



**INAOE**

**PROCESADORES BILINEALES BI-INVARIANTES  
EN RESTAURACIÓN DE IMÁGENES  
BILINEALES CON RUIDO.**

Por

**LUIS RAÚL BERRIEL VALDOS.**

**TESIS.**

Sometida como requisito parcial para obtener el grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS ESPECIALIDAD EN ÓPTICA.**

**INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA, ÓPTICA Y  
ELECTRÓNICA**

Supervisada por: Dr. JOSÉ LUIS JUÁREZ PÉREZ

TONANTZINTLA, PUEBLA

2000.

©INAOE 2000

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes mencionando la fuente.



## DEDICATORIA.

El presente trabajo, la otra verdad semioculta (**la bilinealidad**), esta dedicado a todos mis **compañeros de camino**: padres, hermanos(as), familiares, amigos(as), profesores(as), conocidos(as), compañeros(as) de estudio y de trabajo, como un reconocimiento a sus invaluables y cotidianas enseñanzas.

## AGRADECIMIENTOS.

A José Luis Juárez Pérez por su paciencia en escucharme y enseñanzas en programación. A todos los sinodales, por haber leído y corregido este trabajo: Daniel Malacara Hernández, Eugenio Méndez Méndez, Héctor Moya Cessa, José Silva Martínez.

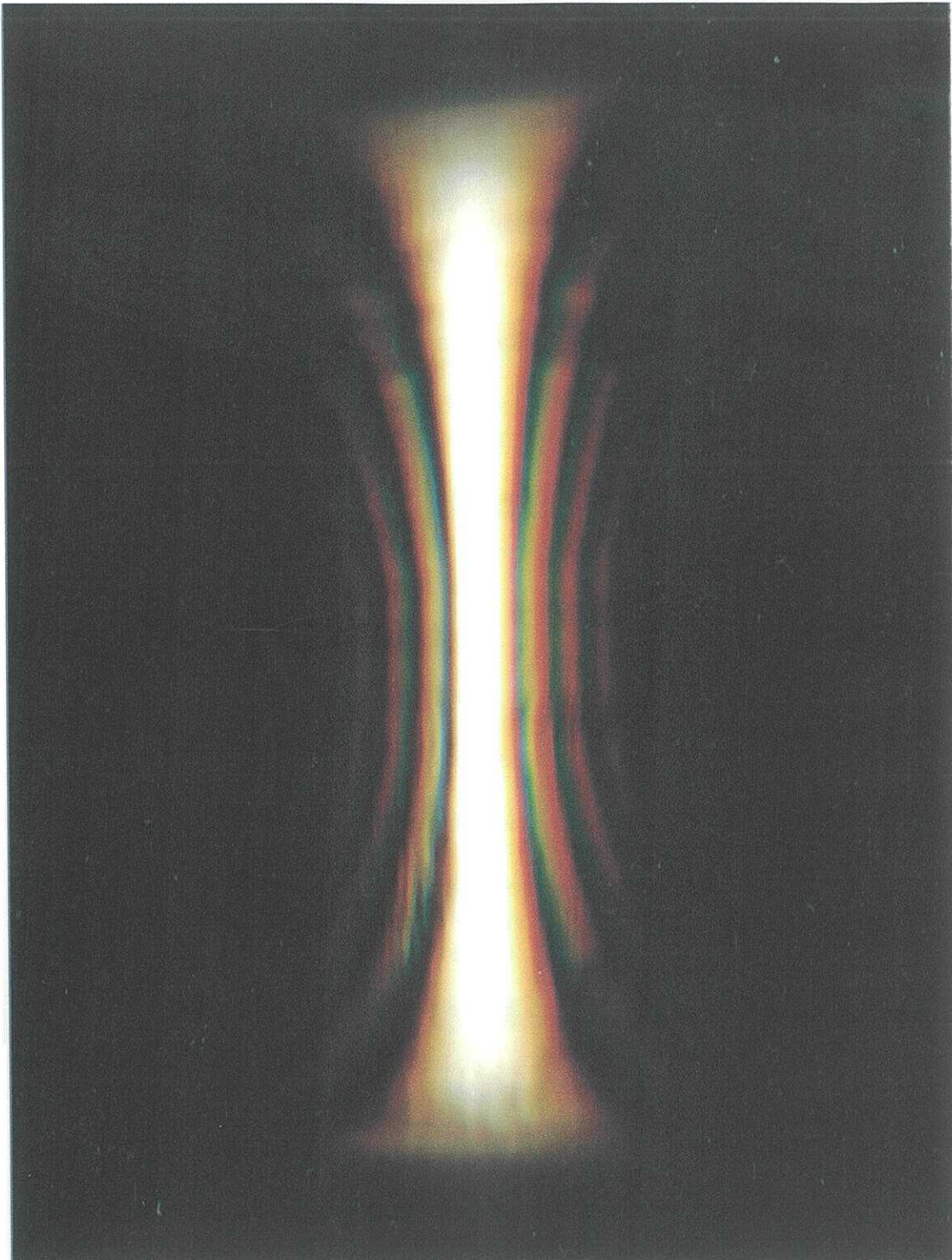
*La creatividad (como la vida) es no lineal.*

## Resumen.

El objetivo de este trabajo es restaurar imágenes degradadas bilinealmente con ruido aditivo usando procesadores bilineales bi-invariantes digitales en cualquiera de sus tres modalidades: procesador de la función de intensidad mutua, procesador de la función del espectro mutuo y procesador en el espacio fase. La restauración bilineal puede ser iterativa en cualesquiera dominio. Los resultados se presentan para el siguiente caso: imagen bilineal de un punto (sin o con desenfoque, sin o con ruido, mono cromática o poli cromática). Finalmente, tanto el filtro bilineal de Wiener como el filtro **RNC** (Red Neuronal Celular) se complementan para obtener buenos estimados a las imágenes bilineales restauradas.

## Abstract.

The aim of this work is the restoration of spatial degraded images with additive noise using bilinear and bi-invariant digital processors in any of their three possibilities: the mutual intensity function, the mutual complex spectrum function and the phase space function. The bilinear restoration can be iterative in any of their three possibilities. The results are shown in the following case: one point bilinear image (with or without focus, with or without noise, monochromatic o polychromatic). Finally, the bilinear Wiener filter and the **CNN** (Cellular Neuronal Network) filter are putting on together to get better estimators to the restored bilinear images.



Módulo al cuadrado de la Distribución de Wigner poli cromática de una rendija (E. Jara G, J. Carranza, L. R. Berriel-Valdos).



# ÍNDICE.

<b>INTRODUCCIÓN.</b>	5
<b>I. SISTEMAS LINEALES EN PROCESAMIENTO DE IMÁGENES.</b>	
I.1. Introducción.	10
I.2. Sistemas lineales.	11
I.3. Función de punto extendido variantemente degradada.	15
I.4. Las Aberraciones del sistema óptico como perturbación espacial a la Imagen Limitada por Difracción (ILID).	16
<b>II. DISTRIBUCIONES CONJUNTAS EN PROCESADO DE IMÁGENES.</b>	
II.1. Introducción.	20
II.2. Distribución de Cohen.	22
II.3. Distribución de Wigner.	26
II.4. La Función de Ambigüedad.	31
II.5. El Problema inversión en la Distribución Cohen.	33
II.6. Distribución de Wigner de una imagen degradada por un sistema óptico con valores pequeños de coeficientes del polinomio de aberración.	34
<b>III. SISTEMAS BILINEALES EN PROCESADO DE IMÁGENES.</b>	
III.1. Introducción.	37
III.2. Sistemas bilineales y la Distribución de Cohen.	38
III.3. Procesado bilineal de imágenes mono cromáticas sin ruido.	41
III.4. Procesado bilineal de imágenes poli cromáticas sin ruido.	47

III.5. Procesado bilineal de imágenes mono cromáticas con ruido .	51
<b>IV. METODO BILINEAL ITERATIVO PARA LA ESTIMACIÓN DE LA ILID BILINEAL</b>	
IV.1. Introducción.	57
IV.2. Estimado a la <b>ILID</b> con la función de espectro complejo mutuo ( <b>fecm</b> ).	59
IV.3. Estimado a la <b>ILID</b> con la función de intensidad mutua ( <b>fim</b> ).	64
IV.4. Estimado a la <b>ILID</b> con la Distribución de Cohen.	66
<b>V. PROCESADORES BILINEALES DISCRETOS ITERATIVOS EN RESTAURACIÓN DE IMÁGENES BILINEALES DEGRADADAS CON RUIDO ADITIVO.</b>	
V.1. Introducción.	69
V.2. Función de intensidad mutua discreta.	70
V.3. Función de espectro complejo mutuo discreto.	74
V.4. Distribución de Cohen discreta.	75
V.5. Recuperación de la fim a partir de su Distribución de Cohen discreta.	78
V.6. Procesamiento bilineal numérico de imágenes bilineales degradadas sin ruido.	79
V.7. Procesamiento bilineal numérico de imágenes bilineales degradadas con ruido.	80
V.8. Procesamiento bilineal numérico iterativo de imágenes bilineales degradadas con ruido.	81
<b>VI. RESULTADOS.</b>	
VI.1. Introducción.	88

VI.2. Obtención de resultados.	88
VI.3. Procesado bilineal mono cromático de la imagen bilineal de un punto en un sistema óptico limitado por difracción.	89
VI.4. Procesado bilineal poli cromático de la imagen bilineal poli cromática de un punto en un sistema óptico limitado por difracción.	98
VI.5. Procesado bilineal de la imagen bilineal de un punto en un sistema óptico desenfocado, casos: mono cromático y poli cromático.	105
VI.6. Procesado bilineal iterativo de la imagen bilineal de un punto de un sistema con o sin desenfoque.	110
VI.7. Procesado bilineal de la imagen desenfocada bilineal de un punto con ruido.	120
VI.8. Conclusiones.	133

#### **APÉNDICE A.**

Análisis de la función de punto extendido en intensidad (fpei) para cualquier valor del coeficiente de desenfoque.	135
--	-----

#### **APÉNDICE B.**

La función de punto extendido fraccional en intensidad para desenfoques.	140
--	-----

#### **APÉNDICE C.**

La Red Neuronal Celular para suprimir ruido aditivo en imágenes bilineales binarias.	143
--	-----

#### **APÉNDICE D.**

Transformada Coseno y de Hartley en procesado lineal y bilineal de imágenes.	148
--	-----

**APÉNDICE E.**

Procesador bilineal holográfico para obtener la **fecm**. 155

**APÉNDICE F.**

Filtro bilineal de Wiener y su versión iterativa. 160

**APÉNDICE G.**

Algunas propiedades de las funciones bilineales. 166

**APÉNDICE H.**

Representación de todos los posibles desenfoques  
de la **FTO** o **fpei** bidimensionales con la **DW**. 169

**BIBLIOGRAFÍA.**

181

## INTRODUCCIÓN.

Cuando una imagen está deteriorada espacialmente, suavizando parcialmente algunos o todos sus detalles, la pregunta que surge es: ¿podemos recuperar los detalles originales de la imagen sin conocer el objeto ni las características del sistema óptico que la produjo?. La respuesta no es sencilla, pero en algunos casos, cuando a priori se conoce la función de punto extendido en intensidad (**fpei**), que suavizo la imagen, la información puede en principio recuperarse. La restauración de la imagen degradada se puede llevar a cabo con ayuda de diferentes tipos de técnicas, las cuales pueden ser analógicas, digitales o una combinación de ambas. La posibilidad de restaurar una imagen (o una señal) ofrece mayores retos cuando al deterioro espacial de la imagen se le adiciona ruido independiente del objeto. De acuerdo al nivel del ruido en la imagen degradada y características del sistema óptico se puede o no recuperar la imagen.

Casi en cualquier procedimiento de restauración de imágenes se acepta el principio de linealidad e invariancia espacial como las bases físicas y matemáticas con las cuales se degrada y procesa una imagen. Con esta bases se garantiza buenos resultados cuando las degradaciones espaciales son relativamente pequeñas y los niveles de ruido son bajos. No sucede lo mismo cuando los valores de los coeficientes del polinomio de aberración del sistema óptico se incrementan, en este caso el número de ceros de la Función de Transferencia Óptica (**OTF**) también aumenta, de tal manera que la imagen que se restaura comienza a ser irreconocible. Adicionalmente, si al detectar o al digitalizar la imagen se genera ruido (o al procesar la imagen se adiciona ruido por el tamaño de la longitud de palabra del procesador digital) al restaurar la información de la imagen degradada, el resultado no es del todo satisfactorio. La restauración por métodos lineales de imágenes fuertemente degradadas normalmente tiene defectos secundarios generados por el tamaño finito de la palabra de memoria del procesador digital, haciendo que estos defectos sean evidentes conforme el nivel de la degradación espacial aumenta.

Por otro lado, también la restauración de imágenes variantemente degradadas es todavía un problema a resolver con procesadores lineales, ya que si la imagen no se puede separar por regiones que tienen la misma degradación así como el mismo valor numérico de ésta, la restauración no se puede llevar a cabo.

Una segunda alternativa para la restauración de imágenes degradadas, con o sin ruido, es utilizar el concepto de procesador bilineal espacialmente bi invariante. Esta alternativa es la que aquí se estudia. Los procesadores bilineales empezaron a investigarse para procesar imágenes con la función bilineal conocida como **Distribución de Wigner (DW)**. El precio a pagar por usar la **DW** es la sofisticación en los procesadores ópticos, digitales o híbridos a emplear, ya que estos procesadores se hacen más laboriosos y costosos de implementar, en comparación con los procesadores lineales. Sin embargo, esta alternativa ofrece la posibilidad de restaurar punto a punto la información y por consiguiente restaurar bilinealmente fue una posible solución al problema de las imágenes variantemente degradadas. En este trabajo se muestra que esta solución no es factible por la misma naturaleza de las funciones bilineales.

Por otro lado, el poder procesar punto a punto la información no implica que restaurar bilinealmente imágenes degradadas espacialmente sea necesariamente mejor que la restauración lineal, lo que sí se observa es que la restauración con procesadores bilineales bi invariantes ofrece mayor número de caminos o formas para analizar y visualizar tanto la imagen bilineal degradada como la ya restaurada.

El procedimiento que aquí se sigue para restaurar bilinealmente imágenes es en base a simulaciones numéricas, usando el filtro bilineal de Wiener. Esto ayuda a hacer un estudio sistemático del problema. Los algoritmos bilineales iterativos aquí propuestos asumen como hipótesis de trabajo que la imagen bilineal a restaurar tiene ruido aditivo y su primer estimado el que se obtiene en la condición no iterativa. Como ejemplo y sin menoscabo de generalidad, se restaura la imagen bilineal de un punto en luz incoherente, el cual puede o no estar fuera de foco,



con o sin ruido aditivo. Por extensión, la técnica se puede aplicar a imágenes bilineales poli cromáticas de un punto, bajo la suposición que las longitudes de onda asociadas a cada uno de los tres colores primarios son independientes.

Debido a que los ejemplos que se llevan a cabo son para imágenes desenfocadas de un punto, luego la pupila compleja del sistema óptico formador de la imagen tiene simetría circular, esta suposición hace que las simulaciones numéricas bilineales sean más rápidas que aquellas que no toman en cuenta este hecho, como se muestra en los resultados obtenidos en el apéndice D. Las simulaciones numéricas que aquí se presentan se llevan a cabo con ayuda del algoritmo de transformada coseno discreta rápida debido a que existe simetría radial tanto en la imagen como en la **FTO**.

Finalmente, para el caso de imágenes medianamente desenfocados, la restauración se hace con el algoritmo bilineal iterativo y con un algoritmo de una **Red Neuronal Celular (RNC)**, el cual normalmente se usa para restaurar imágenes binarias con ruido. Con este procedimiento se puede también restaurar imágenes cuando el valor del coeficiente de desenfoco es grande o pequeño, siempre que el estimado este cerca del mejor estimado a la (Imagen Limitada por Difracción) **ILID** con sus frecuencias altas realzadas.

La presentación de este trabajo se divide en seis capítulos y ocho apéndices, de la siguiente manera: El primer capítulo es un repaso de la teoría lineal de procesamiento de imágenes, la imagen puede o no tener ruido aditivo. En la sección final se lleva a cabo la hipótesis de trabajo de que cualquier imagen degradada con aberraciones espaciales (en el que los coeficientes del polinomio de aberración pueden tener cualquier valor) se puede considerar como la superposición de la **ILID** más una perturbación espacial de la **ILID**, que depende del valor del coeficiente de la aberración. Esta hipótesis de trabajo es útil para el caso de perturbaciones espaciales pequeñas ya que el filtro **RNC** puede eliminarlas.

La **Distribución de Cohen (DC)**, un caso particular en la teoría de los sistemas bilineales bi invariantes y simultáneamente la

de la teoría de la **DC** aplicada a procesamiento de imágenes. Por consiguiente, se parte de la **DC** para procesar bilinealmente imágenes en el espacio fase. Casos particulares de la **DC** son la **Función de Ambigüedad (FA)** y la **Distribución de Wigner (DW)**, a la vez si alguna de estas dos últimas se conocen se puede generar cualquier **DC**, una vez que se propone un "kernel". Por extensión, al resultado obtenido en la sección final de primer capítulo, se generaliza y se obtiene el resultado análogo para la **DW**.

El tercer capítulo está centrado en la teoría de Volterra de los procesos no-lineales, con esta teoría se generaliza los resultados del segundo capítulo. Se parte del proceso que representa a un sistema no lineal, del término bilineal se encuentra la **FA**, de esta última función bilineal se encuentra la **DC** y al aplicar la **Transformada de Fourier (TF)** a la **FA** se deduce la **DW**. Ya que estamos tratando con imágenes en luz incoherente y procesos bilineales se define a la función bilineal de una imagen como la **función de intensidad mutua (fim)** y a su espectro bilineal como la **función de espectro complejo mutuo (fecm)**, y se llega a mostrar como obtener todas las **DC** asociadas a la **fim** o a la **fecm**, en particular, la **FA** y la **DW**. También, se encuentran las expresiones analíticas para recuperar información lineal, desde cualquiera de los dominios bilineales. Invirtiendo el problema, se puede pasar de cualesquiera de los dominios bilineales en que se procesa la información al dominio lineal. El cuarto capítulo es sobre procesadores bilineales iterativos. Se parte de la hipótesis de que la imagen degradada con aberración de desenfoque tiene ruido aditivo y se construye los estimados de las funciones bilineales bi invariantes **fim** y **fecm** del mejor estimado a la **ILID**. Finalmente, el procedimiento iterativo se aplica a la **DC** y como casos particulares a la **DW** y a la **FA**.

El quinto capítulo trata de los procesadores bilineales digitales y se basa en los resultados del cuarto capítulo. Se bosqueja las etapas para restaurar imágenes degradadas bilinealmente con ruido aditivo. Además, se menciona como disminuir el tiempo de procesamiento digital usando otro tipo de

transformaciones rápidas transformaciones rápidas diferente a la de Fourier (coseno, Hartley o

Hadamard) o haciendo mas eficiente la forma en que se manejan los datos en los diferentes dominios bilineales.

El sexto capítulo presenta los resultados numéricos. Se restaura bilinealmente la imagen bilineal de un punto, mono cromática ó poli cromática, con desenfoque ó sin él y con ó sin ruido, usando algoritmos bilineales no- iterativos ó iterativos. Otro ejemplo, es el caso de restauración bilineal de imágenes con desenfoques de valores intermedios usando además del algoritmo bilineal iterativo el filtro **RNC**, lo cual ayuda a obtener buenos estimados. Finalmente, se concluye sobre la base de los resultados teóricos y numéricos obtenidos.

Los apéndices son complementarios al trabajo central y los tópicos abarcan los siguientes temas: (A). Análisis de la **fpei** para cualquier valor del coeficiente de desenfoque; (B). La función de punto extendido fraccional en intensidad para desenfoques; (C). La **RNC** para suprimir ruido en imágenes binarias. (D). Transformada Coseno y de Hartley en procesado lineal y bilineal de imágenes; (E). Procesador bilineal holografico para obtener la **fecm**; (F). Filtro bilineal de Wigner y su versión iterativa; (G). Algunas propiedades de las funciones bilineales en procesado de bilineal de imágenes y (H). Representación de todos los posibles desenfoques de la **FTO** o **fpei** bidimensionales con la **DW**.

