



**I
N
A
O
E**

Estudio de los tiempos de vida del SRO

Por:

Miguel Armando Tenorio Suñer

Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de:

**MAESTRÍA EN
CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
diciembre, 2023
Tonantzintla, Puebla

Dirigida por:

Dr. Carlos Gerardo Treviño Palacios*

*INAOE

©INAOE 2023

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir esta tesis en su totalidad o en partes



RESUMEN

El desarrollo de un laser de silicio es uno de los inventos más buscados por la física en la actualidad debido a las aplicaciones en el desarrollo de la fotónica integrada y su implementación en sistemas optoelectrónicos. Sin embargo, este tipo de laser se considera imposible de fabricar debido a las propiedades del silicio cristalino; por lo que se han optado por alternativas agregando impurezas. Para que un laser de silicio sea viable, se requiere que se pueda obtener fotoluminiscencia y que los tiempos de vida sean lo suficientemente grandes como para obtener inversión de población y, por tanto, emisión laser.

En este trabajo de tesis, se caracteriza el óxido de silicio rico en silicio (SRO por sus siglas en inglés) debido a la presencia de nanocristales de silicio en el material y a las propiedades fotoluminiscentes que se han reportado en dichos nanocristales. Se realiza un estudio de los tiempos de vida dependiendo de la relación de presiones de los gases reactivos usados al producir la película, longitud de onda de bombeo y potencia de bombeo con el objetivo de mostrar que la fotoluminiscencia de los nanocristales se produce en niveles metaestables y, por lo tanto, pueden tener emisión laser. Para cumplir este objetivo, se requiere que los tiempos de vida se encuentren en el orden de los microsegundos. Adicionalmente, se obtendrán los espectros de emisión para tener una caracterización más completa y confirmar que los tiempos de vida medidos son debidos a la fotoluminiscencia del material.

Palabras clave: fotoluminiscencia, SRO, ganancia óptica, nivel metaestable.

ABSTRACT

The construction of an all-silicon laser is one of the most wanted breakthroughs in the scientific community due to its possible applications in integrated photonics development and its implementation on optoelectronic circuits. Unfortunately, the semiconductor indirect bandgap properties of silicon provoke scientists to consider the fabrication of this laser impossible and look for alternatives, such as inserting impurities in silicon. It is necessary to obtain photoluminescence from silicon with sufficiently large decay times to produce inversion population to consider an all-silicon laser viable.

In this thesis work, silicon-rich oxide (SRO) is characterized due to the photoluminescent properties in silicon nanocrystals found at the surface of the silicon-rich oxide. A study of the lifetime of photoluminescence in nanocrystals is presented, using the relation between reactive gases that produce the film, wavelength and power of the pump beam as parameters. The main objective is to prove the existence of a metastable energy level which produces the photoluminescence. The measured lifetimes must be in the microsecond order to achieve the objective. Additionally, the emission spectrums are detected to complete the characterization and confirm the lifetime measurements are due to photoluminescence.

Keywords: photoluminescence, SRO, decay, optical gain, metastable energy level.

AGRADECIMIENTOS

En agradecimiento al Dr. Carlos Gerardo Treviño Palacios, por guiarme en el desarrollo de este trabajo.

En agradecimiento al jurado: Dr. Alfredo Abelardo González Fernández, Dr. Marcelo David Iturbe Castillo y Dr. Ponciano Rodríguez Montero, por sus observaciones y comentarios para mejorar el resultado final del trabajo.

DEDICATORIA

A mis padres, *Miguel Ángel Tenorio Vélez* y *Angélica Suñer Amador*, por ser un ejemplo de vida.

A mi hermana, *Laura Angélica Tenorio Suñer*, cuya dedicación y aspiraciones son mi mayor motivación por ser mejor.

A mis abuelos, *Armando Suñer Castillo*, *Evangelina Amador Ramos*, por siempre mostrar su apoyo.

A mi tío, *Jorge Luis Salcedo Suñer*, por sus consejos y por siempre estar al pendiente de mi formación.

TABLA DE CONTENIDOS

DEDICATORIA	IX
INTRODUCCIÓN	XIII
1. FÍSICA DE LASERES	1
1.1. Introducción a la emisión laser	1
1.1.1. Sistema de dos niveles	1
1.1.2. Emisión laser del sistema de tres niveles	4
1.1.3. Emisión laser del sistema de cuatro niveles	6
1.2. Propagación de haces Gaussianos y cavidades	8
1.2.1. Haz Gaussiano	8
1.2.2. Propagación de haces usando el análisis de la matriz de transferencia	11
1.2.3. Estabilidad de un resonador óptico	13
1.2.4. Haz dentro de un resonador óptico	17
1.3. Generación de laser pulsado	20
1.3.1. Amarre pasivo de modos	20
1.3.2. Efecto Kerr óptico	24
2. SILICIO Y ÓXIDO DE SILICIO RICO EN SILICIO	31
2.1. Características del silicio	31
2.2. Características del óxido de silicio rico en silicio	35

3. MEDICIÓN DEL TIEMPO DE VIDA	41
3.1. Técnica de medición de fosforescencia	41
3.2. Arreglo experimental	43
4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	49
4.1. Resultados	49
4.2. Conclusiones	60
A. CARACTERIZACIÓN DEL LASER TITANIO ZAFIRO	63
B. GENERACIÓN DE SEGUNDO ARMÓNICO	69

INTRODUCCIÓN

Debido a sus propiedades semiconductoras y a su abundancia en la corteza terrestre, el silicio se ha convertido en el material más utilizado para la fabricación de circuitos electrónicos. Actualmente, con el desarrollo de la fotónica integrada, el silicio también forma una parte fundamental en la fabricación de sistemas optoelectrónicos debido a su uso en la construcción guías de onda. Sin embargo, para trabajar con sistemas optoelectrónicos, se requiere de un laser no acoplado al sistema que permita enviar la información, lo que puede provocar problemas al momento de reducir el tamaño del circuito integrado. Con el paso del tiempo, esto conlleva a que se realicen investigaciones respecto a la posibilidad de desarrollar un laser de silicio, lo que permitiría tener sistemas acoplados sin importar la reducción del tamaño de los circuitos integrados; sin embargo, el que el silicio sea un material de banda indirecta indica que este tipo de laser no es posible de desarrollarse.

Durante las últimas décadas, se ha cambiado el enfoque de investigación debido a que se reportaron propiedades fotoluminiscentes en nanocristales de silicio [1], propiedades que podrían permitir una alternativa a la construcción del laser de silicio. Estas investigaciones han mostrado los mecanismos de emisión de los nanocristales y los parámetros que influyen en la emisión [2, 3]. Una característica importante que se encuentra bajo estudio es si la fotoluminiscencia de los nanocristales puede producir ganancia óptica y para qué

longitudes de bombeo es posible; así como la búsqueda de niveles metaestables que permitan tener tiempos de decaimiento lo suficientemente grandes como para obtener emisión laser [4].

En este trabajo de tesis, se abordará el problema de los niveles metaestables, por lo que el objetivo principal será confirmar que los tiempos de vida del material son del orden de los microsegundos. Para esto, la tesis se divide en cuatro capítulos:

- El capítulo 1 se enfoca en las bases de la emisión laser, un repaso sobre la transmisión de haces y en la generación de haces pulsados a partir del efecto Kerr
- El capítulo 2 se enfoca en recordar las propiedades del silicio y las propiedades del SRO para remarcar las diferencias y resultados esperados
- En el capítulo 3 se aborda la técnica de medición utilizada y se dan detalles sobre el arreglo experimental
- En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos para las dos muestras estudiadas
- En el apéndice A se encuentra la información sobre el laser utilizado durante la experimentación y su respectiva caracterización
- En el apéndice B se realiza un repaso respecto a la generación de segundo armónico a partir de 3 ondas, sobre cristales uniaxiales y la sintonización dependiendo del ángulo de incidencia

FÍSICA DE LASERES

Para estudiar los tiempos de vida de un material con el fin de buscar emisión laser, es necesario comenzar recordando las bases de la emisión laser misma; por lo tanto, en este capítulo se recordarán los modelos más simples de emisión laser, el comportamiento de haces dentro de cavidades (para conocer el funcionamiento de la cavidad del laser utilizado en la experimentación) y posteriormente se enfocará en mostrar la generación de haces pulsados según la literatura respecto al tema.

1.1. Introducción a la emisión laser

1.1.1. Sistema de dos niveles

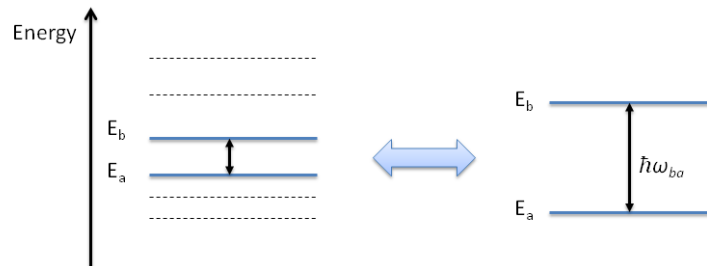


Figura 1.1: Sistema de dos niveles [5]

Consideremos un sistema de dos niveles (ver figura 1.1), donde E_a y E_b son

las energías de cada nivel, \hbar la constante reducida de Planck y ω_{ba} la diferencia de frecuencias angulares de ambos niveles. En este sistema se cumple que $E_b > E_a$. Durante una interacción átomo-campo, pueden ocurrir tres procesos distintos: absorción, emisión espontánea y emisión estimulada. Es posible utilizar dos ecuaciones para describir la dinámica de ambos niveles en términos del cambio en el número de átomos en cada nivel (N_a y N_b respectivamente) respecto al tiempo t

$$\frac{dN_a}{dt} = A_{ba}N_b + B_{ba}\rho(\nu)N_b - B_{ab}\rho(\nu)N_a \quad (1.1)$$

$$\frac{dN_b}{dt} = -A_{ba}N_b - B_{ba}\rho(\nu)N_b + B_{ab}\rho(\nu)N_a \quad (1.2)$$

donde A_{ba} es el coeficiente de emisión espontánea, B_{ba} es el coeficiente de emisión estimulada, B_{ab} es el coeficiente de absorción y ρ es la densidad de energía espectral o la relación entre el número de átomos en cada nivel en función de la frecuencia $\nu = 2\pi\omega$. Estas ecuaciones llevan al resultado

$$\frac{dN_a}{dt} + \frac{dN_b}{dt} = \frac{d(N_a + N_b)}{dt} = 0 \rightarrow N_a + N_b = N_T = \text{const} \quad (1.3)$$

En estado estacionario, la ecuación (1.2) es igual a 0, por lo que es posible obtener la densidad de energía espectral a partir de dicha igualdad

$$\begin{aligned} A_{ba}N_b + B_{ba}\rho(\nu)N_b - B_{ab}\rho(\nu)N_a &= 0 \\ \rightarrow \rho(\nu)(B_{ab}N_a - B_{ba}N_b) &= A_{ba}N_b \\ \rightarrow \rho(\nu) &= \frac{A_{ba}N_b}{B_{ab}N_a - B_{ba}N_b} = \frac{A_{ba}}{B_{ab}\frac{N_a}{N_b} - B_{ba}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Considerando la proporción de distribución de Boltzmann para dos estados (también llamado factor de Boltzmann) [6]

$$\frac{N_b}{N_a} = e^{-\frac{E_b - E_a}{k_B T}} = e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

y la ecuación (1.4), se obtiene

$$\rho(\nu) = \frac{A_{ba}}{B_{ab}e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - B_{ba}} = \frac{1}{\left(\frac{B_{ab}}{A_{ba}}\right)e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - \frac{B_{ba}}{A_{ba}}} \quad (1.5)$$

donde κ_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura y $h = 2\pi\hbar$ es la constante de Planck. Sin embargo, la ley de Planck [7] indica que

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{\kappa_B T}} - 1} \quad (1.6)$$

Luego, usando las ecuaciones (1.6) y (1.5)

$$\left(\frac{c^3}{8\pi h \nu_0^3} \right) (e^{\frac{h\nu}{\kappa_B T}} - 1) = \left(\frac{B_{ab}}{A_{ba}} \right) e^{\frac{h\nu}{\kappa_B T}} - \frac{B_{ba}}{A_{ba}}$$

lo cual lleva a dos condiciones

$$\frac{c^3}{8\pi h \nu^3} = \frac{B_{ab}}{A_{ba}}, \quad \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} = \frac{B_{ba}}{A_{ba}} \rightarrow B_{ab} = B_{ba} \quad (1.7)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. A partir de estas condiciones, se puede notar que la emisión estimulada está directamente relacionada tanto a la absorción como a la emisión espontánea; además, la emisión estimulada es un fenómeno necesario para explicar las interacciones átomo-campo. Adicionalmente, al utilizar el último resultado de la ecuación (1.7) y usando la ecuación (1.2) en equilibrio térmico, se obtiene

$$\begin{aligned} A_{ba}N_b + B_{ab}\rho(\nu)(N_b - N_a) &= 0 \\ \rightarrow N_b + \frac{\rho(\nu)c^3}{8\pi h \nu_0^3}(N_b - N_a) &= 0 \\ \rightarrow N_b + \frac{\rho(\nu)c^3}{8\pi h \nu_0^3}N_b &= \frac{\rho(\nu)c^3}{8\pi h \nu_0^3}N_a \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cuando se considera que el sistema no se encuentra en equilibrio térmico y se considera que no hay iluminación ($\rho(\nu) = 0$), entonces se obtiene

$$\frac{dN_b}{dt} = -A_{ba}N_b \rightarrow N_b(t) = N_b(0)e^{-A_{ba}t} \quad (1.9)$$

Por lo tanto, se tiene un proceso aleatorio (debido a la emisión espontánea) con un tiempo de decaimiento dado por

$$\tau_{ba} = \frac{1}{A_{ba}} \quad (1.10)$$

Es importante notar que como el mecanismo que excita a las partículas al nivel b es el mismo mecanismo que las desexcita al nivel a , por lo que obtener una inversión de población (y por tanto oscilación laser continua) no es posible utilizando un sistema de dos niveles.

1.1.2. Emisión laser del sistema de tres niveles

Previamente vimos la dinámica de un sistema de dos niveles. Ahora, nos enfocaremos en un sistema de tres niveles. Para esto se definirá P_n como la tasa de bombeo hacia el nivel n , Γ_{nm} la tasa de decaimiento del nivel n al nivel m ; B_{ab} y ρ se definen de la misma forma que en la sección anterior. Considerando un proceso de bombeo del nivel 0 al nivel 1 y 2 y una tasa instantánea de decaimiento del 2 al nivel 1, las ecuaciones de población son

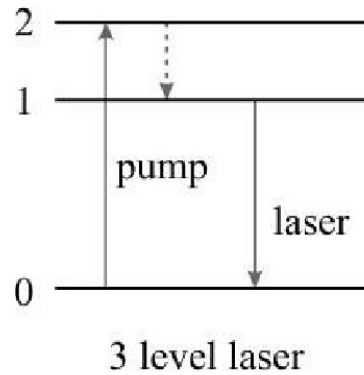


Figura 1.2: Emisión laser de un sistema de tres niveles [8]

$$N = N_0 + N_1 \quad (1.11)$$

$$\frac{dN_0}{dt} = -N_0(P_1 + P_2) + \Gamma_{20}N_2 + \Gamma_{10}N_1 + \rho(\nu)B_{01}(N_1 - N_0) \quad (1.12)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = P_1N_0 + \Gamma_{21}N_2 - \Gamma_{10}N_1 - \rho(\nu)B_{01}(N_1 - N_0) \quad (1.13)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = P_2N_0 - N_2(\Gamma_{21} + \Gamma_{20}) \quad (1.14)$$

Cuando ρ es lo suficientemente pequeño como para ser despreciable y los estados son estacionarios

$$-N_0(P_1 + P_2) + \Gamma_{20}N_2 + \Gamma_{10}N_1 = 0 \quad (1.15)$$

$$P_1N_0 + \Gamma_{21}N_2 - \Gamma_{10}N_1 = 0 \quad (1.16)$$

$$P_2N_0 - N_2(\Gamma_{21} + \Gamma_{20}) = 0 \quad (1.17)$$

De la ecuación (1.17) vemos que

$$N_2 = N_0 \frac{P_2}{(\Gamma_{20} + \Gamma_{21})} \quad (1.18)$$

Luego, sustituyendo en la ecuación (1.16):

$$\begin{aligned} N_0 \left[P_1 + \frac{P_2 \Gamma_{21}}{(\Gamma_{20} + \Gamma_{21})} \right] - \Gamma_{10}N_1 &= 0 \\ \rightarrow \frac{P_1}{\Gamma_{10}} + \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{10}} \frac{P_2}{(\Gamma_{20} + \Gamma_{21})} &= \frac{N_1}{N_0} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Considerando la condición de inversión de población $N_1 > N_0$ y $P_1 = 0$ (como se ve en la figura 1.2), vemos que la tasa de bombeo P_2 debe satisfacer

$$\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{10}} \frac{P_2}{(\Gamma_{20} + \Gamma_{21})} > 1 \rightarrow P_2 > (\Gamma_{20} + \Gamma_{21}) \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{21}} = \Gamma_{10} \left(1 + \frac{\Gamma_{20}}{\Gamma_{21}} \right) \quad (1.20)$$

Es claro que si no hay emisión estimulada del nivel 2 al nivel 0, la condición de inversión de población se vuelve $P_2 > \Gamma_{10}$, por lo que la tasa de bombeo hacia el mayor nivel de energía debe ser mayor a la tasa de decaimiento del nivel 1 al nivel 0.

Si por otro lado se considera que el decaimiento del nivel 2 al nivel 1 es instantáneo (y ρ tiene un valor despreciable), las ecuaciones de población son

$$N_0 + N_1 = N \quad (1.21)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = P_2N_0 - \Gamma_{10}N_1 \quad (1.22)$$

$$\frac{dN_0}{dt} = -P_2N_0 + \Gamma_{10}N_1 \quad (1.23)$$

Los estados estacionarios deben cumplir

$$P_2 N_0 - \Gamma_{10} N_1 = 0 \rightarrow N_1 = \frac{P_2}{\Gamma_{10}} N_0 \quad (1.24)$$

Al sustituir el último resultado en la ecuación (1.21), se pueden obtener el número de partículas en cada nivel estacionario (N_0 y N_1 respectivamente) en términos del número total de partículas

$$N_0 \left(1 + \frac{P_2}{\Gamma_{10}} \right) = N \rightarrow N_0 = \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{10} + P_2} N, \quad (1.25)$$

$$N_1 \left(1 + \frac{\Gamma_{10}}{P_2} \right) = N \rightarrow N_1 = \frac{P_2}{P_2 + \Gamma_{10}} N \quad (1.26)$$

Luego, el valor mínimo requerido para obtener inversión de población es

$$N_1 - N_0 = \frac{P_2 - \Gamma_{10}}{P_2 + \Gamma_{10}} N \quad (1.27)$$

Como se ve en la última ecuación, para obtener una ganancia, la condición de inversión de población es $P_2 > \Gamma_{10}$, que es la misma condición obtenida al analizar un sistema general utilizando las ecuaciones (1.12), (1.13) y (1.14)

1.1.3. Emisión laser del sistema de cuatro niveles

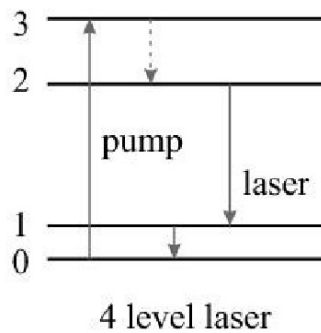


Figura 1.3: Emisión laser de un sistema de cuatro niveles [8]

Otro modelo útil para obtener oscilación laser continua es el sistema de cuatro niveles. Como se ve en la figura 1.3, se considerará un proceso de bombeo del nivel 0 al nivel 3, un decaimiento rápido al nivel 2, transición laser del nivel 2 al nivel 1 y otro decaimiento rápido al nivel base 0. Si se considera que el decaimiento al nivel 2 es instantáneo, las ecuaciones de población tendrán la forma

$$\frac{dN_0}{dt} = -PN_0 + \Gamma_{10}N_1 \quad (1.28)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\Gamma_{10}N_1 + \Gamma_{21}N_2 + \rho(\nu)B_{12}(N_2 - N_1) \quad (1.29)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = PN_0 - \Gamma_{21}N_2 - \rho(\nu)B_{12}(N_2 - N_1) \quad (1.30)$$

De las ecuaciones (1.28), (1.29) y (1.30), se obtiene la ley de conservación

$$N_0 + N_1 + N_2 = N \quad (1.31)$$

Si la ecuación (1.28) tiene valor 0, entonces

$$N_0 = \frac{\Gamma_{10}}{P}N_1 \quad (1.32)$$

Al sustituir en la ecuación (1.30) y considerar ρ suficientemente pequeño

$$0 = \Gamma_{10}N_1 - \Gamma_{21}N_2 \rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{21}} \quad (1.33)$$

Cabe notar que se puede obtener el mismo resultado de la ecuación (1.29) en estado estacionario (igual a 0). Debido a que $N_2 > N_1$ implica una inversión de población, las tasas de decaimiento Γ_{21} y Γ_{10} deben cumplir $\Gamma_{10} > \Gamma_{21}$.

