



INAOE

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica.

REPORTE TÉCNICO

No. 685

COORDINACION DE ELECTRONICA

Método de detección de señales estacionarias 'STILE' para sistemas basados en caos

Dr. Pedro Pancóatl Bortolotti
Dr. Rogerio Enríquez Caldera*

* INAOE/CRECTEALC

23 de enero del 2024

©INAOE 2024

Derechos Reservados

El autor responsable otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de este reporte técnico en su totalidad o en partes mencionando la fuente.



Método de detección de señales estacionarias ‘STILE’ para sistemas basados en caos

Pedro Pancoatl¹, Rogerio A. Enríquez-Caldera²

Coordinación de Electrónica,
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica,
Luis Enrique Erro 1, Sta. Ma. Tonantzintla,
72840, Puebla, México

pancoatl@inaoep.mx

rogerio@inaoep.mx

Abstract: This report presents the development and results for a new detection method applied to chaotic systems, that is inspired in Lyapunov Exponents called “short-time Inspired by Lyapunov Exponent” (STILE). This method is useful for detecting weak stationary frequencies in high noise conditions, when a chaotic system drives itself through the chaos route Type-I intermittence. The method is tested over Duffing system where computer model simulations provide encouraging results for detection of signals with a signal-to-noise of -25 dB.

Palabras clave: *método STILE, detección de señal débil, sistemas caóticos.*

Índice

1	Introducción.....	2
1.2	Antecedentes.....	2
1.3	Criterios de estabilidad de Lyapunov.....	3
1.3.1	Método indirecto de Lyapunov.....	4
1.3.2	Método directo de Lyapunov.....	5
1.4	Exponente de Lyapunov.....	6
1.5	Contribuciones.....	7
2	Oscilador Duffing.....	7
2.2	Estabilidad y puntos de equilibrio.....	7
2.3	Régimen de Intermittencia.....	9
3	Identificación de periodos de intermitencia.....	11
3.2	Determinación de ventana de tiempo.....	11
3.3	Método heurístico STILE.....	12
4	Simulación del sistema, experimentos y resultados.....	14
	Conclusiones.....	16
	Referencias.....	16
	Anexo A : Propuesta de Algoritmo para implementación de STILE.....	17

1 Introducción

1.2 Antecedentes

Los sistemas basados en caos son alternativas nuevas y prometedoras que están siendo desarrolladas para solucionar problemas tecnológicos, estos problemas pueden resumirse esencialmente en el tratamiento del ruido y la preservación de la integridad y seguridad de la información. Particularmente, los sistemas de detección basados en caos han generado la confiabilidad debido a sus aplicaciones exitosas en áreas de ingeniería tales

como: redes, comunicaciones, radar, sonar, detección de fallas mecánicas y estructurales, señales biomédicas, etc, [1]–[5].

El desafío que actualmente afrontan estos sistemas, son establecer los mecanismos que permitan alcanzar altas tasas de éxito en la detección de señales de interés, con esto en mente, en la literatura se proponen métodos convencionales dentro del estudio del caos, cuyo propósito es identificar los estados del sistema que faciliten las tareas de estimación o detección, entre los más populares se encuentran: funciones de Melnikov, para determinar la distancia entre la variedad estable e inestable en el mapa de Poincaré [6][7], exponentes de Lyapunov [8] para medir la tasa exponencial de divergencia entre dos trayectorias cercanas en el espacio fase, diagrama de bifurcación [9], para mostrar la dinámica y evolución del sistema en términos de sus parámetros, la entropía de Kolmogorov-Sinai [10], que provee características cuantitativas de los sistemas deterministas que producen caos.

1.3 Criterios de estabilidad de Lyapunov

El criterio de estabilidad de Lyapunov tiene su aplicación en análisis de estabilidad y control de sistemas complejos modernos, que son utilizados principalmente para la industria. Este tipo de sistemas se basan en la descripción en n ecuaciones diferenciales de primer orden, mismas que son simplificadas matemáticamente a través de notación matricial. Lyapunov presentó dos métodos en 1892, siendo el “primero” un conjunto de procedimientos sobre la solución explícita de la ecuación diferencial, y el “segundo” método que no requiere las soluciones de las ecuaciones, lo que representa una mayor ventaja [11].

Considerar un sistema mediante

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1}$$

Y suponemos que éste tiene solución única definida como

$$\Phi(t; x_0, t_0) \tag{2}$$

Donde $x = x_0, t = t_0$ son valores en el tiempo observado, tal que $\Phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$.

Para un estado x_e en el que

$$f(x_e, t) = 0 \tag{3}$$

Es denominado *estado de equilibrio del sistema*¹ tal que, si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, entonces sólo existe un estado de equilibrio, es decir, $f(x, t) = Ax$ donde ‘A’ es no singular, y múltiples estados de equilibrio si ‘A’ es singular. En sistemas no lineales pueden existir uno o mas estados de equilibrio.

La estabilidad en sentido de Lyapunov, puede representarse en una región esférica con radio ‘k’ a partir de un estado de equilibrio x_e como

$$\|x - x_e\| \leq k \tag{4}$$

en donde $\|x - x_e\|$ es conocida como norma euclidiana, y se define mediante

$$\|x - x_e\| = \left[(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2 \right]^{1/2} \tag{5}$$

Ahora, si suponemos que $S(\delta)$ está formada por todos los puntos, de manera que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \tag{6}$$

y $S(\epsilon)$ formada por todos los puntos tal que

¹ En la literatura de sistemas dinámicos es conocido como puntos fijos o puntos de equilibrio

$$\|\Phi(t_0; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon, \text{ para toda } t \leq t_0 \quad (7)$$

“Entonces un estado de equilibrio x_e del sistema es estable en sentido de Lyapunov, si en correspondencia con cada punto $S(\epsilon)$ existe una $S(\delta)$ tal que las trayectorias iniciadas en $S(\delta)$ no se alejan, conforme ‘t’ se incrementa indefinidamente”.

“Por otro lado, se dice que un estado de equilibrio x_e es asintóticamente estable, si es estable en sentido de Lyapunov y además todas las soluciones que empiezan en $S(\delta)$ convergen a x_e sin apartarse de $S(\epsilon)$, conforme ‘t’ incrementa indefinidamente”.

“Un estado de equilibrio x_e es inestable si para un número real $\epsilon > 0$ y cualquier número real $\delta > 0$, hay un estado x_0 en $S(\delta)$ tal que la trayectoria que empieza en estos estados se aparta de $S(\epsilon)$ ”.

Las declaraciones afirmadas anteriormente son representadas gráficamente en la Fig. 1 para tres los tres diferentes tipos de estabilidad.