## CAPÍTULO I.

# SISTEMAS LINEALES EN PROCESAMIENTO DE IMÁGENES.

### I-1. Introducción.

Linealidad e invariancia espacial son suposiciones con las cuales se puede llevar a cabo procesamiento de imágenes bidimensionales degradadas espacialmente en luz incoherente. Sin embargo, los sistemas ópticos formadores de imagen pueden ser variantes espacialmente cuando la escena es tridimensional. Si la escena es tridimensional se asume invariancia en regiones que se encuentren en un mismo plano y de esta manera se puede restaurar óptica o digitalmente toda una imagen. Por consiguiente, en el caso de una imagen variantemente desenfocada ésta se puede restaurar por planos en los cuales el desenfoco es el mismo. La restauración de imágenes bidimensionales, de escenas tridimensionales, normalmente se hace para regiones rectangulares, pero en la práctica las fronteras de las regiones a restaurar no son rectangulares y tienen información de al menos de dos planos con diferente desenfocó lo cual hace que restaurar una imagen variantemente desenfocada aún sea un problema a resolver, a menos que la imagen se separe en regiones con la misma degradación (como se mostrará, posteriormente).

En restauración de imágenes el problema más general supone que el sistema óptico que forma la imagen es no-lineal y espacialmente variante. No existe aún bibliografía, en forma de libros, que mencionen restauraciones de imágenes con procesadores no lineales. Sin embargo, un estudio de cómo los sistemas bilineales bi-invariantes restauran la información de una imagen degradada linealmente puede ayudar a un mejor entendimiento de los sistemas no lineales.

En las siguientes secciones de este capítulo se desea introducir la notación que se seguirá a lo largo de todo el trabajo y al mismo tiempo se resume los conceptos más utilizados en procesamiento lineal óptico y/o digital de imágenes en luz

incoherente. En la última sección de este capítulo, se propone como representar una imagen degradada espacialmente en términos de su Imagen **L**imitada por **D**ifracción (**ILID**) más una perturbación espacial, que es la suma de derivadas de diferente orden (el orden de las derivadas depende del tipo y cantidad de aberración) aplicadas a la **ILID**, este resultado se usa en el capítulo II, con el fin de expresar la **D**istribución de **W**igner (**DW**) de una imagen degradada en términos de la **DW** de su **ILID** más una perturbación.

## I-2. Sistemas lineales.

Los sistemas ópticos lineales formadores de imagen de objetos emitiendo en luz incoherente, relacionan el objeto ( $f(x', y')$ ); la imagen, ( $g(x, y)$ ); la función de punto extendido en intensidad (**fpei**),  $h(x, y; x', y')$  y el ruido,  $n(x, y)$ , por medio de la siguiente relación:

$$g_n(x, y) = \iint h(x, y; x', y') f(x', y') dx' dy' + n(x, y), \quad (1.1)$$

las integrales se llevan a cabo a lo largo de todo el espacio y a menos que se especifique otra cosa esta notación se mantendrá en todo este trabajo. Las funciones del objeto, la imagen, la **fpei** y el ruido son reales no negativas y con soporte finito. Una forma más compacta de escribir la Ec. (1.1) es:

$$g_n(x, y) = g(x, y) + n(x, y), \quad (1.2)$$

donde,

$$g(x, y) = \iint h(x, y; x', y') f(x', y') dx' dy'. \quad (1.3)$$

En el caso de que **fpei** sea espacialmente invariante (**fpei-ei**), la imagen es la convolución del objeto con la **fpei-ei** y por lo tanto la Ec. (1.1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$g_n(x, y) = h(x, y) *_{x,y} f(x, y) + n(x, y), \quad (1.4)$$

donde el símbolo  $*$ <sub>x,y</sub> denota la operación de convolución con respecto a las variables espaciales  $x, y$ .

Por otro lado, se conoce que el modulo al cuadrado de la Transformada de Fourier Inversa (TFI) de la función de pupila compleja ( $\Pi(u, v)$ ) del sistema óptico<sup>17,34</sup> es la **fpei-ei**, esto es:

$$h(x, y) = \left| \iint \Pi(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \right|^2, \quad (1.5)$$

donde  $j = \sqrt{-1}$  y las variables  $u, v$  son las frecuencias espaciales.

Para un sistema óptico con simetría radial se tiene que la función de pupila compleja se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Pi(u, v) = \begin{cases} P(u, v) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} p(u, v)} & a \leq (u^2 + v^2), \\ 0 & a > (u^2 + v^2) \end{cases}, \quad (1.6)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda que incide sobre la pupila compleja,  $a$  es el radio de la pupila real ( $P(u, v)$ ) y  $p(u, v)$  es el polinomio de aberraciones. Cuando los coeficientes del polinomio de aberración son cero y el radio de la pupila real es finito, se dice que el sistema óptico está limitado por difracción o que la **fpei-ei** está limitada por difracción y que la imagen obtenida es la **ILID**. Si el polinomio de aberraciones es cero ( $p(u, v) = 0$ ) y el radio de pupila real tiende a ser muy grande ( $a \rightarrow \infty$ ) la **fpei-ei** es una función impulso; entonces, se dice que el sistema óptico es ideal (ya que  $h(x, y) *_{x,y} f(x, y) = f(x, y)$ ). Si el sistema es ideal éste capta todas las frecuencias espaciales del objeto y por consiguiente la imagen y el objeto son los mismos. Otro caso, en el que se puede observar todos los detalles del objeto es cuando el sistema óptico está limitado por difracción y el ancho de banda del espectro del objeto es menor al ancho de banda asociado al sistema óptico además que la amplitud de las frecuencias del objeto sea menor que las del sistema (este caso no implica que el sistema óptico sea ideal ya que  $h(x, y) \neq \delta(x, y)$ ). Sin embargo, en la mayoría de los casos, el sistema óptico tiene su ancho de banda menor que el ancho de



banda del espectro del objeto de tal forma que la imagen detectada adolece de un gran parte de los detalles del objeto.

En esta sección se considera que el sistema óptico es lineal y con una **fpei-ei**. Además, sí el sistema óptico no tiene aberraciones la **ILID** es la mejor representación del objeto; por consiguiente, en adelante la función  $f(x, y)$  denotará la **ILID**.

Otra forma de expresar la Ec. (1.1) es usar notación vectorial<sup>49</sup>. Sí se ordenan lexicográficamente<sup>1</sup> las muestras de una imagen de  $M \times M$  muestras, la Ec. (1.4) se puede escribir como:

$$\vec{g}(l, m) = \vec{h}(l, m; l', m') \vec{f}(l, m) + \vec{n}(l, m), \quad (1.7)$$

donde los vectores  $\vec{g}$ ,  $\vec{f}$  y  $\vec{n}$  y la matriz  $\vec{h}$  están ordenados de forma lexicográfica. Las dimensiones de los vectores son de  $M^2$  elementos y la dimensión de la matriz es de  $M^4$  elementos;  $l, m, l', m'$  son números enteros positivos. Si no existe ruido aditivo, encontrar el vector  $\vec{f}$  en términos del vector  $\vec{g}$  y la matriz  $[\vec{h}]$  se reduce a encontrar la matriz inversa  $[\vec{h}]^{-1}$ . En este caso, de la Ec. (1.7), tenemos la siguiente relación:

$$\vec{f} = [\vec{h}]^{-1} \vec{g}, \quad (1.8)$$

pero aún cuando se conozca la matriz  $[\vec{h}]$  no necesariamente existe su inversa, por lo cual se recurre a un proceso de pseudo inversión. Este proceso garantiza una posible solución como puede demostrarse.

Bajo la condición de que el error cuadrático medio sea un mínimo se obtiene la solución a la relación dada por la Ec. (1.8), conocida como filtro de Wiener<sup>54</sup> ( $[\vec{\omega}]$ ) en el dominio espacial. Por consiguiente, la Ec. (1.8) toma la siguiente forma:

$$\vec{f} = [\vec{\omega}] \vec{g}, \quad (1.9)$$

donde

$$[\vec{\omega}] = \frac{[\vec{h}]^T}{[\vec{h}]^T [\vec{h}] + \varepsilon [\vec{I}]} \quad (1.10)$$

y  $[\vec{h}]^T$  es la matriz transpuesta de  $[\vec{h}]$ ,  $\varepsilon$  es una constante positiva y  $[\vec{I}]$  es la matriz unitaria con la misma dimensión que  $[\vec{h}]$ .

Si representamos con letras mayúsculas a las funciones definidas en el dominio de las frecuencias espaciales, esto es, a la Transformada de Fourier Directa (TFD) de las funciones definidas en el dominio de las variables espaciales (representadas con letras minúsculas), entonces aplicando la TFD a la Ec. (1.4), obtenemos:

$$G_N(u, v) = G(u, v) + N(u, v), \quad (1.11)$$

con

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v), \quad (1.12)$$

donde  $H(u, v)$  es la auto correlación de la pupila compleja, que es la Función de Transferencia Óptica (FTO). Las funciones  $F(u, v)$  y  $G(u, v)$  son los espectros en amplitud compleja de la ILID y de la imagen degradada espacialmente, respectivamente.

En el caso de que  $F(u, v)$  sea el espectro de un objeto puntual sus frecuencias espaciales altas son mayores a las frecuencias de corte de  $H(u, v)$  y por lo tanto la FTO actúa como un filtro pasa bajas amortiguando las frecuencias altas. Si el sistema óptico tiene simetría radial y aberración de desenfoque, se puede demostrar que la FTO es una función continua, real, con simetría radial y con ceros reales (el número de ceros aumenta al incrementarse la cantidad de desenfoque).

Cuando la información se filtra en el dominio de las frecuencias espaciales, el filtro de Wiener tiene la siguiente forma:

$$\Omega(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + e}, \quad (1.13)$$

donde, en este caso, el símbolo \* denota el complejo conjugado de la FTO y  $e$  es la relación del espectro de la señal al espectro del ruido. Si  $e \rightarrow 0$ , el filtro de Wiener se acerca al filtro inverso, pero si  $e \approx |H(u, v)|^2$ , entonces el filtro de Wiener se asemeja a un filtro pasa bajas. Cuando  $e > |H(u, v)|^2$ , el efecto del filtro de Wiener es casi nulo

de tal forma que los valores de la imagen no solo no se restauran sino tienden a una constante.

En restauración de imágenes una hipótesis adicional de trabajo es que la frecuencia de corte del detector es mayor que la frecuencia de corte de la FTO. Otra hipótesis mas, es que al llevar a cabo el muestreo a la imagen degradada la cuantificación de los niveles de gris puede introducir ruido.

En el caso en que la cantidad de desenfoque sea grande, el nivel de ruido juega un papel muy importante en la restauración de la imagen degradada<sup>11</sup> lo cual puede constatarse al usar algoritmos iterativos, como lo veremos en los procesadores bi lineales digitales.

### I-3. Función de punto extendido variantemente degradada.

Supongamos que tenemos una escena variantemente degradada, como puede ser el caso en que diferentes planos de una escena tridimensional (3-D) aparecen con diferentes desenfoques, y deseamos restaurarla digitalmente. Sea  $\vec{g}(l, m)$  una escena 3-D degradada, compuesta de dos imágenes planas desenfocadas,  $\vec{g}_1(x, y) = \vec{h}_1(l, m)\vec{f}_1(l, m)$  y  $\vec{g}_2(x, y) = \vec{h}_2(l, m)\vec{f}_2(l, m)$ , por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{g}(l, m) = \vec{h}_1(l, m; l', m')\vec{f}_1(l, m) + \vec{h}_2(l, m; l', m')\vec{f}_2(l, m), \quad (1.14)$$

o en forma abreviada:

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \end{bmatrix} \vec{f}_1 + \begin{bmatrix} \vec{h}_2 \end{bmatrix} \vec{f}_2, \quad (1.15)$$

de la Ecs. (1.8) y (1.15), tenemos que la imagen restaurada es igual a:

$$\vec{f} = [\vec{\omega}_1] \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \end{bmatrix} \vec{f}_1 + [\vec{\omega}_2] \begin{bmatrix} \vec{h}_2 \end{bmatrix} \vec{f}_2, \quad (1.16)$$

donde  $[\vec{\omega}_1] = \frac{\begin{bmatrix} \vec{h}_1 \end{bmatrix}^T}{\begin{bmatrix} \vec{h}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \end{bmatrix} + e_1}$  y  $[\vec{\omega}_2] = \frac{\begin{bmatrix} \vec{h}_2 \end{bmatrix}^T}{\begin{bmatrix} \vec{h}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_2 \end{bmatrix} + e_2}$ . Para restaurar la imagen variantemente degradada, a cada región degradada hay que construir un filtro de Wiener (en el dominio espacial) que restaure

exclusivamente dicha región, lo cual implica separar físicamente las regiones a restaurar. Como consecuencia, tenemos que no podemos restaurar una imagen variantemente degradada con un solo filtro o una combinación de filtros aplicados simultáneamente a  $\bar{g}(l, m)$ .

#### I-4. Las aberraciones del sistema óptico como una perturbación espacial a la ILID.

Las aberraciones de un sistema óptico degradan espacialmente la información de una imagen obtenida con un sistema libre de aberraciones. Como ya se mencionó, un buen estimado al objeto, a partir de la imagen espacialmente degradada, es la ILID, luego la pregunta que surge es: ¿se pueden considerar las aberraciones como una perturbación espacial que se adiciona a la ILID?. En esta sección mostraremos que la imagen degradada espacialmente por aberraciones se puede considerar como la ILID más una perturbación espacial adicional.

De la Ec. (1.4), si no existe ruido, la imagen degradada tiene la siguiente expresión:

$$g(x, y) = f(x, y) *_{x,y} \left| \iint \Pi(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv \right|^2, \quad (1.17)$$

si el exponencial complejo de la pupila se desarrolla en series de potencias, esto es, si la pupila compleja se puede escribir como:

$$\Pi(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[j2\pi p(u, v)]^m}{\lambda^m m!}, \quad (1.18)$$

luego, sustituyendo la Ec. (1.18) en la Ec. (1.17), se obtiene que:

$$g(x, y) = f(x, y) *_{x,y} \left| \delta(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[j2\pi]^m}{\lambda^m m!} \iint p^m(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv \right|^2, \quad (1.19)$$

y en el caso en que  $m = 1$ , de la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) *_{x,y} \left| \delta(x, y) + \frac{j2\pi}{\lambda} \iint p(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv \right|^2 \\ &= f(x, y) + \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} f(x, y) *_{x,y} \left| \iint p(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv \right|^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Como el polinomio de aberraciones se puede escribir de la siguiente forma<sup>47</sup>:

$$p(u, v) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^l c_{ln} u^n v^{l-n}, \quad (1.21)$$

por consiguiente:

$$g(x, y) = f(x, y) + \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} f(x, y) * \left| \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^l c_{ln} \iint u^n v^{l-n} e^{j2\pi(ux+vy)} dudv \right|^2, \quad (1.22)$$

y dado que  $\iint u^n v^{l-n} e^{j2\pi(ux+vy)} dudv = \frac{1}{(j2\pi)^l} \delta_x^n \delta_y^{l-n}$  (donde  $\delta_x^n = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x, y)$  y

$\delta_y^{l-n} = \frac{\partial^{l-n}}{\partial y^{l-n}} \delta(x, y)$ ), entonces:

$$g(x, y) = f(x, y) + \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} f(x, y) * \left| \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^l \frac{c_{ln}}{(j2\pi)^l} \delta_x^n \delta_y^{l-n} \right|^2, \quad (1.23)$$

debido a que  $\left| \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^l \frac{1}{(j2\pi)^l} \delta_x^n \delta_y^{l-n} \right|^2$  es real no-negativo y se puede escribir como una suma de derivadas de diferente orden con respecto a las variables  $x, y$  (dependiendo del valor de  $L$ ) de la función impulso; por consiguiente,  $g(x, y)$  es igual a la **ILID** más una suma de derivadas (en  $x, y$ ) de diferente orden aplicadas a la **ILID** (ya que la convolución de  $f(x, y)$  con la  $n$ 'ésima derivada de una función impulso es igual a la derivada  $n$ 'ésima de la función  $f(x, y)$ <sup>18</sup>).

En general, de la Ec. (1.18), se observa que  $\iint p^m(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv$  siempre se puede expresar como una sumatoria que tiene términos  $\delta_x^{m'}$ 's y  $\delta_y^{l'}$ 's; luego, la imagen degradada espacialmente es igual a la **ILID** más un termino que consiste de la suma de derivadas parciales de diferente orden en las variables  $x, y$  aplicadas a la **ILID**. Por lo tanto la Ec. (1.22) se puede escribir de la siguiente forma:

$$g(x, y) = f(x, y) + \rho(x, y), \quad (1.24)$$

donde

$$\rho(x, y) = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} f(x, y) * \left| \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^l \frac{c_{ln}}{(j2\pi)^l} \delta_x^n \delta_y^{l-n} \right|^2, \quad (1.25)$$

es el factor de perturbación espacial.

En este trabajo, por razones de simetría radial y por ser un problema de interés en procesamiento de imágenes, tanto óptica como digitalmente, trataremos con la aberración de desenfoque. En el apéndice **A** se lleva a cabo un breve análisis del comportamiento de la **fpei-ei** cuando el sistema óptico tiene desenfoque y en el apéndice **B** se relaciona la transformada de Fourier fraccional de orden  $\alpha$  con la **fpei ei** desenfocada dando lugar a una **fpe** fraccional en intensidad (**fpefi**). Para el caso particular de un desenfoque pequeño se tiene que:

$$p(u, v) = 1 + j \frac{2\pi w_{20}}{\lambda} (u^2 + v^2), \quad (1.26)$$

donde  $w_{20}$  es la cantidad de desenfoque, medido en longitudes de onda, y  $\frac{2\pi w_{20}}{\lambda} (u^2 + v^2)$  debe ser menor de un radian. Por consiguiente de la Ec. (1.16) tenemos que:

$$g(x, y) = f(x, y) + \left(\frac{w_{20}}{2\pi\lambda}\right)^2 (f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2, \quad (1.27)$$

con  $f_x^2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$  y  $f_y^2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$ . Por consiguiente, de la Ec. (1.27), el factor de perturbación es:

$$\rho(x, y) = \left(\frac{w_{20}}{2\pi\lambda}\right)^2 (f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2. \quad (1.28)$$

Sí  $w_{20} < 0.25\lambda$ , se tiene que  $\rho(x, y) < \left(\frac{1}{4\pi}\right)(f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2$ .

El problema a resolver es eliminar el factor de perturbación sin usar el filtro de Wiener, a partir de que se tiene una imagen



ligeramente desenfocada. Como veremos en la sección de filtro reductor de ruido, del capítulo V y en el apéndice C, este problema se puede resolver, para imágenes (o espectros de la imagen) binarias, aplicando a la imagen desenfocada (o a su espectro), una **Red Neuronal Celular**<sup>40</sup> (**RNC**) o filtro **RNC**, como se hace en el capítulo VI.

## CAPITULO II.

# DISTRIBUCIONES CONJUNTAS EN PROCESADO DE IMÁGENES.

### II-1. Introducción.

Los funciones bilineales tienen como uno de sus casos especiales las distribuciones conjuntas. La teoría de las distribuciones conjuntas es un área de investigación que ofrece alternativas interesantes en la interpretación, modificación o restauración de una imagen. El dominio de las distribuciones conjuntas es el espacio fase, donde coexisten simultáneamente la(s) variable(s) espacial(es) y la(s) variable(s) de frecuencia(s) espacial(es). Las distribuciones conjuntas tienen como una de sus propiedades que su proyección sobre los ejes de coordenadas (espacial o de frecuencias espaciales) es la energía asociada a la imagen o al espectro de la imagen, respectivamente.

