



INAOE

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica,
y Electrónica.**

Reporte Técnico

No. 686

Coordinación de Electrónica

**Método de Melnikov:
Análisis y Aplicaciones**

Dr. Pedro Pancóatl Bortolotti
Dr. Rogerio Enríquez Caldera*
*INAOE/CRECTEALC

Febrero del 2024

©INAOE 2024

Derechos reservados

El autor responsable otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de este reporte técnico en su totalidad o en partes mencionando la fuente



Contenido

Introducción.....	3
Antecedentes.....	3
Análisis de Melnikov.....	3
Ventajas e inconvenientes de Melnikov.....	7
Aplicación de la integral de Melnikov para órbitas homoclínicas.....	7
Aplicación de la integral de Melnikov para órbitas periódicas (ciclos límite).....	9
Ciclo límite estable para sistema tipo Liènard basado en funciones Binomiales.....	10
Método de Melnikov para identificar caos intermitente.....	11
Diseño de sistema Liènard basado en función sinc mediante función de Melnikov.....	11
Definición del nuevo sistema en régimen ciclo límite.....	11
Análisis en régimen conservativo.....	12
Análisis en régimen no conservativo.....	14
Referencias.....	17

Método de Melnikov y aplicaciones

Introducción

Antecedentes

A lo largo de los siglos, los científicos han intentado desarrollar diversos métodos para entender los fenómenos en la naturaleza. Algunos métodos, principalmente los matemáticos, inicialmente consistían en aproximar de manera algebraica lineal diversos los fenómenos observados, este hecho marcó el inicio de la comunión entre dos populares estudios, las matemáticas y las naturaleza. En la actualidad, es bien sabido que la gran mayoría de los fenómenos naturales son de carácter no lineal y donde sus modelos matemáticos son cada vez más complejos descritos sobre todo con ecuaciones diferenciales no lineales cuyas soluciones, en general, son difíciles de alcanzar. Por si fuera poco, a finales del siglo XIX se descubrió que ciertos fenómenos regidos por modelos matemáticos no lineales, eran capaces de producir comportamientos complejos aparentemente aleatorios bajo ciertas condiciones especiales. Este comportamiento denominado “caos” no sólo se encuentra en fenómenos naturales tales como crecimiento de población de especies [1] o variaciones en las condiciones del clima [2], sino también puede ser producido en laboratorio.

Así el caos es descrito como *“un comportamiento aparentemente aleatorio de ciertos sistemas dinámicos no lineales, con alta sensibilidad a sus condiciones iniciales, lo que puede producir múltiples trayectorias no convergentes entre sí en el espacio fase”* [3].

Recientemente, los sistemas dinámicos con tal comportamiento continúan siendo explorados permitiendo al mismo tiempo el desarrollo de infinidad de aplicaciones dentro de diversos campos de ingeniería, esto gracias a sus características particulares tales como la resistencia a fuertes perturbaciones externas (ruido) y su capacidad de generación de valores pseudo aleatorios. Las investigaciones correspondientes a estos sistemas denominados ahora sistemas caóticos, tienden a requerir métodos analíticos especializados para su comprensión pudiéndose encontrar:

1. Exponentes de Lyapunov, el cual provee una medida cuantitativa de la tasa exponencial promedio de divergencia o convergencia de las trayectorias vecinas en el espacio fase que describen al sistema [4].
2. Mapa de Poincaré, que consiste en remplazar un sistema de tiempo continuo de orden n , por un mapa discreto de orden $n-1$, de modo que es posible realizar un muestreo de puntos de las trayectorias existentes en el espacio fase sobre una superficie en \mathbb{R}^2 ortogonal a dichas trayectorias [5].
3. Diagrama de Bifurcación, que representa todas las soluciones de un sistema dinámico para un conjunto de variación de parámetros [6].

Análisis de Melnikov

El método de Melnikov (MM) estudia la separación de las variedades estables e inestables de una variedad normalmente hiperbólica de un sistema dinámico Hamiltoniano el cual es sometido a perturbaciones [7], de este modo, el método de Melnikov permite determinar las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema presente dinámica caótica [8][9].

Para su apreciación, considere la siguiente clase de sistemas diferenciables

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t, \varepsilon) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

o en forma vectorial como

$$\dot{q} = JDH(q) + \varepsilon g(q, t, \varepsilon) \quad (2)$$

donde $q = (x, y)$, corresponde a las coordenadas locales, $DH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)$ son las ecuaciones de Hamilton, $g(q, t, \varepsilon)$ es la función de perturbación del sistema, y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Al suponer que el sistema (1) no es perturbado, entonces éste posee un punto de equilibrio hiperbólico p_0 que se conecta así mismo mediante una órbita homoclínica $q_0(t) = (x_0(t), y_0(t))$ en el espacio fase.

Considere la órbita homoclínica $\Gamma_{p_0} = \{q \in \mathbb{R}^2 | q = q_0(t), t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\} = W^s(p_0) \cap W^u(p_0) \cup \{p_0\}$, donde $W^s(p_0), W^u(p_0)$ son variedades estables e inestables respectivamente. En el interior de la órbita homoclínica se encuentra una familia de órbitas periódicas continuas $q^\alpha(t)$ con periodo T^α tal y como se muestra en la Fig 1(izq) [10].

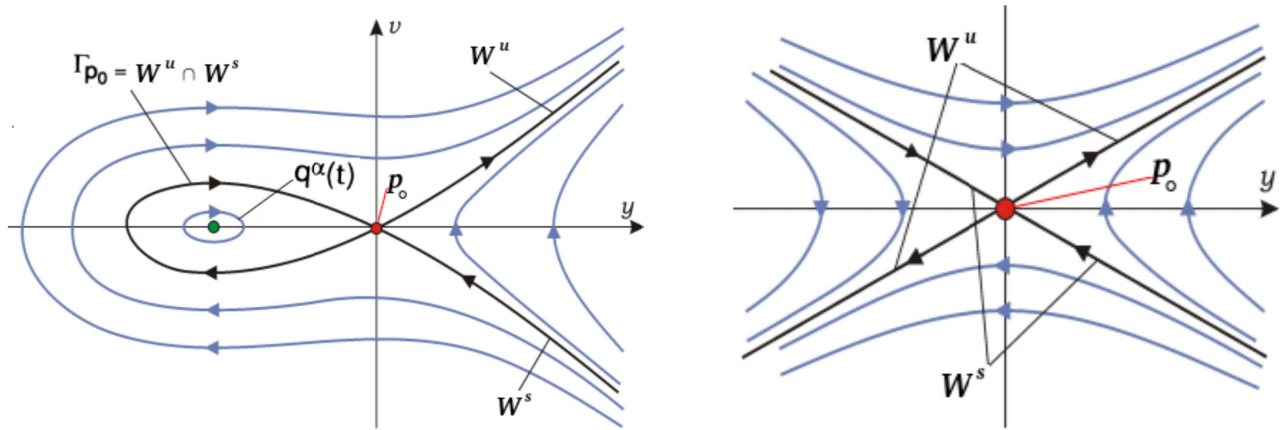


Fig 1. (izq) Órbita homoclínica conteniendo órbitas periódicas. (der) punto silla indicando las variedades estable e inestable

Para el desarrollo del método de Melnikov homoclínico, se requiere modificar (1) como un sistema tridimensional autónomo, y posteriormente será requerido desarrollar un mecanismo que permita la medición de la separación de las variedades para el sistema perturbado usando las curvas homoclínicas no perturbadas.