Usando las ecuaciones (1.32) y (1.33) en la ecuación (1.31), se pueden obtener el número de partículas en cada nivel estacionario en términos del número total de partículas

$$N_1 \left(\frac{\Gamma_{10}}{P} + 1 + \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{21}} \right) = N \rightarrow N_1 = \frac{P\Gamma_{21}}{\Gamma_{10}\Gamma_{21} + P\Gamma_{21} + P\Gamma_{10}} N \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{21}}N_1 = \frac{P}{\Gamma_{21}}N_0 \\ \rightarrow N_0 \left(1 + \frac{P}{\Gamma_{10}} + \frac{P}{\Gamma_{21}} \right) &= N \rightarrow N_0 = \frac{\Gamma_{10}\Gamma_{21}}{\Gamma_{10}\Gamma_{21} + P\Gamma_{21} + P\Gamma_{10}} N \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$N_0 = \frac{\Gamma_{10}}{P} N_1 = \frac{\Gamma_{21}}{P} N_2$$

$$\rightarrow N_2 \left(\frac{\Gamma_{21}}{P} + \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{10}} + 1 \right) = N \rightarrow N_2 = \frac{P\Gamma_{10}}{\Gamma_{10}\Gamma_{21} + P\Gamma_{21} + P\Gamma_{10}} N \quad (1.36)$$

Entonces, la condición de inversión de población es

$$N_2 - N_1 = \frac{\Gamma_{10} - \Gamma_{21}}{\Gamma_{10}\Gamma_{21} + P\Gamma_{21} + P\Gamma_{10}} PN \quad (1.37)$$

Lo que también implica que para obtener una ganancia se debe cumplir que $\Gamma_{10} > \Gamma_{21}$.

1.2. Propagación de haces Gaussianos y cavidades

1.2.1. Haz Gaussiano

Partamos de una onda paraxial. Por definición, una onda paraxial es una onda plana modulada por una envolvente compleja que varía lentamente dependiendo de la posición

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-i\kappa z} \quad (1.38)$$

Cerca de la escala de la longitud de onda λ , la envolvente $A(\mathbf{r})$ se puede asumir como aproximadamente constante, por lo que localmente se comportará como una onda plana. Recordemos que una onda plana es aquella cuyos frentes de onda son planos normales a la dirección de propagación y cuya amplitud es constante. Debido a que la amplitud compleja $U(\mathbf{r})$ satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 U + \kappa^2 U = 0$$

donde κ es el número de onda. Luego, la envolvente compleja $A(\mathbf{r})$ debe satisfacer la ecuación paraxial de Helmholtz

$$\nabla_{\perp}^2 A - i2\kappa \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (1.39)$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es la parte transversal del operador Laplaciano. Una de las soluciones a la ecuación (1.39) es una onda paraboloidal, que es la aproximación paraxial de una onda esférica cuando z es considerablemente más grande que x, y

$$A(r) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-i\kappa \frac{\rho^2}{2z}\right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \quad (1.40)$$

donde A_1 es una constante. Es claro que si en lugar de z se tiene $z - \epsilon$ (donde ϵ es una constante), la onda paraboloidal resultante también es una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz pero centrada en el punto $z = \xi$. Si ξ es un número complejo, las propiedades de la solución cambian considerablemente. Cuando ξ es complejo, se puede definir una función $q(z)$ para reescribir la envolvente compleja

$$A(r) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-i\kappa \frac{\rho^2}{2q(z)}\right), \quad q(z) = z + iz_0 = z - \xi, \quad (1.41)$$

donde z_0 es una constante conocida como la distancia de Rayleigh. Para separar la amplitud y la fase, se puede escribir la función $1/q(z)$ en términos de la parte real y la parte imaginaria usando dos funciones reales $R(z)$ y $W(z)$ [9]

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} \quad (1.42)$$

Sustituyendo $q(z)$ de la ecuación (1.41) en la última ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{z + iz_0} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2} \\ &\rightarrow \frac{z^2 + z_0^2}{z} = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] = R(z), \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{z^2 + z_0^2}{z_0} &= z_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right] = \frac{\pi \omega^2(z)}{\lambda} \\ \rightarrow \omega(z) &= \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Las ecuaciones (1.43) y (1.44) son el radio de curvatura del frente de onda y el radio de haz respectivamente. Al usar la ecuación (1.42) en la ecuación (1.41) da como resultado

$$\begin{aligned}
 q(z) &= z + iz_0 = \sqrt{z^2 + z_0^2} \exp \left[-i \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] \\
 &= z_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} e^{i\theta} = \frac{\omega(z)}{\omega_0} z_0 e^{-i\theta}, \\
 \rightarrow A(r) &= \frac{A_1}{z_0} \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{i\theta} \exp \left[-i\kappa \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} \right) \right] \\
 &= A_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left(-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left[-i\kappa \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\theta \right] \quad (1.45)
 \end{aligned}$$

Entonces, la amplitud compleja es

$$U(r) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left(-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left[-i\kappa z - i\kappa \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\theta \right] \quad (1.46)$$

Esta expresión corresponde a un haz Gaussiano de intensidad óptica

$$I = |U(r)|^2 = UU^* = I_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2 \exp \left(-\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \quad (1.47)$$

donde los parámetros del haz son

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (1.48)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (1.49)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (1.50)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \quad (1.51)$$

$$z_0 = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \quad (1.52)$$

1.2.2. Propagación de haces usando el análisis de la matriz de transferencia

Cuando se trabaja con rayos paraxiales, uno de los modelos más simples para estudiar su propagación es mediante una transformación que da la posición en la dirección transversal (respecto al eje óptico) y el ángulo de propagación en términos de los parámetros iniciales [9]

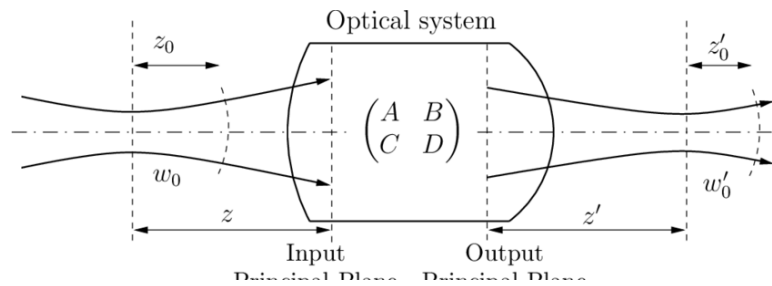


Figura 1.4: Haz Gaussiano propagándose a través de un sistema óptico arbitrario[10]

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Esto se conoce como matriz de transferencia, y sus elementos están definidos como

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{x_2}{x_1} \right|_{\theta_1=0} & B &= \left. \frac{x_2}{\theta_1} \right|_{x_1=0} \\ C &= \left. \frac{\theta_2}{x_1} \right|_{\theta_1=0} & D &= \left. \frac{\theta_2}{\theta_1} \right|_{x_1=0} \end{aligned}$$

La matriz de transferencia M tiene la propiedad

$$\text{Det}(M) = AD - CB = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.54)$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción inicial y final respectivamente. Debido al funcionamiento del modelo en la región paraxial, se puede utilizar la matriz de transferencia para estudiar la propagación de un haz Gaussiano

utilizando el parámetro $q(z)$ de la ecuación (1.42)

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

donde K es la constante de normalización que mantiene a la segunda componente igual a 1. A partir de aplicar la operación de la matriz de transferencia, se pueden obtener dos ecuaciones de las cuales se puede obtener el parámetro q_2 en términos de q_1 y los elementos de la matriz

$$\begin{aligned} q_2 &= K(Aq_1 + B), \quad 1 = K(Cq_1 + D) \\ \rightarrow q_2 &= \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Si se sustituye $q_1 = z_1 + iz_{01}$

$$\begin{aligned} \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} &= \frac{[(Az_1 + B) + iAz_{01}]}{[(Cz_1 + D) + iCz_{01}]} \left[\frac{(Cz_1 + D) - iCz_{01}}{(Cz_1 + D) - iCz_{01}} \right] \\ &= \frac{[(Az_1 + B) + iAz_{01}][(Cz_1 + D) - iCz_{01}]}{(Cz_1 + D)^2 + (Cz_{01})^2} \\ &= \frac{(Az_1 + B)(Cz_1 + D) + ACz_{01}^2}{(Cz_1 + D)^2 + (Cz_{01})^2} + iz_{01} \frac{[A(Cz_1 + D) - C(Az_1 + B)]}{(Cz_1 + D)^2 + (Cz_{01})^2} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Como ejemplo, observemos qué ocurre cuando el haz se propaga a través de una lente delgada. La matriz de transferencia de una lente delgada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, usando la ecuación (1.55)

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} q_1 \\ -\frac{q_1}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

Debido a que se requiere mantener la segunda componente igual a 1, K debe ser el inverso de la segunda componente θ_1

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 f}{f - q_1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, vemos que el parámetro $1/q_2$ es

$$\frac{1}{q_2} = \frac{f - q_1}{q_1 f} \quad (1.58)$$

Del último resultado y utilizando la definición en la ecuación (1.42), se puede obtener una expresión para el radio de curvatura y el ancho del haz

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{q_2} \right] &= \frac{1}{R(z)} = \operatorname{Re} \left[\frac{f - q_1}{q_1 f} \right] = \frac{1}{|q_1|^2 f} \operatorname{Re}[q_1^*(f - q_1)], \\ \operatorname{Im} \left[\frac{1}{q_2} \right] &= \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} = \operatorname{Im} \left[\frac{f - q_1}{q_1 f} \right] = \frac{1}{|q_1|^2 f} \operatorname{Im}[q_1^*(f - q_1)] \end{aligned} \quad (1.59)$$

En caso de tener un sistema óptico compuesto de múltiples elementos, se puede multiplicar la matriz de transferencia de cada componente óptica para obtener la matriz de transferencia de todo el sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1 \end{pmatrix} &= K \begin{pmatrix} A_{\text{total}} & B_{\text{total}} \\ C_{\text{total}} & D_{\text{total}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= K \begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.60)$$

donde N corresponde a la n -ésima componente óptica. En la figura 1.5, podemos ver un ejemplo de un arreglo y su respectiva matriz de transferencia, señalando qué matriz corresponde a qué componente óptica utilizando las letras α , β , γ , δ y ϵ . En esta se puede ver que las matrices se ordenan de derecha a izquierda.

1.2.3. Estabilidad de un resonador óptico

Un resonador consiste en dos espejos altamente reflejantes separados por una distancia L . Para obtener estabilidad en un resonador, las condiciones

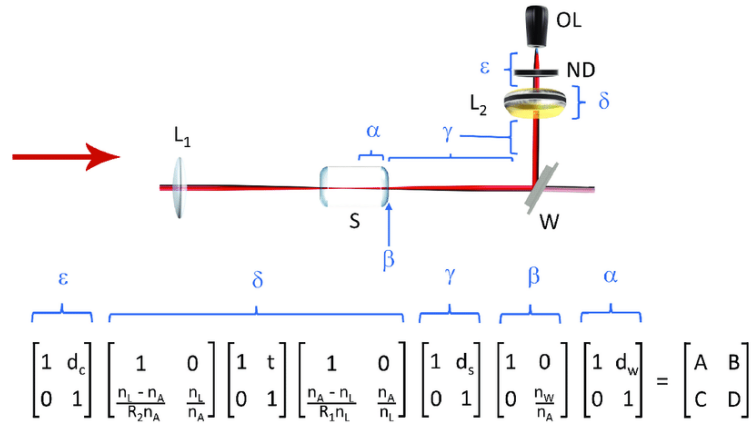


Figura 1.5: Ejemplo del análisis de rayos por la matriz de transferencia de un sistema compuesto [10]

dependen de la geometría de los espejos, la distancia entre los espejos, las componentes ópticas dentro de la cavidad, etc. Como ejemplo, considérese un resonador concéntrico (ver fig. 1.6). Un resonador concéntrico utiliza dos espejos esféricos altamente reflejantes para mantener el haz dentro de la cavidad. Supongamos que el haz parte delante del espejo izquierdo con radio de curvatura R_1 , se propaga una distancia L , se refleja en un espejo esférico con radio de curvatura R_2 , se propaga otra distancia L y finalmente se refleja en el espejo R_1 . La matriz de transferencia que describe esta transformación es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \end{pmatrix} = M \end{aligned} \quad (1.61)$$

Debido a que el haz está confinado en la cavidad, El haz realizará N trayectos dentro del resonador, por lo que la transformación resultante es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Si se escribe la ecuación de eigenvalores para un sólo trayecto

$$(A - \lambda)(D - \lambda) - BC = \lambda^2 + \lambda(A + D) + AD - BC = 0 \quad (1.63)$$

Al usar la propiedad del determinante de la matriz de transferencia en la ecuación (1.54) para el vacío, se puede simplificar la última ecuación como

$$\lambda^2 + \lambda(A + D) + 1 = 0$$

Al resolver la ecuación, se obtiene

$$\lambda = \frac{(A + D) \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4}}{2} = \frac{(A + D)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1} \quad (1.64)$$

Si el discriminante es igual o menor que 0

$$\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1 \leq 0 \rightarrow \left|\frac{A + D}{2}\right| \leq 1 \quad (1.65)$$

Al expandir el valor absoluto, se puede reescribir la última condición como

$$-1 \leq \frac{A + D}{2} \leq 1 \quad (1.66)$$

En este caso, los eigenvalores tendrán valor complejo. Si se define

$$\frac{A + D}{2} = \cos(\phi)$$

Entonces, los eigenvalores tendrán la forma

$$\lambda_{\pm} = \cos(\phi) \pm i\sqrt{1 - \cos^2(\phi)} = \cos(\phi) \pm i\sin(\phi) = e^{\pm i\phi} \quad (1.67)$$

La posición del rayo después de n trayectorias a través de la cavidad en términos de los eigenvectores es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{in\phi} \begin{pmatrix} x_+ \\ \theta_+ \end{pmatrix} + c_2 e^{-in\phi} \begin{pmatrix} x_- \\ \theta_- \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

c_1 y c_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales del sistema. La última ecuación describe la propagación de un rayo en dos direcciones

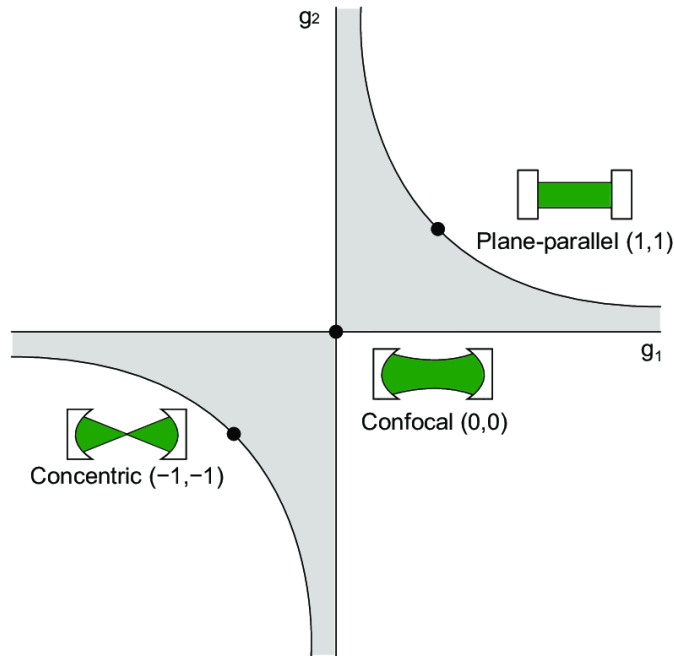


Figura 1.6: Stability condition for different types of resonators

contrarias, lo que implica que la posición se repetirá periódicamente y la cavidad es estable

Si se sustituyen los elementos de la matriz de transferencia (1.61) en la condición (1.66)

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{2L}{R_1} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 1 \\
 \rightarrow 0 &\leq 2 - \frac{2L}{R_2} - \frac{2L}{R_1} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 2 \\
 \rightarrow 0 &\leq 1 - \frac{L}{R_2} - \frac{L}{R_1} + \frac{L^2}{R_1 R_2} \leq 1 \\
 \rightarrow 0 &\leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\rightarrow 0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \tag{1.70}$$

g_1 y g_2 se conocen como los parámetros g del resonador. Si el producto de los parámetros g sigue la condición (1.70), entonces la cavidad es estable. En la figura (1.6), el resonador concéntrico muestra a los parámetros g como $g_1 = g_2 = 1$, condición que se cumple cuando los radios de curvatura tienen

valor $R_1 = R_2 = L/2$. Para el resonador plano-paralelo, los radios de curvatura tienden al infinito ($R_1, R_2 \rightarrow \infty$), por lo que los parámetros g siguen la condición

$$g_1 g_2 = 1 \rightarrow 0 \leq g_1 g_2 = 1 \quad (1.71)$$

Para el tercer ejemplo en la figura 1.6, un resonador cofocal, los parámetros g son iguales a 0. Esta condición se cumple para $R_1 = R_2 = L$. Existe una gran variedad de resonadores ópticos, como se puede ver en el figura 1.7.

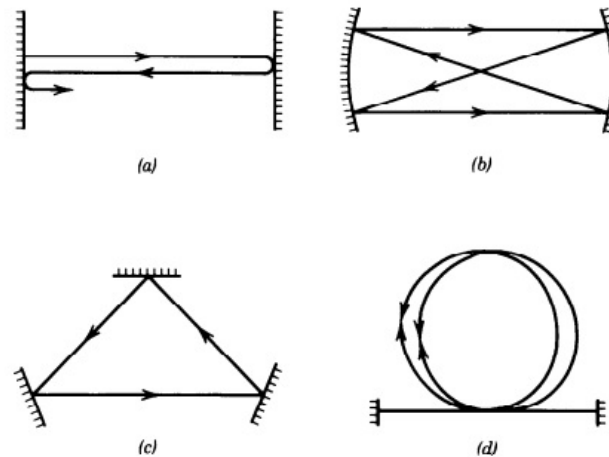


Figura 1.7: Tipos de resonadores ópticos [11]. a) resonador de espejos planos; b) resonador de espejos esféricos; c) resonador de anillo; d) resonador de fibra óptica

1.2.4. Haz dentro de un resonador óptico

Vistas las características de los resonadores, examinemos una cavidad Fabry-Perot. Una cavidad Fabry-Perot consiste en dos espejos planos, paralelos y altamente reflejantes separados a una distancia d . Si se tiene una onda estacionaria

$$U(r) = A \sin(\kappa z)$$

dentro de la cavidad, con las condiciones de frontera $U(0) = 0$ y $U(d) = 0$,

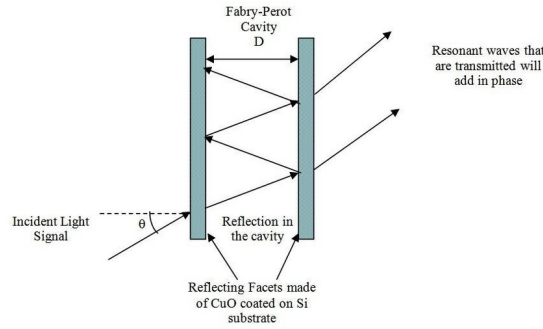


Figura 1.8: Fabry-Perot cavity [12]

entonces κ tendrá la forma

$$\kappa_q d = q\pi \rightarrow \kappa = \frac{q\pi}{d} \quad (1.72)$$

donde κ nuevamente es el número de onda, y se define como

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$$

Al sustituir κ en la ecuación (1.72), se obtienen las frecuencias de resonancia de la cavidad

$$\nu_q = q \frac{c}{2d}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (1.73)$$

Para $q = 1$, se obtiene el espaciado entre los modos de resonancia adyacentes. Ahora, examinemos un haz Gaussiano en un resonador esférico. Asumimos que el centro del haz se encuentre en $z=0$. El haz Gaussiano se propaga en ambas direcciones hasta que alcanza uno de los espejos. La posición de cada espejo es z_1 y z_2 respectivamente (figura 1.9)

$$z_2 = z_1 + d \quad (1.74)$$

donde $z_1 < 0$. Para que el haz Gaussiano coincida con el resonador esférico, el radio de curvatura del frente de onda del haz que incide en el espejo debe ser igual al radio de curvatura del espejo R_1 y R_2 ; por lo que, al aplicar la ecuación (1.43).

$$R_1 = R(z_1) = z_1 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^2 \right] = \frac{z_1^2 + z_0^2}{z_1} \quad (1.75)$$

$$-R_2 = R(z_2) = z_2 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_2} \right)^2 \right] = \frac{z_2^2 + z_0^2}{z_2} \quad (1.76)$$

donde el signo menos de R_2 indica que el espejo es cóncavo y el radio de curvatura del frente del haz se define como positivo para $z > 0$. Al resolver las ecuaciones (1.76), (1.75) y (1.74) para z_1 , z_2 y z_0

$$\begin{aligned} z_1 + d &= z_2, \quad z_1^2 - z_1 R_1 + z_0^2 = 0, \quad z_2^2 + z_2 R_2 + z_0^2 = 0 \\ \rightarrow z_2^2 + z_2 R_2 + z_0^2 &= z_2(z_2 + R_2) + z_0^2 = (z_1 + d)(z_1 + d + R_2) + z_0^2 = 0 \\ z_0 &= [(z_1 + d)(-1)(z_1 + d + R_2)]^{\frac{1}{2}} \rightarrow z_1^2 - z_1 R_1 = (z_1 + d)(z_1 + d + R_2) \\ \rightarrow z_1^2 - z_1 R_1 &= z_1^2 + z_1(2d + R_2) + d(d + R_2) \\ \rightarrow z_1(2d + R_1 + R_2) + d(d + R_2) &= 0 \rightarrow z_1 = \frac{-d(d + R_2)}{2d + R_1 + R_2}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow z_1^2 - z_1 R_1 + z_0^2 &= \left[\frac{-d(d + R_2)}{2d + R_1 + R_2} \right]^2 + \frac{dR_1(d + R_2)}{2d + R_1 + R_2} + z_0^2 = 0 \\ \rightarrow z_0^2 &= -\frac{dR_1(d + R_2)}{2d + R_1 + R_2} - \left[\frac{-d(d + R_2)}{2d + R_1 + R_2} \right]^2 \\ &= \frac{-d(d + R_2)[R_1(2d + R_1 + R_2) + d(d + R_2)]}{(2d + R_1 + R_2)^2} \\ &= \frac{-d(d + R_2)[2R_1d + R_1^2 + R_1R_2 + d^2 + dR_2]}{(2d + R_1 + R_2)^2} \\ &= \frac{-d(d + R_2)[(R_1 + d)^2 + R_2(R_1 + d)]}{(2d + R_1 + R_2)^2} \\ \rightarrow z_0^2 &= \frac{-d(d + R_2)(R_1 + d)(R_1 + d + R_2)}{(2d + R_1 + R_2)^2}, \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\rightarrow z_2 = \frac{-d(d + R_2)}{2d + R_1 + R_2} + d = d \left(\frac{d + R_1}{2d + R_1 + R_2} \right) \quad (1.79)$$

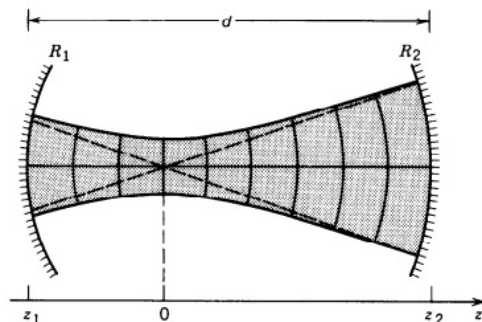


Figura 1.9: Gaussian beam in a spherical resonator [11].

