestro punto focal de la elipse, por lo que ahora, con este valor angular tiene que ser calculada la anomalía verdadera (Chavez Barranco, 2012), la cual fácilmente puede ser calculada de la forma

$$f = 2 \left(\arctan \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \right) \left(\tan \left(\frac{E}{2} \right) \right) \quad (74)$$

donde

$f = \text{anomalía verdadera}$

$e = \text{excentricidad de la órbita}$

$E = \text{anomalía excéntrica}$

Y si se evalúa f_i para cada E_i podremos tener muestreada completamente la anomalía verdadera a través del tiempo gracias a los n valores de la anomalía excéntrica anteriormente calculada y de este modo observar el cambio del radio orbital a través del tiempo con la fórmula

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)}$$

donde

$a = \text{semieje mayor de la órbita}$

$e = \text{excentricidad de la órbita}$

$f = \text{anomalía verdadera}$

3.4. Transformación de elementos orbitales a variables de estado

Como indica (Oliver Montenbruck, 2005) una manera sencilla de transformar los elementos orbitales clásicos a variables de estado en un marco de referencia ECI se puede realizar a través de una transformación de coordenadas, donde primeramente se obtendrán las coordenadas para la posición orbital para una órbita no rotada por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned}x &= a(\cos(f) - e) \\y &= a\left(\sqrt{1 - e^2}\right)(\sin(f)) \\z &= 0\end{aligned}\tag{75}$$

En tanto que para la velocidad orbital se tienen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{(\sqrt{\mu * a})}{r}(-a(\sin(f))) \\ \dot{y} &= \frac{(\sqrt{\mu * a})}{r}\left(\sqrt{1 - e^2}\right)(\cos(f)) \\ \dot{z} &= 0\end{aligned}\tag{76}$$

Con estas transformaciones podemos obtener un plano orbital no rotado, por lo que el siguiente paso a seguir es el aplicar la rotación del plano orbital según las variables angulares de los elementos clásicos, los cuales son ω, Ω, i , los cuales en nuestro caso en el sistema de referencia ECI representan una rotación del tipo 313, dado que nuestras herramientas de rotación con cuaterniones, la descripción de cada cuaternión de rotación será

$$\begin{aligned}q_z &= \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\mathbf{k} \\ q_x &= \cos\left(\frac{i}{2}\right) + \sin\left(\frac{i}{2}\right)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ q_{z'} &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathbf{k}\end{aligned}\tag{77}$$

Por lo que se obtendrá un cuaternión de rotación total 313 de la forma

$$Q_{rotorb} = q_z * q_x * q_{z'}$$

Agrupando las variables de estado en el plano orbital no rotado mediante el uso de un arreglo bidimensional, podemos ahora, como con nuestro agente espacia, agrupar cada uno de los puntos de la órbita no rotada y transformarla en un cuaternión de posición orbital, el cual nos describirá la órbita en un espacio cuaternión para poder así aplicar la rotación con el uso de la ecuación (61) y calcular cada uno de los puntos rotados de nuestra órbita final.

Debe recordarse que como no existe una forma directa de desplegar los datos visualmente con una matriz de cuaterniones, puesto que el software Matlab no puede graficar un espacio vectorial de 4 dimensiones, por lo que se tendrá que extraer la componente vectorial del cuaternión de estado ya rotado, y así poder agruparlos en una matriz de posición y en una matriz de velocidad.

Teniendo construido un algoritmo para la creación de un propagador orbital que apoyado de las herramientas de rotación por medio de cuaterniones, nos ayudarán a calcular las posición y velocidad a lo largo de la órbita, como se observa en la Figura 3-6

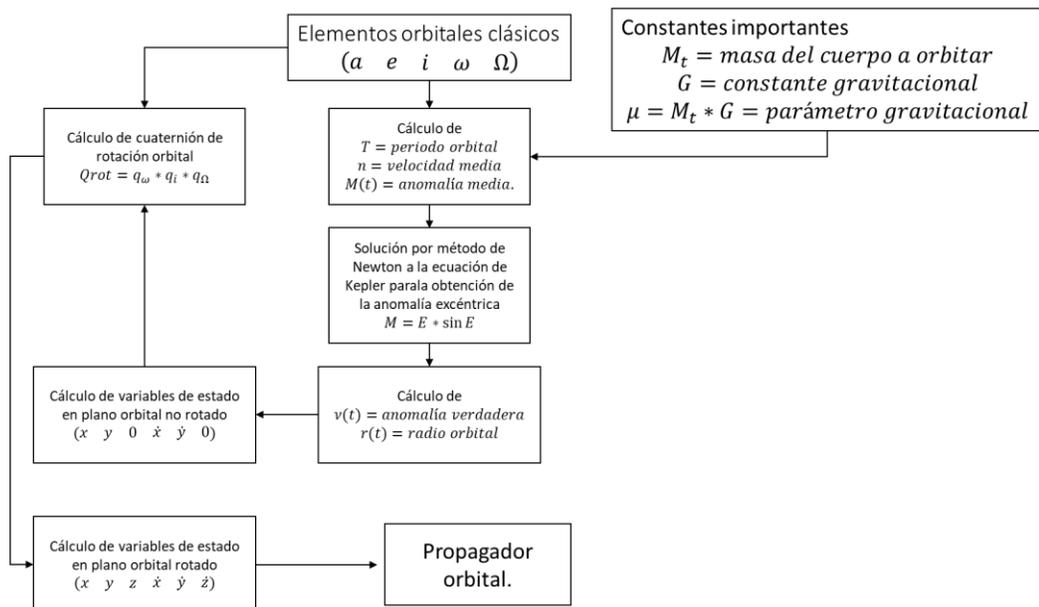


Figura 3-6 Diagrama de flujo de datos para el propagador orbital.

3.5. Integración de variables de estado al agente espacial

Dado que nuestro agente espacial estará viajando a través de la órbita generada por el propagador orbital, tenemos que definir ahora un cuaternión de posición el cual nos ayudará a describir el origen del cubo desfasado del origen del sistema de referencia ECI (véase Figura 3-7), el cual lo podemos ver como

$$q_{pos} = 0 + P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

donde

P_x = Punto actual en "x" de la órbita

P_y = Punto actual en "y" de la órbita

P_z = Punto actual en z de la órbita

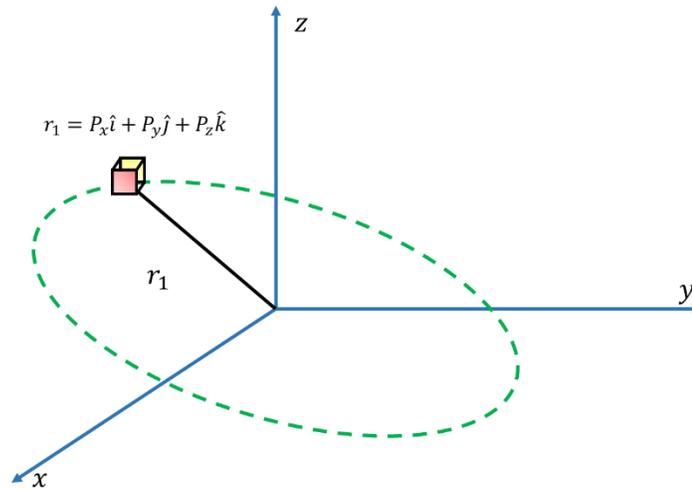


Figura 3-7 Descripción de agente orbital en la órbita

De la misma manera que en los pasos anteriores, la interpretación de los resultados que nos entrega la simulación no nos permite incluir el cambio de origen de los vértices de una manera directa, por lo que a cada posición de la órbita se le reemplaza por un cuaternión equivalente y se asigna al centro del agente espacial.

Así mismo las variables de rotaciones locales se inicializan generando cuaterniones de rotación en cada iteración para notar la progresión del ángulo rotado en cada uno de los ejes del agente espacial.

3.6. Transferencias orbitales

Parte crucial de este trabajo de investigación son las maniobras de transferencia orbital, las cuales pueden ser muchas y muy variadas, dependiendo de la excentricidad de la órbita que se tenga serán seleccionadas las más adecuadas, pero por ser un trabajo inicial nos limitaremos en este trabajo de investigación a órbitas circulares, en tanto que las maniobras de cambio de plano y de cambio reducción de semieje mayor serán las transferencias de Hohmann, las cuales describen un cambio de inclinación y de radio orbital, y que pueden ser implementadas a partir de 2 impulsos tangenciales en la órbita a modificar, sin embargo, al plantearse el problema se considera pertinente que estas puedan ser modificables, ya que a menor número de maniobras, mayor es la magnitud del impulso tangencial a realizar. Teniendo así una transferencia orbital total dividida en 2 pasos (véase Figura 3-8 y Figura 3-9).

- Las maniobras de cambio de inclinación.
- Las maniobras de reducción de radio orbital.

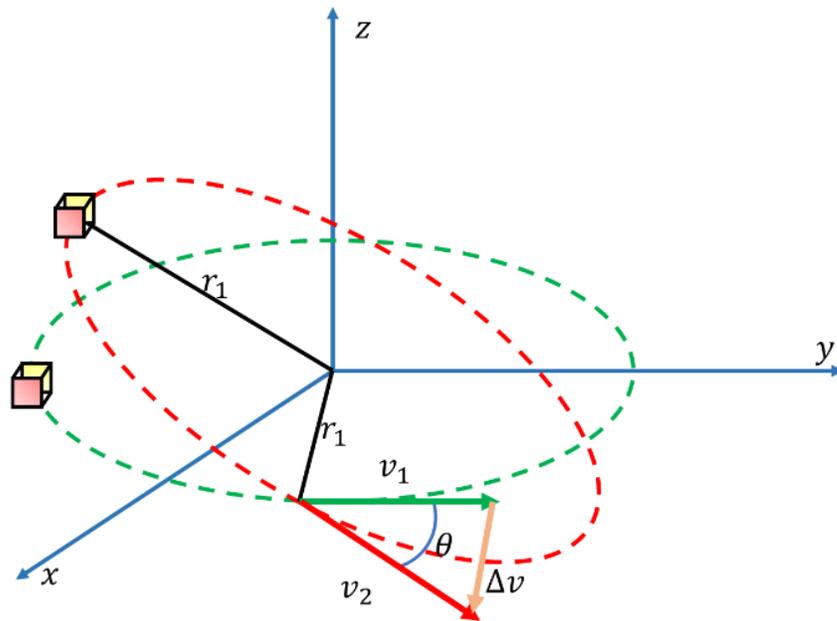


Figura 3-8 Descripción de las maniobras de cambio de plano orbital.