Con lo anterior, se produce

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, \phi, \varepsilon) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, \phi, \varepsilon), \quad (x, y, \phi) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times S^1 \\ \dot{\phi} &= \omega \end{aligned} \quad (3)$$

Esta modificación permite eliminar la dependencia de la variable de tiempo, y permite trasladar el espacio fase hacia tres dimensiones ($\mathbb{R}^2 \times S^1$), lo que ofrece ventajas desde el punto de vista geométrico.

De acuerdo con la Fig 2, el punto de equilibrio p_0 de la componente q del sistema (3) sin la función de perturbación, describe la órbita periódica

$$\gamma(t) = (p_0, \phi(t) = \omega t + \phi_0) \quad (4)$$

Las variedades bidimensionales estable e inestable se denotan como $W^s(\gamma(t)), W^u(\gamma(t))$, y la variedad homoclínica como Γ_γ y

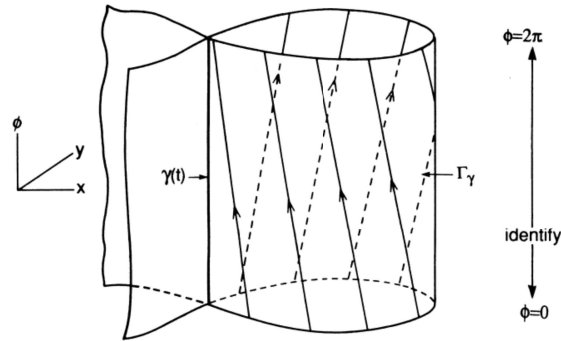


Fig 2. Variedad homoclínica con trayectoria típica Γ_γ no perturbada

en ausencia de perturbación, es decir cuando $\varepsilon=0$ en la ecuación (3), las variedades $W^s(\gamma(t)), W^u(\gamma(t))$ coinciden para formar la superficie bidimensional Γ_γ .

Así pues, se puede cuantificar analíticamente la desviación entre las variedades estable e inestable de $\gamma(t)$ desde Γ_γ como una distancia entre ambas. Para tal fin, se requiere parametrizar Γ_γ para las coordenadas más adecuadas acorde a la curva homoclínica, tal que cada punto en Γ_γ puede ser representado por

$$(q_0(-t_0), \phi_0) \in \Gamma_\gamma \quad (5)$$

La interpretación de t_0 para (5) es el tiempo de “vuelo” desde el punto $q_0(-t_0)$ al punto $q_0(0)$ alrededor de la trayectoria homoclínica no perturbada como se muestra en Fig 3, además, este tiempo es único.

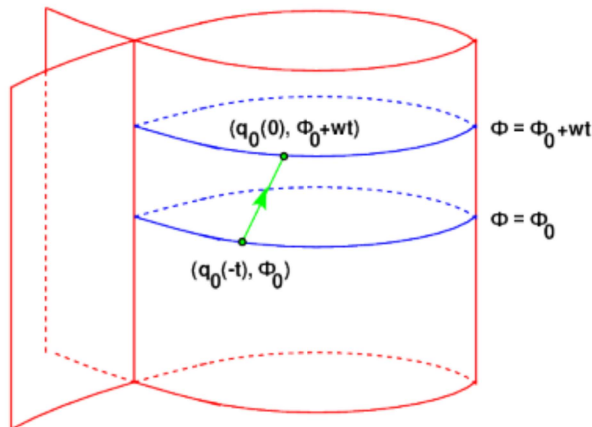


Fig 3. Interpretación de parametrización de Γ_γ

El caso de interés surge cuando $\varepsilon \neq 0$, es decir cuando la variedad homoclínica Γ_γ “se rompe” bajo la influencia de una perturbación, de modo que las variedades estable e inestable no coinciden, es decir, $W^s \neq W^u$, para formar la superficie bidimensional; por lo que $\gamma_0(t)$ se convierte en $\gamma_\varepsilon(t)$, tal y como se muestra en la Fig 4.

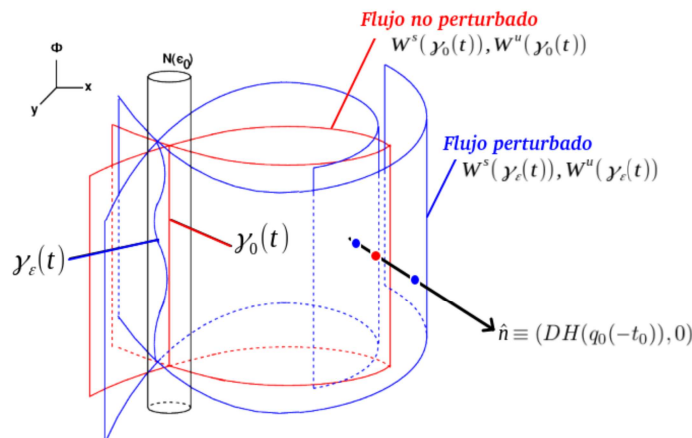


Fig 4. Coordenadas homoclínicas

Aquí, para cualquier punto $p=(q_0(-t), \phi) \in \Gamma_y$, hay un vector \hat{n} normal a la superficie Γ_y , mismo que puede cruzar las variedades estable e inestable como se muestra en la Fig 4. Este vector normal se calcula como $\hat{n} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x_0(-t_0), y_0(-t_0)), \frac{\partial H}{\partial y}(x_0(-t_0), y_0(-t_0)), 0 \right)$

La Fig 5, muestra la proyección en el plano XY para identificar los puntos de intersección de forma más asequible, tal que, $\{p_\epsilon^s\} \equiv W^s(y_\epsilon(t)) \cap \hat{n}$ así también $\{p_\epsilon^u\} \equiv W^u(y_\epsilon(t)) \cap \hat{n}$. Cabe mencionar que tanto $W^s(y_\epsilon(t))$ como $W^u(y_\epsilon(t))$, puede intersectar más de una vez al vector normal.

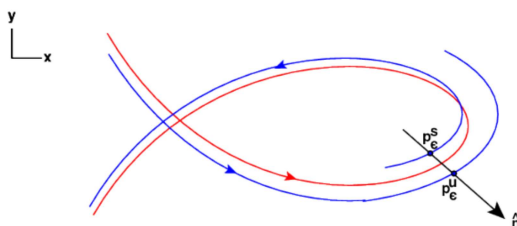


Fig 5. Intersección entre variedades estable e inestable con vector normal.