Las distribuciones conjuntas despliegan toda la información del espectro espacial asociada a cada punto de la imagen y viceversa; esto es, la información espacial de la imagen asociada a cada frecuencia de su espectro. Esto significa que una imagen se puede modificar punto a punto filtrando el espectro asociado a dicho punto. También, el espectro de la imagen se puede modificar frecuencia a frecuencia alterando la distribución espacial asociada a cada una de las frecuencias. Sin embargo, una interpretación precipitada de cómo alterar la información bilineal de una imagen puede llevar a resultados no esperados.

La modificación bilineal de información con distribuciones conjuntas es una posible alternativa para procesar información punto a punto (o frecuencia a frecuencia) que puede permitir formas alternativas de modificar información que complementen la información obtenida con los métodos lineales. Sin embargo, como veremos en el caso de restauración bilineal digital de imágenes degradadas esta forma alternativa no necesariamente redundante en algún beneficio computacional, pero si puede ser de ayuda para analizar o complementar resultados obtenidos linealmente.

La gran mayoría de los trabajos de investigación de procesado bilineal óptico o digital de información en el espacio fase asumen que el usar procesadores bilineales tiene como consecuencia la existencia de nuevas formas de obtener información que con los procesadores lineales no tienen, hasta el momento esta situación no es clara, en el mejor de los casos con los procesadores bilineales se han hecho generalizaciones e interpretaciones de resultados que con los procesadores lineales ya se han obtenido.

Dentro de las distribuciones conjuntas más utilizadas en procesamiento de información óptico y digital, posiblemente la **Distribución de Wigner (DW)** es la distribución más conocida. Entre algunas de sus propiedades la **DW** debe ser una función real no negativa; por consiguiente, la **DW** no debe presentar problema alguno en la implementación física de filtros. Sin embargo, la **DW** no necesariamente es positiva haciendo que la implementación de los filtros ópticos no sea fácil. Por otro lado, los filtros en el espacio fase para imágenes bilineales cambian de tamaño y forma, punto a punto, o frecuencia a frecuencia.

Menos común, para restaurar ópticamente imágenes degradadas, es la Función de Ambigüedad (**FA**) quizá por que esta distribución tiene la desventaja que puede ser una función compleja. Sin embargo, al menos digitalmente la **FA** es potencialmente igual de útil que la **DW**. Las funciones **DW** y **FA** son casos particulares de una distribución más general: la distribución de Cohen (**DC**). En principio la **DC** también puede implementarse ópticamente, para un "kernel" dado y puede generar un número infinito de distribuciones conjuntas<sup>24,26</sup>. Finalmente, al igual que la **DW** y la **FA**, la **DC** es un posible caso de las funciones bilineales, como veremos en el siguiente capítulo.

En este capítulo se lleva a cabo un breve resumen de la teoría de la **DC** (en base a los trabajos de Cohen que trata con señales de una sola variable en el dominio temporal) poniendo énfasis en la notación espacial y en la recuperación de la imagen ya procesada. Como una contribución, en la última sección de este capítulo se deducen la **DW** de una imagen con degradación espacial en términos de la **DW** asociada a la imagen limitada por difracción (**ILID**), y la adición de una perturbación, de manera similar a la deducción que se hizo en la última sección del capítulo anterior. Por extensión (aún cuando no se demuestra en este trabajo), los resultados pueden generalizarse a la **DC**.

## II-2. Distribución de Cohen.

En el análisis clásico del espectro espacial (en amplitud compleja o en intensidad) de una imagen, el valor de las frecuencias espaciales del espectro no indican cuantitativamente que tanto contribuyo un punto o una región de esta imagen a la amplitud compleja o intensidad de cada una de las frecuencias espaciales de este espectro; en este sentido cada frecuencia del espectro espacial tiene información de toda la imagen y viceversa. Un caso típico es el de una imagen variantemente degradada por desenfoque (**fpei espacialmente variante, fpei-ev**); existen diferentes desenfoques en diferentes regiones de la imagen. Al obtener el espectro espacial de una imagen variantemente desenfocada no es posible cuantificar como cada desenfoque contribuye a los valores de las frecuencias del espectro espacial observado y por consiguiente procesar globalmente la información espectral difícilmente puede restaurar dicha imagen. En analogía con señales temporales, el cambio del contenido espectral de la voz humana (aún cuando el contenido del mensaje sea el mismo) no permite conocer la contribución de cada una de las componentes de su espectro a cada uno de los componentes de la voz.

En señales temporales Gabor<sup>30</sup>, Ville<sup>66</sup> y Page<sup>51</sup> presentaron una función conjunta (en el dominio tiempo-frecuencia temporal) que describe simultáneamente tanto la intensidad de la señal como la intensidad de su espectro. Esta función conjunta, puede conocer y manipular que cantidad de la energía total de la señal se encuentra asociada a una sola frecuencia en un determinado rango de tiempo (o equivalentemente, para un intervalo de tiempo, como es la contribución a la energía total de un determinado ancho de banda asociado a la evolución del espectro temporal de la función). El comportamiento de esta función conjunta, según los autores mencionados, tiene que cumplir las mismas condiciones de cualquier función de densidad en una o más variables.

Posteriormente, Cohen<sup>24</sup> encuentra una formulación generalizada, que tiene como casos particulares las representaciones de Gabor, Ville, Page, la **DW**, la **FA** y otras funciones de densidad conjunta. Como lo veremos en este capítulo, la relación encontrada por Cohen permite en principio la posibilidad teórica de procesar bilinealmente imágenes con una **fpei-ei**.

Sin embargo, como veremos el procesamiento bilineal de una imagen espacialmente variante no es factible llevarlo a la practica al menos que la imagen se separe físicamente, en regiones con la misma degradación, por que como ya se menciona los espectros asociados a las diferentes degradaciones espaciales están mezclados y el espectro asociado a un punto de la imagen bilineal degradada tiene contribuciones de los diferentes valores de la degradación.

Para ser consecuentes con la notación del capítulo anterior y dado que en nuestro caso estamos interesados en procesar información espacial bidimensional, cambiamos las variables tiempo y frecuencia temporal, de la formulación original de Cohen, por las variables espaciales  $(x, y)$  y las variables de frecuencias espaciales  $(u, v)$ .

Sea  $f(x,y)$  la imagen limitada por difracción (**ILID**) en luz incoherente, la distribución de Cohen de la **ILID**  $(C_f(X,Y;U,V))$  y su función de ambigüedad  $A_f(u',v';x',y')$  están relacionadas de la siguiente forma:

$$C_f(X,Y;U,V) = \iiint A_f(u',v';x',y') \phi(u',v';x',y') e^{-j2\pi(-u'X-v'Y+Ux'+Vy')} du' dv' dx' dy', \quad (2.1)$$

donde la función  $\phi(u',v';x',y')$  es el "kernel"<sup>25</sup>, que pesa (o filtra) información de la **FA** (tanto en las coordenadas espaciales  $(x',y')$  como en las coordenadas de frecuencias espaciales  $(u',v')$ ). De acuerdo con Cohen, la función "kernel" debe cumplir las siguientes tres condiciones:  $\phi(u',v';0,0) = 1$ ,  $\phi(0,0;x',y') = \delta(x',y')$  y  $\phi(0,0;0,0) = \delta(0,0)$ . Sí además se cumple que:  $\phi(u',v';x',y') = \phi^*(-u',-v';-x',-y')$ , entonces el "Kernel" es una función real.

Por otro lado, la definición de **FA** es:

$$A_f(u',v';x',y') = \iint r_f(x,y;x',y') e^{-j2\pi(u'x'+v'y')} dx dy, \quad (2.2)$$

donde la función bilineal en el dominio espacial  $r_f(x,y;x',y')$  es igual a:

$$r_f(x,y;x',y') = f(x+x'/2, y+y'/2) f^*(x-x'/2, y-y'/2), \quad (2.3)$$

el símbolo (\*), en la parte superior derecha de la función  $f(x,y)$ , denota la operación de conjugación. La función bilineal espacial dada por la Ec. (2.3) es la multiplicación de la función  $f(x,y)$ , desplazada en

las coordenadas  $x',y'$  hacia la izquierda y hacia abajo, por su compleja conjugada, desplazada hacia la derecha y hacia arriba.

Como se observa de la Ec. (2.1), la **DC** es la aplicación sucesiva de la Transformada de Fourier (TF) Directa (TFD) bi-dimensional (2-D) en las variables  $x',y'$  con la Transformada de Fourier Inversa (TFI) 2-D en las variables  $u',v'$ , del producto de la FA por el "Kernel". Esto es, la **DC** es una convolución entre la TF 4-D de la FA y la TF 4-D de la función "kernel".

Dado que las variables en letras mayúsculas  $X,Y,U,V$  son mudas, cada vez que así se requiera estas variables podrán sustituirse por las variables en letras minúsculas  $x,y,u,v$ . De esta forma, se entiende que en cualquier parte de este trabajo podemos escribir que  $C_f(X,Y;U,V) = C_f(x,y;u,v)$ , siempre y cuando no exista indeterminación en los desarrollos o sustituciones que se estén llevando a cabo.

La **DC**, según Cohen, debe cumplir con las siguientes condiciones:

a). Para cada punto la suma de las contribuciones de todas las frecuencias asociadas a la **DC**, es la energía de la imagen, esto es:

$$\iint C_f(x,y;u,v) du dv = |f(x,y)|^2, \quad (2.4)$$

lo cual implica que la distribución marginal o proyección de la **DC** sobre el plano de las frecuencias espaciales, es la energía de la función  $f(x,y)$ .

b). En cada frecuencia, la suma de todas las contribuciones espaciales de la **DC** es la energía del espectro de la imagen, esto es:

$$\iint C_f(x,y;u,v) dx dy = |F(u,v)|^2, \quad (2.5)$$

indicando que la proyección de la **DC** sobre el plano de las variables espaciales es el espectro en intensidad de la imagen, y finalmente: c). la energía total asociada a la **DC** es la suma de las contribuciones de



todas las frecuencias espaciales y de todos los valores en el dominio espacial; esto es:

$$\text{Energía total} = \iiint C_f(x, y; u, v) dx dy du dv . \quad (2.6)$$

La energía total está normalizada y por lo tanto se cumplen simultáneamente las siguientes dos relaciones:

$$\iint |f(x, y)|^2 dx dy = 1, \quad \iint |F(u, v)|^2 du dv = 1 . \quad (2.7)$$

Las relaciones dadas por la Ec. (2.7) normalizan la energía tanto en el dominio espacial como en el dominio de las frecuencias espaciales.

Las Ecs. (2.4) a (2.7) permiten apoyar todos los resultados aquí expuestos sobre una base física sólida los cuales se complementarían con una teoría matemática, basada en la ecuación de Volterra para procesos no-lineales, como se muestra en el siguiente capítulo.

Otra propiedad de la **DC** es que  $C_F(u, v; x, y) = C_f(x, y; u, v)$ . La demostración es fácil bajo el siguiente argumento. Si  $R_F(u, v; u', v')$  es la **TFD 4-D** de  $r_f(x, y; x', y')$  en las variables  $x, y, x', y'$ , esto es:

$$R_F(u, v; u', v') = \iiint r_f(x, y; x', y') e^{-j2\pi(ux+vy+u'x'+v'y')} dx dy dx' dy' , \quad (2.8)$$

donde  $F(u, v)$  es la **TFD 2-D** de  $f(x, y)$ , entonces de las Ecs. (2.2) y (2.8), se puede demostrar que  $A_F(x', y'; u', v') = A_f(u', v'; x', y')$  y por consiguiente se cumple, para un mismo "kernel", que:

$$C_F(u, v; x, y) = C_f(x, y; u, v) . \quad (2.9)$$

La función bilineal en el dominio de las frecuencias,  $R_F(u, v; u', v')$ , además de cumplir con la Ec. (2.8), también, por definición, cumple con la siguiente relación:

$$R_F(u, v; u', v') = F(u + u'/2, v + v'/2) F^*(u - u'/2, v - v'/2) . \quad (2.10)$$

En analogía a la función bilineal  $r_f(x, y; x', y')$ , la función  $R_F(u, v; u', v')$  es el producto de  $F(u, v)$  por su complejo conjugado girado

$180^\circ$  alrededor del origen. Este producto está separado por la cantidad  $u, v$ . Conviene señalar que dada una función  $f(x, y)$ , las funciones bilineales  $r_f(x, y; x', y')$  y  $R_F(x, y; u, v)$  son únicas.

### II-3. Distribución de Wigner.

En 1932, E. Wigner<sup>69</sup> encontró en Mecánica Cuántica Estadística la función bilineal que actualmente se conoce como la **DW**. Posteriormente, Ville<sup>66</sup>, Moyal<sup>48</sup> y otros más, encontraron otras funciones bilineales con las mismas propiedades que la de Wigner. Sin embargo, la finalidad de Ville y Moyal fue entender el comportamiento de espectros que varían con el tiempo (en el espacio fase) mientras se conserva la energía; en tanto, la intención de Wigner fue encontrar una relación que acota el comportamiento de la variable de posición con la de momento lineal de una partícula, usando mecánica estadística cuántica. Gran parte de las propiedades de la **DW** (analógica y discreta) se pueden encontrar en los trabajos Claasen y Mecklenbrauker<sup>17-19</sup>. Otros investigadores, muestran aplicaciones de la **DW** en óptica lineal<sup>5,8,20,49,62</sup>. También, la **DW** se puede desplegar en tiempo real, por medios acústico ópticos<sup>2</sup>.

En análisis y procesamiento de imágenes la **DW** se ha intentado utilizar, con algunas limitaciones, para restaurar imágenes borrosas (degradadas numéricamente con funciones Gaussianas) de objetos que emiten en luz incoherente, en la extracción de detalles, en la clasificación de imágenes y en discriminación de textura<sup>3,4,15,27-29,31-33</sup>. En el caso particular de la **DW**, la manipulación de información con procedimientos analógicos (ópticos), digitales o híbridos ya ha sido reportada en imágenes de una o dos dimensiones<sup>32,33</sup>. Sin embargo, los resultados son un primer intento de restaurar imágenes variantemente degradadas y por lo tanto son parciales, el principal obstáculo es usar filtros lineales cuando la información a procesar es bilineal.

Si  $f(x, y)$  es la **ILID** mono cromática de un objeto que emite en luz incoherente, la **DW** asociada a  $f(x, y)$  es:

$$W_f(x, y; u, v) = \iint r_f(x, y; x', y') e^{-j2\pi(ux' + vy')} dx' dy'. \quad (2.11)$$

Como la función bilineal  $r_f(x, y; x', y')$  tiene una parte par en las coordenadas  $x', y'$ , entonces  $W_f(x, y; u, v)$  es una función

real y par (lo cual puede demostrarse de la Ec. (2.11)) en las variables  $u, v$ . También, de la Ec. (2.9), se puede mostrar que la **DW** cumple la siguiente relación:

$$W_f(x, y; u, v) = W_F(u, v; x, y), \quad (2.12)$$

donde

$$W_F(u, v; x, y) = \iint R_F(u, v; u', v') e^{j2\pi(u'x + v'y)} du' dv'. \quad (2.13)$$

De las Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3) se observa que la **DW** está relacionada con la **DC** de la siguiente forma:

$$C_f(X, Y; U, V) = W_f(X, Y; U, V) \underset{x, y, u, v}{*} \Phi(X, Y; U, V), \quad (2.14)$$

( $\Phi(X, Y; U, V)$  es igual a la TF 4-D de  $\phi(u', v'; x', y')$ ) o equivalentemente,

$$C_f(x, y; u, v) = W_f(x, y; u, v) \underset{x, y, u, v}{*} \Phi(x, y; u, v). \quad (2.15)$$

De la Ec. (2.15), sí  $\Phi(x, y; u, v) = W_s(x, y; u, v)$  (donde la función  $W_s(x, y; u, v)$  se puede interpretar como la **DW** asociada a la función impulso), entonces la **DC** coincide con la **DW**.

De las Ecs. (2.9) y (2.12), se observa que si  $\Phi(x, y; u, v) = \iiint \phi(u', v'; x', y') e^{-j2\pi(u'x + v'y - u'x - v'y)} du' dv' dx' dy'$ , luego se tiene que:

$$C_F(u, v; x, y) = W_F(u, v; x, y) \phi(u, v; x, y), \quad (2.16)$$

lo cual implica que sí  $\phi(u, v; x, y) = 1$ , la Ec. (2.9) se tiene que cumplir.

En la Fig. (2.1), se muestra un diagrama de bloques para obtener la **DC** (en particular la **WC**), dada una función  $f(x, y)$  o su espectro  $F(u, v)$ . De la misma figura se muestra el camino de resolver el problema inverso (esto es, obtener  $f(x, y)$  ó  $F(u, v)$  a partir de la **DC** (o **DW**)), el cual es soluble (analítica y numéricamente) hasta una constante, que en general es compleja. Sí  $f(x, y)$  se obtiene a partir de su función bilineal asociada  $r_f(x, y; x', y')$  y esta función bilineal es real no negativa, entonces la constante es real no negativa. Si  $f(x, y)$

se obtiene a partir de la función bilineal  $R_f(u, v; u', v')$ , calculando  $R_f(u, v; 0, 0)$ , la constante puede ser compleja, pero necesariamente  $f(x, y)$  tiene que ser real no negativa. Luego, la  $f(x, y)$  tiene una solución única por cualquiera de las funciones bilineales que se obtenga.

En la Fig. (2.1), el símbolo  $\circ \text{---} \bullet$  significa aplicar la **TFD** en las variables que se señalan. En la dirección opuesta,  $\bullet \text{---} \circ$  significa aplicar la **TFI**, en las variables conjugadas a las mostradas en el diagrama. En el caso de que el "kernel" sea igual a la unidad la **DW** y la **FA** están relacionadas por una **TFD** 4-D, la misma condición es válida para **DC** y la **FA**. El problema inverso, (obtener  $f(x, y)$  conocida la **DC**) tiene solución, cuando se conoce explícitamente el "Kernel", vía la obtención de  $R_f(u, v; u', v')$ ; en este caso, como ya se menciona, el resultado está indeterminado hasta por una constante compleja. Otra forma de resolver el problema inverso es aplicar la **TFI** 4-D a la función  $R_f(u, v; u', v')$  y obtener la función bilineal  $r_f(x, y; x', y')$  la cual debe ser real no negativa, por consiguiente  $f(x, y)$  también debe de ser una función real no-negativa. Existen otras formas de obtener la solución al problema inverso, para eso basta con observar el diagrama de la Fig. (2.1).

Del primer capítulo, la imagen degradada espacialmente,  $g(x, y)$ , en ausencia de ruido aditivo es igual a la convolución de la **ILID** con la **fpei-ei** ( $h(x, y)$ ). Lo anterior implica que la **DW** de la imagen degradada se pueda escribir en términos de la **DW** asociada a la **ILID** en convolución con la **DW** de la **fpei-ei**, respectivamente; esto es,  $W_g(x, y; u, v) = W_f(x, y; u, v) *_{x,y} W_h(x, y; u, v)$  o de forma abreviada (eliminando variables):

$$W_g = W_f *_{x,y} W_h, \quad (2.17)$$

lo cual conlleva a que sí se desea recuperar la información de la **ILID**, a partir de la Ec. (2.17), es conveniente encontrar la **DW** de una función  $\omega(x, y)$  que cumpla la siguiente relación:

$$W_f = W_g *_{x,y} W_\omega = W_f *_{x,y} W_h *_{x,y} W_\omega, \quad (2.18)$$

donde la **DW** de la **fpei-ei** con la **DW** de la función  $\omega(x,y)$  cumplen con:

$$W_{h_{x,y}} * W_{\omega} = \delta(x,y)\sigma(u,v), \tag{2.19}$$

en este caso la función  $\sigma(u,v)$  es una constante (la cual se puede normalizar) para toda  $u,v$ . En general, el resultado de la convolución  $W_{h_{x,y}} * W_{\omega}$  no es la condición dada en la Ec. (2.19); por consiguiente, el resultado obtenido por la Ec.(2-18) es un estimado  $\hat{W}_f$  de la  $W_f$ . Este estimado ( $\hat{W}_f$ ) se puede obtener cuando  $W_{\omega}$  es la **DW** asociada al filtro de Wiener; esto es:

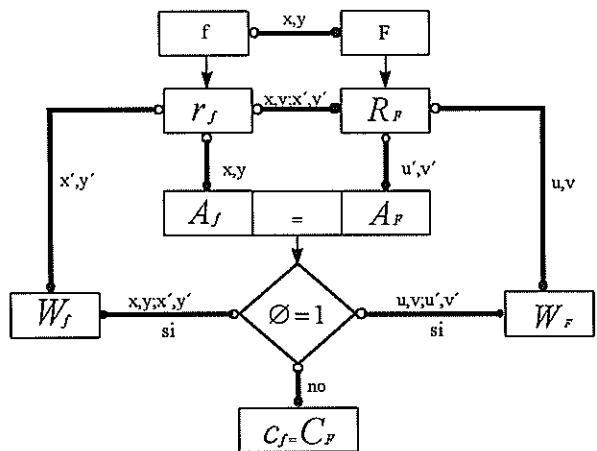


Fig. (2.1). Diagrama de Bloques para evaluar la **DC** a partir de  $f(x,y)$  ó  $F(u,v)$ , o el problema inverso.

$$W_{\omega}(x,y;u,v) = W_{\Omega}(u,v;x,y) = \iint R_{\Omega}(u,v;u',v') e^{j2\pi(ux'+v'y')} du' dv', \tag{2.20}$$

donde una posible definición de la función  $R_{\Omega}(u,v;u',v')$  es la siguiente:

$$R_{\Omega} = \frac{R_H^*}{|R_H|^2 + e}. \tag{2.21}$$

Otra manera de definir  $R_{\Omega}(u, v; u', v')$  es a partir de la Ec. (1.13), esto es:  $R_{\Omega} = \Omega(u + u'/2, v + v'/2)\Omega^*(u - u'/2, v - v'/2)$ .