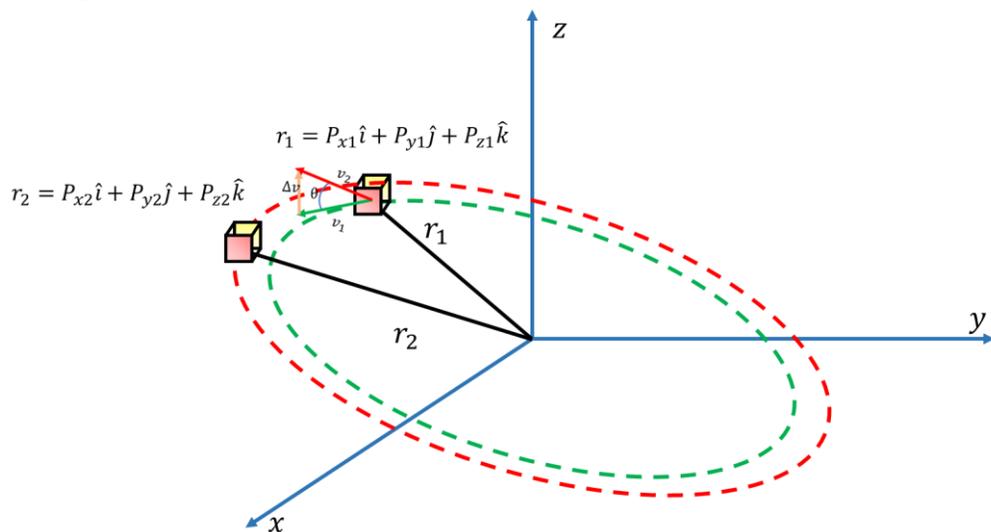


Figura 3-9 Descripción de las maniobras de cambio de radio orbital.

Ambas maniobras de modificación de órbita se deben a un cambio en la velocidad orbital del agente espacial, agregando un impulso tangencial en un punto de su órbita, sin embargo, el cálculo de los impulsos orbitales y la modificación de la energía en la órbita generan un cambio en la función de velocidad, este a su vez, modifica cada uno de los valores calculados en cada

instante de la ecuación (75) y dependiendo el sentido en el que cada Δv sea aplicado, esto generará un incremento o decremento en la inclinación de la órbita o un cambio en su radio orbital, lo que por ende nos llevará a un aumento o decremento en las variables del semieje mayor de la órbita (a) y de la inclinación orbital (i), que al ingresar al generador orbital nos entrega las órbitas de inclinación y finalmente la espiral de transferencia orbital (véase Figura 3-10). En este último paso que se aplica el Δv calculado a la órbita chaser para poder generar la espiral de transferencia orbital, se describe usando como centro de un sistema de referencia el centro del agente espacial target, generando así un sistema de referencia de Hill que describirá el movimiento del agente espacial (véase Figura 3-11)

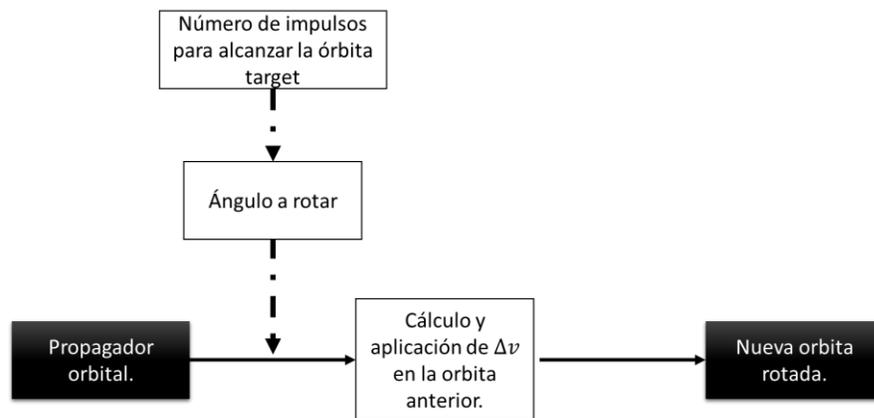


Figura 3-10 Diagrama de flujo de datos para la transferencia de Hohmann

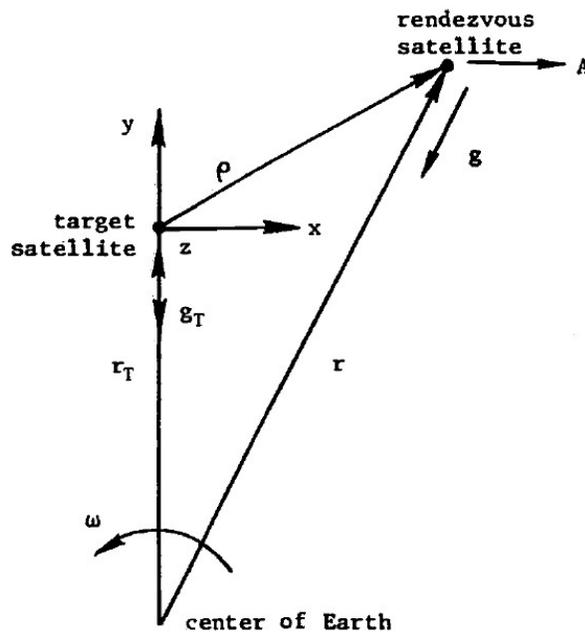


Figura 3-11 Marco de referencia de Hill (Chobotov, 2002)

Usando un propagador de la matriz de soluciones de la ecuación (56) al movimiento relativo en órbitas con el vector que apunta del agente espacial target al agente espacial chaser durante la etapa de transferencia orbital de reducción de radio orbital, se obtienen los datos del movimiento relativo para el encuentro final de los agentes espaciales, estos aunados a la información obtenida de las rotaciones locales de cada uno de los agentes espaciales nos define el estado completo de la misión de acercamiento, encuentro y acoplamiento de ambos agentes

Capítulo 4

Realización del prototipo simulador y sus resultados

En este capítulo se presenta la implementación del simulador de dos agentes espaciales orbitales cuya base es la interfaz gráfica de usuario (GUI) que permite se introduzcan las condiciones iniciales de rotación de cada agente, así como las orbitas en las que se operará el simulador espacial de 2 elementos orbitales estableciendo condiciones iniciales de rotación en cada uno de los agentes.

Al final se presentan las pantallas de visualización de simulador que permiten observar una animación de los agentes como las gráficas de los datos correspondientes a la navegación y el cómo se logra el encuentro de los dos agentes.

4.1. Creación de interfaz gráfica de usuario

Siguiendo el diagrama de flujo de datos de la Figura 4-1 se crearon las funciones necesarias para el generador orbital, la configuración inicial de los satélites chaser y target y las verificaciones de estados de cada una de las partes que componen el simulador en el software Matlab

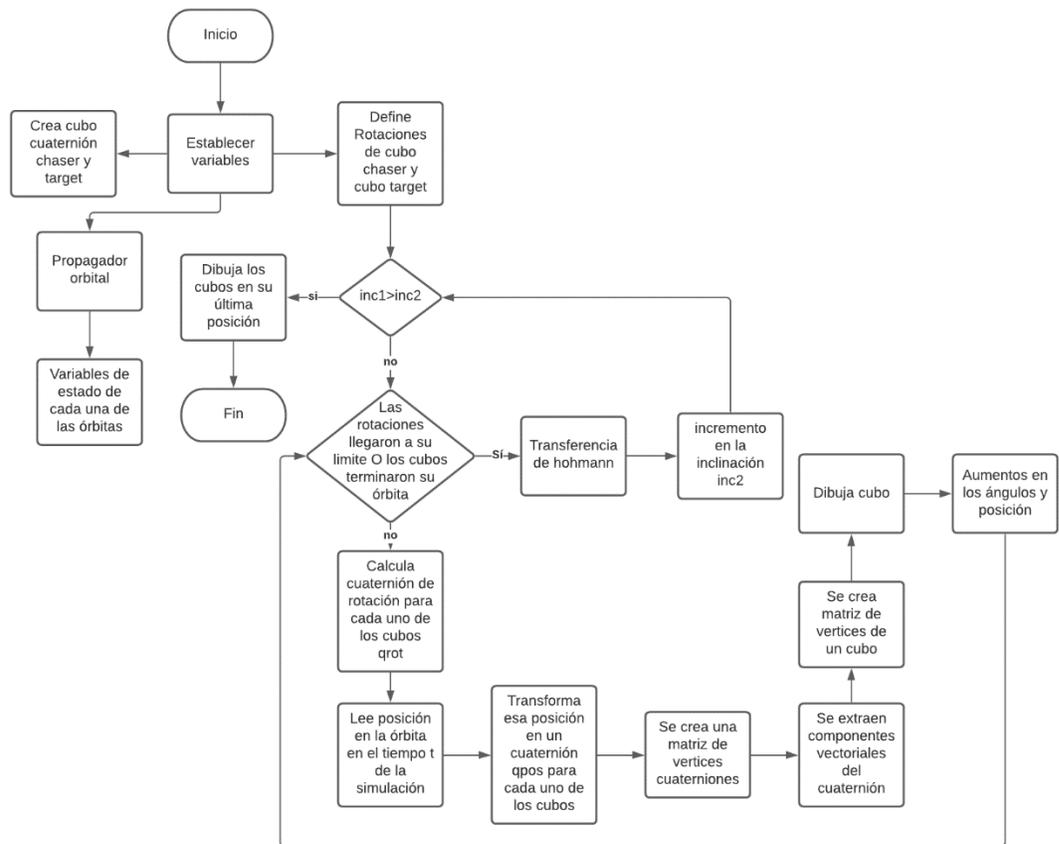


Figura 4-1 Diagrama de flujo de datos para el simulador.

