



**I  
N  
A  
O  
E**

**Propagación de ondas electromagnéticas  
en medios ópticos y eléctricos con  
modulación periódica temporal de perfil  
cuadrado**

Por:  
**M.C. José Gabriel Gaxiola Luna**

Tesis sometida como requisito parcial  
para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias con Especialidad  
en Electrónica**

En el  
**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Febrero de 2023  
Santa Maria de Tonanzintla, Puebla, México

Supervisada por  
**Dr. Peter Halevi**

©INAOE 2023

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir  
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes  
mencionando la fuente.



# Resumen

---

Esta tesis comprende el estudio de un medio dieléctrico con modulación periódica temporal de permitividad y/o permeabilidad con perfil cuadrado. También sobre la propuesta de un protocolo de medición para una línea de transmisión modulada que emule el medio dieléctrico propuesto al principio. Se cimientan las bases para la resolución de la ecuación de onda que caracteriza este sistema, empleando una metodología de solución similar al modelo Kronig-Penney usada en física de estado sólido. Esta solución involucra invariablemente el determinante de una matriz finita de cuarto orden. Esta matriz es resultado de satisfacer las condiciones de frontera a través de las interfaces temporales creadas por la modulación temporal. La relación de dispersión del medio dieléctrico modulado está formada por múltiples bandas permitidas del vector de onda  $k$  intercaladas con bandas prohibidas  $\Delta k$ . Los modos de propagación dentro de la relación de dispersión pueden representar ondas que se propagan por el medio (dentro de bandas permitidas); ondas estacionarias (dentro de bandas permitidas y frecuencia de modulación al doble de la frecuencia de propagación) y ondas con crecimiento exponencial en tiempo. Para valores selectos de modulación de permitividad y/o permeabilidad se pueden obtener relaciones de dispersión con todas sus bandas prohibidas del mismo ancho, pero también se pueden conseguir relaciones de dispersión con ausencia de bandas prohibidas. La relación de dispersión del medio modulado es periódica con respecto a la frecuencia  $\omega$ , sin embargo existe un criterio matemático para valores selectos de modulación y  $\tau$  (intervalos de tiempo dentro de la función cuadrada de modulación) donde también se presenta periodicidad con respecto al número de onda  $k$ . Los modos de propagación que están dentro de una banda prohibida  $\Delta k$  dan lugar a frecuencias  $\omega$  complejas. Esto corresponde a una propagación con crecimiento exponencial en tiempo. El modo que se localiza justo al centro de la banda prohibida  $\Delta k$  es el valor  $Max[Im(\omega)]$ . Bajo ciertas condiciones de periodicidad es posible obtener una

## Resumen

---

ecuación de  $Max[Im(\omega)]$  en función de la modulación del medio. La respuesta óptica de una placa modulada ante una onda plana incidente esta compuesta por la superposición de ondas planas con frecuencias perteneciente a un peine de frecuencias. Este peine de frecuencias involucra la frecuencia de la onda incidente y múltiples armónicos de la frecuencia de modulación de la placa. El análogo eléctrico al medio dieléctrico modulado es la línea de transmisión modulada en tiempo. Se desarrollo un protocolo de medición para este tipo de lineas de transmisión a partir de la teoría de redes de dos puertos. Dos formas de emular una capacitancia con modulación periódica temporal de perfil cuadrado han sido propuestas. Los resultados obtenidos de los cálculos para la línea de transmisión son validados con simulaciones en software comercial.



# Contenido

---

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Figuras</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	4
1.2. Descripción de la tesis . . . . .	5
<b>2. Cristal Fónico Temporal</b>	<b>7</b>
2.1. Solución para una modulación cuadrada . . . . .	7
2.2. Relación de dispersión y forma de los campos electromagnéticos . . . . .	12
2.2.1. Inequidad entre la modulación de permitividad y permeabilidad	12
2.2.2. Modulación de igual magnitud y fuera de fase . . . . .	18
2.2.3. Modulación de igual magnitud y en fase . . . . .	19
2.3. Variación de $\tau$ . . . . .	21
2.4. Respuesta óptica . . . . .	22
<b>3. Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a <math>k</math></b>	<b>31</b>
3.1. Modos crecientes en tiempo . . . . .	31
3.2. Periodicidad en $k$ . . . . .	34
<b>4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo</b>	<b>38</b>
4.1. Matriz de impedancias y Admitancias. . . . .	40
4.2. Parámetros de transmisión (matriz ABCD) . . . . .	42
4.2.1. Relación de dispersión a partir de parámetros ABCD . . . . .	44
4.3. Respuesta eléctrica . . . . .	46

## CONTENIDO

---

4.4. Parámetros S . . . . .	47
4.5. Simulación de Balance Armónico . . . . .	50
<b>5. Trabajo a futuro</b>	<b>58</b>
5.0.1. Emulación del circuito según SDD2 . . . . .	58
5.0.2. Arreglo de capacitores conmutados . . . . .	59
<b>6. Conclusiones</b>	<b>62</b>
6.1. Conclusiones Principales . . . . .	62
6.2. Conclusiones Parciales . . . . .	63
<b>7. Apéndice A</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Lista de Figuras

---

2.1. La permitividad $\epsilon(t)$ y permeabilidad $\mu(t)$ son funciones periódicas en tiempo cuyo periodo es $T$ , compuestas por dos intervalos temporales $t_1$ y $t_2$ . Aquí $\bar{\epsilon} = (1/2)(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ y $\bar{\mu} = (1/2)(\mu_1 + \mu_2)$ . . . . .	8
2.2. Relación de dispersión de la frecuencia normalizada $\hat{\omega}$ versus el número de onda normalizado $\hat{k}$ de acuerdo a la ecuación 2.19. Aquí $t_1 = t_2(\tau = 0.5)$ y las modulaciones de permitividad y permeabilidad están fuera de fase, estos valores son $m_\epsilon = 0.5$ y $m_\mu = -0.1$ respectivamente. Son presentados dos periodos de la frecuencia (periodo $\Omega = 2\pi/T$ ) y nueve bandas permitidas de $k$ etiquetadas con el índice $p$ . La relación de dispersión esta formada de líneas azules para modos con $\hat{\omega}$ real. El recuadro de la figura muestra el comportamiento de los modos con baja frecuencia y longitud de onda larga comparada con la velocidad de fase en el limite de la ecuación 2.23. . . . .	13
2.3. Campo desplazamiento eléctrico normalizado para las primeras dos bandas permitidas ( $p = 1$ en línea azul y $p = 2$ en línea roja) en la Fig.2.2. Este campo fue calculado para $\omega = 0.1\Omega$ y representa los modos de propagación marcados con los puntos rosas en la Fig.2.2. . . . .	15
2.4. Campo desplazamiento eléctrico normalizado para la banda permitida $p = 15$ . Debido al gran valor de $k$ en esta banda, los periodos $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.179T$ (líneas azules) y $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.1147T$ (líneas rojas) son notablemente distinguibles dentro de cada periodo $T$ . . . . .	16
2.5. Campo desplazamiento eléctrico normalizado para las primeras bandas permitidas ( $p = 1, 2$ ) en la Fig.2.2 para la frecuencia $\omega = 0.5\Omega$ (Puntos naranjas en la Fig.2.2). . . . .	17

2.6. El campo desplazamiento eléctrico  $D(t)$  (línea azul) y el campo eléctrico  $E(t)$  (línea roja) para la primera banda permitida en la Fig.2.2 para  $\omega = 0.1\Omega$ . Mientras  $D(t)$  es continuo a través de las discontinuidades de  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$ , según la ecuación (2.11), el campo eléctrico  $E(t) = D(t)/\epsilon(t)$  es obviamente discontinuo. . . . . 17

2.7. Relación de dispersión para modulaciones de igual magnitud y fuera de fase:  $m_\epsilon = -m_\mu = m = 0.1$  (línea azul) and  $0.5$  (línea roja). Todas las bandas prohibidas son iguales para una modulación dada de acuerdo a la ecuación (2.30). . . . . 19

2.8. Gap/midgap ratios entre las bandas 1 y 2 (línea azul), 3 y 4 (línea roja) en Fig.2.7, como función de la modulación  $m$ , ade acuerdo a Eq.(2.32). . . . . 20

2.9. La relación de dispersión para modulaciones iguales y en fase se distingue por velocidades de grupo constantes (positivas y negativas) y ausencia de bandas prohibidas. Dos casos de modulación son consideradas aquí:  $m = 0.1$  (líneas azules) y  $m = 0.5$  (líneas rojas). Las pendientes están dadas por la Eq.(2.33). . . . . 21

2.10. Primera GMGR como función de  $\tau = t_1/T$  (ver Fig.2.1) para tres casos de modulación igual y fuera de fase:  $m_\epsilon = -0.5$  y  $m_\mu = 0.1$  (línea azul),  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$  (línea roja);  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.5$  (línea negra punteada). . . . . 22

2.11. Amplitudes del campo eléctrico  $|e_{1n}|$  para la primera banda  $k(p = 1)$  y los armónicos  $n$  desde  $-10$  hasta  $+10$ . La frecuencia normalizado es  $\hat{\omega} = 0.4$  y las modulaciones son  $m_\epsilon = 0.5$ ,  $m_\mu = -0.1$ . Los eigenvectores han sido calculados con dos métodos: La representación en series de Fourier del método de Krönig-Penney (líneas azules) de la Eq.(2.18); La ecuación de eigenvalores de la ecuación Eq.(2.39) para el problema bulk (puntos rojos). . . . . 24

2.12. (a) Reflectancia y (b) transmitancia para los armónicos  $n = 0, \pm 1, y \pm 2$  asumiendo una impedancia relativa  $\hat{Z} = 0.5$ ,  $v = 1$  y modulaciones  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$ . La reflectancia total  $R(\hat{\omega})$  (línea roja), transmitancia total  $T(\hat{\omega})$  (línea azul) y  $R(\hat{\omega}) + T(\hat{\omega})$  (línea rosa) obtenidas al sumar las contribuciones de todos los armónicos  $n$ , aparecen en (c). . . . . 27

**LISTA DE FIGURAS**

---

- 2.13. reflectancia y transmitancia tal como en Fig.12 para una modulación igual y fuera de fase  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.5$ , donde  $\hat{Z} = 1$  y  $v = 1$ . . . . . 28
- 2.14. (a) Transmitancia para cinco armónicos  $n$  donde se asume  $v = 1$ ,  $\hat{Z} = 1$  y  $m_\epsilon = m_\mu = 0.5$ .(b)Reflectancia total (línea roja punteada) y transmitancia total (línea azul) de la placa dielectrica modulada. . . . . 29
- 2.15. Amplitudes de cinco armónicos  $n$  del campo eléctrico como función de la posición  $x$  dentro de la placa modulada. Estas amplitudes están normalizadas con la amplitud del campo incidente. Tiene los mismo parámetros que la Fig.2.14. . . . . 30
- 3.1. (a) Máxima tasa de crecimiento exponencial  $[Im(\hat{\omega})]$  del campo electromagnético como función del número de onda normalizado  $\hat{z}$  para cuatro valores de modulación  $m$ . El ancho de las barras representa la banda prohibida  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  que se encuentra entre las bandas permitidas  $p$  y  $(p + 1)$ . Aquí se nota la periodicidad de una estructura de tres barras para  $m = 0.8$ , y una estructura de dos barras para  $m = 0.6$ . No existe periodicidad para las modulaciones  $m = 0.1$  y  $m = 0.3$ . (b)Estructura de bandas, incluyendo  $Im(\hat{\omega})$  (elipses de color rojo) para  $m = 0.6$ . Las líneas negras discontinuas conectan el ancho de las barras en la sección (a) con el ancho de las bandas prohibidas en (b). No hay banda prohibida entre las bandas  $p = 3$  y  $p = 4$ , lo mismo sucede entre las bandas  $p = 9$  y  $p = 10$ . Esto explica porque el periodo  $\hat{k}_{per}$  abarca 4 barras rojas en (a), y no solo dos como se aparentaría en la imagen. . . . . 33
- 3.2. (a) Máxima tasa de crecimiento exponencial  $[Im(\hat{\omega})]$  del campo electromagnético como función del número de onda normalizado  $\hat{z}$  para cuatro valores de  $\tau$  para un valor de modulación fija de  $m = 0.5$ . Aquí se muestra de nuevo una estructura periódica formada con cinco barras azules (para  $\hat{k} < 2.5$ ) que se repiten periódicamente ( $\hat{k}_{per}$ ), esto al considerar  $\tau = 0.2573$ . Para los valores  $\tau = 0.5$  y  $0.8$  no sucede periodicidad con respecto a  $\hat{k}$ . . . . . 34

- 3.3. Estructuras de bandas  $\hat{\omega}(\hat{k})$  que son periódicas en  $\hat{k}$  y en  $\hat{\omega}$ . La modulación es  $m = 0.5$  y (a)  $\tau \approx 0.6340$ , (c)  $\tau \approx 0.7760$ , (e)  $\tau \approx 0.8386$ . En (a) todas las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  tienen el mismo ancho y los modos de propagación tienen  $Re(\hat{\omega}) = N/2$ , donde  $N$  es un número impar (franja verde). Esta estructura periódica se obtiene cuando el cociente es  $K^-/K^+ = 0$ . (c) Todas las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  tienen el mismo ancho. Los modos de propagación tienen  $Re(\hat{\omega}) = N/2$ , donde  $N$  es un número entero (franja verde para  $N$  impar y franja amarilla para  $N$  par). Esta estructura periódica se obtiene cuando el cociente es  $K^-/K^+ = 1/3$ . (e) Las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}$  con modos de propagación que tengan  $Re(\hat{\omega}) = N/2$  donde  $N$  es un número impar son iguales (franjas verdes) entre sí. Lo mismo para los modos donde  $N$  es un número par (franjas amarillas). Esta estructura periódica se obtiene cuando el cociente es  $K^-/K^+ = 1/2$ . El campo  $D(t)$  que corresponde a (a), (c) y (e) se muestran, respectivamente, en (b), (d) y (f) con valores de  $\hat{k}$  seleccionados justo al centro de la banda prohibida. Las envolventes del campo (líneas discontinuas) describen el máximo crecimiento exponencial. En (b) y (d) se destaca el hecho de que solo haya una envolvente. Esto se debe a que las bandas prohibidas para  $Re(\hat{\omega}) = 1$  y  $Re(\hat{\omega}) = 1/2$  tienen el mismo ancho. . . . . 36
- 4.1. Relación de dispersión de un medio con modulación periódica (línea azul) y una línea de transmisión (línea roja).  $m_{\epsilon,C} = 0.5$ ,  $m_{\mu,L} = -0.5$  y  $\bar{\Omega} = 0.3$ . Donde  $\bar{\Omega} = \Omega\sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}} = \Omega\sqrt{\bar{C}\bar{L}}$ . . . . . 38
- 4.2. Línea de transmisión discreta con capacitancia variable en tiempo de manera periódica. Aquí se muestran tres celdas unitarias simétricas separadas gráficamente por los nodos de color rojo. . . . . 39
- 4.3. Diagrama esquemático de una red de dos puertos configurado para representar parámetros ABCD. El puerto 1 es la entrada y el puerto 2 la salida. . . . . 43
- 4.4. Diagrama esquemático de dos redes de dos puertos conectados en serie. 43
- 4.5. Relación de dispersión obtenida con la Eq.(4.1) del métodos Kronig-Penney (línea negra) y la matriz ABCD (línea amarilla). Aquí las modulaciones son  $m_c = 0.5$  y  $m_L = -0.1$  . . . . . 45

## LISTA DE FIGURAS

---

4.6. Línea de transmisión modulada expresada como una red de dos puertos (Parametros ABCD) con una fuente de excitación $V_{in}(t)$ y una impedancia de carga $Z_L$ . . . . .	46
4.7. Diagrama esquemático de una red de dos puertos configurado para representar parámetros ABCD. El puerto 1 es la entrada y el puerto 2 la salida. . . . .	47
4.8. Diagrama a bloques de una simulación de balance armónico según Keysight. . . . .	50
4.9. Simulación de una celda unitaria utilizando el modulo SDD2 como capacitancia variable. Aquí $\bar{C} = 400pF$ , $L = 1\mu L$ , $m_c = 0.6$ y $f_m(\Omega/2\pi) = 2MHz$ . . . . .	51
4.10. Magnitud (arriba) y Fase (abajo) de la respuesta eléctrica calculada con Eq.(4.19) (puntos rojos) y con la simulación de balance armónico (línea azul). . . . .	52
4.11. Relación de dispersión (Región de onda larga) de una línea de transmisión con modulación $m_c = 0.6$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias $\omega + n\Omega$ (puntos rojos). . . . .	53
4.12. Relación de dispersión (Región de onda larga) de una línea de transmisión con modulación $m_c = 0.6$ y resistencia en serie de $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias $\omega + n\Omega$ (puntos rojos). Aquí las bandas prohibidas se han cerrado debido la presencia de la resistencia. . . . .	54
4.13. $Im[\beta]$ de la línea de transmisión con modulación $m_c = 0.6$ y resistencia $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias $\omega + n\Omega$ (puntos rojos). Todos los modos de propagación tienen una atenuación a lo largo de la línea de transmisión. . . . .	55

4.14. Relación de dispersión (Región de onda larga) de una línea de transmisión con modulación $m_c = 0.8$ y resistencia en serie de $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias $\omega + n\Omega$ (puntos rojos). Aquí las bandas prohibidas han vuelto y tienen una estructura periódica tal como se observo en un medio dielectrico con modulación $m = 0.8$ . . . . .	56
4.15. $Im[\beta]$ de la línea de transmisión con modulación $m_c = 0.8$ y resistencia $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias $\omega + n\Omega$ (puntos rojos). Todos los modos de propagación tienen una atenuación menor comparada a la que se muestra en Fig.4.13. En la cercanía de las frecuencias $\hat{\omega} = 0.5, 1.5, etc.$ se encuentran los valores mínimos, y conforme más se acerque a esa frecuencia el valor tiende a ser 0. . . . .	57
5.1. Diagrama a bloques del circuito simulador de capacitancia periódica variable en tiempo. . . . .	59
5.2. Capacitancia variante en tiempo mediante un arreglo conmutado de capacitores. . . . .	59
5.3. Continuidad de carga eléctrica a través de cada interfaz temporal. . . . .	60
5.4. Relación de dispersión obtenida para una línea con capacitancia variable en tiempo utilizando un arreglo conmutado. El método de matriz ABCD (puntos azules) ha sido utilizado y se compara contra el metodo Kronig-Penney (línea negra). . . . .	61

# Introducción

---

El interés en un cristal fotónico temporal viene desde el trabajo de F. R. Morgentahler [1] quien consideró un medio con un cambio abrupto en su índice de reflexión sin variación de impedancia. El demostró un cambio en la velocidad de onda electromagnética; conservación del momento electromagnético y la posibilidad de incrementar la energía de una onda electromagnética. Otro trabajo temprano sobre cristales temporales fue gracias a T. M. Ruiz et al [2], quienes trataron la propagación en la presencia de un cambio abrupto de la permitividad eléctrica y demostraron la conversión de una onda incidente en ondas transmitidas y reflejadas por una interfaz temporal. El campo desplazamiento  $D(t)$  y el magnético  $B(t)$  son continuos a pesar de un cambio abrupto de permitividad  $\epsilon(t)$  y permeabilidad  $\mu(t)$ , esto fue demostrado en [3, 4]. En tales interfaces temporales los campos transmitidos pueden incrementarse a la energía que es suministrada por el mecanismo de modulación hacia la onda propagatoria [4, 5, 6]. Esos cálculos fueron extendidos por Pacheco-Peña et al [7] a una placa metálica con permitividad negativa. Zurita-Sánchez et al [8] obtuvieron una estructura de bandas fotónicas con bandas permitidas de  $k$  separadas por bandas prohibidas del número de onda para  $\epsilon(t)$  con periodicidad armónica  $k$ , a diferencia de las bandas prohibidas de la frecuencia  $\omega$  presentes en un cristal fotónico (espacial) ordinario. Tal como fue demostrado por N.Wang et al[9], tal comportamiento se mantiene igual aún para medios con  $\epsilon(t)$  complejo. La aproximación WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) [5], el método de matriz de transmisión[10, 11] y el análisis topológico [12, 13] han sido aplicados al caso de modulación cuadrada de permitividad, todos conducen a un gran número de bandas prohibidas en comparación a la modulación armónica. Los efectos sobre las ondas que se propagan en el medio debido a la modulación de permitividad  $\epsilon(t)$  y permeabilidad

$\mu(t)$  fueron investigados por Martínez-Romero et al [14]. Una modulación debido a una onda de la forma  $\varepsilon(x - vt)$  (donde  $x$  es la posición y  $v$  es su velocidad de propagación) también fue investigada [15, 16, 17, 18]. Las repercusiones de esta modulación “espacio-temporal” fueron cubierta extensivamente por Caloz y Deck-Léger [3]. En un cristal temporal los campos son superposiciones de ondas armónicas con frecuencias  $|\omega - n\Omega|$ , donde  $\Omega/2\pi$  es la frecuencia de modulación y  $n$  abarca todos los números enteros; debido a eso la respuesta espectral se manifiesta por un “peine de frecuencias” [8]. Taravati y Kishk mostraron que en una placa espacio-temporal con modulaciones iguales de permitividad y permeabilidad no hay reflexiones en las interfaces temporales, a pesar de que se puede obtener un peine de frecuencias en las ondas transmitidas por la placa [19]. Lo anterior también fue demostrado en un medio no recíproco con respecto a la dirección de propagación [20], donde este efecto incrementa con la fuerza de la modulación del medio. Otras publicaciones reportan resonancias paramétricas en tiempo dentro de un cristal fotónico temporal con modulación de permitividad y permeabilidad para grosores específicos de la placa modulada (también depende de la frecuencia de modulación) [21, 22, 23].

Han sido encontradas propiedades interesantes en sistemas ópticos y electrónicos que han generado un interés renovado en los sistemas modulados. Por ejemplo, ha sido demostrado que la modulación de un medio puede cambiar y controlar la forma de un pulso óptico [24, 25, 26, 27]. Sistemas ópticos no recíprocos fueron diseñados sin la necesidad de recurrir a la aplicación de campos magnéticos [28, 29], y Y.Zhang et al [30] reportaron que la radiación desde una antena transmitida sobre un medio débilmente modulado puede sufrir un desfase de frecuencia. Es complicado en la práctica modular sustancialmente la permitividad o la permeabilidad, pero existe una analogía de esos medios con una línea de transmisión pasa bajo, aproximación válida en el límite de longitud de onda larga [31, 32, 33]. Esto condujo a la observación de la primera banda prohibida del número de onda  $k$  [34]. Líneas de transmisión no recíprocas para la etapa “front end” fueron diseñadas utilizando varactores modulados por una onda moduladora [35, 36, 37]. También fueron diseñados amplificadores paramétricos de bajo ruido utilizando varactores modulados [38]. Diversas aplicaciones han sido diseñadas basadas en la modulación espacio-temporal: Un sistema mixer-duplexer-antena [39] y mezcladores de frecuencias para modulación aperiódica [40]. También se ha demostrado que el límite Bode-Fano puede ser extendido para pulsos cortos haciendo un

## 1. Introducción

---

switcheo rápido de la impedancia de una línea de transmisión [41]. La acumulación de energía en elementos reactivos ha mostrado potencial en el diseño de osciladores paramétricos [42]. Los armónicos generados en una línea de transmisión con modulación espacio-temporal débil conserva la energía de acuerdo a la relación Manley-Rowe [39]. Se ha observado que la energía acumulada en un sistema con modulación temporal podría provocar un crecimiento sostenido de una señal emitida, por esa razón un análisis de estabilidad fue desarrollado [43, 10], basado en la función de transmisión del sistema. La modulación cuadrada esta idealmente preparada para analizarse mediante el método de Kronig-Penney, introducido por esos científicos en 1931 para obtener la estructura de bandas de un cristal [44]. A pesar de ser un modelo muy idealizado con respecto al comportamiento de un cristal real, este ha mostrado ser muy sofisticado. Las secciones constantes tienen soluciones simples y bien conocidas que son conectadas a través de condiciones de frontera apropiadas. El método Kronig-Penney ha sido implementado en algunas súper-redes de: semiconductores [45], metal-dieléctrico [46] y semiconductor-grafema [47]. La mejora en la eficiencia termogeneradora de una súper-red semiconductor también fue reportada [48]. Una metodología similar fue utilizada teórica y experimentalmente para tratar cambios aleatorios de unas placas dieléctricas [49]. El método Kronig-Penney también conduce a una interpretación de la estructura de bandas en término de los coeficientes de transmisión y reflexión [50] y la estructura de bandas de placas intercaladas de plasma y dieléctrico [51, 52, 53]. Más allá de eso, esta metodología fue empleada en placas con respuesta no lineal dando lugar a solitones en estructuras periódicas 1D [54] y 2D [55]. La propagación a través de guías de ondas de placas paralelas [56] y circulares [57] con morfología Kronig-Penney también han sido estudiadas para utilizarse como filtros.

El interés en ondas crecientes y sus inestabilidades asociadas puede encontrar su origen en la interacción entre plasmas y rayos de partículas cargadas, en esa situación las ondas de plasma pueden obtener energía del rayo de partículas [59, 60, 61, 62]. Líneas de transmisión moduladas por una onda de bombeo también fueron estudiadas, ahí la amplitud alta de la onda de bombeo transmite su energía a la onda que se propaga, típicamente esto sucede en la región de las microondas [63, 64, 65]. Por otro lado, el desarrollo de óptica no lineal y materiales fuertemente no lineales (como los materiales ferro eléctricos y ferromagnéticos) ha impulsado las mismas ideas en el régimen óptico [66, 67, 68, 69, 70].