La Ec. (2.21) es una versión bilineal del filtro de Wiener con  $e$  constante y  $R_H(u, v; u', v') = H(u + u'/2, v + v'/2)H^*(u - u'/2; v - v'/2)$  ( $H(u, v)$  es la **FTO**). La función  $R_H$  se puede definir a partir de la función producto asociada a la **fpei**, esto es:

$$R_H(u, v; u', v') = \iiint \iiint r_h(x, y; x', y') e^{-j2\pi(ux+vy+u'x'+v'y')} dx dy dx' dy'. \quad (2.22)$$

Una manera de filtrar la **DW** de una imagen degradada es aplicar a la  $W_g(x_0, y_0; u, v)$  un filtro  $\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v)$ <sup>32,33</sup> que modifique el espectro asociado al punto  $x_0, y_0$ . Este método no toma en cuenta el efecto de frecuencias generadas por puntos que no pertenecen a la escena de interés y que son parte de la  $g(x, y)$ . Como ejemplo, en el caso de una imagen variantemente degradada el punto  $x_0, y_0$  puede tener información simultanea de diferentes tipos de degradación que tiene la imagen a restaurar y por consiguiente no es suficiente aplicar  $\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v)$  para tener una buena restauración. De acuerdo a lo anteriormente mencionado en este párrafo, el estimado de la **DW** a la **ILID** en el punto  $x_0, y_0$  esta dada por:

$$\hat{W}_f(x_0, y_0; u, v) = W_g(x_0, y_0; u, v)\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v), \quad (2.23)$$

de la Ec. (2.23) se observa que el filtro  $\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v)$  siempre modifica el espectro de la  $W_g(x_0, y_0; u, v)$  asociado al punto  $x_0, y_0$ . Una forma posible de  $\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v)$  es el filtro inverso, esto es:

$$\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v) = \frac{1}{H(x_0, y_0; u, v)}, \quad (2.24)$$

otra forma del filtro  $\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v)$  es la versión lineal del filtro de Wiener, esto es:

$$\mathfrak{F}(x_0, y_0; u, v) = \frac{H^*(x_0, y_0; u, v)}{|H(x_0, y_0; u, v)|^2 + e(x_0, y_0)}, \quad (2.25)$$

donde ahora la constante  $e$  puede cambiar de acuerdo al punto que se desea modificar. La forma de filtrar información, dada por la Ec. (2.25), es la que Gonzalo<sup>32,33</sup> et. al. proponen para restaurar, óptica y digitalmente, información degradada por una **fpei** variante o invariante.

Las restauraciones llevadas a cabo usando el filtro dado por la Ec. (2.25) difieren de las restauraciones con métodos lineales, ya que este filtro es lineal y se aplica a un proceso bilineal. Por ejemplo, en la restauración con procesadores bilineales híbridos aparece la imagen restaurada con un fondo gris y poco detalle; en cambio, cuando la restauración bilineal es digital la imagen restaurada presenta imágenes fantasmas. Además, en el caso de restaurar ópticamente imágenes degradadas con la **DW**, uno de los problemas clásicos es implementar los filtros de Wiener en el espacio fase, tal como esta indicado en la Ec. (2.20), ya que estos filtros tienen que cambiar punto a punto y son difíciles de realizar físicamente, aún cuando en principio éstos sean reales. Por consiguiente, el procesamiento de óptico de imágenes con la **DW** (o con cualquiera de las distribuciones de Cohen) hasta el momento es engorroso de llevar a cabo, a menos que se utilice un procesador **DW** híbrido, con una válvula óptica o pantalla de cristal liquido programable que garantice la aplicación precisa y rápida de los filtros<sup>33</sup>, lo cual hasta el momento no ha sido implementado. Una posible ventaja de filtrar en el espacio fase imágenes no degradadas espacialmente usando medios híbridos, es que el método puede ser mucho más rápido que el procesamiento bilineal de imágenes por medios exclusivamente ópticos o digitales, una desventaja es lo caro del hardware requerido. Sin embargo, para que los resultados sean similares a los que se pueden obtener con los métodos lineales los filtros deben ser bilineales. Numéricamente, el filtro bilineal de Wiener es relativamente fácil de simular, pero los tiempos de calculo para filtrar una imagen son grandes.

#### II-4. La Función de Ambigüedad.

La función de Ambigüedad (**FA**) fue propuesta en teoría de señales temporales<sup>50,52</sup>, sus implicaciones y aplicaciones se siguen ampliando, siempre con la tendencia a encontrar soluciones lineales usando la **FA**, que es bilineal. A diferencia de la **DW**, la **FA** puede ser una función compleja y por consiguiente restaurar imágenes

ópticamente resulta un procedimiento complejo, aún cuando no se tome en cuenta el carácter bilineal del filtro.

En general, los filtros bilineales para modificar la **FA** son complejos y también cambian punto a punto de tal manera que son aún más difíciles de implementar ópticamente. Sin embargo, desde el punto de vista numérico no existe ningún argumento en contra para que la **FA** pueda llevar a cabo el mismo tipo de restauración de información que la **DW**. La definición de la **FA** para la **ILID** ( $f(x,y)$ ), está dada por la Ec. (2.2) y su conexión con la **DC** por la Ec. (2.1), cuando el "kernel" es igual a uno la **FA** es **TF** 4-D aplicada a la **DC**.

Si el "kernel" es uno, la **DW=DC**, por lo tanto la **FA** es la **TF** 4-D aplicada a **DW**, esto es:

$$A_f(u', v'; x', y') = \iiint W_f(x, y; u, v) e^{j2\pi(u'x+v'y-u'x-v'y)} dx dy du dv. \quad (2.26)$$

De la Ec. (2.26), la **FA** es una función par en las variables espaciales  $x', y'$ , dado que la **DW** es una función par en las variables  $u, v$ . Si  $A_g(x', y'; u', v')$  es la **FA** asociada a una imagen degradada espacialmente, entonces se puede demostrar que su relación con la **FA** asociada a la **ILID** y con la **FA** asociada a la **fpei-ei** es:

$$A_g(u', v'; x', y') = A_f(u', v'; x', y') *_{x', y'} A_h(u', v'; x', y'), \quad (2.27)$$

o equivalentemente,

$$A_G(x', y'; u', v') = A_F(x', y'; u', v') *_{x', y'} A_H(x', y'; u', v'). \quad (2.28)$$

Por consiguiente, siguiendo la analogía con la **DW**, podemos encontrar un estimado  $\hat{A}_f(u', v'; x', y')$ . Este estimado se puede calcular aplicando la **TFD** 2-D, en las variables  $x', y'$ , de  $A_g(u', v'; x', y')$  (ver Ec. (2.27)), con lo que se obtiene:

$$R_G(u, v; u', v') = R_F(u, v; u', v') R_H(u, v; u', v'). \quad (2.29)$$

Luego, el estimado a la función  $R_F(u, v; u', v')$  es:

$$\hat{R}_F(u, v; u', v') = R_G(u, v; u', v') R_\Omega(u, v; u', v'), \quad (2.30)$$



donde  $R_{\Omega}(u, v; u', v')$  esta dado por la Ec. (2.21). De la Ec. (2.30), se puede encontrar  $\hat{A}_{\hat{F}}(x', y'; u', v')$  por medio de una **TFI 2-D** en las variables  $u, v$  e inmediatamente obtener  $\hat{A}_{\hat{f}}(u', v'; x', y')$ , puesto que se cumple la siguiente relación:

$$\hat{A}_{\hat{f}}(u', v'; x', y') = \hat{A}_{\hat{F}}(x', y'; u', v'). \quad (2.31)$$

Una vez obtenido el estimado  $\hat{A}_{\hat{f}}(u', v'; x', y')$  o  $\hat{W}_{\hat{f}}(x, y; u, v)$ , si la función  $f(x, y)$  es real no-negativa y con soporte finito, entonces siempre se puede calcular  $\hat{f}(x, y)$ .

## II-5. El problema inverso en la Distribución de Cohen.

El problema inverso consiste en encontrar un estimado a la función  $f(x, y)$ , a partir del conocimiento de la **DC** y de una función "kernel" dada. Como ya se menciono del estimado  $\hat{C}_{\hat{f}}(x, y; u, v)$ , se puede obtener  $\hat{f}(x, y)$  sin ambigüedad cuando la  $f(x, y)$  es real, no-negativa y con soporte finito.

A continuación se obtiene  $f(x, y)$  a partir de su **DC**. Sea  $\chi_f(u', v'; x', y')$  igual a la **TFD** (en las variables  $X, Y; U, V$ ) aplicada sobre la  $C_f(X, Y; U, V)$ . Por consiguiente, de la Ec. (2.1), se tiene que:

$$\chi_f(u', v'; x', y') = A_f(u', v'; x', y')\phi(u', v'; x', y'). \quad (2.32)$$

Entonces de la Ec. (2.32), un estimado a la **FA** es:

$$\hat{A}_{\hat{f}}(u', v'; x', y') = \chi_f(u', v'; x', y')\mathfrak{R}_{\phi}(u', v'; x', y'), \quad (2.33)$$

donde  $\mathfrak{R}_{\phi}(u', v'; x', y')$  puede actuar como un filtro en el espacio fase, en particular, siguiendo a Gonzalo<sup>33</sup>, esta función se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathfrak{R}_{\phi}(u', v'; x', y') = \frac{\phi^*(u', v'; x', y')}{|\phi(u', v'; x', y')|^2 + e}. \quad (2.34)$$

Nuevamente,  $e$  es una constante igual a la relación señal a ruido en el espacio fase. De la Ec. (2.2), se puede obtener el estimado  $\hat{f}_f(x, y; x', y')$  a partir de  $\hat{A}_f(u', v'; x', y')$  (Ec. (2.33)), esto es:

$$p_f(x, y; x', y') = \iint \hat{A}_f(u', v'; x', y') e^{j2\pi(u'x' + v'y')} du' dv'. \quad (2.36)$$

De las Ecs. (2.3) y (2.36) se puede estimar el valor de  $\hat{f}(x, y)$  por medio de la siguiente relación:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{\hat{f}(0, 0)} \hat{p}_f(x, y; x' = 2x, y' = 2y). \quad (2.37)$$

De las Ecs. (2.32), (2.33) y (2.34) se observa que cuando  $f(x, y)$  es compleja y la constante  $e$  tiende hacia cero, el estimado  $\hat{f}(x, y)$  tenderá hacia la función  $f(x, y)$  excepto por una constante compleja ( $\hat{f}(0, 0)$ ). Lo anterior implica que si se conoce la **DC** de una función  $f(x, y)$  es posible recuperar un estimado a la  $f(x, y)$  siempre y cuando ésta sea real, no-negativa y que el "kernel" de la **DC** sea conocido. Es conveniente señalar que en las simulaciones numéricas, un buen estimado de la función  $f(x, y)$  depende del número de ceros del "kernel", de que tan cerca están estos ceros del origen del espacio fase y del tamaño de la longitud de palabra del procesador digital. Sí el número de ceros es grande y el tamaño de la longitud de palabra no es suficientemente grande el estimado  $\hat{f}(x, y)$  tiene defectos que lo alejan de  $f(x, y)$ , ya que  $\mathfrak{R}_f(u', v'; x', y')$  actúa amplificando el ruido generado por el tamaño finito de la longitud de palabra de memoria. Para  $f(x, y)$  real y no-negativa una forma más directa de encontrar el estimado  $\hat{f}(x, y)$ , a partir de  $C_f(x, y; u, v)$ , es utilizar las distribuciones marginales, como se indica en la Ec. (2.4), lo cual es posible siempre y cuando la restauración se lleve a cabo digitalmente, ya que con procesadores ópticos las distribuciones marginales hasta el momento no se han obtenido.

## II-6. Distribución de Wigner de una imagen degradada por un sistema óptico con valores pequeños de los coeficientes del polinomio de aberración.

En esta sección abordaremos el problema de escribir explícitamente la **DW** de una imagen degradada espacialmente en términos de la **DW** de la **ILID** ( $W_f(x, y; u, v)$ ) mas un cierto remanente que se agrega como una perturbación, de forma análoga a la relación encontrada en la última sección del primer capítulo (Ec. (1.26)).

Usando notación abreviada, de la Ec. (2.17) se tiene que  $W_g = W_{f_{x,y} * h} = W_{f_{x,y}} * W_h$  y lo que se desea, de acuerdo a la Ec. (1.23), es mostrar que:

$$W_g = W_{f+\rho}, \quad (2.38)$$

donde la función  $\rho(x, y)$  esta dada por la Ec. (1.24). De acuerdo a Claasen<sup>21</sup> la **DW** de la suma de dos funciones es:

$$W_{f+\rho} = W_f + W_\rho + 2 \operatorname{Re}\{W_{f,\rho}\}. \quad (2.39)$$

Para el caso particular de desenfoques pequeños la función  $\rho(x, y)$  (ver Ec. (1.28)) se puede escribir como:

$$\rho(x, y) = \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^2 [\nabla^2]^2 f(x, y), \quad (2.40)$$

donde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es el Laplaciano, por consiguiente:

$$W_\rho = \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^4 [\nabla^2]^4 W_f, \quad (2.41)$$

y de acuerdo a la Ec. (2.30), tenemos que:

$$W_{f,\rho} = \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^2 [\nabla^2]^2 W_f, \quad (2.42)$$

por lo tanto, la Ec. (2.39) se puede escribir, tomando en cuenta

los resultados dados por las Ecs. (2.41) y (2.42), como:

$$W_g = W_f + \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^2 [\nabla^2]^2 \left[ 2 + \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^2 [\nabla^2]^2 \right] W_f, \quad (2.43)$$

lo cual nos indica que la **DW** de una imagen levemente desenfocada es igual a la **DW** de la **ILID** más una perturbación sobre la **DW** de la **ILID**,  $\left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^2 [\nabla^2]^2 \left[ 2 + \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^2 [\nabla^2]^2 \right] W_f$ , que es lo que se espera.

Aún más, cuando el polinomio de aberración tiene un desenfoque de cualquier valor, entonces la pupila compleja (Ec. (1.20)) se escribe como:

$$\Pi(u, v) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (j2\pi)^m \frac{1}{m!} \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^m \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} u^{2(m-l)} v^{2l}, \quad (2.44)$$

donde  $\sum_{l=0}^m \binom{m}{l} = \sum_{l=0}^m \frac{m!}{(m-l)!l!}$ . En este caso, como  $u^{2(m-l)} v^{2l} = \frac{\partial^{2(m-l)}}{\partial x^{2(m-l)}} \frac{\partial^{2l}}{\partial y^{2l}}$ , luego:

$$\rho(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (j2\pi)^m \frac{1}{m!} \left(\frac{W_{20}}{\lambda}\right)^m \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \frac{\partial^{2(m-l)}}{\partial x^{2(m-l)}} \frac{\partial^{2l}}{\partial y^{2l}} f(x, y), \quad (2.45)$$

usando la Ec. (2.39) y llevando a cabo algunas simplificaciones se puede encontrar la expresión general para la **DW** asociada a una imagen desenfocada.

## CAPITULO III.

# SISTEMAS BILINEALES EN PROCESADO DE IMÁGENES.

### III-1. Introducción.

Los primeros intentos en procesar bilinealmente imágenes bidimensionales monocromáticas, degradadas espacialmente y sin ruido aditivo (óptica, digital o con sistemas híbridos) se llevaron a cabo utilizando la **DW**<sup>3,32,33</sup>. Desplegar en tiempo real la **DW** de señales 1-D por medios ópticos no es ningún problema, no así cuando se tiene imágenes bidimensionales debido a que la información no se puede visualizar simultáneamente. Una forma de visualizar esta información es usar procesadores híbridos que primero almacenen en una computadora la información procesada punto a punto por medios ópticos y posteriormente observar el resultado en el monitor de la computadora. Sin embargo, de los resultados hasta ahora obtenidos, el procesamiento bilineal de imágenes degradadas espacialmente, con métodos ópticos o híbridos, usando la **DW**, no coincide con los resultados obtenidos procesando linealmente la misma imagen.

Por otro lado, los resultados obtenidos al procesar imágenes con degradaciones variantes con algoritmos numéricos, usando la versión discreta de la **DW**, tampoco son del todo satisfactorios por las siguientes razones: los filtros digitales (operando en el espacio fase) hasta ahora implementados tienen alcances limitados, el tiempo de cómputo es excesivamente grande y no se observa ningún beneficio adicional práctico (con respecto a los métodos lineales) que pueda hacer atractivo el uso de la **DW** para procesar información. Sin embargo, los resultados pueden mejorarse proponiendo filtros bilineales (Ec. (2.21) que mejoren los resultados (filtro bilineal de Wiener en el dominio de las frecuencias espaciales mutuas<sup>12</sup>) hasta el momento publicados y algoritmos más rápidos para disminuir los tiempos de cómputo<sup>19,35</sup>. De aquí la rapidez en el procesamiento bilineal de imágenes, la precisión en los resultados,

las limitaciones de los filtros propuestos y nuevos métodos de restauración bilineal aún quedan por resolverse.

En este capítulo se presenta un enfoque teórico sobre el papel que juegan las funciones bilineales en procesamiento de imágenes monocromáticas degradadas espacialmente y obtenidas con luz incoherente. Después, se lleva a cabo el mismo procedimiento bilineal para obtener el estimado a la ILID en luz poli cromática. El sistema óptico con se obtiene la imagen es invariante pero puede ser espacialmente variante, si se hacen las consideraciones adecuadas. En la última sección de este capítulo se asume que la imagen degradada tiene ruido aditivo. Con esto se espera tener una mejor comprensión de cómo operan los procesadores bilineales.

Los primeros estudios en óptica, de sistemas bilineales que forman imagen, en luz parcialmente coherente así como algunas propiedades de sus transformaciones fueron reportados Saleh<sup>58-61</sup>. Pero, el posible procesamiento bilineal de imágenes degradadas espacialmente con ruido aditivo (óptica, digital o híbrida) es la primera vez que se reporta de una forma sistemática.

### III-2. Sistemas bilineales y la Distribución de Cohen.

Los sistemas lineales y bilineales son casos particulares de los sistemas no-lineales. La teoría de los sistemas no-lineales indica que la salida del sistema ( $g(x', y')$ ) se puede aproximar por una serie de Volterra<sup>62</sup>.