La interfaz gráfica de usuario para la implementación del diseño del acercamiento, el encuentro y el acoplamiento de agentes espaciales se realizó a través del software Matlab, con el uso de la herramienta de GUIDE en donde se programaron diferentes ventanas referentes a las variables a considerar en la simulación las cuales son

- Generador orbital
- Configuración inicial de satélites chaser y target

En la ventana principal de la interfaz gráfica de usuario (Figura 4-2) se encuentran las configuraciones tanto de los parámetros orbitales de las órbitas chaser y target como así también las condiciones iniciales de los agentes espaciales.

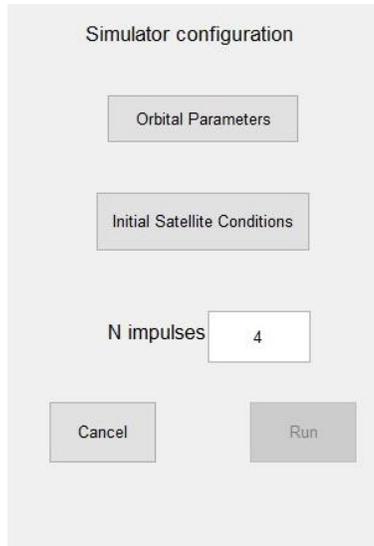


Figura 4-2 Interfaz gráfica de usuario principal.

Dentro de la interfaz gráfica de usuario del generador orbital se nos permite ingresar los elementos orbitales clásicos de la órbita chaser y la órbita target, teniendo una vista previa del modelo orbital, para poder así verificar los datos ingresados tal como se muestra en la

Figura 4-3.

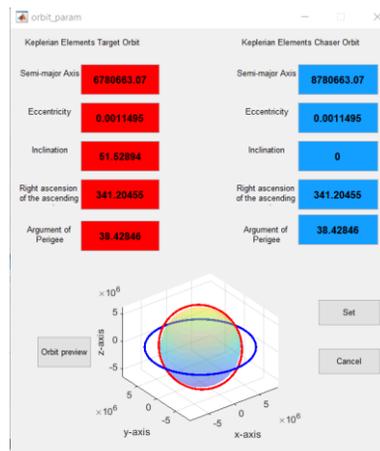


Figura 4-3 Interfaz gráfica de usuario del generador orbital

De igual modo en la interfaz gráfica de usuario referente a los agentes espaciales, se pueden modificar las cantidades angulares por las que se encontrarán rotados, así como la velocidad angular a la que se moverán en cada uno de los ejes locales y los tamaños en cada uno de los ejes de cada agente espacial además permite la visualización de la orientación individual de cada pequeño satélite (Figura 4-4)

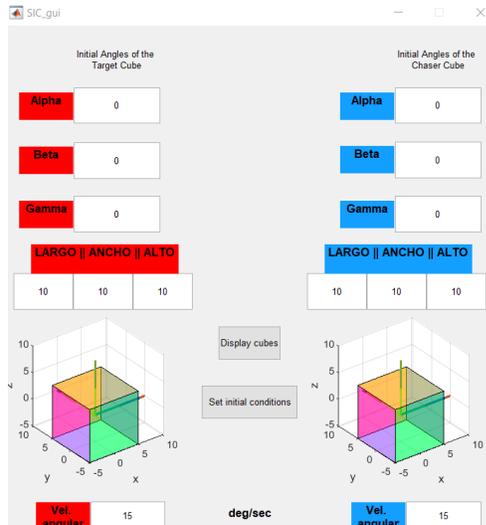


Figura 4-4 Interfaz gráfica de usuario de condiciones iniciales de los agentes espaciales.

Con los datos así introducidos, en el prototipo inicial de simulador, éste muestra en ventanas de visualización de salida en la navegación mostrando además las intersecciones orbitales. Lo anterior indica que la generación de órbitas por medio del propagador orbital fue exitoso siguiendo la idea de que a partir de los elementos orbitales clásicos pudimos transformar a coordenadas $[x(t), y(t), z(t)]$ los puntos de las órbitas de navegación en el marco de referencia adecuado.

El simulador en su parte de navegación, también muestra las transferencias orbitales de impulso simple, así como las bi-impulsivas (Transferencias de Hohmann) al cambiar la velocidad del agente espacial chaser en un punto de su órbita, mostrando además la existencia de la aceleración correspondiente en un marco de referencia no inercial.

Y finalmente, las orientaciones de los agentes espaciales se logran al tratarlos como arreglos de vértices cuaterniones para poder representar sus rotaciones de igual manera con cuaterniones. También se muestra éxito al implementar las ecuaciones respectivas a rotaciones en 3 dimensiones tanto para cada uno de nuestros agentes espaciales como para el cálculo de rotaciones orbitales en estos mismos.

4.2. Pruebas y resultados

Como primera prueba en la interfaz gráfica de usuario, se probó el que el cambio de inclinación de la órbita chaser cambiara con respecto a la órbita target, lo cual como se puede observar en la Figura 4-5 se completó satisfactoriamente.

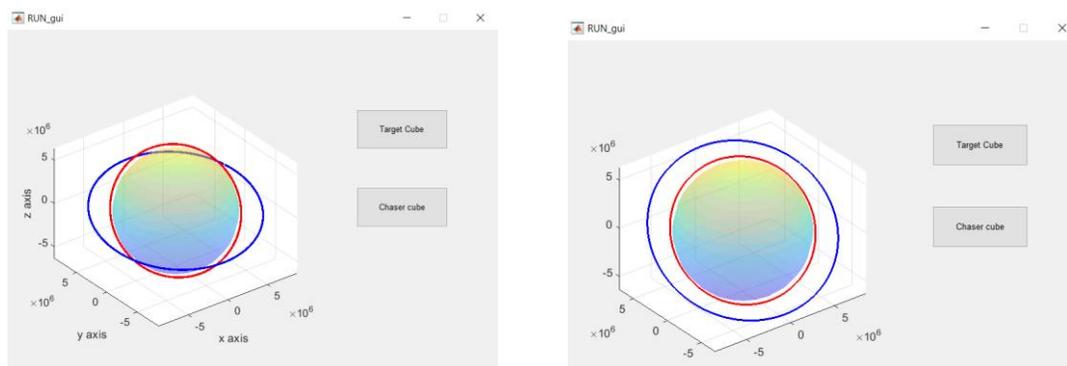


Figura 4-5 Estado orbital inicial y final de inclinación orbital.

Al observar las variables de posición del agente espacial chaser, en las gráficas correspondientes, se puede comprobar el movimiento orbital y cómo es que el cambio de inclinación se muestra en el eje z donde ocurre la inclinación como se ve en la Figura 4-6 donde, se muestra el estudio para 4 impulsos correspondientes a la inclinación de la órbita. Con esto se ha mostrado satisfactoriamente que la evolución de la posición del eje z nos indica un cambio en la inclinación orbital.

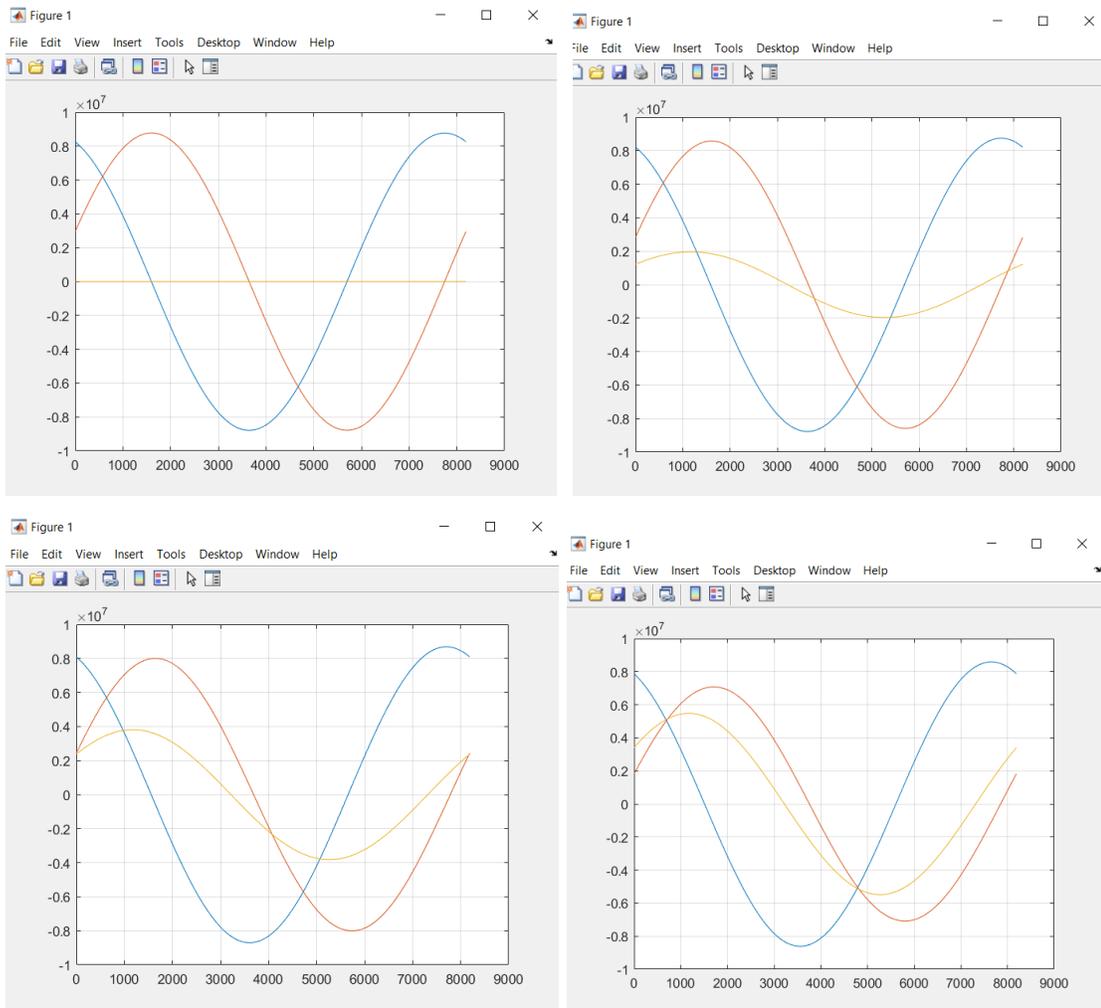


Figura 4-6 Gráficas de posición durante el cambio de inclinación de órbita chaser.