En todos esos trabajos la modulación es espacio-temporal  $(x - v_p t)$ , sin embargo para un valor suficientemente alto de  $v_p$  la longitud de onda  $\lambda_p$  se vuelve mucho más grande que la longitud de onda de la onda que se propaga. La dependencia de la permitividad con la posición en ese caso se vuelve irrelevante y uno puede asumir que la modulación del medio es únicamente temporal  $\epsilon = \epsilon(t)$ . Holberg y Kunz[71] fueron los primeros en estudiar la propagación de un medio dinámico con periodicidad temporal. Ellos claramente distinguieron entre modos de una banda permitida y modos de bandas prohibidas de  $k$  donde la frecuencia de la onda que se propaga  $\omega$  es real. Los modos de  $k$  dentro de una banda prohibida da lugar a frecuencias complejas, eso significa que existe un crecimiento exponencial de los campos. Con el interés renovado en este tema se ha extendido el cálculo de los campos para un medio con  $\epsilon(t)$  complejo[72]; para periodicidad arbitraria de  $\epsilon(t)$ [73]; para un medio con  $\epsilon(t)$  que obedece la simetría tiempo-paridad [74]; los aspectos topológicos [80, 81, 82] y el límite de modulación débil investigado con la teoría de ondas acopladas [75]. Por más de medio siglo la propagación de ondas en un medio periódico en tiempo fue de interés puramente teórico, sin embargo en 2018 tal medio fue construido experimentalmente para frecuencias en el rango del infrarrojo. En el experimento se bombardearon placas delgadas de un material Epsilon-Near-Zero (ENZ) basado en óxido de Zinc dopado con aluminio [76]. Recientemente, Lyubarov et al.[77] and Dikopoltsev et al.[78] han mostrado por simulaciones el crecimiento exponencial en tiempo de los campos que pueden ser obtenidos al excitar un cristal fotónico temporal por un dipolo o por emisión atómica, respectivamente.

### 1.1. Objetivos

a) Aplicar el método Kronig-Penney para estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en un medio con modulación periódica temporal de permitividad y/o permeabilidad con perfil cuadrado.

b) Analizar la respuesta óptica de una placa dieléctrica de longitud finita con modulación periódica temporal de permitividad y/o permeabilidad con perfil cuadrado.

c) Mostrar los modos de propagación dentro de una banda prohibida que provocan crecimiento exponencial en tiempo del campo electromagnético.

d) Demostrar la doble periodicidad de la relación de dispersión con respecto a la

## 1. Introducción

---

frecuencia  $\omega$  y al número de onda  $k$ . También determinar las condiciones para que tales periodicidades sean posibles.

e) Analizar una línea de transmisión con capacitancia variable en tiempo utilizando teoría de redes de dos puertos.

f) Desarrollar un protocolo de medición para una línea de transmisión variante en tiempo consistente con la teoría de redes de dos puertos.

G) Proponer circuitos que emulen un capacitor variante en tiempo con perfil cuadrado.

## 1.2. Descripción de la tesis

Esta tesis presenta un estudio sobre un cristal fotónico temporal, o cristal temporal a secas, con una modulación periódica temporal de perfil cuadrado de la permitividad  $\epsilon(t)$  y/o la permeabilidad  $\mu(t)$ . Se mostrará desde sus condiciones de propagación de ondas electromagnéticas en un medio homogéneo e infinito, y también la respuesta eléctrica de una placa finita ante la incidencia de una onda plana. El capítulo 1 introduce los trabajos previos en el campo de los sistemas variantes en tiempo.

El capítulo 2 se centra en estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en un medio con variación temporal de permitividad y/o permeabilidad a través del método Kronig-Penney. Este método se utiliza para resolver la ecuación de onda de los medios con modulación cuadrada. Se describe la relación de dispersión para diferentes casos particulares de modulación; el primer caso corresponde a modulación de permitividad y permeabilidad de igual magnitud y fuera de fase y otro con modulación de igual magnitud y en fase. También se añade un ejemplo del comportamiento de las bandas prohibidas en función de la variación de los tiempos que forman la modulación cuadrada. Por último aparece la respuesta óptica de una placa modulada con grosor finito.

El capítulo 3 se centra en los modos con crecimiento exponencial en tiempo correspondiente a los modos de propagación dentro de las bandas prohibidas del número de onda. Ya se demostró que la relación de dispersión en tiempo es periódica con respecto a la frecuencia  $\omega$ , sin embargo también podría ser periódica con respecto al número de onda. Las condiciones de dicha periodicidad están descritas en este capítulo 3.

El capítulo 4 es una continuación directa de la investigación sobre líneas de transmisión variables en tiempo con modulación periódica de perfil cuadrada publicada en la tesis de maestría de Gaxiola-Luna [83]. Aquí se analiza la línea de transmisión a través de la teoría de redes de dos puertos. Se propone un protocolo de medición para este tipo de sistemas variables en tiempo. Aquí se propone la creación de los parámetros S variables en tiempo mediante excitaciones iteradas de una línea de transmisión con el fin de obtener la relación de dispersión de la línea de transmisión modulada. Se comprueba con resultados de simulación que este protocolo de medición permite obtener la relación de dispersión de una línea de transmisión variable en tiempo, y aunque todo este estudio está centrado en una modulación de capacitancia con perfil cuadrado no se limita únicamente a este perfil de modulación.

El capítulo 5 propone el trabajo a futuro y las conclusiones de la investigación mostrada en esta tesis doctoral. El trabajo a futuro corresponde a dos propuestas de circuitos electrónicos que hagan el rol de capacitancia variable en tiempo con perfil cuadrado sin el uso de varactores.

## Cristal Fónico Temporal

---

### 2.1. Solución para una modulación cuadrada

A continuación se asumirá que el periodo de modulación  $T$  (y por lo tanto la frecuencia de modulación  $\Omega/2\pi = 1/T$ ) de la permitividad  $\varepsilon(t)$  y permeabilidad  $\mu(t)$  coinciden, como se observa en la Fig.1. Dentro de cada periodo  $T$  hay dos intervalos de tiempo,  $t_1$  y  $t_2$  (donde  $t_1 + t_2 = T$ ) donde ambos parámetros se mantienen constantes; Estos están conectados por discontinuidades cuyos flancos de subida y bajada coinciden simultáneamente para  $\varepsilon(t)$  y  $\mu(t)$  en los instantes de tiempo  $t = nT$  y  $t = t_1 + nT$  ( $n$  es un valor entero). Las funciones temporales de permitividad y permeabilidad pueden oscilar en fase (los valores altos de permitividad y permeabilidad coinciden en tiempo) o fuera de fase (El valor alto de permitividad ocurre al mismo tiempo que el valor bajo de permeabilidad y viceversa). Las funciones de tiempo  $\varepsilon(t)$  y  $\mu(t)$  a lo largo de un periodo temporal se define según las ecuaciones (1) y (2).

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}(1 + m_\varepsilon), & 0 < t < t_1 \\ \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}(1 - m_\varepsilon), & t_1 < t < T \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1 = \bar{\mu}(1 + m_\mu), & 0 < t < t_1 \\ \mu_2 = \bar{\mu}(1 - m_\mu), & t_1 < t < T \end{cases} \quad (2.2)$$

Aquí  $\bar{\varepsilon}$  y  $\bar{\mu}$  son los promedios temporales de  $\varepsilon(t)$  y  $\mu(t)$  en un periodo (aún si  $t_1 \neq t_2$ ), respectivamente. El grado de modulación temporal se mide a partir de los coeficientes de modulación siguientes:

$$m_\varepsilon = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad m_\mu = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$$

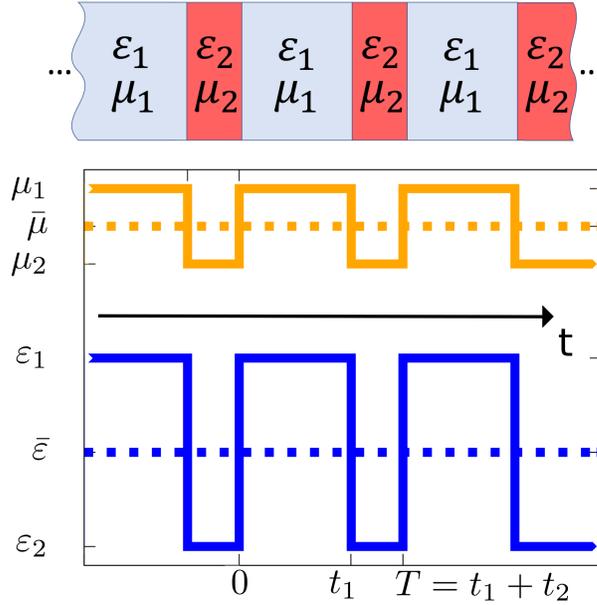


Fig. 2.1: La permitividad  $\epsilon(t)$  y permeabilidad  $\mu(t)$  son funciones periódicas en tiempo cuyo periodo es  $T$ , compuestas por dos intervalos temporales  $t_1$  y  $t_2$ . Aquí  $\bar{\epsilon} = (1/2)(\epsilon_1 + \epsilon_2)$  y  $\bar{\mu} = (1/2)(\mu_1 + \mu_2)$ .

Los modulaciones  $m_{\epsilon, \mu}$  pueden tomar cualquier valor dentro del intervalo  $[-1, 2]$  a pesar de que se asumen solamente valores positivos de  $\epsilon_{1,2}$  y  $\mu_{1,2}$ . Si los valores máximos de  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$  ocurren durante el mismo intervalo de tiempo (como se ve en Fig.1) entonces ambas modulaciones pueden tomar valores entre el intervalo  $[0, 1]$  (modulación en fase). Por otro lado, las modulaciones  $m_\epsilon$  y  $m_\mu$  difieren en su signo si el valor máximo de  $\epsilon(t)$  y el valor mínimo de  $\mu(t)$  suceden a la par; Aquí se elegirá  $m_\epsilon$  en el intervalo  $[0, 1]$  y  $m_\mu$  en el intervalo  $[-1, 0]$ .

Aquí se asume que el medio estudiado está libre de cargas y corrientes; espacialmente uniforme e isotrópico. Entonces las leyes de Faraday y Maxwell que caracterizan el medio son:

$$\partial E(x,t)/\partial x = -\partial B(x,t)/\partial t \quad (2.3)$$

$$\partial H(x,t)/\partial x = -\partial D(x,t)/\partial t \quad (2.4)$$

Donde  $D(t) = \epsilon(t)E(t)$  and  $B(t) = \mu(t)H(t)$ . Utilizando las relaciones constitutivas e igualando las Eq.(2.3) y Eq.(2.4) mediante el campo magnético se puede obtener la

## 2. Cristal F3tonico Temporal

---

ecuaci3n de onda para el campo desplazamiento  $D(t)$ :

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu(t) \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} \right] \quad (2.5)$$

La soluci3n a la ecuaci3n de onda mediante separaci3n de variables admite que el campo  $D(x,t)$  este caracterizado por una onda plana con numero de onda  $k$ :

$$D(x,t) = D(t)e^{ikx} \quad (2.6)$$

Esta soluci3n deja una ecuaci3n diferencial de segundo orden para la amplitud dependiente de tiempo  $D(t)$ .

$$\varepsilon(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu(t) \frac{\partial}{\partial t} (D(t)) \right] + k^2 D(t) = 0 \quad (2.7)$$

Para resolver la Eq.(2.7) tomaremos ventaja del hecho que  $\varepsilon(t)$  y  $\mu(t)$  son constantes dentro del intervalo  $0 < t < t_1$  y  $t_1 < t < T$ . El campo  $D(t)$  tomara la forma de la Eq.(2.8).

$$D(t) = \begin{cases} D_1^+ e^{-i\omega_1 t} + D_1^- e^{i\omega_1 t}, & 0 < t < t_1 \\ D_2^+ e^{-i\omega_2 t} + D_2^- e^{i\omega_2 t}, & t_1 < t < T \end{cases} \quad (2.8)$$

Al sustituir la Eq.(2.8) en Eq.(2.7) se encuentra la relaci3n entre los par3metros  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y el n3mero de onda  $k$ .

$$\omega_1 = k/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad \omega_2 = k/\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \quad (2.9)$$

Con la Eq.(2.6) en mente, la Eq.(2.8) ondas propag3ndose hacia la izquierda y derecha de la forma  $e^{i(kx \mp \omega_{1,2} t)}$ .

El teorema de Bloch-Floquet permite extender la soluci3n de la Eq.(2.8) para un periodo temporal  $T$  hacia cualquier instante de tiempo arbitrario:

$$D(t + nT) = D(t)e^{-in\omega T} \quad (2.10)$$

La ‘‘Frecuencia de Bloch’’  $\omega$  equivale al rol que juega el vector de onda Bloch en un sistema con periodicidad espacial, y es igual a la frecuencia de excitaci3n en presencia de una fuente. Por otro lado, las frecuencias  $\omega_{1,2}$  en la Eq.(2.9) describe el comportamiento local (en tiempo) del campo durante los intervalos de tiempo  $t_{1,2}$ .

## 2. Cristal Fónico Temporal

A partir de Eq.(2.3) y Eq.(2.4) se deduce que el campo magnético  $B(t)$  y el campo  $D(t)$  deben ser continuos a través de las interfaces temporales abruptas. La condición de continuidad del campo  $D(t)$  es:

$$D(t_d^-) = D(t_d^+) \quad (2.11)$$

Donde  $t_d$  es el instante de tiempo donde ocurre la interfaz temporal. La continuidad de  $B(t) = \mu(t)H(t)$  y la Eq.(2.4) implica la siguiente condición de continuidad:

$$\mu(t_d^-)\partial D(t_d^-)/\partial t = \mu(t_d^+)\partial D(t_d^+)/\partial t \quad (2.12)$$

Ahora se aplican las condiciones de continuidad en Eq.(2.11) y Eq. (2.12) sobre la interfaz temporal creada por la modulación cuadrada en el instante de tiempo  $t_1$ , como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$D_1^+ e^{-i\omega_1 t_1} + D_1^- e^{i\omega_1 t_1} = D_2^+ e^{-i\omega_2 t_1} + D_2^- e^{i\omega_2 t_1} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \omega_1 (-D_1^+ e^{-i\omega_1 t_1} + D_1^- e^{i\omega_1 t_1}) = \\ \mu_2 \omega_2 (-D_2^+ e^{-i\omega_2 t_1} + D_2^- e^{i\omega_2 t_1}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

De manera similar se aplican las condiciones de frontera sobre las discontinuidades temporales  $t_d = 0$  y  $t_d = T$ . A partir de aquí se puede utilizar el teorema de Bloch-Floquet de la Eq.(2.10) sobre la interfaz temporal en el instante  $t = 0^+$ :

$$D(T^-) = D(T^+) = D(0^+)e^{-i\omega T} \quad (2.15)$$

Las condiciones de frontera sobre las interfaces temporales en  $t_d = 0$  y  $t_d = T$  se relacionan entre sí, y basta con satisfacer las condiciones de continuidad sobre las dos interfaces temporales tal y como se observa en las Eq.(2.13), Eq.(2.14), Eq.(2.16) y Eq.(2.17) para conocer la solución a la ecuación de onda en cualquier instante de tiempo a través de Eq.(2.10).

$$(D_1^+ + D_1^-) e^{-i\omega T} = D_2^+ e^{-i\omega_2 T} + D_2^- e^{i\omega_2 T} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \omega_1 (-D_1^+ + D_1^-) e^{-i\omega T} = \\ \mu_2 \omega_2 (-D_2^+ e^{-i\omega_2 T} + D_2^- e^{i\omega_2 T}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Las Eq.(2.13)-(2.14) y las Eq.(2.16)-(2.17) puede ser reescrita de manera compacta en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\omega_1 t_1} & e^{i\omega_1 t_1} & -e^{-i\omega_2 t_1} & -e^{i\omega_2 t_1} \\ -\mu_1 \omega_1 e^{-i\omega_1 t_1} & \mu_1 \omega_1 e^{i\omega_1 t_1} & \mu_2 \omega_2 e^{-i\omega_2 t_1} & -\mu_2 \omega_2 e^{i\omega_2 t_1} \\ e^{-i\omega T} & e^{-i\omega T} & -e^{-i\omega_2 T} & -e^{i\omega_2 T} \\ -\mu_1 \omega_1 e^{-i\omega T} & \mu_1 \omega_1 e^{-i\omega T} & \mu_2 \omega_2 e^{-i\omega_2 T} & -\mu_2 \omega_2 e^{i\omega_2 T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^+ \\ D_1^- \\ D_2^+ \\ D_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

## 2. Cristal Fónico Temporal

---

La solución no trivial de la Eq.(2.18) implica que el determinante de la matriz  $4 \times 4$  debe ser cero. Estas cuatro ecuaciones determinan tres de las amplitudes del campo  $D$  en términos del cuarto termino restante (En principio, la cuarta amplitud indeterminada puede estar asociada con una amplitud de excitación).

Es conveniente normalizar la frecuencia  $\omega$  ay el número de onda  $k$  con respecto a la frecuencia de modulación  $\Omega$  de acuerdo a la Eq. (2.19):

$$\hat{\omega} = \omega/\Omega, \quad \hat{k} = k/\Omega\sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}} \quad (2.19)$$

También se introduce el parámetro  $\tau = t_1/T$ . Para  $\tau < 0.5$ ,  $t_1 < t_2$  mientras que para  $\tau > 0.5$ ,  $t_1 > t_2$ . En un principio nos limitaremos al caso mas simple,  $t_1 = t_2$ , donde  $\tau = 0.5$ . Eventualmente se consideran valores diferentes de  $\tau$ . El determinante de Eq.(2.18) tiene solución exacta, y después de igualarlo a cero se puede obtener una el valor de la frecuencia normalizada  $\hat{\omega}$  como una función del vector de onda normalizado  $\hat{k}$ :

$$\begin{aligned} \cos(2\pi\hat{\omega}) = & \frac{1}{2}(1 - M_A) \cos \left\{ 2\pi\hat{k} \left[ \frac{\tau}{M^+} - \frac{1}{M^-}(1 - \tau) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2}(1 + M_A) \cos \left\{ 2\pi\hat{k} \left[ \frac{\tau}{M^+} + \frac{1}{M^-}(1 - \tau) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$M^\pm = \sqrt{(1 \pm m_\epsilon)(1 \pm m_\mu)} \quad (2.21)$$

$$M_A = (1 - m_\epsilon m_\mu)/M^- M^+ \quad (2.22)$$

Esta relación de dispersión trascendental involucra tres parámetros: El parámetro  $\tau$ , la modulación dieléctrica  $m_\epsilon$  y la modulación magnética  $m_\mu$ . Esta relación de dispersión es periódica en  $\hat{\omega}$  con periodo 1 (es periódica con respecto a la frecuencia de modulación), sin embargo, en general, no es periódica con respecto al vector de onda normalizado  $\hat{k}$ . En secciones adelante se analizan las relaciones de dispersión con periodicidad de  $\hat{\omega}$  y  $\hat{k}$ . Para  $m_\mu = 0$  y  $\tau = 1/2$  la Eq.(2.20) se reduce a resultados previamente reportados en la literatura.

En este punto es interesante mostrar el comportamiento de la relación de dispersión en el límite de longitud de onda larga y baja frecuencia, es decir  $\hat{\omega} \rightarrow 0$  y  $\hat{k} \rightarrow 0$ . En esa condición la Eq.(2.20) se reduce a Eq.(2.23).

$$\frac{\omega}{k} = \left[ \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}(1 - m_\epsilon^2)}{1 + m_\epsilon - 2m_\epsilon\tau}} \sqrt{\frac{\bar{\mu}(1 - m_\mu^2)}{1 + m_\mu - 2m_\mu\tau}} \right]^{-1} \quad (2.23)$$

Como puede observarse, en este límite la velocidad de fase es constante, y además la relación de dispersión  $\omega(k)$  es lineal. El mismo límite fue investigado en [8] (apéndice D) para modulación únicamente de la permitividad ( $m_\mu = 0$  y  $\bar{\epsilon} = 1$ ) y  $\epsilon(t)$  con un perfil arbitrario. La permitividad efectiva calculada fue:

$$1/\tilde{\epsilon} = \frac{1}{T} \int_0^T [1/\epsilon(t)] dt \quad (2.24)$$

De acuerdo a Eq.(2.1), la permitividad efectiva de un medio con modulación cuadrada de permitividad y  $m_\mu = 0$  es:

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}(1 - m_\epsilon^2)}{1 + m_\epsilon - 2m_\epsilon\tau}} \quad (2.25)$$

Si el medio solo tiene modulación de permeabilidad cuadrada y  $m_\epsilon = 0$ , la permeabilidad efectiva es:

$$\tilde{\mu} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}(1 - m_\mu^2)}{1 + m_\mu - 2m_\mu\tau}} \quad (2.26)$$

Si se observa la Eq.(2.23) se puede ver que para un caso general de modulación cuadrada (y el límite de longitud de onda larga) la velocidad de fase es inversamente proporcional a los valores efectivos de permitividad y permeabilidad,  $\omega/k = (\tilde{\epsilon}\tilde{\mu})^{-1}$ .

## 2.2. Relación de dispersión y forma de los campos electromagnéticos

A continuación se va a considerar el caso cuando  $t_1 = t_2$ , es decir,  $\tau = 0.5$ .

### 2.2.1. Inequidad entre la modulación de permitividad y permeabilidad

En la Fig.2.2 se presenta una relación de dispersión que corresponde a un medio con modulaciones  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$ ; Los diferentes signos algebraicos indican que  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$  oscilan fuera de fase en este ejemplo. Los dos periodos de frecuencia (correspondiendo de  $0 < \omega < \Omega$  y  $\Omega < \omega < 2\Omega$ ) indican que la relación de dispersión es periódica con respecto a la frecuencia angular normalizada  $\hat{\omega}$ , el periodo aquí es la frecuencia de modulación  $\Omega$ . Las primeras nueve bandas de  $\hat{k}$  están etiquetadas como

## 2. Cristal Fónico Temporal

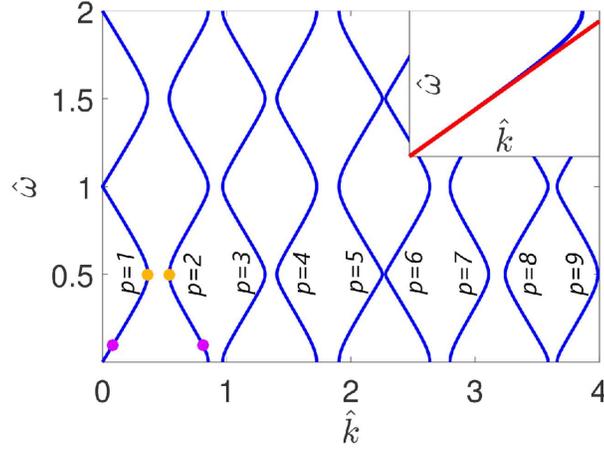


Fig. 2.2: Relación de dispersión de la frecuencia normalizada  $\hat{\omega}$  versus el número de onda normalizado  $\hat{k}$  de acuerdo a la ecuación 2.19. Aquí  $t_1 = t_2$  ( $\tau = 0.5$ ) y las modulaciones de permitividad y permeabilidad están fuera de fase, estos valores son  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$  respectivamente. Son presentados dos periodos de la frecuencia (periodo  $\Omega = 2\pi/T$ ) y nueve bandas permitidas de  $k$  etiquetadas con el índice  $p$ . La relación de dispersión esta formada de líneas azules para modos con  $\hat{\omega}$  real. El recuadro de la figura muestra el comportamiento de los modos con baja frecuencia y longitud de onda larga comparada con la velocidad de fase en el limite de la ecuación 2.23.

$p = 1, 2, \dots, 9$  y están separadas por bandas prohibidas de  $\hat{k}$ . Estas bandas prohibidas están definidas como  $\Delta k_{p,p+1} = k_{p+1} - k_p$ , que están limitadas por valores de  $\hat{k}$  reales y tienen frecuencia  $\omega = (1/2)n\Omega$  donde  $n$  es un entero. El recuadro dentro de Fig.2.2 es un aumento de la región de baja frecuencia y longitud de onda larga. La pendiente  $\hat{\omega}/\hat{k}$  es una recta (línea roja) de acuerdo a lo demostrado por Eq.(2.23).

Es interesante comparar la Fig.2.2 (modulación cuadrada) con la relación de dispersión debido a una modulación armónica. Ejemplos de modulación armónica se muestran en la Fig.2.3 de la referencia [8] para  $m_\mu = 0$  y Fig.2.1 de la referencia [14] para  $m_\epsilon \neq m_\mu$ . Hay diferencias cualitativas entre ambos perfiles de modulación. Para una modulación armónica no existen bandas prohibidas apreciables entre las bandas  $p = 2$  y  $p = 3$ ,  $p = 4$  y  $p = 5$ , etc. Por otro lado, para una modulación cuadrada si existen múltiples bandas prohibidas, tal como aparece en la Fig.2.2. Se aprecia una diferencia cuantitativa entre ambos perfiles de modulación también. Mientras para la modulación armónica únicamente la primera banda es apreciable, las múltiples bandas prohibidas

debido a la modulación cuadrada aparecen entre todas las bandas permitidas, además estas bandas prohibidas no disminuyen conforme se incrementa el número de la banda  $p$ ;  $\Delta k_{p,p+1}$  tiene una complicada dependencia con las modulaciones de permitividad y permeabilidad. Por ejemplo, en la Fig.2.2 la banda prohibida de  $\hat{k}$  más pequeña es  $\Delta k_{5,6}$ , a pesar de estar flanqueada por las dos bandas prohibidas apreciablemente más grandes,  $\Delta k_{4,5}$  y  $\Delta k_{6,7}$ . Este comportamiento está relacionado con la presencia de armónicos de alta frecuencia que conforman los perfiles cuadrados de permitividad y permeabilidad de la Fig.2.1.