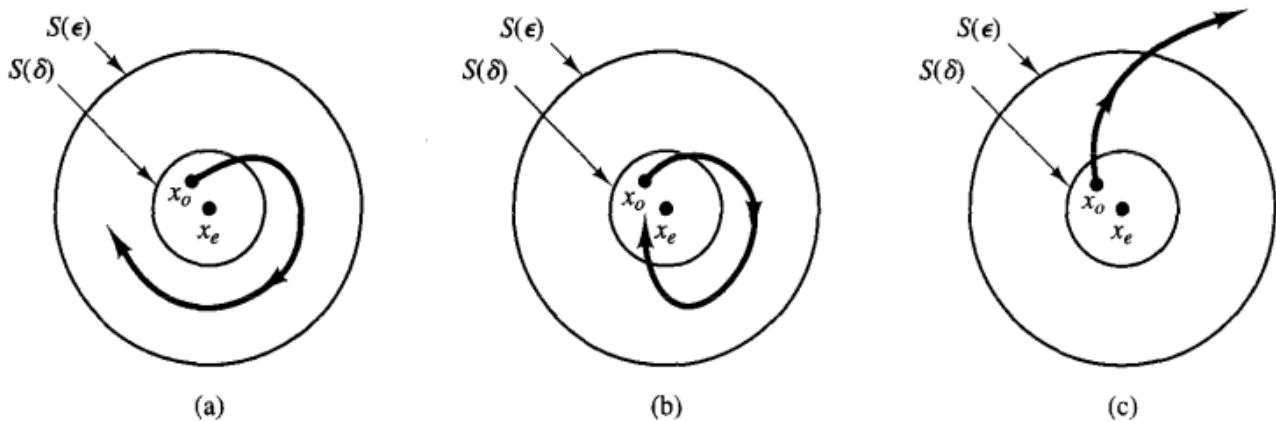


Fig. 1. Diferentes representaciones de estados de equilibrio y trayectorias representativas, a) estable, b) asintóticamente estable, c) inestable.

1.3.1 Método indirecto de Lyapunov

Teorema 1: Sea $x=0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por $\dot{x} = f(x, t)$ donde $f: D \rightarrow R^n$, con $D \subset R^n$, es continuamente diferenciable y D es un entorno del origen [12]. Sea la matriz Jacobiana

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \quad (8)$$

Entonces, notando con η_i a los autovalores de A ($i=0, \dots, n$).

El origen es asintóticamente estable si $\Re\{\eta_i\} < 0$, para todo η_i .

El origen es inestable si $\Re\{\eta_i\} > 0$ para uno o más autovalores de A .

1.3.2 Método directo de Lyapunov

El segundo método de Lyapunov es una generalización del hecho de que ciertas funciones de energía pueden ser usadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema, por lo que este método define una función de energía $V(x)$ denominada función de Lyapunov.

Sea $f: D \rightarrow R$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset R^n$ que contiene al origen, entonces:

- $V(x)$ se dice que es una función **definida positiva** si $V(0)=0$ y $V(x)>0$ en $D - \{0\}$.
- $V(x)$ se dice que es una función **semidefinida positiva** si $V(0)=0$ y $V(x) \geq 0$ en D .
- $V(x)$ se dice que es una función **definida negativa** si $-V(x)$ es definida positiva.
- $V(x)$ se dice que es una función **semidefinida negativa** si $-V(x)$ es semidefinida positiva.
- La derivada temporal de V sobre las trayectorias de $\dot{x}=f(x, t)$ se denomina **derivada orbital**, se denota $\dot{V}(x)$, y esta dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Teorema 2. Sea $x=0$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{x}=f(x, t)$ y sea $V: D \rightarrow R^n$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset R^n$ que contiene al origen, entonces

- Si $V(x)$ es **definida positiva** y $\dot{V}(x)$ es **semidefinida positiva**, el origen es un punto de **equilibrio estable**.
- Si $V(x)$ es **definida positiva** y $\dot{V}(x)$ es **definida positiva**, el origen es un punto de **equilibrio asintóticamente estable**.

Si lo anterior se cumple entonces $V(x)$ es una función de Lyapunov.

Se puede demostrar que si $V(x)$ es una función de Lyapunov, el conjunto de valores de x tal que $V(x)=c$, para alguna constante $c>0$ es una hiper superficie cerrada (denominada superficie de Lyapunov o superficie de nivel) en el espacio de estados que encierra al origen. El uso de las superficies de Lyapunov hace que el teorema sea fácilmente interpretable. Las superficies que corresponden a constantes decrecientes $0 < c_2 < c_1$, se

encuentran íntegramente contenidas como lo muestra la Fig. 2 para el caso de R^2 .

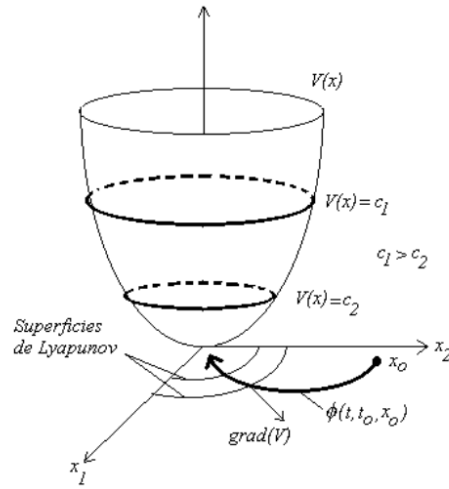


Fig. 2. Interpretación geométrica de las superficies de Lyapunov para el caso de \mathbb{R}^2 .

1.4 Exponente de Lyapunov

Un sistema caótico es un sistema no lineal con dependencia sensible a las condiciones iniciales, de modo que las trayectorias vecinas en el espacio fase se separan *exponencialmente* rápido en promedio [13]. Es decir, considerar una condición inicial x_0 y un punto cercano $x_0 + \delta_0$, donde la separación inicial δ_0 es extremadamente pequeña, por lo que δ_n será la separación de las trayectorias después de n iteraciones, esto implicaría que

$$|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{n\lambda} \quad (10)$$

entonces λ es llamado exponente de Lyapunov.

Un uso computacional más preciso para λ es realizado mediante logaritmos $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$, obteniendo

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| \quad (11)$$

El último término de la ecuación anterior es obtenido mediante el límite cuando $\delta_0 \rightarrow 0$, y el argumento del logaritmo puede ser expandido por la regla de la cadena como

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \quad (12)$$

Por la propiedad de los logaritmos, el producto anterior correspondiente al argumento de (11) es expresado como la suma de logaritmos tal que

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (13)$$

La expresión anterior puede tener un límite cuando $n \rightarrow \infty$, por lo que finalmente se define el exponente de Lyapunov para la orbita comenzando en x_0 como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\} \quad (14)$$

Así, el exponente de Lyapunov (14) es uno de los mecanismos estándar para conocer el estado de un sistema, este que provee una medida cuantitativa cuya interpretación se menciona puntualmente a continuación:

- $\lambda < 0$, indica que las trayectorias vecinas en el espacio fase convergen, indicando que el sistema se encuentra en un estado periódico.
- $\lambda > 0$, indica que las trayectorias vecinas en el espacio fase divergen, indicando que el sistema se encuentra en un estado caótico
- $\lambda = 0$, indica que las trayectorias vecinas en el espacio fase, se encuentran en un estado crítico o cuasi periódico.

1.5 Contribuciones

Si bien el exponente de Lyapunov provee información plausible sobre el estado del sistema, esta es calculada como un promedio sobre la secuencia de tiempo producida por el sistema, y en algunos casos, es necesario conocer como es la variación del exponente de Lyapunov a lo largo del tiempo.