De la misma manera en la Figura 4-7 se muestra como la velocidad orbital es modificada partiendo del inicio de la simulación en su primer periodo orbital con una velocidad en el eje z igual a cero ya que el movimiento se encuentra completamente perpendicular al eje z en todo este periodo orbital. Luego, en las subfiguras de la Figura 4-7 se puede apreciar el cambio sucesivo en la inclinación orbital. Lo cual indica que efectivamente existe un cambio en las velocidades orbitales tal y como se esperaba.

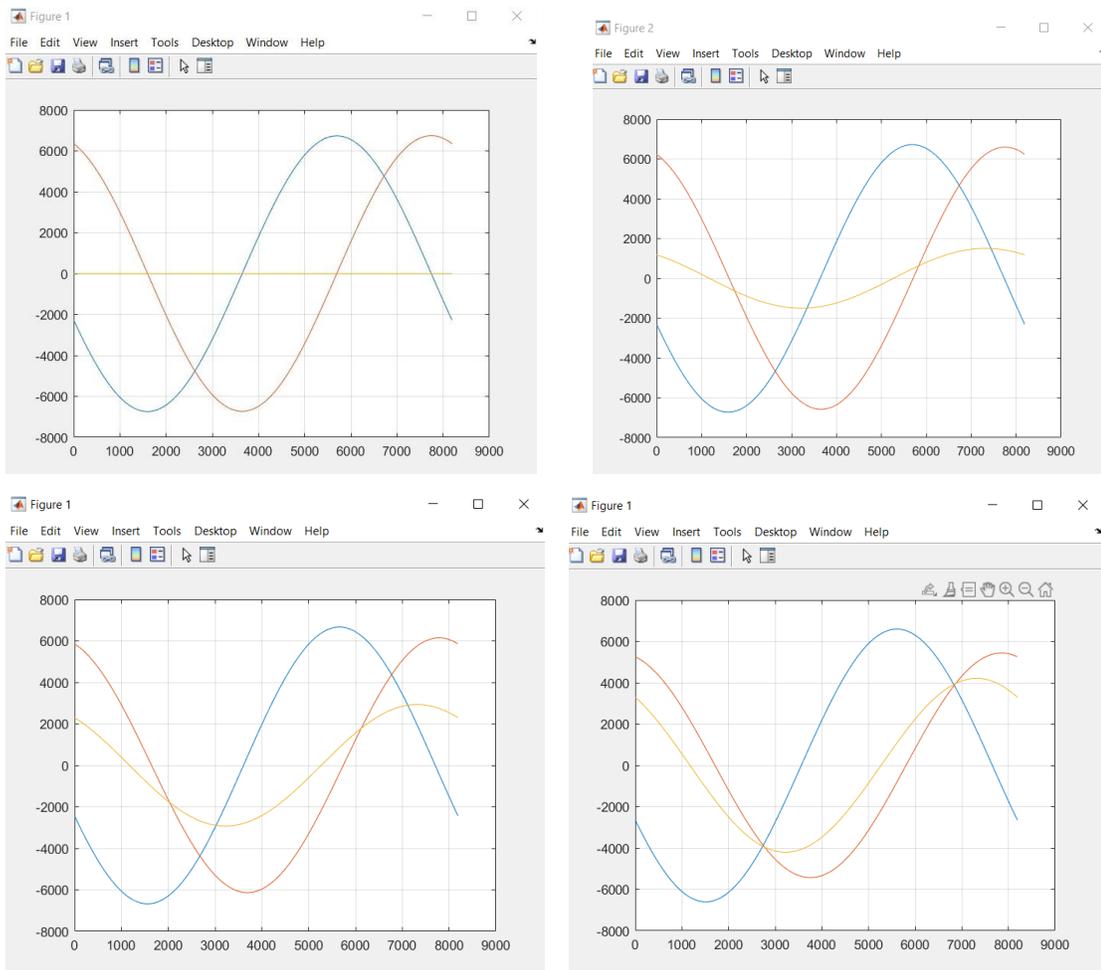


Figura 4-7 Gráficas de velocidad durante el cambio de inclinación de órbita chaser.

Todas estas gráficas, dan como resultado la visualización en animación presentada en la Figura 4-8 que corresponde a que el satélite chaser, encontrándose en una órbita inicial, cambia a su órbita de transferencia para terminar en la órbita objetivo del satélite target.

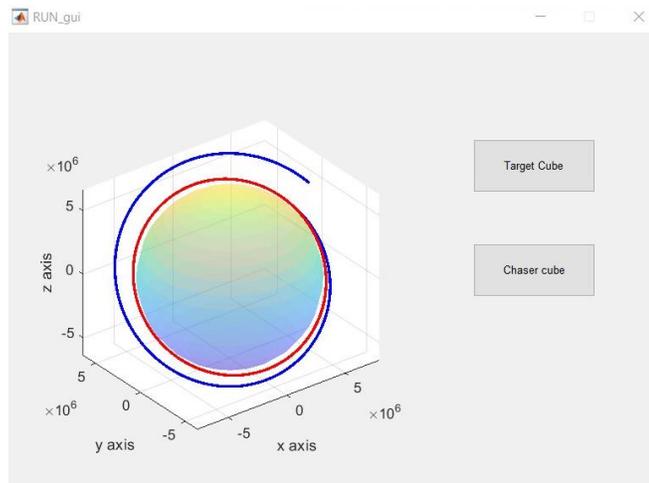


Figura 4-8 Espiral de transferencia orbital

Para finalmente terminar los dos agentes acoplados tanto en la órbita como en la orientación de cada uno de ellos tal y como se muestra en la Figura 4-9

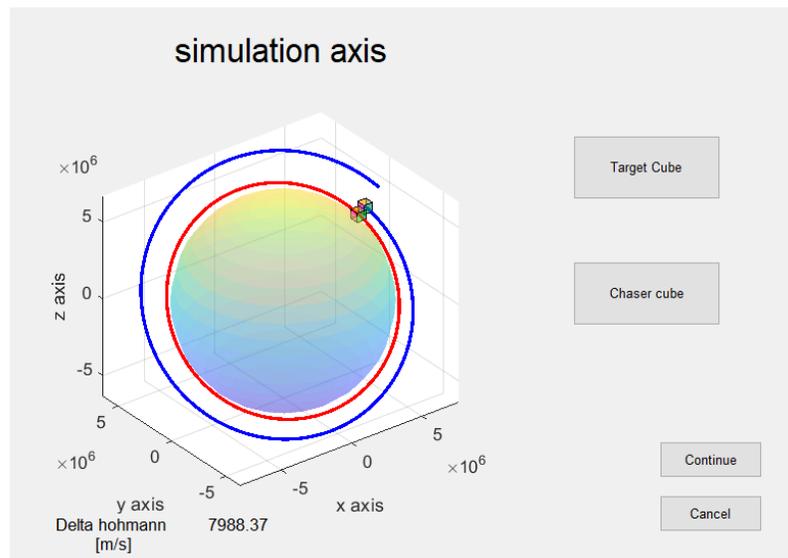


Figura 4-9 Encuentro de agentes espaciales después de transferencia orbital¹.

¹ En la Figura 4-9 el tamaño de los agentes espaciales está incrementado para que estos puedan ser visibles en las órbitas.

Tal acoplamiento de orientación también puede evaluarse en las gráficas mostradas en la Figura 4-10 en donde se aprecian las rotaciones sufridas por cada agente espacial para terminar en la orientación deseada de que las caras correspondientes en cada cubo coincidan en la simulación tal y como fue mostrada en la Figura 4-9.

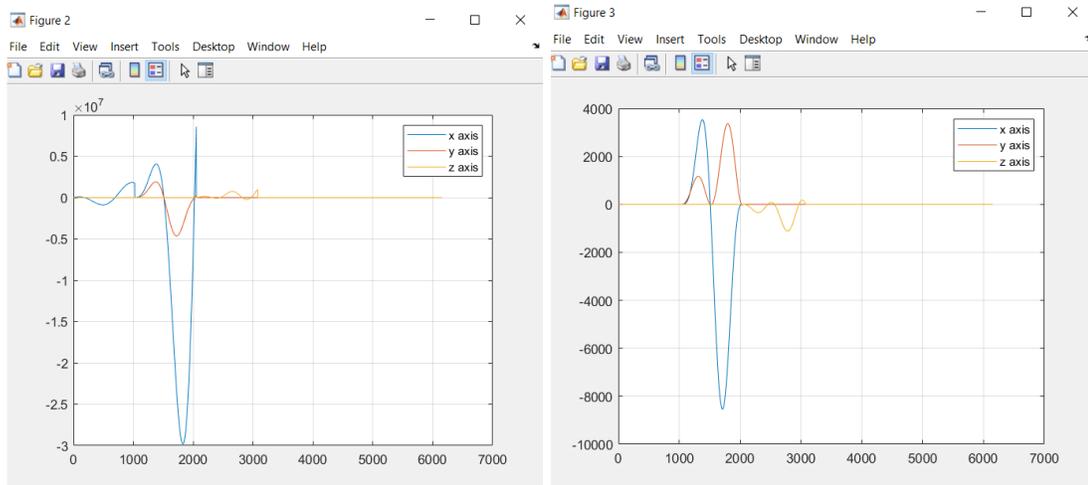


Figura 4-10 Gráficas de movimiento relativo durante la transferencia orbital.