Regresando al cálculo de los eigenvectores de la Eq.(2.18) se muestra que los coeficientes  $D$  dependen del valor de  $\hat{\omega}$  y  $\hat{k}$ , por lo tanto para una frecuencia  $\hat{\omega}$  deben calcularse las amplitudes para cada banda  $p$  por separado. En el apéndice A se comprueba que los campos electromagnéticos calculados como eigenvectores de la Eq.(2.18) son estables. Solo para un sistema bien definido, excitado por una fuente, existe la posibilidad de determinar las contribuciones relativas de cada banda  $p$  al campo  $D$ . Una interpretación completa del comportamiento de  $D(t)$  puede involucrar oscilaciones con cuatro frecuencias: La frecuencia de modulación  $\Omega$ , La frecuencia de Bloch-Floquet  $\omega$  y las frecuencias auxiliares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  vistas en la Eq.(2.9). El comportamiento puede ser entendido por la siguiente formulación del teorema de Bloch-Floquet [de la cual puede ser derivada la Eq. (2.10)]: El campo  $D(t)$  es el producto de  $e^{-i\omega t}$  y una función periódica cuyo periodo es igual a la modulación  $2\pi/\Omega$ . Para  $\omega < \Omega$ , significa que una oscilación relativamente rápida de frecuencia  $\Omega$  está modulada por una oscilación más lenta, reflejando una envolvente de frecuencia  $\omega$ . Esto es claramente observado en la Fig.2.3 para la segunda banda ( $p = 2$ ) en la Fig.2.2. Ahí se muestran los periodos  $T$  y  $10T$  (correspondiendo a la selección de la frecuencia normalizada  $\hat{\omega} = 0.1$ ). Por otra parte, el campo  $D(t)$  para la primera banda ( $p = 1$ ) tiene la forma  $\cos(\omega t)$  con  $\omega = 0.1\Omega$ , lo que sería apropiado para un medio con permitividad y permeabilidad constante. Esto no es para nada sorprendente si recordamos que este modo de propagación tiene baja frecuencia, está dentro de la longitud de onda larga y tiene velocidad de fase dada por la Eq.(2.23).

No hay indicios de las oscilaciones con frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en Fig.2.3 dado que los periodos correspondientes,  $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 13.51T$  y  $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 8.62T$  son demasiado grandes para visibilizar su efecto dentro de un solo periodo  $T$ . Se espera que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se hagan notar si sus periodos  $T_1$  y  $T_2$  son más pequeños que  $T$ . La Eq.(2.9)

## 2. Cristal Fónico Temporal

---

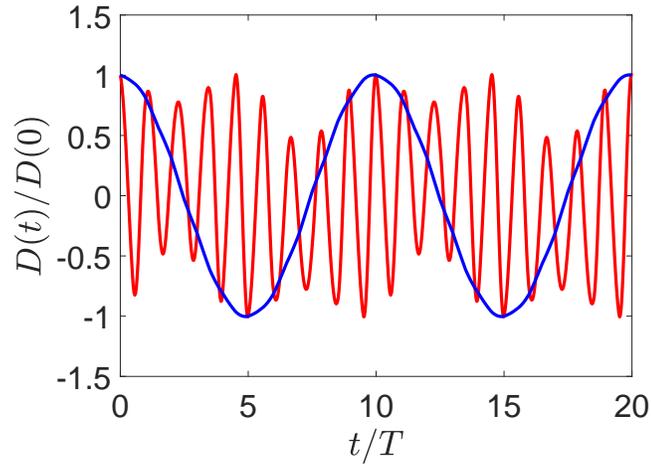


Fig. 2.3: Campo desplazamiento eléctrico normalizado para las primeras dos bandas permitidas ( $p = 1$  en línea azul y  $p = 2$  en línea roja) en la Fig.2.2. Este campo fue calculado para  $\omega = 0.1\Omega$  y representa los modos de propagación marcados con los puntos rosas en la Fig.2.2.

sugiere que eso se puede lograr para valores grande de  $k$ , es decir para modos localizados en bandas distantes ( $p \gg 1$ ). En la Fig.2.4 se graficó el campo  $D(t)$  para la banda  $p = 15$ ; ahora  $T_1 = 0.179T$  y  $T_2 = 0.1147T$ . Ahora, ciertamente, se pueden observar las oscilaciones de periodo  $T_1$  ( $T_2$ ) en la primera (segunda) mitad de cada periodo  $T$ .

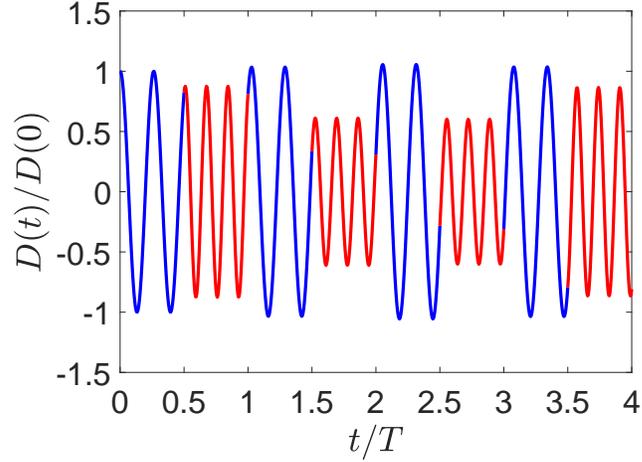


Fig. 2.4: Campo desplazamiento eléctrico normalizado para la banda permitida  $p = 15$ . Debido al gran valor de  $k$  en esta banda, los periodos  $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.179T$  (líneas azules) y  $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.1147T$  (líneas rojas) son notablemente distinguibles dentro de cada periodo  $T$ .

El caso  $\omega = (1/2)\Omega$  (puntos naranjas en al Fig.2.2) merece atención especial. Se encontró numéricamente en la Eq.(2.8) que  $D_1^- = D_1^{+*}$  y  $D_2^- = D_2^{+*}$ . El asterisco significa “complejo conjugado”. Eso implica que  $D(t)$  es proporcional a  $\cos[(1/2)\Omega t + \phi_{1,2}]$ , donde  $\phi_{1,2}$  son ángulos de fase correspondientes a  $k_{1,2}(\omega = \Omega/2)$ . De acuerdo a la ecuación Eq.(2.6) y sabiendo que  $Re(D(x,t))$  es proporcional a  $\cos(k_{1,2}x)\cos[(1/2)\Omega t + \phi_{1,2}]$ , se determina que para las primeras dos bandas se trata de ondas estacionarias. Este resultado ya ha sido reportado para modulación armónica [58] y explica el comportamiento de ambas bandas en la Fig.2.5 dada por una oscilación simple de frecuencia  $(1/2)\Omega$  en lugar de ondas de Bloch-Floquet que se propagan.

La continuidad de  $D(t)$ , establecida explícitamente en la ecuación (2.11), está manifestada en las Fig.(2.3)-(2.5). Por otro lado, se espera que el campo eléctrico  $E(t)$  sea discontinuo en tiempo debido a las discontinuidades de  $\epsilon(t)$  en los instantes de tiempo  $t_d = (T/2)n$  ( $n$  siendo un número entero). Esto es confirmado por la Fig.2.6 donde se comparan los campos  $E(t)$  y  $D(t)$ .

## 2. Cristal Fónico Temporal

---

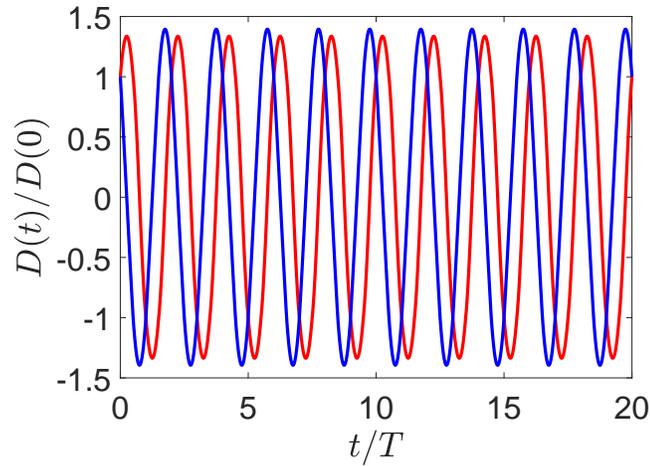


Fig. 2.5: Campo desplazamiento eléctrico normalizado para las primeras bandas permitidas ( $p = 1, 2$ ) en la Fig.2.2 para la frecuencia  $\omega = 0.5\Omega$  (Puntos naranjas en la Fig.2.2).

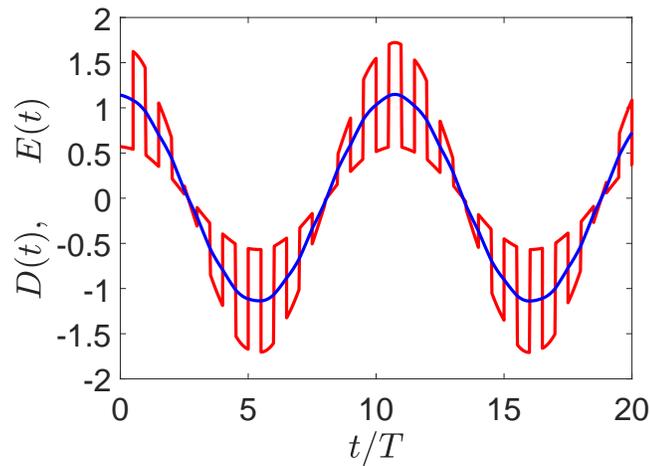


Fig. 2.6: El campo desplazamiento eléctrico  $D(t)$  (línea azul) y el campo eléctrico  $E(t)$  (línea roja) para la primera banda permitida en la Fig.2.2 para  $\omega = 0.1\Omega$ . Mientras  $D(t)$  es continuo a través de las discontinuidades de  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$ , según la ecuación (2.11), el campo eléctrico  $E(t) = D(t)/\epsilon(t)$  es obviamente discontinuo.

### 2.2.2. Modulación de igual magnitud y fuera de fase

En esta subsección se trata con modulaciones de permitividad y permeabilidad de igual magnitud pero fuera de fase. Esta situación se describe mediante un solo parámetro de modulación  $m = m_\epsilon = -m_\mu$ . La Eq. (2.20) se simplifica bastante bajo este escenario de modulación:

$$\cos\left(\frac{2\pi\hat{k}}{\sqrt{1-m^2}}\right) = m^2 + (1-m^2)\cos(2\pi\hat{\omega}) \quad (2.27)$$

La relación de dispersión es periódica en  $\hat{k}$ , como se ve en la Fig.2.7. En la siguiente sección se analiza en profundidad la condición de periodicidad. Las soluciones para las bandas permitidas de  $k$ , pares e impares, junto con sus valores límite cuando  $(\omega = \Omega/2)$  se muestran en las Eq.2.28 y Eq.2.29. Con el entendimiento que  $0 < |\cos^{-1}(2m^2 - 1)| < \pi$ .

$$\hat{k}_p = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2} \left( p - 1 + \frac{|\cos^{-1}(2m^2-1)|}{\pi} \right), \quad p = 1, 3, 5 \dots \quad (2.28)$$

$$\hat{k}_{p+1} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2} \left( p + 1 - \frac{|\cos^{-1}(2m^2-1)|}{\pi} \right), \quad p = 1, 3, 5 \dots \quad (2.29)$$

La separación entre bandas permitidas adyacentes independientemente del índice  $p$  de la banda es:

$$\Delta\hat{k}_{p,p+1} = \sqrt{1-m^2} \left( 1 - \frac{|\cos^{-1}(2m^2-1)|}{\pi} \right) \quad (2.30)$$

El valor central de la banda permitida se calcula con Eq.2.31, y por lo tanto el GMGR estara determinado por la Eq.2.32.

$$\hat{k}_{p,p+1} = \frac{\hat{k}_p + \hat{k}_{p+1}}{2} = p \frac{\sqrt{1-m^2}}{2} \quad (2.31)$$

$$\frac{\Delta\hat{k}_{p,p+1}}{\hat{k}_{p,p+1}} = \frac{2}{p} \left( 1 - \frac{|\cos^{-1}(2m^2-1)|}{\pi} \right) \quad (2.32)$$

A diferencia de lo mostrado en la Fig.2.2, para este caso de modulación la Eq.(2.30) indica que todas las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  son iguales. Esto se confirma con la Fig.2.7 para dos valores de modulación  $m$ . Es de notar que no existen bandas prohibidas entre las bandas  $p = 2, 3$ ,  $p = 4, 5$ , etc (bandas prohibidas que si aparecen en

## 2. Cristal Fónico Temporal

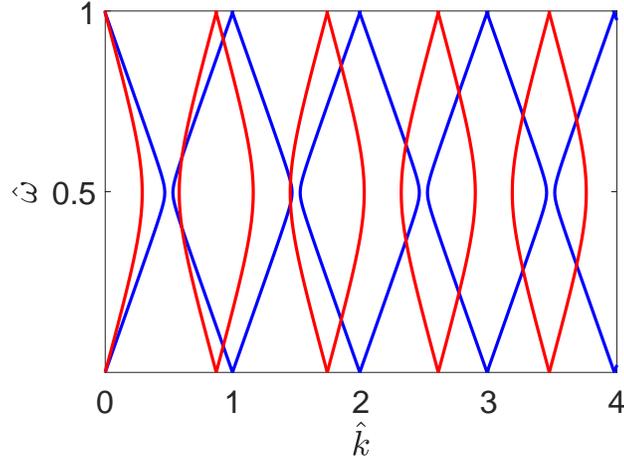


Fig. 2.7: Relación de dispersión para modulaciones de igual magnitud y fuera de fase:  $m_\epsilon = -m_\mu = m = 0.1$  (línea azul) and  $0.5$  (línea roja). Todas las bandas prohibidas son iguales para una modulación dada de acuerdo a la ecuación (2.30).

Fig.2.2). El GMGR de la Eq.(2.32) esta plasmado en Fig.2.8 para la primera (línea azul) y segunda (línea roja) banda prohibida de la Fig.2.7 en función de la modulación  $m$ .

### 2.2.3. Modulación de igual magnitud y en fase

En esta subsección las modulaciones de permitividad y permeabilidad seran de igual magnitud y en fase, es decir,  $m_\epsilon = m_\mu = m$ . Aquí el máximo (también el mínimo) valor de  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$  ocurren simultáneamente durante el mismo intervalo de tiempo. En este escenario de modulación también se reduce considerablemente la Eq.(2.20). La relación de dispersión para cualquier banda  $p$  es la Ec.2.32.

$$\hat{k}_p = (1 - m^2) \left\{ (-1)^{p-1} \hat{\omega} + \left[ \frac{p}{2} - \frac{1 + (-1)^{p-1}}{4} \right] \right\} \quad (2.33)$$

La relación de dispersión de la Fig.2.9 para dos valores distintos de modulación es una colección de líneas rectas con pendiente positiva y negativa que incrementa con el valor de  $m$ . La pendiente de esas líneas rectas son iguales a las calculadas con la Eq.(2.23) para el límite cuando  $\omega \rightarrow 0, k \rightarrow 0, \tau = 0.5$  y  $m_\epsilon = m_\mu = m$ . El aspecto más notable de la Fig.2.9 es la total ausencia de bandas prohibidas. Este comportamiento también fue

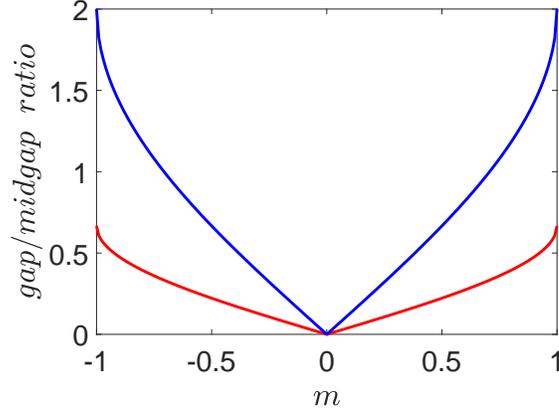


Fig. 2.8: Gap/midgap ratios entre las bandas 1 y 2 (línea azul), 3 y 4 (línea roja) en Fig.2.7, como función de la modulación  $m$ , de acuerdo a Eq.(2.32).

encontrado para modulaciones armónicas de  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$  [14]. Con el fin de explicar lo anterior se analizan los eigenvectores.

Resulta que para  $\omega/k > 0$  las amplitudes  $D_{1,2}^- = 0$ , mientras que para  $\omega/k < 0$  se obtienen las amplitudes  $D_{1,2}^+ = 0$ . Esto significa que para pendientes positivas (negativas) existe solamente ondas que se propagan hacia la derecha (izquierda). En otras palabras, no hay reflexiones debido a la interfaz temporal  $t_d$ . Si se analiza la impedancia característica del medio a través de la interfaz temporal se puede explicar este comportamiento. Para iniciar se consideran las modulaciones  $m_\epsilon = m_\mu$ . Aquí las impedancias características a ambos lados de la interfaz temporal son  $\mu_1/\epsilon_1$  y  $\mu_2/\epsilon_2$ , de acuerdo a la Eq.(2.1) y la Eq.(2.2). La impedancia característica  $Z$  en los intervalos de tiempo  $t_1(= T/2)$  y  $t_2(= T/2)$  son iguales:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = Z_2 \quad (2.34)$$

La impedancia promedio  $\bar{Z} = \sqrt{\bar{\mu}/\bar{\epsilon}}$  ha sido definida en términos de la permitividad promedio  $\bar{\epsilon}$  y la permeabilidad promedio  $\bar{\mu}$  (ver Fig.2.1). Esto permite asociar las bandas prohibidas de  $k$  con las reflexiones del campo en las interfaces temporales cuando implica una discontinuidad de impedancia característica.

## 2. Cristal Fónico Temporal

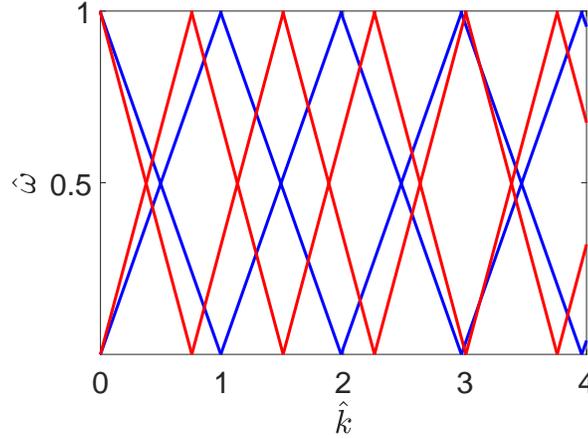


Fig. 2.9: La relación de dispersión para modulaciones iguales y en fase se distingue por velocidades de grupo constantes (positivas y negativas) y ausencia de bandas prohibidas. Dos casos de modulación son consideradas aquí:  $m = 0.1$  (líneas azules) y  $m = 0.5$  (líneas rojas). Las pendientes están dadas por la Eq.(2.33).

### 2.3. Variación de $\tau$

La Fig.2.1 muestra un ejemplo donde los intervalos de tiempo son desiguales,  $t_1 \neq t_2$ . En términos del parámetro  $\tau = t_1/T$  significa que  $\tau \neq 0.5$ . En la sección anterior se consideraron situaciones donde  $\tau = 0.5$ , siendo este el escenario típico, sin embargo, en esta sección se explora un poco de los efectos del parámetro  $\tau$  afectando la primera bandas prohibida.

La Fig.2.10 presenta la razón gap/midgap (GMGR) como función del parámetro  $\tau$  para tres casos distintos de modulación fuera de fase. La razón Gap/midgap es el cociente entre el ancho de la banda prohibida  $\Delta\hat{k}$  y su valor central  $\bar{k}$ . Para  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.5$  (línea negra) se obtiene el mayor GMGR cuando  $\tau = 0.5$  y va decreciendo simétricamente conforme  $\tau$  se aproxima a los valores límite 0 y 1, donde el valor GMGR desvanece debido a que  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$  se vuelven constantes. En la Fig.2.7 (línea azul) se muestra la estructura de bandas para  $\tau = 0.5$ . Las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}$  mostradas en esa imagen corresponden al valor mas ancho que se puede obtener para las modulaciones  $m_\mu = -m_\epsilon$ . Por otro lado, cuando se considera  $|m_\epsilon| \neq |m_\mu|$  (líneas rojas y azules) los GMGR son asimétricos con respecto a  $\tau$ ,teniendo sus máximos en  $\tau = 0.6104$  para  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$ , y en  $\tau = 0.3896$  para  $m_\epsilon = -0.5$  y  $m_\mu = 0.1$ .

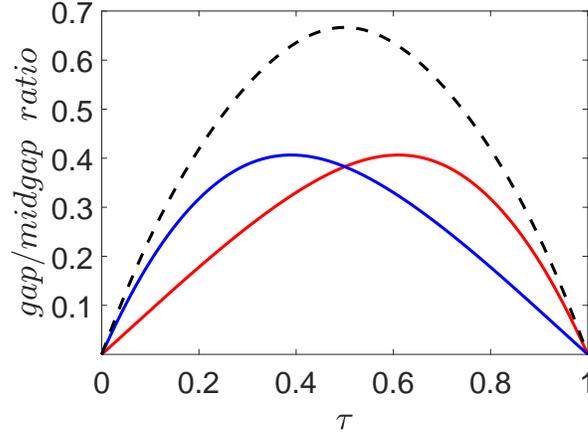


Fig. 2.10: Primera GMGR como función de  $\tau = t_1/T$  (ver Fig.2.1) para tres casos de modulación igual y fuera de fase:  $m_\epsilon = -0.5$  y  $m_\mu = 0.1$  (línea azul),  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$  (línea roja);  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.5$  (línea negra punteada).

Estos dos valores de  $\tau$  son complementarios en el sentido que ambos suman 1. Es posible probar que para un valor dado de modulaciones  $m_\epsilon$  y  $m_\mu$  el valor máximo de GMGR esta determinado por el valor de  $\tau$  según la Eq.(2.35).

$$\tau = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(1-m_\epsilon)(1-m_\mu)}{(1+m_\epsilon)(1+m_\mu)}}} \quad (2.35)$$

En secciones siguientes se demostrará la importancia del parámetro  $\tau$  para obtener relaciones de dispersión con periodicidad del vector de onda  $k$ .

## 2.4. Respuesta óptica

Hasta ahora se consideró la propagación de campos electromagnéticos en un medio modulado en tiempo uniforme e infinito. En esta sección se muestra la respuesta óptica de una placa dieléctrica cuya permitividad y permeabilidad están moduladas periódicamente en el tiempo. La placa finita se extiende desde  $x = -L/2$  hasta  $x = L/2$  y está rodeada a ambos lados por un medio no modulado con permitividad  $\epsilon_1$  y permeabilidad  $\mu_1$ . El cálculo de la respuesta óptica de la placa considera únicamente una onda plana con incidencia normal, frecuencia angular  $\omega$  y número de onda  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ ; los

## 2. Cristal Fónico Temporal

---

campos eléctrico y magnético incidentes están definidos como:

$$E_{inc}(x,t) = E_0 e^{ik_0(x+L/2)} e^{-i\omega t} \quad (2.36)$$

$$H_{inc}(x,t) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0 e^{ik_0(x+L/2)} e^{-i\omega t} \quad (2.37)$$

La relación de dispersión, de acuerdo a la Eq.(2.20), predice que los campos dentro de la placa modulada son la superposición de ondas planas con números de onda  $k_p(\omega)$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , sin embargo, para una frecuencia angular  $\omega$  todos los armónicos,  $\omega - n\Omega$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  pueden ser excitados. Por lo tanto, el campo eléctrico se expresa de la siguiente manera:

$$E_{slab}(x,t) = \sum_n \sum_{p=1} e_{pn} e^{-i(\omega-n\Omega)t} \left[ A_p e^{ik_p(x+L/2)} + B_p e^{-ik_p(x+L/2)} \right] \quad (2.38)$$

$A_p$  y  $B_p$  son las amplitudes de las ondas parciales que se propagan hacia la derecha e izquierda, respectivamente. Los eigenvectores del campo eléctrico  $e_{pn}$  son obtenidos de la ecuación de eigenvalores para el medio infinito (problema bulk), como en [14]:

$$\sum_{m,n} [\hat{\mu}_{l-m} \hat{\epsilon}_{m-n} (\hat{\omega} - l) (\hat{\omega} - m) - \hat{k}_p^2 \delta_{ln} \delta_{m0}] e_{pn}(\hat{\omega}) = 0$$

$$l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.39)$$

Los coeficiente de Fourier normalizados  $\hat{\mu}_n$  y  $\hat{\epsilon}_n$  deben ser calculados para las funciones cuadradas de  $\mu(t)$  y  $\epsilon(t)$  en Fig.2.1.