Algunos mecanismos eficientes como la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT) han demostrado que la segmentación en ventanas son alternativas que permiten identificar las variaciones en el tiempo [14]. Así, teniendo como base este concepto, en el presente reporte se presenta un nuevo método heurístico *inspirado en el Exponente de Lyapunov en ventanas de corta duración* (STILE), el cual provee una secuencia temporal a partir de la respuesta de cualquier sistema caótico, en este caso, el sistema Duffing el cual tiene la capacidad de producir oscilaciones tanto periódicas como caóticas ha sido utilizado para la validación del método STILE [15]–[17].

2 Oscilador Duffing

2.2 Estabilidad y puntos de equilibrio

El sistema Duffing es descrito matemáticamente mediante una ecuación diferencial no lineal homogénea de segundo orden

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + \mu x^3 + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \quad (15)$$

Cuyos parámetros ζ, μ correspondientes al coeficiente de amortiguamiento lineal y no lineal respectivamente, y α, γ como factores de restauración lineal y no lineal respectivamente, pueden ser seleccionados de manera adecuada para producir oscilaciones autosostenidas conocidas como ciclo limite, sin la necesidad de funciones de conducción o forzamiento. Además, debido a sus características no lineales, este sistema puede producir caos [18].

Para conocer la estabilidad y puntos de equilibrio, el sistema (15) es transformado a ecuaciones de estado como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\zeta x_2 - \mu x_2^3 - \alpha x_1 - \gamma x_1^3 \end{aligned} \quad (16)$$

Los puntos de equilibrio se obtienen de (16) haciendo las derivadas cero y obteniendo las raíces correspondientes como

$$x_2^* = 0; x_1^* = \left[0; \pm \sqrt{\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)} \right] \quad (17)$$

De modo que los puntos de equilibrio agrupados en pares son $(0,0), \left(\pm \sqrt{\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)}, 0\right)$.

Aquí, es posible aplicar el **teorema 1** de la sección 1.3.1, comenzando por el cálculo del jacobiano para (16), con lo que se obtiene

$$J(x_1^*, x_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + 3\gamma x_1^2) & -(3\mu x_2^2 + 2\zeta) \end{bmatrix} \quad (18)$$

De modo que la linealización alrededor de los puntos de equilibrio produce

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\zeta \end{bmatrix}; J\left(\pm \sqrt{\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & -2\zeta \end{bmatrix} \quad (19)$$

A partir del jacobiano son obtenidos los autovalores como

$$\eta_{(0,0)} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \alpha}; \eta_{\left(\pm \sqrt{\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)}, 0\right)} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + 2\alpha} \quad (20)$$

Si, se consideran valores unitarios para los parámetros, tal que $\zeta = 1; \alpha = -1$, entonces se producen dos autovalores para $\eta_{(0,0)}$ siendo uno de ellos positivo, por lo que el punto $(0,0)$ es inestable. Por otro lado, los autovalores $\eta_{\left(\pm \sqrt{\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)}, 0\right)}$ son complejos, cuyas partes reales son siempre negativas, en consecuencia $\left(\pm \sqrt{\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)}, 0\right)$ son asintóticamente estables.

El análisis anterior puede representarse mediante pozo de potencial, como proponen (*I. Kovacic and M. J. Brennan, 2011*), para ello se considera el sistema (15) como un sistema *conservativo*, es decir, la energía del sistema no se disipa o amortigua, esto implica que los coeficientes de amortiguamiento no lineal y lineal deben ser cero ($\zeta = \mu = 0$), lo que produce

$$\ddot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \quad (21)$$

Dado que (21) está compuesto por la suma de fuerzas, entonces es posible calcular la energía de las fuerzas individuales mediante $E = \int \vec{F} d\vec{x}$, de modo que

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\gamma x^4}{4} = 0 \quad (22)$$

Aquí, el término derivativo corresponde a la energía cinética del sistema, y los no derivativos a la energía potencial, tal que

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}; V = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\gamma x^4}{4} \quad (23)$$

Al asumir nuevamente $\alpha = -1$ y $\gamma = 1$, la energía potencial del sistema Duffing conservativo es

$$V = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (24)$$

Esta función produce los pozos de potencial de la Fig. 3, tal que si una partícula es ubicada en $(0,0)$, esta se mantendría inestable y rodaría hacia cualquiera de los dos pozos ubicados ya sea en -1.5 o 1.5 ; en cualquiera de

estos puntos la partícula hipotética se mantendría en un estado estable. Así, la cresta de la función corresponde a un punto inestable, mientras que los valles denotan puntos estables.

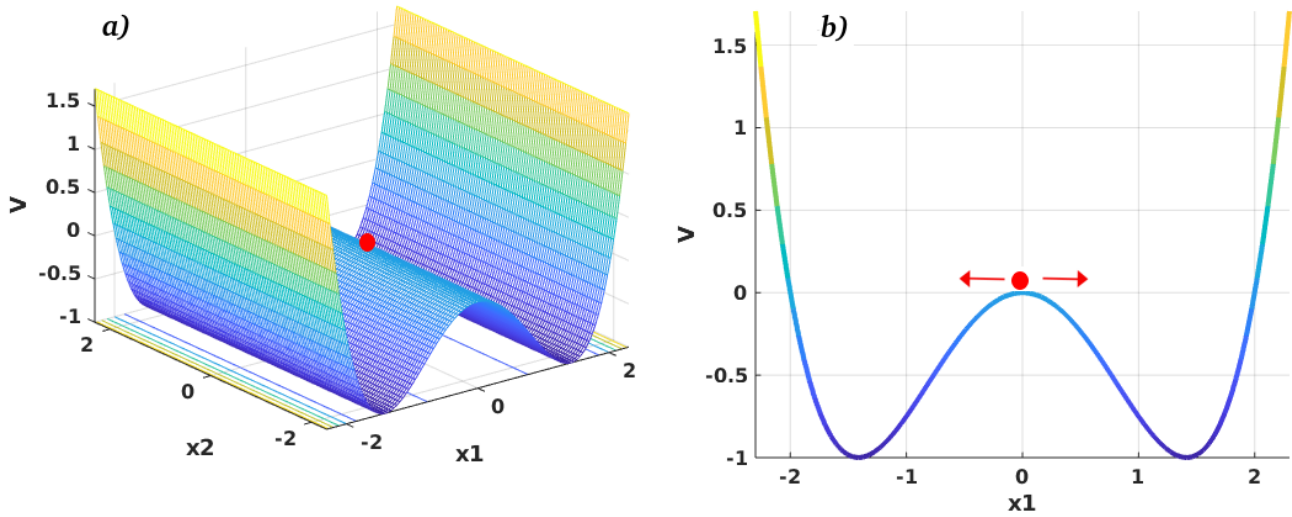


Fig. 3. Pozos de potencial del sistema Duffing conservativo

2.3 Régimen de Intermitencia

En ingeniería, el oscilador Duffing juega un papel fundamental, ya que ha permitido su utilización en aplicaciones de detección de señales estacionarias inmersas en altos niveles de ruido, condición que con sistemas lineales convencionales resulta difícil. Para lograr este propósito, el sistema Duffing debe ser configurado en el régimen denominado *intermitencia*, el cual consiste en oscilaciones periódicas alternadas de estallidos de caos [19][20]. Este régimen es alcanzado básicamente mediante la selección adecuada de los parámetros del sistema y a través de la incorporación de funciones de excitación. Primero, la ecuación (16) es reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\zeta x_2 - \mu x_2^3 - \alpha x_1 - \gamma x_1^3 + F \cos(\omega t) + F_1 \cos(\omega_1 t) + \eta(t)\end{aligned}\quad (25)$$