A partir de todo lo anterior, es posible definir la función de distancia $d(p_0, \epsilon) \equiv |p_\epsilon^u - p_\epsilon^s|$ que puede ser escrito mediante el uso de la parametrización $p_\epsilon^s = (q_\epsilon^s, \phi_0)$, $p_\epsilon^u = (q_\epsilon^u, \phi_0)$ como

$$d(t_0, \phi_0, \epsilon) = \frac{DH(q_0(-t_0)) \cdot (q_\epsilon^u - q_\epsilon^s)}{\|DH(q_0(-t_0))\|} \quad (6)$$

que expandiendola en series de Taylor para $\epsilon=0$ produce

$$d(t_0, \phi_0, \epsilon) = d(t_0, \phi_0, 0) + \epsilon \frac{\partial d}{\partial \epsilon}(t_0, \phi_0, 0) + O(\epsilon^2) \quad (7)$$

donde $d(t_0, \phi_0, 0) = 0$ y

$$d(t_0, \phi_0, 0) = \frac{DH(q_0(-t_0)) \cdot \left(\left. \frac{\partial q_\epsilon^u}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} - \left. \frac{\partial q_\epsilon^s}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right)}{\|DH(q_0(-t_0))\|} \quad (8)$$

de donde Melnikov define la función

$$M(t_0, \phi_0) \equiv DH(q_0(-t_0)) \cdot \left(\frac{\partial q_\varepsilon^u}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial q_\varepsilon^s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) \quad (9)$$

Que requiere conocer la solución para el sistema perturbado, por tal motivo Melnikov introduce una función dependiente del tiempo como

$$M(t:t_0, \phi_0) \equiv DH(q_0(t-t_0)) \cdot \left(\frac{\partial q_\varepsilon^u(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial q_\varepsilon^s(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) \quad (10)$$

Finalmente, al realizar cambios de variable, diferenciando respecto del tiempo y utilizando la integral impropia, se llega a la integral de Melnikov

$$M(t_0, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(q_0(t)) \cdot g(q_0(t), \omega t - \omega t_0, 0) dt \quad (11)$$

Ventajas e inconvenientes de Melnikov

El método de Melnikov (MM) es una aproximación que permite la predicción analítica de ocurrencia de caos que puede ser aplicado a diversos casos de sistemas dinámicos, estos pueden ser suaves no suaves, o cuasi autónomos. El método anteriormente visto corresponde al método de Melnikov clásico, sin embargo, pueden encontrarse métodos adaptados como el caso de Melnikov-Gruendler (MMG) mayormente utilizado para sistemas mecánicos con número finito de grados de libertad [11].

Para cualquiera MM o MMG se presentan las siguientes ventajas:

1. Posibilidad de obtener resultados analíticos.
2. La posibilidad de aplicar a sistemas dinámicos arbitrarios pero con características integrables.
3. Alta eficiencia de la verificación de los resultados numéricos.
4. Permiten el análisis y examen para sistemas no lineales.

Inconvenientes de MM o MMG :

1. Aplicables a sistemas para un espacio de fase específico (órbitas homoclínicas).
2. No son suficientemente exactas.
3. El sistema no perturbado debe ser integrable.
4. Permiten sólo la predicción de los valores de parámetros asociados sólo con homoclínicas y caos.
5. Están asociados a cálculos algebraicos complicados.

Aplicación de la integral de Melnikov para órbitas homoclínicas

Ejemplo 1:

Considerar el oscilador Duffing forzado amortiguado, dado por las siguientes ecuaciones de estado en la forma de (3)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon(\gamma \cos \phi - \delta y) \\ \dot{\phi} &= \omega \end{aligned} \quad (12)$$

Para $\varepsilon=0$, esta ecuación tiene un par de órbitas homoclínicas dadas por [12]

$$q_0^\pm(t) = (x_0^\pm(t), y_0^\pm(t)) = (\pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t, \mp\sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t) \quad (13)$$

Estas orbitas son ilustradas en Fig 6 y corresponden al problema particular del sistema Duffing, aquí son notables dos puntos de equilibrio estables en el interior de las mismas, así como también un punto de equilibrio central inestable.

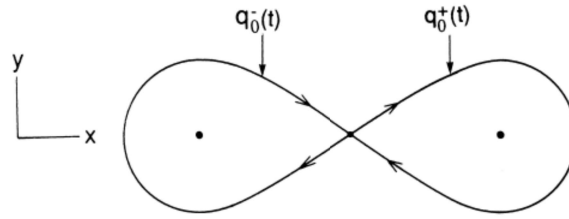


Fig 6. Par de orbitas homoclinicas en el espacio fase.

De la ecuación (12) es posible identificar tanto la función no perturbada como la función perturbada correspondientemente dadas por las funciones vectoriales $f(x) = (y, x - x^3)^T$ y $g(x, \epsilon) = (0, \epsilon(\gamma \cos \phi - \delta y))^T$. Con ello, el argumento de la integral de Melnikov descrita en (11) se obtiene mediante el producto vectorial, produciendo

$$M^\pm(t_0, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} -\delta(y^\pm(t))^2 \pm \gamma y^\pm(t) \cos(\omega t + \omega t_0 + \phi_0) dt \quad (14)$$

Y sustituyendo las funciones correspondientes a las órbitas homoclinicas mencionadas en (13) se tiene la solución

$$M^\pm(t_0, \phi_0) = \frac{-4\delta}{3} \pm \sqrt{2} \gamma \pi \omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \sin(\omega t_0 + \phi_0) \quad (15)$$

De la ecuación anterior, es posible observar que la condición para que las variedades se intersecten, está determinada por los parámetros (δ, ω, γ) tal que

$$\delta < \frac{(3\pi\omega \operatorname{sech}\frac{\pi\omega}{2})\gamma}{2\sqrt{2}} \quad (16)$$

Como fue mencionado, la función de Melnikov establece una medida de la separación entre las variedades estable e inestable. La interpretación cuantitativa de esta medida desde el punto de vista práctico, indicaría que la presencia de un estado caótico cuando la función de Melnikov es diferente de cero, esto implica que las variedades se intersectan entre sí, por el contrario, si la función de Melnikov se hace cero indicaría que no hay intersección de las variedades estable e inestable, encontrándose superpuesta una sobre la otra en una orbita homoclinica, lo que demostraría un comportamiento no caótico. Para el caso del sistema Duffing esto es comprobable haciendo diversos cortes sobre la variedad homoclinica, por ejemplo en $\phi_0 = 0, \phi_0 = \pi/2$ lo que produce un mapa de Poincaré de la sección transversal Σ^{ϕ_0} como el que se muestra en la Fig 7.