El campo magnético  $H_{slab}(x,t)$  tiene la misma forma que  $E_{slab}(x,t)$ , Eq.(2.38), pero con los coeficientes  $e_{pn}$  remplazados por los eigenvectores  $h_{pn}$  correspondientes. Estos eigenvectores son obtenidos de la ley de Ampère-Maxwell y se muestran en la Eq.(2.40).

$$h_{pn} = \sum_m \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\mu}}} \frac{\hat{\epsilon}_{n-m}(\hat{\omega} - n)}{\hat{k}_p} e_{pm} \quad (2.40)$$

Los vectores de onda reducidos  $\hat{k}_p(\hat{\omega})$  en Eq.(2.39) y Eq.(2.40) se pueden obtener de manera conveniente usando la Eq.(2.20). Los eigenvectores  $e_{pn}(\hat{\omega})$  pueden calcularse

mediante el método KP de la Eq.(2.18), sin embargo, aquí es más conveniente emplear la Eq.(2.39). El resultado del cálculo para  $\hat{k}_p(\hat{\omega})$  y los eigenvalores  $e_{pn}(\hat{\omega})$  es prácticamente el mismo utilizando ambos métodos, la similitud aumenta entre mas armónicos se consideren en la Eq.(2.39). Se utilizó ambos métodos para calcular los eigenvectores  $e_{1n}(\hat{\omega} = 0.4)$  para la primera banda permitida ( $p = 1$ ), y 21 armónicos diferentes de  $n$  para para ilustrar lo anterior. La excelente coincidencia mostrada para las amplitudes del peine de frecuencias en la Fig.2.11 confirma la equivalencia entre ambos métodos de cálculo.

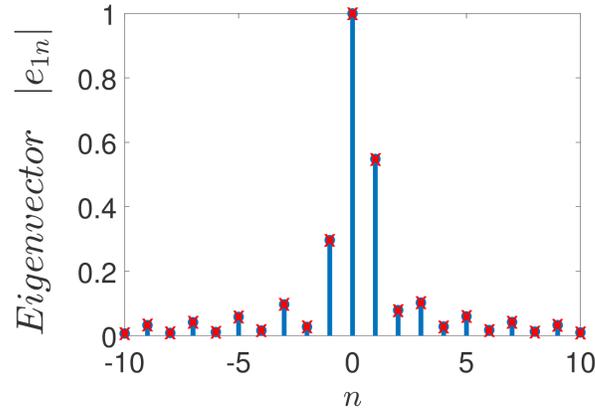


Fig. 2.11: Amplitudes del campo eléctrico  $|e_{1n}|$  para la primera banda  $k(p = 1)$  y los armónicos  $n$  desde  $-10$  hasta  $+10$ . La frecuencia normalizado es  $\hat{\omega} = 0.4$  y las modulaciones son  $m_\epsilon = 0.5$ ,  $m_\mu = -0.1$ . Los eigenvectores han sido calculados con dos métodos: La representación en series de Fourier del método de Krönig-Penney (líneas azules) de la Eq.(2.18); La ecuación de eigenvalores de la ecuación Eq.(2.39) para el problema bulk (puntos rojos).

Los campos eléctrico y magnético que son reflejados y transmitidos por la placa modulada estan determinados por las siguientes cuatro ecuaciones:

## 2. Cristal Fónico Temporal

$$E_r(x, t) = \sum_n E_n^r e^{-ik_n^r(x+L/2)} e^{-i(\omega-n\Omega)t} \quad (2.41)$$

$$H_n^r(x, t) = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_r(x, t) \quad (2.42)$$

$$E_t(x, t) = \sum_n E_n^t e^{ik_n^t(x-L/2)} e^{-i(\omega-n\Omega)t} \quad (2.43)$$

$$H_t(x, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_t(x, t) \quad (2.44)$$

Los campos  $E$  y  $H$  deben de ser continuos a través de los límites de la placa dieléctrica  $x = \pm L/2$  en cada instante de tiempo  $t$ . Las cuatro ecuaciones anteriores son obtenidas al utilizar las Eqs.(2.36)-(2.37) para los campos incidentes, Eqs.(2.41)-(2.44) para los campos reflejados y transmitidos, y Eqs.(2.38)-(2.40) para los campos dentro de la placa modulada:

$$\frac{E_n^r}{E_0} = r_n = \sum_{p=1} \left( \frac{A_p}{E_0} + \frac{B_p}{E_0} \right) e_{pn} - \delta_{n0} \quad (2.45)$$

$$\frac{E_n^t}{E_0} = t_n = \sum_{p=1} \left( \frac{A_p}{E_0} e^{i\hat{k}_p v} + \frac{B_p}{E_0} e^{-i\hat{k}_p v} \right) e_{pn} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} 2\delta_{n0} = & \sum_{p=1} \left[ e_{pn} + \sum_m \frac{\hat{\epsilon}_{n-m}(\hat{\omega} - n)\hat{Z}}{\hat{k}_p} e_{pm} \right] \frac{A_p}{E_0} \\ & + \sum_{p=1} \left[ e_{pn} - \sum_m \frac{\hat{\epsilon}_{n-m}(\hat{\omega} - n)\hat{Z}}{\hat{k}_p} e_{pm} \right] \frac{B_p}{E_0} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{p=1} \left[ e_{pn} - \sum_m \frac{\hat{\epsilon}_{n-m}(\hat{\omega} - n)\hat{Z}}{\hat{k}_p} e_{pm} \right] e^{i\hat{k}_p v} \frac{A_p}{E_0} \\ & + \sum_{p=1} \left[ e_{pn} + \sum_m \frac{\hat{\epsilon}_{n-m}(\hat{\omega} - n)\hat{Z}}{\hat{k}_p} e_{pm} \right] e^{-i\hat{k}_p v} \frac{B_p}{E_0} \end{aligned} \quad (2.48)$$

En estas ecuaciones  $\hat{Z}$  es la impedancia característica promedio de la placa  $\sqrt{\bar{\mu}/\bar{\epsilon}}$  normalizada con la impedancia  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  del medio que la rodea. Es decir, la impedancia relativa:

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\epsilon}}} \quad (2.49)$$

El grosor de la placa  $L$  también es normalizado de acuerdo a lo mostrado en [22]

$$v = \Omega \sqrt{\bar{\epsilon} \bar{\mu}} L \quad (2.50)$$

Las ecuaciones (2.47) y (2.48) permiten calcular las amplitudes relativas del campo eléctrico  $A_p/E_0$  y  $B_p/E_0$ . Una vez determinadas esas amplitudes relativas, los coeficientes de reflexión  $r_n$  y transmisión  $t_n$  pueden ser encontradas con las ecuaciones (2.45) y (2.46), respectivamente. Los campos reflejados y transmitidos también exhiben el característico peine de frecuencias  $|\omega - n\Omega|$  (o, en forma normalizada,  $|\hat{\omega} - n|$ ).

A continuación se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión parciales,  $|r_n(\hat{\omega})|^2$  y  $|t_n(\hat{\omega})|^2$  respectivamente, para tres casos diferentes de modulación de  $m_\epsilon$  y  $m_\mu$ . En todos esos casos el grosor de placa modulada,  $v$ , tendrá valor 1. Aquí se asegura que el grosor de la placa no induzca resonancias paramétricas.

En Figs.2.12(a)-(b) se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión parciales  $|r_n(\hat{\omega})|^2$  and  $|t_n(\hat{\omega})|^2$  para  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$ , este es un caso de modulaciones diferentes y fuera de fase. En Fig.2.12(c) se obtiene la reflectancia total  $R(\hat{\omega}) = |r_0(\hat{\omega})|^2 + |r_1(\hat{\omega})|^2 + \dots$  y la transmitancia total  $T(\hat{\omega}) = |t_0(\hat{\omega})|^2 + |t_1(\hat{\omega})|^2 + \dots$ . El comportamiento mostrado recuerda al mismo comportamiento de un interferómetro de Fabry-Perot, pero aquí suceden interferencias entre múltiples ondas con longitudes de onda  $\lambda_p (= 2\pi/k_p, p = 1, 2, \dots)$ . Esto obedece a una compleja y no lineal estructura de bandas, ver Fig.2.2. Esta es la razón por la cual las oscilaciones no son armónicas, y que  $|r_n(\hat{\omega})|$  y  $|t_n(\hat{\omega})|$  no llegaran a valores de 0 o 1, sin embargo, se demuestra que  $R(\hat{\omega}) + T(\hat{\omega}) > 1$ . Lo anterior implica una transferencia de energía desde la placa modulada [22, 23].

## 2. Cristal Fónico Temporal

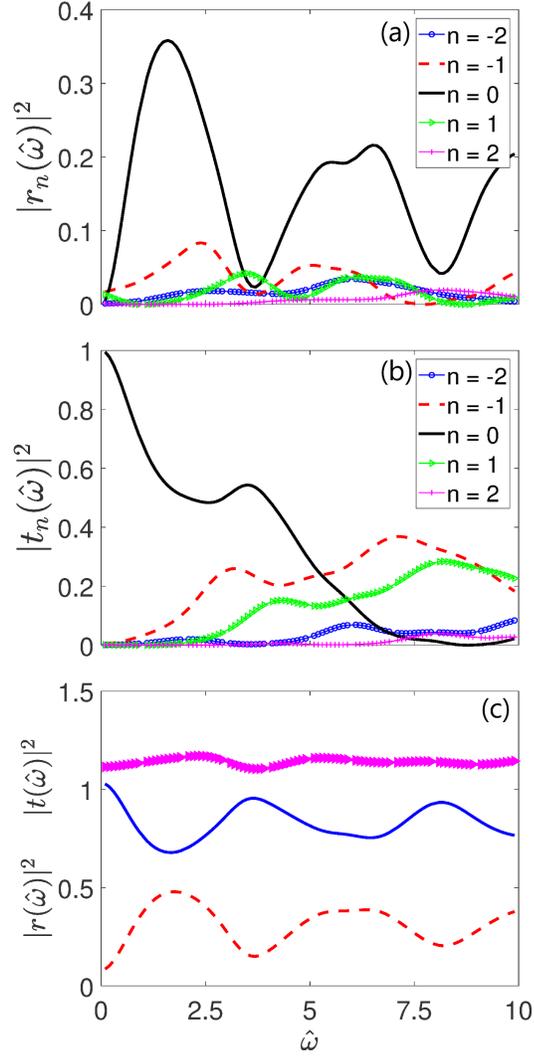


Fig. 2.12: (a) Reflectancia y (b) transmitancia para los armónicos  $n = 0, \pm 1, y \pm 2$  asumiendo una impedancia relativa  $\hat{Z} = 0.5$ ,  $v = 1$  y modulaciones  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.1$ . La reflectancia total  $R(\hat{\omega})$  (línea roja), transmitancia total  $T(\hat{\omega})$  (línea azul) y  $R(\hat{\omega}) + T(\hat{\omega})$  (línea rosa) obtenidas al sumar las contribuciones de todos los armónicos  $n$ , aparecen en (c).

En la Fig.2.13 se muestra el caso de modulación igual y fuera de fase con valores  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.5$ . En la imagen se muestran las reflectancias y transmitancias para los mismos cinco armónicos  $n$  que mostró la Fig.2.12, sin embargo aquí se elige una impedancia relativa  $\hat{Z} = 1$ . Es interesante que solamente los armónicos  $n = \pm 1$  son

prominentes en los coeficientes de reflexión, mientras solo el armónico fundamental  $n = 0$  es apreciable en los coeficientes de transmisión.

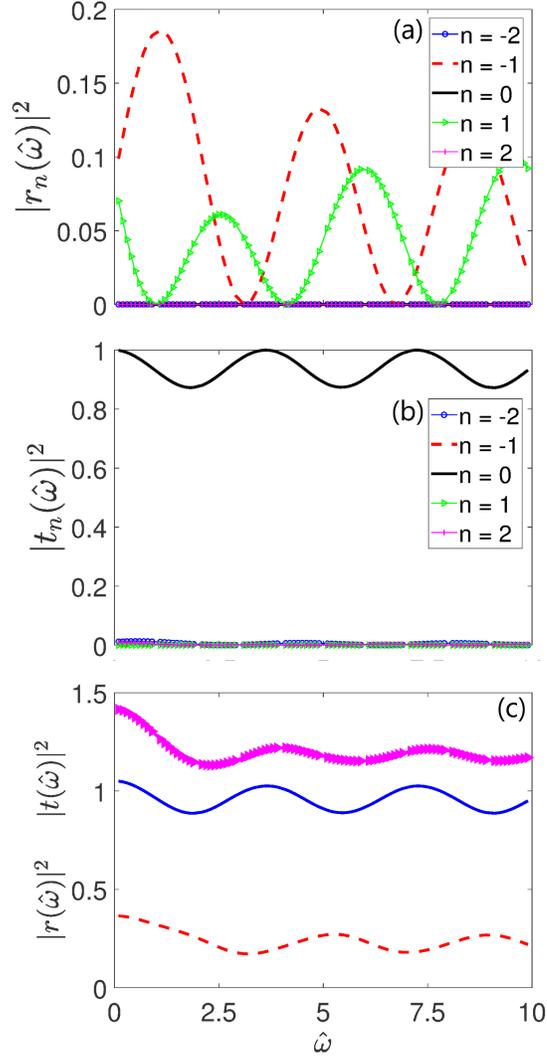


Fig. 2.13: reflectancia y transmitancia tal como en Fig.12 para una modulación igual y fuera de fase  $m_\epsilon = 0.5$  y  $m_\mu = -0.5$ , donde  $\hat{Z} = 1$  y  $v = 1$ .

Esto significa que para una modulación igual y fuera de fase la luz transmitida no está compuesta por un peine de frecuencia, en su lugar, se podría considerar monocromática, con la misma frecuencia del campo incidente. La amplitud de la energía transmitida es una función oscilatorio con la frecuencia. También puede observarse que  $|r_{\pm 1}(\hat{\omega})|$  puede desvanecerse para ciertos valores de  $\hat{\omega}$  y  $|t_0(\hat{\omega})|$  puede llegar al

## 2. Cristal Fónico Temporal

valor 1 para algunas frecuencias  $\hat{\omega}$ . Para este caso de modulación vuelve a suceder que  $R(\hat{\omega}) + T(\hat{\omega}) > 1$  para toda frecuencia  $\hat{\omega}$ .

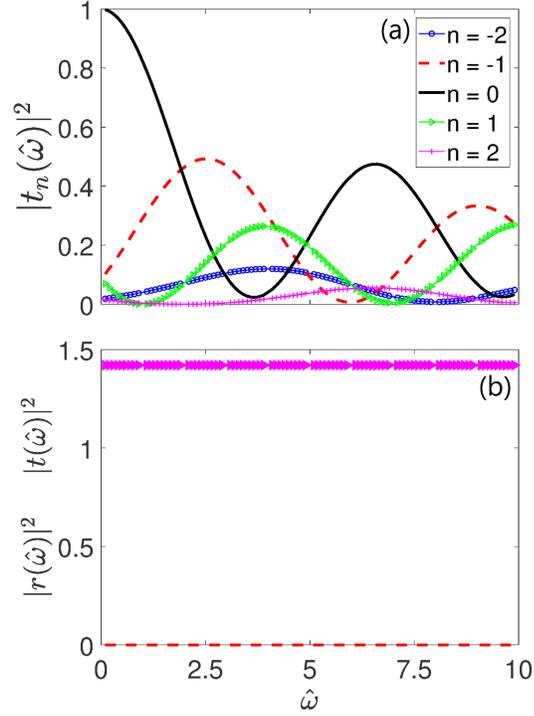


Fig. 2.14: (a) Transmitancia para cinco armónicos  $n$  donde se asume  $\nu = 1$ ,  $\hat{Z} = 1$  y  $m_\epsilon = m_\mu = 0.5$ . (b) Reflectancia total (línea roja punteada) y transmitancia total (línea azul) de la placa dielectrica modulada.

En la Fig.2.14 se muestra la respuesta óptica de una placa con modulación de igual magnitud y en fase,  $m_\epsilon = m_\mu = 0.5$ , e impedancia relativa  $\hat{Z} = 1$ . Este es un caso especial donde la impedancia no cambia a través de una interfaz temporal provocada por la modulación de permitividad y/o permeabilidad, de acuerdo a la Eq.(2.34). La impedancia de la placa modulada es igual a la impedancia promedio, como  $\hat{Z} = 1$ , eso significa que tampoco habrá cambio de impedancia debido a las interfaces espaciales. Esto asegura que no exista reflexiones del campo electromagnético, es decir,  $r_n = 0$  para todos los armónicos  $n$ . Por otro lado, el campo transmitido sí esta compuesto por oscilaciones que contienen todos los armónicos, como se ve en Fig.2.14(a). Al sumar la contribución de todos los armónicos, la transmitancia total  $T(\hat{\omega})$  es constante (independiente de la frecuencia), con valor 1.4, aproximadamente. Esto corresponde a una trans-

ferencia de energía grande entre la fuente de modulación y el campo electromagnético transmitido.

Para completar el estudio de la respuesta óptica de la placa modulada se ha investigado el comportamiento del campo dentro de la placa. De nuevo aquí se considera una modulación de igual magnitud y en fase,  $m_\epsilon = m_\mu = 0.5$  y parámetros  $\nu = 1$ ,  $\hat{Z} = 1$  y  $\hat{\omega} = 1/2$ . En la Fig.2.15 se muestran las amplitudes del campo eléctrico normalizado para los primeros cinco armónicos  $n$  en función de la posición  $x$  dentro de la placa modulada. En la interfaz espacial del lado izquierdo, colocada en  $(x = -L/2)$ , las amplitudes de todos los armónicos se desvanecen con la excepción del armónico  $n = 0$ , esta amplitud coincide con la amplitud del campo incidente. Esto confirma el hecho de que no existen reflexiones del campo para una modulación de igual magnitud y en fase junto con una impedancia normalizada  $\hat{Z} = 1$ , como se ve en la Fig.2.14(b, línea discontinua). Las amplitudes del campo correspondiente al peine de frecuencias comienzan a incrementar conforme se adentran a la placa modulada ( $x$  incrementa), y alcanzan su máximo nivel al llegar a la segunda interfaz espacial ubicada en  $x = L/2$ .

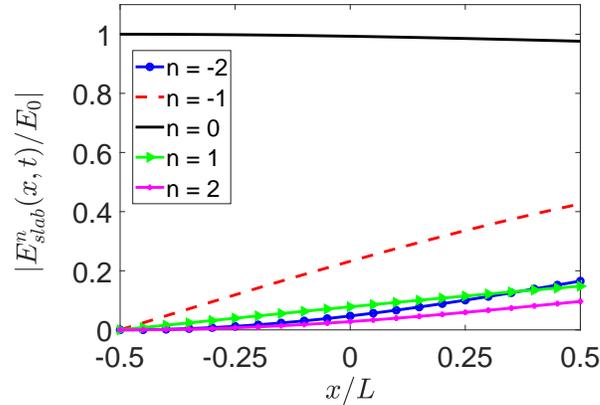


Fig. 2.15: Amplitudes de cinco armónicos  $n$  del campo eléctrico como función de la posición  $x$  dentro de la placa modulada. Estas amplitudes están normalizadas con la amplitud del campo incidente. Tiene los mismo parámetros que la Fig.2.14.

## Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a $k$

---

### 3.1. Modos crecientes en tiempo

Un medio que posee modulación periódica temporal de permitividad y/o permeabilidad demuestra tener interesantes características para la propagación de campos electromagnéticos. Se han estudiado los perfiles de modulación temporal armónico y cuadrado. Ambos perfiles muestran una relación de dispersión formada por una estructura de bandas donde existen bandas prohibidas del vector de onda  $k$ . El campo electromagnético en el medio modulado en tiempo se comporta de tres diferentes maneras dependiendo de donde se localiza su modo de propagación:

- El campo corresponderá a una onda Bloch que se propaga por el medio si el modo de propagación pertenece a cualquiera de las bandas permitidas (excepto para una frecuencia  $\omega = N\Omega/2$ ), siendo  $N$  un número entero.
- El campo electromagnético estará formado por ondas estacionarias cuando el modo de propagación tiene frecuencia  $\omega = N/2$ .
- La frecuencia de propagación será compleja y el campo electromagnético aumentará o disminuirá de manera exponencial con el tiempo si el modo pertenece a una banda prohibida del vector de onda  $k$ .

En la sección anterior se mostraron los campos pertenecientes a los primeros dos puntos. En esta sección se abordan los modos con frecuencia compleja y crecimiento

### 3. Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a $k$

exponencial del campo. La modulación armónica se caracteriza por exhibir únicamente una banda prohibida en su estructura de bandas, sin importar un nivel alto de modulación. Por otro lado, La modulación cuadrada posee una estructura de bandas con múltiples bandas prohibidas del vector de onda  $k$ . Cada banda prohibida puede tener diferentes modos complejos. Por tanto, la amplificación del campo varía dependiendo de cuál banda prohibida pueda excitarse.

La relación de dispersión general, Eq.(2.20), se reduce a la Eq.(3.1) cuando solamente se considera modulación de permitividad ( $m_\mu = 0$ ) y  $m_\epsilon = m$ .

$$\frac{M^+M^- - 1}{2M^+M^-} \cos\left(2\pi \frac{\hat{k}}{K^+}\right) + \frac{M^+M^- + 1}{2M^+M^-} \cos\left(2\pi \frac{\hat{k}}{K^-}\right) = \cos(2\pi\hat{\omega}) \quad (3.1)$$

donde  $K^\pm$  y  $M^\pm$  son definidos como:

$$K^\pm = \frac{M^+M^-}{|(M^- \pm M^+)\tau \mp M^+|} \quad (3.2)$$

$$M^\pm = \sqrt{1 \pm m} \quad (3.3)$$

Esta relación de dispersión da lugar a bandas permitidas y prohibidas del vector de onda  $\hat{k}$ , como se mostró en la sección anterior. Aquí ahora se seleccionan modos dentro de la banda prohibida. Los valores selectos de  $\hat{k}$  que están ubicados justo al centro de una banda prohibida,  $\hat{k} = (\hat{k}_p + \hat{k}_{p+1})/2$ , tienen una frecuencia asociada compleja de la forma  $\hat{\omega} = N/2 + i\text{Max}\{\text{Im}[\hat{\omega}(p, m)]\}$ , siendo  $N$  un número entero. Es importante remarcar que el valor de  $k$  justo al centro de la banda prohibida da lugar al valor máximo de  $\text{Im}(\hat{\omega})$ . En la Fig.3.1(a) se muestra una gráfica de barras donde el ancho de cada barra es proporcional al ancho de la banda prohibida  $\Delta\hat{k}_{p, p+1}$ . La altura corresponde a  $\text{Max}(\text{Im}(\hat{\omega}))$  y cada barra está centrada sobre el valor de  $\hat{k}$  justo al centro de la banda prohibida ( $k$ ). Aquí se demuestra que el crecimiento exponencial del campo dentro de una banda prohibida es mayor conforme la modulación es mas grande. Las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p, p+1}$  no desvanecen progresivamente con el número de la banda  $p$ , como en el caso armónico, y esto sucede para cualquier valor de modulación  $m$ , aún para modulaciones tan pequeñas como  $m = 0.1$ . Otra observación importante es que a mayor valor de modulación las longitudes de onda ( $2\pi/\hat{k}$ ) correspondientes a cada banda prohibida son mas largas.

### 3. Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a $k$

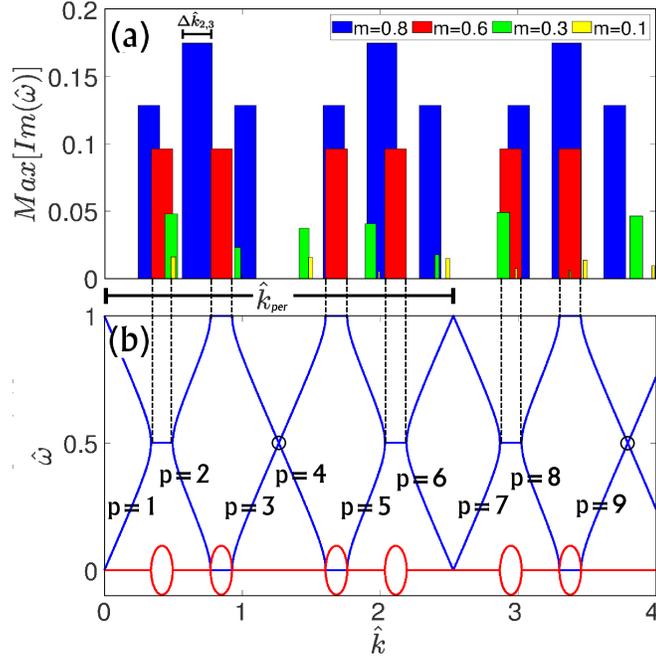


Fig. 3.1: (a) Máxima tasa de crecimiento exponencial  $[Im(\hat{\omega})]$  del campo electromagnético como función del número de onda normalizado  $\hat{z}$  para cuatro valores de modulación  $m$ . El ancho de las barras representa la banda prohibida  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  que se encuentra entre las bandas permitidas  $p$  y  $(p+1)$ . Aquí se nota la periodicidad de una estructura de tres barras para  $m = 0.8$ , y una estructura de dos barras para  $m = 0.6$ . No existe periodicidad para las modulaciones  $m = 0.1$  y  $m = 0.3$ . (b) Estructura de bandas, incluyendo  $Im(\hat{\omega})$  (elipses de color rojo) para  $m = 0.6$ . Las líneas negras discontinuas conectan el ancho de las barras en la sección (a) con el ancho de las bandas prohibidas en (b). No hay banda prohibida entre las bandas  $p = 3$  y  $p = 4$ , lo mismo sucede entre las bandas  $p = 9$  y  $p = 10$ . Esto explica porque el periodo  $\hat{k}_{per}$  abarca 4 barras rojas en (a), y no solo dos como se aparentaría en la imagen.