Donde F, ω son la amplitud y frecuencia de la función de forzamiento respectivamente, cuyo propósito es el de conducir al sistema a un estado periódico. F_1, ω_1 son la amplitud y frecuencia de la señal débil respectivamente, la cual es sumada a ruido blanco $\eta(t)$ con distribución gaussiana. De acuerdo con la selección de parámetros presentada en [21], el sistema finalmente es presentado como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.3 x_2 + x_1 - x_1^3 + 0.51 \cos(\omega t) + 0.11 \cos(\omega_1 t) + \eta(t)\end{aligned}\quad (26)$$

En condiciones libres de ruido el sistema está determinado a producir intermitencia mediante la diferencia de amplitudes entre ambas funciones y mediante la diferencia de frecuencias lo suficientemente cercanas tanto como $\Delta\omega \ll |\omega - \omega_1|$. Así, al consideran como vectores a las amplitudes F y F_1 , tal que el vector resultante producido por ambos es $F(t)$ y cuya magnitud es variante en el tiempo por la acción de sus diferencias de frecuencia $\Delta\omega$, entonces es posible expresar una relación vectorial como la presentada por (Lou Tian-liang, 2008) en la Fig. 4. En este escenario, se establece un umbral F_0 que corresponde al estado crítico del sistema, es decir, a la frontera entre caos y periodicidad. Este umbral puede obtenerse cuando el exponente de Lyapunov definido por λ alcanza el valor de cero.

Así, cuando la diferencia de frecuencias definida por $\Delta\omega$ es lo suficientemente pequeña, la componente resultante $F(t)$ superará el umbral F_0 , conduciendo al sistema hacia un régimen periódico durante un tiempo determinado, y podrá alcanzar su máximo cuando $\Delta\omega=0$ como se muestra en la Fig. 4a. El caso contrario sucede en la Fig. 4b, donde la componente resultante $F(t)$ tiene su magnitud por debajo del umbral F_0 manteniendo al sistema en el régimen caótico. Nótese que con la declaración anterior, se produce una oscilación de intermitencia entre el estado caótico y estado periódico con una frecuencia $\Delta\omega$, de modo que puede calcularse el periodo constante de intermitencia como el inverso de esta frecuencia, obteniendo: $T=2\pi/\Delta\omega$.

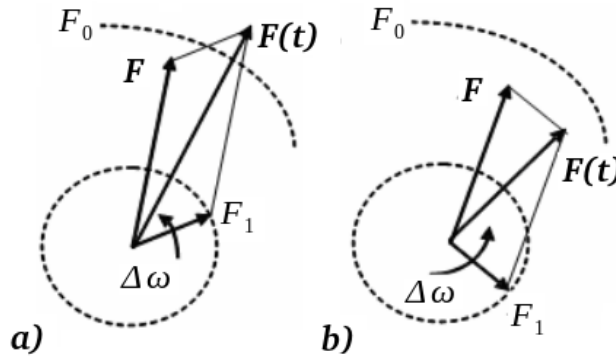


Fig. 4. Relación vectorial entre amplitudes de Forzamiento y perturbación respecto a la diferencia de frecuencias angulares definida por $\Delta\omega$

Al tener en cuenta la condición anterior, la solución del sistema Duffing presentado en (26), producirá la trayectoria de fase y secuencia temporal en régimen de intermitencia mostrado en la Fig. 5. Adicionalmente, en el caso de Duffing, (G. Wang, 1999) y (Chongsheng Li, 2005) definen diversos valores para la diferencia de frecuencia $\Delta\omega$, coincidiendo que para asegurar intermitencia se debe considerar $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 0.04$ [21][19].

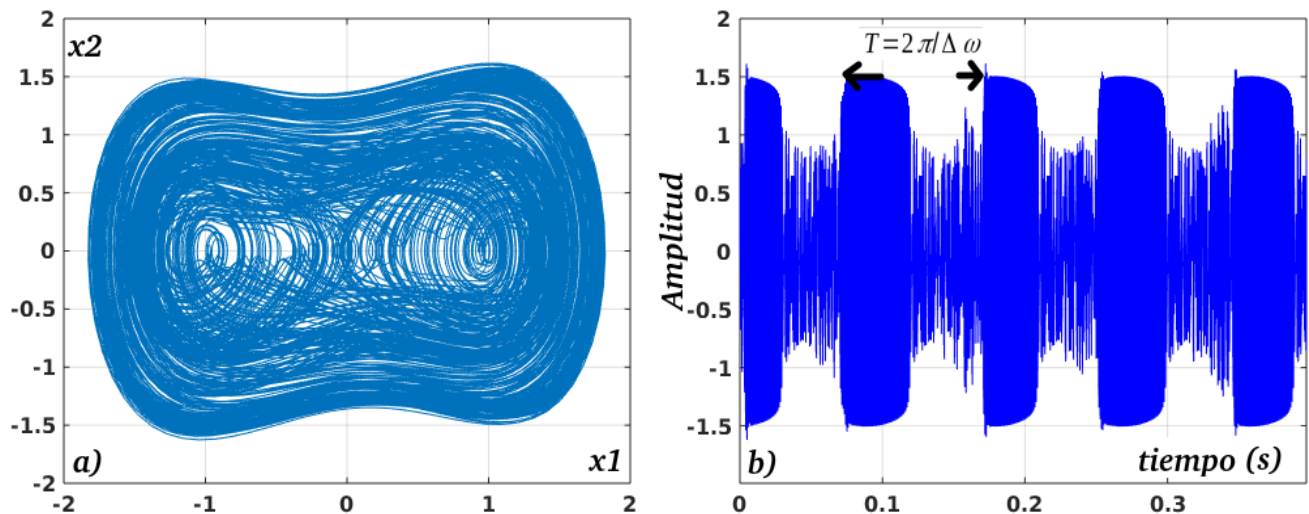


Fig. 5. Respuesta de sistema Duffing en condiciones libres de ruido. a) trayectoria de fase mostrando régimen intermitencia. b) secuencia en el tiempo mostrando intermitencia entre estado caótico y periódico.

Lo anterior implica que valores de diferencia de frecuencias superiores a 0.04, es decir $\frac{\Delta\omega}{\omega} > 0.04$, provoca que el periodo de intermitencia T sea cada vez menos distinguible, empeorando aun mas en condiciones de ruido.

Así, (C. Bermudez-Gomez, et al., 2012) proponen $\frac{\Delta\omega}{\omega}=0.01$ para asegurar la distinción de los periodos de intermitencia. Entonces, a partir de esta última relación se puede deducir la frecuencia de la señal débil como

$$\hat{\omega}_1 = \frac{\Delta\omega}{0.01}, \quad (27)$$

Donde $\hat{\omega}_1$ es la frecuencia estimada de la señal débil.