Una vez determinados los parámetros z_0 , z_1 , y z_2 , es posible obtener la cintura del haz usando la ecuación (1.51)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{-d(d + R_2)(R_1 + d)(R_1 + d + R_2)}{(2d + R_1 + R_2)^2}} \quad (1.80)$$

Si ω_0 es complejo, entonces se tiene una cavidad inestable.

1.3. Generación de laser pulsado

Ya estudiado un caso de haz continuo y su comportamiento en cavidades resonantes, es momento de estudiar la generación de laser pulsado.

1.3.1. Amarre pasivo de modos

El amarre de modos hace alusión a un técnica que permite generar pulsos ultracortos y se dividen en dos tipos dependiendo de sus características

- Amarre activo de modos: Dentro de la cavidad se coloca un modulador senoidal de amplitud para que los modos se acoplen y se obtenga amarre de fase
- Amarre pasivo de modos: Se coloca un absorbedor dentro de la cavidad de forma que se sature a intensidades altas y se produzca ganancia para ciertos modos

Como se vio en la sección anterior en la ecuación (1.73), el espaciado entre los modos adyacentes en una cavidad está dado por

$$\nu_m = \frac{c}{2d} \rightarrow \omega_m = \frac{\pi c}{d}$$

donde d es la longitud de la cavidad. Si se parte de que el modo 0 se encuentra en el centro de la ganancia, entonces los modos adyacentes pueden ser escritos como

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega_m, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (1.81)$$

Asumiendo que el perfil de ganancia tiene forma Lorentziana [13], se tiene

$$G(n)a_n = \left[1 + \frac{\omega_n^2 g}{\omega_n^2 + (n\omega_m)^2} \right] a_n \quad (1.82)$$

donde a_n es la amplitud del modo. Para iniciar los pulsos, se hace uso de un modulador de amplitud que se abre y cierra a un ritmo tal que la luz que no es bloqueada se amplifica. La frecuencia del modulador debe ser igual a la frecuencia de pulso. Para lograr esto, los moduladores de amplitud utilizan un efecto electro-óptico o acústico-óptico. Para describir los efectos de un modulador de amplitud, se parte de que los modos son de la forma

$$a_n e^{i(\omega_0 + n\omega_m)t}$$

Cada vez que un modo recorre un ciclo por el modulador, el modo se multiplica por un factor $M[1 - \cos(\omega_m t)]$, de manera que

$$\begin{aligned} M[1 - \cos(\omega_m t)] a_n e^{i(\omega_0 + n\omega_m)t} &= M \left[1 - \frac{1}{2} e^{-i\omega_m t} - \frac{1}{2} e^{i\omega_m t} \right] a_n e^{i(\omega_0 + n\omega_m)t} \\ &= -M a_n e^{i\omega_0 t} \left[\frac{1}{2} e^{i(n+1)\omega_m t} + \frac{1}{2} e^{i(n-1)\omega_m t} - e^{in\omega_m t} \right], \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$M = \frac{2L}{c} \Delta \nu_g$$

Considerando la ganancia (1.82), un parámetro de pérdida l y las k trayectorias (1.83), se puede escribir la amplitud de un modo después de $k + 1$ trayectos

como

$$\begin{aligned} a_n^{(k+1)} = & \left[1 + \frac{\omega_n^2 g}{\omega_n^2 + (n\omega_m)^2} \right] a_n^{(k)} - l a_n^{(k)} \\ & + \frac{M}{2} (a_{n+1}^{(k)} - 2a_n^{(k)} + a_{n-1}^{(k)}) \end{aligned} \quad (1.84)$$

En un estado estacionario, se tiene que $a_n^{(k+1)} = a_n^{(k)}$, por lo que la ecuación (1.84) se vuelve

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\frac{\omega_n^2 g}{\omega_n^2 + (n\omega_m)^2} \right] a_n^{(k)} - l a_n^{(k)} \\ & + \frac{M}{2} (a_{n+1}^{(k)} - 2a_n^{(k)} + a_{n-1}^{(k)}) \end{aligned} \quad (1.85)$$

Si se realiza la aproximación

$$\frac{g}{1 + (n\omega_m)^2/\omega_n^2} \approx g \left[1 - \frac{(n\omega_m)^2}{\omega_n^2} \right]$$

y se toma en cuenta que existen muchos modos con un espaciamiento muy cercano

$$\left[g \left(1 - \frac{(n\omega_m)^2}{\omega_n^2} \right) - l + \frac{M\omega_m^2}{2} \frac{d^2}{d(n\omega_m)^2} \right] a(n\omega_m) = 0 \quad (1.86)$$

La solución de esta ecuación diferencial es un modo Hermite-Gauss[9]

$$a(n\omega_m) = a(\omega) = H_\nu(\omega\tau) e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}} \quad (1.87)$$

donde se tienen las condiciones

$$\frac{1}{\tau^4} = \frac{M\omega_m^2\omega_n^2}{2g}, \quad g - l = M\omega_m^2\tau^2 \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \quad (1.88)$$

En esta solución, el modo de menor orden corresponde a un haz Gaussiano.

Una vez vista la modulación de amplitud, enfoquémonos en el amarre pasivo de modos (el utilizado en la experimentación de este trabajo). Como se mencionó anteriormente, en el amarre pasivo de modos es muy común utilizar un material como absorbedor saturable cuyo coeficiente de absorción depende de la intensidad del haz [13, 14]

$$\alpha(I) = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_{\text{sat}}} \quad (1.89)$$

Si se tiene un absorbedor saturable que actúa con rapidez

$$\begin{aligned} e^{-\alpha L_a} &\approx 1 - \alpha L_a = 1 - \alpha_0 L_a \frac{1}{1 + I/I_{\text{sat}}} \\ &\approx 1 - \alpha_0 L_a \left(1 - \frac{I}{I_{\text{sat}}}\right) = 1 - \alpha_0 L_a + \gamma I \end{aligned} \quad (1.90)$$

La ecuación de modulación de amplitud (1.86) anteriormente se escribió en función de la frecuencia ω ; por lo que para poder incluir el término del absorbedor, se requiere realizar una transformada de Fourier a la ecuación

$$a^{(k+1)}(t) - a^{(k)}(t) = \left[g \left(1 + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2}{dt^2} \right) - l - \frac{M\omega_m^2}{2} t^2 \right] a^{(k)}(t) = 0 \quad (1.91)$$

La nueva solución es la transformada de Fourier del modo Hermite-Gauss (1.87), que es otro modo Hermite-Gauss. Luego, sustituyendo γ por el factor debido a la modulación de amplitud

$$a^{(k+1)}(t) - a^{(k)}(t) = \left[g \left(1 + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2}{dt^2} \right) - l + \gamma |a^{(k)}|^2 \right] a^{(k)}(t) = 0 \quad (1.92)$$

Cuando la ecuación diferencial es igual a 0, la solución es

$$a(t) = A_0 \operatorname{sech} \left(\frac{t}{\tau} \right)$$

con las condiciones

$$\gamma |A_0|^2 = \frac{2g}{\omega_n^2 \tau^2}, \quad g - l + \frac{g}{\omega_n^2 \tau^2} = 0$$

Una técnica de amarre pasivo de modos utilizada es a partir de efectos no lineales, específicamente a partir del uso de un medio Kerr. Para esto, se debe considerar la propagación κ dependiente de ω y de la forma

$$\kappa(\omega) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \kappa}{d\omega^2} \Delta\omega^2$$

Al propagarse una distancia L_d

$$a(L_d, \omega) = \exp \left(-i \frac{L_d}{2} \frac{d^2 \kappa}{d\omega^2} \Delta\omega^2 \right) a(0, \omega) \approx \left[1 - i \frac{L_d}{2} \frac{d^2 \kappa}{d\omega^2} \Delta\omega^2 \right] a(0, \omega)$$

Si se le aplica una transformada de Fourier a la última ecuación

$$\alpha(L_d, t) = \left[1 + i \frac{L_d}{2} \frac{d^2 \kappa}{d\omega^2} \frac{d^2}{dt^2} \right] \alpha(0, \omega) = \left[1 + iD \frac{d^2}{dt^2} \right] \alpha(0, \omega) \quad (1.93)$$

Considerando el efecto Kerr (desarrollo en la siguiente sección)

$$n = n_0 + n_2 I, \quad \kappa n_2 L_k |a|^2 = \delta |a|^2$$

Agregando a la ecuación de modulación de amplitud y considerando que en estado estacionario $a^{(k+1)} - a^{(k)} = i\phi a(t)$, donde ϕ es el cambio de fase durante cada trayectoria, se obtiene la ecuación de Landau-Ginzberg

$$\left[-i\phi + (g - l) + \left(\frac{g}{\omega_n^2} + iD \right) \frac{d^2}{dt^2} + (\gamma - i\delta) |a|^2 \right] a(t) = 0 \quad (1.94)$$

1.3.2. Efecto Kerr óptico

Partiendo de la ecuación de onda escalar no lineal (para desarrollo, ver apéndice B)

$$\nabla^2 E - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$

donde n_0 es el índice de refracción lineal y P_{NL} es la magnitud del vector de polarización no lineal dado por

$$P_{NL} = \epsilon_0 \left(\sum_{jk} \chi_{jk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{jkl} \chi_{jkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right) \quad (1.95)$$

Suponiendo que se tiene un material que presenta fenómenos de tercer orden exclusivamente [15], la ecuación (1.95) se reduce a

$$P_{NL} = \epsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{jkl}^{(3)} E_j E_k E_l$$

de manera que al sustituir en la ecuación de onda no lineal, se tiene

$$\nabla^2 E - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{jkl} \chi_{jkl}^{(3)} E_j E_k E_l \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{jkl} \chi_{jkl}^{(3)} E_j E_k E_l \right)$$

Esta ecuación describe el comportamiento general de una onda cuando existen fenómenos de tercer orden [16]. Suponiendo que sólo hay un campo, la ecuación se puede reescribir como

$$\nabla^2 E - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{3\chi^{(3)}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|E|^2 E)$$

Si se considera un campo de la forma de la ecuación (1.38), entonces se puede llegar a la ecuación paraxial de Helmholtz [17, 18]

$$2i\kappa_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A = -\frac{3\chi^{(3)}\omega^2}{c^2} |E|^2 E \quad (1.96)$$

dentro de los fenómenos que describe esta ecuación, se encuentra el efecto Kerr óptico. El efecto Kerr óptico es un fenómeno no lineal de tercer orden que ocurre cuando un haz de potencia alta incide sobre un medio no lineal; y provoca un cambio en el índice de refracción dependiendo de la distribución de la intensidad de haz [19]. El índice de refracción de un material con una no linealidad de tercer orden está dado por

$$n = n_0 + n_2 |E|^2 = n_0 + n_2 I \quad (1.97)$$

donde

$$n_2 = \frac{\chi^{(3)}}{2n_0}, \quad n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}} \quad (1.98)$$

Al tener un índice de refracción dependiente de la intensidad óptica y partiendo de un n_2 positivo, el fenómeno resultante es uno de autoenfoco, por lo que el material se comportará como si atravesara una lente delgada. Partiendo de la óptica de rayos y el principio de Fermat (diagrama en figura 1.10), se puede obtener la relación

$$\cos \theta_{sf} = \frac{n_0 z_{sf}}{(n_0 + n_2 I) z_{sf}}$$

donde z_{sf} es la distancia que los rayos recorren hasta converger y θ_{sf} el ángulo de autoenfoco. Para esto, se considera que el índice de refracción en el eje óptico es n_0 y el índice de refracción para los rayos fuera del eje óptico es

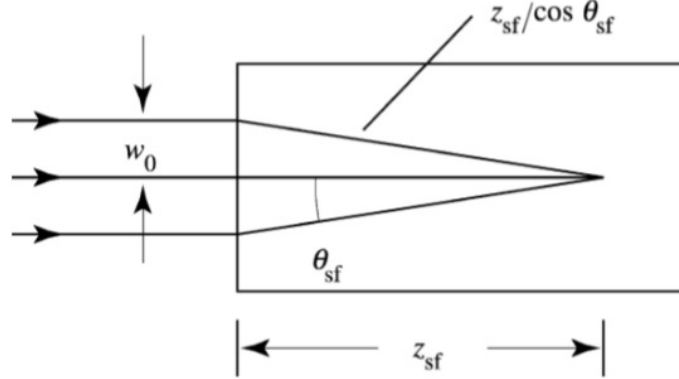


Figura 1.10: Diagrama de rayos del fenómeno de autoenfoque

$n_0 + n_2 I$. Algo importante a mencionar es que si el ángulo es lo suficientemente grande, el ángulo será crítico y se producirá reflexión total interna; lo que lleva al fenómeno conocido como autoatrapamiento (self-trapping). Considerando que el ángulo de autoenfoque θ_{sf} es pequeño (aproximación paraxial), se puede realizar una aproximación a partir de reescribir el coseno en una serie de Taylor de forma que

$$1 - \frac{1}{2}\theta_{sf}^2 = \frac{n_0 z_{sf}}{(n_0 + n_2 I) z_{sf}} \quad (1.99)$$

De la última ecuación, se puede obtener el ángulo de divergencia del autoenfoque

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n_0 z_{sf}}{(n_0 + n_2 I) z_{sf}} &= \frac{1}{2}\theta_{sf}^2 \rightarrow 2 - \frac{2n_0}{n_0 + n_2 I} = \theta_{sf}^2 \\ \rightarrow \theta_{sf}^2 &= \frac{2(n_0 + n_2 I)}{n_0 + n_2 I} - \frac{2n_0}{n_0 + n_2 I} = \frac{2n_2 I}{n_0 + n_2 I} \\ \rightarrow \theta_{sf} &= \sqrt{\frac{2n_2 I}{n_0 + n_2 I}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{n_0}{n_2 I} + 1}} \end{aligned}$$

Ya que $n_0 \gg n_2 I$, el cociente en el denominador es considerablemente mayor que 1; por lo que se puede realizar la aproximación

$$\theta_{sf} = \sqrt{\frac{2n_2 I}{n_0}} \quad (1.100)$$

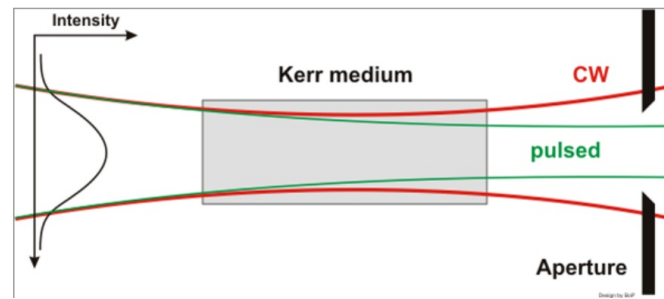


Figura 1.11: Mecanismo de amarre de modos a partir del efecto Kerr [20]

Si el rayo se encuentra a una altura ω_0 respecto al eje óptico, se puede obtener la distancia focal a partir la de ecuación paraxial

$$z_{sf} = \frac{\omega_0}{\theta_{sf}} = \omega_0 \sqrt{\frac{n_0}{2n_2 I}} \quad (1.101)$$

Si ahora se considera un haz, se deben tener en consideración los efectos difractivos, de forma que el ángulo de convergencia del haz estará dado en términos del ángulo de autoenfoque y el ángulo de difracción

$$\theta^2 = \theta_{sf}^2 - \theta_{dif}^2 \quad (1.102)$$

donde

$$\theta_{dif} = \frac{0,61\lambda_0}{n_0 d} \quad (1.103)$$

siendo d el diámetro del haz y λ_0 la longitud de onda en el vacío. Si el ángulo de convergencia del haz es 0, se pueden igualar las ecuaciones (1.100) y (1.103)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2n_2 I}{n_0}} &= \frac{0,61\lambda_0}{n_0 d} \\ \rightarrow I &= \frac{(0,61)^2 \lambda_0^2}{2n_2 n_0 d^2} \end{aligned} \quad (1.104)$$

La última ecuación indica que los fenómenos de autoatrapamiento y autoenfoque sólo pueden ocurrir si el haz supera dicha intensidad. Por definición, la intensidad óptica está dada por

$$I = \frac{4P}{\pi d^2}$$

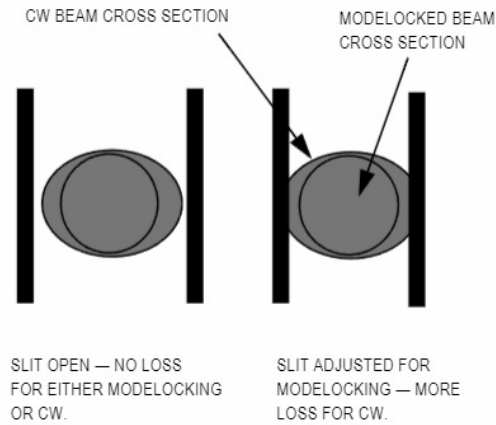


Figura 1.12: Área transversal de un amarre de modos a partir del efecto Kerr. Fuente: manual de usuario del Coherent Mira Optima 900-F Laser

Por lo que se puede obtener la potencia crítica como

$$P_c = \frac{\pi d^2 I}{4} = \frac{(0,61)^2 \pi \lambda_0^2}{8 n_2 n_0} \approx \frac{\lambda_0^2}{8 n_2 n_0} \quad (1.105)$$

Si se realiza el cociente de la potencia y la potencia crítica, se tiene que

$$\frac{P}{P_c} = \frac{2 n_2 n_0 d^2 I}{(0,61)^2 \lambda_0^2} \quad (1.106)$$

De forma que si se sustituye la intensidad en la ecuación (1.101), se obtiene

$$z_{sf} = \omega_0 \sqrt{\frac{n_0}{2 n_2}} \sqrt{\frac{1}{I}} = \omega_0 \sqrt{\frac{n_0}{2 n_2}} \sqrt{\frac{2 n_2 n_0 \omega^2 P_c}{(0,61)^2 \lambda_0^2 P}}$$

$$\rightarrow z_{sf} = \frac{\omega_0^2 n_0}{(0,61) \lambda_0} \frac{1}{\sqrt{P/P_c}} \quad (1.107)$$

La última ecuación tiene la condición de que $P \gg P_c$. Cuando la potencia del haz es más pequeña, se toman en cuenta los efectos de difracción y se modifica la expresión a la forma

$$\frac{\omega_0^2 n_0}{(0,61) \lambda_0} \frac{1}{\sqrt{P/P_c - 1}} \quad (1.108)$$

Cuando se utiliza el efecto Kerr para generar un haz pulsado (figura 1.11), el efecto de autoenfoco provoca que se concentren los modos de mayor

intensidad cerca del eje óptico, de forma que al colocar una apertura, esta inducirá más pérdidas en los bordes del haz donde se comporta de forma continua, de manera que funciona como mecanismo de amarre de modos (figura 1.12).

SILICIO Y ÓXIDO DE SILICIO RICO EN SILICIO

Una vez vistos los principios de la emisión laser y el comportamiento de los haces en cavidades, concentrémonos en estudiar las propiedades del silicio y sus diferencias con respecto al óxido de silicio enriquecido con silicio. Al estudiar estas propiedades, se podrá notar el motivo por el que el silicio no es considerado un material apto para emisión laser y qué características lo diferencian del material que se va a caracterizar.