Bajo la condición de que la función que genera el evento no lineal es siempre la misma, la serie de Volterra tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 g(x', y') = & \gamma_0(x', y') + \gamma_1(x', y') \iint f(x_1, y_1) h_1(x', y'; x_1, y_1) dx_1 dy_1 \\
 & + \gamma_2(x', y') \iiint f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) h_2(x', y'; x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 & + \gamma_n(x', y') \iiint \dots \iint f(x_1, y_1) \dots f(x_n, y_n) h_n(x', y'; x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

donde el producto de las funciones  $f(.,.)$ 's tiene diferentes posiciones para cada término de la serie. Estos productos son la entrada al sistema no lineal. En general, el producto puede ser con diferentes tipos de funciones y puede incluir la variable temporal.

De la Ec. (3.1), considerando que tenemos un sistema óptico, las funciones  $h_l(\dots)$ 's ( $l=1,2,\dots,n$ ) representan la **función de punto extendido (fpe)** de diferente orden, esta **fpe** puede ser en amplitud o en intensidad, variantes o invariantes. Así, sí  $l=1$ , luego  $h_1(\dots)$  es la **fpe lineal** o la respuesta a un impulso; sí  $l=2$ , luego  $h_2(\dots)$  es la **fpe bilineal** o la respuesta a un biimpulso en dos posiciones diferentes  $(x_1, y_1; x_2, y_2)$  simultáneas y sí  $l=n$ , luego  $h_n(\dots)$  es la **fpe n-lineal** o la respuesta a un impulso en  $n$  posiciones diferentes,  $(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n)$ , simultáneas. Las  $\gamma's(x', y')$  son funciones de ajuste que dependiendo del problema se puede tomar como constantes o funciones con pesos arbitrarios.

Para nuestro caso, la relación dada por la Ec. (3.1) implica que se puede construir una imagen no lineal siempre y cuando se establezca un proceso donde intervienen los diferentes ordenes de linealidad de las **fpe's**, el conocimiento de las funciones  $\gamma's(x', y')$  y el principio de superposición para procesos. Esta ecuación también puede implicar que sí ya se construyo un proceso no-lineal, en principio, se puede recuperar el estimado lineal de esta imagen. En particular, para imágenes degradadas linealmente éstas se pueden procesar bi linealmente para obtener un estimado a la **ILID**. El problema que puede surgir es: sí restaurar bilinealmente una imagen linealmente degradada ofrece algún tipo de ventaja que no puede tener procesando ésta linealmente.

Como el interés central de este trabajo es llevar a cabo procesamiento de imágenes degradadas espacialmente con sistemas bilineales biinvariantes, entonces el tercer término de la Ec. (3.1) es el que importa. La salida  $(a(x', y'))$  del sistema bilineal (formador o procesador de imagen), de acuerdo a la Ec. (3.1), tiene la siguiente forma:

$$a(x', y') = \iiint f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) h(x', y'; x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2, \quad (3.2)$$

donde la función  $f(x_1, y_1) f(x_2, y_2)$  representa el producto de la misma imagen en dos posiciones diferentes y es la entrada al sistema bilineal. Como  $f(x, y)$  es una imagen en luz incoherente al producto  $f(x_1, y_1) f(x_2, y_2)$  le llamaremos la **función de intensidad**

**mutua (fim)** asociada a la función  $f(x,y)$  (siguiendo la analogía con la función de coherencia mutua<sup>20</sup>). Por consiguiente, sí a la **fpe-bilineal** la denotamos **fpebi**, entonces a la **fpe** en intensidad bilineal la podemos abreviar como **fpeibi**.

Con el fin de deducir la **FA**, a partir de la Ec. (3.2), proponemos la siguiente relación para la **fpebi**:

$$h(x', y'; x_1, y_1, x_2, y_2) = \delta(x_1 - x_2 - x'; y_1 - y_2 - y') \times e^{-j2\pi[u'(x'+x_2)+v'(y'+y_2)]}, \quad (3.3)$$

esto es, dado un par de frecuencias espaciales  $(u', v')$ , la  $h(x', y'; x_1, y_1, x_2, y_2)$  representa un frente de onda plano cuya amplitud compleja cambia de acuerdo al valor a la suma de coordenadas  $(x'+x_2, y'+y_2)$ . Al sustituir la Ec. (3.3) en la Ec. (3.2), se tiene un proceso espacialmente bi-invariante (debido a que las coordenadas  $x', x_1, x_2; y', y_1, y_2$  están relacionadas por la diferencia de los valores de las coordenadas del plano de entrada  $[(x_1 - x_2), (y_1 - y_2)]$  con los valores de las coordenadas del plano de salida  $(x', y')$ , esto es,  $[x'-(x_2 - x_1), y'-(y_2 - y_1)]$ ; por consiguiente, de la Ec. (3.3) obtenemos la siguiente relación:

$$a_{u',v'}(x', y') = \iint f(x_1, y_1) f^*(x_1 - x', y_1 - y') e^{-j2\pi(u'x_1 + v'y_1)} dx_1 dy_1, \quad (3.4)$$

donde  $a_{u',v'}(x', y')$  es el espectro complejo del producto de la intersección de la región en común de las funciones de entrada,  $f(x_1, y_1)$  y  $f^*(x_2, y_2)$ . A la función  $a_{u',v'}(x', y')$  se le conoce como la función de ambigüedad (**FA**) asociada a la función  $f(x,y)$ , esto es:

$$A_f(u', v'; x', y') = a_{u',v'}(x', y'). \quad (3.5)$$

La **DW** se obtiene al aplicar una **TF 4-D** (una **TFD 2-D** en las variables  $x,y$  y una **TFI 2-D** en las variables  $u',v'$ ) a la Ec.(3.5), esto es:



$$W_f(x, y; u, v) = \iiint \iiint a_{u', v'}(x', y') e^{j2\pi(u'x + v'y - ux' - vy')} dx' dy' du' dv' \quad (3.6)$$

Entonces, si  $\phi(u', v'; x', y')$  es una función bilineal al multiplicar ésta por  $a_{u', v'}(x', y')$ , se tiene una función bilineal (asumiendo que se conoce que la convolución de dos funciones bilineales es una función bilineal, entonces, la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones bilineales es el producto de las transformadas de Fourier de cada una de las funciones bilineales, el cual es una función bilineal). Esto es:

$$\hat{a}_{u', v'}(x', y') = a_{u', v'}(x', y') \phi(u', v'; x', y'), \quad (3.7)$$

es bilineal, donde  $\phi(u', v'; x', y')$  es un "kernel" (en analogía al "kernel" propuesto en el capítulo II). Al aplicar la TF 4-D a la función  $\hat{a}_{u', v'}(x', y')$ , en las variables  $x', y'; u', v'$ , se obtiene la **DC**, esto es:

$$C_f(x, y; u, v) = \iiint \iiint \hat{a}_{u', v'}(x', y') e^{-j2\pi(ux' + vy' - u'x - v'y)} dx' dy' du' dv' \quad (3.8)$$

Como  $x$  se puede sustituir por  $X$ ,  $y$  por  $Y$ ,  $u$  por  $U$  y  $v$  por  $V$ , luego la Ec. (3.8) se puede escribir como:

$$C_f(X, Y; U, V) = \iiint \iiint \hat{a}_{u', v'}(x', y') e^{-j2\pi(Ux' + Vy' - u'X - v'Y)} dx' dy' du' dv', \quad (3.9)$$

que es precisamente la definición de **DC**, de acuerdo a la Ec. (2.1).

En el caso de que el "kernel" sea igual a la unidad, la **DC** y la **DW** coinciden, para cualquier función  $f(x, y)$ ; en particular, para la **ILID**, de acuerdo a las Ecs. (3.6) y (3.7).

### III-3 Procesado bilineal de imágenes mono cromáticas sin ruido.

Como podemos inferir de la Ec. (3.1), los eventos bilineales son una primera aproximación a los eventos lineales, en la representación de un evento no lineal, como puede ser una imagen

degradada. También, del segundo término de la Ec. (3.1), se observa que cuando se tiene una imagen degradada linealmente en luz incoherente se pueda obtener de forma unívoca una imagen degradada bilinealmente.

Pero, el proceso inverso no implica que se puede obtener la imagen degradada linealmente de su imagen degradada bilinealmente unívocamente, por que existen varias formas de obtención, como lo podemos constatar posteriormente. Entonces, a la pregunta ¿para qué procesar bilinealmente una imagen degradada linealmente?, la respuesta es por que se tiene un mayor número de formas de libertad de procesar la información y también por que el procesamiento bilineal permite llevar a cabo en el espacio fase la restauración bilineal, lo cual puede generar filtrajes no convencionales.

A continuación planteamos la forma de restaurar información usando métodos bilineales. Supongamos que tenemos una imagen degradada espacialmente ( $g(x, y)$ ) por un sistema óptico lineal en luz incoherente. Entonces, de la Ec. (3.2), la **fm** de  $g(x, y)$  tiene la siguiente forma:

$$r_g(x_1, y_1; x_2, y_2) = g(x_1, y_1)g(x_2, y_2), \quad (3.10)$$

donde la función  $r_g(x_1, y_1; x_2, y_2)$  es real no-negativa y con soporte finito. Se entiende que si  $g(x_1, y_1)$  y  $g(x_2, y_2)$  son las entradas simultáneas al procesador bilineal de imágenes, luego la Ec. (3.10) puede escribirse como:

$$r_g(x_1, y_1; x_2, y_2) = [f(x_1, y_1) *_{x_1, y_1} h(x_1, y_1)][f(x_2, y_2) *_{x_2, y_2} h(x_2, y_2)], \quad (3.11)$$

o equivalentemente, como se puede demostrar, de la siguiente manera:

$$r_g(x_1, y_1; x_2, y_2) = r_f(x_1, y_1; x_2, y_2) *_{x_1, y_1; x_2, y_2} r_h(x_1, y_1; x_2, y_2). \quad (3.12)$$

La Ec. (3.12) indica que la **fim** de una imagen degradada es la convolución 4-D de la **fim** de la **ILID** con la **fim** de la **fpei**. Sí lo

que se desea es obtener un estimado a la **ILID**, entonces de la Ec. (3.1), se tiene la siguiente relación:

$$a(x, y) = \iiint r_g(x_1, y_1; x_2, y_2) w(x, y; x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2, \quad (3.13)$$

donde  $x, y$  son variables mudas asociadas a las variables  $x', y'$  y  $w(x, y; x_1, y_1, x_2, y_2)$  es una función bilineal. Asumiendo que el procesador bilineal es espacialmente bi-invariante, podemos escribir que:

$$w(x, y; x_1, y_1, x_2, y_2) = w(x - x_1, y - y_1; x' - x_2, y' - y_2). \quad (3.14)$$

Por consiguiente, la Ec (3.13), tomando en cuenta la Ec. (3.14), se escribe como  $a_{x', y'}(x, y) = r_f(x, y; x', y') *_{x, y; x', y'} r_h(x, y; x', y') *_{x, y; x', y'} w(x, y; x', y')$ : este resultado implica que con la función  $w(x, y; x', y')$  se puede llevar a cabo el procesamiento bilineal de la **fim** asociada a la imagen degradada. Como la restauración de la información  $r_g(x_1, y_1; x_2, y_2)$  debe ser con un procesador bilineal, el estimado a la salida del sistema se obtiene bajo la siguiente condición:

$$r_h(x_1, y_1; x_2, y_2) *_{x_1, y_1; x_2, y_2} w(x_1, y_1; x_2, y_2) \approx \delta(x - x_1, y - y_1; x' - x_2, y' - y_2), \quad (3.15)$$

al sustituir la Ec. (3.14) y la Ec. (3.15) en la Ec. (3.13), obtenemos el estimado de la **fim** de la **ILID**, esto es:

$$a_{x', y'}(x, y) = \hat{r}_f(x, y; x', y'). \quad (3.16)$$

Para  $x' = constante, y' = constante$  se tiene, de acuerdo a la definición de **fim** dada por Ec. (3.10), que  $\hat{r}_f(x, y; x', y') = C |\hat{f}(x, y)|^2$

(con  $C = |f(x', y')|^2 = \text{constante}$ ) y por consiguiente, de acuerdo a la Ec. (3.16):

$$a(x, y) = C |\hat{f}(x, y)|^2. \quad (3.17)$$

Luego, la salida de un procesador bilineal, tomando la condición dada por la Ec. (3.14), es proporcional al modulo al cuadrado del estimado a la **ILID** y es exactamente igual cuando el valor de la constante  $C$  se normaliza a la unidad (lo cual se puede llevar a cabo tanto óptica como digitalmente). Finalmente, de la Ec. (3.17), podemos obtener el valor del estimado a la **ILID** evaluando la raíz cuadrada positiva y normalizando la constante, esto es:

$$\hat{f}(x, y) = +\sqrt{a(x, y)}. \quad (3.18)$$

Un recurso (se usa en procesadores **DW** ópticos o digitales de información) para el manejo de la **fim** es hacer ésta simétrica con respecto al eje del sistema óptico<sup>20</sup>, lo cual se logra con los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + x'/2, & y_1 &= y + y'/2, \\ x_2 &= x - x'/2, & y_2 &= y - y'/2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

entonces, la **fim** de la imagen degradada se puede poner en una forma ya conocida, esto es:

$$r_g(x, y; x', y') = g(x + x'/2; y + y'/2)g(x - x'/2; y - y'/2), \quad (3.20)$$

que es idéntica a la función producto definida en la Ec. (2.3). Sustituyendo las cuatro relaciones dadas en la Ec. (3.19) en la Ec. (3.13), se puede demostrar la Ec. (3.12) o equivalentemente la siguiente relación:

$$r_g(x, y; x', y') = r_f(x, y; x', y') \underset{x, y; x', y'}{*} r_h(x, y; x', y'). \quad (3.21)$$

Otra forma de obtener un estimado a la **ILID**, a partir de la imagen degradada bilinealmente, es aplicar la **TFD 4-D** a la Ec. (3.21) en las variables  $x, y, x', y'$ , con lo cual obtenemos que:

$$R_G(u, v; u', v') = R_F(u, v; u', v') R_H(u, v; u', v'). \quad (3.22)$$

Como las funciones bilineales  $R$ 's representan el espectro de las  $r$ 's las llamaremos funciones de **espectro complejo mutuo (fecm)**; por consiguiente, de la Ec. (3.22), la **fecm** del espectro de la imagen degradada ( $R_G(u, v; u', v')$ ) es el producto de la **fecm** del espectro de la **ILID** ( $R_F(u, v; u', v')$ ) multiplicada por la **fecm** de la **FTO**, ( $R_H(u, v; u', v')$ ). Por consiguiente, un estimado ( $\hat{R}_F(u', v'; u, v)$ ) a la **fecm** del espectro de la **ILID** es:

$$\hat{R}_F(u, v; u', v') = R_G(u, v; u', v') R_\Omega(u, v; u', v'), \quad (3.23)$$

donde proponemos que:

$$R_\Omega(u, v; u', v') = \Omega\left(u + \frac{u'}{2}, v + \frac{v'}{2}\right) \Omega^*\left(u - \frac{u'}{2}, v - \frac{v'}{2}\right), \quad (3.24)$$

como una de las posibles versiones del filtro bilineal de Wiener para procesadores bilineales, donde el filtro de Wiener esta dado por la Ec. (1.13). La Ec. (3.24) conlleva a que la función que caracteriza al proceso de restauración en el dominio del espacio mutuo (ver Ec. (3.14)),  $w(x, y; x', y')$ , esté dada por:

$$w(x, y; x', y') = \iiint \iiint R_\Omega(u, v; u', v') e^{j2\pi(u'x + v'y + ux' + vy')} du' dv' dudv, \quad (3.25)$$

que es la **fim** asociada al filtro de Wiener en el dominio del espacio mutuo. Sí asumimos que  $w(x, y; x', y') = r_\omega(x, y; x', y')$ , podemos obtener un estimado ( $\hat{r}_f(x, y; x', y')$ ), en el dominio de las variables espaciales mutuas, por medio de la siguiente relación:

$$\hat{p}_f(x, y; x', y') = r_g(x, y; x', y') *_{x, y; x', y'} r_\omega(x, y; x', y'), \quad (3.26)$$

de esta última relación se puede obtener el estimado a la **ILID** en luz incoherente. Esto es, como:

$$\hat{p}_f(x, y; x', y') = \hat{f}(x + x'/2; y + y'/2) \hat{f}(x - x'/2; y - y'/2), \quad (3.27)$$

entonces, si  $x' = y' = 0$ , la Ec. (3.27) es:

$$\hat{p}_f(x, y; 0, 0) = |\hat{f}(0, 0)|^2 |\hat{f}(x, y)|^2, \quad (3.28)$$

y por lo tanto el estimado a la **ILID** es:

$$\hat{f}(x, y) = +\sqrt{\hat{p}_f(x, y; 0, 0) / \hat{f}(0, 0)}, \quad (3.29)$$

la cual, una vez que se conoce las degradaciones de la **fpei** del sistema óptico que formo la imagen, para poder recuperar sus valores depende de las siguientes dos condiciones: **a)** el valor del coeficiente que degrado espacialmente la imagen y **b)** el valor de la constante  $e$ , que aparece en la Ec. (1.13). Las condiciones **a** y **b** aparentemente no son independientes: a mayor degradación más pequeño es el valor de la constante  $e$  para poder observar un buen estimado. Sí el valor de la constante  $e$  es grande (cerca de la unidad) el efecto es suavizar el valor del estimado, como se puede inferir teóricamente y de las simulaciones numéricas que se llevan a cabo en el capítulo VI.

Hasta lo aquí expuesto, se tienen dos posibles alternativas para procesar bilinealmente imágenes degradadas linealmente obtenidas en luz incoherente: utilizar la **fim** de la imagen degradada o la **fecm** del espectro en amplitud compleja de la imagen degradada. Otra posible alternativa es utilizar la **DC**, ya que en principio también puede ser un buen candidato, como se ha mencionado en el capítulo II.

Para resumir, es conveniente mencionar, que las restauraciones bilineales reportadas hasta el momento, como es el

caso de la **DW**, suponen que la imagen a procesar no tiene ruido (ni aditivo ni multiplicativo), también es conveniente señalar que los procesadores bilineales usados son del tipo espacialmente bi-invariantes, aunque en la literatura no se menciona este hecho.

Hasta lo aquí expuesto se observa que el procesamiento de imágenes con sistemas bilineales espacialmente bi-invariantes se puede llevar a cabo en el **dominio del espacio mutuo**  $(x, y; x', y')$ , en el **dominio de las frecuencias espaciales mutuas**  $(u, v; u', v')$ , o en el **dominio del espacio fase** (punto a punto o frecuencia a frecuencia). Por consiguiente, las alternativas de llevar a cabo procesamiento de información con sistemas bilineales son más variadas que en el caso de los sistemas lineales. Por ejemplo, en el dominio del espacio mutuo, cada punto  $x, y$  de la imagen a procesar tiene como vecinos un conjunto de puntos  $\{x', y'\}$  que pueden afectar el valor de la imagen de este punto. Otra forma de alterar la información es en el dominio de las frecuencias espaciales mutuas: cada par de frecuencias  $u, v$  (o conjunto de pares de frecuencias  $\{u, v\}$ ) del espectro de la imagen, tiene como vecinas un conjunto de frecuencias  $\{u', v'\}$  que afectan el valor de la amplitud asociada a las frecuencias  $u, v$ .

En el espacio fase, el valor en un punto  $x, y$ , se puede modificar al cambiar los valores de la amplitud compleja del conjunto de sus frecuencias espaciales  $\{u, v\}$  asociadas. También, el valor de la amplitud compleja del par de frecuencias  $u, v$  puede modificarse por el conjunto de sus puntos asociados  $\{x, y\}$ .

#### III-4. Procesado bilineal de imágenes poli cromáticas sin ruido.

En procesado óptico o digital de imágenes poli cromáticas sin ruido con sistemas lineales que forman imagen se pueden distinguir las siguientes posibilidades para un sistema óptico que trabaja en la región paraxial: a). que el sistema óptico tenga aberraciones cromáticas longitudinales, esto es que su distancia focal sea dependiente de la longitud de onda, b). que el sistema este libre de aberraciones cromáticas, esto es que su distancia focal sea independiente de la longitud de onda (sistema óptico apocromático), c). que el sistema sea sensible a la aberración cromática

transversal y finalmente **d**). que el sistema sea independiente tanto de la aberración cromática transversal como longitudinal.