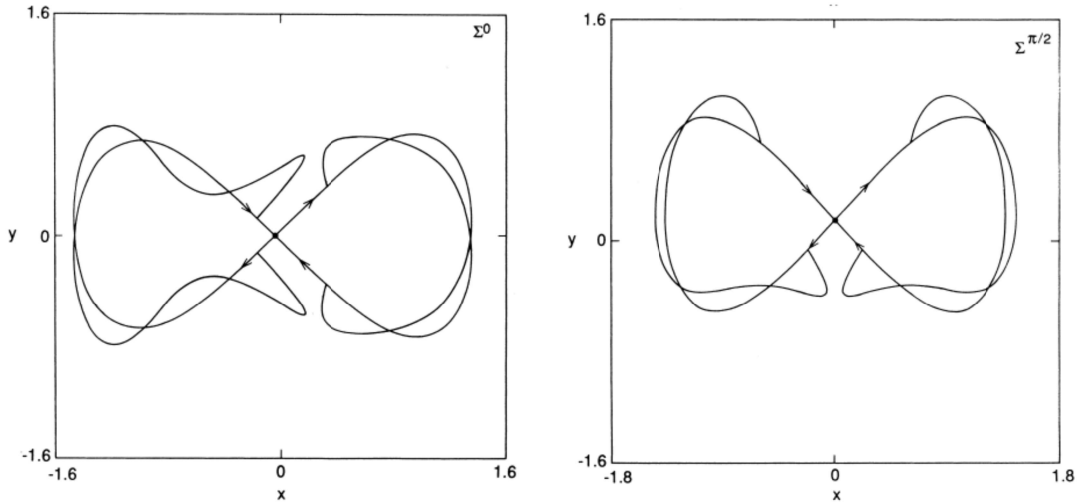


Fig 7. Mapa de Poincaré de la sección transversal Σ^{ϕ_0} generado por la solución de la ecuación de Duffing (12)

Aplicación de la integral de Melnikov para órbitas periódicas (ciclos límite)

Recientemente, métodos tipo Melnikov han sido desarrollados para sistemas con múltiples grados de libertad, esto trata con órbitas homoclínicas, heteroclínicas pero también con órbitas periódicas [Wiggins, 1988]. Aplicaciones como las presentadas por [Lynch, 2014], describen alternativas para validar la existencia de ciclos límite para sistemas con dos grados de libertad [13], para ello se reescribe la ecuación (2) en forma vectorial y con variables cartesianas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon, \mu) \quad (17)$$

Asumir, que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es el sistema no perturbado, y $\epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon, \mu)$ la perturbación. El sistema no perturbado tiene una familia de orbitas periódicas dadas por

$$\Gamma_r : \mathbf{x} = \mathbf{y}_r(t) \quad (18)$$

Donde las funciones $\Gamma_r : \mathbf{x} = \mathbf{y}_r(t)$ tienen periodos mínimos T_r .

Definición: La función de Melnikov para el sistema (17) a lo largo de $\Gamma_r : \mathbf{x} = \mathbf{y}_r(t)$, para $0 \leq t \leq T_r$ esta dado por

$$M(r, \mu) = \int_0^{T_r} \exp\left(-\int_0^t \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}_r(s)) ds\right) \cdot \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{y}_r(t), 0, \mu) dt \quad (19)$$

Teorema 1: Suponer que $M(r_0, \mu_0) = 0$ y $\left. \frac{\partial M}{\partial r} \right|_{r_0, \mu_0} \neq 0$, entonces para $0 < \epsilon \ll 1$ el sistema (17) tiene un único ciclo límite hiperbólico cercano a Γ_r . Por el contrario, el sistema no tiene un ciclo límite cercano a Γ_r si $M(r_0, \mu_0) \neq 0$ cuando ϵ es pequeño.

Teorema 2: Suponer que $M(r, \mu_0) = 0$ tienen exactamente k soluciones $r_1, r_2, \dots, r_k \in I$ con $\left. \frac{\partial M}{\partial r} \right|_{r_i, \mu_0} \neq 0$, para alguna i desde 1 hasta k . Entonces para $0 < \epsilon \ll 1$, exactamente k familias con un sólo parámetro de

ciclos límites hiperbólicos, bifurcan desde anillos periódicos de $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en los puntos $r_1, r_2, \dots, r_k \in I$. Si $M(r, \mu_0) \neq 0$, entonces no hay ciclos límite.

Ejemplo 2: Considerar el sistema van der Pol

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-x-\epsilon(1-x^2)y \quad (20)$$

En este caso $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(y, -x)^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon)=(0, -\epsilon(1-x^2)y)^T$, $T_r=2\pi$, y considerar la familia de órbitas periódicas dadas por

$$\mathcal{Y}_r(t)=(x(t), y(t))=(r \cos(t), r \sin(t)) \quad (21)$$

Adicionalmente, el resultado de $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})=0$ por tanto la integral de Melnikov se simplifica a

$$M(r, \mu)=\int_0^{2\pi} \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(\mathcal{Y}_r(t), 0, \mu) dt = M(r, \mu)=-\epsilon \int_0^{2\pi} y(t)^2(1-x(t)^2) dt \quad (22)$$

Donde \wedge denota el producto vectorial.

Al sustituir la familia de órbitas periódicas $\mathcal{Y}_r(t)=(x(t), y(t))=(r \cos(t), r \sin(t))$ en (22) produce

$$M(r, \mu)=-\epsilon \int_0^{2\pi} r^2(\sin^2 t(1-r^2 \cos^2 t)) dt \quad (23)$$

Al resolver la integral se tiene

$$M(r, \mu)=\frac{\epsilon \pi r^2}{4}(r^2-4) \quad (24)$$

Dado que $M(r_0, \mu)=0$ cuando $r_0=2$, y $\left. \frac{\partial M}{\partial r} \right|_{(r_0, \mu_0)} = \pi r_0(r_0^2-2) \neq 0$, entonces existe un único ciclo límite hiperbólico asintótico para un círculo de radio dos para el sistema van der Pol, cuando ϵ es suficientemente pequeño.

Ciclo límite estable para sistema tipo Liènard basado en funciones Binomiales.

De acuerdo a la propuesta realizada en [14] para un nuevo sistema tipo Liènard basado en funciones Binomiales, en este apartado se comprueba la existencia de un ciclo límite estable mediante el método de Melnikov. El sistema está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\epsilon[(x+1)^n + \alpha]y - \beta(x+1)^m \end{aligned} \quad (25)$$

Donde ϵ es el parámetro de amortiguamiento no lineal, α control de bifurcación del sistema, y β el parámetro de restauración no lineal. Las funciones no perturbada y perturbada se muestran respectivamente como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (y, -\beta(x+1)^m) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= (0, -\epsilon[(x+1)^n + \alpha]y) \end{aligned} \quad (26)$$

La divergencia dada por $\nabla \cdot \mathbf{f}=0$, por tanto la integral de Melnikov se simplifica como

$$M(r, \mu)=\int_0^{2\pi} \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(\mathcal{Y}_r(t), 0, \mu) dt = -\epsilon \int_0^{2\pi} y^2[(x+1)^n + \alpha] dt \quad (27)$$

Al sustituir la familia de órbitas periódicas descritas en (21), la integral de Melnikov se tiene como

$$M(r, \mu) = -\varepsilon \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 t) [(r \cos t + 1)^n + \alpha] dt \quad (28)$$

Al considerar 'n' como un valor estrictamente par, de modo que $n=2$ con la finalidad de simplificar la solución de la integral, se tiene finalmente

$$M(r, \mu) = \frac{-\varepsilon \pi r^2}{4} [r^2 + 4(1 + \alpha)] \quad (29)$$

Cuando $\alpha = -3/2$ y $r = \sqrt{2}$ entonces

$$M(r, \mu) = 0, \text{ en cambio, } \left. \frac{\partial M}{\partial r} \right|_{(r_0, \mu_0)} = -\varepsilon \pi r_0 \left[r_0^2 + \frac{1 + \alpha}{2} \right] \neq 0 \quad (30)$$

Que de acuerdo a los teoremas 1 y 2, se comprueba la existencia de un ciclo límite estable para un círculo de radio $r = \sqrt{2}$ para el sistema Liènard basado en funciones Binomiales.