2.1. Características del silicio

Para hablar sobre el comportamiento de los electrones en el silicio y sus niveles de energía, partamos sobre el modelo más simple: el modelo de electrones libres. Para deducir este modelo, se parte de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo considerando una energía potencial igual a cero

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

donde m es la masa del electrón. La solución a la ecuación es una onda plana viajera

$$\Psi = e^{ikz}$$

por lo que al sustituir la solución, se puede obtener la relación entre la energía y el número de onda

$$-\kappa^2 e^{ikz} + \frac{2m}{\hbar^2}E e^{ikz} = 0 \rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2 \quad (2.2)$$

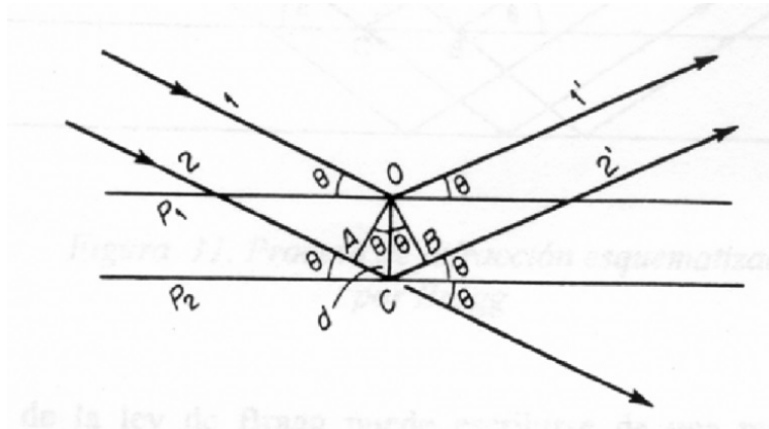


Figura 2.1: Diagrama de rayos que muestra la ley de Bragg [21]

Este modelo funciona para electrones libres; sin embargo, no es aplicable para electrones en un cristal. A pesar de esta problemática, se puede realizar una aproximación al modelo del electrón libre si las soluciones de la función de onda son ondas planas viajeras que interactúan de forma difractiva con el cristal. Para obtener frentes de onda plano, se requiere tomar en cuenta la ley de Bragg [21] (figura 2.1)

$$2d \sin(\theta) = n\lambda \quad (2.3)$$

donde d es la longitud de separación de los planos, θ es el ángulo de incidencia de la onda en el plano de la red cristalina, n es un número natural que indica el orden de difracción y λ es la longitud de onda de De Broglie. La ley de Bragg muestra que cuando se cumplen estas condiciones, las ondas reflejadas están en fase y se tiene interferencia constructiva. Debido a que las ondas reflejadas tienen un cambio de fase de π respecto a la onda incidente cuando se tienen valores críticos

$$2d \sin(\theta) = 2d = n\lambda \rightarrow \lambda = \frac{2d}{n} \rightarrow \kappa = \frac{n\pi}{d} \quad (2.4)$$

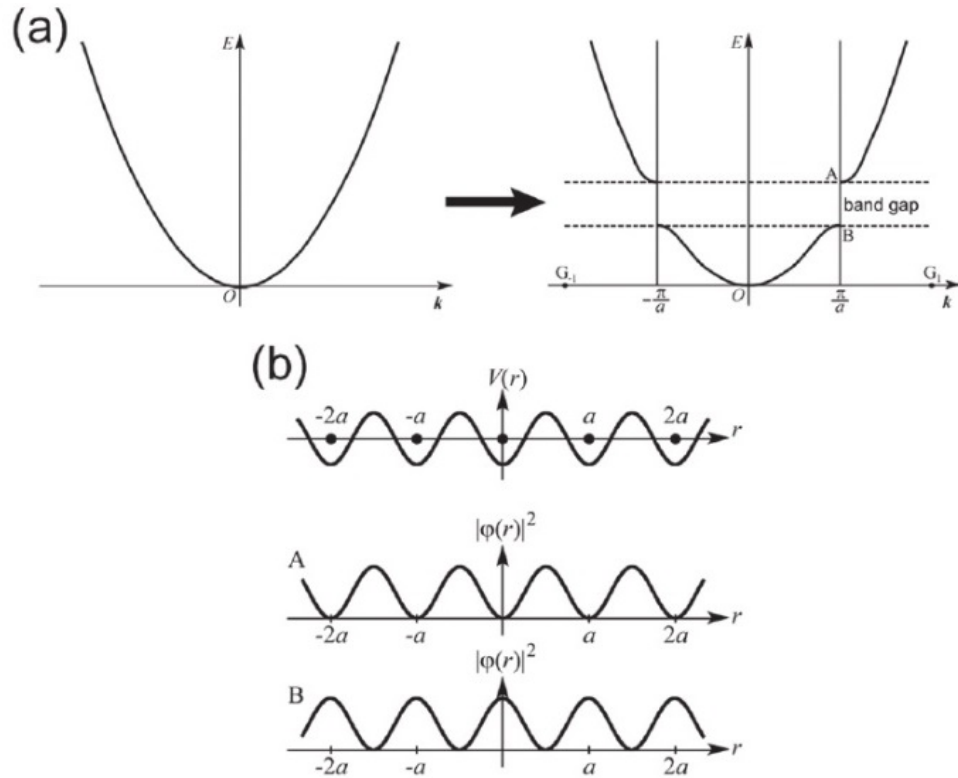


Figura 2.2: Diagramas E-κ para el modelo de electrón libre [22]

para este valor se producen ondas estacionarias que se pueden representar como dos ondas planas viajeras propagándose en direcciones opuestas

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{i\kappa z}, & \psi_2 &= e^{-i\kappa z} \\ \rightarrow \Psi_1 &= \psi_1 + \psi_2 = 2 \cos(\kappa z), & \Psi_2 &= \psi_1 - \psi_2 = 2i \sin(\kappa z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

La probabilidad de encontrar el electrón en una dimensión para la longitud de onda crítica de De Broglie de la ecuación (2.4) es

$$|\Psi_1|^2 = \cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)^2, \quad |\Psi_2|^2 = \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)^2 \quad (2.6)$$

En la figura 2.2 se puede ver el modelo de electrón libre (inciso a)) y una modificación al modelo a partir de introducir un potencial periódico [22, 23] (inciso b)). Es importante notar que al introducir un potencial periódico, surge una región prohibida de energía (o banda prohibida de energía); de manera

que el electrón se va a encontrar encima (banda de conducción) o debajo (banda de valencia) de esta región dependiendo de su energía. Dependiendo de las características que presenten las bandas de energía del material, se pueden dividir en dos tipos

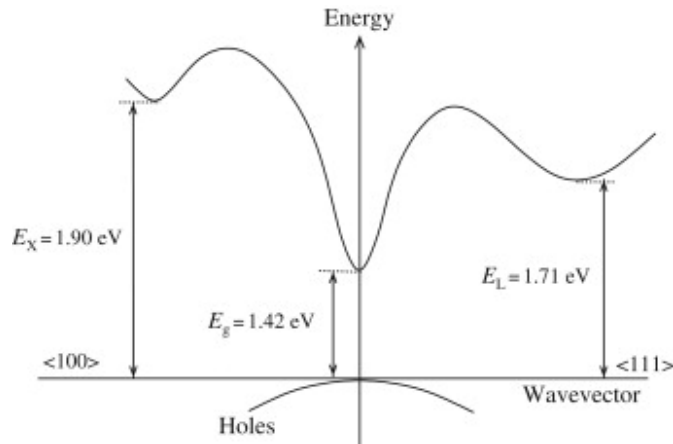


Figura 2.3: Diagrama E- κ del arseniuro de galio (GaAs)[24]

- Material de transición directa: en este material, el máximo de energía de la banda de valencia y el mínimo de la banda de conducción se encuentran verticalmente posicionados, ya que ocurren para el mismo valor de κ . Para este tipo de materiales, la energía y momento del sistema se conservan

$$E_c(\kappa) = E_v(\kappa') + \hbar\omega, \quad \hbar\kappa = \hbar\kappa' + \hbar\kappa_{\text{fot}}$$

En la figura 2.3 se puede ver un ejemplo del diagrama E- κ de un material de transición directa.

- Material de transición indirecta: cuando el máximo de energía de la banda de valencia y el mínimo de energía de la banda de conducción se dan para distintos valores de κ . Para escribir las ecuaciones de conservación, se requiere añadir un término extra debido a la vibración de la red (fonones)

$$E_c(\kappa) = E_v(\kappa') + \hbar\omega \pm \hbar\omega_{\text{fon}}, \quad \hbar\kappa = \hbar\kappa' + \hbar\kappa_{\text{fot}} \pm \hbar\kappa_{\text{fon}}$$

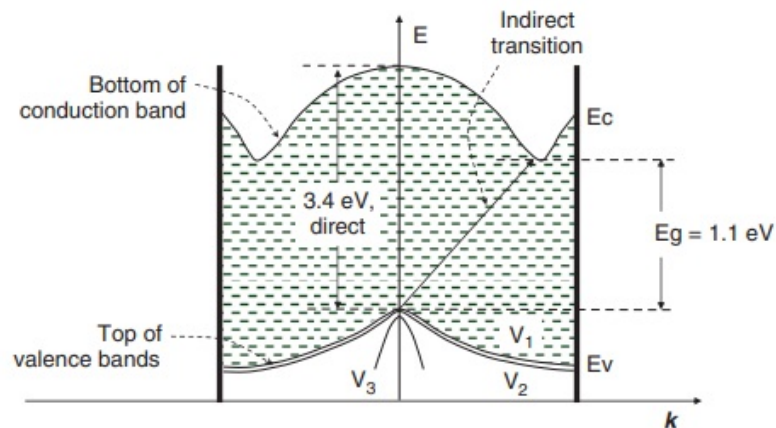


Figura 2.4: Diagrama E- κ para el silicio en el índice de Miller $|100|$ [23]

En el caso del silicio cristalino en bulto, como puede verse en la figura 2.4, es un material de transiciones indirectas, por lo que se requiere de más energía para realizar una transición directa y es menos probable que ocurra una transición directa debido a la participación de una partícula extra (el fonón). Esta propiedad provoca que el coeficiente de absorción sea de dos a tres órdenes de magnitud menor al de un material de transición directa y que no sea un material luminiscente a temperatura ambiente; por lo que no es un material apto para emisión laser.

2.2. Características del óxido de silicio rico en silicio

Ya estudiadas las propiedades del silicio, pasemos a analizar el óxido de silicio rico en silicio. El óxido de silicio enriquecido con silicio (SRO por sus siglas en inglés), Es un material que contiene silicio elemental (Si), monóxido de silicio (SiO), monóxido de disilicio (Si₂O), dióxido de silicio (SiO₂) y trióxido de disilicio (Si₂O₃). El SRO que estudia este trabajo es aquel que se produce por descomposición química de vapor de baja presión (LPCVD por sus siglas en inglés), donde se colocan óxido nitroso (N₂O) y silano (SiH₄) para realizar una película de 100nm-300nm. La razón de presiones de los gases reactivos es

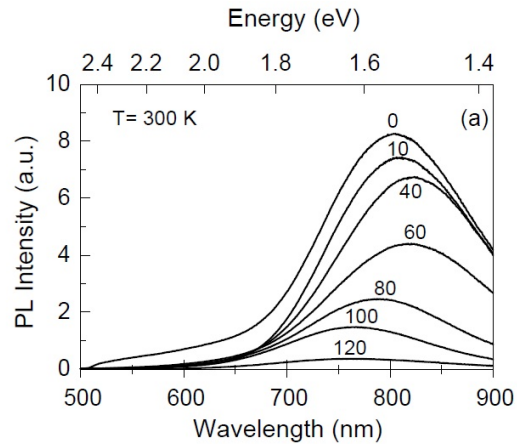


Figura 2.5: Intensidad de la fotoluminiscencia en la región azul al someter al material a un proceso térmico distinta cantidad de tiempo (de 0 a 120 egundos) [3]

conocida como el parámetro R_0 y está dada por

$$R_0 = \frac{P_{[N_2O]}}{P_{[SiH_4]}} = 10, 20, 30 \quad (2.7)$$

Dependiendo del parámetro R_0 , las muestras de SRO presentarán variaciones en sus características, de manera que para reconocerlas se escribirán de la forma SRO_{R_0} para indicar el valor de este parámetro[2]. Algo importante a resaltar es que el material es más propenso a cambiar la intensidad de emisión si se somete a un proceso térmico después del depósito y este cambio depende del tiempo de exposición (figura 2.5). Como se puede ver en la figura 2.6, este cambio se debe a que las concentraciones de silicio elemental (Si^{0+}), monóxido de silicio (Si^{2+}), monóxido de disilicio (Si^{1+}), dióxido de silicio (Si^{4+}) y trióxido de disilicio (Si^{3+}). El proceso térmico tiene el objetivo de aumentar la concentración de silicio elemental de forma que se tenga una región de nanocristales de silicio. Ahora analicemos los picos de emisión reportados. En la figura 2.7, vemos que para el SRO_{30} hay dos picos de emisión: a 428 nm (2.90 eV) y a 722 nm (1.72 eV). Cada una de estas emisiones se puede ajustar a tres y dos mecanismos respectivamente [1]:

- El pico de 1.55 eV se le puede atribuir a defectos del límite entre el

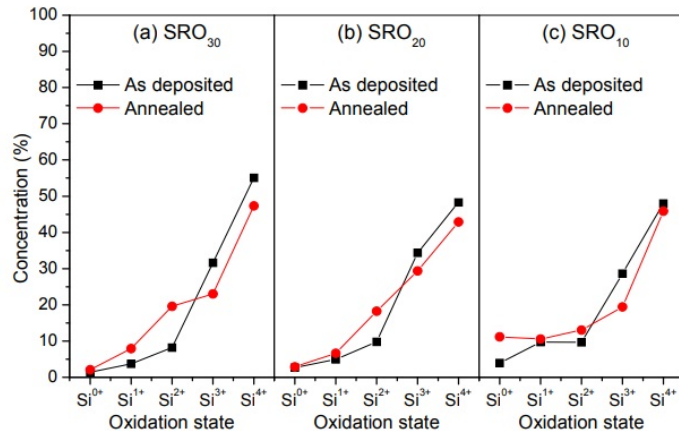


Figura 2.6: Cambio en la estructura del SRO dependiendo de R_0 antes y después del proceso térmico[2]

nanoclúster de silicio con el óxido de silicio

- Los picos de 1.69 eV y 1.80 eV pueden relacionarse a defectos en la matriz de óxido
- Los picos de 2.62 eV y 2.91 eV se pueden relacionar a enlaces incompletos con oxígeno

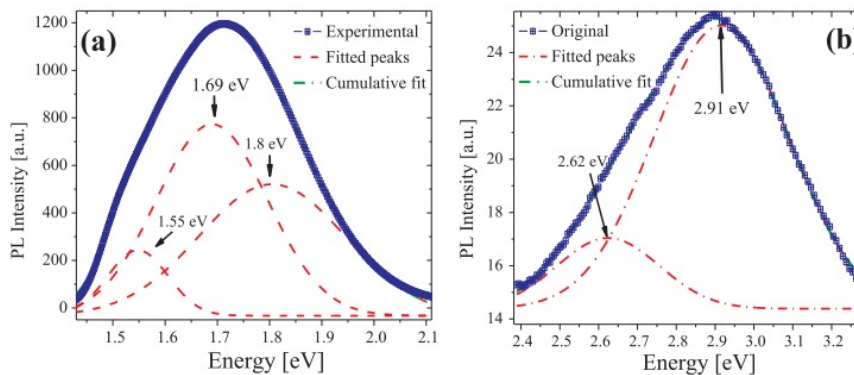


Figura 2.7: Emisiones del SRO_{30} con picos en a) 1.72 eV y b) 2.90 eV. Se aplicó bombeo a 300 nm en ambas muestras[1].

Por otro lado, en la figura 2.8 se observan datos de fotoluminiscencia de muestras de SRO_{10} , SRO_{20} y SRO_{30} después de ser sometidas a un proceso térmico

[2]. La fotoluminiscencia se refiere al proceso de emisión de un material al ser sometido a un bombeo óptico. Para estas muestras se pueden ver tres mecanismos de emisión a 715 nm, 780 nm y 825 nm; estos picos de emisión son en longitudes muy similares a los vistos en la figura 2.7. El pico de emisión en 715 nm tiene relación con el exceso de silicio en el material, de manera que cuando el exceso decrece, dicho pico de emisión aumenta de intensidad. El mecanismo de emisión en 825 nm se relaciona con los nanocristales de silicio presentes en el material. Al comparar ambos gráficos, vemos que presentan características muy similares entre si, por lo que los mecanismos de emisión encontrados son los mismos. La formación de nanocristales está relacionada con el parámetro R_0 de forma que cuando el parámetro disminuye su valor, el exceso de silicio aumenta y conlleva a que la densidad de nanocristales y el tamaño de dichos nanocristales aumenten.

Este cambio en la densidad y tamaño de nanocristales influye en la intensidad de la fotoluminiscencia del material debido al efecto de confinamiento cuántico. Durante la sección anterior (sección 2.1) se mostró el modelo de electrones libres a partir de la ecuación de Schrödinger independiente en el tiempo y con potencial igual a cero en la ecuación (2.1) y se vió la solución de la energía en la ecuación (2.2). Si ahora se considera un potencial infinito en todas direcciones dada cierta distancia, entonces se tiene el modelo de una partícula en una caja cúbica, cuya la solución para la energía esta dada por

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (2.8)$$

donde m es la masa de la partícula en la caja, L es la longitud de la arista de la caja cúbica y n_m es un número natural que indica el nivel de energía (el número de crestas y valles de la función de onda) para las direcciones x, y, z respectivamente. Como se puede ver en la solución, La energía del sistema será inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de las aristas de la

caja cúbica, por lo que los niveles energéticos permitidos se separan cuando la región de confinamiento disminuye. Consideremos lo que ocurre en una sola dimensión para el nivel de menor energía

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

Al mismo tiempo, al pasar un electrón de la banda de conducción a la banda de valencia, se produce un par electrón-hueco que interactúan mediante una fuerza de Coulomb; a esto se le conoce como excitón. Si la interacción electrón-hueco se resuelve usando el modelo de Bohr para el menor nivel de energía [25], la energía del excitón está dada por

$$E = \frac{\mu e^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon^2} \quad (2.9)$$

donde $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, e la carga eléctrica del electrón y μ es la masa reducida obtenida de las masas del electrón (m_e) y del hueco (m_h)

$$\mu = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}$$

De manera que al igualar las energías (2.9) y (2.9), se puede obtener la distancia L para la que se tendría un excitón en una caja

$$L = \frac{4\pi \hbar^2 \epsilon}{e^2 \mu} \quad (2.10)$$

Que no es más que el radio de excitón de Bohr. Volviendo al pozo de potencial, cuando se confina a los electrones a un espacio próximo al radio de excitón de Bohr, se puede considerar al sistema como un excitón en una red cristalina, por lo que el número de onda estará dado por la ley de Bragg en la ecuación (2.4) usada previamente; de manera que la incertidumbre del momento cuando la región de confinamiento es el radio de excitón de Bohr es

$$\Delta p = \frac{\hbar \pi}{L} = \frac{e^2 \mu}{4\epsilon \hbar}$$

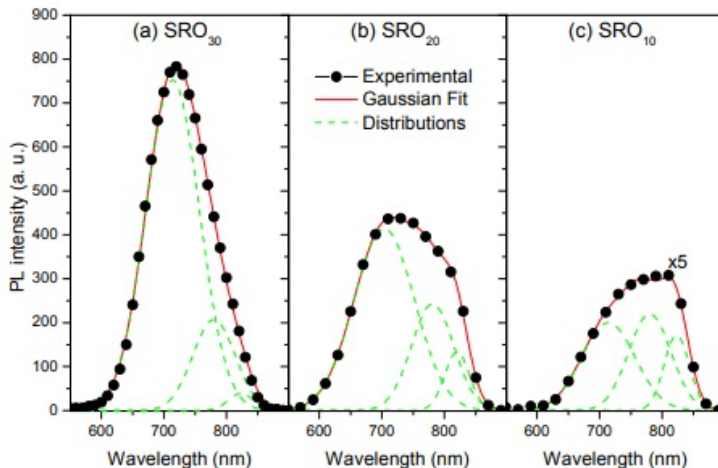


Figura 2.8: fotoluminiscencia en muestras de SRO antes y después del proceso térmico [2]

y entonces

$$p + \Delta p = \hbar\kappa + \frac{e^2\mu}{4e\hbar} \quad (2.11)$$

Esta incertidumbre es lo suficientemente grande como para permitir que el material pase a ser un material de transición directa; es decir, al tener confinamiento cuántico, las ecuaciones de conservación (2.7) pasan a ser

$$E_c(\kappa) = E_v(\kappa') + \hbar\omega_{\text{fot}} \pm \hbar \left(\frac{\hbar\pi^2}{2\mu L^2} \right), \quad (2.12)$$

$$\hbar\kappa = \hbar\kappa' + \hbar\omega_{\text{fot}} + \frac{\hbar\pi}{L} \quad (2.13)$$

Con L siendo cercano al radio de excitón de Bohr.

De esta forma, se puede tener luminiscencia en el SRO. Asimismo, durante el estudio de la sección transversal de absorción de fotones por nanocrystal usando un bombeo a 488 nm, se reporta que hay una emisión de 850 nm de longitud de onda y que el tiempo de vida de los nanocristales de silicio se encuentra en los 70 μs [4].