Si ahora el valor de la diferencia de frecuencias $\Delta\omega=2\pi/T$ obtenida de la medición de los periodos de intermitencia de la Fig. 5b, es sustituido en (27), entonces se obtiene una relación que involucra sólo la relación $\frac{\Delta\omega}{\omega}=0.01$ y el periodo de intermitencia como

$$\hat{\omega}_1 = \frac{2\pi}{0.01T}, \quad (28)$$

O como una frecuencia lineal

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{0.01T}, \quad (29)$$

3 Identificación de periodos de intermitencia

3.2 Determinación de ventana de tiempo

Como se mencionó en la sección anterior, la intermitencia entre el estado caótico y periódico se mantiene incluso en condiciones de ruido, sin embargo, cuando la intensidad de ruido es demasiado grande, el ciclo límite de intermitencia resulta menos visible y dificulta su identificación. Al tomar en consideración este problema, se utilizan métodos que faciliten su detección, en donde el método STILE surge precisamente como una necesidad para destacar dichos periodos intermitencia en ambientes de ruido.

Considerar primero un secuencia de tiempo, con un tiempo inicial y final, donde la diferencia entre ambos, es decir $(t_f - t_i)$, proporciona el tiempo total de análisis. Por otro lado, se tiene el periodo de intermitencia, que

evidentemente de acuerdo con la Fig. 6 es menor al tiempo total de análisis, por lo que se puede definir una relación entre el tiempo total de análisis y el tiempo de intermitencia como $T/(t_f - t_i)$.

Dado que la solución temporal fue obtenida mediante método numérico, en la presente investigación el tiempo total de análisis es de hecho el tiempo total de integración numérica, el cual está compuesto de 'N' número de datos o muestras, por lo tanto, la relación adimensional definida como $T/(t_f - t_i)$ ahora puede definirse como una relación que incluye el número de datos

$$\frac{N * T}{(t_f - t_i)} \text{(muestras)} \quad (30)$$

Al sustituir $T=2\pi/\Delta\omega$ se tiene que la relación (30) representa un tamaño de ventana fija cuyas unidades son un número de datos constante que incluye la frecuencia de intermitencia, esta ventana es denotada por ΔV como

$$\Delta V = \frac{N * 2\pi}{\phi * \Delta\omega * (t_f - t_i)} \text{(muestras)} \quad (31)$$

A la relación anterior, se le ha asignado un factor de ajuste de ventana definido por ϕ ; cuando este factor incrementa, el ancho de ventana se reduce de manera proporcional, lo que permite tener una ventana de tamaño variable.

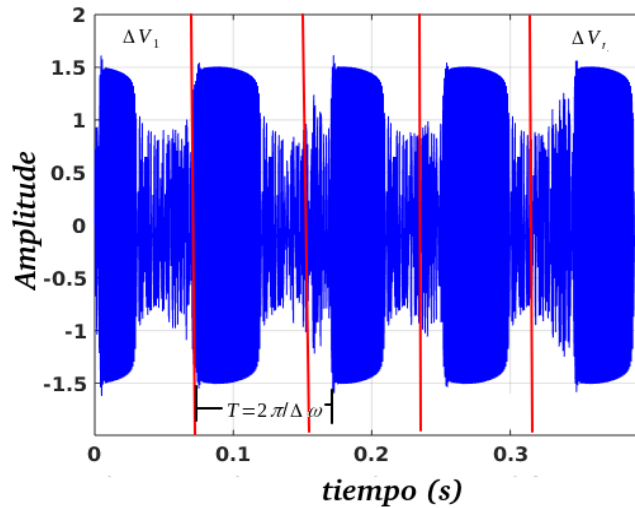


Fig. 6. Secuencia de tiempo y segmentación en ventanas de tiempo de corta duración.

3.3 Método heurístico STILE

Una vez segmentada la secuencia de tiempo, puede pensarse en aplicar el exponente de Lyapunov a cada ventana y así reconstruir una función de Lyapunov que identifique los estados del sistema en el tiempo, sin embargo, al realizar este procedimiento se encontraron los siguientes problemas:

1. Las ventanas aún son lo suficientemente grandes como para coleccionar información de los estados del sistema, esto puede provocar la omisión de máximo de intermitencia y llevar a una medición incorrecta. Por el contrario, si el tamaño de ventana se reduce, esto puede promover a la generación de máximos espurios que pueden dar lugar también a mediciones incorrectas de los periodos de intermitencia.
2. Por cada ventana de longitud datos 'n' se tiene sólo un exponente de Lyapunov, por lo que se produce una pérdida de resolución temporal.
3. El exponente de Lyapunov requiere diversos procedimientos adicionales, por ejemplo, requiere derivar (26) en términos de 'x', pero también requiere la obtención de la solución de (26), y así posteriormente ser sustituido en la función previamente derivada (ver Strogatz S., 2015, p375).
4. El exponente de Lyapunov aplica la función logaritmo para cada dato de la secuencia obtenida en el paso 3.

Por tal motivo, se pensó en el desarrollo de una función similar, que pueda superar los inconvenientes previamente mencionados. Primero, no se sugiere derivar la ecuación del sistema, pero si derivar numéricamente la solución obtenida de (26), esto evita un paso. Segundo, para obtener una resolución aceptable sin comprometer la precisión, se propone realizar un sub-ventanado con tamaño n_v , que evidentemente deberá ser menor al tamaño de ΔV . Tercero, en lugar de evaluar la función logaritmo por cada muestra, se evalúa la función logaritmo cuyo argumento corresponde a la suma de los n_v elementos de la sub-ventana, esto reduce los máximos espurios que puedan generarse en la función resultante. Cuarto, dado que cada sub-ventana produce un

“Exponente similar a Lyapunov”, para recuperar la resolución de la secuencia temporal original, se propone realizar un interpolado por n_{tv} muestras, esto producirá una función en el tiempo, con el mismo numero de datos de la ventana. Esta propuesta se representa gráficamente en la Fig. 7. Este método fue llamado STILE, dado que conserva ciertas similitudes con el exponente de Lyapunov, y produce a la vez una función en dominio del tiempo, con la misma duración que a secuencia Duffing intermitente.