Hay una característica muy particular e interesante mostrada en la Fig.3.1(a): La triple estructura de barras para una modulación  $m = 0.8$  y la doble estructura de barras de la modulación  $m = 0.6$  son periódicas en  $\hat{k}$ , sin embargo una estructura de bandas con periodicidad respecto al número de onda  $k$  es una característica particular de un sistema con periodicidad espacial. Aquí se ha considerado una variación periódica temporal de la permitividad  $\epsilon(t)$  pero es uniforme en espacio. Ciertamente los casos de modulación  $m = 0.6$  y  $m = 0.8$  son excepcionales pues no existe periodicidad en  $\hat{k}$  para

### 3. Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a $k$

las modulaciones  $m = 0.3$  y  $m = 0.1$ . De una manera similar se puede fijar un valor de modulación  $m$  y considerar diferentes valores de  $\tau$ , como en la Fig.3.2. Se puede observar que también existe periodicidad (*quasi-periodicidad* es un mejor término) en  $\hat{k}$  cuando  $\tau \approx 0.2573$ , pero no para  $\tau = 0.5$  y  $\tau = 0.8$ . Además, la variación de  $\tau$  tiende a modificar las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  de tal manera que distribuye la estructura de bandas y no necesariamente aumenta el valor de  $Max(Im(\hat{\omega}))$  dentro de ellas.

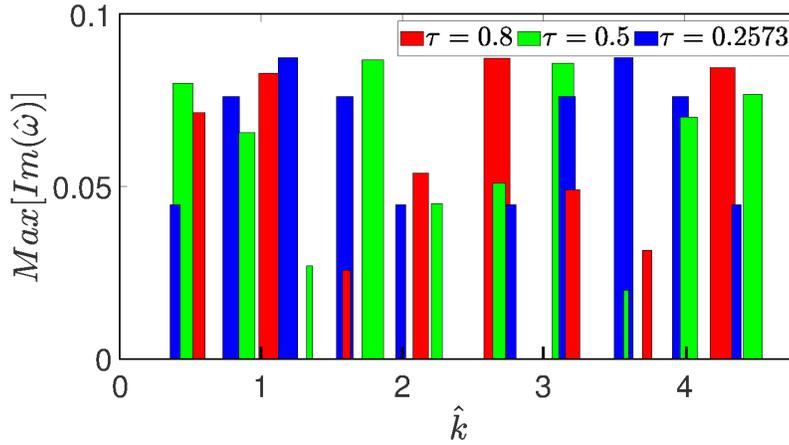


Fig. 3.2: (a) Máxima tasa de crecimiento exponencial  $[Im(\hat{\omega})]$  del campo electromagnético como función del número de onda normalizado  $\hat{k}$  para cuatro valores de  $\tau$  para un valor de modulación fija de  $m = 0.5$ . Aquí se muestra de nuevo una estructura periódica formada con cinco barras azules (para  $\hat{k} < 2.5$ ) que se repiten periódicamente ( $\hat{k}_{per}$ ), esto al considerar  $\tau = 0.2573$ . Para los valores  $\tau = 0.5$  y  $0.8$  no sucede periodicidad con respecto a  $\hat{k}$ .

### 3.2. Periodicidad en $k$

Para explicar de donde viene la periodicidad en  $\hat{k}$  es necesario partir de la Eq.(3.1). El lado derecho de esta ecuación confirma la periodicidad con respecto a la frecuencia  $\hat{\omega}$ , siendo el periodo 1. En el lado derecho existen dos términos que, en general, tienen diferentes periodos en  $\hat{k}$ . El primer término tiene periodo  $K^+$  (o  $N_1K^+$ ), mientras que el segundo término tiene un periodo de  $K^-$  (o  $N_2K^-$ ), donde  $N_{1,2}$  son números enteros. EL lado derecho de la Eq.(3.1) es periódico en  $\hat{k}$  siempre y cuando  $N_1K^+ = N_2K^-$  (donde cualquier factor común entre los números enteros  $N_1$  y  $N_2$  se cancelan). A partir

### 3. Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a $k$

---

de este análisis se concluye que una estructura de bandas tiene periodicidad en frecuencia  $\hat{\omega}$  y número de onda  $\hat{k}$  cuando la razón entre las frecuencias  $K^-/K^+$  es un número racional irreducible ( $N_1/N_2$ ). El periodo en  $\hat{k}$  de la relación de dispersión entonces será  $N_1K^+(oN_2K^-)$ .

La condición de periodicidad para la estructura de bandas con periodicidad  $\hat{k}$  debe satisfacer la Eq.(3.4), donde  $N_1/N_2$  es un número racional irreducible.

$$\left| \frac{(\sqrt{1-m} + \sqrt{1+m})\tau - \sqrt{1+m}}{\sqrt{1-m} - \sqrt{1+m})\tau + \sqrt{1+m}} \right| = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.4)$$

De acuerdo a la Eq.(3.4), el cociente  $K^-/K^+$  es de 1/2 y 1/3 para las modulaciones  $m = 0.8$  y  $m = 0.6$ , respectivamente, de la Fig.3.2(a). Matemáticamente se demuestra el porqué se hace presente la periodicidad en ambos casos de modulación. El periodo  $\hat{k}_{per}$  para  $\tau = 0.5$  y  $m = 0.5$  [Barras azules en Fig.3.1(a)] es 1.3416, y para  $\tau = 0.5$  y  $m = 0.6$  el periodo es  $\hat{k}_{per} = 2.5898$  [barras rojas en Fig.3.1(a)].

El lado izquierdo de la Eq.(3.4) se puede manipular para reescribirlo en un término que contenga una sola raíz cuadrada,  $(1-m)^{1/2} = \sqrt{c^2 - a^2}/c$ , con  $m = a/c (< 1)$ , donde  $a$  y  $c$  son números enteros positivos ( $a < c$ ). El cociente de frecuencias  $K^-/K^+$  será un número racional (y por lo tanto habrá periodicidad en  $\hat{k}$ ) siempre y cuando  $\sqrt{c^2 - a^2} = b$ , siendo  $b$  un número entero. La "identidad pitagórica"  $a^2 + b^2 = c^2$  debe satisfacerse con enteros  $(a, b, c)$ . Ejemplos de enteros que cumplen esta identidad son: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), etc. Para cualquier valor de  $m$  se puede seleccionar un valor aproximado de  $\tau$  y/o  $N_1/N_2$  para satisfacer la Eq.(3.4) con cierto grado de precisión elegida a conveniencia. En esa situación la estructura de bandas puede ser considerada *cuasi-periódica* en lugar de estrictamente periódica. Un caso de *cuasi-periodicidad* se observa en la Fig.3.2 para  $m = 0.5$  y  $\tau = 0.2573$  (barras azules).

Las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  y sus correspondientes tasas de crecimiento exponencial ( $Max[Im(\hat{\omega})]$ ) son diferentes para un conjunto de valores dados de  $m$  y  $\tau$ . En la Fig.3.3 se resaltan tres escenarios donde todas las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  son iguales para cualquier banda  $p$ . En la Fig.3.3(a) se ilustra la situación donde  $m = 0.5$ ,  $\tau = 0.6340$ ,  $K^- = 0.9659$  y  $K^+ = \infty$ . El cociente  $K^-/K^+ = 0$ , por lo tanto el primer término en Eq.(3.1) se reduce a un valor constante y el periodo se convierte en  $\hat{k}_{per} = K^- = 0.9659$ . La Eq.(3.5) establece el valor de  $\tau$  en función de una modulación arbitraria  $m$  que da lugar a  $K^+ \rightarrow \infty$ . Para este caso se puede calcular analíticamente el

### 3. Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a $k$

valor  $Max[Im(\hat{\omega})]$  en función de la modulación:

$$Max[Im(\hat{\omega})] = \frac{Ln(\sqrt{1+m}/\sqrt{1-m})}{2\pi} \quad (3.5)$$

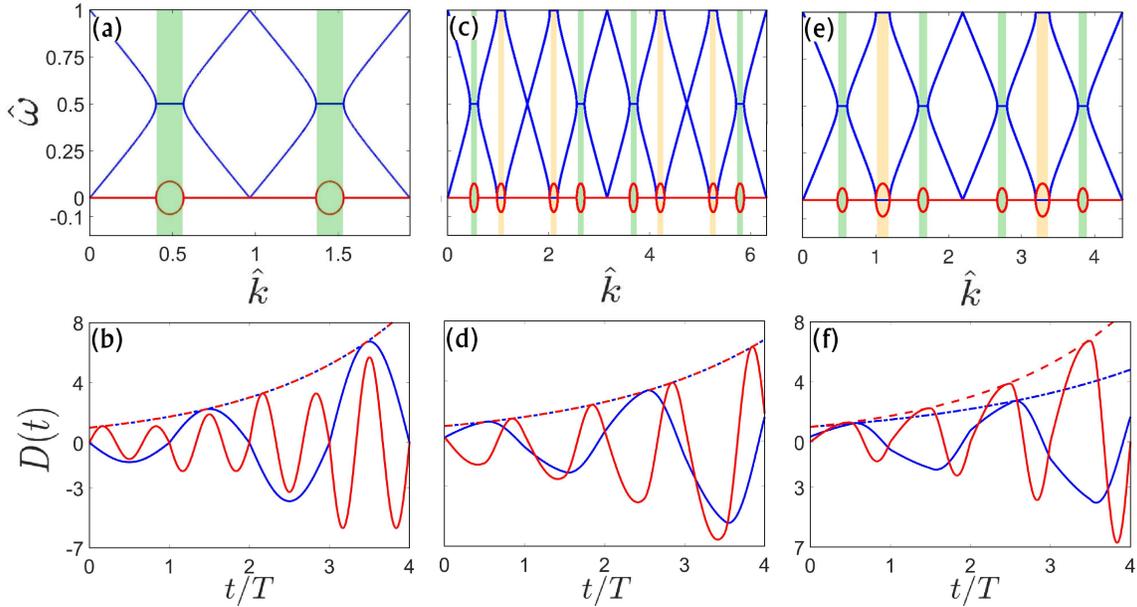


Fig. 3.3: Estructuras de bandas  $\hat{\omega}(\hat{k})$  que son periódicas en  $\hat{k}$  y en  $\hat{\omega}$ . La modulación es  $m = 0.5$  y (a)  $\tau \approx 0.6340$ , (c)  $\tau \approx 0.7760$ , (e)  $\tau \approx 0.8386$ . En (a) todas las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  tienen el mismo ancho y los modos de propagación tienen  $Re(\hat{\omega}) = N/2$ , donde  $N$  es un número impar (franja verde). Esta estructura periódica se obtiene cuando el cociente es  $K^-/K^+ = 0$ . (c) Todas las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}_{p,p+1}$  tienen el mismo ancho. Los modos de propagación tienen  $Re(\hat{\omega}) = N/2$ , donde  $N$  es un número entero (franja verde para  $N$  impar y franja amarilla para  $N$  par). Esta estructura periódica se obtiene cuando el cociente es  $K^-/K^+ = 1/3$ . (e) Las bandas prohibidas  $\Delta\hat{k}$  con modos de propagación que tengan  $Re(\hat{\omega}) = N/2$  donde  $N$  es un número impar son iguales (franjas verdes) entre sí. Lo mismo para los modos donde  $N$  es un número par (franjas amarillas). Esta estructura periódica se obtiene cuando el cociente es  $K^-/K^+ = 1/2$ . El campo  $D(t)$  que corresponde a (a), (c) y (e) se muestran, respectivamente, en (b), (d) y (f) con valores de  $\hat{k}$  seleccionados justo al centro de la banda prohibida. Las envolventes del campo (líneas discontinuas) describen el máximo crecimiento exponencial. En (b) y (d) se destaca el hecho de que solo haya una envolvente. Esto se debe a que las bandas prohibidas para  $Re(\hat{\omega}) = 1$  y  $Re(\hat{\omega}) = 1/2$  tienen el mismo ancho.

### 3. Modos crecientes en tiempo y periodicidad con respecto a $k$

---

La Eq.(3.5) determina la tasa de crecimiento único,  $Max[Im(\hat{\omega})] = 0.874$ , para el campo  $D(t)$  en la Fig.3.3(b) (ver la línea discontinua). En la Fig.3.3(c) se considera  $m = 0.5$  y  $\tau \approx 0.7760$ . El cociente de periodos es  $K^-/K^+ = 1/3$ . Las bandas verdes que están delimitadas por modos con frecuencia  $Re[\hat{\omega}] = 0.5, 1.5, 2.5, etc.$  tienen el mismo ancho, es decir,  $\Delta\hat{k}_{1,2} = \Delta\hat{k}_{5,6}$ , etc. Esto también sucede para las bandas prohibidas de color amarillo que están delimitadas por modos con  $Re[\hat{\omega}] = 1, 2, 3, etc.$ . Es interesante que las bandas prohibidas verdes y amarillas son todas del mismo ancho:  $\Delta\hat{k}_{1,2} = \Delta\hat{k}_{2,3} = \Delta\hat{k}_{3,4} = \Delta\hat{k}_{4,5}$ , etc. Es esperado que exista un solo valor  $Max[Im(\hat{\omega})]$  en toda la estructura de bandas, como se aprecia en Fig.3.3(d). Tal degeneración no existe en Fig.3.3(e) y Fig.3.3(f), en esas figuras los parámetros son  $m = 0.5$  y  $\tau = 0.8386$  y su cociente de periodos es  $K^-/K^+ = 1/2$ . Aquí las bandas prohibidas de color amarillo son todas iguales entre sí, lo mismo sucede para las bandas prohibidas color verde, pero las bandas amarillas son mas anchas (y sus valores  $Max[Im(\hat{\omega})]$  son mas grandes) comparadas a las bandas verdes. En resumen se puede concluir que una relación de dispersión con todas las bandas prohibidas del mismo ancho, y la misma tasa de crecimiento exponencial  $Max[Im(\hat{\omega})]$  se puede obtener para cualquier combinación de  $m$  y  $\tau$  que satisfaga la Eq.(3.4) con valores 0, 1/2 o 1/3.

## Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

Un medio con variación temporal de permitividad y/o permeabilidad puede modelarse como una línea de transmisión con capacitancia y/o inductancia variante en tiempo. La suposición anterior es válida únicamente cuando la constante de propagación de la onda que viaja a través de la línea de transmisión es mucho más grande que las dimensiones de las celdas unitarias que la conforman.

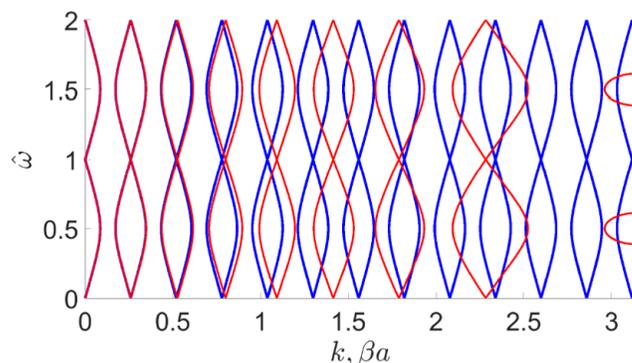


Fig. 4.1: Relación de dispersión de un medio con modulación periódica (línea azul) y una línea de transmisión (línea roja).  $m_{\epsilon,C} = 0.5$ ,  $m_{\mu,L} = -0.5$  y  $\bar{\Omega} = 0.3$ . Donde  $\bar{\Omega} = \Omega\sqrt{\bar{\epsilon}\bar{\mu}} = \Omega\sqrt{\bar{C}\bar{L}}$ .

En esta sección se discute el diseño de una línea de transmisión discreta con variación temporal cuadrada de capacitancia, Fig.4.2. La variación temporal de inductancia es dejada de lado porque la variación de inductancia requiere de un esfuerzo mayor. En

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

esta sección también se propone un protocolo de medición para obtener la relación de dispersión de una línea de transmisión modulada a partir de mediciones de laboratorio.

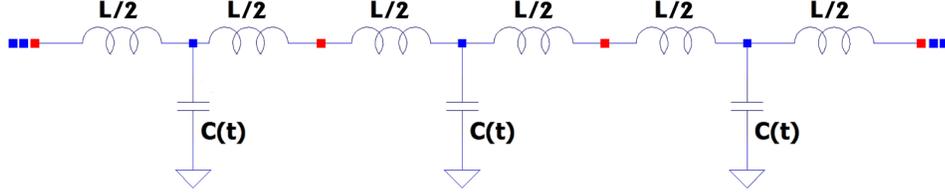


Fig. 4.2: Línea de transmisión discreta con capacitancia variable en tiempo de manera periódica. Aquí se muestran tres celdas unitarias simétricas separadas gráficamente por los nodos de color rojo.

El método Kronig-Penney ha sido utilizado para obtener la relación de dispersión de una línea de transmisión con capacitancia variable en tiempo con perfil cuadrado [83]. Esta relación de dispersión es:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi\hat{\omega}) = & \frac{1}{2} (1 - M_A) \cos \left\{ 4\pi \sin \left( \frac{\beta a}{2} \right) \left[ \frac{\tau}{M^+} - \frac{1}{M^-} (1 - \tau) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2} (1 + M_A) \cos \left\{ 4\pi \sin \left( \frac{\beta a}{2} \right) \left[ \frac{\tau}{M^+} + \frac{1}{M^-} (1 - \tau) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde:

$$M^\pm = \sqrt{(1 \pm m_C)(1 \pm m_L)} \quad (4.2)$$

$$M_A = (1 - m_C m_L) / M^- M^+ \quad (4.3)$$

El método de Kronig-Penney es una herramienta poderosa para obtener la relación de dispersión de la línea de transmisión con variación periódica en tiempo, sin embargo, es poco intuitivo para analizar su respuesta eléctrica (condiciones de frontera). Por la razón anterior, el interés en esta sección fue utilizar un enfoque distinto para estudiar la línea de transmisión modulada. La metodología de matriz ABCD permite calcular de manera aproximada la relación de dispersión de una línea de transmisión, así como su respuesta eléctrica. Conocer bien la respuesta eléctrica de la línea de transmisión es importante para definir un protocolo de medición que sea compatible con técnicas utilizadas en la medición de señales eléctricas en un laboratorio. Todo este

esfuerzo fue encaminado hacia la demostración experimental de la posible existencia de modos de propagación dentro de una línea de transmisión con pérdidas puramente reales cuando la modulación de capacitancia es lo suficientemente fuerte, y la frecuencia de modulación es el doble a la frecuencia de la onda preparatoria. La demostración experimental queda como trabajo a futuro.

### 4.1. Matriz de impedancias y Admitancias.

En el capítulo 2 se demostró que la solución a la ecuación de onda de un medio con permitividad periódica variable en tiempo está determinada por el teorema de Bloch-Floquet. La ecuación de onda para la línea de transmisión con capacitancia periódica variable en tiempo se deduce de las ecuaciones del telegrafista y también tiene solución determinada por el teorema de Bloch-Floquet. Esto también implica que la relación voltaje-corriente de un capacitor variable en tiempo, Eq.(4.4), también debería estar determinada por el teorema de Bloch-Floquet. Aquí el voltaje y la corriente son ondas planas con amplitud periódica igual al periodo de la función cuadrada de capacitancia. Las ecuaciones Eq.(4.5) representan el voltaje y corriente como una sumatoria de series de Fourier. La variación periódica de la capacitancia también es conveniente expresarla en series de Fourier Eq.(4.6), donde los coeficientes de Fourier  $C_m$  contienen la magnitud de modulación  $m_c$ .

$$i(t) = \frac{d}{dt} [C(t)v(t)] \quad (4.4)$$

$$v(t) = \sum_n V_n e^{i(\omega+n\Omega)t} \quad i(t) = \sum_l I_l e^{i(\omega+l\Omega)t} \quad (4.5)$$

$$C(t) = \sum_m C_m e^{im\Omega t} \quad (4.6)$$

El voltaje, la corriente y la capacitancia deben satisfacer la ecuación Eq.(4.4) en todo instante de tiempo, eso conduce al sistema de ecuaciones Eq.(4.7).

$$I_l = \sum_n i[\omega + l\Omega] C_{l-n} V_n \quad (4.7)$$

Es conveniente expresar el sistema de ecuaciones Eq.(4.7) como un arreglo matricial donde las amplitudes de voltaje y corriente forman un vector columna. Los ele-

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

---

mentos de matriz  $i[\omega + l\Omega]C_{l-n}$  representan admitancias (que a partir de ahora se etiquetaran como  $Y_{l-n}$ ) que contienen al peine de frecuencias  $(\omega + l\Omega)$  y las amplitudes de la función periódica para la capacitancia. Aquí se destaca que aún no se ha considerado un perfil particular de modulación, es decir que este es un método general para cualquier tipo de modulación periódica temporal.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ I_{-1} \\ I_0 \\ I_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \ddots \\ \ddots & i(\omega - \Omega)C_0 & i(\omega - \Omega)C_{-1} & i(\omega - \Omega)C_{-2} & \ddots \\ \ddots & i\omega C_1 & i\omega C_0 & i\omega C_{-1} & \ddots \\ \ddots & i(\omega + \Omega)C_2 & i(\omega + \Omega)C_1 & i(\omega + \Omega)C_0 & \ddots \\ \ddots & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ V_{-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{I} = \mathbb{Y}\mathbf{V} \quad (4.9)$$

Las amplitudes de corriente eléctrica (vector  $\mathbf{I}$ ) y voltaje (vector  $\mathbf{V}$ ) en un capacitor variante en tiempo se relacionan a través de la matriz de admitancia  $\mathbb{Y}$ . Del mismo modo es posible representar la relación de voltaje y corriente en un inductor y resistor variables en tiempo a través de una matriz de impedancia.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ V_{-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \ddots \\ \ddots & i(\omega - \Omega)L_0 & i(\omega - \Omega)L_{-1} & i(\omega - \Omega)L_{-2} & \ddots \\ \ddots & i\omega L_1 & i\omega L_0 & i\omega L_{-1} & \ddots \\ \ddots & i(\omega + \Omega)L_2 & i(\omega + \Omega)L_1 & i(\omega + \Omega)L_0 & \ddots \\ \ddots & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ I_{-1} \\ I_0 \\ I_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{V} = \mathbb{Z}\mathbf{I} \quad (4.11)$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ V_{-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & R_0 & R_{-1} & R_{-2} & \ddots \\ \ddots & R_1 & R_0 & R_{-1} & \ddots \\ \ddots & R_2 & R_1 & R_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ I_{-1} \\ I_0 \\ I_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{V} = \mathbb{R}\mathbf{I} \quad (4.13)$$

Esta representación circuital fue propuesta hace años por Kurth [84] y en años recientes ha resurgido para analizar circuitos variantes en tiempo como filtros y circuladores [85, 86, 87].

Las matrices de impedancia  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  y la matriz de conductancia  $\mathbb{Y}$  representan una generalización de la ley de Ohm para el análisis de circuitos variantes en tiempo. Las condiciones de continuidad para el voltaje y la corriente eléctrica se satisfacen automáticamente al cumplir con ecuaciones como la Eq.(4.4), entonces, las leyes de Kirchoff ahora producen ecuaciones matriciales donde las técnicas de análisis de circuitos con elementos invariantes en el tiempo son válidas también para circuitos variantes en tiempo de manera periódica.

Las matrices  $\mathbb{Y}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{R}$  se reducen a matrices diagonales con elementos  $Y_0$ ,  $Z_0$  y  $R_0$  cuando no existe modulación temporal de capacitancia, inductancia o resistencia, respectivamente.

### 4.2. Parámetros de transmisión (matriz ABCD)

Un circuito de dos entradas y dos salidas se puede expresar como una red de dos puertos. Los parámetros de transmisión (ABCD) relacionan el voltaje y la corriente saliendo por uno de los puertos con el voltaje y corriente que entra por el otro puerto. La Fig.4.4 corresponde al diagrama de una red de dos puertos configurado para los parámetros ABCD. Los parámetros  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  serán matrices cuadradas, y los voltajes y corrientes en ambos puertos serán vectores columna si la red de dos puertos representa una línea de transmisión variante en tiempo de manera periódica. La Eq.(4.14) muestra el sistema de ecuaciones que relaciona el voltaje y corriente del puerto uno con el voltaje y corriente del puerto dos utilizando los parámetros ABCD. La representación matricial de la Eq.(4.15) indica que, matemáticamente, al voltaje y corriente de salida por el puerto dos se le asigna la entrada del sistema de ecuaciones. Esta convención está alineada con lo mostrado en el libro de Pozar [88].

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

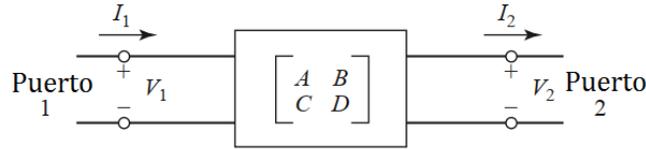


Fig. 4.3: Diagrama esquemático de una red de dos puertos configurado para representar parámetros ABCD. El puerto 1 es la entrada y el puerto 2 la salida.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_1 = \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I}_2 \quad (4.14)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

La matriz ABCD de dos redes de dos puertos conectados en serie es igual al producto de sus matrices de transmisión ABCD. Las señales de salida de la primera red corresponden a la entrada de la segunda. Esta propiedad de operación en cascada es importante para el análisis de circuitos. Cualquier circuito que se pueda expresar como una red de dos puertos puede expandirse en matrices ABCD de cada elemento individual y operarse en serie. La Eq.(4.16) contiene las ecuaciones matriciales de las dos redes de la Fig.4.4. Los puertos 1 y 2 corresponden a la primera red mientras los puertos 3 y 4 son para la segunda red. La señal que entra por el puerto 1 sale por el puerto 2, y a su vez entra por el puerto tres. Entonces la señal de salida del puerto 4 estaría relacionada con la señal de entrada del puerto 1 a través del producto de las matrices ABCD de cada puerto, tal como indica la Eq.(4.17).