Método de Melnikov para identificar caos intermitente

Para aplicar el método de Melnikov en la identificación de caos intermitente, la ecuación (27) es modificada para incluir la función de conducción del sistema, de modo que se tiene

$$M(r, \mu) = -\varepsilon \int_0^{\infty} y^2 [(x+1)^n + \alpha] + y F \cos(\omega t) dt \quad (31)$$

Al utilizar un tamaño de ventana suficientemente pequeño respecto el tamaño de secuencia intermitente (0.002%), se produce una secuencia de Melnikov en el dominio del tiempo como la mostrada en Fig 8, misma que distingue los intervalos de intermitencia entre caos y periodicidad.

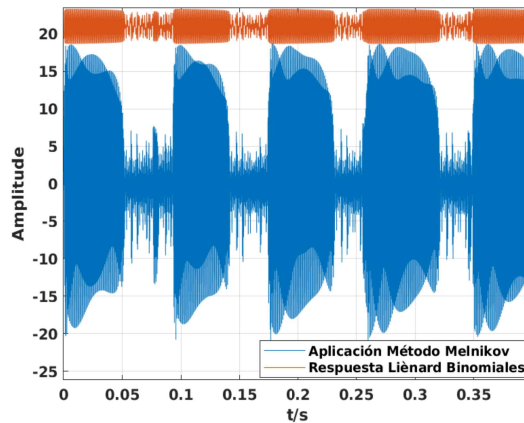


Fig 8. Método de Melnikov en dominio del tiempo para $\omega = 7000 \text{ rad/s}$

Diseño de sistema Liènard basado en función sinc mediante función de Melnikov

Definición del nuevo sistema en régimen ciclo límite

El teorema de Liènard establece las condiciones suficientes en un sistema de segundo para producir un ciclo límite estable centrado en el origen, y por tanto producir oscilaciones auto sostenidas sin las necesidad de funciones oscilatorias externas. Estas condiciones pueden ser revisadas a profundidad en el reporte de [M. Tsatsos, 2008], aunque principalmente establecen que es necesario contar con una función, par, continua y diferenciable a la que se le denomina función de amortiguamiento ($h(x)$); y una función impar, continua y

diferenciable denominada función de restauración ($k(x)$) [15]. Así, las funciones previamente mencionadas dan origen a la ecuación de Liénard de segundo orden presentada a continuación

$$(\ddot{x})+h(x)(\dot{x})+k(x)=0 \quad (32)$$

Con las condiciones previamente mencionadas se establece $h(x)=\varepsilon[1-\alpha \operatorname{sinc}(x)]$ y $k(x)=-\beta x+\gamma \operatorname{sen} h(x)$, lo que da origen a la ecuación de estados siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\varepsilon[1-\alpha \operatorname{sinc}(x)]y+\beta x-\gamma \operatorname{sen} h(x) \end{aligned} \quad (33)$$

Es necesario considerar la familia de orbitas periódicas de (21) y el periodo $T_r=2\pi$. Las funciones no perturbada y perturbada se muestran respectivamente como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (y, \beta x - \gamma \operatorname{sen} h(x)) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= (0, -\varepsilon[1-\alpha \operatorname{sinc}(x)]y) \end{aligned} \quad (34)$$

Adicionalmente, dado que la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})=0$, la integral de Melnikov se simplifica como

$$M(r, \mu) = \int_0^{2\pi} \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(y_r(t), 0, \mu) dt = -\varepsilon \int_0^{2\pi} y^2 [1-\alpha \operatorname{sinc}(x)] dt \quad (35)$$

Es posible aplicar la serie de Taylor a la función $\operatorname{sinc}(x)$ lo que produce

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{\pi^2}{6} x^2 + \frac{\pi^4}{120} x^4 - \frac{\pi^6}{5040} x^6 \dots \quad (36)$$

Al sustituir (36) en (35) eliminando los términos de orden superior, la solución de la integral es

$$M(r, \mu) = -\varepsilon \pi r^2 \left[1 + \alpha - \frac{\alpha \pi^2 r^2}{24} \right] \Bigg|_{r=\frac{2}{\pi} \sqrt{6 \frac{(1+\alpha)}{\alpha}}; \alpha \neq 0} = 0 \quad (37)$$

Nótese que la función tiende a cero cuando $r = \frac{2}{\pi} \sqrt{6 \frac{(1+\alpha)}{\alpha}}$ para cualquier valor de $\alpha \neq 0$, pero esto no ocurre con la derivada

$$\frac{\partial M(r, \mu)}{\partial r} = -4 \varepsilon \frac{\sqrt{6(1+\alpha)}}{\alpha} \left[3 + \alpha - \frac{2}{\alpha} \right] \Bigg|_{r=\frac{2}{\pi} \sqrt{6 \frac{(1+\alpha)}{\alpha}}; \alpha \neq 0} \neq 0 \quad (38)$$

Con lo anterior se confirma la existencia de un ciclo límite estable para un círculo de radio $r = \frac{2}{\pi} \sqrt{6 \frac{(1+\alpha)}{\alpha}}$ para el sistema tipo Liénard (33). Si se considera $\alpha=4$, el ciclo límite estable cubre un radio aproximado para un ε pequeño como

$$r = \frac{\sqrt{30}}{\pi} \Bigg|_{\alpha=4} \quad (39)$$

Análisis en régimen conservativo

Para el análisis en régimen conservativo, se descarta cualquier función de forzamiento y función de amortiguamiento en 33, es decir, $\varepsilon=0$, de este modo la ecuación se reescribe como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \beta x - \gamma \operatorname{sen} h(x) \end{aligned} \quad (40)$$

Por otro lado, al obtener la serie de Taylor del término hiperbólico, descartando términos de orden superior, (40) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \beta x - \gamma \left[x + \frac{x^3}{6} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Cuyos puntos de equilibrio son $(0,0), (\pm\sqrt{6(\beta/\gamma-1)}, 0)$, esto obliga que $[\beta/\gamma]>1$. Cuando esta relación es igual a la unidad el sistema colapsa hacia un nodo silla.

Por otro lado, al considerar la energía potencial (V) y cinética (T) de (40) se obtiene

$$T = \frac{\dot{y}^2}{2}; V = \gamma \cosh(x) - \frac{\beta x^2}{2}, \text{ cuya energía total en caso conservativo es } E = T + V \quad (42)$$

Desde (42) es posible identificar las diversas bifurcaciones del sistema en términos de los parámetros β y γ , dado que de ellos depende la aparición y estabilidad de los puntos de equilibrio.