MEDICIÓN DEL TIEMPO DE VIDA

Como se vio en el capítulo anterior, se reporta en la literatura que el SRO presenta propiedades fotolumínicas que podrían permitir al material realizar emisión laser. En el capítulo 1, se especifica la necesidad de tener un nivel de energía metaestable con un tiempo de decaimiento considerablemente más alto que el resto de los niveles de energía (en el orden de los microsegundos). En este capítulo, se estudiará una de las técnicas para medir tiempos de vida y después se aplicará para caracterizar el SRO.

3.1. Técnica de medición de fosforescencia

Como se mencionó en el capítulo anterior, la fotoluminiscencia se define como la emisión de luz de un material cuando este se somete a una excitación óptica. Cuando se habla de fenómenos de fotoluminiscencia en materiales, se pueden dividir según el tiempo de emisión en dos tipos: fluorescencia y fosforescencia. La fluorescencia tiene la característica de que la emisión de luz de parte del material es inmediata; por lo que una vez que el material deja de ser bombeado, deja de emitir luz. El tiempo que tarda un material fluorescente en emitir una vez que ha absorbido luz es del orden de decenas de nanosegundos a décimas de nanosegundo ($10^{-8}\text{s} - 10^{-10}\text{s}$). Por otro lado, un material se considera fosforescente cuando sigue emitiendo luz durante una

cantidad de tiempo después de dejar de ser bombeado. Cuando un material es fosforescente, el tiempo que tarda en emitir después de haber absorbido luz es del orden de las décimas de milisegundos hasta las decenas de segundos ($10^{-4}\text{s} - 10^1\text{s}$). El material descrito con propiedades fosforescentes fue el diamante de Cellini en 1568, y se confirmaron sus propiedades en 1662 por Robert Boyle. A partir del siglo XVII se reportaron numerosos materiales con propiedades que coinciden con las de un material fosforescente.

El primer diseño creado para medir tiempos de vida de materiales fosforescentes fue creado en 1858 por Alexandre-Edmond Becquerel y se denomina fosforoscopio [26]. El diseño consiste en un par de discos revolucionados unidos por un mecanismo y separados cierta distancia. Cada disco tiene cuatro aberturas iguales separadas a la misma distancia, y las aberturas entre los discos tienen un desfase angular de $\pi/8$. El material se coloca entre los discos de manera que la luz pasa por una de las ranuras del primer disco, incide sobre el material y la luz que emite no puede pasar por una abertura del segundo disco hasta después de cierto tiempo dependiendo del número de aberturas y la velocidad de giro de los discos. Tanto la muestra como los discos se encuentran dentro de una caja de manera que la luz sólo incida por las aberturas del primer disco (figura 3.1).

Los primeros resultados utilizando este método se dieron en 1863, donde se pudo tener una precisión del orden de 10^{-4} s. Durante los años posteriores, Becquerel realizó modificaciones al diseño original para obtener resultados más precisos (del orden de 10^{-5} s) (figura 3.2). Durante la experimentación, Becquerel notó que el comportamiento del decaimiento es de forma exponencial, de manera que la intensidad está dada por

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.1)$$

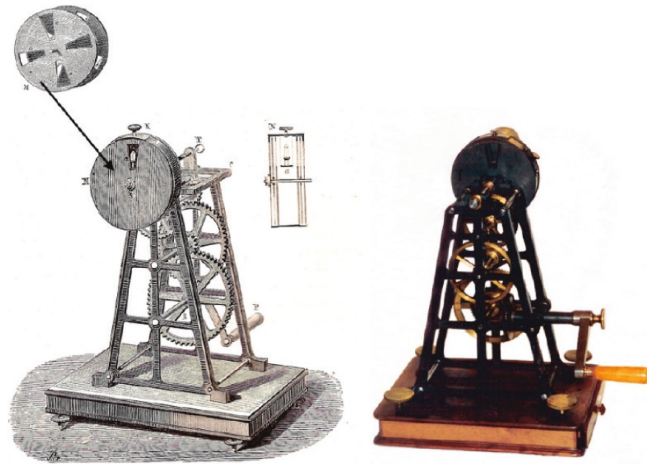


Figura 3.1: Fosforoscopio con montura mecánica[27]

donde I_0 es la intensidad inicial, t es el tiempo y τ es el tiempo de vida de la muestra. Considerando que el disco gira a un ritmo constante y sus aberturas está separadas a la misma distancia, la señal de entrada será una señal cuadrada, por lo que la respuesta del material estará dada por una convolución de la señal de excitación (a la que se le llamará $\text{Sig}(t)$) y la ecuación (3.1)

$$\text{Sig}(t) \otimes I(t) = \begin{cases} I_0[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}], & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ I_0[e^{\frac{T}{2\tau}} - 1]e^{-\frac{t}{\tau}}, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

donde T es el periodo de la señal de excitación. Para la última ecuación, se asume que el tiempo que el material tarda en ser excitado y el tiempo que tarda en decaer son iguales[29].

3.2. Arreglo experimental

El diseño experimental utilizado para medir los tiempos de vida del SRO está basado en la técnica del fosforoscopio vista en la sección anterior y se puede visualizar en la figura 3.3. Para esto, se hizo uso de un laser Coherent Mira Optima 900-F, cuyo medio activo es un cristal de zafiro con iones de titanio.

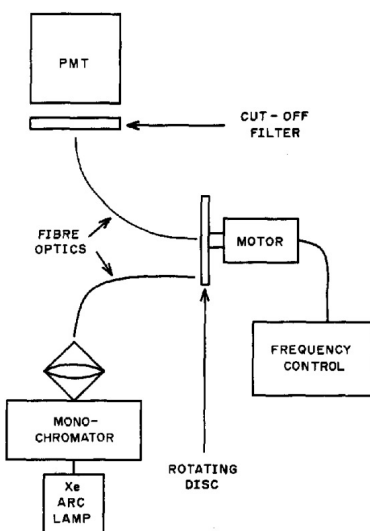


Figura 3.2: Fosforoscopio de fibra óptica[28]

Este laser cuenta con un rango de longitud de onda de 710 nm-1000 nm y tiene modos de operación en laser continuo, pulsado en orden de picosegundos y pulsado en orden de femtosegundos (para características específicas del laser, ver apéndice A). La configuración utilizada para el experimento es en laser pulsado de 200 femtosegundos y el laser se modula en un rango de 795 nm-825 nm. Una vez teniendo el haz pulsado, se dirige el haz hacia un

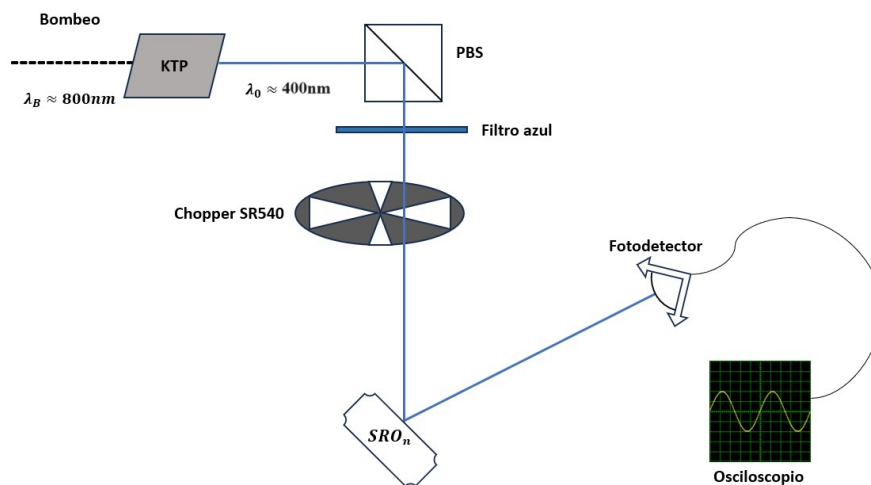


Figura 3.3: Arreglo experimental utilizado para medir los tiempos de vida

cristal de titanil fosfato de potasio (siglas KTP) para producir el fenómeno de generación de segundo armónico. Para lograr este fenómeno no lineal, se debe ajustar el ángulo de incidencia del haz pulsado de manera que se cumplan las condiciones de acoplamiento de fase (ver apéndice B). Una vez que se realice la sintonización del ángulo, un porcentaje del haz incidente se transformará en un haz con la mitad de la longitud de onda del haz inicial y cuya polarización es perpendicular a la polarización del haz incidente. Debido a que aún se tendrá un haz infrarrojo, se coloca un divisor de haz polarizado de forma que refleje el haz del segundo armónico y se separe de la mayor parte del haz infrarrojo (debido a su polarización cruzada). Para terminar de obtener el haz con el que se bombea la muestra, se coloca un filtro azul para obtener exclusivamente el haz del segundo armónico. Una vez se tiene el haz que bombea la muestra, se hace pasar el haz a través de un disco con aberturas cuya velocidad de giro se modula a través de un motor (mismo principio ocupado por el fosforoscopio). El modelo utilizado es un chopper óptico SR540 con un rango de frecuencia de 4 Hz-3.7 kHz y un disco con 30 aberturas (figura 3.4). Después, la señal incide sobre la muestra de SRO (20 o 30) y se coloca un fotodetector conectado a un osciloscopio para obtener las medidas del haz reflejado.

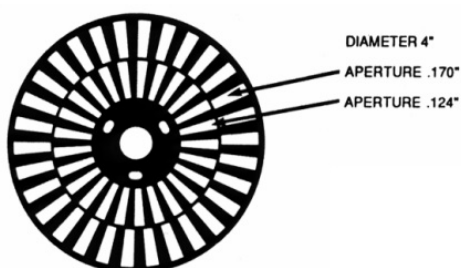


Figura 3.4: Disco de 30/25 aberturas del chopper óptica SR540

Como se puede ver en la figura 3.5, La intensidad máxima no será alcanzada si el tiempo que el material está expuesto al bombeo es lo suficientemente corto; de manera que dependiendo de la frecuencia de operación del disco, se puede

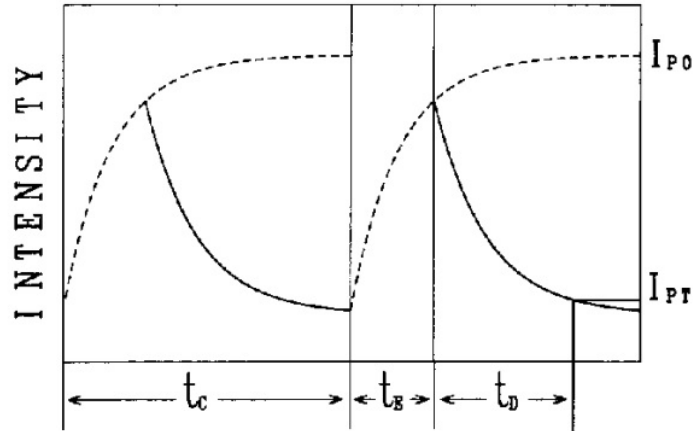


Figura 3.5: Gráfico de intensidad respecto al tiempo para un fosforoscopio de fibra óptica [28]

visualizar una parte distinta de la curva de decaimiento en el osciloscopio. Para este experimento, el gráfico es de intensidad normalizada con respecto a la frecuencia de operación. Para obtener el valor de la intensidad normalizada, se obtendrán dos valores del osciloscopio: voltaje pico a pico y voltaje promedio de la señal; de manera que al dividir el voltaje pico a pico entre el voltaje promedio, se obtendrá el valor de la intensidad para la frecuencia de operación empleada al momento del decaimiento ($\Delta R/R$). El modelo de ajuste está dado por

$$I(f) = A e^{-\frac{f}{\nu}} = e^{-(\tau f + a_0)} \quad (3.2)$$

donde ν es el inverso del tiempo de vida, τ es el tiempo de vida, f es la frecuencia de operación del chopper óptico, y a_0 es el parámetro de ajuste tal que $e^{-a_0} = A$, que se relaciona con la cantidad de luz que el material absorbe. Para la toma de medidas, se tomaron rangos de 50Hz-3.95kHz y de 100 Hz-3.9 kHz con saltos de 100 Hz entre medidas. Para tener resultados más completos, se tomarán los espectros de emisión para observar si el material presenta cambios o su emisión se mantiene constante dependiendo del bombeo. Esto se realizará partiendo de la misma configuración utilizada para medir tiempos

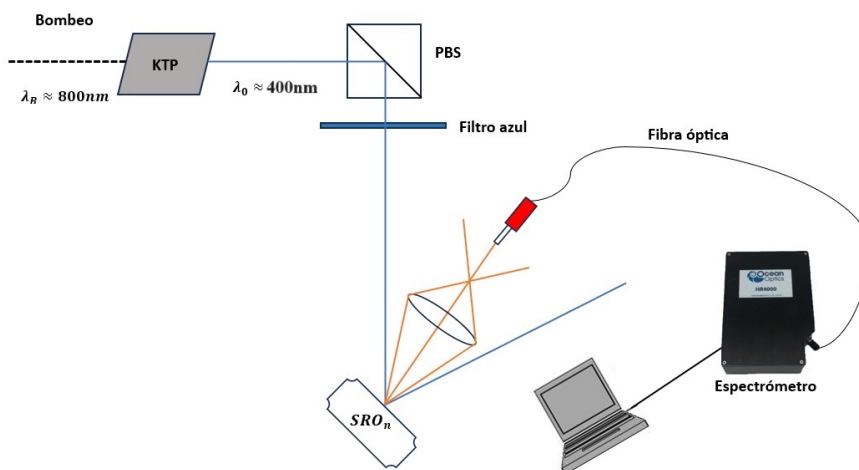


Figura 3.6: Arreglo experimental utilizado para medir espectros de emisión

de vida y se realizarán tres modificaciones importantes (como se puede ver en la figura 3.6): se remueve el chopper óptico del arreglo, Se coloca una lente biconvexa después de la muestra para enfocar la fluorescencia y se cambiará el fotodetector por un detector de fibra óptica que transmite de forma efectiva en un rango de 400 nm-2100 nm. El procesamiento de la emisión se realizará a partir de un espectrómetro Ocean Optics HR4000, el cuál puede medir en un rango de 200 nm-1100 nm con una resolución de 0.025 nm; y posteriormente se guardarán los datos por computadora utilizando el software del espectrómetro.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Durante la siguiente sección, se colocarán los resultados obtenidos en el proceso de experimentación para las dos muestras estudiadas y se realizarán conclusiones al respecto y se mencionará el trabajo a futuro.

4.1. Resultados

Al analizar los datos, se realizó el ajuste dado por la ecuación (3.2) y se obtuvieron los parámetros τ y A para distintas potencias de bombeo. Se analizaron dos muestras distintas: SRO₂₀ y SRO₃₀.

Para el SRO₂₀, se tomaron medidas en un rango de 400 nm-413 nm y se realizaron medidas a distintas potencias de salida. En la figura 4.1 se tiene un gráfico donde se muestra el cambio que hay en los tiempos de vida dependiendo de la potencia de bombeo y la potencia promedio de salida del laser titanio-zafiro.

Al analizar el cambio del tiempo de vida respecto a la longitud de onda de bombeo (figura 4.2), se puede notar que el tiempo de vida se encuentra en el rango de las decenas de microsegundos, siendo el valor más pequeño 63.9 μ s y el valor más grande 115.3 μ s. Algo que se puede notar es que existe la tendencia del tiempo de vida a la región de los 60 – 70 μ s conforme se aumenta

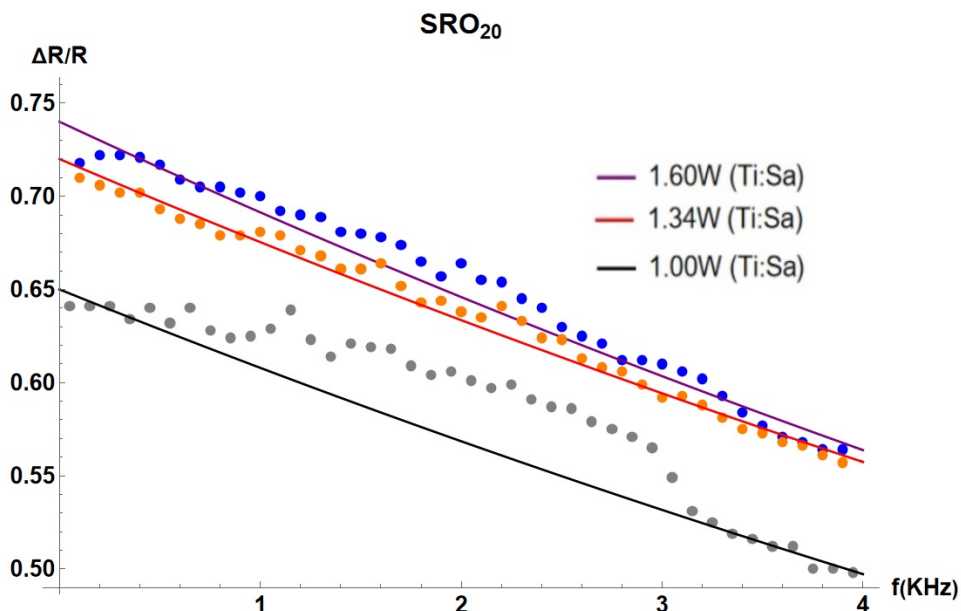


Figura 4.1: Intensidad normalizada del SRO₂₀ respecto a la frecuencia de operación del chopper. Se bombeó a 400.50 nm (negro), 400.50 nm (rojo) y 405.85 nm (morado); y a distintas potencias

la potencia. Adicionalmente, se puede notar que para una potencia constante, el tiempo de vida cambia dependiendo de la longitud de onda de bombeo.

Para tener más información respecto a estos cambios, se tomaron los espectros de emisión para las longitudes de onda estudiadas, donde se notó que la fotoluminiscencia del material se encuentra en una longitud de onda cercana a la longitud de onda del laser Titanio-Zafiro utilizado para la generación del segundo armónico. Se consideran dos casos dependiendo del parámetro constante y el parámetro variable.

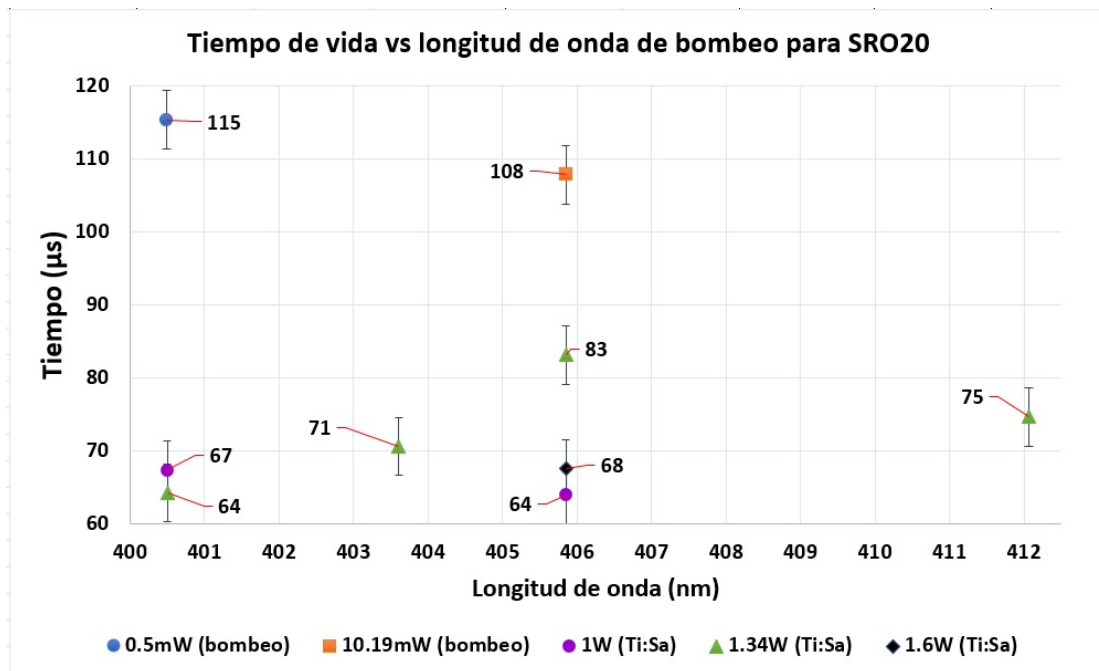


Figura 4.2: Gráfico de tiempo de vida respecto a longitud de onda de bombeo para el SRO₂₀.

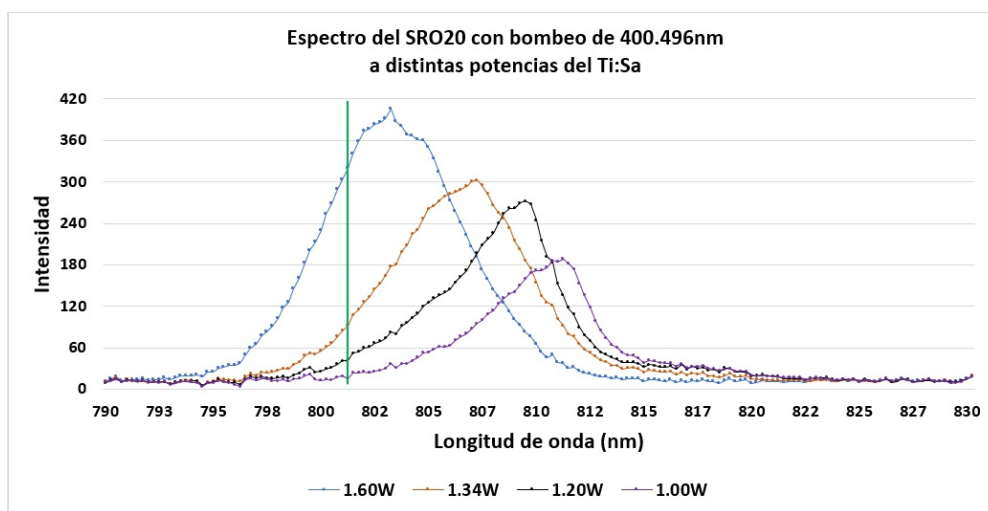


Figura 4.3: Espectro del SRO₂₀ con bombeo en 400.496 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.