Con todo lo anterior puede apreciarse que se lograron los objetivos específicos propuestos en este trabajo de investigación.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo futuro

Conclusiones

1. Se exploraron los modelos de propagación orbital para orbitas circulares, cuasi circulares y elípticas, terminando con una implementación para el simulador de órbitas circulares, así como la descripción del movimiento relativo de un agente espacial respecto a otro en movimiento a través del sistema de ecuaciones HCW, transfiriendo las órbitas por medio de transferencias de impulso simple para cambio de inclinación orbital y de Hohmann para un aumento o decremento en el radio orbital; esto nos permitió simular por medio de herramientas de programación en el lenguaje Matlab cómo es que se genera la descripción de estos modelos
2. Asimismo, se logró desarrollar los modelos de rotación a partir de cuaterniones, tanto para los agentes espaciales como para los sistemas orbitales (órbitas generadas por medio de elementos clásicos), mediante la interpretación de datos entregados por el simulador; en la parte de los sistemas orbitales se logró describirlos y transformarlos a partir de sus elementos orbitales clásicos a sus elementos cartesianos, es decir cambiar los elementos $[a \ e \ i \ \omega \ \Omega]$ a elementos $[x \ y \ z]$, referidos al centro de la Tierra
3. Se creo una interfaz gráfica de usuario que nos apoya en la recabación de datos para su interpretación, ya que se pueden visualizar claramente las transferencias orbitales, tanto de cambio de inclinación como de aumento o decremento en el radio orbital, como se aprecia en la

simulación visual y en las gráficas a lo largo de cada periodo orbital, lo que se traduce en un cambio en su posición y en su velocidad.

4. Se lograron realizar las rotaciones de los agentes espaciales mediante cuaterniones y definir tanto su posición en un modelo estático como su rotación en un modelo dinámico: la actualización de los cuaterniones en cada momento de la simulación corresponde a un movimiento orbital (es decir, cómo es que los agentes espaciales se mueven a través de los puntos muestreados de la órbita) y una rotación local referida al centro del agente espacial, esto es, cómo es que dichos agentes evolucionan, rotacionalmente hablando, referidos a su centro de masa.
5. Se diseñó un simulador que contempla a los agentes espaciales como cuerpos rígidos y que analiza las rotaciones de éstos a partir de cuaterniones, describiendo en su fase final su movimiento relativo por medio de las ecuaciones HCW

Trabajo a futuro

Este trabajo nos demostró el enorme potencial de expansión que tiene un simulador de acercamiento, encuentro y acoplamiento de agentes espaciales, por lo que como trabajo futuro se propone lo siguiente

- Describir por medio de otro tipo de ecuaciones de movimiento relativo el encuentro de agentes espaciales cuyas orbitas no solo sean circulares o cuasi circulares
- Implementar otro modelo de transferencia orbital que permita transferir una órbita a otra sin importar su excentricidad.

Extender el algoritmo de simulación para contemplar las épocas astronómicas en el modelo de generador orbital, esto es $t_0 \neq 0$, es decir que su movimiento orbital inicie en un punto distinto a su argumento del perigeo ω .

Bibliografía

- Afanas'eva, Y. C. (2007). The problem of rendezvous of a controlled space vehicle with an uncontrolled space vehicle moving along an elliptical Keplerian orbit in the central Newtonian gravitational field. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 468–483. doi:10.1134/S106423070703015X
- Barranco, S. C. (2012). *Diseño conceptual de un simulador de navegación aeroespacial y prototipo inicial*. Puebla: INAOE.
- Battin, R. T. (1999). *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. USA: AIAA Education Series.
- Carter, T. &. (2002). Clohessy-Wiltshire Equations Modified to Include Quadratic Drag. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 10.2514/2.5010.
- Chang, K. (2016, septiembre 27). Elon Musk's Plan: Get Humans to Mars, and Beyond. *New York Times*, pp. <https://www.nytimes.com/2016/09/28/science/elon-musk-spacex-mars-exploration.html>.
- Chelnokov, Y. V. (2007). The problem of rendezvous of a controlled space vehicle with an uncontrolled space vehicle moving along an elliptical Keplerian orbit in the central Newtonian gravitational field. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 468-483. doi:10.1023/A:1012345213745
- Chobotov, V. A. (2002). *Orbital mechanics*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Curtis, H. D. (2004). *Orbital Mechanics for Engineering*. USA: Butterworth-Heinemann.
- Curtis, H. D. (2009). *Orbital Mechanics for Engineering Students* (Second ed.). USA: Elsevier.

- Harleston, R. E. (2011). *Navegación aero-espacial: Física, Simulación, Detección y Control*. Ensenada, Baja California, Mexico: Foro de consulta: Investigación Científica y Tecnológica de la Agencia Espacial Mexicana.
- Liang, J. &. (2011). Angular velocity tracking for satellite rendezvous and docking. *Acta Astronautica*,, 1019-1028. doi:10.1016/j.actaastro.2011.07.009
- Meng, Y. C. (2016). A new geometric guidance approach to spacecraft near-distance rendezvous problem. *Acta Astronautica*, 374–383. doi:10.1016/j.actaastro.2016.09.032
- Moulton, F. R. (1970). *Introduction to Celestial Mechanics*. Mineola, New York: Dover.
- Oliver Montenbruck, G. E. (2005). *SatelliteOrbits: Models, Methods, Applications*. Heidelberg: Springer.
- Pierre Blanc-Paques, E. G.-Z. (2010). Evaluation of autonomous guidance techniques for space rendezvous and withdrawal strategy. *Guidance, Navigation, and Control Conference*, 11-29. doi:10.2514/6.2010-7597
- Silva, E. D. (2012). A Formulation of the Clohessy-Wiltshire Equations to Include Dynamic Atmospheric Drag. *Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, 1-11. doi:10.2514/6.2008-6444
- Tapley, S. y. (2004). Determinación estadística de la órbita. *Elsevier Academic*, 29-32.
- Vepa, R. (2018). Application of the Nonlinear Tschauner-Hempel Equations to Satellite Relative Position Estimation and Control. *Journal of Navigation*, 44-64. doi:doi:10.1017/S0373463317000364
- Wang, Z. &. (2020). Convex relaxation for optimal rendezvous of unmanned aerial and ground vehicles. *Aerospace Science and Technology*, 1270-1289. doi:10.1016/j.ast.2020.105756
- Yang, X. &. (2015). A new approach to autonomous rendezvous for spacecraft with limited impulsive thrust: Based on switching control strategy.

Aerospace Science and Technology, 454–462.
doi:10.1016/j.ast.2015.04.007

Tabla de figuras

Figura 2-1 Modelo celeste Geocéntrico.	16
Figura 2-2 Modelo celeste Heliocéntrico. (Tomado de: https://cutt.ly/3ypRXdy)	17
Figura 2-3 Órbita terrestre con el sol en uno de los focos de la elipse (Tomado de: https://cutt.ly/uypRHSo)	20
Figura 2-4 Representación gráfica de la Segunda ley de Kepler	21
Figura 2-5 Sistema heliocéntrico eclíptico tomado de (Chobotov, 2002).	22
Figura 2-6 Sistema inercial centrado en la tierra (tomado de: https://cutt.ly/mYRX4jv).....	23
Figura 2-7 Descripción de ángulos de ascensión recta y declinación (tomado de https://cutt.ly/aYRghyl).....	24
Figura 2-8 Octante de la esfera celeste (tomado de: https://cutt.ly/fYRgKoC)	25
Figura 2-9 Sistema de dos cuerpos.	27
Figura 2-10 Representación geometroalgebraica del movimiento circular. ..	28
Figura 2-11 Cambio de dirección en el movimiento circular.	29
Figura 2-12 Relación geométrica de las velocidades en un movimiento circular.	30
Figura 2-13 Movimiento circular en un marco de referencia no centrado. tomado de (Chobotov, 2002)	31
Figura 2-14 Elementos orbitales clásicos o Keplerianos (tomado de https://cutt.ly/iTpqCEI).....	36
Figura 2-15 Anomalías verdadera, excéntrica y media en una órbita elíptica.	37
Figura 2-16 Transferencia de impulso sencillo.	44
Figura 2-17 Maniobra de cambio de plano en una órbita circular.	45
Figura 2-18 Relación geométrica entre Δv y v_{ci}	46
Figura 2-19 Transferencia de Hohmann.	47