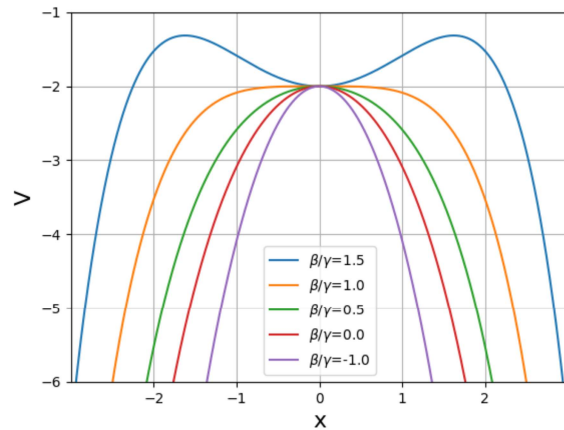


Fig 9. Energía potencial $V(x)$ para diversos valores de la razón β/γ

Nótese en la Fig 9, que cuando β/γ es mayor a la unidad aparecen dos puntos de equilibrio inestable y un punto estable en el pozo de potencial; conforme β/γ se aproxima a la unidad los puntos de equilibrio inestables colapsan y el sistema se somete a una bifurcación nodo silla.

Si ahora, se asume la energía total (E) desde (42) constante a lo largo de las órbitas en el espacio fase, se pueden

obtener las curvas de energía a través de $E_0 = \frac{\dot{y}_0^2}{2} + \gamma \cosh(x_0) - \frac{\beta x_0^2}{2}$.

De este modo, es posible despejar la velocidad y_0 como una función de la posición x_0 mediante

$$\dot{y}_0 = \sqrt{2 E_0 + \beta x_0 - 2 \gamma \cosh(x_0)} \quad (43)$$

Mediante la ecuación anterior se producen los diversos niveles de energía para el sistema propuesto como la mostrada en la Fig 10, esta trayectoria de fase es típica como la mostrada en [16] para el sistema Duffing, la diferencia radica en que el oscilador Duffing produce un par de órbitas homoclinicas cuando $E_0 = 0$. Sin embargo, para el sistema propuesto esto no sucede así, pues en su lugar se producen un par de orbitas periódicas alrededor de los puntos de equilibrio inestables, mismas que no son completamente cerradas y producen discontinuidades conforme la función se aproxima a $y'_0 = 0$. Así, la existencia de los diversos niveles de energía incluyendo las órbitas homoclinicas, se encuentra restringido a la relación $\beta/\gamma > 1$.

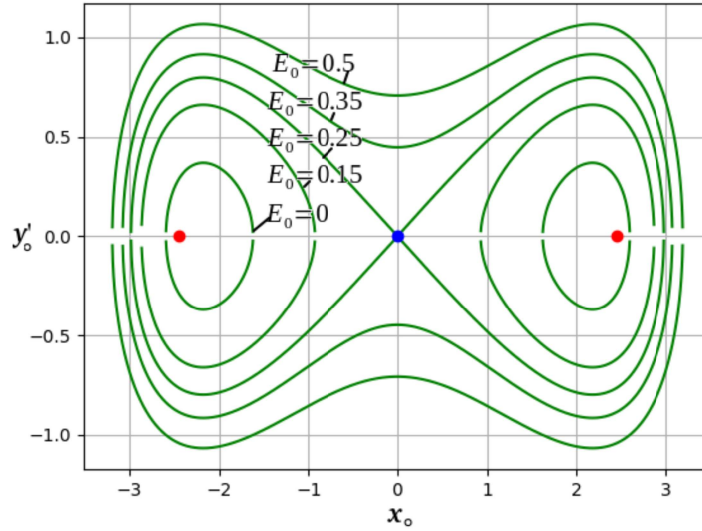


Fig 10. Trayectoria de fase para $\beta/\gamma=2$ y diversos valores de energía total.

Análisis en régimen no conservativo

Al considerar el valor de $\alpha=4$ definido en (39) para establecer el régimen de ciclo límite estable, con la razón mínima $\beta/\gamma>1$ para asegurar la existencia de los puntos de equilibrio, y con parámetro de amortiguamiento pequeño ($\varepsilon=0.5$), se produce la dinámica de la Fig 11, la cual confirma la presencia de auto-oscilaciones.

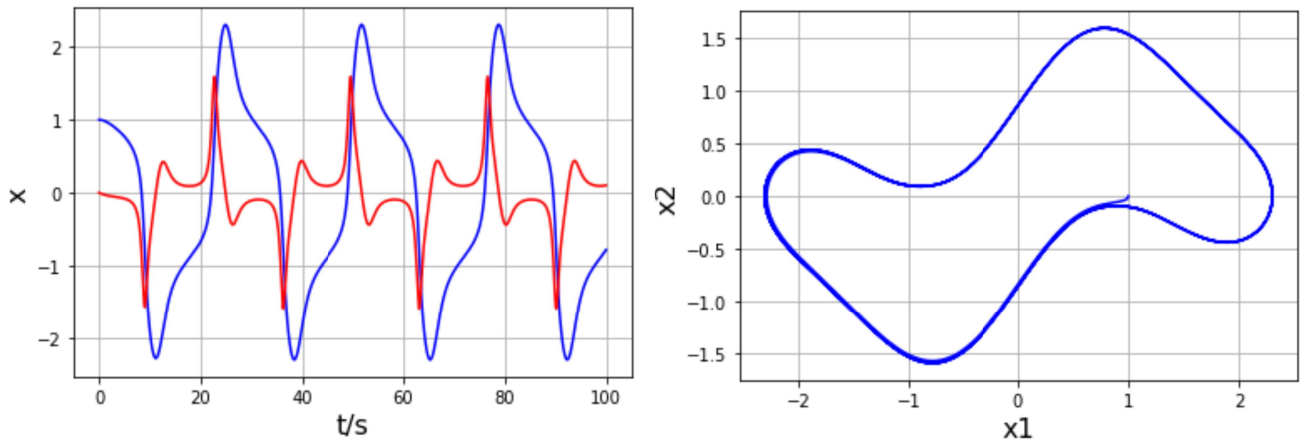


Fig 11. Respuesta del sistema definido en (33) con $\beta/\gamma>1$. Secuencia en dominio del tiempo (izq). Trayectoria de fase (der).