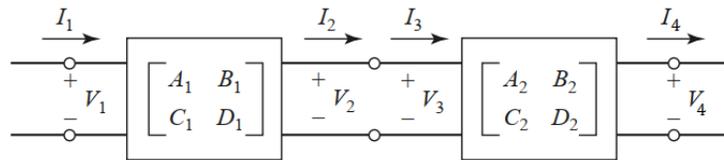


Fig. 4.4: Diagrama esquemático de dos redes de dos puertos conectados en serie.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_4 \\ \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{C}_1 & \mathbb{D}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 \\ \mathbb{C}_2 & \mathbb{D}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_4 \\ \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_4 \\ \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

#### 4.2.1. Relación de dispersión a partir de parámetros ABCD

El puerto 2 está relacionado con el puerto 1 a través de la matriz ABCD, sin embargo, también están relacionados entre sí mediante un avance de fase espacial  $e^{i\beta a}$ . Este avance de fase se expresa con la Eq.(4.18) (La matriz diagonal para el avance de fase es  $\mathbb{E}^{i\beta a}$ ). Añadiendo esta propiedad en Eq.(4.15) es posible obtener una ecuación de eigenvalores para el voltaje y corriente sobre el puerto 2. Los eigenvalores de la matriz ABCD están relacionados con los modos de propagación  $\beta$  que permite la red de dos puertos.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}^{i\beta a} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{E}^{i\beta a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} - \mathbb{E}^{-i\beta a} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} - \mathbb{E}^{-i\beta a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Es típico desarrollar el determinante de la matriz para calcular los eigenvalores de Eq.(4.19) utilizando la ecuación  $(\mathbb{A} - \mathbb{E}^{-i\beta a})(\mathbb{D} - \mathbb{E}^{-i\beta a}) - \mathbb{B}\mathbb{C} = \mathbb{O}$ , sin embargo, esta ecuación no siempre es válida. Para poder hacer el cálculo de esa manera es necesario que las matrices  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  conmuten entre sí. Solo conmutan entre sí cuando  $m_c = 0$ . Si  $m_c = 0$  todas las matrices se convierten en matrices diagonales. Para calcular los eigenvalores  $e^{(-i\beta a)}$  de una matriz ABCD con variaciones temporales debe operarse el determinante a partir de los elementos de las matrices  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$ , tal como en la Eq.(4.20).

$$\begin{pmatrix} A_{11} - e^{-i\beta a} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} - e^{-i\beta a} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} - e^{-i\beta a} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} - e^{-i\beta a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^{n=0} \\ V_2^{n=1} \\ I_2^{m=0} \\ I_2^{m=1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Los eigenvalores de la matriz ABCD representan los modos que forman las bandas  $p$  de la relación de dispersión. Aquí hay que notar que si se consideran dos armónicos ( $n = 0, n = 1$ ) se produce una matriz de 4x4, esos significan 4 eigenvalores, sin

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

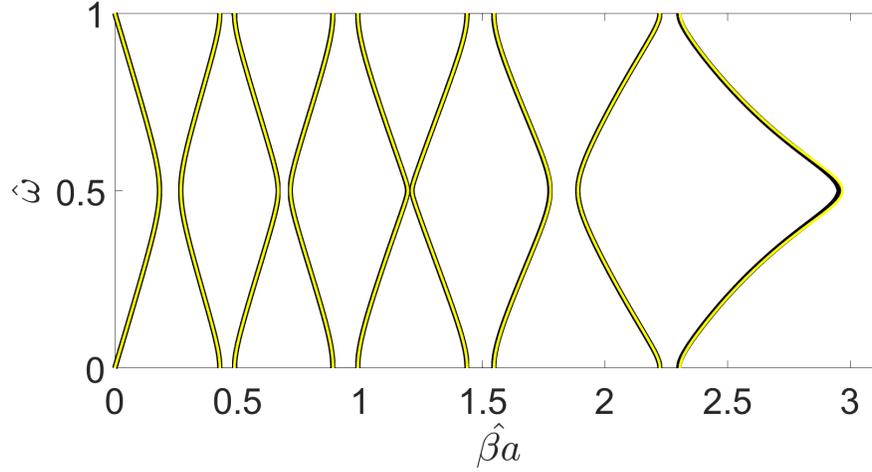


Fig. 4.5: Relación de dispersión obtenida con la Eq.(4.1) del métodos Kronig-Penney (línea negra) y la matriz ABCD (línea amarilla). Aquí las modulaciones son  $m_c = 0.5$  y  $m_L = -0.1$

embargo estos representan a las dos primeras bandas ( $p = 1$  y  $p = 2$ ) y sus bandas negativas ( $p = -1$  ,  $p = -1$ ) es decir que salen los valores positivos y negativos del mismo modo. Ya se ha demostrado que todos los eigenvalores de la matriz ABCD nos da información sobre los modos  $\beta_p$  que se propagan en nuestra red de dos puertos. La matriz ABCD puede factorizar como una matriz diagonalizable (Eq.19).

$$[ABCD] = \mathbb{T} = \mathbb{P}\mathbb{U}\mathbb{P}^{-1} \quad (4.21)$$

Donde  $\mathbb{P}$  es una matriz que contiene los eigenvectores y  $\mathbb{U}$  es una matriz diagonal que contiene los eigenvalores. Esta es la solución obtenida de la función eig() de Matlab. En conclusión, la relación de dispersión está contenida en los eigenvalores de la matriz ABCD. La matriz ABCD de una celda unitaria simétrica de la línea de transmisión con variación periódica se muestra en la Eq.(4.22).

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}\mathbb{Y} & \mathbb{Z} + \frac{1}{4}\mathbb{Z}\mathbb{Y}\mathbb{Z} \\ \mathbb{Y} & 1 + \frac{1}{2}\mathbb{Y}\mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

La matriz ABCD de una línea de transmisión con n celdas se calcula multiplicando n veces la matriz ABCD de una celda unitaria, sin embargo con la factorización de

## 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

Eq.(4.21) solo es necesario conmutar  $n$  veces la matriz de eigenvalores.

$$[ABCD]^n = \mathbb{P}\mathbb{U}^n\mathbb{P}^{-1} \quad (4.23)$$

En la Fig.4.5 se compara la relación de dispersión obtenida con la matriz ABCD considerando 200 armónicos contra la solución de la ecuación analítica del modelo Kronig-Penney.

### 4.3. Respuesta eléctrica

El esquema básico de las conexiones de una línea de transmisión está compuesto por un generador de señal y una impedancia  $Z_s$  en serie conectados al puerto 1 y, una impedancia de carga  $Z_L$  conectada en el puerto 2, ver Fig.4.6. Generalmente las impedancias  $Z_s$  y  $Z_L$  son iguales. La matriz ABCD de la Fig.4.6 correspondiente a una modulación de perfil cuadrado es igual a Eq.(4.22), pero se re-nombraron los voltajes y corrientes como  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_A$ ,  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_A$ ,  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_B$  y  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_B$ .

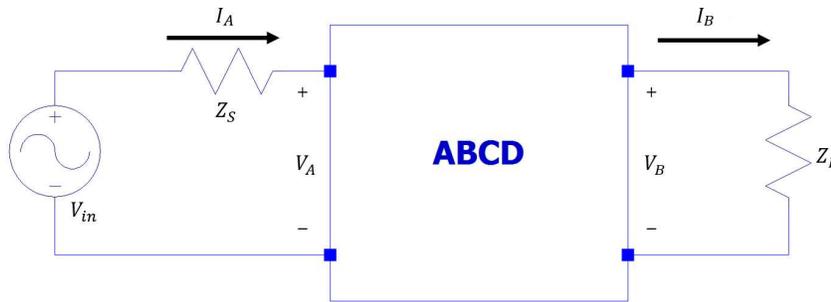


Fig. 4.6: Línea de transmisión modulada expresada como una red de dos puertos (Parámetros ABCD) con una fuente de excitación  $V_{in}(t)$  y una impedancia de carga  $Z_L$ .

Los voltajes  $\mathbf{V}_A$ ,  $\mathbf{V}_B$  y las corrientes  $\mathbf{I}_A$  y  $\mathbf{I}_B$  pueden calcularse en función del voltaje de entrada  $\mathbf{V}_{in}$  de acuerdo a Eq.(4.24) y Eq.(4.25).

$$\mathbf{V}_A = \mathbb{G}_1^{-1}\mathbf{V}_{in} \quad \mathbf{I}_A = \mathbb{Z}_s^{-1}(1 - \mathbb{G}_1^{-1})\mathbf{V}_{in} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{V}_B = \mathbb{Z}_L\mathbb{G}_2^{-1}\mathbf{V}_{in} \quad \mathbf{I}_B = \mathbb{G}_2^{-1}\mathbf{V}_{in} \quad (4.25)$$

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

$$\mathbb{G}_1 = 1 + Z_s(\mathbb{C} + \mathbb{D}Z_L^{-1})(\mathbb{A} + \mathbb{B}Z_L^{-1})^{-1} \quad (4.26)$$

$$\mathbb{G}_2 = \mathbb{A}Z_L + \mathbb{B} + Z_s\mathbb{C}Z_L + Z_s\mathbb{D} \quad (4.27)$$

Las matrices  $\mathbb{G}_1$  y  $\mathbb{G}_2$  contienen los parámetros ABCD de la línea de transmisión, según las Eq.(4.26-4.27). El vector columna  $\mathbf{V}_{in}$  representa la señal de entrada expresada como la sumatoria  $V_{in} = \sum_n \bar{V}_n e^{i(\omega+n\Omega)t} \delta_{nQ}$ , donde  $Q$  es un armónico del peine de frecuencias. Si la señal de entrada es de frecuencia  $\omega + Q\Omega$  las ganancias  $\mathbb{G}_1$  y  $\mathbb{G}_2$  (y por consecuencia la matriz ABCD) no sufrirán cambios. Esta es una característica importante para poder obtener los parámetros  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  a partir de los voltajes y corrientes transmitidos y reflejados por la red de dos puertos.

#### 4.4. Parámetros S

En la mayoría de las ocasiones es no es práctico calcular los parámetros ABCD a partir de mediciones eléctricas, pues eso requiere colocar los puertos en corto circuito o dejarlos flotantes. En el rango de las microondas, la red de dos puertos está representada en parámetros S. Es posible expresar la línea de transmisión variante en tiempo en parámetros S, ver Eq.(4.28). Aquí los parámetros S también son matrices cuadradas que contienen matrices de impedancia y admitancia. El voltaje transmitido,  $\mathbf{V}_{puerto}^+$ , y reflejado,  $\mathbf{V}_{puerto}^-$ , existente en el puerto 1 [2] se calcula a partir de la caída de voltaje sobre la impedancia  $Z_s$  [ $Z_L$ ] de acuerdo a la Eq.(4.29) y Eq.(4.30), respectivamente. El subíndice *puerto* indica el número del puerto al que corresponde el voltaje o corriente. La impedancia  $Z_0$  corresponde a la impedancia promedio de la línea de transmisión modulada y es deseable que  $Z_0 = Z_s = Z_L$ .

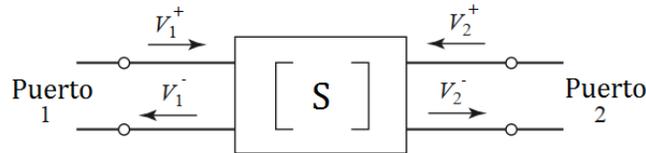


Fig. 4.7: Diagrama esquemático de una red de dos puertos configurado para representar parámetros ABCD. El puerto 1 es la entrada y el puerto 2 la salida.

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^- \\ \mathbf{V}_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{11} & \mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{S}_{21} & \mathbb{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^+ \\ \mathbf{V}_2^+ \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{V}_{puerto}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{puerto} + Z_0 \mathbf{I}_{puerto}) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{V}_{puerto}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{puerto} - Z_0 \mathbf{I}_{puerto}) \quad (4.30)$$

Si se desea medir los parámetros  $\mathbb{S}$  de una línea de transmisión modulada con un instrumento de medición (algo similar a lo que haría un VNA) no sería suficiente excitar la línea con una señal de una sola frecuencia. Por ejemplo, el parámetro  $S_{11}$  de un circuito invariable en tiempo se calcula de acuerdo a la Eq.(4.31). Este es un cociente entre dos amplitudes complejas, sin embargo, con el formalismo de la Eq.(4.28) esta operación no podría realizarse pues se trataría de una división entre vectores columna cuyo resultado ha de ser una matriz cuadrada. El álgebra de matrices no permite esta operación.

$$S_{11} = \left. \frac{V_1^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+=0} \quad (4.31)$$

Anteriormente se dijo que una señal de excitación cuya frecuencia sea  $\omega + n\Omega$  no modificará las ganancias  $\mathbb{G}_1$  y  $\mathbb{G}_2$  que satisface las condiciones de frontera y por consecuencia los parámetros ABCD. Esta propiedad también está presente en los parámetros  $\mathbb{S}$ . Esto permite concatenar los vectores columna  $\mathbf{V}_{port}^\pm(\omega + n\Omega)$  para formar una matriz cuadrada, Eq.(4.32) que permita calcular los parámetros  $\mathbb{S}$  con la Eq.(4.33) y Eq.(4.34).

$$\mathbb{V}_{port}^\pm = [\dots \mathbf{V}^\pm(\omega - \Omega), \mathbf{V}_{port}^\pm(\omega), \mathbf{V}_{port}^\pm(\omega + \Omega)\dots] \quad (4.32)$$

$$S_{11} = \mathbb{V}_1^-(\mathbb{V}_1^+)^{-1} \Big|_{\mathbb{V}_2^+=0} \quad S_{12} = \mathbb{V}_1^-(\mathbb{V}_2^+)^{-1} \Big|_{\mathbb{V}_1^+=0} \quad (4.33)$$

$$S_{21} = \mathbb{V}_2^-(\mathbb{V}_1^+)^{-1} \Big|_{\mathbb{V}_2^+=0} \quad S_{22} = \mathbb{V}_2^-(\mathbb{V}_2^+)^{-1} \Big|_{\mathbb{V}_1^+=0} \quad (4.34)$$

Los parámetros  $\mathbb{S}$  en Eq.(4.33) y Eq.(4.34) se convierten a parámetros ABCD con las Eqs.(4.35-4.38) para obtener la relación de dispersión de la línea de transmisión. La cantidad de bandas permitidas que se obtengan depende de la cantidad de ondas con frecuencias  $\omega + n\Omega$  que se utilicen. Por ejemplo, si se aprecian 5 armónicos significativos en la respuesta eléctrica de la línea de transmisión como mínimo debe excitarse

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

---

iterativamente la línea de transmisión con 5 señales pertenecientes a  $\omega + n\Omega$ . Con el método de matrices de impedancias se analiza el estado estable de la línea de transmisión variable en tiempo de manera periódica. Algunos simuladores de circuitos utilizan el método de balance armónico para analizar el estado estable de un circuito no lineal. A continuación se demostrara que la matemática desarrollada arriba es consistente con las simulaciones de balance armónico.

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{S}_{12} + [1 + \mathbb{S}_{11}] \mathbb{S}_{21}^{-1} [1 - \mathbb{S}_{22}] \right\} \quad (4.35)$$

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2} \mathbb{Z}_0 \left\{ (1 + \mathbb{S}_{11}) \mathbb{S}_{21}^{-1} (1 + \mathbb{S}_{22}) - \mathbb{S}_{12} \right\} \quad (4.36)$$

$$\mathbb{C} = \frac{1}{2} \mathbb{Y}_0 \left\{ -\mathbb{S}_{12} + [1 + \mathbb{S}_{11}]^{-1} [1 - \mathbb{S}_{11}] (1 + \mathbb{S}_{22}) \mathbb{S}_{21}^{-1} [1 - \mathbb{S}_{22}] \right\} \quad (4.37)$$

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{S}_{12} + [1 + \mathbb{S}_{11}]^{-1} [1 - \mathbb{S}_{11}] (1 + \mathbb{S}_{11}) \mathbb{S}_{21}^{-1} (1 + \mathbb{S}_{22}) \right\} \quad (4.38)$$

## 4.5. Simulación de Balance Armónico

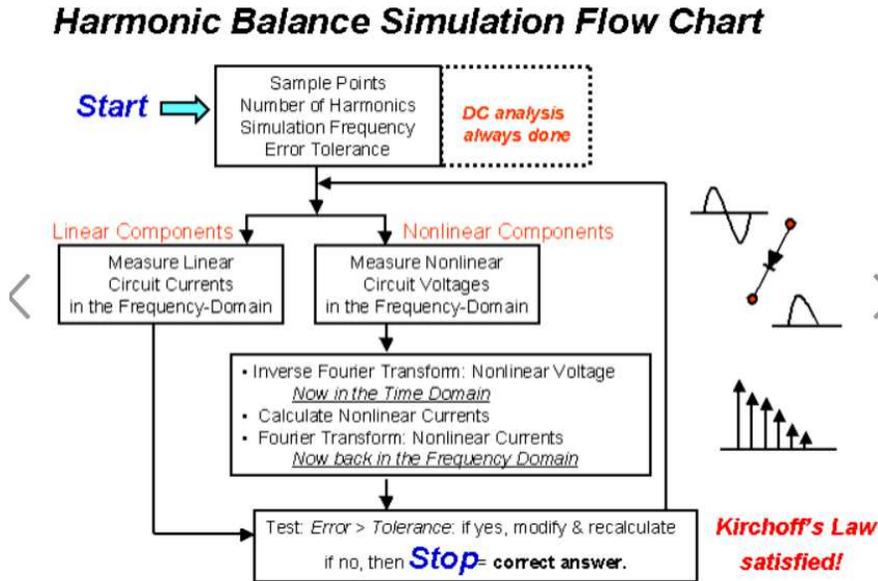


Fig. 4.8: Diagrama a bloques de una simulación de balance armónico según Keysight.

El motivo del protocolo de medición expuesto en la sección anterior es poder obtener la relación de dispersión de una línea de transmisión con parámetros variantes en tiempo de manera periódica a partir de mediciones eléctricas. En esta tesis se ha prestado principal atención a la modulación periódica de perfil cuadrado, sin embargo el protocolo de medición es válido para cualquier modulación periódica. Por cuestiones de tiempo no fue posible realizar experimentos de laboratorio, sin embargo se utilizaron resultados de simulación para demostrar que los resultados del protocolo de medición son iguales a los obtenidos con los cálculos que conducen a la Eq.(4.1). El simulador ADS de la empresa Keysight permite simular circuitos no lineales mediante el método de balance armónico. La teoría de operación de la simulación de balance armónico, tal cual aparece en el centro de conocimientos de Keysight (Empresa fabricante del simulador ADS), es: “El balance armónico es una técnica de análisis en el dominio de la frecuencias para simular distorsión en circuitos y sistemas no lineales. Este método está bien adaptado para simulaciones analógicas RF y problemas de microondas. Esto es así porque comúnmente estos análisis se hacen en el dominio de la frecuencia. Se

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

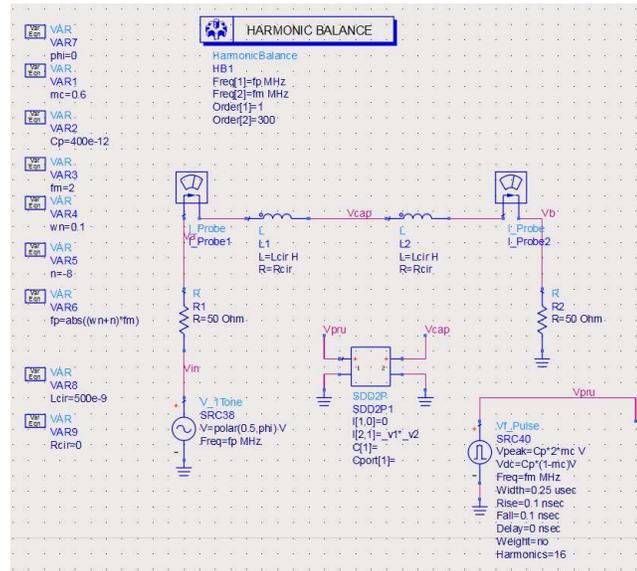


Fig. 4.9: Simulación de una celda unitaria utilizando el modulo SDD2 como capacitancia variable. Aquí  $\bar{C} = 400\text{pF}$ ,  $L = 1\mu\text{L}$ ,  $m_c = 0.6$  y  $f_m(\Omega/2\pi) = 2\text{MHz}$ .

puede analizar amplificadores de potencia, multiplicadores de frecuencia, mezcladores y moduladores bajo el régimen de larga señal sinusoidal”[89].

“El método de balance armónico es iterativo. Esto se basa en la suposición que para excitación sinusoidal existe una solución de estado estable que puede ser aproximada satisfactoriamente mediante una serie de Fourier finita. Como consecuencia, los nodos de voltaje de los circuitos toman un conjunto de amplitudes y fases para todas las componentes de frecuencia. La corriente que fluye de los nodos hacia elementos lineales, incluido todos los elementos distribuidos, son calculados mediante un análisis sencillo en el dominio de la frecuencia. La corriente de los nodos que fluye hacia elementos no lineales son calculados en el dominio del tiempo, después se usa un análisis generalizado de Fourier para transformar el resultado del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. De acuerdo a la ley de corrientes de Kirchoff, la suma de todas las corrientes que influyan en un nodo debe ser cero”[89].

Para emular un capacitor variante en tiempo se ha utilizado el Modulo SDD2. Este módulo del simulador ADS se utiliza para modelar componentes a partir de sus ecuaciones comportamentales de voltaje y corriente. En la Fig.4.9 se muestra el circuito simulador de una celda unitaria.

En la Fig.4.10 se compara el resultado de respuesta eléctrica obtenida con Eq.(4.19)

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

(punto rojo) y la simulación de balance armónico (líneas azules). Se aprecia claramente que los resultados son iguales. Para el cálculo de la relación de dispersión se midió la respuesta eléctrica ante 20 señales de entrada con frecuencias que iban desde  $\omega - 9\Omega$  hasta  $\omega + 10\Omega$ . Las amplitudes obtenidas se acomodan en un arreglo matricial de acuerdo a la Eq.(4.32). El arreglo matricial de este tipo implica identificar frecuencias negativas, aquí no hay un sentido físico para tales frecuencias negativas y solo tienen sentido matemático. Las amplitudes correspondientes a frecuencias negativas deben convertirse a su valor conjugado. Se calcula la matriz de parámetros S y luego se transforma a parámetros ABCD para por fin poder obtener la relación de dispersión mediante los eigenvalores de la matriz ABCD.

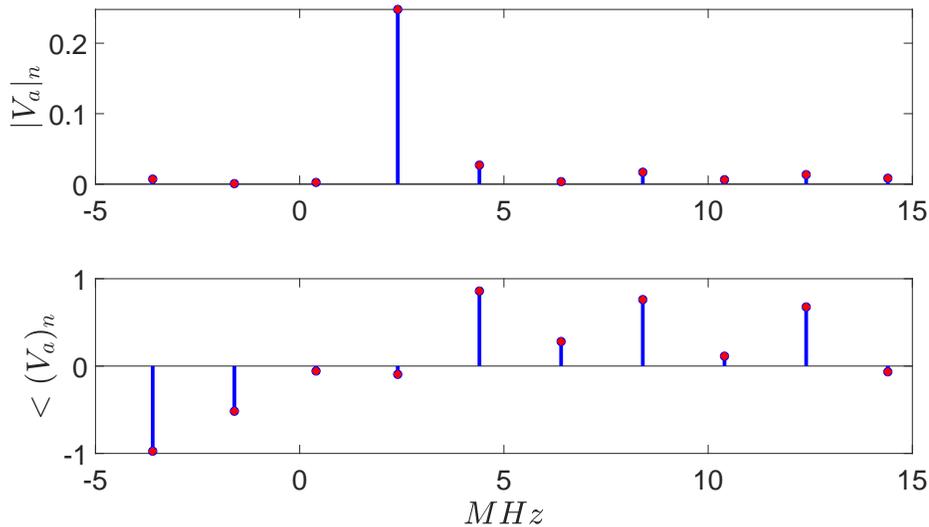


Fig. 4.10: Magnitud (arriba) y Fase (abajo) de la respuesta eléctrica calculada con Eq.(4.19) (puntos rojos) y con la simulación de balance armónico (línea azul).