Figura 2-20 Representación gráfica del marco de referencia de Hill (Chobotov, 2002).....	50
Figura 2-21 Representación geometroalgebraica de un vector en \mathbb{R}^3 con un sistema de referencia ortogonal rotado.....	56
Figura 3-1 Diseño conceptual del simulador.....	60
Figura 3-2 Primer diseño de agente orbital.....	61
Figura 3-3 Descripción conceptual de un cubo a partir de sus vértices.....	61
Figura 3-4 Cubo generado por matrices de vértices y caras.	62
Figura 3-5 Descripción del agente espacial.....	64
Figura 3-6 Diagrama de flujo de datos para el propagador orbital.....	72
Figura 3-7 Descripción de agente orbital en la órbita.....	73
Figura 3-8 Descripción de las maniobras de cambio de plano orbital.....	75
Figura 3-9 Descripción de las maniobras de cambio de radio orbital.....	75
Figura 3-10 Diagrama de flujo de datos para la transferencia de Hohmann.	76
Figura 3-11 Marco de referencia de Hill (Chobotov, 2002).....	77
Figura 4-1 Diagrama de flujo de datos para el simulador.	79
Figura 4-2 Interfaz gráfica de usuario principal.....	80
Figura 4-3 Interfaz gráfica de usuario del generador orbital.....	80
Figura 4-4 Interfaz gráfica de usuario de condiciones iniciales de los agentes espaciales.....	81
Figura 4-5 Estado orbital inicial y final de inclinación orbital.....	82
Figura 4-6 Gráficas de posición durante el cambio de inclinación de órbita chaser.....	83
Figura 4-7 Gráficas de velocidad durante el cambio de inclinación de órbita chaser.....	84
Figura 4-8 Espiral de transferencia orbital.....	85
Figura 4-9 Encuentro de agentes espaciales después de transferencia orbital.....	85
Figura 4-10 Gráficas de movimiento relativo durante la transferencia orbital.....	86
Figura 5-1 Transformación de coordenadas en \mathbb{R}^2	96

Figura 5-2 Transformación de coordenadas polares	97
Figura 5-3 Ángulos directores del vector r	98
Figura 5-4 Sistema coordenado en \mathbb{R}^3	99
Figura 5-5 Relación entre componentes cartesianas y ángulos directores .	100
Figura 5-6 Relación geométrica entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas	101
Figura 5-7 Sistemas no rotado y rotado en \mathbb{R}^3 .	103

Apéndices

Apéndice A Transformación de coordenadas.

El presente apéndice fue extraído de las notas de clase de física del posgrado de Ciencia y tecnología del espacio impartido por el Dr. Rogerio Enríquez Caldera, investigador y docente del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica.

Cartesianas \mathbb{R}^2 a polares

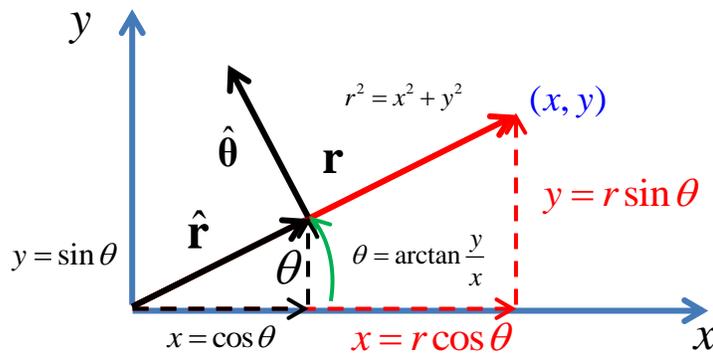


Figura 5-1 Transformación de coordenadas en \mathbb{R}^2

Dado un sistema de referencia en un punto de este puede ser visto en como un par ordenado en (x, y) , pero no es la única forma de interpretarlo, ya que como se observa en la Figura 5-1 este también se puede describir por medio de las variables (r, θ)

Al calcular los valores de las coordenadas en (x, y) tenemos que cada componente se describe en el sistema polar como:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Y si consideramos la magnitud del vector r como 1, podemos expresar este sistema como:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \quad (78)$$

Análogamente podemos realizar de la misma manera estos pasos para la transformación de coordenadas hacia el sistema polar, pero podemos observar

gracias a la Figura 5-1 Transformación de coordenadas en \mathbb{R}^2 que al volver unitarios los vectores (r, θ) usando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} \quad (78)$$

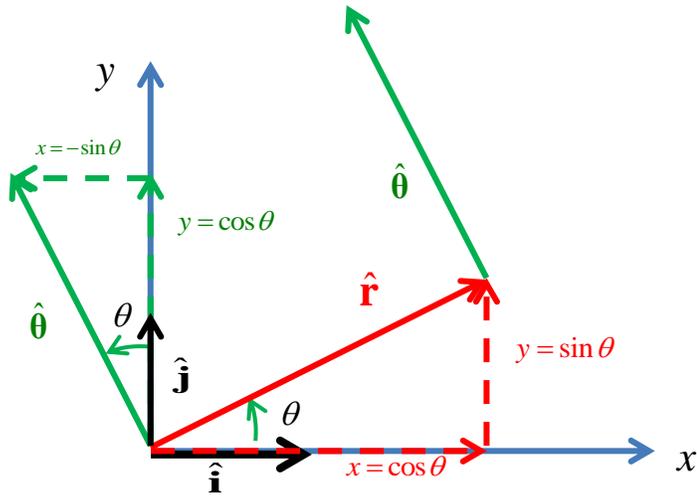


Figura 5-2 Transformación de coordenadas polares

Tendremos que ahora el sistema de ecuaciones para la transformación de se constituirá por los versores \hat{r} $\hat{\theta}$, los cuales se calculan de la siguiente manera

$$\hat{r} = |\hat{r}| \cos(\theta) \hat{i} + |\hat{r}| \sin(\theta) \hat{j}$$

Para $\hat{\theta}$ por principio de superposición lo recorreremos al origen del sistema coordenado x, y obteniendo así

$$\hat{\theta} = |\hat{\theta}|(-\sin(\theta))\hat{i} + |\hat{\theta}|\cos(\theta)\hat{j}$$

El cual reescribiendo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j} \end{cases}$$

Que a manera de matriz podemos reescribir de la forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix}$$

Cosenos directores

Los ángulos directores de un vector diferente de cero

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

son los ángulos α, β, γ en el intervalo $[0, \pi]$ que el vector forma con los ejes positivos x, y, z como se observa en la Figura 5-3 Ángulos directores del vector r

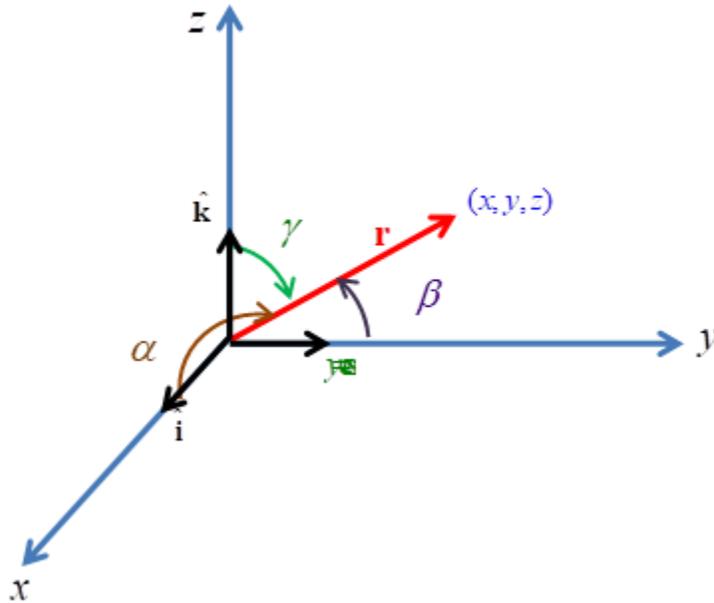


Figura 5-3 Ángulos directores del vector r

Los cosenos de estos ángulos $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ se denominan cosenos directores. Y sus valores se calculan de la forma.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \hat{i}}{|\vec{r}||\hat{i}|} = \frac{x}{|\vec{r}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{r} \cdot \hat{j}}{|\vec{r}||\hat{j}|} = \frac{y}{|\vec{r}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{r} \cdot \hat{k}}{|\vec{r}||\hat{k}|} = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Cartesianas 3D a Esféricas

Dado un sistema coordenado de 3 dimensiones como se puede observar en la Figura 5-4 Sistema coordenado en \mathbb{R}^3 podemos definir un vector \vec{r} a partir de sus tres coordenadas cartesianas (x, y, z) con cada uno de sus versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

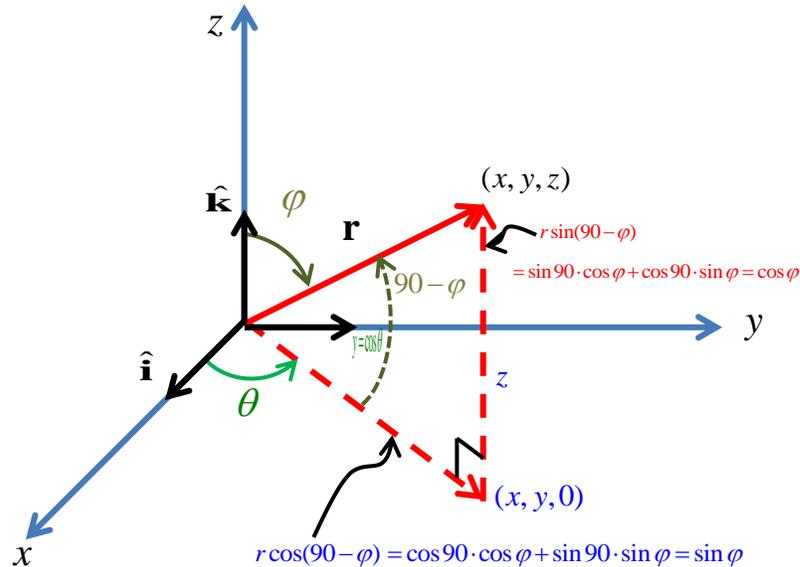


Figura 5-4 Sistema coordenado en \mathbb{R}^3

Pero de igual manera que con el plano de \mathbb{R}^2 este no es el único modo que se tiene para poder definir un vector ya que auxiliándonos de los ángulos directores podemos describirlos de una manera esférica.