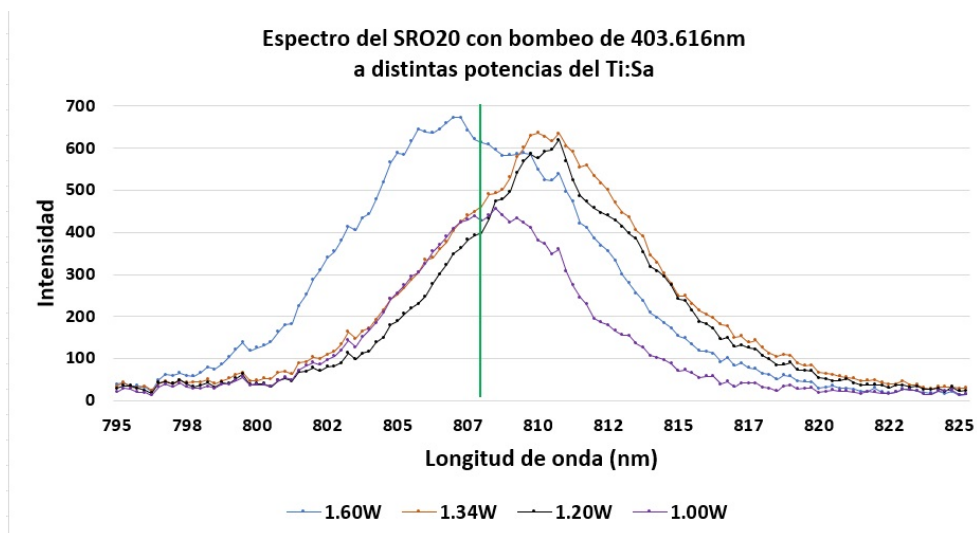


Figura 4.4: Espectro del SRO₂₀ con bombeo en 403.616 nm. La línea indica la longitud de onda del láser Ti:Sa.

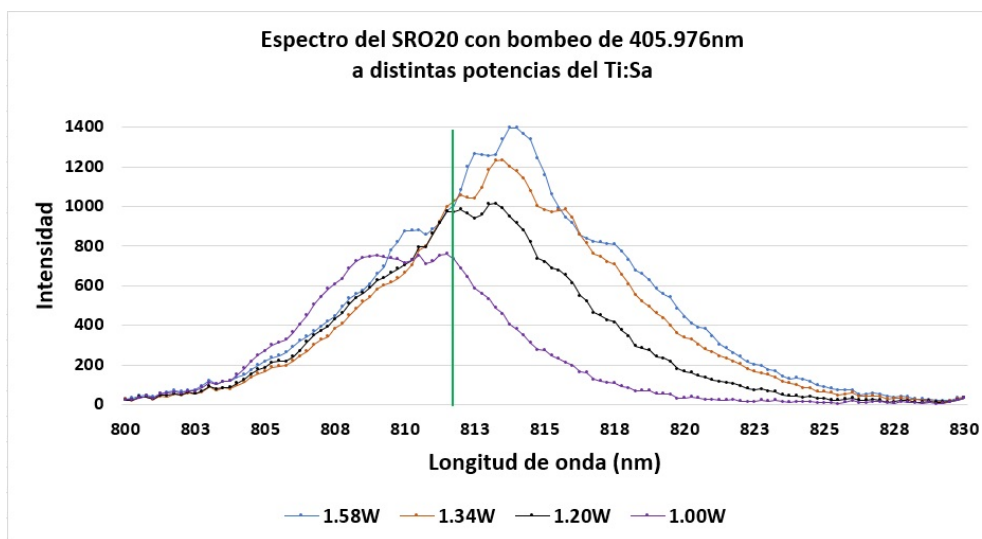


Figura 4.5: Espectro del SRO₂₀ con bombeo en 405.976 nm. La línea indica la longitud de onda del láser Ti:Sa.

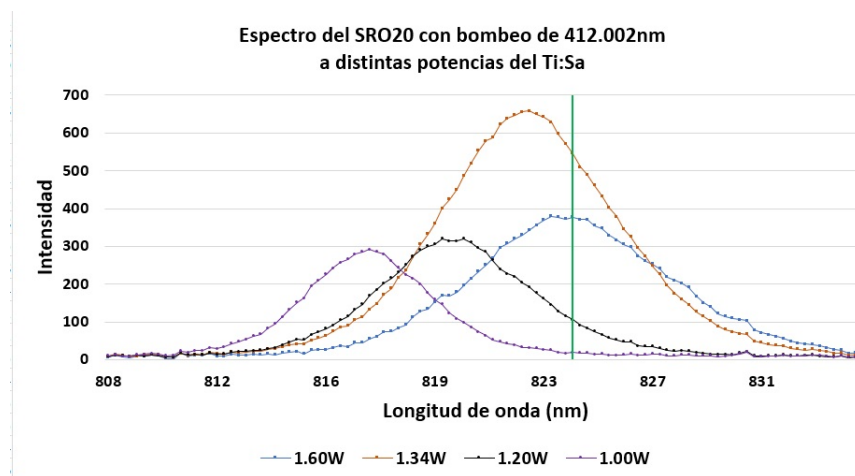


Figura 4.6: Espectro del SRO₂₀ con bombeo en 412.002 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.

Para la potencia de bombeo variable con longitud de onda de bombeo constante se obtuvieron los siguientes resultados

- Para la longitud de onda de bombeo de 400.496 nm, los espectros de emisión son de menor energía que la emisión fundamental, y aumentan de energía y se aumenta la potencia del laser fundamental (Ti:Sa) (figura 4.3).
- Para la longitud de onda de bombeo de 403.616 nm, los espectros de emisión son de menor energía que la emisión fundamental, y la fotoluminiscencia se mantiene entre 809-810 nm (figura 4.4).
- Para la longitud de onda de bombeo de 450.976 nm, los espectros son de menor energía a excepción de el de potencia más baja; y conforme aumenta la potencia del laser fundamental, la longitud de onda de la fotoluminiscencia disminuye (figura 4.5).
- Para la longitud de onda de bombeo de 412.002 nm, los espectros son de mayor energía que la emisión fundamental, y la longitud de onda disminuye cuando aumenta la potencia (figura 4.6).

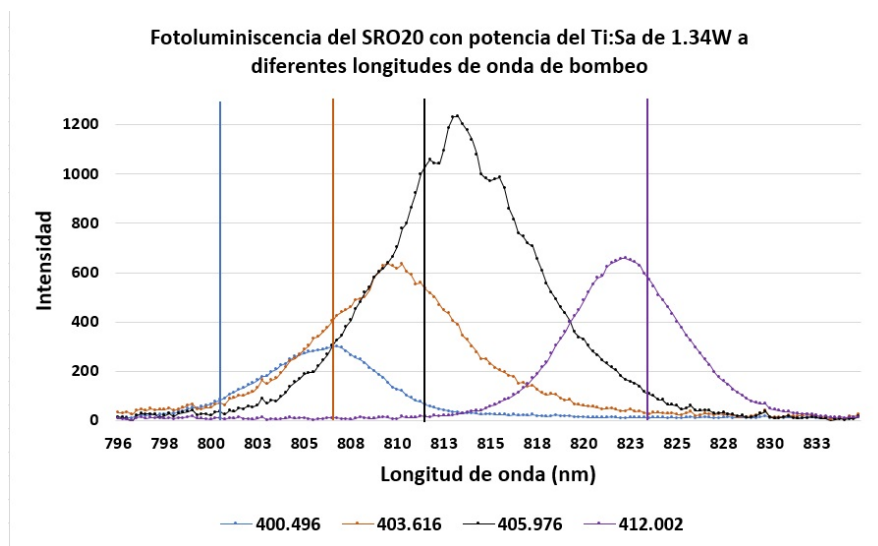


Figura 4.7: Espectro del SRO₂₀ con distintas longitudes de onda de bombeo. Las líneas indican la longitud de onda del laser Ti:Sa. para cada espectro.

Cuando se considera una potencia de bombeo constante y longitud de onda de bombeo variable, se puede ver que al aumentar la longitud de onda de bombeo, aumenta la longitud de onda de emisión y salvo la longitud de onda de 412.002 nm, la fotoluminiscencia tiene menor longitud de onda que la longitud de onda del laser fundamental (figura 4.7). Se puede ver la comparación del espectro con su respectivo tiempo de vida para ciertas potencias del laser Ti:Sa en la tabla 4.1.

Para el caso del SRO₃₀, se puede ver en la figura 4.8 que la tendencia es que el tiempo de vida disminuya ligeramente al aumentar la potencia promedio. Para el SRO₃₀, se tomó un rango de 397nm-412nm, donde se tienen valores de tiempos de vida entre 64 μ s y 129.4 μ s. Al igual que en el SRO₂₀ estos tiempos de vida son lo suficientemente grandes para considerar que el material realiza emisión laser, como se ha reportado en la literatura [4].

λ_{Bombeo} (nm)	Potencia Ti:Sa (W)	τ (μ s)	$\lambda_{Emisión}$ (nm)
400.496	1.00	67 ± 4	811.205
400.496	1.34	64 ± 4	807.471
403.616	1.34	71 ± 4	810.707
405.976	1.34	88 ± 4	813.694
405.976	1.60	68 ± 4	813.943
412.002	1.34	75 ± 4	822.645

Tabla 4.1: Datos de emisión del SRO₂₀ respecto a distintas potencias de salida del laser Ti:Sa.

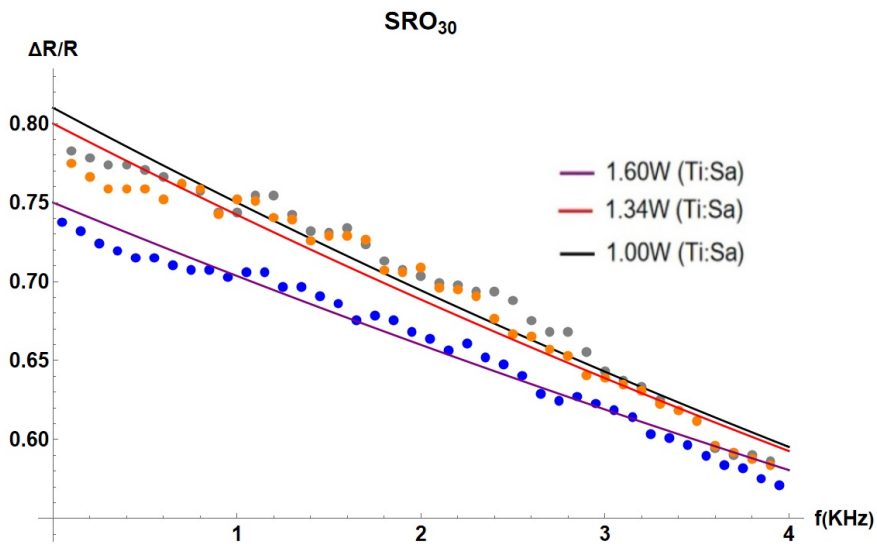


Figura 4.8: Intensidad normalizada del SRO₃₀ respecto a la frecuencia. Se bombeó a 406.475nm en distintas potencias.

Asimismo, se puede ver en las figuras 4.9 y 4.10 que a potencias promedio bajas (menores a 15 mW), los tiempos de vida superan los 100 μ s mientras que al aumentar la potencia, el tiempo de vida se acerca a los 70 μ s.

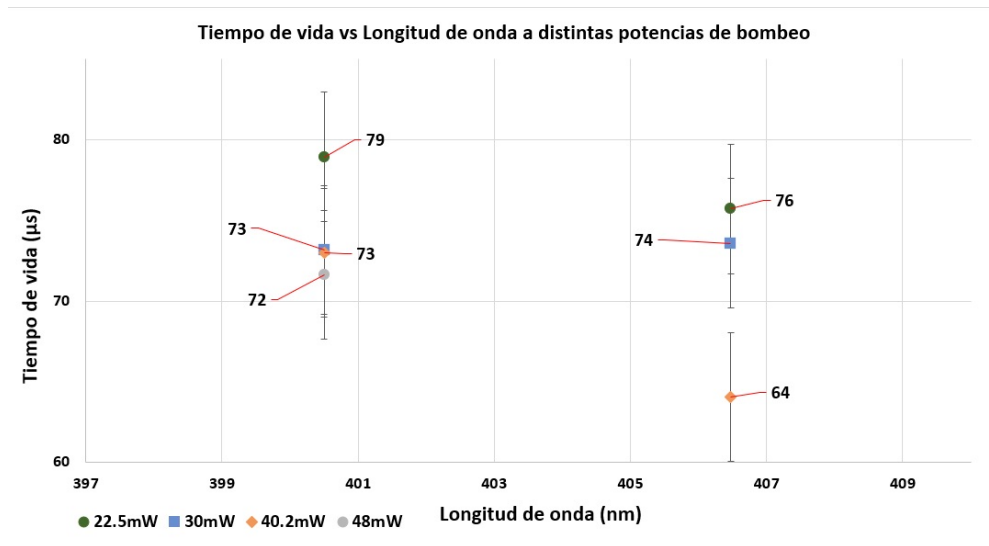


Figura 4.9: Cambio del tiempo de vida del SRO₃₀ respecto a la longitud de onda a distintas potencias. Se coloca un rango de 60-90 µs.

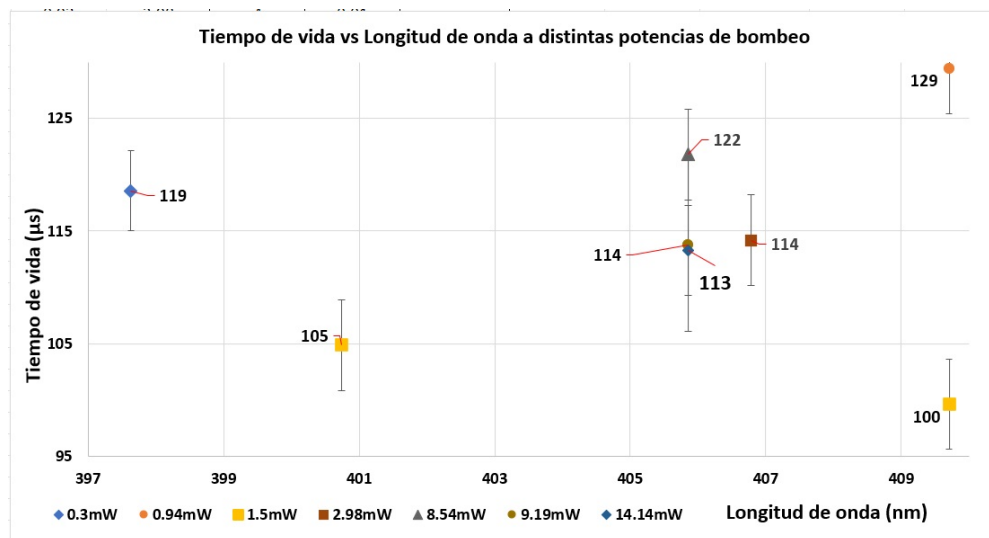


Figura 4.10: Cambio del tiempo de vida del SRO₃₀ respecto a la longitud de onda a distintas potencias. Se coloca un rango de 95-130 µs.

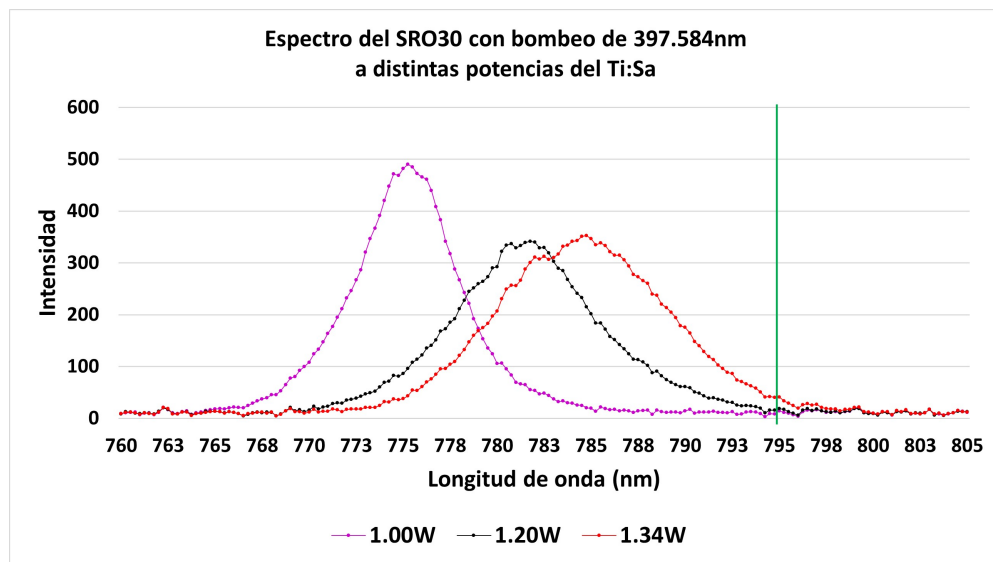


Figura 4.11: Espectro del SRO₃₀ con bombeo en 397.584 nm. La línea indica la longitud de onda del láser Ti:Sa.

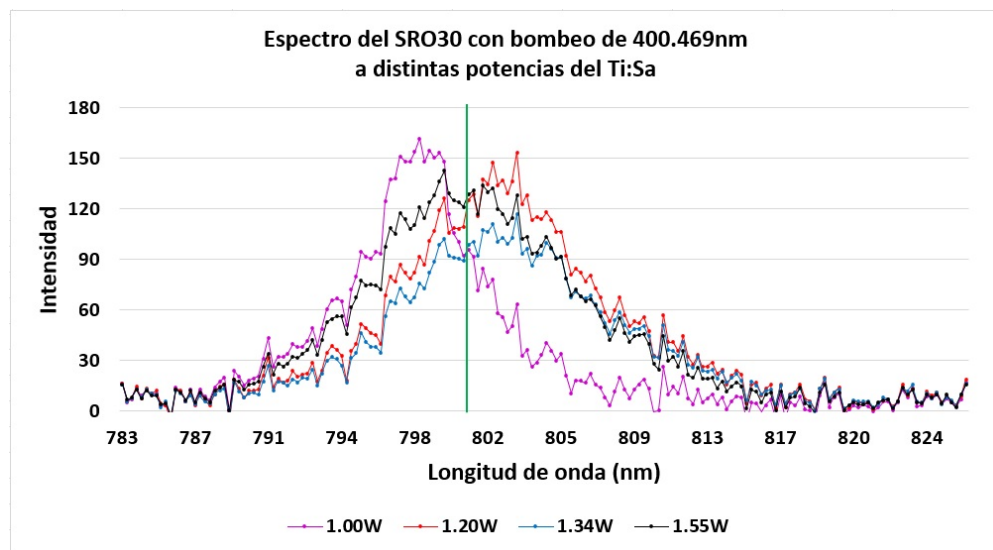


Figura 4.12: Espectro del SRO₃₀ con bombeo en 400.469 nm. La línea indica la longitud de onda del láser Ti:Sa.

Al analizar los espectros de emisión, se obtuvieron resultados similares a los obtenidos en el SRO₂₀ con la diferencia que cuando el material se bombeó a 397.584nm, la longitud de onda de emisión cambia considerablemente respecto

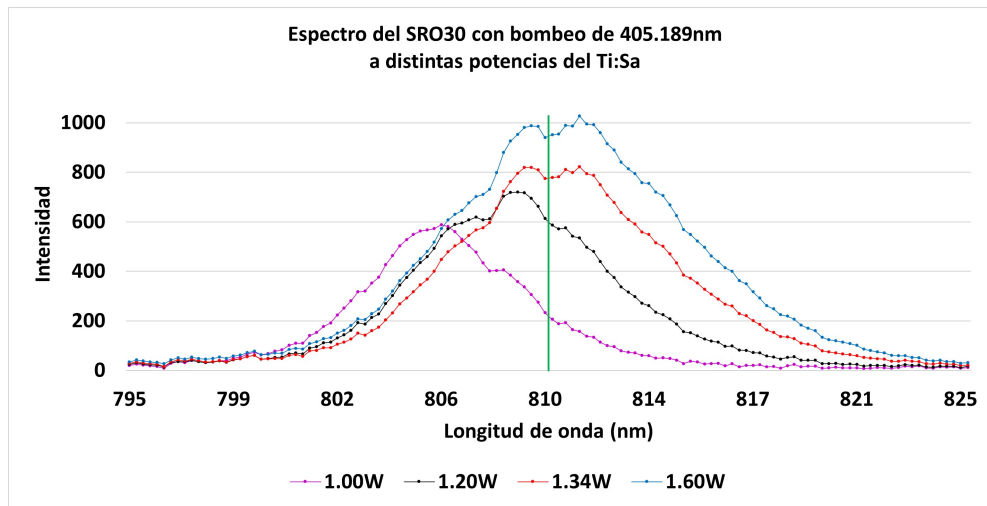


Figura 4.13: Espectro del SRO₃₀ con bombeo en 405.189 nm. La línea indica la longitud de onda del láser Ti:Sa.

a los otros datos. Para un longitud de onda constante y potencia variable, se obtuvieron los siguientes resultados

- Para la longitud de onda de bombeo de 397.584 nm, la longitud de onda de la emisión aumenta con la potencia y se aproxima a la longitud de onda fundamental (figura 4.11).
- Para la longitud de onda de bombeo de 400.469 nm, la longitud de onda se mantiene alrededor de los 803 nm; a excepción de la potencia más baja, donde la longitud de emisión es de 798.251 nm (figura 4.12).
- Para la longitud de onda de bombeo de 405.189 nm, la longitud de onda se mantiene cercana a la longitud de onda fundamental (figura 4.13).
- Para la longitud de onda de bombeo de 406.475 nm, la longitud de onda de emisión se mantiene alrededor 813.694 nm; a excepción de la potencia más baja ,donde la longitud de onda de emisión es de 808.965nm (figura 4.14)

En la tabla 4.2 se muestran los datos del espectro con sus respectivos tiempo de vida.