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

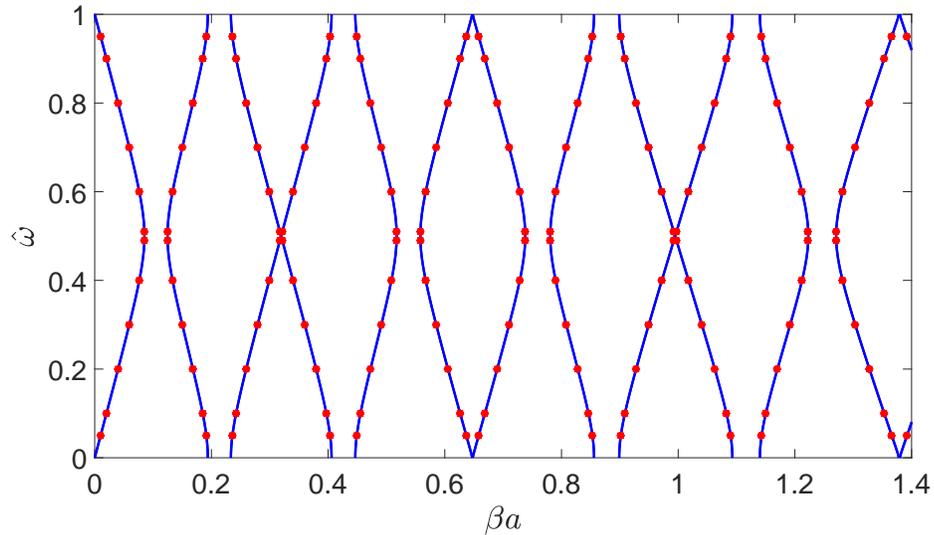


Fig. 4.11: Relación de dispersión (Región de onda larga) de una línea de transmisión con modulación  $m_c = 0.6$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias  $\omega + n\Omega$  (puntos rojos).

La Fig.4.11 muestra que la relación de dispersión obtenida a partir de los datos de simulación se aproxima muy bien a la calculada con la ecuación analítica Eq.(4.1). En esa figura se consideró una modulación de capacitancia  $m_c = 0.6$ . La estructura de bandas de una línea de transmisión con elementos discretos es periódica en  $\beta$ , y su periodo es igual al tamaño de la celda unitaria  $a$ , sin embargo la Fig.4.11 representa una aproximación de longitud de onda larga, y se puede observar el patrón periódico que ya se había mostrado en la Fig.3.1 para un medio dieléctrico con modulación  $m = 0.6$ .

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

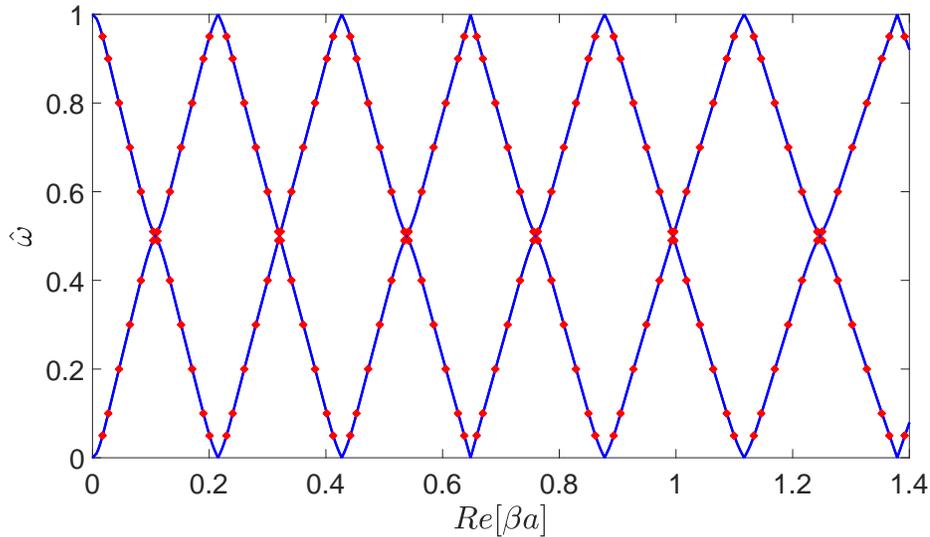


Fig. 4.12: Relación de dispersión (Región de onda larga) de una línea de transmisión con modulación  $m_c = 0.6$  y resistencia en serie de  $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias  $\omega + n\Omega$  (puntos rojos). Aquí las bandas prohibidas se han cerrado debido a la presencia de la resistencia.

La estructura de bandas se verá afectada si se añade una resistencia al modelo de línea de transmisión. Las bandas prohibidas tenderán a cerrarse y los modos de propagación tendrán una constante de propagación  $\beta$  compleja. La Fig.4.12 corresponde a la relación de dispersión de la línea de transmisión en Fig.4.9 con modulación  $m_c = 0.6$  y una resistencia en serie de  $3\Omega$ . Las bandas prohibidas se han cerrado totalmente y en su lugar han aparecido modos degenerados para las frecuencias  $\hat{\omega} = N/2$ . La Fig.4.13 exhibe  $|Im[\beta a]|$ . Esta componente imaginaria de  $\beta$  representa la atenuación de las ondas de voltaje a lo largo de la línea de transmisión. Esta atenuación espacial puede reducirse, e incluso anularse para las frecuencias  $\hat{\omega} = N/2$ , si se aumenta la modulación de capacitancia. En la Fig.4.14 se muestra la relación de dispersión de la línea de transmisión con resistencia de  $3\Omega$  y  $m_c = 0.8$ .

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

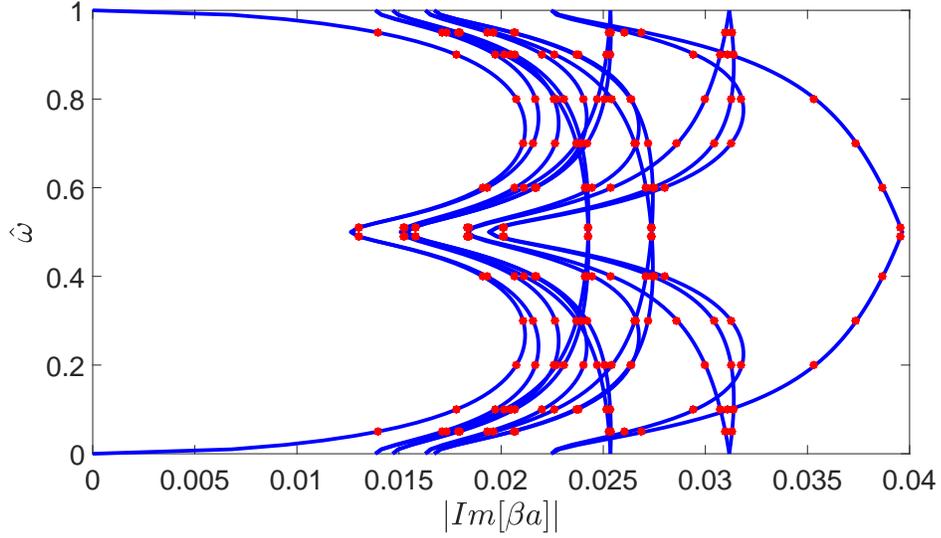


Fig. 4.13:  $Im[\beta]$  de la línea de transmisión con modulación  $m_c = 0.6$  y resistencia  $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias  $\omega + n\Omega$  (puntos rojos). Todos los modos de propagación tienen una atenuación a lo largo de la línea de transmisión.

El incremento en la modulación provocó la apertura de las bandas prohibidas y la disminución de  $Im[\beta]$ . El cálculo analítico predice que los modos con frecuencia  $\hat{\omega} = 1/2$  deben de ser puramente reales, sin embargo, las mediciones obtenidas del simulador no logra llegar exactamente a ese valor. Esto se debe a un error numérico introducido por la degeneración de las amplitudes de voltaje y corriente, en el espacio de Fourier, justamente para la frecuencia  $\hat{\omega} = 1/2$ . Hay que recordar que los voltajes y corrientes expresados mediante el teorema de Bloch-Floquet están formados por ondas con frecuencias  $\omega + n\Omega$ , si  $\omega/\Omega = 0.5$ , el peine de frecuencias sería  $\Omega[\dots, -1.5(0.5 - 2), -0.5(0.5 - 1), 0.5(0.5), 1.5(0.5 + 1), \dots]$ . En las ondas de Bloch-Floquet todas las frecuencias existentes tienen su contraparte negativa, sin embargo en la representación de Fourier del balance armónico únicamente existen frecuencias positivas  $\Omega[0.5(0.5), 1.5(0.5 + 1), \dots]$ .

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

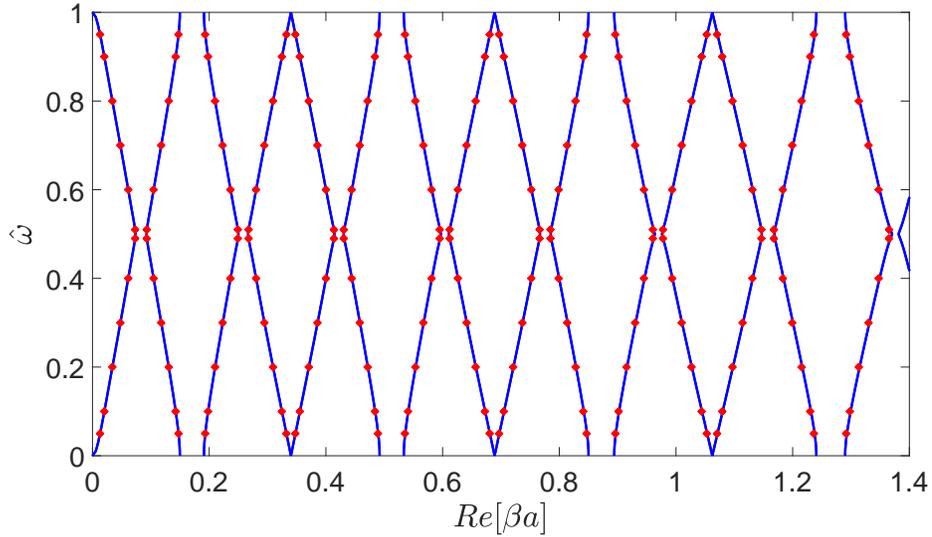


Fig. 4.14: Relación de dispersión (Región de onda larga) de una línea de transmisión con modulación  $m_c = 0.8$  y resistencia en serie de  $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias  $\omega + n\Omega$  (puntos rojos). Aquí las bandas prohibidas han vuelto y tienen una estructura periódica tal como se observa en un medio dielectrico con modulación  $m = 0.8$ .

Entonces existe una ambigüedad para concatenar las respuestas eléctricas y formar una matriz de la forma Eq.(4.32). Para evitar caer en esta ambigüedad se ha decidido simular la línea de transmisión a frecuencias lo más cercanas posibles a  $\hat{\omega} = 0.5$ .

#### 4. Línea de transmisión con capacitancia variante en tiempo

---

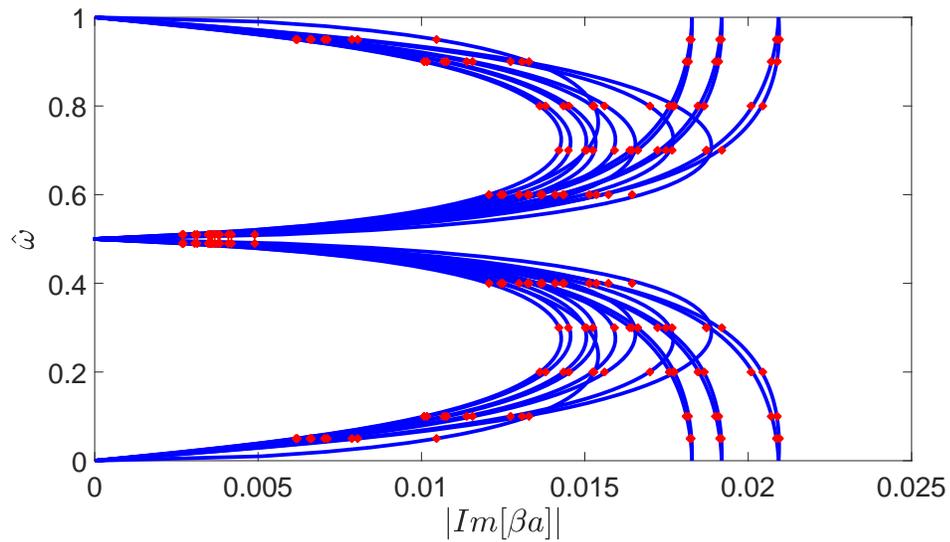


Fig. 4.15:  $Im[\beta]$  de la línea de transmisión con modulación  $m_c = 0.8$  y resistencia  $3\Omega$ . Solución de la ecuación analítica (línea azul). Resultado de la simulación de balance armónico mediante el método de matriz ABCD con excitación iterada de 20 señales con frecuencias  $\omega + n\Omega$  (puntos rojos). Todos los modos de propagación tienen una atenuación menor comparada a la que se muestra en Fig.4.13. En la cercanía de las frecuencias  $\hat{\omega} = 0.5, 1.5, etc.$  se encuentran los valores mínimos, y conforme más se acerque a esa frecuencia el valor tiende a ser 0.

## Trabajo a futuro

---

El protocolo de medición mediante la matriz ABCD con múltiples e iterativas excitaciones en la línea de transmisión es aplicable con cualquier mecanismo de modulación de capacitancia. La única condición es que sea una modulación periódica. A continuación se proponen 2 metodologías que logran variaciones de capacitancia periódica.

### 5.0.1. Emulación del circuito según SDD2

Generalmente se utiliza un diodo varactor como capacitancia variable en tiempo. La variación depende de una fuente de modulación externa acoplada con un nivel de voltaje para establecer un punto de operación. El arreglo de varactor requiere de un filtro entre la fuente de modulación y el nodo de propagación. Aquí se propone un circuito que simule el comportamiento del módulo SDD2 de ADS como capacitancia variable en tiempo. En la fig.7 se muestra el diagrama de bloques del circuito propuesto. Este circuito está compuesto por un buffer de entrada que está sensando el voltaje nodal de propagación. Un multiplicador analógico de cuarto cuadrante multiplicará el voltaje sensado con una señal proporcional a la modulación de capacitancia. El perfil de modulación depende de la forma de onda de la señal de modulación, esta puede ser armónica, triangular, diente de sierra, etc. La señal de modulación cuadrada es creada a partir de la superposición de finitos armónicos de una frecuencia de modulación  $\Omega/2\pi$ . El voltaje de salida de la etapa multiplicadora pasa por un amplificador diferenciador y por último una fuente de corriente controlada por voltaje suministrará una corriente de retroalimentación al nodo de propagación. El circuito propuesto contiene más elementos con respecto al circuito con varactor, sin embargo, debido a la alta impedancia

## 5. Trabajo a futuro

del nodo de entrada (Buffer) la señal de modulación no interfiere directamente al nodo de propagación. No se necesita el diseño de filtros en este circuito. Además es un circuito modular, por lo cual se pueden diseñar las diferentes etapas por separado para diferentes condiciones de diseño.

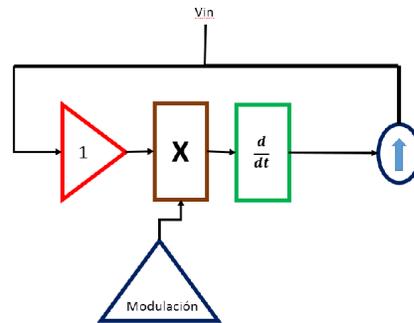


Fig. 5.1: Diagrama a bloques del circuito simulador de capacitancia periódica variable en tiempo.

### 5.0.2. Arreglo de capacitores conmutados

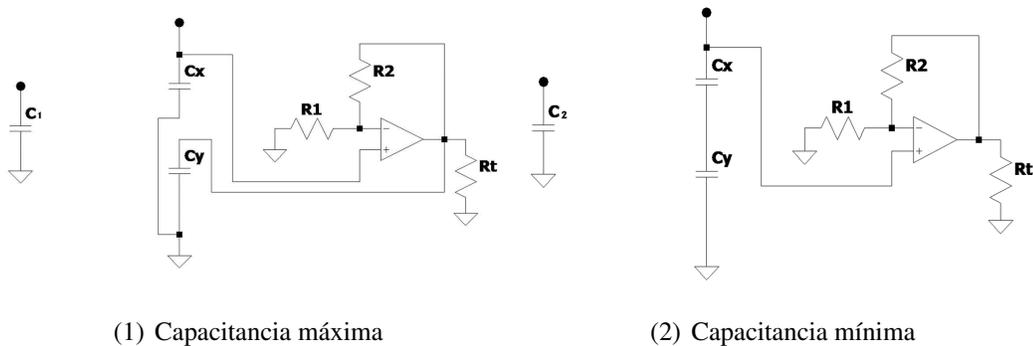
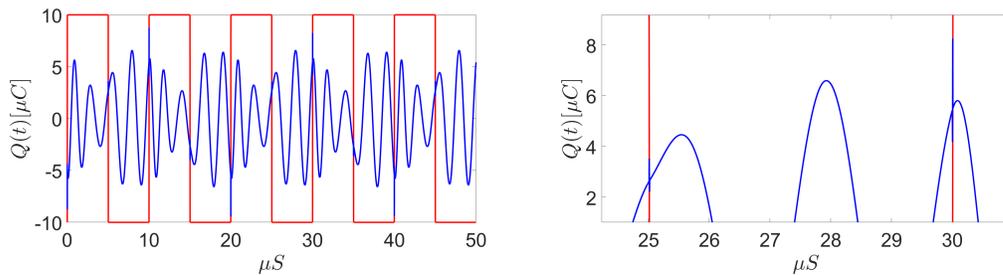


Figura 5.2: Capacitancia variante en tiempo mediante un arreglo conmutado de capacitores.

Esta propuesta está enfocada únicamente a un perfil de modulación cuadrada. El circuito consiste en un arreglo de capacitores conmutados que están conectados al nodo de propagación de la línea de transmisión, y tendrá un capacitor conectado en

todo momento mientras otro capacitor estará conmutando entre el capacitor fijo y un amplificador. En Fig.5.3 se muestran las dos etapas que estarán conmutando entre sí. En la etapa 1, la capacitancia máxima es igual al valor de un capacitor  $C_x$ , mientras tanto en todo momento se esta sensando el voltaje sobre el nodo de propagación para luego ser amplificado y llenar cargar un capacitor  $C_y$ . En la etapa 2 el capacitor  $C_y$  se desconecta del amplificador y se conecta en serie con  $C_x$ . En la etapa 2 la capacitancia equivalente es igual a  $C_2 = C_x C_y / (C_x + C_y)$ , dado que será una capacitancia menor a  $C_x$  esta seria considerada la capacitancia mínima de la función cuadrada. La etapa 1 y 2 se alternan periodicamente para formar la variación cuadrada de capacitancia. La frecuencia de conmutación debe ser el doble a la frecuencia de modulación.

Este arreglo conmutado asegura la continuidad de carga eléctrica a través de cada conmutación (interfaz temporal). En la Fig.5.3 se muestra una simulación del arreglo conmutado y se aprecia que se cumple tal continuidad.



(1) Carga electrica sobre el arreglo de capacitor a traves del tiempo (línea azul) junto a las interfaces temporales creadas por las conmutaciones del circuito (línea roja).

(2) Continuidad de carga eléctrica

Figura 5.3: Continuidad de carga eléctrica a través de cada interfaz temporal.

En este momento de la investigación se ha simulado una línea de transmisión utilizando el arreglo conmutado de capacitancias como capacitor variante en tiempo. En la Fig.5.4 se muestra la relación de dispersión calculada con el método Kronig-Penney (línea negra) comparada con la relación de dispersión calculada con las mediciones del simulador y el método de la matriz ABCD. En la Figura se aprecia una aproximación medianamente aceptable entre ambos métodos para frecuencias no tan cercanas a  $\hat{\omega} = 0.5$ , sin embargo numéricamente es una buena aproximación.

## 5. Trabajo a futuro

---

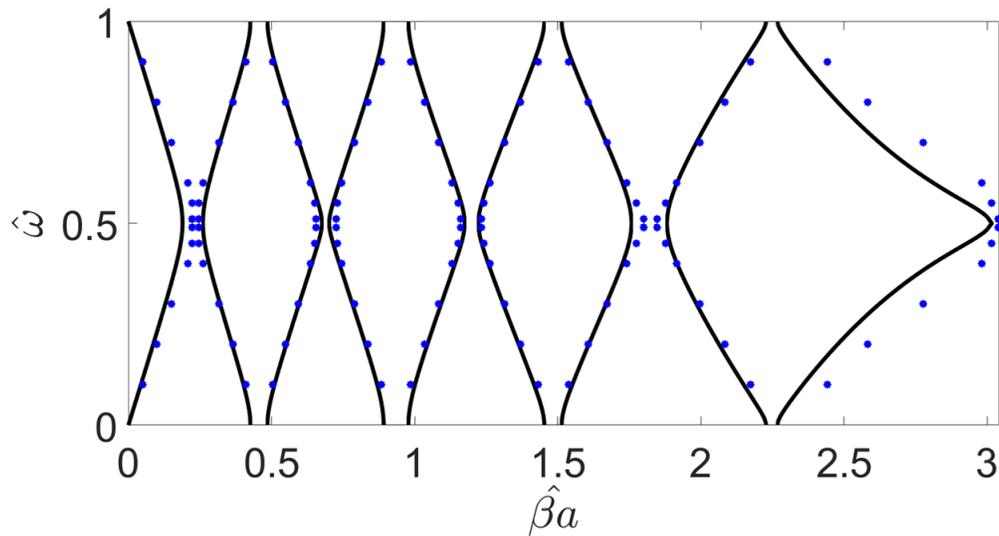


Fig. 5.4: Relación de dispersión obtenida para una línea con capacitancia variable en tiempo utilizando un arreglo conmutado. El método de matriz ABCD (puntos azules) ha sido utilizado y se compara contra el método Kronig-Penney (línea negra).

Ambos métodos tienen sus desafíos para llevarlos a la práctica. Por ejemplo, el simulador SDD2 requiere de una selección adecuada de amplificadores operacionales; que tengan anchos de banda que alcancen a cubrir por lo menos los armónicos más significativos de la onda cuadrada. Por su parte el circuito de capacitores conmutados necesita de una selección adecuada de interruptores con la menor pérdida posible; un circuito que asegure una correcta conmutación de todos los interruptores involucrados; y también se requiere de un diseño robusto de amplificador que soporte cargas capacitivas.

## Conclusiones

---

### 6.1. Conclusiones Principales

- La relación de dispersión de un medio modulado en tiempo con perfil cuadrado siempre será periódica con respecto a la frecuencia  $\omega$  cuyo periodo es la frecuencia de modulación. Solo para valores selectos de la modulación y  $\tau$  (proporciones de los intervalos de tiempo que forman el periodo de modulación  $T$ ) es que también se puede presentar periodicidad con respecto al número de onda  $k$ . El periodo  $k_{per}$  depende de la modulación del medio y el valor de  $\tau$ . La aparición de bandas prohibidas de  $k$  es una propiedad característica en los medios modulados en tiempo.

El campo electromagnético en los medio modulado en tiempo se comporta de tres diferentes maneras dependiendo de donde se localiza su modo de propagación:

- El campo corresponderá a una onda Bloch que se propaga por el medio si el modo de propagación pertenece a cualquiera de las bandas permitidas (excepto para una frecuencia  $\omega = N\Omega/2$ ), siendo  $N$  un número entero.
- El campo electromagnético estará formado por ondas estacionarias cuando el modo de propagación tiene frecuencia  $\omega = N/2$ .
- La frecuencia de propagación será compleja y el campo electromagnético aumentara o disminuirá de manera exponencial con el tiempo si el modo pertenece a una banda prohibida del vector de onda  $k$ .

## 6. Conclusiones

---

- La energía total transmitida y reflejada por la placa modulada es superior a la energía de la onda incidente. El mecanismo de modulación del medio inyecta esta energía adicional.
- Se desarrolló un protocolo de medición para una línea de transmisión modulada en tiempo utilizando la teoría de redes de dos puertos. La capacitancia e inductancia con modulación periódica en tiempo se representa a través matrices cuadradas de admitancia e impedancia. A partir de esas matrices se pueden obtener los parámetros ABCD variantes en tiempo. Aquí cada elemento de la matriz ABCD es una submatriz cuadrada.
- Es posible calcular la relación de dispersión de la línea de transmisión modulada con la respuesta eléctrica ante excitaciones iteradas con las frecuencias  $\omega + n\Omega$ . El voltaje reflejado y transmitido es transformado al espacio de Fourier y después se concatenan las respuestas eléctricas de cada excitación para formar una matriz cuadrada de voltajes reflejados y transmitidos.

### 6.2. Conclusiones Parciales

- Un medio con permitividad y/o permeabilidad caracterizada con una modulación periódica temporal de perfil cuadrada brinda la facilidad de analizarse mediante el método Kronig-Penney.
- Las soluciones a la ecuación de onda bien definidas para cada intervalo de tiempo donde la capacitancia es constante se relacionan entre si al satisfacer las siguientes condiciones de frontera: El campo desplazamiento  $D(t)$  y magnético  $B(t)$  deben mantenerse continuos a través de las interfaces temporales creadas por el perfil cuadrado de modulación.
- El teorema de Bloch-Floquet permite reducir las infinitas interfaces temporales creadas por la modulación cuadrada a simplemente 3 interfaces significativas. Resolver la ecuación de onda del medio variante en tiempo durante un solo periodo de modulación es suficiente para conocer el comportamiento del campo electromagnético en todo instante de tiempo.