La mayoría de los sistemas ópticos comerciales están corregidos al menos acromáticamente en su región paraxial y dependiendo de su uso puede ser mas o menos insensibles a la aberración cromática transversal. Esto significa que en el caso de un objeto plano poli cromático cuando el sistema óptico esta fuera de foco y es sensible a la longitud de onda, entonces la imagen degradada debe restaurar la información cromática procesando la información en sus colores primarios (r= rojo, v= verde, a= azul). Este caso ya ha sido resuelto y reportado cuando la restauración se hace por medios digitales<sup>16</sup> para valores del coeficiente de desenfoque pequeños, asumiendo linealidad e invariancia espacial del sistema que forma la imagen. Otro caso es cuando el sistema óptico detecta varios planos de profundidad de una escena tridimensional, cada uno de estos planos tiene un coeficiente de desenfoque diferente; en este caso, la información desenfocada se debe restaurar teniendo información a priori de la cantidad de desenfoque, en cada plano de la escena 3-D del objeto, este caso se ha reportado cuando los planos con diferentes desenfoques se toman como independientes<sup>16</sup>.

En el caso en que el objeto emita radiación fuera de la región visible del espectro en varias longitudes de onda la restauración de la imagen tiene que tener en cuenta tanto la profundidad espacial del objeto como el valor de cada longitud de onda. Un posible caso se presenta en los microscopios electrónicos de alta potencia donde el control de la información de profundidad del objeto a veces es difícil y solo se puede enfocar un plano quedando fuera de foco los demás planos. La restauración variantemente fuera de foco de escenas 3-D no ha sido resuelta usando procesamiento lineal cuando los planos de la escena se superponen en el plano del detector; el problema de restaurar este tipo de imágenes radica en que la información del plano a restaurar esta contaminada con información de los demás planos. La solución al problema arriba planteado hizo pensar que la restauración con procesadores bilineales del tipo de **DC** podría ser la solución, lo cual se demuestra, al final de este capítulo, que no es posible de la forma más general.



En esta parte del trabajo supondremos que el sistema formador de la imagen tiene aberraciones cromáticas y por lo tanto la distancia focal es sensible a la longitud de onda, lo cual significa que la imagen cromática a procesar se puede descomponer en tres imágenes independientes, una para cada color primario. Asumiendo la hipótesis mencionada, para un procesador bilineal tendremos tres **fim**'s (una para cada color primario) y sus correspondientes **fecm**'s, todas ellas asociadas a la imagen poli cromática degradada,

Suponiendo independencia de las tres longitudes de onda de una escena en color degradada espacialmente y omitiendo las variables espaciales del argumento de la **fim**, luego la **fim** cromática de la imagen degradada ( $f_g^{\lambda_r, \lambda_v, \lambda_a}$ ), tiene la siguiente forma:

$$f_g^{\lambda_r, \lambda_v, \lambda_a} = f_g^{\lambda_r} + f_g^{\lambda_v} + f_g^{\lambda_a}, \quad (3.30)$$

donde las constantes  $\lambda_r, \lambda_v, \lambda_a$  denotan la longitud de onda para los colores primarios rojo, verde y azul, respectivamente;  $f_g^{\lambda_r, \lambda_v, \lambda_a}$  denota la superposición de las **fim**'s asociadas a dichas longitudes de onda. Usando la Ec. (3.30), la **fecm** de la imagen poli cromática degradada es la superposición de tres funciones de **fecm** degradadas, cada una de las cuales tiene un color primario asociado, esto es:

$$R_G^{\lambda_r, \lambda_v, \lambda_a} = R_G^{\lambda_r} + R_G^{\lambda_v} + R_G^{\lambda_a}. \quad (3.31)$$

donde a cada **fecm** se le ha omitido las variables asociadas a las frecuencias espaciales. Como la **DW** y la **FA** son casos particulares de la **DC**, entonces, la **DC** poli cromática para un "kernel" dado tiene la siguiente forma:

$$C_g^{\lambda_r, \lambda_v, \lambda_a} = C_g^{\lambda_r} + C_g^{\lambda_v} + C_g^{\lambda_a}, \quad (3.32)$$

donde se omitieron las variables. Nuevamente, se cumple la siguiente relación:

$$C_g^{\lambda_{r,v,a}}(x, y; u, v) = C_G^{\lambda_{r,v,a}}(u, v; x, y), \quad (3.33)$$

además, como consecuencia de la definición de la **DC**, la siguiente relación es válida:

$$A_g^{\lambda_{r,v,a}}(x', y'; u', v') = A_G^{\lambda_{r,v,a}}(u', v'; x', y'). \quad (3.35)$$

En el caso de imágenes con degradación poli cromática, se asume que la **DC** y la **FA** siguen un tratamiento similar al de la **DW**. Por consiguiente, el proceso de restaurar poli cromáticamente una imagen con funciones bilineales en el espacio fase involucra manipular los tres

términos de cualesquiera de las ecuaciones ((3.30) a (3.32)) que se elijan. Por ejemplo, podemos elegir la **DW** para llevar a cabo el procedimiento de restauración poli cromática en el espacio fase, de esta forma (ver Ec. (3.33)) tenemos que:

$$W_g^{\lambda_r}(x, y; u, v) = \iint r_g^{\lambda_r} e^{-j2\pi(ux'+vy')} dx' dy', \quad (3.35)$$

$$W_g^{\lambda_v}(x, y; u, v) = \iint r_g^{\lambda_v} e^{-j2\pi(ux'+vy')} dx' dy', \quad (3.36)$$

$$W_g^{\lambda_a}(x, y; u, v) = \iint r_g^{\lambda_a} e^{-j2\pi(ux'+vy')} dx' dy'. \quad (3.37)$$

Sí tomamos en cuenta la siguiente abreviación

$$r_g^{\lambda_c} = r_f^{\lambda_c} *_{x,y;x',y'} r_h^{\lambda_c}, \quad (3.38)$$

con  $\lambda_c = \lambda_r, \lambda_v, \lambda_a$ , entonces el conjunto de Ecs. (3.35) a (3.37) puede expresarse como

$$W_g^{\lambda_c}(x, y; u, v) = \iint_{x, y; x', y'} r_f^{\lambda_c} * r_h^{\lambda_c} e^{-j2\pi(ux' + vy')} dx' dy'. \quad (3.39)$$

De acuerdo a la Ec. (2.23) y a la Ec. (3.49) un estimado a la **DW** en un punto  $x, y$  a la **ILID** poli cromática es:

$$\hat{W}_f^{\lambda_c}(x, y; u, v) = W_g^{\lambda_c}(x, y; u, v) *_{x, y} \mathfrak{F}\{R_{\Omega}^{\lambda_c}(u, v; u', v')\}, \quad (3.40)$$

donde la función que filtra las frecuencias espaciales ( $\mathfrak{F}\{R_{\Omega}^{\lambda_c}(u, v; u', v')\}$ ) asociadas al punto  $x, y$  es la **TFI**, en las variables  $u', v'$ , de la **fecm** poli cromática ( $R_{\Omega}^{\lambda_c}$ ), asociada al filtro de Wiener ( $\Omega(u, v)$ ), esto es:

$$\mathfrak{F}\{R_{\Omega}^{\lambda_c}(u, v; u', v')\} = \mathfrak{F}\{\Omega^{\lambda_c}(\Omega^*)^{\lambda_c}\}. \quad (3.41)$$

Sin embargo, persiste aún el problema de cómo eliminar la operación de convolución que se presenta en la Ec. (3.40).

### III-5 Procesado bilineal de imágenes mono cromáticas con ruido.

Sí la escena degradada espacialmente es independiente del ruido  $n(x, y)$  que se le adiciona, entonces la **fim** de una imagen degradada con ruido aditivo puede expresarse de la siguiente manera:

$$r_{g+n} = r_g + r_n, \quad (3.42)$$

donde  $r_g$  está dada por la Ec.(3.12) y  $r_n$  es la **fim** del ruido, la cual es de la siguiente forma:

$$r_n(x, y; x', y') = n(x + x'/2; y + y'/2)n(x - x'/2; y - y'/2), \quad (3.43)$$

donde  $n(x, y)$  es el ruido. De acuerdo a la Ec. (3.43) la **fecm** del espectro asociado a la imagen degradada con ruido tiene la siguiente forma:

$$R_{G+N}(u, v; u', v') = R_G(u, v; u', v') + R_N(u, v; u', v'), \quad (3.44)$$

entonces, se tiene que la **DW**, la **FA** y la **DC** se pueden escribir como:

$$W_{g+n}(x, y; u, v) = W_g(x, y; u, v) + W_n(x, y; u, v), \quad (3.45)$$

$$A_{g+n}(x', y'; u', v') = A_g(x', y'; u', v') + A_n(x', y'; u', v'), \quad (3.46)$$

$$C_{g+n}(X, Y; U, V) = C_g(X, Y; U, V) + C_n(X, Y; U, V), \quad (3.47)$$

por consiguiente, el estimado a la **ILID** se obtiene al aplicar filtros que pueda eliminar tanto el ruido aditivo como el tipo de degradación que tiene la imagen, en cualquiera de los dominios dados por las Ecs. (3.42) a (3.47). Para poder encontrar este estimado se asume que se conoce el tipo y cantidad de degradación que introduce el sistema formador de imagen así como el tipo de estadística del ruido. En el caso de la **DC**, se tiene que asumir, además, la forma explícita de la función "kernel".

Las Figs. (3.1) y (3.2) muestran, respectivamente, los sistemas para desplegar ópticamente la **fim** y la **DW** de una imagen, que puede o no estar degradada espacialmente y que puede o no tener ruido aditivo. La imagen  $g(x, y)$  es la letra mayúscula **A** que se localiza en el plano de la **fim**. En ambas figuras las abreviaciones significan: DH, divisor de haz;  $f_1, f_2$  y  $f_3$ , distancia focales de las lentes  $L_1, L_2$  y  $L_3$  respectivamente,  $E$  espejo plano,  $d_1$  distancia del DH a la **fim** y  $d_2$  distancia del DH a la lente  $L_3$ . En las dos figuras se asume que una fuente puntual emerge del punto  $P$  incide sobre la lente  $L_1$ , de ésta lente emerge

un frente de onda plano de luz monocromática e incide sobre el DH, la amplitud del frente de onda que transmite el DH pasa por la transparencia, la cual tiene un desplazamiento de  $-x/2, -y/2$  respecto al eje óptico del sistema. La lente  $L_2$  forma la transformada de Fourier de  $g(x+x'/2; y+y'/2)$  sobre la superficie del espejo  $E$ , de tal forma que el haz reflejado, al pasar de nuevo por lente  $L_2$  forma (sobre el plano de la transparencia) la imagen invertida (y desplazada  $x/2, y/2$ ), esto es  $g(x-x'/2; y-y'/2)$ , tal que en el plano de la transparencia se tiene la función bilineal **fim**,  $f_g(x, y; x', y')$ . El procesador bilineal de la Fig. 3.1, forma la **DW** (para  $x, y$  dadas) en el plano focal posterior de la lente  $L_3$ . El plano de la **fim** se encuentra en la distancia focal anterior de esta misma lente. La distancia focal  $f_3$  de la lente  $L_3$  es igual a la suma de las distancias  $d_1$  mas  $d_2$ . Sobre el plano focal posterior de  $L_3$  se forma la distribución de Fraunhofer en amplitud compleja (la cual en principio se puede filtrar), que es finalmente la **DW** (para  $x, y$  dadas).

El procesador bilineal asociado a la **fim** se presenta en la Fig. 3.2, éste no se ha reportado en la literatura, ni para imágenes mono cromáticas ni para imágenes poli cromáticas. Parte del procesador óptico de la Fig. 3.1 puede conformar el procesador bilineal para desplegar la **fim**, la única diferencia es la condición de que ahora  $d_1 + d_2 = 2f_3$ , entonces la imagen de la **fim**, con amplificación unitaria, se forma en el plano  $2f_3$ . En el plano de la imagen de la **fim** se puede llevar a cabo operaciones de filtraje de ruido, promediar valores u otras operaciones (diferenciación, pseudo color etc.). Una alternativa interesante de trabajar con el procesador bilineal **fim** es aplicar filtros de redes neuronales celulares (**RNC**) que supriman el ruido en imágenes binarias bilineales o parte de las degradaciones espaciales que puede tener una imagen binaria. Los filtros **RNC** tienen como ventaja poder cambiar las dimensiones de su plantilla de acuerdo al tamaño de la región de la **fim** que se quiera procesar. Aplicaciones viables del procesador **fim** es hacer realce de borde variable en una imagen, otra posibilidad es modificar punto a punto la imagen valiéndose de los puntos vecinos asociados al punto a modificar.

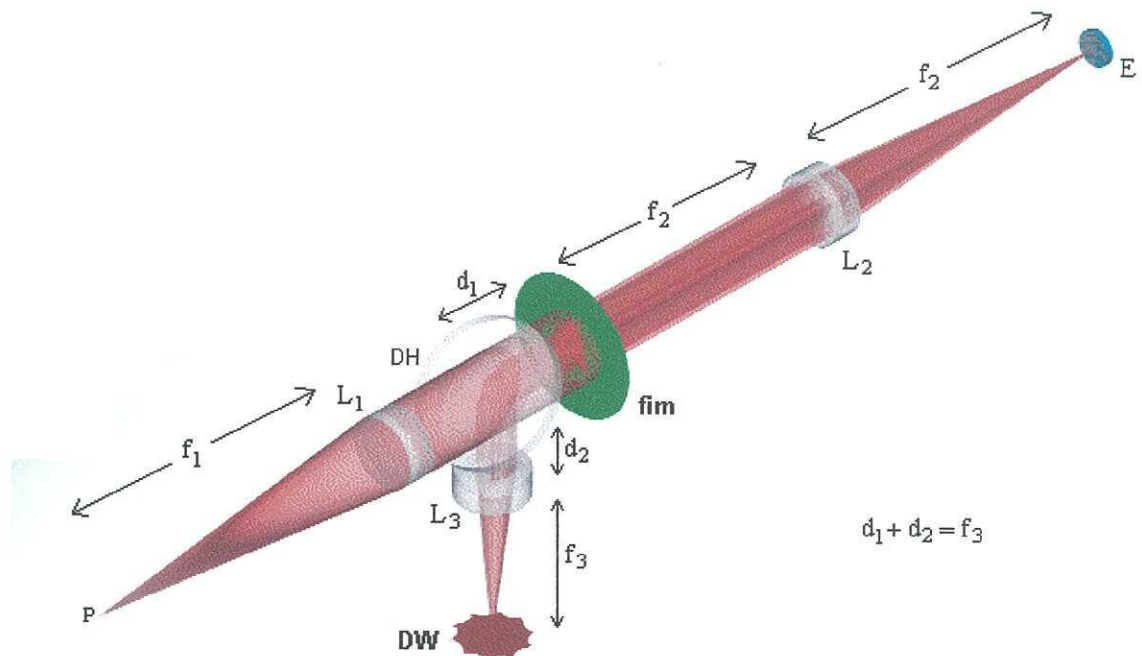


Fig. (3.1). Procesador bilineal óptico en el dominio del espacio fase (**DW**).

En ninguna de las dos figuras anteriores se muestra el hardware asociado a cada arreglo óptico. Para que ambos arreglos puedan trabajar óptimamente es conveniente su implementación híbrida, lo cual eleva su precio considerablemente. El tipo de procesador óptico, dado en la Fig. 3.1, fue propuesto por Balmer<sup>3</sup> para visualizar el contenido de frecuencias espaciales asociadas a la ubicación de un punto de una imagen. Posteriormente, el procesador fue modificado por Gonzalo et. al<sup>33,34</sup> para filtrar frecuencias espaciales y restaurar una imagen espacialmente degradada de forma variante sin separarla físicamente regiones con el mismo tipo de degradación. Los procesadores **DW** híbridos normalmente trabajan con luz monocromática coherente espacialmente. Los procesadores ópticos de la Figs. 3.1 y 3.2 pueden ser complementados con otros sistemas ópticos para recuperar el estimado de la **fim** de la **ILID**, como ya ha sido reportado para la **DW**<sup>3</sup>.

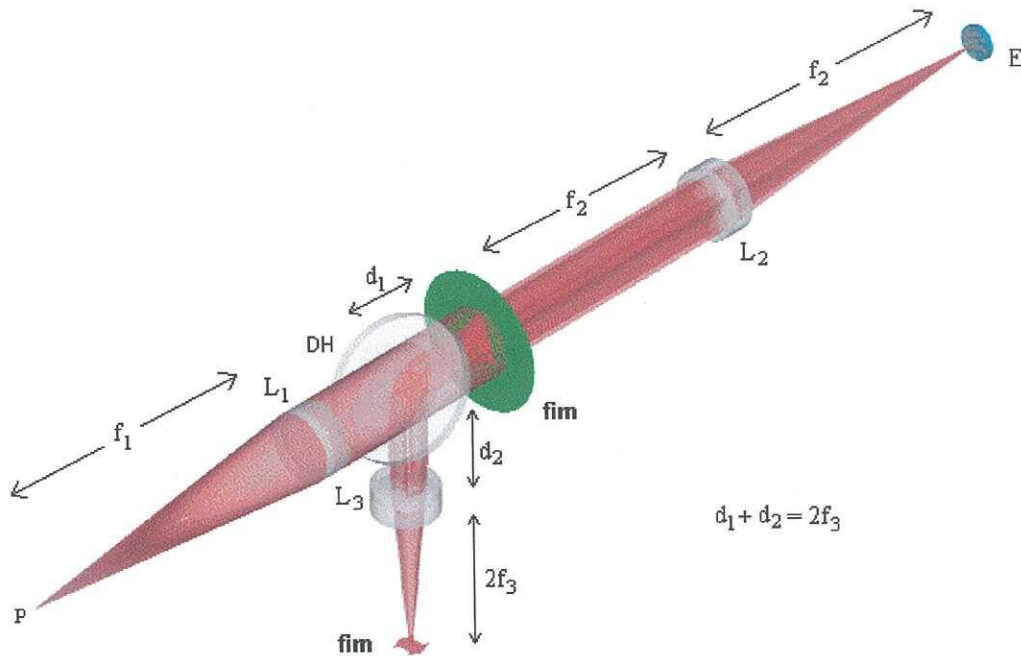


Fig. (3.2) Procesador bilineal óptico en el dominio del espacio de las coordenadas espaciales mutuas (**fim**).

El procesador bilineal, óptico o híbrido, para obtener la **fecm** es similar a los procesadores de las figuras 3.1 y 3.2, hasta el momento este procesador tampoco se ha reportado. En el Apéndice E se propone un procesador de **fecm** de tipo holográfico.

Finalmente, un problema a resolver es hacer que los procesadores ópticos-digitales (híbridos) operen de manera iterativa de acuerdo a la teoría que se detalla en el siguiente capítulo.

Los procesadores bilineales por naturaleza propia no tienen la capacidad de separar la información de una escena que tiene planos diferentes y por consiguiente es conveniente, como ya se mencionó anteriormente (imágenes poli cromáticas y escenas con diferentes planos de desenfoque) trabajar de forma independiente dichos planos.

A continuación se muestra que los procesadores bilineales tienen también como requisito para procesar información, separar físicamente regiones con la misma degradación espacial de una imagen espacialmente variante.

Supongamos que tenemos una escena compuesta por dos planos de información, luego la imagen detectada  $g(x, y)$  es la superposición de estos dos planos, esto es:

$$g(x, y) = f_1(x, y) *_{x,y} h_1(x, y) + f_2(x, y) *_{x,y} h_2(x, y) \quad (3.49)$$

entonces, la **fim** asociada a  $g(x, y)$  es:

$$r_{g_1+g_2} = r_{g_1} + r_{g_2} + 2r_{g_1} r_{g_2}, \quad (3.50)$$

donde  $g_1(x, y) = f_1(x, y)h_1(x, y)$  y  $g_2(x, y) = f_2(x, y)h_2(x, y)$ . Asumir que  $g_1(x, y)$  y que  $g_2(x, y)$  son independientes no es solo hacer que el tercer término de la derecha de la Ec. (3.50) sea igual a cero. Lo que significa es separar la escena  $g_1(x, y)$  físicamente de la escena  $g_2(x, y)$  y por lo tanto procesar por separado la información de cada degradación.