Inicialmente podemos definir los valores de los catetos del triángulo que se forma al dibujar las proyecciones del vector en cada uno de los planos, teniendo como resultado así para el cateto opuesto y el cateto adyacente respectivamente:

$$r \sin(90 - \varphi) = r \cdot (\sin 90 \cdot \cos \varphi + \cos 90 \cdot \sin \varphi) = r \cos \varphi$$

$$r \cos(90 - \varphi) = r \cdot (\cos 90 \cdot \cos \varphi + \sin 90 \cdot \sin \varphi) = r \sin \varphi$$

Cabe aclarar que en este caso solo nos apoyamos del uso de los ángulos directores φ, θ ya que al contar con la magnitud del vector r , si usásemos el ángulo director α nuestro vector estaría sobredimensionado.

Ya sabemos que se pueden describir los ángulos directores a partir de las relaciones geométricas que existen entre las componentes cartesianas del vector \mathbf{r} tal como se muestra en la Figura 5-5 Relación entre componentes cartesianas y ángulos directores

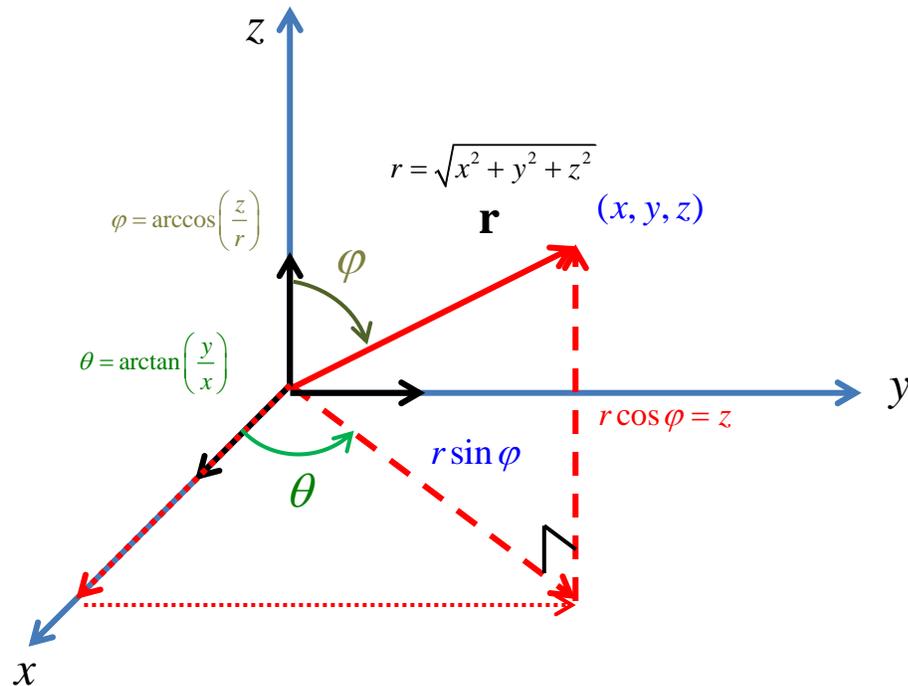


Figura 5-5 Relación entre componentes cartesianas y ángulos directores
Que reescribiendo las relaciones podemos determinar que los valores de los ángulos se calculan con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Y de igual manera podemos escribir cada una de las componentes cartesianas con la ayuda de los ángulos directores como podemos observar en la Figura 5-6 Relación geométrica entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas

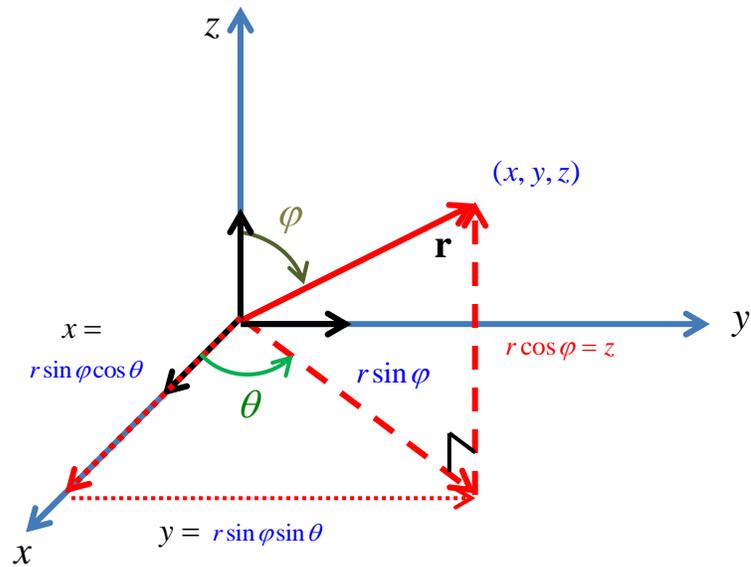


Figura 5-6 Relación geométrica entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas
Teniendo así las relaciones

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

De la misma forma que con las coordenadas cartesianas 2D podemos volver los vectores direccionales r, φ, θ en versores y poder conseguir la matriz de cambio de coordenadas.

Definiendo cada versor como:

$$\hat{r} = \frac{1}{\left| \frac{\delta \vec{R}}{\delta r} \right|} \frac{\delta \vec{R}}{\delta r}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\left| \frac{\delta \vec{R}}{\delta \theta} \right|} \frac{\delta \vec{R}}{\delta \theta}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\left| \frac{\delta \vec{R}}{\delta \varphi} \right|} \frac{\delta \vec{R}}{\delta \varphi}$$

$$\frac{\delta \vec{R}}{\delta r} = \sin \varphi \cos \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \varphi \hat{k}$$

$$\left| \frac{\delta \vec{R}}{\delta r} \right| = \sqrt{(r \sin \varphi \cos \theta)^2 + (r \sin \varphi \sin \theta)^2 + (r \cos \varphi)^2} = 1$$

$$\hat{r} = \sin \varphi \cos \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \varphi \hat{k}$$

$$\frac{\delta \vec{R}}{\delta \theta} = -r \sin \varphi \sin \theta \hat{i} + r \sin \varphi \cos \theta \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$\left| \frac{\delta \vec{R}}{\delta \theta} \right| = \sqrt{(-r \sin \varphi \sin \theta)^2 + (r \sin \varphi \cos \theta)^2} = r \sin \varphi$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\frac{\delta \vec{R}}{\delta \varphi} = r \cos \varphi \cos \theta \hat{i} + r \cos \varphi \sin \theta \hat{j} - r \sin \varphi \hat{k}$$

$$\left| \frac{\delta \vec{R}}{\delta \varphi} \right| = \sqrt{(r \cos \varphi \cos \theta)^2 + (r \cos \varphi \sin \theta)^2 + (r \sin \varphi)^2} = r$$

$$\hat{\varphi} = \cos \varphi \cos \theta \hat{i} + \cos \varphi \sin \theta \hat{j} - \sin \varphi \hat{k}$$

Y expresado en forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix}$$

De igual forma como se hizo con el caso de las coordenadas en \mathbb{R}^2 las coordenadas en \mathbb{R}^3 también pueden rotarse, de manera que al generar un nuevo sistema de coordenadas uno se puede describir en términos del otro (véase la figura Figura 5-7 Sistemas no rotado y rotado en \mathbb{R}^3).

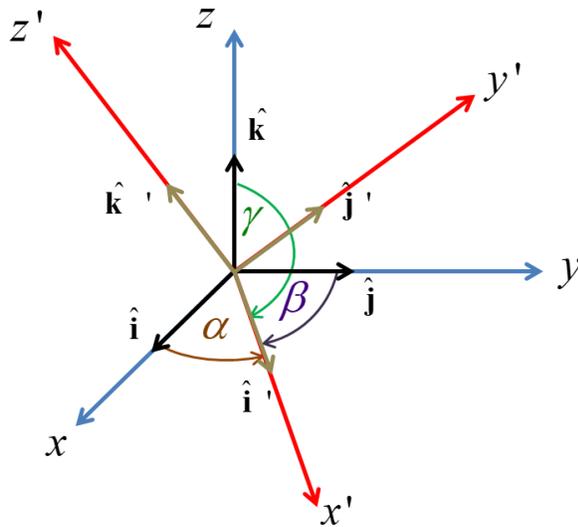


Figura 5-7 Sistemas no rotado y rotado en \mathbb{R}^3 .

Definiendo los ángulos $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ entre los versores del sistema coordinado no rotado y los del sistema coordinado rotado iniciando con \hat{i} gracias a los cosenos directores podemos calcular el ángulo entre cada uno de estos versores de la forma

$$a_{x'x} = \cos \alpha_x$$

Y estos será el ángulo entre x y x'

$$a_{x'x} = \cos \alpha_{x'} = x' \cdot x = \frac{x' \cdot \hat{i}}{\|x'\| \cdot \|\hat{i}\|} = \hat{i}' \cdot \hat{i}$$

$$a_{x'y} = \cos \beta_{x'} = x' \cdot y = \frac{x' \cdot \hat{j}}{\|x'\| \cdot \|\hat{j}\|} = \hat{i}' \cdot \hat{j}$$

$$a_{x'z} = \cos \gamma_{x'} = x' \cdot z = \frac{x' \cdot \hat{k}}{\|x'\| \cdot \|\hat{k}\|} = \hat{i}' \cdot \hat{k}$$

Por lo tanto

$$\hat{i}' = \cos \alpha_{x'} \hat{i} + \cos \beta_{x'} \hat{j} + \cos \gamma_{x'} \hat{k}$$

Y análogamente para las relaciones en los otros ejes coordinados rotados

$$\hat{j}' = \cos \alpha_{y'} \hat{i} + \cos \beta_{y'} \hat{j} + \cos \gamma_{y'} \hat{k}$$

$$\hat{k}' = \cos \alpha_{z'} \hat{i} + \cos \beta_{z'} \hat{j} + \cos \gamma_{z'} \hat{k}$$