λ_{Bombeo} (nm)	Potencia Ti:Sa (W)	τ (μ s)	$\lambda_{Emisión}$ (nm)
400.469	1.00	73 ± 4	798.251
400.469	1.34	73 ± 4	803.485
400.469	1.60	72 ± 4	801.492
406.475	0.75	76 ± 4	808.965
406.475	1.00	74 ± 4	813.694
406.475	1.34	64 ± 4	813.943

Tabla 4.2: Datos de emisión del SRO₃₀ respecto a distintas potencias de salida del laser Ti:Sa.

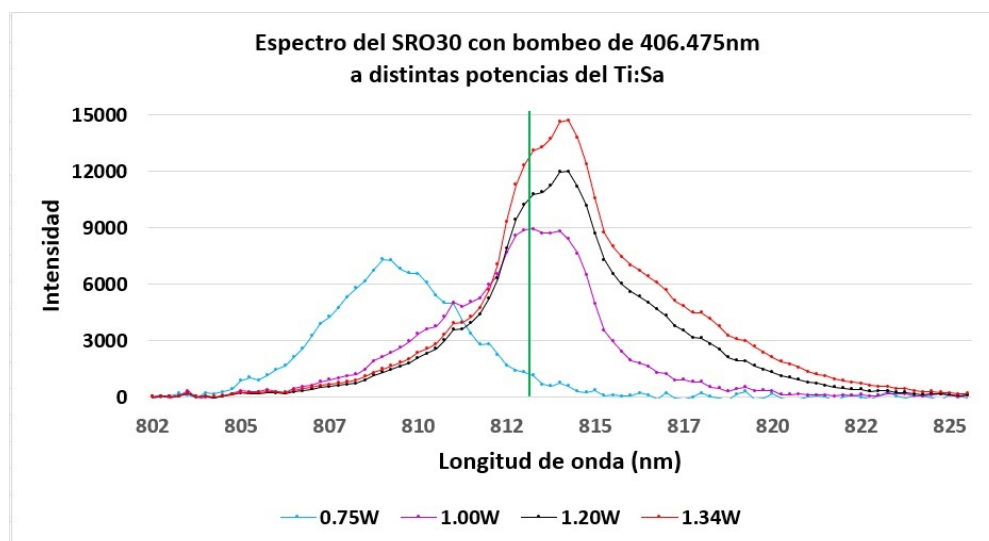


Figura 4.14: Espectro del SRO₃₀ con bombeo en 406.475 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.

4.2. Conclusiones

Tomando en cuenta los datos obtenidos para los materiales SRO₂₀ y SRO₃₀, se pueden obtener conclusiones importantes respecto tres aspectos: los tiempos de vida, el parámetro A y los espectros de emisión

- Los tiempos de vida varían dependiendo de la potencia utilizada para bombear el material, aproximándose al rango entre 60-70 μ s cuando aumenta la potencia. El rango sobre todas las medidas es de 64-129 μ s para SRO₃₀ y un rango de 64-115 μ s para SRO₂₀.
- Los tiempos de vida para ambos materiales se encuentran en el orden de los microsegundos, estando mayoritariamente entre los 60-70 μ s, tal como se reporta en la literatura [4]. Asimismo, se reportan tiempos de vida más grandes para ciertas condiciones donde la potencia promedio de bombeo disminuye.
- El parámetro A (y α_0) varía ligeramente dependiendo de la potencia de bombeo, teniendo una variación promedio de 0.01 para una potencia constante en ambas muestras, una variación de 0.07 sobre todos los datos tomados para SRO₃₀ y una variación de 0.09 sobre todos los datos tomados para SRO₂₀.
- Los espectros de emisión cambian respecto a la potencia y su longitud de onda es cercana a la longitud de onda de salida del laser Ti:Sa ocupado para generar segundo armónico.

Si bien los tiempos de vida son lo suficientemente largos, el análisis de los espectros de emisión indica que en el material no ocurre fluorescencia exclusivamente, sino que existen fenómenos no lineales en conjunto; específicamente se puede notar que el comportamiento de los espectros es similar a la generación paramétrica, por lo que no se puede concluir que exista emisión laser en el

material exclusivamente. Notando estos comportamientos, el trabajo a futuro es sistematizar el proceso de medida de los espectros utilizando muestras frescas tanto de SRO_{20} como de SRO_{30} para descartar que haya cambios estructurales debido al tiempo que tienen las muestras y reportar a qué se deben los cambios en el espectro de emisión.

cavidad equivalente de dos lentes, como se muestra en la figura A.2. La tabla A.1 muestra todos los valores de los parámetros de la cavidad equivalente.

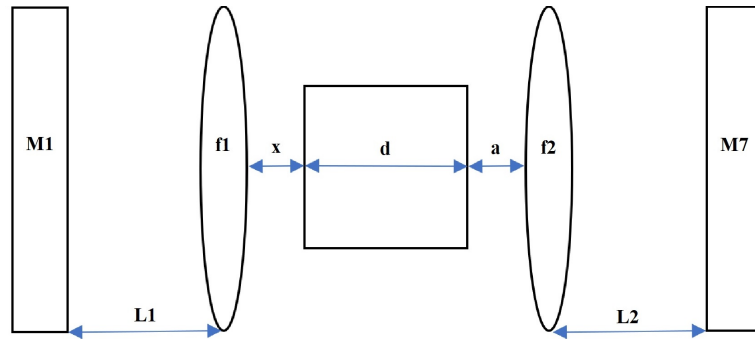


Figura A.2: Cavidad equivalente de dos lentes para el láser Ti:Zafiro

Para caracterizar el láser, se aplicará el análisis de la matriz de transferencia para obtener la cintura del haz de la cavidad sin el medio activo; después el radio del haz y su posición dentro del medio. Usando la figura A.2, se obtiene la matriz de transferencia de la cavidad sin considerar el medio

Parámetro	Símbolo	Valor
Espejo acoplador de salida	M_1	
Espejo altamente reflejante	M_7	
Distancia focal de la lente 1	f_1	5 cm
Distancia focal de la lente 2	f_2	5 cm
Distancia entre M_1 y la lente 1	L_1	90.5 ± 0.1 cm
Distancia entre M_7 y la lente 2	L_2	94 ± 0.1 cm
Distancia entre el medio Kerr y la lente 1	x	4.4 cm
Distancia entre el medio Kerr y la lente 2	a	5.241 cm
Longitud del medio Kerr	d	2 ± 0.2 cm
Índice de refracción lineal del medio activo	n_0	1.76
Longitud de onda	λ	800 nm
Diámetro de la cintura del haz de bombeo	ω_0	0.4 mm

Tabla A.1: Valores de la cavidad equivalente del manual de Coherent

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

Considerando las condiciones $z_1 = L_1$, $q_1 = z_1 + iz_0$ y la ecuación (1.56), se obtiene el parámetro q

$$q = \frac{q_1 A + B}{q_1 C + D} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f_1} + 1} = \frac{q_1 f_1}{-q_1 + f_1} \tag{A.2}$$

donde, como se vio previamente en la ecuación (1.52)

$$z_0 = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$$

Luego, relacionando la distancia de Rayleigh (1.52) y el parámetro q , se obtiene la cintura del haz ω_1

$$\begin{aligned} \frac{\pi\omega_1^2}{\lambda} &= \text{Im}[q] = \text{Im} \left[\frac{q_1 f_1}{-q_1 + f_1} \right] \\ \rightarrow \omega_1 &= \left(\frac{\lambda}{\pi} \text{Im} \left[\frac{q_1 f_1}{-q_1 + f_1} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Si ahora calculamos la cintura del haz de la cavidad incluyendo el medio activo, la matriz de transferencia es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & d' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{f_1} - \frac{d'}{n_0 f_1} & x + \frac{d'}{n_0} \\ -\frac{1}{n_0 f_1} & \frac{1}{n_0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Usando las condiciones $z_1 = L_1$, $q_1 = z_1 + iz_0$, se calcula el parámetro q_2 utilizando la ecuación (1.56). Si

$$\begin{aligned} z_2 = 0 &= \text{Re}[q_2] = \text{Re} \left[\frac{q_1 A + B}{q_1 C + D} \right] = \\ \text{Re} \left[\frac{q_1 \left(1 - \frac{x}{f_1} - \frac{d'}{n_0 f_1} \right) + x + \frac{d'}{n_0}}{q_1 \left(\frac{1}{n_0 f_1} \right) + \frac{1}{n_0}} \right] & \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Entonces, expandiendo el resultado

$$\begin{aligned} (Az_1 + B)(Cz_1 + D) + z_0^2 AC &= 0 \\ \rightarrow \left[\left(1 - \frac{x}{f_1} - \frac{d'}{n_0 f_1} \right) L_1 + x + \frac{d'}{n_0} \right] \left[-\frac{L_1}{n_0 f_1} + \frac{1}{n_0} \right] \\ - z_0^2 \left[1 - \frac{x}{f_1} - \frac{d'}{n_0 f_1} \right] \left[\frac{1}{n_0 f_1} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Al resolver la ecuación (A.6) para d' , se obtiene la posición del spot dentro del medio activo. Por otro lado, para obtener la cintura del haz ω_2 , se sigue el mismo procedimiento aplicado para el nuevo parámetro: relacionamos la

distancia de Rayleigh de las ecuaciones (1.52) y (A.5)

$$\begin{aligned} \frac{\pi\omega_2^2}{\lambda} &= \text{Im}[q_2] = \text{Im} \left[\frac{q_1 \left(1 - \frac{x}{f1} - \frac{d'}{n_0 f1} \right) + x + \frac{d'}{n_0}}{q_1 \left(\frac{1}{n_0 f1} \right) + \frac{1}{n_0}} \right] \\ \rightarrow \omega_2 &= \left(\frac{\lambda}{\pi} \text{Im} \left[\frac{q_1 \left(1 - \frac{x}{f1} - \frac{d'}{n_0 f1} \right) + x + \frac{d'}{n_0}}{q_1 \left(\frac{1}{n_0 f1} \right) + \frac{1}{n_0}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Si calculamos el radio de haz ω_c en el centro del medio

$$\omega_c = \omega_2 \left[1 + \left(\frac{\frac{d}{2} - |\text{Re}[q_2]|}{\text{Im}[q_2]} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.8})$$

Luego, usando las ecuaciones (A.7) y (A.8), se puede calcular el parámetro γ .

Considerando valores pequeños para P/P_c

$$\gamma = \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi\omega_c^2 n_0}{\lambda d} - \frac{\lambda d}{2\pi\omega_0^2 n_0} \right)^2 \right]^{-1} \frac{P}{P_c}, \quad \frac{P}{P_c} = 0,1,0,2,0,3 \quad (\text{A.9})$$

Después, se calcula la matriz M_k

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma}{2} & -\frac{\gamma d}{4n_0} \\ -\frac{\gamma n_0}{d} & 1 - \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Debido a que se tiene un medio Kerr, la cintura del haz está en función de γ . Usando el parámetro q_2 y la matriz M_k como matriz de transferencia, se calcula el parámetro q_k

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{q_2 A + B}{q_2 C + D} = \frac{q_2 \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{\gamma d}{4n_0}}{-\frac{q_2 \gamma n_0}{d} + 1 - \frac{\gamma}{2}} = \frac{q_2 \left(\frac{2-\gamma}{2} \right) - \frac{\gamma d}{4n_0}}{-\frac{q_2 \gamma n_0}{d} + \frac{2-\gamma}{2}} \\ &= \frac{d \left(q_2 (2-\gamma) - \frac{\gamma d}{2n_0} \right)}{2q_2 \gamma n_0 + d(2-\gamma)} = \frac{d}{2n_0} \left(\frac{2n_0 q_2 (2-\gamma) - \gamma d}{2q_2 \gamma n_0 + d(2-\gamma)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Luego, la cintura del haz en función de γ es

$$\omega_k(\gamma) = \left(\frac{\lambda}{\pi} \text{Im}[q_k] \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{d\lambda}{2\pi n_0} \text{Im} \left[\frac{2n_0 q_2 (2-\gamma) - \gamma d}{2q_2 \gamma n_0 + d(2-\gamma)} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.12})$$

Si se calcula el radio de curvatura del haz en función de γ

$$R(\gamma) = \text{Re}[q_k(\gamma)] \left[1 + \left(\frac{\text{Im}[q_k(\gamma)]}{\text{Re}[q_k(\gamma)]} \right)^2 \right] \quad (\text{A.13})$$

GENERACIÓN DE SEGUNDO ARMÓNICO

Para estudiar efectos no lineales, recordemos las ecuaciones de Maxwell aplicadas dentro de un medio

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{D} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\end{aligned}$$

donde

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \quad \vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (\text{B.1})$$

para $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, y $\vec{M} = 0$, las ecuaciones cambian a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Al aplicar el rotacional a $\nabla \times \vec{E}$

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{H})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Teniendo en cuenta la propiedad

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

si $\nabla \cdot \vec{E} \approx 0$, la ecuación se reduce a

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (\text{B.3})$$

Es posible escribir \vec{P} en términos de \vec{E} usando la relación constitutiva para \vec{D} [30]

$$\vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 (n^2 - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (\text{B.4})$$

donde n es el índice de refracción. La última ecuación indica que los vectores unitarios para \vec{E} y \vec{P} son los mismos, así que podemos escribir la ecuación de onda de forma escalar

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (\text{B.5})$$

Para un medio no lineal, la magnitud del vector de polarización en la ecuación de onda (B.5) se divide en un término lineal y un término no lineal

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \left(\sum_j \chi_j^{(1)} E_j + \sum_{jk} \chi_{jk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{jkl} \chi_{jkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right) \\ &= \epsilon_0 \sum_j \chi_j^{(1)} E_j + P_{\text{NL}} = P_L + P_{\text{NL}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

por lo que se puede escribir la ecuación de onda (considerando $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$) como

$$\begin{aligned} \nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\text{NL}}}{\partial t^2} \\ \rightarrow \nabla^2 E - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\text{NL}}}{\partial t^2} \\ \rightarrow \nabla^2 E - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\text{NL}}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Al utilizar la relación constitutiva (B.4) para D , se obtiene la ecuación de onda no lineal

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\text{NL}}}{\partial t^2} \quad (\text{B.8})$$

Para estudiar la generación de segundo armónico, sólo se considerará el primer término no lineal

$$P^{NL} = \epsilon_0 \sum_j \sum_k \chi_{jk}^{(2)} E_j E_k \quad (B.9)$$

donde $\chi_{jk}^{(2)}$ (un tensor) es la susceptibilidad no lineal de segundo orden del medio. Si se parte de la mezcla de tres ondas, el campo eléctrico está dado por

$$E = A_1 e^{-i(\kappa_1 z - \omega_1 t)} + A_2 e^{-i(\kappa_2 z - \omega_2 t)} + A_3 e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \\ + A_1^* e^{i(\kappa_1 z - \omega_1 t)} + A_2^* e^{i(\kappa_2 z - \omega_2 t)} + A_3^* e^{i(\kappa_3 z - \omega_3 t)}$$

Ya que $E_{ij} = E_{ji}$, entonces

$$EE = A_1 A_1 e^{-2i(\kappa_1 z - \omega_1 t)} + A_1 A_2 e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t]} \\ + A_1 A_3 e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_3)z - (\omega_1 + \omega_3)t]} + A_2 A_1 e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t]} \\ + A_2 A_2 e^{-2i(\kappa_2 z - \omega_2 t)} + A_2 A_3 e^{-i[(\kappa_2 + \kappa_3)z - (\omega_2 + \omega_3)t]} \\ + A_3 A_1 e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_3)z - (\omega_1 + \omega_3)t]} + A_3 A_2 e^{-i[(\kappa_2 + \kappa_3)z - (\omega_2 + \omega_3)t]} \\ + A_3 A_3 e^{-2i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} + A_1 A_1^* + A_1 A_2^* e^{-i[(\kappa_1 - \kappa_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t]} \\ + A_1 A_3^* e^{-i[(\kappa_1 - \kappa_3)z - (\omega_1 - \omega_3)t]} + A_2 A_1^* e^{-i[(\kappa_2 - \kappa_1)z - (\omega_2 - \omega_1)t]} + A_2 A_2^* \\ + A_2 A_3^* e^{-i[(\kappa_2 - \kappa_3)z - (\omega_2 - \omega_3)t]} + A_3 A_1^* e^{-i[(\kappa_3 - \kappa_1)z - (\omega_3 - \omega_1)t]} \\ + A_3 A_2^* e^{-i[(\kappa_3 - \kappa_2)z - (\omega_3 - \omega_2)t]} + A_3 A_3^* + c.c \quad (B.10)$$

donde "c.c" son los complejos conjugados de los términos mostrados. Las condiciones de frecuencia y acoplamiento de fase son

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2, \quad \vec{\kappa}_3 = \vec{\kappa}_1 + \vec{\kappa}_2 \quad (B.11)$$

Al sustituir la condición (B.11) para ω_3 y reducir términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
EE &= A_1 A_1 e^{-2i[(\kappa_3 - \kappa_2)z - (\omega_3 - \omega_2)t]} + 2A_1 A_2 e^{-i[\kappa_3 z - \omega_3 t]} \\
&+ 2A_1 A_3 e^{-i[(2\kappa_3 - \kappa_2)z - (2\omega_3 - \omega_2)t]} + A_2 A_2 e^{-2i[(\kappa_3 - \kappa_1)z - (\omega_3 - \omega_1)t]} \\
&+ 2A_2 A_3 e^{-i[(2\kappa_3 - \kappa_1)z - (2\omega_3 - \omega_1)t]} + A_3 A_3 e^{-2i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \\
&+ A_1 A_1^* + 2A_1 A_2^* e^{-i[(\kappa_3 - 2\kappa_2)z - (\omega_3 - 2\omega_2)t]} + 2A_1 A_3^* e^{-i[(\kappa_1 - \kappa_3)z - (\omega_1 - \omega_3)t]} \\
&+ A_2 A_2^* + 2A_2 A_3^* e^{-i[(\kappa_2 - \kappa_3)z - (\omega_2 - \omega_3)t]} + A_3 A_3^* + c.c
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Cuando se resuelve la ecuación para un campo de frecuencia ω_3 , la solución del campo eléctrico tiene la forma

$$E_3(z, t) = A_3 e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} + c.c \tag{B.13}$$

donde

$$\kappa_3 = \frac{n_3 \omega_3}{c}, \quad n_3^2 = \epsilon^L(\omega_3)$$

La solución para la polarización que cumple con la condición de frecuencia (B.11) es

$$P_3(z, t) = 4\epsilon_0 d_{\text{eff}} E_1 E_2^* = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} E_1 E_2^* \tag{B.14}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (B.13) y (B.14) en la ecuación de onda (B.8), los términos serán

$$\begin{aligned}
\nabla^2 E_3 &= \frac{d^2 E_3}{dz^2} = \frac{d^2 \left(A_3 e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \right)}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{dA_3}{dz} - i\kappa_3 A_3 \right) e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \right] = \\
&\frac{d}{dz} \left(\frac{dA_3}{dz} e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \right) - i\kappa_3 \frac{d}{dz} \left(A_3 e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \right) = \\
&\frac{d^2 A_3}{dz^2} e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} - 2i\kappa_3 \frac{dA_3}{dz} e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} - \kappa_3^2 A_3 e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(A_3 e^{i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \right) = A_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(e^{i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \right) = \\
&-i\omega_3 A_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \right) = -\omega_3^2 A_3 e^{i(\kappa_3 z - \omega_3 t)};
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} A_1 A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_2)z - \omega_3 t]}) = -2\omega_3^2 \epsilon_0 \chi^{(2)} A_1 A_2 e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_2)z - \omega_3 t]},$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \left[\frac{d^2 A_3}{dz^2} + 2i\kappa_3 \frac{dA_3}{dz} - \left(\kappa_3^2 - \frac{n^2 \omega_3^2}{c^2} \right) A_3 \right] e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} = \\ & \left[\frac{d^2 A_3}{dz^2} - 2i\kappa_3 \frac{dA_3}{dz} \right] e^{-i(\kappa_3 z - \omega_3 t)} \end{aligned}$$

y

$$\mu_0 \frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} = -2\omega_3^2 \epsilon_0 \mu_0 \chi^{(2)} A_1 A_2 e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_2)z - \omega_3 t]} = -2 \frac{\omega_3^2 \chi^{(2)}}{c^2} A_1 A_2 e^{-i[(\kappa_1 + \kappa_2)z - \omega_3 t]}$$