- La relación de dispersión esta compuesta por bandas permitidas del vector de onda  $k$  separada por bandas prohibidas.
- La periodicidad con respecto a  $k$  existe para cualquier modulación y valor de  $\tau$  que satisfaga la Eq.6.1, y esta solución sea un número racional. La cantidad de bandas prohibidas dentro del periodo  $k_{per}$  depende del valor del número racional número racional.

$$\left| \frac{(\sqrt{1-m} + \sqrt{1+m})\tau - \sqrt{1+m}}{\sqrt{1-m} - \sqrt{1+m})\tau + \sqrt{1+m}} \right| = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.1)$$

- La relación de dispersión tiene todas la bandas prohibidas  $\Delta k$  del mismo ancho cuando existe modulación de permitividad y permeabilidad con la misma magnitud pero están fuera de fase. Aquí la velocidad de propagación se mantiene contante a través de la interfaz temporal, y la impedancia del medio cambia.
- La relación de dispersión no presenta bandas prohibidas  $\Delta k$  y esta compuesta de líneas rectas cuando la modulación de permitividad y permeabilidad son de igual magnitud y en fase. La pendiente de dichas líneas es proporcional a la raíz de los valores promedio de permitividad ( $\bar{\epsilon}$ ) y permeabilidad ( $\bar{\mu}$ ). Aquí la velocidad de propagación cambia a través de la interfaz temporal, y la impedancia se mantiene constante e igual a la impedancia promedio del medio sin modular.

Se ha demostrado que:

- La máxima tasa de crecimiento exponencial del campo electromagnético ocurre para los modos justo al centro de las bandas prohibidas.
- Es posible obtener valores  $Max[Im(\omega)]$  iguales para diferentes bandas prohibidas a lo largo de la relación de dispersión que tenga periodicidad en frecuencia  $\omega$  y número de onda  $k$ . En esta tesis se han mostrado los casos de doble periodicidad cuando Eq.(6.1) es 0, 1/2 y 1/3.
- Todas las bandas prohibidas tienen el mismo ancho y sus valores  $Max[Im(\omega)]$  también son iguales cuando  $N_1 = 0$  en la Eq(6.1). Para este caso, el  $Max[Im(\omega)]$  en función de una modulación dada se puede calcular con la Eq.6.2.

$$Max[Im(\hat{\omega})] = \frac{Ln(\sqrt{1+m}/\sqrt{1-m})}{2\pi} \quad (6.2)$$

## 6. Conclusiones

---

- La respuesta óptica de una placa con modulación de permitividad y/o permeabilidad con perfil cuadrado ante la incidencia de una onda plana consta de campos reflejados y transmitidos formados por la superposición de ondas planas con frecuencias pertenecientes al peine de frecuencias  $\omega + n\Omega$ .
- El campo transmitido por una placa con modulación de permitividad y permeabilidad de igual magnitud y fuera de fase esta compuesto únicamente por el armónico fundamental  $n = 0$ , mientras el campo reflejado sí esta compuesto por diversos armónicos del peine de frecuencias. La reflectancia y transmitancia total varían con respecto a la frecuencia  $\omega$ . La impedancia promedio de la placa modulada debe ser igual a la impedancia del medio que la rodea.
- El campo transmitido por una placa con modulación de permitividad y permeabilidad de igual magnitud y en fase esta compuesto por diversos armónicos del peine de frecuencias, y no existe campo reflejado por la placa modulada. La impedancia promedio de la placa modulada debe ser igual a la impedancia del medio que la rodea. Esta es una condición importante para la ausencia de campo reflejado pues no existe cambio de impedancia a través de las interfaces temporales ni espaciales. La transmitancia total esta por encima de la energía incidente en la placa y es igual para cualquier frecuencia  $\omega$ .

Dada la dificultad para obtener modulaciones en el régimen óptico, la mayoría de las aplicaciones de los sistemas modulados en tiempo han sido en el régimen de las microondas. El comportamiento de un medio dielectrico con variación temporal de permitividad y permeabilidad es análogo al comportamiento de una línea de transmisión (en el límite de longitud de onda larga) con capacitancia e inductancia variables en tiempo. En el trabajo de maestria [83] ya se ha estudiado la relación de dispersión de una línea de transmisión con capacitores e inductores con modulación periodica temporal de perfil cuadrado.

- En esta tesis se ha propuesto un par de circuitos que emulan una capacitancia modulada con perfil cuadrado y que cumple con la continuidad de carga eléctrica a través de cada interfaz temporal.
- La primer propuesta consta de un buffer que sensa el nodo de propagación de la línea de transmisión; la señal recogida pasa por un circuito derivador y después

por una fuente de corriente controlada por voltaje que inyecta corriente al nodo de propagación.

- La segunda propuesta consta de un arreglo de capacitores conmutado. Un amplificador es utilizado para asegurar la continuidad de carga entre cada conmutación.
- Ambas propuestas tiene la particularidad de no utilizar diodo varactor como capacitancia variable y eso permite desacoplar el nodo de propagación del nodo donde se conecta la fuente de modulación.
- La relación de dispersión de la línea de transmisión modulada proviene de los eigenvalores de la matriz ABCD. Si la línea de transmisión esta compuesta de  $N$  celdas unitarias bastara con multiplicar la matriz ABCD consigo misma  $N$  veces para obtener la matriz ABCD de la línea de transmisión completa. La relación de dispersión es equivalente a la raíz  $N$  de los eigenvalores de la matriz ABCD equivalente.
- Para obtener los parámetros ABCD a partir de las mediciones de la respuesta eléctrica primero es necesario obtener los parámetros S de la línea de transmisión modulada. Luego se transforman a parámetros ABCD. Los parámetros S son matrices cuadradas resultado de operar las matrices de los voltajes transmitidos y reflejados por la línea de transmisión.
- Es posible reducir la atenuación a lo largo de la línea de transmisión cuando esta tiene perdidas ohmicas. Incluso pueden haber modos con  $Im(\beta) = 0$  si la modulación es lo suficientemente fuerte. Estos modos son de frecuencia  $\omega = N\Omega/2$  siendo N un número impar.
- La relación de dispersión calculada a partir de los parámetros ABCD tiene una ambigüedad matemática para los modos con  $\omega = N\Omega/2$ . Una alternativa para evitar dicha ambigüedad es excitando la línea de transmisión modulada con frecuencias lo más cercanas a  $\omega = N\Omega/2$  pero sin llegar a ella.
- El protocolo de medición propuesto arroja relaciones de dispersión consistentes con los cálculos a través del método Kronig-Penney. Ambos resultados son validados con simulaciones de líneas de transmisión en software comerciales.

## Apéndice A

---

La estabilidad de un cristal fotónico temporal se calcula utilizando el método de la matriz de transición. De acuerdo a la condición de estabilidad, los eigenvalores  $\lambda$  de la matriz de transición debe obedecer la condición  $|\lambda| < 1$ . Para crear la matriz de transición  $\phi(T, 0)$  sobre el periodo T es necesario re-escribir la ecuación de onda, Eq.(2.7), como una ecuación de estado, donde el campo desplazamiento  $D(t)$  y magnético  $B(t)$  son elementos del vector de estado. Debido a los perfiles cuadrados de  $\epsilon(t)$  y  $\mu(t)$  la Eq.(2.7) puede dividirse en dos. Por la razón anterior el vector estado es la ecuación matricial  $[D(t), B(t)]^T = W_{1,2} [D_{1,2}^+, D_{1,2}^-]^T$ . Aquí la matriz  $W_h$ , Eq.(7.1), contiene las dos soluciones linealmente independientes del campo  $D(t)$  de acuerdo a la ecuación Eq.(2.8) y al campo magnético  $B(t)$  calculado con la Eq.(2.4).

$$W_{1,2} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_{1,2}t} & e^{i\omega_{1,2}t} \\ -\frac{\mu_{1,2}\omega_{1,2}}{k}e^{-i\omega_{1,2}t} & \frac{\mu_{1,2}\omega_{1,2}}{k}e^{i\omega_{1,2}t} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Las amplitudes  $D_{1,2}^+$  y  $D_{1,2}^-$  son incógnitas usadas para crear la matriz de transición,  $\phi(t_\beta, t_\alpha)$ . La matriz de transición Eq.(7.2) relaciona los campos  $[D(t_\beta), B(t_\beta)]$  en el instante  $t_\beta$  con los campos  $[D(t_\alpha), B(t_\alpha)]$  con el tiempo inicial  $t_\alpha$ .

$$\phi(t_\beta, t_\alpha) = W_{1,2}(t_\beta)W_{1,2}(t_\alpha)^{-1} \quad (7.2)$$

La matriz de transición sobre el periodo T es el producto de las dos matrices de transición  $\phi(T, t_1^+)$  y  $\phi(t_1^-, 0)$ .

$$\begin{aligned} \phi(T, 0) &= \phi(T, t_1^+)\phi(t_1^-, 0) \\ &= W_2(T)W_2(t_1^+)^{-1}W_1(t_1^-)W_1(0)^{-1} \end{aligned} \quad (7.3)$$

La condición de estabilidad, Eq.(7.4), se encuentra cuando se resuelve el polinomio característico de la Eq.(7.3).

$$|\phi_{11}(T,0) + \phi_{22}(T,0)| \leq 2 \quad (7.4)$$

La condición de estabilidad del medio con variación periódica de perfil cuadrado es:

$$\left| \frac{(1-M_A)}{2} \cos \left\{ 2\pi\hat{k} \left[ \frac{\tau}{M^+} - \frac{(1-\tau)}{M^-} \right] \right\} + \frac{(1+M_A)}{2} \cos \left\{ 2\pi\hat{k} \left[ \frac{\tau}{M^+} + \frac{(1-\tau)}{M^-} \right] \right\} \right| \leq 1 \quad (7.5)$$

La comparación de la Eq.(7.5) y la relación de dispersión Eq.(2.18) confirma que los campos  $D(t)$  y  $B(t)$  son estables cuando la frecuencia angular es real y el número de onda pertenece a cualquier banda permitida de  $k$ .

# Bibliografía

---

- [1] F. R. Morgenthaler, Velocity modulation of electromagnetic waves, IRE Trans. Microw. Theory Tech. **6**, 167 (1958).
- [2] T. M. Ruiz, C. L. Wright and J. Smith, Characteristics of electromagnetic waves propagating in time varying media, IEEE Trans. Antenna Propag. **26**, 358 (1978).
- [3] C. Caloz and Z.-L. Deck-Léger, Space-time metamaterials, arXiv e-prints, arXiv:1905.00560 (2019).
- [4] Y. Xiao, D. N. Maywar and G. P. Agrawal, Reflection and transmission of electromagnetic waves at a temporal boundary, Opt. Lett. **39**, 574 (2014).
- [5] M. Chegnizadeh, K. Mehrany and M. Memarian, General solution to wave propagation in media undergoing arbitrary transient or periodic temporal variation of permittivity, J. Opt. Soc. Am. B **35**, 2923 (2013).
- [6] A. Hayrapetyan, J. Götze, K. Huruntz, S. Fritzsche, and R. G. Petrosyan, Electromagnetic wave propagation in spatially homogeneous yet smoothly time-varying dielectric media, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. **178**, 158 (2016).
- [7] V. Pacheco-Peña, Y. Kiasat, B. Edwards and N. Engheta, “Salient Features of Temporal and Spatio-Temporal Metamaterial” International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), pp.524(2018).
- [8] J. R. Zurita-Sánchez, P. Halevi and J. C. Cervantes-González, Phys. Rev. E **79**, 053821 (2009).
- [9] N. Wang, Z. -Q. Zhang and C. T. Chan, Photonic Floquet media with a complex time-periodic permittivity, Phys. Rev. B **98**, 085142 (2018).

- [10] T. T. Koutserimpas and R. Fleury, Electromagnetic waves in a time periodic medium with step varying refractive index, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66**, 5300 (2018).
- [11] A. M. Shaltout, J. Fang, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev , Photonic Time-Crystal and Momentum Band-Gaps, in *Conference on Lasers and ElectroOptics*, OSA Technical Digest (online), 2016.
- [12] E. Lustig, Y. Sharabi and M. Segev, Topological aspects of photonic time crystals, *Optica* **5**, 1390 (2018).
- [13] Ji Ma and Zhi-Guo Wang, Band structure and topological phase transition of photonic time crystals, *Opt. Express* **27**, 1291 (2019)
- [14] J. S. Martínez-Romero, O. M. Becerra-Fuentes and P. Halevi, Temporal photonic crystals with modulations of both permittivity and permeability, *Phys. Rev. A* **93**, 063813 (2016).
- [15] N. Chamanara, Z.-L. Deck-Léger, C. Caloz and D. Kalluri, Unusual electromagnetic modes in space-time modulated dispersion engineered media, *Phys. Rev. A* **97**, 063829 (2018).
- [16] F. Biancalana, A. Amann, A. Uskov and E. O'Reilly, Dynamics of light propagation in spatiotemporal dielectric structures, *Phys. Rev. E* **75**, 046607 (2007).
- [17] S. Inampudi, M. M. Salary, S. Jafar-Zanjani, and H. Mosallaei, Rigorous space-time coupled-wave analysis for patterned surfaces with temporal permittivity modulation, *Opt. Mater. Express* **9**, 162 (2019).
- [18] S. Taravati and G. Eleftheriades, Generalized Space-Time-Periodic Diffraction Gratings: Theory and Applications, *Phys. Rev. Applied* **12**, 024026(2019).
- [19] S. Taravati and A. Kishk, Advanced Wave Engineering via Obliquely Illuminated Space-Time Modulated Slab, *IEEE Trans. Antenna Propag.* **67**, 270(2019).
- [20] S. Taravati, Giant linear nonreciprocity, zero reflection and zero band gap in equilibrated space-time-varying media, *Phys. Rev. Applied* **9**, 064012 (2018).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [21] D. Holberg and K. Kunz, Parametric properties of fields in a slab of time-varying permittivity, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **14**, 183 (1966).
- [22] J. R. Zurita-Sánchez and P. Halevi, Resonances in the optical response of a slab with time-periodic dielectric function, *Phys. Rev. A* **81**, 053834 (2010).
- [23] J. Sabino Martínez-Romero and P. Halevi, Parametric resonances in a temporal photonic crystal slab, *Phys. Rev. A* **98**, 053852 (2018).
- [24] J. R. Zurita-Sánchez, J. H. Abundis-Patiño and P. Halevi, Pulse propagation through a slab with time-periodic dielectric function  $\epsilon(t)$ , *Opt. Express*, **20**, 5586 (2012)
- [25] Y. Xiao, G. P. Agrawal and D. N. Maywar, Spectral and temporal changes of optical pulses propagating through time-varying linear media, *Opt. Lett.* **36**, 505 (2011).
- [26] K. Yi, M. Collet and S. Karkar, Frequency conversion induced by time-space modulated media, *Phys. Rev. B* **96**, 104110 (2017).
- [27] C. Qin, Z. Feng, Y. Peng, D. Sounas, X. Zhu, B. Wang, J. Dong, X. Zhang, A. Alù, and P. Lu, Spectrum control through discrete frequency diffraction in the presence of photonic gauge potentials, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 133901 (2018).
- [28] D. Sounas and A. Alù, Angular-momentum-biased nanorings to realize magnetic-free integrated optical isolation, *ACS Photonics* **1**, 198 (2014).
- [29] N. A. Estep, D. Sounas, J. Soric and A. Alù, Magnetic-free non-reciprocity and isolation based on parametrically modulated coupled resonator loops, *Nature Physics* **10**, 923 (2014).
- [30] Y. Zhang, B. -K. Cheng and B. -Q. Gao, Propagation of electromagnetic waves excited by half-wave dipole antenna in time-varying media, *IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications*, **1**, 318 (2005).
- [31] K. A. Lurie and V. V. Yakovlev, Energy accumulation in waves propagating in space and time-varying transmission lines, *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.* **15**, 1681 (2016).

- 
- [32] J. R. Reyes-Ayona and P. Halevi, Electromagnetic wave propagation in an externally modulated low-pass transmission line, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **64**, 3449 (2016).
- [33] S. Y. Elnaggar and G. N. Milford, Modelling Space-time Periodic Structures with Arbitrary Unit Cells Using Time Periodic Circuit Theory, arXiv e-prints, arXiv:1901.08698 (2019).
- [34] J. R. Reyes-Ayona and P. Halevi, Observation of genuine wave vector ( $k$  or  $\beta$ )gap in a dynamic transmission line and temporal photonic crystals, *Appl. Phys. Lett.* **107**, 074101 (2015).
- [35] S. Qin and Y. E. Wang, Parametric conversion with distributedly modulated capacitors (DCM) for low-noise and non-reciprocal rf front-ends, in *2013 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (MTT)* (2013) pp. 1-3.
- [36] S. Qin, Q. Xu, and Y. E. Wang, Nonreciprocal components with distributedly modulated capacitors, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **62**, 2260 (2014).
- [37] Y. S. Li, X. P. Yu and Z. H. Lu, Nonreciprocal time-varying transmission line with carrier boosting technique for low-noise rf front ends, *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.* **28**, 1011 (2018).
- [38] W. Lee and E. Afshari, Low-noise parametric resonant amplifier, *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers* **58**, 479 (2011).
- [39] S. Taravati and C. Caloz, Mixer-Duplexer-Antenna Leaky-Wave System Based on Periodic Space-Time Modulation, *IEEE Trans. Antenna Propag.* **65**, 442 (2017).
- [40] S. Taravati, Aperiodic space-time modulation for pure frequency mixing, *Phys. Rev. B* **97**, 115131 (2018).
- [41] A. Shlivinski and Y. Hadad, Beyond the Bode-Fano Bound: Wideband Impedance Matching for Short Pulses Using Temporal Switching of Transmission-Line Parameters, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 204301 (2018).
- [42] M. Mirmoosa, G. Ptitsyn, V. Asadchy, and S. Tretyakov, Time-varying reactive elements for extreme accumulation of electromagnetic energy, *Phys. Rev. Applied* **11**, 014024 (2019).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [43] J.A. Richards, *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*. Berlin, Germany: Springer, 1983.
- [44] R. D. L. Krönig and W. Penney, Proc. R. Soc. Lond. A. **130**, 499 (1931).
- [45] S.-H. Pan and S. M. Feng, General formalism of the Krönig-Penney model suitable for superlattice applications, Phys. Rev. B **44**, 5668 (1991).
- [46] A. Esmailpour, M. Esmailzadeh, E. Faizabadi, P. Carpena and M. Reza Rahimi Tabar, Metal-insulator transition in random Krönig-Penney superlattices with long-range correlated disorder, Phys. Rev. B **74**, 024206 (2006).
- [47] V. Pourmahmoud and B. Rezaei, Manipulation of Bragg and graphene photonic band gaps in one-dimensional photonic crystal containing graphene, Optik **185**, 875 (2019).
- [48] V. S. Proshchenko, M. Settipalli, A. K. Pimachev and S. Neogi, Modulation of semiconductor superlattice thermopower through symmetry and strain, arXiv e-prints, arXiv:1907.03461 (2019).
- [49] G. Luna, F. Izrailev, N. M. Makarov, U. Kuhl and H. J. Stoeckmann, One-dimensional Krönig-Penney model with positional disorder: Theory versus experiment, Phys. Rev. B **80**, 115112 (2009).
- [50] S. Mishra and S. Satpathy, One-dimensional photonic crystal: The Krönig-Penney model, Phys. Rev. B **68**, 045121 (2003).
- [51] H. Hojo and A. Mase, Dispersion relation of electromagnetic waves in one-dimensional plasma photonic crystals, Plasma Fusion Res. **80**, 89 (2004).
- [52] M. Bergmair and K. Hingerl, Band structure and coupled surface states in one-dimensional photonic crystals, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **9**, S339 (2007).
- [53] S. Prasad, V. Singh and A. Singh, Modal propagation characteristics of em waves in ternary one-dimensional plasma photonic crystals, Optik - International Journal for Light and Electron Optics **121**, 1520 (2010).
- [54] T. Mayteevarunyoo and B. Malomed, Solitons in onedimensional photonic crystals, J. Opt. Soc. Am. B **25**, 1854 (2008).

- [55] T. Mayteevarunyoo, B. Malomed and A. Roeksabutr, Solitons and vortices in non-linear two-dimensional photonic crystals of the Krönig-Penney type, *Optics express* **19**, 17834 (2011).
- [56] A. Gomez-Gomez, A. Lakhtakia, M. A. Solano and A. Vegas, Parallel-plate waveguides with Krönig-Penney morphology as photonic band-gap filters, *Microw. Opt. Technol. Lett.* **36**, 4 (2003).
- [57] A. Gomez-Gomez, M. A. Solano, A. Lakhtakia and A. Vegas, Circular waveguides with Krönig-Penney morphology as photonic band-gap filters, *Microw. Opt. Technol. Lett.* **37**, 316 (2003).
- [58] J. S. Martínez-Romero and P. Halevi, *Phys. Rev. A* **96**, 063831 (2017).
- [59] P. A. Sturrock, “Kinematics of growing waves”, *Phys. Rev.* **112**, 1488(1958)
- [60] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Addison-Wesley, 1959).
- [61] Y. B. Fainberg, V. I. Kurilko, and V. D. Shapiro, “Instabilities in the interaction of charged particle beams with plasmas,” *Sov. Phys. Tech. Phys.* **6**, 459 (1961).
- [62] R. J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas* (MIT Press, 1964).
- [63] A. L. Cullen, “A travelling-wave parametric amplifier,” *Nature* **181**, 332(1958).
- [64] P. K. Tien, “Parametric amplification and frequency mixing in propagating circuits,” *Journal of Applied Physics* **29**, 1347 (1958).
- [65] E. S. Cassedy, “Dispersion relations in time-space periodic media Part II—unstable interactions,” *Proceedings of the IEEE* **55**, 1154 (1967).
- [66] R. H. Kingston, “Parametric amplification and oscillation at optical frequencies,” *Proc. IRE.* **50**, 472 (1962).
- [67] N. M. Kroll, “Parametric amplification in spatially extended media and application to the design of tuneable oscillators at optical frequencies,” *Proceedings of the IRE* **51**, 110 (1963).
- [68] J. A. Giordmaine and R. C. Miller, “Tunable coherent parametric oscillation in  $LiNbO_3$  at optical frequencies,” *Phys. Rev. Lett.* **14**, 973 (1965).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [69] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (W. A. Benjamin, 1965).
- [70] A. Yariv, “Parametric interactions of optical modes,” *IEEE J. Quantum. Electron.* **2**, 30 (1966).
- [71] D. E. Holberg and K. S. Kunz, “Parametric properties of fields in a slab of time-varying permittivity,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* **14**, 183 (1966).
- [72] N. Wang, Z. Q. Zhang, and C. T. Chan, “Photonic Floquet media with a complex time-periodic permittivity,” *Phys. Rev. B* **98**, 085142 (2018).
- [73] M. Chengnizadeh, K. Mehranry, and M. Memarian, “General solution to wave propagation in media undergoing arbitrary transient or periodic temporal variations of permittivity,” *J. Opt. Soc. Am. B* **35**, 2923 (2018).
- [74] H. Li, S. Yin, E. Galiffi, and A. Alú, “Temporal parity-time symmetry for extreme energy transformations,” *Phys. Rev. Lett* **127**, 153903 (2021).
- [75] A. M. Shaltout, J. Fang, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, “Photonic time-crystal and momentum band-gaps,” *Conference on Lasers and Electro-Optics*, OSA Technical Digest (Online) (Optical Society of America, 2016), paper FM1D.4.
- [76] E. Lustig, Y. Sharabi, and M. Segev, “Topological aspects of photonic time crystals,” *Optica* **5**, 1390 (2018).
- [77] J. Ma and Z.-G. Wang, “Band structure and topological phase transition of photonic time crystals,” *Opt. Express* **27**, 12914 (2019).
- [78] T. K. Koutserimpas, “Parametric amplification interactions in time-periodic media: coupled waves theory,” *J. Opt. Soc. Am. B* **39**, 481 (2022).
- [79] S. Vezzoli, V. Bruno, C. DeVault, T. Roger, V. M. Shalaev, A. Boltasseva, M. Ferrera, M. Clerici, A. Dubietis, , and D. Faccio, “Optical time reversal from time-dependent epsilon-near-zero media,” *Phys. Rev. Lett.* **120**, 043902 (2018).
- [80] M. Lyubarov, Y. Lumer, A. Dikopoltsev, E. Lustig, Y. Sharabi, and M. Segev, “Amplified emission and lasing in photonic time crystals,” *Science* **377**, 425 (2022).

- [81] A. Dikopoltsev, Y. Sharabi, M. Lyubarov, Y. Lumer, S. Tsesses, E. Lustig, I. Kaminer, and M. Segev, “Light emission by free electrons in photonic time-crystals,” [physics.optics] **arXiv:2109.01203**.
- [82] J. G. Gaxiola-Luna and P. Halevi, “Temporal photonic (time) crystal with a square profile of both permittivity and permeability,” *Phys. Rev. B* **103**, 144306 (2021).
- [83] Gaxiola Luna Jose Gabriel, *Línea de transmisión periódicamente modulada en tiempo de manera abrupta*, Tesis de maestría (Instituto Nacional de Astrofísica, óptica y electrónica, 2017).
- [84] C. F. Kurth, *IEEE Trans. On Circuits And Systems*. **24**,610(1977)
- [85] S. Y. Elnaggar and G. N. Milford, ”Modeling Space–Time Periodic Structures With Arbitrary Unit Cells Using Time Periodic Circuit Theory, in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 68, no. 9, pp. 6636-6645, Sept. 2020
- [86] Xu, C., Piazza, G. A Generalized Model for Linear-Periodically-Time-Variant Circulators. *Sci Rep* **9**, 8718 (2019)
- [87] X. Wu, X. Liu, M. D. Hickle, D. Peroulis, J. S. Gómez-Díaz and A. Álvarez Melcón, Isolating Bandpass Filters Using Time-Modulated Resonators, in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 67, no. 6, pp. 2331-2345, June 2019.
- [88] D. M. Pozar, *Microwave Engineering: Fourth edition*. John Wiley and Sons, 2012.
- [89] G. Miller, Harmonic Balance Basics, <http://keysight.com/display/ads2009/Harmonic+Balance+Basics>, 2018