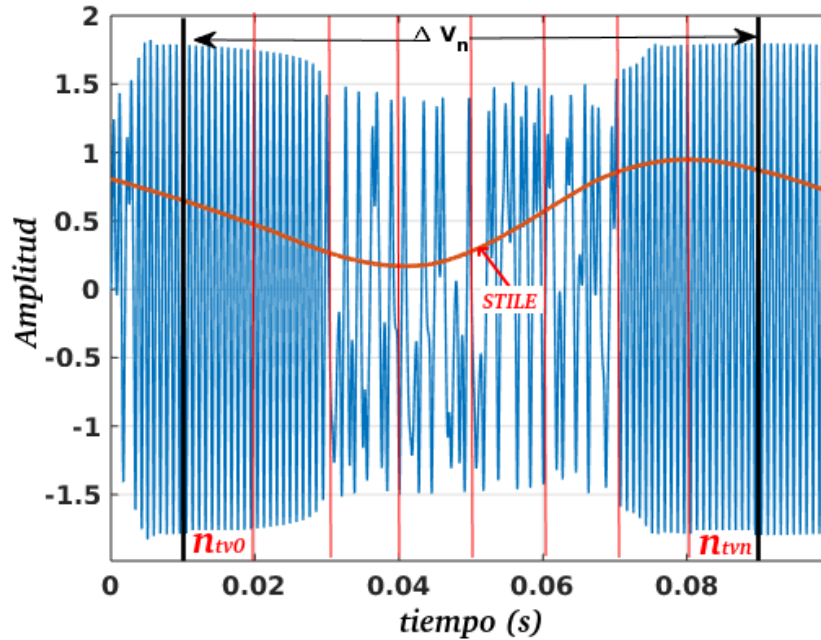


Fig. 7. Sub-ventaneo de ΔV , para generación de la secuencia STILE.

En la Fig. 8, se muestra el comparativo entre el Exponente de Lyapunov y STILE, los cuales evalúan la respuesta intermitente del sistema Duffing en un tiempo de integración de 0 a 0.6 seg, equivalente a 60000 muestras, con un tamaño de sub-ventana igual al de la ventana principal de análisis, es decir $n_{tv} = \Delta V$.

Aun cuando STILE requiere procesamiento adicional para la diferenciación numérica e interpolación, es evidente que produce una función suave con máximos y mínimos bien definidos, estos corresponden de manera precisa con el periodo de intermitencia producida en el oscilador Duffing, además, éstos máximos y mínimos son fácilmente medibles e inmunes a condiciones de ruido moderado.

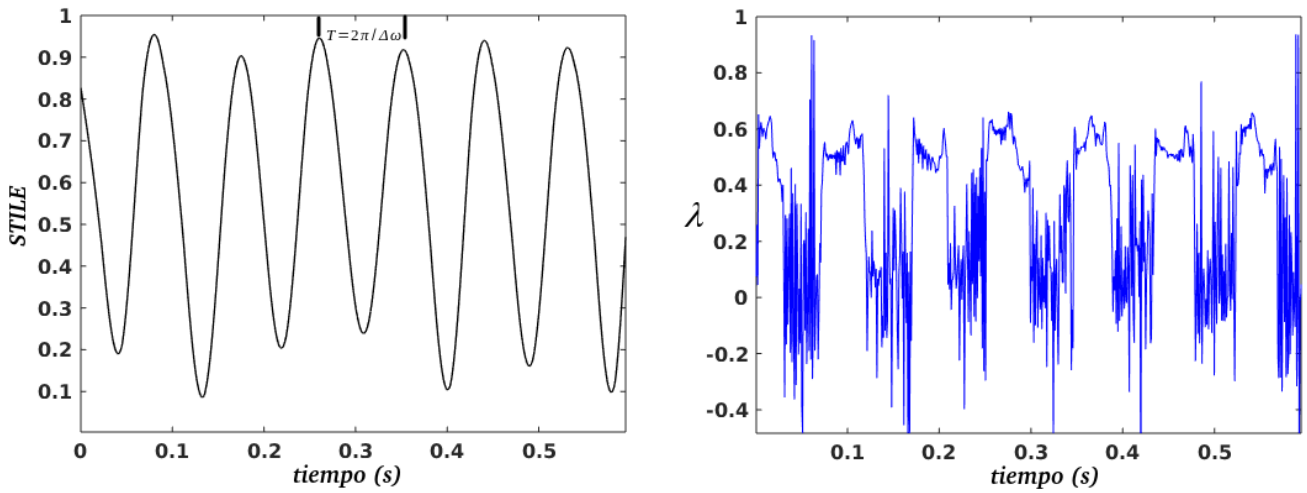


Fig. 8. Comparativo entre función STILE (izq) y Exponente de Lyapunov (der).

En condiciones de ruido alrededor de 0 dB, la función STILE cambia ligeramente las amplitudes de sus máximos, pero el intervalo entre ellos se mantiene constante. Por otro lado, en condiciones de alto nivel de ruido ($\ll -25$ dB), STILE puede producir pequeños máximos espurios contiguos que pueden fomentar a mediciones erróneas, para ello se sugiere un suavizado previo a la medición, que puede realizarse mediante un simple filtrado de ventana. Adicional a esto, se calcula la moda estadística de los periodos de intermitencia obtenidos, esto en vez de su promedio estadístico, lo que mejora la estimación de la frecuencia. De manera opcional, la secuencia producida por STILE puede ser normalizada alrededor de la unidad para facilitar el procesamiento.

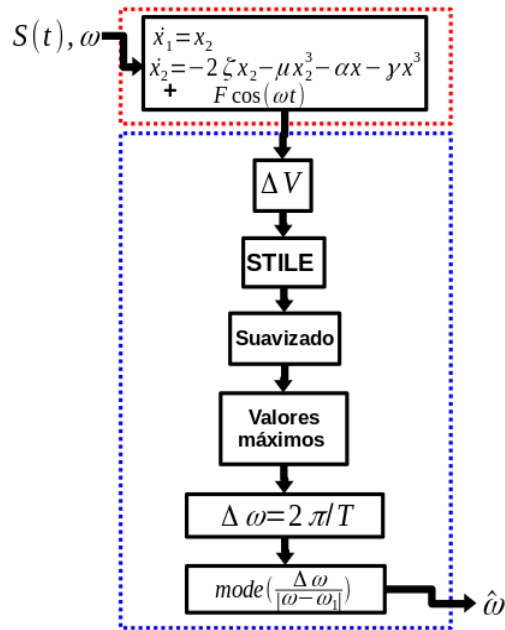


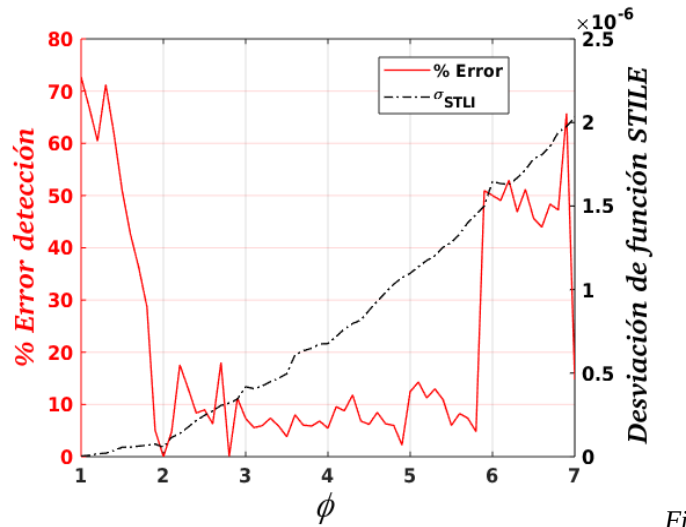
Fig. 9. Diagrama bloques de proceso de detección de señal débil estacionaria.