Con esto se ha logrado definir la rotación del primer eje coordenado x' en función de los 3 ejes no rotados. Ahora análogamente se hará lo mismo para los otros 2 ejes coordenados, lo que tendrá como resultado para los 3 ejes

$$a_{x'x} = \cos \alpha_{x'} = x' \cdot x$$

$$a_{x'y} = \cos \beta_{x'} = x' \cdot y$$

$$a_{x'z} = \cos \gamma_{x'} = x' \cdot z$$

$$a_{y'x} = \cos \alpha_{y'} = y' \cdot x$$

$$a_{y'y} = \cos \beta_{y'} = y' \cdot y$$

$$a_{y'z} = \cos \gamma_{y'} = y' \cdot z$$

$$a_{z'x} = \cos \alpha_{z'} = z' \cdot x$$

$$a_{z'y} = \cos \beta_{z'} = z' \cdot y$$

$$a_{z'z} = \cos \gamma_{z'} = z' \cdot z$$

Podemos así entonces decir que los versores del sistema rotado en función del no rotado se expresan de la forma

$$\hat{i}' = a_{x'x}\hat{i} + a_{x'y}\hat{j} + a_{x'z}\hat{k}$$

$$\hat{j}' = a_{y'x}\hat{i} + a_{y'y}\hat{j} + a_{y'z}\hat{k}$$

$$\hat{k}' = a_{z'x}\hat{i} + a_{z'y}\hat{j} + a_{z'z}\hat{k}$$

Teniendo así la matriz de transformación de coordenadas de $[x, y, z] \rightarrow [x', y', z']$

$$\begin{bmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix}$$

Análogamente se puede realizar el mismo proceso para expresar las coordenadas no rotadas en función de las rotadas, realizando el mismo proceso y teniendo como resultado las relaciones

$$a_{xx'} = \cos \alpha_x = x \cdot x'$$

$$a_{yx'} = \cos \beta_x = y \cdot x'$$

$$a_{zx'} = \cos \gamma_x = z \cdot x'$$

$$a_{xy'} = \cos \alpha_y = x \cdot y'$$

$$a_{yy'} = \cos \beta_y = y \cdot y'$$

$$a_{zy'} = \cos \gamma_y = z \cdot y'$$

$$a_{xz'} = \cos \alpha_{z'} = x \cdot z'$$

$$a_{yz'} = \cos \beta_{z'} = y \cdot z'$$

$$a_{zz'} = \cos \gamma_{z'} = z \cdot z'$$

Podemos así entonces decir que los versores del sistema no rotado en función del rotado se expresan de la forma

$$\hat{i} = a_{xx'}\hat{i}' + a_{yx'}\hat{j}' + a_{zx'}\hat{k}'$$

$$\hat{j} = a_{xy'}\hat{i}' + a_{yy'}\hat{j}' + a_{zy'}\hat{k}'$$

$$\hat{k} = a_{xz'}\hat{i}' + a_{yz'}\hat{j}' + a_{zz'}\hat{k}'$$

Teniendo así la matriz de transformación de coordenadas de $[x', y', z'] \rightarrow [x, y, z]$

$$A' = \begin{vmatrix} a_{xx'} & a_{yx'} & a_{zx'} \\ a_{xy'} & a_{yy'} & a_{zy'} \\ a_{xz'} & a_{yz'} & a_{zz'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{vmatrix}$$

Que sorpresivamente **es la transpuesta** de la matriz de transformación de coordenadas A'

Reescribiendo el sistema para su simplificación, haciendo un cambio de variable

$$A = \begin{vmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por lo tanto

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Es decir

$$A = [a_{ij}] \rightarrow A^T = [a_{ji}]$$

Dado un vector \vec{r} expresado de la forma

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$$

La matriz de coordenadas no rotadas resultaría

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

Que expresado de manera algebraica

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} x_j'$$

Generalizando tenemos

$$A^T x' = x$$

Y la matriz de coordenadas rotadas sería

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{vmatrix}$$

Para las coordenadas rotadas expresado de manera algebraica

$$x_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$

Generalizando tenemos

$$Ax = x'$$

Dado que A es una matriz, para despejarla es necesario usar álgebra de matrices, teniendo así

$$Ax = A(A^T x') = x'$$

Ya que

$$A(A^T) = I$$

donde I es la matriz identidad

$$\begin{aligned} Ax &= A(A^T x') = x' \\ \therefore AA^T &= I \end{aligned}$$

Demostrando así que para este caso en particular la matriz transpuesta es la matriz inversa

$$A^T = A^{-1}$$

Esto solo se cumple gracias que las matrices A y A' son ortogonales

Observaciones en la rotación

- La matriz de transformación contiene 9 cosenos directores.
- Pero la magnitud de un vector posición debe ser el mismo tanto para el sistema no rotado como para el rotado - incluso si el origen del vector en observación es distinto porque la magnitud sería incluye la resta del vector del origen de coordenadas a la punta del vector en cuestión. (Harleston, 2011)

Apéndice B Operaciones con cuaterniones.

En este apéndice se discutirá la representación de las rotaciones en \mathbb{R}^3 en términos de cuaterniones. Iniciando con el grupo de rotaciones $SO(2)$, la cual es isomórfica al grupo $U(1)$ de los números complejos $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ de longitud unitaria, esto se deriva inmediatamente del hecho que el mapeo de

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Es isomórfico. Geométricamente se observa que $U(1)$ es un círculo unitario S^1 . Podemos identificar el plano \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} , definiendo $z = x + iy \in \mathbb{R}^2$. Entonces cada rotación de plano ρ_θ en un ángulo θ es representado por una multiplicación de números complejos $e^{i\theta} \in U(1)$, en ese sentido para todo $z, z' \in \mathbb{C}$

$$z' = \rho_\theta z \text{ si y solo si } z' = e^{i\theta} z$$

Se puede decir que, de alguna forma los cuaterniones generalizan los números complejos de tal manera que las rotaciones de \mathbb{R}^3 son representadas por una multiplicación de cuaterniones de longitud unitaria.

Ya que el cuaternión está compuesto por una parte real y otra imaginaria, es de suma ayuda poder definir algunas operaciones básicas con ellos

1. Cuaternión nulo

Es aquel en que los coeficientes tanto de la parte real como la compleja son iguales a cero, esto es

$$a = x = y = z = 0$$

2. Cuaternión conjugado

Dado el cuaternión

$$\mathbf{q} = a + xi + yj + zk$$

Su cuaternión conjugado sería

$$\bar{\mathbf{q}} = a - xi - yj - zk$$

3. Cuaternión opuesto

Dado el cuaternión

$$\mathbf{q} = a + xi + yj + zk$$

Su cuaternión opuesto es

$$-\mathbf{q} = -a - xi - yj - zk$$

4. Valor absoluto o norma de un cuaternión

Dado el cuaternión

$$\mathbf{q} = a + xi + yj + zk$$

Su norma está dada por

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

5. Cuaternión unitario

Es aquel cuaternión cuya norma o valor absoluto es uno.

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

6. Normalización de un cuaternión

Dado un cuaternión cuya norma no sea igual a uno, podemos normalizarlo definiendo un nuevo cuaternión, asociado al primero, mediante la operación:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$$

7. Inverso de un cuaternión

Dado un cuaternión \mathbf{q} definimos el cuaternión inverso, que

Designaremos \mathbf{q}^{-1} como

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2}$$

8. Suma de cuaterniones

Dados los cuaterniones

$$\mathbf{q}_1 = a_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_2 = a_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$$

Se define la suma de cuaterniones como

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = a_1 + a_2 + (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k}$$

8.1. Propiedades de la suma de cuaterniones

Conmutabilidad

Dados los cuaterniones

$$\mathbf{q}_1 = a_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_2 = a_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = a_1 + a_2 + (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 = a_2 + a_1 + (x_2 + x_1)\mathbf{i} + (y_2 + y_1)\mathbf{j} + (z_2 + z_1)\mathbf{k}$$

Por la conmutabilidad de los números reales podemos decir que:

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1$$

Asociatividad

$$\mathbf{q}_1 = a_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_2 = a_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_3 = a_3 + x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_1 + (\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) = (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + \mathbf{q}_3$$

$$a_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + (a_2 + a_3 + (x_2 + x_3)\mathbf{i} + (y_2 + y_3)\mathbf{j} + (z_2 + z_3)\mathbf{k})$$

$$= a_1 + a_2 + (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k} + a_3$$

$$+ x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + (x_1 + x_2 + x_3)\mathbf{i} + (y_1 + y_2 + y_3)\mathbf{j} + (z_1 + z_2 + z_3)\mathbf{k}$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + (x_1 + x_2 + x_3)\mathbf{i} + (y_1 + y_2 + y_3)\mathbf{j} + (z_1$$

$$+ z_2 + z_3) \mathbf{k}$$

Suma de un cuaternión y su conjugado

Dado un cuaternión

$$\mathbf{q}_1 = a_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

Su conjugado sería

$$\bar{\mathbf{q}} = a_1 - x_1\mathbf{i} - y_1\mathbf{j} - z_1\mathbf{k}$$

La suma de estos nos daría como resultado

$$\mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{q}} = 2a_1$$

9. Producto de cuaterniones

Dados los cuaterniones

$$\mathbf{q}_1 = a + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_2 = b + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

Producto de los vectores ortonormales del cuaternión

$$\mathbf{i} * \mathbf{i} = \mathbf{i}^2 = -1$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} * \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} * \mathbf{j} = \mathbf{j}^2 = -1$$

$$\mathbf{j} * \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} * \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{k} * \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} * \mathbf{k} = \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 = (a_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) * (a_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 = & (a b - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a b_1 + b a_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (b a_2 \\ & + a b_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (b a_3 + a b_3 - a_2 b_1 + a_1 b_2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

NOTA: Dado el producto de los vectores ortonormales del cuaternión podemos notar la NO conmutabilidad del producto del cuaternión.