Para el análisis en régimen no conservativo, es requerido modificar (40) para incluir la función de amortiguamiento $h(x)$ y función de forzamiento $F \cos(\omega t)$, tal que las funciones perturbada y no perturbada de (34), se reescriben como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (y, \beta x - \gamma \text{sen } h(x)) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= (0, -\varepsilon[1 - \alpha \text{sinc}(x)]y + F \cos(\omega t)) \end{aligned} \quad (44)$$

La familia de órbitas se puede determinar cuando $E_0=0$ desde la ecuación (43), lo que produce dos orbitas periódicas existentes en el intervalo $-\pi \leq x(t) \leq \pi$, de este modo la familia de orbitas se aproximan a

$$q_0^\pm(t) = (x_0^\pm(t), y_0^\pm(t)) = (t, \pm \sqrt{\beta t^2 - 2\gamma \cosh(t)}) \quad (45)$$

De este modo, al resolver el desplazamiento resultante definidas para el sistema Duffing en (13), de este modo la integral de Melnikov es calculada como

$$M(t_0) = -\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} y(t)^2 [1 - \alpha \text{sinc}(x(t))] + F y(t) \cos(\omega t) dt \quad (46)$$

Al sustituir la familia de orbitas (45) en (46) se tiene

$$M(t_0) = -\varepsilon I_0 + \varepsilon I_1 + \varepsilon I_2 - \varepsilon I_3 + F I_4$$

$$I_0 = \beta \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3} \pi^3 \beta$$

$$I_1 = \alpha \beta \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) dt = 2 \pi \alpha \beta$$

$$I_2 = 2 \gamma \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(t) dt = 4 \gamma \sinh(\pi)$$

$$I_3 = 2 \alpha \gamma \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(t) \text{sinc}(t) dt = 16.10 \alpha \gamma$$

$$I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\beta t^2 - 2 \gamma \cosh(t)} \cos(\omega t) dt$$
(47)

De acuerdo con [17], la condición general necesaria con el cual las variedades invariantes interseccionan entre sí, está dado por

$$\frac{\varepsilon}{F} \leq \left| \frac{2 \pi \beta \left(\frac{\pi^2}{3} - \alpha \right) - \gamma (4 \sinh(\pi) - 16.10 \alpha)}{I_4} \right| \quad (48)$$

Cuando el sistema no es forzado ($F=0$) pero no conservativo, también puede presentar bifurcaciones que deriven en comportamiento caótico, tal y como se muestra en la Fig 12 y Fig 13 para el caso de γ como variable dependiente. Las transiciones entre el estado periódico y caótico son claras y se confirman mediante el cálculo del exponente de Lyapunov.

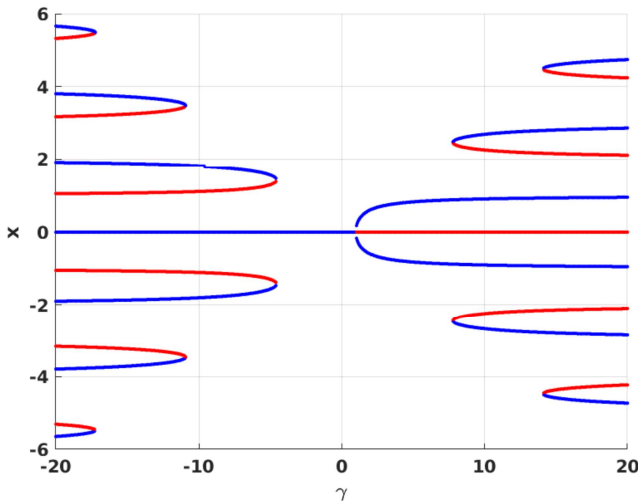


Fig 13. Diagrama de bifurcación analítica para sistema Liénard basado en función Sinc no forzado con parámetros $\beta=0.2, \varepsilon=0.5, \alpha=4$

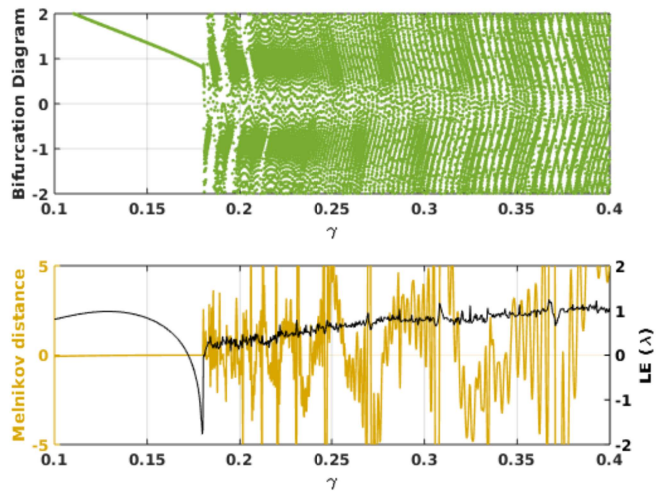


Fig 12. Sensibilidad del sistema al parámetro γ no forzado, (sup) diagrama de bifurcación numérica, (inf) exponente de Lyapunov con función de Melnikov, para $\beta=0.2, \varepsilon=0.5, \alpha=4$ (frontera entre estado caótico y periódico se ubica en $x=0.181087$)

Con lo obtenido previamente, considerar un caso particular de presencia de caos, bajo el régimen de los parámetros:

1. Se considera $\alpha=4$, de manera que se asegure el ciclo límite estable.
2. Los parámetros $\beta=0.2$ y $\varepsilon=0.5$ aseguran la aparición de múltiples orbitas (periódicas y homoclínicas) como se demostró en los niveles de energía del caso conservativo.
3. $\gamma=0.181087 \sim 0.18$ corresponde al valor de la bifurcación límite entre el estado caótico y periódico mostrado en la Fig 12, de modo que la relación $\frac{\beta}{\gamma} > 1$ se cumple.
4. Para propósitos de prueba se considera la frecuencia angular unitaria $\omega=1$.
5. Con los puntos anteriores, a través de (48) la condición numérica se establece como $\frac{\varepsilon}{F} \leq 2.568653251410886$, tal que puede considerarse la amplitud de conducción válida en $F=0.2$. Así la dinámica del sistema corresponde a la mostrada en la Fig 14.

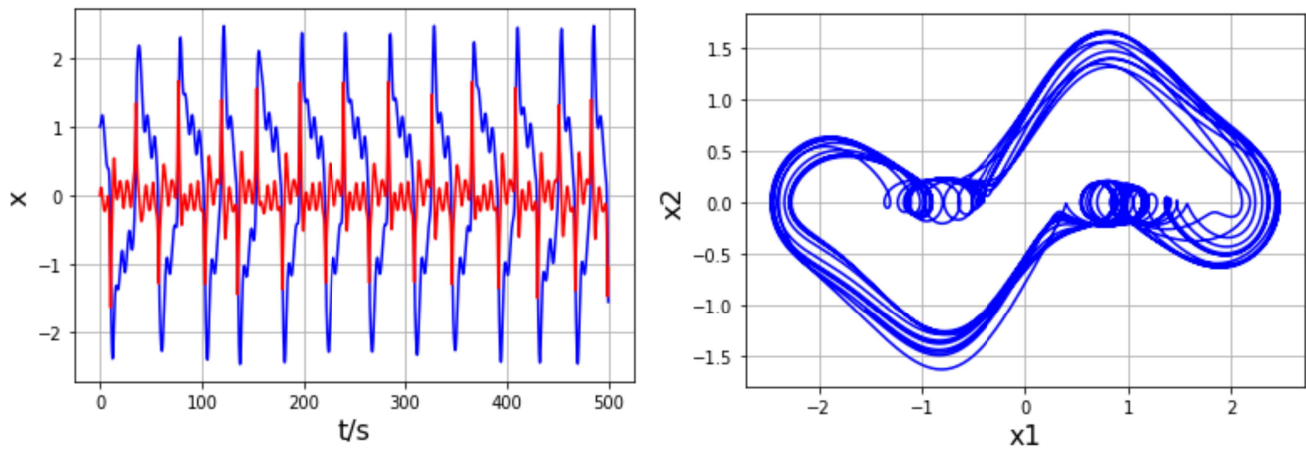


Fig 14. Dinámica del sistema basada en función sinc y sinh forzado en régimen de caos, (izq) secuencia en dominio del tiempo, (der) trayectorias caóticas en el espacio de fase