Con las características descritas anteriormente, se propone un proceso completo descrito en la Fig. 9, que incluye los elementos necesarios para la detección de una señal débil estacionaria inmersa en altos niveles de ruido, el cual consta de dos bloques; el bloque en rojo corresponde al proceso de obtención de la solución del sistema, este puede ser adquirido mediante simulación numérica como se presenta en esta investigación, o puede ser obtenida a partir de sistemas físicos como circuitos electrónicos activos o sistemas mecánicos. El bloque azul, se refiere a la etapa de procesamiento que incluye el método STILE.

4 Simulación del sistema, experimentos y resultados

En el presente reporte, los experimentos fueron simulados a través de la plataforma Matlab R2019b. La simulación del sistema Duffing de segundo orden fue obtenida a través de la programación del método Runge-Kutta de cuarto orden, cuyo tamaño de paso fue definido fijo en $h=0.00001$. Este tamaño de paso no fue modificado durante la realización de los experimentos con el propósito de mantener las mismas condiciones para diversos casos de ruido, y al mismo tiempo evitar la supresión de secuencias de caos [23]. Las condiciones iniciales fueron definidas como $x_1(0)=x_2(0)=0$ para todos los casos, y el tiempo de integración numérica se estableció de cero a dos segundos. El procesamiento mostrado en el bloque azul de la Fig. 9, que incluye el ventaneo, el método STILE y a la medición de máximos fue programado de igual forma en la plataforma Matlab R2019b.

Otro elemento que contribuye a lograr la detección en ambientes ruidosos es el factor ϕ , el cual permite ajustar el tamaño adecuado de ventana para la aplicación de STILE. Con el fin de conocer los valores de ϕ que aseguren la efectividad en la detección, se realiza la ejecución del proceso definido en la Fig. 9. Así, en condiciones libres de ruido, el valor de ϕ es iterado para producir los resultados de la Fig. 10, donde es evidente que los únicos valores que aseguran altas tasas de detección son $\phi = 2, 2.9$. Otro elemento importante que destacar es la influencia de este parámetro sobre la amplitud misma de la función STILE, a medida que el parámetro ϕ se incrementa, el tamaño de ventana se reduce y la diferencia entre amplitudes contiguas en la función STILE es mayor, esto se corrobora midiendo la desviación estándar de la función STILE como se muestra en la Fig. 10.



g. 10. Influencia del factor ϕ en la detección de los periodos de intermitencia y dispersión de la función STILE.

Durante la simulación, fueron evaluados veinte periodos de intermitencia para diferentes relaciones señal a ruido, y la frecuencia de la señal débil fue estimada con la aplicación de la moda estadística sobre el conjunto de periodos, los resultados mostrados en la Tabla 1 corroboran la efectividad del sistema para detectar señales estacionarias en condiciones severas de ruido, sus respectivos errores relativos son registrados.

Tabla 1. Error relativo en el proceso de detección débil con frecuencia $\omega_1=7000$ para diferentes relaciones señal a ruido.

SNR (dB)	Factor Ventana (ϕ)	Error (%)	Frecuencia Estimada (Hz)
-5	2	2.85E-06	1114.08
-10	2	2.85E-06	1114.08
-15	2	2.85E-06	1114.08
-20	2	2.85E-06	1114.08
-25	2	2.85E-06	1114.08
-30	2	0.0520	1057.41

Si bien los resultados anteriormente mostrados son aceptables, una pregunta prevaleció durante la realización de las simulaciones: ¿Que sucede cuando el sistema detecta una frecuencia distinta a la frecuencia de referencia?

Para responder esta interrogante, se propuso realizar un experimento final, en el cual la frecuencia de perturbación ω_1 (señal débil) fue iterada dentro de un intervalo de frecuencias que variaba desde 6900 rad/seg hasta 7100 rad/seg, dejando fija la frecuencia de referencia ω (forzamiento) en 7000 rad/seg. Lo que se encontró, fue que cuando la frecuencia ω_1 se aproximaba lo suficiente ω , la amplitud entre las frecuencias contiguas de la función STILE era mayor, es decir su desviación estándar incrementaba justo en el instante de intermitencia, tal y como se aprecia en la Fig. 11. Esto quiere de decir que la función STILE no solo es capaz de identificar los periodos de intermitencia, sino también determina los instantes en el que la intermitencia ocurre.

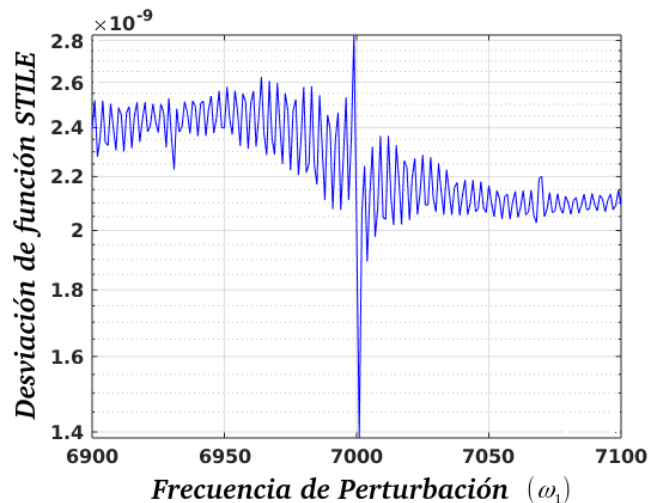


Fig. 11. Desviación estándar de la función STILE para identificación de intermitencia.

Conclusiones

Un nuevo método de detección de señales débiles basado en sistemas caóticos fue presentado. A través de la configuración del sistema Duffing en el régimen de intermitencia, el método STILE, el cual está inspirado en el exponente de Lyapunov segmentado en ventanas de corta duración, permitió producir una función suave y periódica, cuyos máximos corresponden de manera precisa con los periodos de intermitencia producidos por el

sistema Duffing. Así mismo, STILE combina estrategias de procesamiento para poder estimar de manera precisa la frecuencia de una señal débil estacionaria, los resultados mostraron la efectividad en la detección en condiciones de alto ruido con una relación señal-ruido de -25 dB.

Además, a través de la estimación de la desviación estándar de la función STILE, el sistema es capaz de identificar los instantes en los que la intermitencia toma lugar, y permite al mismo tiempo distinguir una frecuencia de interés a partir de una señal compuesta de múltiples frecuencias. Lo que abre una puerta de investigación en el campo de señales no estacionarias en frecuencia.