De lo anterior, es inmediato que la **fim**, **fecm** o la **DC** tiene como condición, que una imagen variantemente degradada, se separe físicamente por regiones con la misma degradación, para poder procesarlas bilinealmente.



## CAPITULO IV.

# MÉTODO BILINEAL ITERATIVO PARA LA ESTIMACIÓN DE LA **ILID** BILINEAL.

### IV-1. Introducción.

En este capítulo se propone un algoritmo iterativo para la estimación bilineal de la **ILID**, a partir de una imagen degradada por aberraciones con ruido aditivo. En su versión original el algoritmo ya ha sido aplicado en sistemas lineales<sup>43-46</sup>, el algoritmo aquí propuesto es una modificación cuya ventaja es poder minimizar el ruido (sin retroalimentarse) en cualquier etapa de iteración; por consiguiente, este algoritmo puede ser más rápido y robusto.

Como se infiere del capítulo anterior, el número de imágenes digitales a procesar para llevar a cabo restauración numérica de imágenes degradadas espacialmente con procesadores bilineales, es al menos como el cuadrado del número de píxeles de la imagen a procesar linealmente; esto implica, que el tiempo de procesamiento bilineal de una imagen degradada también se incrementa, al menos como el cuadrado del tiempo requerido por cada imagen con métodos lineales. En el caso de restauración bilineal numérica, además los accesos a la memoria de disco duro debe ser el mínimo posible, lo cual conlleva a que el tamaño de memoria real sea grande para almacenar las matrices de la (**fm**), la **fecm** o de cualesquier distribución asociada a la **DC**. Como consecuencia a lo arriba mencionado, hay que agregar que el cálculo numérico del estimado a la **ILID** de una imagen degradada bilinealmente con ruido, con métodos bilineales iterativos aumenta, significativamente los tiempos de cálculo.

En este trabajo, el método bilineal iterativo propuesto para restauración de imágenes bilineales con ruido es una modificación al método de restauración lineal iterativa, usado por Maeda, en restauración de imágenes degradadas variantemente con ruido aditivo.

En el algoritmo lineal iterativo propuestos, el filtro de Wigner, para restaurar la imagen degradada, cambia con el valor de la relación señal a ruido en cada etapa y se aplica en cada iteración (en el dominio de las frecuencias espaciales o en el dominio de las coordenadas espaciales). El filtro que minimiza el ruido es un pasa medias y se aplica en el dominio de las coordenadas espaciales en cada iteración.

El algoritmo bilineal iterativo aquí propuesto para restaurar las imágenes degradadas con ruido utiliza el filtro bilineal de Wiener en cualquiera de los espacios bilineales, este filtro también se modifica con el valor de la relación señal a ruido en cada iteración. Por otro lado, el ruido se puede filtrar en el dominio de las coordenadas espaciales mutuas con cualquier filtro lineal minimizador de ruido; sin embargo, también se puede filtrar con un filtro lineal en el dominio espacial para cada estimador de la **ILID** (lo cual no es deseable por estar tratando con procedimientos bilineales). Una ventaja teórica del algoritmo propuesto es que, en principio, el filtro que elimina el ruido solo se tiene que aplicar una vez (en cualquier etapa del algoritmo iterativo) y por lo tanto el ruido no se retro alimenta de una iteración a la siguiente, lo cual en la practica es difícil que suceda, puesto que siempre existe un remanente que el filtro de Wiener amplifica. El algoritmo iterativo propuesto al aplicarlo a una imagen degradada sin ruido puede iterativamente encontrar al mejor estimado.

Como veremos, en el capítulo VI, el procesamiento bilineal iterativo tiene buenos resultados cuando el nivel del ruido tiende a ser cero aún cuando el coeficiente de desenfoque tienda a ser grande, o cuando el nivel de ruido es relativamente alto pero el valor de los coeficientes de las aberraciones tienden a cero. De otra forma, al incrementarse las iteraciones, el ruido se amplifica y la imagen restaurada irremediabilmente se pierde.

Por brevedad y claridad en la presentación, en la siguiente sección de este capítulo, el procedimiento de obtener el estimado al objeto (o a la **ILID**) se lleva a cabo en el dominio de las frecuencias mutuas. En las siguientes secciones de este mismo capítulo se ofrece, de forma abreviada, las demostraciones de las relaciones de los estimados en el dominio espacial y en el dominio del espacio fase.

## IV-2. Estimado a la **ILID** con la función de espectro complejo mutuo (**fecm**).

Como se menciono anteriormente, suponemos que la imagen detectada es mono cromática en luz incoherente obtenida con un sistema óptico lineal espacialmente invariante en intensidad. El sistema óptico degrada la **ILID** debido a que la pupila compleja tiene aberraciones espaciales. También la imagen detectada tiene ruido aditivo, el cual se supone independiente de la imagen. Partimos de que la restauración a la imagen degradada bilinealmente se lleva a cabo con un procesador bilineal sin tener en cuenta el tiempo de procesamiento. Dado que se conoce la **fim** de la imagen degradada ( $r_g$ ) también se puede conocer la **fecm** del espectro de la imagen degradada ( $R_G$ ). Otra forma de llegar a la misma conclusión es: dado que se conoce la imagen degradada ( $g$ ), se conoce su espectro ( $G$ ) y por consiguiente se puede conocer  $R_G$ .

En lo que resta de las secciones de este capítulo, por facilidad de notación y ahorro de espacio se llevan a cabo las siguientes abreviaciones:  $r_l(x, y; x', y') = r_l$ , donde la letra  $l =$  puede representar la **fim** de la **ILID** ( $f$ ), la **fim** de la imagen degradada ( $g$ ), la **fim** de la **fpei** ( $h$ ) o la **fim** del ruido ( $n$ ), respectivamente. Otro conjunto propuesto de abreviaciones es el siguiente:  $R_L(u, v; u', v') = R_L$ , donde  $L = F, G, H, N$  representa las **fecm**'s de los espectros de la **ILID**, la imagen degradada, la **FTO** y el ruido, respectivamente.

Por consiguiente, y de acuerdo con la Ec. (3.47), tenemos que la **fecm** del espectro de la imagen degradada con ruido es:

$$R_{G+N} = R_H R_F + R_N. \quad (4.1)$$

Por consiguiente, un estimado a la **fecm** del espectro de la **ILID** es  $\hat{R}_F$ . Basándose en el principio de los mínimos cuadrados amortiguados, la función de error ( $E\{\hat{R}_F\}$ ) tiene la siguiente expresión:

$$E\{\hat{R}_{\hat{F}}\} = |R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}|^2 + e |\Delta \hat{R}_{\hat{F}}|^2, \quad (4.2)$$

donde la función de error del estimado a la **fecm** del espectro a la **ILID** ( $E\{\hat{R}_{\hat{F}}\}$ ) debe de ser un mínimo. El factor  $e$  es un número real no-negativo que puede ser menor a la unidad, este factor se conoce como factor de amortiguamiento o parámetro de regularización. Este factor puede aumentar o disminuir su valor monótonamente conforme el número iteraciones aumenta. Al término  $\Delta \hat{R}_{\hat{F}}$  se le conoce como la función de corrección (donde  $\Delta$  es el operador de regularización) y representa la diferencia entre dos etapas consecutivas cualesquiera en el proceso iterativo (la etapa que está por calcularse y la etapa que ya se calculo). El término  $R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}$  depende del estimado  $\hat{R}_{\hat{F}}$  ya calculado, esto es:

$$Z(\hat{R}_{\hat{F}}) = R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}. \quad (4.3)$$

Por lo tanto, podemos hacer a la función  $Z(\hat{R}_{\hat{F}})$  una expansión en series de Taylor, alrededor de la  $k'$ ésima iteración, esto es:

$$Z(\hat{R}_{\hat{F}}) = Z(\hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}) - R_H \Delta \hat{R}_{\hat{F}}. \quad (4.4)$$

Como la función de error tiene que ser un mínimo (ver Ec. (4.2)) se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial E(\hat{R}_{\hat{F}})}{\partial (\Delta \hat{R}_{\hat{F}})} = 0, \quad (4.5)$$

lo cual equivale (al sustituir el resultado de la Ec. (4.5) en la Ec. (4.2)), a la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial Z(\hat{R}_{\hat{F}})}{\partial (\Delta \hat{R}_{\hat{F}})} Z(\hat{R}_{\hat{F}}) + e \Delta \hat{R}_{\hat{F}} = 0. \quad (4.6)$$

Por otro lado, de la Ec. (4.4) se obtiene que:

$$\frac{\partial Z(\hat{R}_{\hat{F}})}{\partial(\Delta\hat{R}_{\hat{F}})} = -R_H, \quad (4.7)$$

entonces, de las Ecs. (4.4), (4.6) y (4.7), tenemos, para una iteración dada (por ejemplo, la  $k'$ ésima iteración), que se cumple la siguiente relación:

$$-R_H^* \{Z(\hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}) + R_H(\Delta\hat{R}_{\hat{F}})\} + e_k \Delta\hat{R}_{\hat{F}}. \quad (4.8)$$

donde el símbolo  $*$ , en el superíndice de  $R_H$ , denota el complejo conjugado. Para la  $k'$ ésima iteración, también se cumple que (ver Ec. (4.3)):

$$Z(\hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}) = R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}, \quad (4.9)$$

por lo tanto, utilizando las Ecs. (4.8) y (4.9), obtenemos que la función de corrección óptima es:

$$\Delta\hat{R}_{\hat{F}} = \frac{R_H^*}{|R_H|^2 + R_{H,e} + R_{e,H} + e_k} \{R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}\}. \quad (4.10)$$

donde,  $R_{H,e} = H(u + \frac{u'}{2}, v + \frac{v'}{2})e$ . Como la función de corrección óptima, en la  $(k+1)$ ésima iteración, es la diferencia entre los dos últimos estimados asociados a las **fecm**'s ( $\hat{F}^{(k+1)}$  y  $\hat{F}^{(k)}$ ), entonces:

$$\Delta\hat{R}_{\hat{F}} = \hat{R}_{\hat{F}}^{(k+1)} - \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}, \quad (4.11)$$

por consiguiente, sustituyendo la Ec.(4.11) en la Ec. (4.10), tenemos que:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(k+1)} = \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)} + R_{\Omega}^{(k)} (R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}), \quad (4.12)$$

donde,

$$R_{\Omega}^{(k)} = \frac{R_H^*}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_k} + R_{e_k, |H|^2} + e_k^2}, \quad (4.13)$$

es una posible forma del filtro bilineal de Wiener en la  $k'$ th iteración. Otra forma del filtro bilineal de Wiener es considerar, en la Ec. (4.13), que  $R_{|H|^2, e_k} = R_{e_k, |H|^2} = 0$ .

Sí partimos que el estimado inicial no se conoce, podemos proponer que éste tenga la siguiente forma:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(0)} = 0, \quad (4.14)$$

lo cual implica que  $\hat{f}^{(0)} = 0$ . Luego, sí se cumple la Ec. (4.12), el primer estimado a la **fecm** de  $\hat{F}^{(1)}$  tiene la forma:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(1)} = R_{\Omega}^{(0)} R_{G+N}, \quad (4.15)$$

en el caso en que el ruido es cero, de la Ec. (4.15), se tiene que  $\hat{R}_{\hat{F}}^{(1)} = R_{\Omega}^{(0)} R_G$ , esto es, el estimado obtenido por el método bilineal no-iterativo de mínimos cuadrados restringidos (Ec. 3.23) es igual al primer estimado obtenido por el método bilineal iterativo.

De la Ec. (4.12), cuando el espectro del ruido no es cero, podemos observar que en la  $(k+1)$ ésima iteración, la **fecm** del espectro de la imagen degradada con ruido aditivo ( $R_{G+N}$ ) se retroalimenta lo mismo que en cualquiera de las iteraciones anteriores. Lo anterior implica que el filtro bilineal para eliminar el ruido se tiene que aplicar en cada iteración para no permitir que el nivel de ruido aumente significativamente, debido a que el filtro bilineal de Wiener actúa como un filtro pasa altas (ver apéndice F). El algoritmo dado por la Ec. (4.12) tiene dos defectos: (a) consume una gran cantidad de tiempo, cada vez que se lleva a cabo una iteración hay que volver a calcular los productos  $R_H \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}$  y  $R_{\Omega}^{(k)} (R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)})$  y (b) ocupa memoria innecesariamente.

En lo que resta de esta sección se tiene como objetivo desarrollar un algoritmo que elimine los dos defectos señalados en la última sección. Para encontrar el algoritmo procedemos de la

siguiente forma: sí asumimos que  $\alpha_0 = 1$ , entonces para el primer estimador la Ec. (4.15) puede escribirse como:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(1)} = \alpha_0 R_{\Omega}^{(0)} R_{G+N}, \quad (4.16)$$

si  $k = 1$ , entonces al sustituir la  $\hat{R}_{\hat{F}}^{(1)}$  dada por la Ec. (4.16) en la Ec. (4.12), obtenemos:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(2)} = \alpha_1 R_{\Omega}^{(1)} R_{G+N}, \quad (4.17)$$

donde ahora  $\alpha_1$  es igual a:

$$\alpha_1 = 1 + \frac{e_1}{|R_H|^2 + 2R_{H,e} + e_0} \alpha_0. \quad (4.19)$$

Siguiendo la misma regla, se puede demostrar que el estimado en la  $(k+1)$ 'ésima iteración es:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(k+1)} = \alpha_k R_{\Omega}^{(k)} R_{G+N}, \quad (4.20)$$

donde,

$$\alpha_k = 1 + \frac{e_k}{|R_H|^2 + 2R_{H,e_{k-1}} + e_{k-1}} \alpha_{k-1}, \quad (4.21)$$

y donde el filtro bilineal de Wiener  $R_{\Omega}^{(k)}$  está dado por la Ec. (4.13). De la Ec. (4.20) se puede observar que el estimado inmediato anterior es:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(k)} = \alpha_{k-1} R_{\Omega}^{(k-1)} R_{G+N}, \quad (4.22)$$

por consiguiente, dos estimados consecutivos están relacionados de la siguiente manera (ver Ecs. (4.20) y (4.22)):

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(k+1)} = \frac{\alpha_k R_{\Omega}^{(k)}}{\alpha_{k-1} R_{\Omega}^{(k-1)}} \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}, \quad (4.23)$$

donde la **fecm** de  $G_N$  ( $R_{G+N}$ ) ya no aparece explícitamente. De la Ec. (4.21) el valor del parámetro  $e_k$  se calcula iterativamente, para tal efecto se fija un valor inicial de  $e_0$ , y el valor de  $c$  (constante, real y positivo), de manera que se cumpla la siguiente relación:

$$e_k = c^k e_0. \quad (4.24)$$

Cuando  $c > 1$  y  $e_0 \geq 1$ , el efecto del parámetro  $e_k$  es suavizar las frecuencias medias y altas del estimado que se está calculando. En cualquier caso, conviene que el valor del parámetro  $e_k$  aumente en valor conforme el número de iteración aumenta ya que de otra forma el filtro bilineal de Wiener empieza a amplificar las frecuencias altas tanto del ruido como de la imagen bilineal a restaurar. Cuando el valor de  $e_k$  es extremadamente pequeño el efecto puede ser contraproducente sobre todo si la longitud de la palabra de memoria del procesador digital no es suficientemente grande, ya que aparecen efectos no deseados (debido a los ceros de la **FTO**) sobre la imagen reconstruida. Cuando los valores del parámetro  $e_k$  son cercanos a cero estos efectos no deseados son una consecuencia previsible ya que el filtro bilineal de Wiener tiende a ser un filtro bilineal inverso y la función estimada  $\hat{R}_F^{(k+1)}$  a restaurar, tiene discontinuidades en los ceros de  $R_H$ . Por lo anterior es recomendable hacer que tanto el valor de la constante  $c$  como el valor del parámetro  $e_0$  sean positivos ligeramente menores a la unidad y únicamente cuando el valor de  $e_0$  sea muy pequeño dejar que el valor de  $c$  sea mayor a la unidad.

### IV-3. Estimado a la **ILID** con la función de intensidad mutua.

En este caso únicamente estableceremos el planteamiento del problema y su solución, ya que seguir el procedimiento paso a paso, para obtener el estimado a la **ILID** con la **fim**, no arroja mayor información a la ya obtenida en la sección anterior de éste mismo capítulo. Para una imagen degradada  $g$  y con ruido aditivo independiente del objeto su **fim** se escribe de la siguiente manera:



$$r_{g+n} = r_h \underset{x,y;x',y'}{*} r_f + r_n, \quad (4.25)$$

o en notación vectorial<sup>1</sup> como:

$$\vec{r}_{\bar{g}+\bar{n}} = \bar{\rho}_{\bar{h}} \vec{r}_{\bar{f}} + \vec{r}_{\bar{n}}, \quad (4.26)$$

donde  $\bar{\rho}_{\bar{h}}$  es una matriz de  $N^4 \times N^4$  elementos ordenados de forma lexicográfica, el número de elementos de los vectores  $\vec{r}_{\bar{g}+\bar{n}}, \vec{r}_{\bar{f}}, \vec{r}_{\bar{n}}$  es  $N^4$  los cuales también están ordenados léxico gráficamente. Por consiguiente, el vector del estimado a la **fim** de la **ILID** ( esto es,  $\hat{r}_{\hat{f}}$  ) se puede deducir minimizando el valor de la función de error,  $E\{\hat{r}_{\hat{f}}\}$ , a partir del principio de los mínimos cuadrados amortiguados. Esto es, (ver la Ec. (4.2)), la función de error se puede escribir como:

$$E\{\hat{r}_{\hat{f}}\} = \left| r_{g+n} - r_h \underset{x,y;x',y'}{*} \hat{r}_{\hat{f}} \right|^2 + e \left| \Delta \hat{r}_{\hat{f}} \right|^2. \quad (4.27)$$

Por un razonamiento similar al llevado a cabo en la secuencia de ecuaciones de la Ec. (4.3) a la Ec. (4.12) obtenemos que el estimado, en la etapa  $(k+1)$ ' *enesima*, de la **fim** de la **ILID**, esta dado por la siguiente relación:

$$\hat{r}_{\hat{f}}^{(k+1)} = \hat{r}_{\hat{f}}^{(k)} + r_{\omega}^{(k)} \underset{x,y;x',y'}{*} \{ r_{g+n} - r_h \underset{x,y;x',y'}{*} \hat{r}_{\hat{f}}^{(k)} \}, \quad (4.28)$$

donde  $\omega$  es el filtro de Wiener en dominio espacial y  $r_w^{(k)}$  es el filtro bilineal de Wigner, en el dominio de coordenadas espaciales mutuas. La Ec. (4.28) es de poca utilidad para manejar operaciones numéricas por lo cual una notación vectorial es mejor. En notación vectorial, la Ec. (4.28) se puede escribir como:

$$\hat{r}_{\hat{f}}^{(k+1)} = \hat{r}_{\hat{f}}^{(k)} + \left[ \vec{r}_{\bar{\omega}}^{(k)} \right] \left[ \vec{r}_{\bar{g}+\bar{n}} - \left[ \vec{r}_{\bar{h}} \right] \hat{r}_{\hat{f}}^{(k)} \right], \quad (4.29)$$

donde la matriz  $[\vec{r}_{\hat{\omega}}^{(k)}]$  es la asociada al filtro bilineal iterativo de Wiener, en el dominio del espacio mutuo, y la matriz  $[\vec{r}_{\hat{h}}]$  es la asociada a la **fim** de la **fpei**, todas las demás cantidades son vectores. Se puede demostrar que una forma posible de  $[\vec{r}_{\hat{\omega}}^{(k)}]$  es:

$$[\vec{r}_{\hat{\omega}}^{(k)}] = \frac{[\vec{r}_{\hat{h}}]^T}{[\vec{r}_{\hat{h}}]^T [\vec{r}_{\hat{h}}] + e_k^2 [I]}, \quad (4.30)$$

donde  $[I]$  es una matriz unitaria de  $N^4 \times N^4$  elementos y la letra mayúscula  $T$  significa la operación de transposición sobre la matriz  $[\vec{r}_{\hat{h}}]$ . La forma más general es:

$$[\vec{r}_{\hat{\omega}}^{(k)}] = \frac{[\vec{r}_{\hat{h}}]^T}{[\vec{r}_{\hat{h}}]^T [\vec{r}_{\hat{h}}] + e_k \{[\vec{r}_{\hat{h}}]^T + [\vec{r}_{\hat{h}}]\} + e_k^2 [I]} \quad (4.31)$$

De la Ec. (4.29), podemos observar que si  $k = 0$ , luego  $\hat{r}_{\hat{f}}^{(0)} = \bar{0}$ .