Luego

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d^2 A_3}{dz^2} - 2i\kappa_3 \frac{dA_3}{dz} &= -\frac{2\omega_3^2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{c^2} A_1 A_2 e^{-i(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3)z} \\ \rightarrow \frac{d^2 A_3}{dz^2} - 2i\kappa_3 \frac{dA_3}{dz} &= -\frac{2\omega_3^2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{c^2} A_1 A_2 e^{-i\Delta \kappa z} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Si se considera

$$\frac{d^2 A_3}{dz^2} \ll \kappa_3 \frac{dA_3}{dz}$$

la ecuación (B.15) se reduce a

$$\frac{dA_3}{dz} = -i \frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_3 c} A_1 A_2 e^{-i\Delta \kappa z} \quad (\text{B.16})$$

Para A_1 y A_2 , las ecuaciones siguen un proceso similar

$$\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$$

$$\rightarrow P_1(z, t) = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} E_2^* E_3 \rightarrow \frac{dA_1}{dz} = -i \frac{\omega_1 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_1 c} A_2^* A_3 e^{i\Delta \kappa z} \quad (\text{B.17})$$

$$\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$$

$$\rightarrow P_2(z, t) = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} E_1^* E_3 \rightarrow \frac{dA_2}{dz} = -i \frac{\omega_2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_1 c} A_1^* A_3 e^{i\Delta \kappa z} \quad (\text{B.18})$$

Ahora, resolviendo (B.16) para A_3 y considerando $A_3(z=0) = 0$

$$\begin{aligned}
 dA_3 &= -i \frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_3 c} A_1 A_2 e^{-i\Delta\kappa z} dz \\
 \rightarrow \int_{A_3(z=0)}^{A_3(L)} dA_3 &= -i \frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_3 c} A_1 A_2 \int_0^L e^{-i\Delta\kappa z} dz \\
 \rightarrow A_3(L) &= \frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_3 c} A_1 A_2 \frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L}
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

Luego, se puede obtener la intensidad óptica

$$\begin{aligned}
 |A_3(L)|^2 &= \left| \frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)} L}{n_3 c} A_1 A_2 \left[\frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L} \right] \right|^2 = |C|^2 \left| \frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L} \right|^2 = \\
 &= \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 |e^{-i\Delta\kappa L} - 1|^2 = \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 (1 - e^{-i\Delta\kappa L} - e^{i\Delta\kappa L} + 1) = \\
 &= \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 [2 - (e^{-i\Delta\kappa L} + e^{i\Delta\kappa L})] = 2 \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 (1 - \cos(\Delta\kappa L)) = \\
 &= \left| \frac{2C}{\Delta\kappa L} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = |C|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = \\
 &= \frac{\omega_3^2 \epsilon_0^2 \chi^{(2)2} L^2}{c^2 n_3^2} |A_1 A_2|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = I_3^{\text{MAX}} \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

Cuando se cumplen las condiciones de acoplamiento de fase ($\Delta\kappa = 0$)

$$|A_3(L)|^2 = \left(\frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)} L}{n_3 c} \right)^2 |A_1 A_2|^2 = I_3^{\text{MAX}} \tag{B.21}$$

Siguiendo el mismo proceso para las ecuaciones (B.17) y (B.18) para obtener A_1 y A_2 respectivamente

$$\begin{aligned}
 dA_1 &= -i \frac{\omega_1 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_1 c} A_2^* A_3 e^{-i\Delta\kappa z} dz \\
 \rightarrow \int_{A_1(z=0)}^{A_1(L)} dA_1 &= -i \frac{\omega_1 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_1 c} A_2^* A_3 \int_0^L e^{-i\Delta\kappa z} dz \\
 \rightarrow A_1(L) &= \frac{\omega_1 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_1 c} A_2^* A_3 \frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L},
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
 dA_2 &= -i \frac{\omega_2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_2 c} A_1^* A_3 e^{-i\Delta\kappa z} dz \\
 \rightarrow \int_{A_2(z=0)}^{A_2(L)} dA_2 &= -i \frac{\omega_2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_2 c} A_1^* A_3 \int_0^L e^{-i\Delta\kappa z} dz \\
 \rightarrow A_2(L) &= \frac{\omega_2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_2 c} A_1^* A_3 \frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

y las intensidades ópticas son respectivamente

$$\begin{aligned}
 |A_1(L)|^2 &= \left| \frac{\omega_1 \epsilon_0 \chi^{(2)} L}{n_1 c} A_2^* A_3 \left[\frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L} \right] \right|^2 = |C|^2 \left| \frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L} \right|^2 = \\
 &= \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 |e^{-i\Delta\kappa L} - 1|^2 = \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 (1 - e^{-i\Delta\kappa L} - e^{i\Delta\kappa L} + 1) = \\
 &= \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 [2 - (e^{-i\Delta\kappa L} + e^{i\Delta\kappa L})] = 2 \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 (1 - \cos(\Delta\kappa L)) = \\
 &= \left| \frac{2C}{\Delta\kappa L} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = |C|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = \\
 &= \frac{\omega_1^2 \epsilon_0^2 \chi^{(2)2} L^2}{c^2 n_1^2} |A_2^* A_3|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = I_1^{\text{MAX}} \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
 |A_2(L)|^2 &= \left| \frac{\omega_2 \epsilon_0 \chi^{(2)} L}{n_2 c} A_1^* A_3 \left[\frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L} \right] \right|^2 = |C|^2 \left| \frac{e^{-i\Delta\kappa L} - 1}{\Delta\kappa L} \right|^2 = \\
 &= \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 |e^{-i\Delta\kappa L} - 1|^2 = \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 (1 - e^{-i\Delta\kappa L} - e^{i\Delta\kappa L} + 1) = \\
 &= \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 [2 - (e^{-i\Delta\kappa L} + e^{i\Delta\kappa L})] = 2 \left| \frac{C}{\Delta\kappa L} \right|^2 (1 - \cos(\Delta\kappa L)) = \\
 &= \left| \frac{2C}{\Delta\kappa L} \right|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = |C|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = \\
 &= \frac{\omega_2^2 \epsilon_0^2 \chi^{(2)2} L^2}{c^2 n_2^2} |A_1^* A_3|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right) = I_2^{\text{MAX}} \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\kappa L}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

¿Qué ocurre cuando se buscan variaciones espaciales de la intensidad? para cada haz

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_3}{dz} &= \frac{d}{dz} (A_3 A_3^*) = A_3 \frac{dA_3^*}{dz} + \frac{dA_3}{dz} A_3^* = \\
 &= i \frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_3 c} A_1^* A_2^* A_3 e^{i\Delta\kappa z} - i \frac{\omega_3 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_3 c} A_1 A_2 A_3^* e^{-i\Delta\kappa z},
 \end{aligned}$$

$$\frac{dI_1}{dz} = \frac{d}{dz}(A_1 A_1^*) = A_1 \frac{dA_1^*}{dz} + \frac{dA_1}{dz} A_1^* =$$

$$i \frac{\omega_1 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_1 c} A_1 A_2 A_3^* e^{-i\Delta\kappa z} - i \frac{\omega_1 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_1 c} A_1^* A_2^* A_3 e^{i\Delta\kappa z},$$

$$\frac{dI_2}{dz} = \frac{d}{dz}(A_2 A_2^*) = A_2 \frac{dA_2^*}{dz} + \frac{dA_2}{dz} A_2^* =$$

$$i \frac{\omega_2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_2 c} A_1 A_2 A_3^* e^{-i\Delta\kappa z} - i \frac{\omega_2 \epsilon_0 \chi^{(2)}}{n_2 c} A_1^* A_2^* A_3 e^{i\Delta\kappa z},$$

Analizando las tres expresiones y considerando $n_1 = n_2 = n_3$, se obtienen las igualdades

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{I_3}{\omega_3} \right) \quad (\text{B.26})$$

Esto permite obtener tres relaciones conocidas como las relaciones Manley-Rowe

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} + \frac{I_3}{\omega_3} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Relaciones Manley-Rowe}$$

Este resultado permite obtener tres invariantes espaciales

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2} \\ M_2 &= \frac{I_1}{\omega_1} + \frac{I_3}{\omega_3} \\ M_3 &= \frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Por otro lado, si se agrega la condición $\omega_1 = \omega_2$ y se cumplen las condiciones de acoplamiento de fase, vemos que

$$\Delta\kappa = 0 \rightarrow \kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2 \rightarrow n_3 \omega_3 = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = (n_1 + n_2) \omega_1 \quad (\text{B.28})$$

sin embargo, ya que la ecuación (B.11) brinda una relación para las frecuencias

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1 \quad (\text{B.29})$$

entonces, la ecuación (B.28) da como resultado

$$n_3\omega_3 = n_3(2\omega_1) = (n_1 + n_2)\omega_1 \quad (\text{B.30})$$

A pesar de que normalmente $n(2\omega) > n\omega$, es posible obtener el resultado de la última ecuación utilizando cristales birrefringentes. Dependiendo de los ejes ordinario y extraordinario (con índices de refracción n_o y n_e respectivamente), existen cuatro posibles soluciones (ver tabla B.1). Cuando se ocupa un cristal

	uniaxial positivo ($n_e > n_o$)	uniaxial negativo ($n_e < n_o$)
Tipo I	$n_3^o\omega_3 = n_1^e\omega_1 + n_2^e\omega_2$	$n_3^e\omega_3 = n_1^o\omega_1 + n_2^o\omega_2$
Tipo II	$n_3^o\omega_3 = n_1^o\omega_1 + n_2^e\omega_2$	$n_3^e\omega_3 = n_1^e\omega_1 + n_2^o\omega_2$

Tabla B.1: Condiciones de los ejes para la ecuación (B.30) en cristales birrefringentes[31]

uniaxial, es necesario sintonizar el ángulo de la onda extraordinaria de forma que se cumpla alguna de las soluciones de la tabla B.1. Para esto se utiliza la indicatriz óptica

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (\text{B.31})$$

Para un cristal uniaxial, se tiene $n_1 = n_2 = n_o$ y $n_3 = n_e$ y los valores del sistema de coordenadas están dados en términos del ángulo de la onda extraordinaria, de manera que el índice de refracción es

$$\frac{1}{n(\theta)} = \frac{\cos(\theta)^2}{n_o^2} + \frac{\sin(\theta)^2}{n_e^2} \quad (\text{B.32})$$

LISTA DE FIGURAS

	Página
1.1. Sistema de dos niveles [5]	1
1.2. Emisión laser de un sistema de tres niveles [8]	4
1.3. Emisión laser de un sistema de cuatro niveles [8]	6
1.4. Haz Gaussiano propagándose a través de un sistema óptico arbitrario[10]	11
1.5. Ejemplo del análisis de rayos por la matriz de transferencia de un sistema compuesto [10]	14
1.6. Stability condition for different types of resonators	16
1.7. Tipos de resonadores ópticos [11]. a) resonador de espejos pla- nos; b) resonador de espejos esféricos; c) resonador de anillo; d) resonador de fibra óptica	17
1.8. Fabry-Perot cavity [12]	18
1.9. Gaussian beam in a spherical resonator [11].	20
1.10. Diagrama de rayos del fenómeno de autoenfoco	26
1.11. Mecanismo de amarre de modos a partir del efecto Kerr [20] . . .	27
1.12. Área transversal de un amarre de modos a partir del efecto Kerr. Fuente: manual de usuario del Coherent Mira Optima 900-F Laser	28
2.1. Diagrama de rayos que muestra la ley de Bragg [21]	32
2.2. Diagramas E- κ para el modelo de electrón libre [22]	33

2.3.	Diagrama E- κ del arseniuro de galio (GaAs)[24]	34
2.4.	Diagrama E- κ para el silicio en el índice de Miller 100 [23]	35
2.5.	Intensidad de la fotoluminiscencia en la región azul al someter al material a un proceso térmico distinta cantidad de tiempo (de 0 a 120 egundos) [3]	36
2.6.	Cambio en la estructura del SRO dependiendo de R_0 antes y después del proceso térmico[2]	37
2.7.	Emisiones del SRO ₃₀ con picos en a) 1.72 eV y b) 2.90 eV. Se aplicó bombeo a 300 nm en ambas muestras[1].	37
2.8.	fotoluminiscencia en muestras de SRO antes y después del proceso térmico [2]	40
3.1.	Fosforoscopia con montura mecánica[27]	43
3.2.	Fosforoscopia de fibra óptica[28]	44
3.3.	Arreglo experimental utilizado para medir los tiempos de vida	44
3.4.	Disco de 30/25 aberturas del chopper óptica SR540	45
3.5.	Gráfico de intensidad respecto al tiempo para un fosforoscopia de fibra óptica [28]	46
3.6.	Arreglo experimental utilizado para medir espectros de emisión	47
4.1.	Intensidad normalizada del SRO ₂₀ respecto a la frecuencia de operación del chopper. Se bombeó a 400.50 nm (negro), 400.50 nm (rojo) y 405.85 nm (morado); y a distintas potencias	50
4.2.	Gráfico de tiempo de vida respecto a longitud de onda de bombeo para el SRO ₂₀	51
4.3.	Espectro del SRO ₂₀ con bombeo en 400.496 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	51
4.4.	Espectro del SRO ₂₀ con bombeo en 403.616 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	52

4.5. Espectro del SRO ₂₀ con bombeo en 405.976 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	52
4.6. Espectro del SRO ₂₀ con bombeo en 412.002 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	53
4.7. Espectro del SRO ₂₀ con distintas longitudes de onda de bombeo. Las líneas indican la longitud de onda del laser Ti:Sa. para cada espectro.	54
4.8. Intensidad normalizada del SRO ₃₀ respecto a la frecuencia. Se bombeó a 406.475nm en distintas potencias.	55
4.9. Cambio del tiempo de vida del SRO ₃₀ respecto a la longitud de onda a distintas potencias. Se coloca un rango de 60-90 μ s.	56
4.10. Cambio del tiempo de vida del SRO ₃₀ respecto a la longitud de onda a distintas potencias. Se coloca un rango de 95-130 μ s.	56
4.11. Espectro del SRO ₃₀ con bombeo en 397.584 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	57
4.12. Espectro del SRO ₃₀ con bombeo en 400.469 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	57
4.13. Espectro del SRO ₃₀ con bombeo en 405.189 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	58
4.14. Espectro del SRO ₃₀ con bombeo en 406.475 nm. La línea indica la longitud de onda del laser Ti:Sa.	59
A.1. Diagrama del laser Coherent Mira Optima 900-F del manual de usuario de Coherent	63
A.2. Cavidad equivalente de dos lentes para el laser Ti:Zafiro	64

LISTA DE TABLAS

	Página
4.1. Datos de emisión del SRO ₂₀ respecto a distintas potencias de salida del laser Ti:Sa.	55
4.2. Datos de emisión del SRO ₃₀ respecto a distintas potencias de salida del laser Ti:Sa.	59
A.1. Valores de la cavidad equivalente del manual de Coherent	65
B.1. Condiciones de los ejes para la ecuación (B.30) en cristales birrefringentes[31]	77

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Alarcón-Salazar, M. Vásquez-Agustín, E. Quiroga-González, I. Zaldívar-Huerta y M. Aceves-Mijares, «Comparison of light emitting capacitors with textured and polished silicon substrates towards the understanding of the emission mechanisms», *Journal of Luminescence* **203**, 646-654 (2018).
- [2] R. López-Estopier, M. Aceves-Mijares y C. Falcony, «Cathodo- and Photo-Luminescence of Silicon Rich Oxide Films Obtained by LPCVD», en *Cathodoluminescence*, ed. por N. Yamamoto (IntechOpen, Rijeka, 2012) cap. 10.
- [3] A. Polman, R. Elliman, L. Pavesi, S. Gaponenko y L. Negro, «Optical Gain From Silicon Nanocrystals A critical perspectives», en (ene. de 2003), págs. 209-222.
- [4] L. Pavesi, L. D. Negro, C. Mazzoleni, G. Franzò y F. Priolo, «Optical gain in silicon nanocrystals», *Nature* **408**, 440-444 (2000).
- [5] S. Guarnay, «Interaction of a multi-level system with ultrashort light pulses», Tesis doct. (sep. de 2011).
- [6] W. Greiner, L. Neise y H. Stöcker, *Concepts in Thermal Physics* (Springer-Verlag, 1995).
- [7] S. J. Blundell y K. M. Blundell, *Concepts in Thermal Physics*, 2.^a ed. (Oxford University Press, 2010).

- [8] L. Corner, «Introduction to Laser Physics», [10.48550/arXiv.2008.03940](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2008.03940) (2020).
- [9] «Beam Optics», en *Fundamentals of Photonics* (John Wiley & Sons, Ltd, 1991) cap. 3, págs. 80-107.
- [10] I. Moskalev, «Multiwavelength and ultrabroadband solid-state and semiconductor spatially-dispersive lasers», (2004).
- [11] «Resonator Optics», en *Fundamentals of Photonics* (John Wiley & Sons, Ltd, 1991) cap. 9, págs. 310-341.
- [12] A. Srivastava, R. Singh y S. Tripathi, «Design and analysis of visible photonics resonators coated With CuO thin film», *Nanotechnology* **31**, [10.1088/1361-6528/ab6469](https://doi.org/10.1088/1361-6528/ab6469) (2019).
- [13] «Laser Oscillation: Gain and Threshold», en *Laser Physics* (John Wiley & Sons, Ltd, 2010) cap. 4, págs. 141-173.
- [14] «Multimode and Pulsed Lasing», en *Laser Physics* (John Wiley & Sons, Ltd, 2010) cap. 6, págs. 229-268.
- [15] R. Y. Chiao, T. Gustafson y P. Kelley, «Self-Focusing of Optical Beams», en *Self-focusing: Past and Present: Fundamentals and Prospects*, ed. por R. W. Boyd, S. G. Lukishova e Y. Shen (Springer New York, New York, NY, 2009), págs. 129-143.
- [16] G. S. He, «105Self-Focusing, Self-Phase Modulation, and Spectral Self-Broadening», en *Nonlinear Optics and Photonics* (Oxford University Press, oct. de 2014).
- [17] R. W. Boyd, «Chapter 1 - The Nonlinear Optical Susceptibility», en *Nonlinear Optics (Third Edition)*, ed. por R. W. Boyd, Third Edition (Academic Press, Burlington, 2008), págs. 1-67.

-
- [18] R. W. Boyd, «Chapter 2 - Wave-Equation Description of Nonlinear Optical Interactions», en *Nonlinear Optics (Third Edition)*, ed. por R. W. Boyd, Third Edition (Academic Press, Burlington, 2008), págs. 69-133.
- [19] R. W. Boyd, «Chapter 7 - Processes Resulting from the Intensity-Dependent Refractive Index», en *Nonlinear Optics (Third Edition)*, ed. por R. W. Boyd, Third Edition (Academic Press, Burlington, 2008), págs. 329-390.
- [20] S. Guarnay, «Interaction of a multi-level system with ultrashort light pulses», Tesis doct. (sep. de 2011).
- [21] J. Amigó, «Nociones de cristalografía aplicadas al estudio de materiales policristalinos por difracción de los rayos X», en (ene. de 2006), págs. 1-36.
- [22] K. Edagawa, «Photonic crystals, amorphous materials, and quasicrystals», *Science and Technology of Advanced Materials* **15**, 034805 (2014).
- [23] «Silicon Properties», en *Silicon Devices and Process Integration* (Springer New York, NY, 2009) cap. 1, págs. 1-53.
- [24] S. N. Ahmed, «5 - Solid-state detectors», en *Physics and Engineering of Radiation Detection (Second Edition)*, ed. por S. N. Ahmed, Second Edition (Elsevier, 2015), págs. 259-329.
- [25] M. Fox y G. F. Bertsch, «Optical Properties of Solids», *American Journal of Physics* **70**, 1269-1270 (2002).
- [26] R. McVaugh, «A History of Luminescence from the Earliest Times until 1900», *AIBS Bulletin* **8**, 49-49 (1958).
- [27] B. Valeur y M. N. Berberan Santos, «A Brief History of Fluorescence and Phosphorescence before the Emergence of Quantum Theory», *Journal of Chemical Education - J CHEM EDUC* **88**, 10.1021/ed100182h (2011).
- [28] B. T. Jones, B. W. Smith, A. Berthod y J. D. Winefordner, «A Becquerel-disc phosphoroscope for the measurement of lifetimes in room-temperature phosphorimetry», *Talanta* **35**, 647-650 (1988).
-

- [29] M. Çodur y S. Yerci, «An advanced lifetime measurement method by square wave excitation and lock-in amplifier», *Journal of Physics: Conference Series* **1919**, 012009 (2021).
- [30] L. Novotny y B. Hecht, *Principles of Nano-Optics*, 2.^a ed. (Cambridge University Press, 2012).
- [31] «Polarization and Crystal Optics», en *Fundamentals of Photonics* (John Wiley & Sons, Ltd, 1991) cap. 6, págs. 193-237.