Referencias

- [1] H. Xu *et al.*, “Chaos-Based Through-Wall Life-Detection Radar,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 29, no. 07, p. 1930020, Jun. 2019, doi: 10.1142/S0218127419300209.
- [2] R. L. V. Medeiros, A. C. L. Filho, J. G. G. S. Ramos, T. P. Nascimento, and A. V. Brito, “A Novel Approach for Speed and Failure Detection in Brushless DC Motors Based on Chaos,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 66, no. 11, pp. 8751–8759, Nov. 2019, doi: 10.1109/TIE.2018.2886766.
- [3] S. Thakur, A. K. Singh, S. P. Ghrrera, and A. Mohan, “Chaotic based secure watermarking approach for medical images,” *Multimed. Tools Appl.*, vol. 79, no. 7–8, pp. 4263–4276, Feb. 2020, doi: 10.1007/s11042-018-6691-0.
- [4] C. R. Bermudez-Gomez, R. Enriquez-Caldera, and J. Martinez-Carballido, “Chirp signal detection using the Duffing oscillator,” in *CONIELECOMP 2012, 22nd International Conference on Electrical Communications and Computers*, Feb. 2012, pp. 344–349, doi: 10.1109/CONIELECOMP.2012.6189936.
- [5] N. Li, L. Li, D. Yang, Y. Zhao, and Y. Yang, “The research of weak fault signal detection based on the Duffing oscillator coupled synchronization,” *Proc. - 4th Int. Work. Chaos-Fractals Theor. Appl. IWCFTA 2011*, pp. 319–323, 2011, doi: 10.1109/IWCFTA.2011.85.
- [6] Q. Wang, X. Zhang, and Y. Yang, “The TVICMs method for weak signal detection based on a nonlinear stochastic delay differential system,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 126, p. 103557, Nov. 2020, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103557.
- [7] C. Wang, C. Fan, and Q. Ding, “Constructing Discrete Chaotic Systems with Positive Lyapunov Exponents,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 28, no. 07, p. 1850084, Jun. 2018, doi: 10.1142/S0218127418500840.
- [8] M. Han, V. G. Romanovski, and X. Zhang, “Equivalence of the Melnikov Function Method and the Averaging Method,” *Qual. Theory Dyn. Syst.*, vol. 15, no. 2, pp. 471–479, Oct. 2016, doi: 10.1007/s12346-015-0179-3.
- [9] G. Tigan, C. Lazureanu, F. Munteanu, C. Sterbeti, and A. Florea, “Bifurcation diagrams in a class of Kolmogorov systems,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 56, p. 103154, Dec. 2020, doi: 10.1016/j.nonrwa.2020.103154.
- [10] K. Keller and M. Sinn, “Kolmogorov–Sinai entropy from the ordinal viewpoint,” *Phys. D Nonlinear Phenom.*, vol. 239, no. 12, pp. 997–1000, Jun. 2010, doi: 10.1016/j.physd.2010.02.006.
- [11] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, Tercera ed. Pearson Prentice Hall, 1998.
- [12] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Prentice Hall, 2001.
- [13] S. H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering , Steven H. Strogatz, Westview Press, 2015. 2nd ed. \$60.00 pape,” *Phys. Today*, vol. 68, no. 4, pp. 54–55, Apr. 2015, doi: 10.1063/PT.3.2751.
- [14] N. Kehtarnavaz, “Frequency Domain Processing,” in *Digital Signal Processing System Design*, Second edi., Elsevier, 2008, pp. 175–196.
- [15] Y. Xie, T. Lin, Y. Li, and X. Shi, “Weak signal frequency detection based on intermittent chaos,” *2014 IEEE Chinese Guid. Navig. Control Conf. CGNCC 2014*, pp. 1563–1566, 2015, doi: 10.1109/CGNCC.2014.7007425.
- [16] L.-F. Liu, G.-S. Rui, and Y. Zhang, “Duffing Oscillator Weak Signal Detection Method Based on EMD Signal Processing,” in *2020 International Conference on Computer Information and Big Data Applications (CIBDA)*, Apr. 2020, pp. 495–498, doi: 10.1109/CIBDA50819.2020.00117.
- [17] Y. Xing and F. Zhang, “Simulation and application of weak signal detection based on Chaos theory,” *Proc. 2017 IEEE 2nd Adv. Inf. Technol. Electron. Autom. Control Conf. IAEAC 2017*, pp. 2434–2437, 2017, doi: 10.1109/IAEAC.2017.8054460.

- [18] I. Kovacic and M. J. Brennan, *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*, First Edit. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, United Kingdom: John Wiley & Sons, 2011.
- [19] N. Mori, T. Kobayashi, H. Hata, T. Morita, T. Horita, and H. Mori, "Scaling Structures and Statistical Mechanics of Type I Intermittent Chaos," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 81, no. 1, pp. 60–77, 1989, doi: 10.1143/ptp.81.60.
- [20] V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, and T. G. Postnikova, "Intermittent transition to chaos in vibroimpact system," *Appl. Math. Nonlinear Sci.*, vol. 3, no. 2, pp. 475–486, Dec. 2018, doi: 10.2478/AMNS.2018.2.00037.
- [21] T. L. Lou, "Frequency estimation for weak signals based on chaos theory," *Proc. - 2008 Int. Semin. Futur. Biomed. Inf. Eng. FBIE 2008*, pp. 361–364, 2008, doi: 10.1109/FBIE.2008.114.
- [22] G. Wang, "The application of chaotic oscillators to weak signal detection," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 46, no. 2, pp. 440–444, 1999, doi: 10.1109/41.753783.
- [23] A. Iglesias, J. M. Gutiérrez, J. Güémez, and M. A. Matías, "Chaos suppression through changes in the system variables and numerical rounding errors," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 7, no. 8, pp. 1305–1316, Aug. 1996, doi: 10.1016/0960-0779(95)00072-0.
- [24] R. Burden, D. Faires, and A. Burden, *Numerical Analysis*, 10th ed. 2015.

Anexo A : Propuesta de Algoritmo para implementación de STILE

En la Tabla 2, se muestra la propuesta de pseudocódigo para la implementación del método STILE, el cual se describe a continuación. En el paso 1, se aplica la derivación numérica sobre la secuencia temporal, esta se lleva a cabo mediante aproximación de diferencias finitas [24]; en este caso la derivada permite saber las razones de cambio de la solución. Los pasos 3-8 genera un ciclo el cual evalúa las 'n' muestras equivalentes al tamaño de ventana ΔV , misma que es sub-segmentada en ventanas de tamaño n_v . Posteriormente, se suman los elementos de la derivada correspondientes a la ventana de análisis para obtener un promedio, este promedio es no lineal dado la aplicación de la función logaritmo. Al final de esta operación se produce un índice similar al exponente de Lyapunov para cada ventana ΔV , por lo que el paso 10 genera una interpolación para recuperar el total de las muestras de la secuencia original que fue derivada y se normaliza alrededor de la unidad para un tratamiento mas simple.

Tabla 2. Algoritmo para implementación de método inspirado en el exponente de Lyapunov de corta duración: STILE

Define entradas:

x: el vector correspondiente a la ventana enésima de la secuencia temporal

ntv: número de muestras de la sub-ventana (debe ser menor que el número de muestras correspondientes a) ΔV

1. Obtiene el valor absoluto de la derivada de la secuencia: $dFx = \left| \frac{dx}{dt} \right|$
2. Inicializa $k=1$
3. Para $j=1$ hasta la longitud de dFx
4. Si la longitud de $dFx \geq (j+ntv-1)$
5. $var=dFx$ (desde j hasta $j+ntv-1$)
6. $M(k)=\logaritmo(\text{suma elementos de } (var))/(ntv-1)$
7. $k=k+1$
8. Fin Si
9. Fin Para
10. $A=\text{interpolación de } M$, en ntv cantidad de muestras
11. $STILE= \text{normalización de } (A)$ alrededor de la unidad

Salidas:

STILE