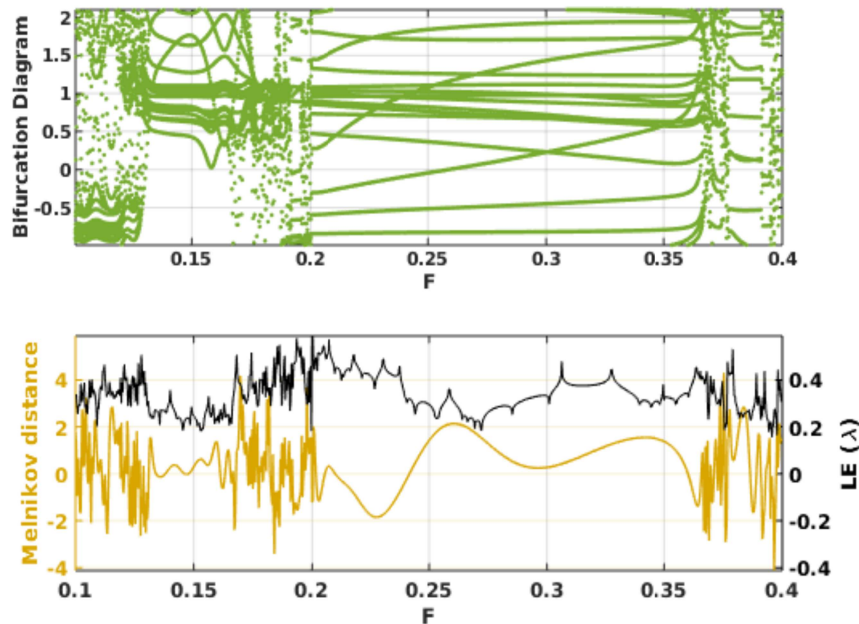


Fig 15. Dinámica del sistema basada en función sinc y sinh forzado, (sup) diagrama de bifurcación numérica, (inf) exponente de Lyapunov y Función de Melnikov.

En la Tabla 1, se muestra un listado comparativo entre el método de Melnikov y los exponentes de Lyapunov, que refleja las ventajas y desventajas entre ambos métodos, y al mismo tiempo destaca cualidades particulares de cada uno.

Tabla 1. Comparativo entre el método de Melnikov y exponentes de Lyapunov

Característica	Método de Melnikov	Exponentes de Lyapunov
Permite análisis para sistemas no lineales	★	★
Provee condiciones necesarias para caos.	★	★
Provee condiciones suficientes para caos.		
Posibilidad de resultados analíticos	★	
Posibilidad de resultados numéricos	★	★
Requiere de la solución del sistema		★
Requiere conocer las condiciones iniciales		★
Factibilidad para implementación		★
Aplicable a sistemas dinámicos arbitrarios pero con características integrables	★	★
Aplicable para cualquier espacio de fase (familia de orbitas)		★
El sistema debe ser integrable / diferenciable	★	★
Cálculos algebraicos complicados	★	

Referencias

- [1] J. S. A. Eyebe Fouda, J. Y. Effa, M. Kom, and M. Ali, "The three-state test for chaos detection in discrete maps," *Appl. Soft Comput. J.*, vol. 13, no. 12, pp. 4731–4737, 2013, doi: 10.1016/j.asoc.2013.07.020.
- [2] R. Wang, L. Gao, C. Bai, C. Wang, X. Wang, and H. Sun, "Mechanical Analyses of a Modified Lorenz System," in *2018 10th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)*, Jul. 2018, pp. 1–5, doi: 10.1109/ICMIC.2018.8529922.
- [3] S. H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering , Steven H. Strogatz, Westview Press, 2015. 2nd ed. \$60.00 pape," *Phys. Today*, vol. 68, no. 4, pp. 54–55, Apr. 2015, doi: 10.1063/PT.3.2751.
- [4] C. Wang, C. Fan, and Q. Ding, "Constructing Discrete Chaotic Systems with Positive Lyapunov Exponents," *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 28, no. 07, p. 1850084, Jun. 2018, doi: 10.1142/S0218127418500840.
- [5] A. B. Özer and E. Akin, "TOOLS FOR DETECTING CHAOS A.," in *SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 9.Cilt*, 2005, pp. 60–66.
- [6] F. Cheng and Z. Yan, "A new method to determine the bifurcation threshold value of the Duffing chaos detection system," *ICCSE 2012 - Proc. 2012 7th Int. Conf. Comput. Sci. Educ.*, no. Iccse, pp. 1143–1146, 2012, doi: 10.1109/ICCSE.2012.6295267.
- [7] A. García, "El método de Melnikov," *Ser. Comun.*, vol. 29, pp. 143–160, 2001.
- [8] J. G. Castro-Lugo, "Dinámica caótica en sistemas discontinuos en el plano.," CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, 2014.
- [9] M. Richards, "Melnikov's Method," 2013, p. 27.
- [10] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Second Edi. New York, USA: Springer, 2003.
- [11] J. Awrejcewicz and M. M. Holicke, *SMOOTH AND NONSMOOTH HIGH DIMENSIONAL CHAOS AND THE MELNIKOV-TYPE METHODS*. Singapore: World Scientific, 2007.
- [12] T. L. Lou, "Frequency estimation for weak signals based on chaos theory," *Proc. - 2008 Int. Semin. Futur. Biomed. Inf. Eng. FBIE 2008*, pp. 361–364, 2008, doi: 10.1109/FBIE.2008.114.

- [13] S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Python*. Switzerland AG: Springer International Publishing AG, 2018.
- [14] P. Pancóatl-Bortolotti, R. Enríquez-Caldera, A. Costa, M. López-Hernández, F. Guerrero-Castellanos, and M. Tello-Bello, "A Novel Chaotic System based on Binomial Functions for Detection of Ultra Weak Signals .," in *Third IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems*, 2021, vol. 0, no. 1.
- [15] M. Tsatsos, "Theoretical and Numerical Study of The Van der Pol Equation," 2008. [Online]. Available: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0803/0803.1658.pdf><http://arxiv.org/abs/0803.1658>.
- [16] I. Kovacic and M. J. Brennan, *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*, First Edit. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, United Kingdom: John Wiley & Sons, 2011.
- [17] M. Siewe Siewe, C. Tchawoua, and P. Wofo, "Melnikov chaos in a periodically driven Rayleigh–Duffing oscillator," *Mech. Res. Commun.*, vol. 37, no. 4, pp. 363–368, Jun. 2010, doi: 10.1016/j.mechrescom.2010.04.001.