Para el primer estimado tenemos que:

$$\hat{r}_{\hat{f}}^{(1)} = [\vec{r}_{\hat{\omega}}^{(0)}]_{\vec{r}_{\hat{g}+\hat{n}}}, \quad (4.32)$$

donde  $[\vec{r}_{\hat{\omega}}^{(0)}]$ , es la matriz asociada al filtro de Wiener en el proceso no iterativo. Si  $n = 0$  luego, de la Ec. (4.32), el primer estimado a la **fim** del primer estimado de la **ILID** coincide con la versión no iterativa.

De esta manera, de la Ec. (4.29), podemos calcular el estimado  $\hat{r}_{\hat{f}}^{(k+1)}$  y por consiguiente, obtener el estimado a la **ILID**,  $\hat{f}^{(k+1)}$ . Los equivalentes a las expresiones dadas por las Ecs. (4.22) y (4.23) para los estimados a la **ILID** a partir de la **fim** no se escriben por ser inmediata su obtención.

#### IV-4. Estimado a la **ILID** con la Distribución de Cohen.

Como ya conocemos la **DC** está definida en el dominio del espacio fase. Por consiguiente, si se desea filtrar información con la

**DC**, entonces en el dominio de las frecuencias espaciales se llevarán a cabo operaciones de multiplicación, mientras en el dominio de las coordenadas espaciales (utilizando notación léxico grafica) se tendrá que llevar a cabo multiplicaciones entre matrices (lo cual equivale a operaciones de convolución). Como la **DC** es la distribución más general, en el del espacio fase, las expresiones para los estimados a la **DW** y a la **FA** pueden deducirse a partir de la expresión para los estimados de la **DC**.

La **DC** de una imagen degradada espacialmente con ruido aditivo, independiente del objeto, cumple la siguiente relación:

$$C_{g+n} = C_{h_{x,y}} * C_f + C_n, \quad (4.33)$$

se puede demostrar que en la etapa  $(k+1)$ , el estimado a la **ILID** con la **DC** es el siguiente:

$$\hat{C}_{\hat{f}}^{(k+1)} = \hat{C}_{\hat{f}}^{(k)} + C_{\omega}^{(k)} * (C_{g+n} - C_{h_{x,y}} * \hat{C}_{\hat{f}}^{(k)}), \quad (4.34)$$

donde  $C_{\omega}^{(k)}$  es el filtro bilineal de Wiener, en el espacio fase, en la iteración  $k$ ésima. La versión vectorial de la Ec. (4.34) es:

$$\hat{\bar{C}}_{\hat{f}}^{(k+1)} = \hat{\bar{C}}_{\hat{f}}^{(k)} + [\bar{C}_{\omega}^{(k)}] (\bar{C}_{\bar{g}+\bar{n}} - [\bar{C}_{\bar{h}}] \hat{\bar{C}}_{\hat{f}}^{(k)}), \quad (4.35)$$

donde,

$$[\bar{C}_{\omega}^{(k)}] = \frac{[\bar{C}_{\bar{h}}]^T}{[\bar{C}_{\bar{h}}] [\bar{C}_{\bar{h}}]^T + e_k \{ [\bar{C}_{\bar{h}}] + [\bar{C}_{\bar{h}}]^T \} + e_k^2}. \quad (4.36)$$

Una vez obtenido  $\hat{C}_{\hat{f}}^{(k+1)}$  se puede obtener el estimado a la **fm** del estimado de la **ILID**,  $\hat{f}_{\hat{f}}^{(k+1)}$ , y de ésta última función, el estimado deseado,  $\hat{f}^{(k+1)}$  en la etapa  $(k+1)$ . Es conveniente mencionar que la versión vectorial de la **DC** se puede obtener sin que cambien los resultados obtenidos en las Ecs. (4.34).

Los estimados a la **ILID** usando la **DW** o la **FA** son casos particulares del estimado a la **ILID** usando la **DC**. En el primer caso la expresión equivalente a la Ec. (4.34) es:

$$\hat{W}_{\hat{f}}^{(k+1)} = \hat{W}_{\hat{f}}^{(k)} + W_{\omega}^{(k)} *_{x,y} (W_{g+n} - W_h *_{x,y} \hat{W}_{\hat{f}}^{(k)}), \quad (4.37)$$

el filtro bilineal de Wiener modificado en el espacio de fase queda dado por la siguiente expresión:

$$W_{\omega}^{(k)} = \frac{W_h^*}{W_h *_{x,y} W_h^* + e_k \{W_h + W_h^*\} + e_k^2}, \quad (4.38)$$

Para encontrar el estimado a la **ILID** usando la **FA** es similar al caso de la **DW** de tal forma que las ecuaciones equivalentes a las Ecs. (4.37) y (4.39) para la iteración  $k+1$  son:

$$\hat{A}_{\hat{f}}^{(k+1)} = \hat{A}_{\hat{f}}^{(k)} + A_{\omega}^{(k)} *_{x,y} (A_{g+n} - A_h *_{x,y} \hat{A}_{\hat{f}}^{(k)}) \quad (4.39)$$

donde el filtro bilineal de Wiener para la **FA** ( $A_{\omega}^{(k)}$ ) esta dado por la siguiente igualdad:

$$A_{\omega}^{(k)} = \frac{A_h^*}{A_h *_{x,y} A_h^* + e_k \{A_h + A_h^*\} + e_k^2}, \quad (4.40)$$

En cualquier caso, de las funciones en el espacio fase mencionadas anteriormente, el valor del parámetro,  $e_k = c^k e_0$  es siempre positivo, ya que las constantes  $c$  y  $e_0$  son siempre valores reales no-negativos. Como se asume que la imagen degradada espacialmente es independiente del ruido, entonces se debe cumplir que:  $W_{g+n} = W_g + W_n$  y que  $A_{g+n} = A_g + A_n$ .

Las versiones vectoriales escritas en forma léxico gráfica asociadas a la **DC**, **DW** y **AF** no arrojan mas información que las versiones obtenida en las ecuaciones (4.34), (4.37) y (4.39), por lo cual no se obtienen explícitamente.

## CAPITULO V.

# PROCESADORES BILINEALES DISCRETOS EN RESTAURACIÓN DE IMAGENES BILINEALES DEGRADADAS CON RUIDO ADITIVO.

### V-1. Introducción.

Los sistemas bilineales estudiados en los capítulos II a IV son continuos en cualquiera de sus dominios. Una posible forma de procesar información bilineal analógica es utilizar procesadores ópticos, como los mencionados en el capítulo III (**fim**, **DW**) y en apéndice F (**fecm**); otra forma, es utilizar procesadores híbridos (ópticos y digitales). Uno de los inconvenientes de los procesadores bilineales ópticos es que la información, en cualquiera de los espacios posibles en que pueden utilizarse, únicamente puede observarse en el caso de imágenes unidimensionales. En el caso de imágenes bidimensionales la **fim** solo se puede observar y/o modificar para un punto (definido por dos coordenadas), la **fecm** para un par de frecuencias y la **DC** (**DW** o **FA**) en un punto o en un par de frecuencias.

Los procesadores bilineales híbridos son una mejora en tiempo y recuperación de información con respecto a los procesadores bilineales ópticos (ver Cap. IV) ya que en estos procesadores la información se puede visualizar o filtrar, de forma eficiente y rápida sobre todo si se utiliza válvulas ópticas. En los procesadores bilineales híbridos la información se puede visualizar, almacenar y manejar por medio de una computadora personal. Sin embargo, las restauraciones con procesadores híbridos usando la **DW** no son de la calidad esperada, entre otros factores: por la dificultad en implementar físicamente los filtros, por la incertidumbre en el posicionamiento mecánico de los filtros (los cuales son normalmente de dimensiones muy pequeñas) y finalmente por que los filtros propuestos no han sido los adecuados para el propósito requerido.

El uso de los procesadores bilineales para procesar imágenes degradadas espacialmente, en general, han recibido

poca atención a excepción de aquellos que hacen uso de la **DW**, aparentemente los problemas de fondo son: la falta de claridad en el manejo de los espacios, el beneficio que estos procesadores pueden reportar en comparación con los procesadores lineales y los tiempos de procesamiento, para obtener la información buscada.

Por otro lado, los procesadores bilineales digitales para restaurar imágenes degradadas no son muy populares ya que los tiempos de computo son extremadamente grandes y los requisitos de memoria son muy altos, en comparación con los procesadores lineales digitales. Además se tienen problemas en el manejo masivo de datos (los requerimientos de memoria tanto real como de disco duro son muy superiores a los requeridos por los procesadores lineales) y finalmente la ventaja de usar procesadores bilineales digitales no es convincente ya que la restauración de imágenes bilineales con degradaciones variantes sigue siendo un problema a resolver.

En este capítulo los resultados más significativos del capítulo IV se hacen discretos, señalando los pasos para evaluar los estimados de la **ILID** discreta (**ILIDd**) de las funciones bilineales conocidas. En las primeras simulaciones numéricas (capítulo VI) llevadas a cabo para procesar bilinealmente información digital se tiene que optimizar tanto las instrucciones de los programas como el acceso al disco duro de la computadora (dada la cantidad de operaciones que se tienen que llevar a cabo para evaluar los estimados e implementar las funciones y los filtros bilineales).

## V-2. Función de intensidad mutua discreta.

Por simplicidad, inicialmente se trabaja con una función de una sola variable, cuando sea necesario se hace en dos variables . Sea  $f(x)$  una función continua y  $f(l)$  su versión discreta. Entonces sí  $0 \leq l \leq L-1$ , la **fim** discreta (**fimd**) es:

$$r_f(l, l') = f(l + l'/2) f^*(l - l'/2), \quad (5.1)$$

como el soporte de  $r_f(l, l')$  es igual al soporte de la función  $f(l)$  en la coordenada  $l$ , entonces la **fimd** tiene  $L$  columnas y la coordenada  $l'$  tiene  $2L$  renglones. Por lo tanto se infiere que la región donde

$r_f(l, l')$  está definida es un rectángulo de  $L$  por  $2L$  píxeles; el soporte de la  $r_f(l, l')$  tiene valores diferentes de cero en un rombo cuyas aristas son las coordenadas  $(L,0)$ ,  $(0,L)$ ,  $(2L-1,L)$  y  $(L,2L-1)$ . En la Fig. (5.1) se muestra la región del cuadrado externo de  $2L \times 2L$  píxeles y el soporte de  $r_f(l, l')$  (rombo sombreado) donde sus valores son diferentes de cero.

Dado que  $l$  y  $l'$  son números enteros, entonces la  $r_f(l, l')$  solo puede evaluarse para valores de  $l'$  que sean múltiplos enteros de dos (ver Ec. (5.1)), lo cual implica que se pierden todos aquellos valores para los cuales  $l'$  es entero impar. Una forma de salvar la pérdida de los valores impares es sobre muestrear la función  $f(l)$ . Otra posibilidad es llevar a cabo el siguiente procedimiento:

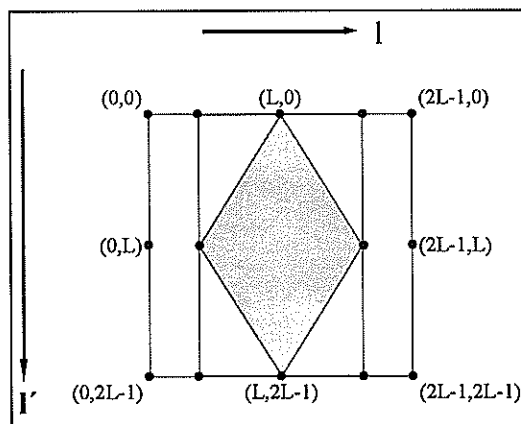


Fig. 5.1 Soporte de la función  $r_f(l, l')$ , (rombo sombreado, valores diferentes de cero).

Primero, se multiplica  $f(l-l')$  por  $f(l)$ , píxel a píxel, donde el soporte de la función  $r_f(l, l')$  esta definido. Después, para cada píxel, el producto  $f(l-l')f(l)$  se centra en el soporte limitado por el rombo (ver Fig. 5.1) de acuerdo al valor correspondiente a los píxeles  $l$  y  $l'$ . Para ilustrar estos dos pasos en la Fig. 5.2 se muestra, en la parte superior izquierda, la función  $f(l)$ . En la misma figura la parte sombreada de gris es el producto  $f(l-l')f(l)$ , centrado con respecto al eje de coordenadas  $l'$ ; finalmente, en figura se muestra el tamaño del soporte de  $r_f(l, l')$  para cada  $l'$  (línea negra continua).

Al tratar de simular numéricamente la **DC** discreta (**DCd**), la **DW** discreta (**DWd**) o la **FA** discreta (**FAd**) asociada a  $f(l)$  es conveniente que la región espacial (rectángulo o cuadrado) donde se encuentre definida  $r_f(l, l')$  sea siempre del mismo tamaño para las tres distribuciones, independientemente del valor de la variable  $l'$ . Lo anterior es con el fin de obtener resultados consistentes al pasar del dominio real al dominio del espacio fase o al dominio de las frecuencias mutuas, ya que se tiene que llevar a cabo transformaciones u operaciones numéricas (como transformada de Fourier rápida o cualesquiera otra: transformada coseno, de Hartley (ver apéndice D), Hadamard etc.) que requieren el mismo número de muestras en uno y otro dominio.

Para entender la complejidad de cambiar de una función de una variable a dos variables con soporte de  $M \times M$  píxeles, en Fig. 5.3 se muestra la secuencia de soportes bidimensionales para la función de intensidad mutua  $r_f(l, m; l', m')$  asociada a una función  $f(l, m)$ . En este caso para cada par de valores  $(l, m)$  existe un conjunto de valores  $(l', m')$  que definen el tamaño del soporte donde  $r_f(l, m; l', m')$  puede tener valores diferentes de cero. Para el caso en que  $l' = 0, m' = 0$ , se tiene el máximo tamaño de soporte de  $r_f(l, m; l', m')$ , tomando como referencia este caso es conveniente delimitar y centrar los otros tamaños de soportes de  $r_f(l, m; l', m')$  ( $l' \neq 0, m' \neq 0$ ). En la Fig. 5.3 todos los soportes de  $r_f(l, m; l', m')$  están enmarcados en línea gruesa continua dentro de un cuadrado de  $2M \times 2M$  píxeles. Las marcas fiducias que aparecen en las esquinas de cada uno de los soportes que genera  $r_f(l, m; l', m')$ , es para mostrar el efecto de invertir las coordenadas  $(l', m')$  de uno de los dos factores del producto  $r_f(l, m; l', m')$ . Regresando al caso de una función en una variable, una manera de llevar a cabo procesamiento con la  $r_f(l, l')$  es observar que para cada punto  $l$  existen  $l'$  puntos vecinos que pueden modificar o alterar dicho punto. Así para cada punto  $l$ , se puede proponer filtros, en el dominio de las coordenadas espaciales, cuyo soporte debe ser variable (dependiendo de cuantos puntos vecinos  $l'$  tiene asociado el punto  $l$ ). Finalmente, en el dominio de la función  $r_f(l, l')$  se



pueden llevar a cabo en diferentes regiones diferentes tipos de procesamientos para mejorar, alterar o eliminar información de la función  $f(l)$ , este tipo de procesamiento bilineal no es común en la literatura científica.

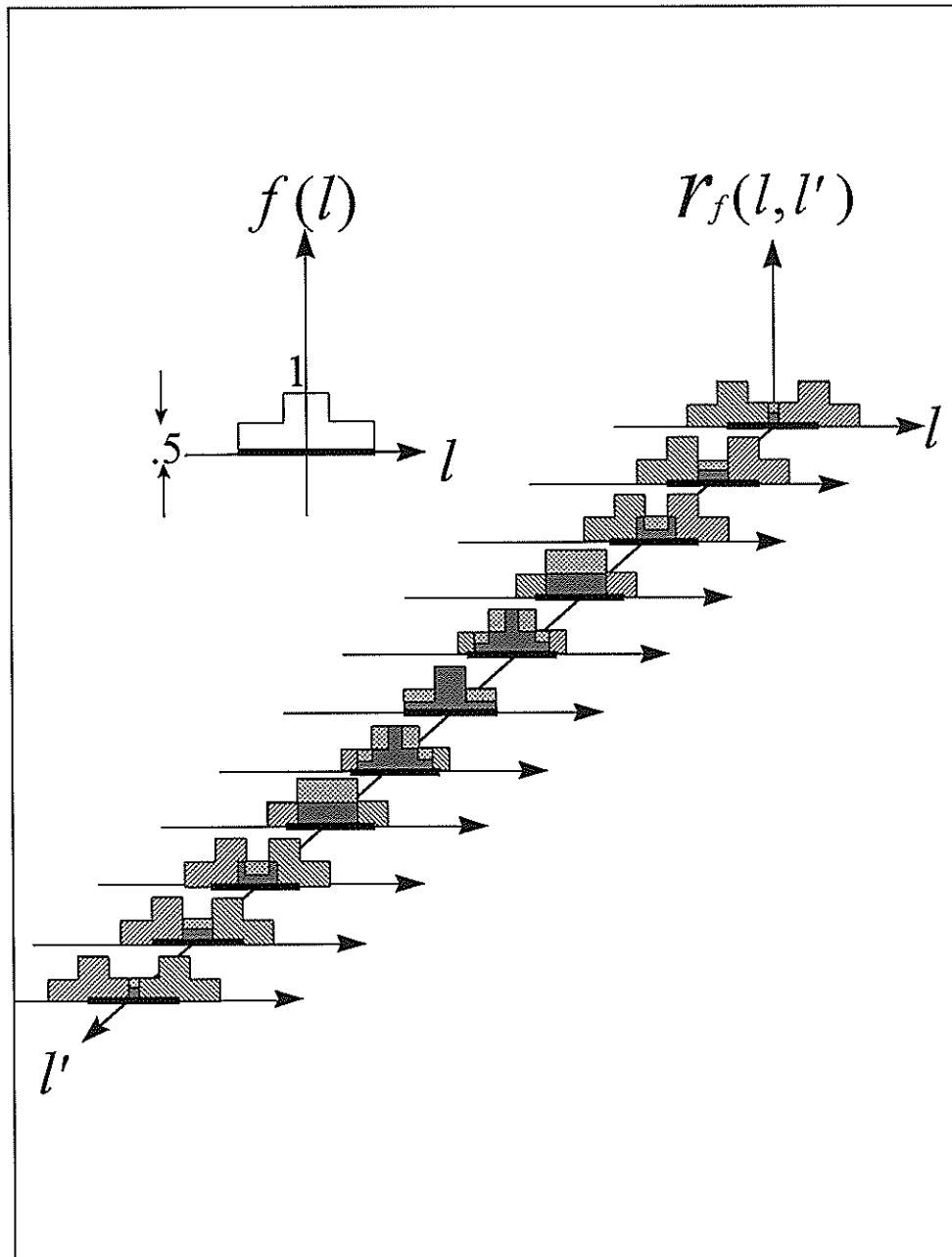


Fig. 5.2. Secuencia de funciones que definen la **fim**,  $r_f(l, l')$ , conforme  $l'$  cambia, para la  $f(l)$  mostrada.

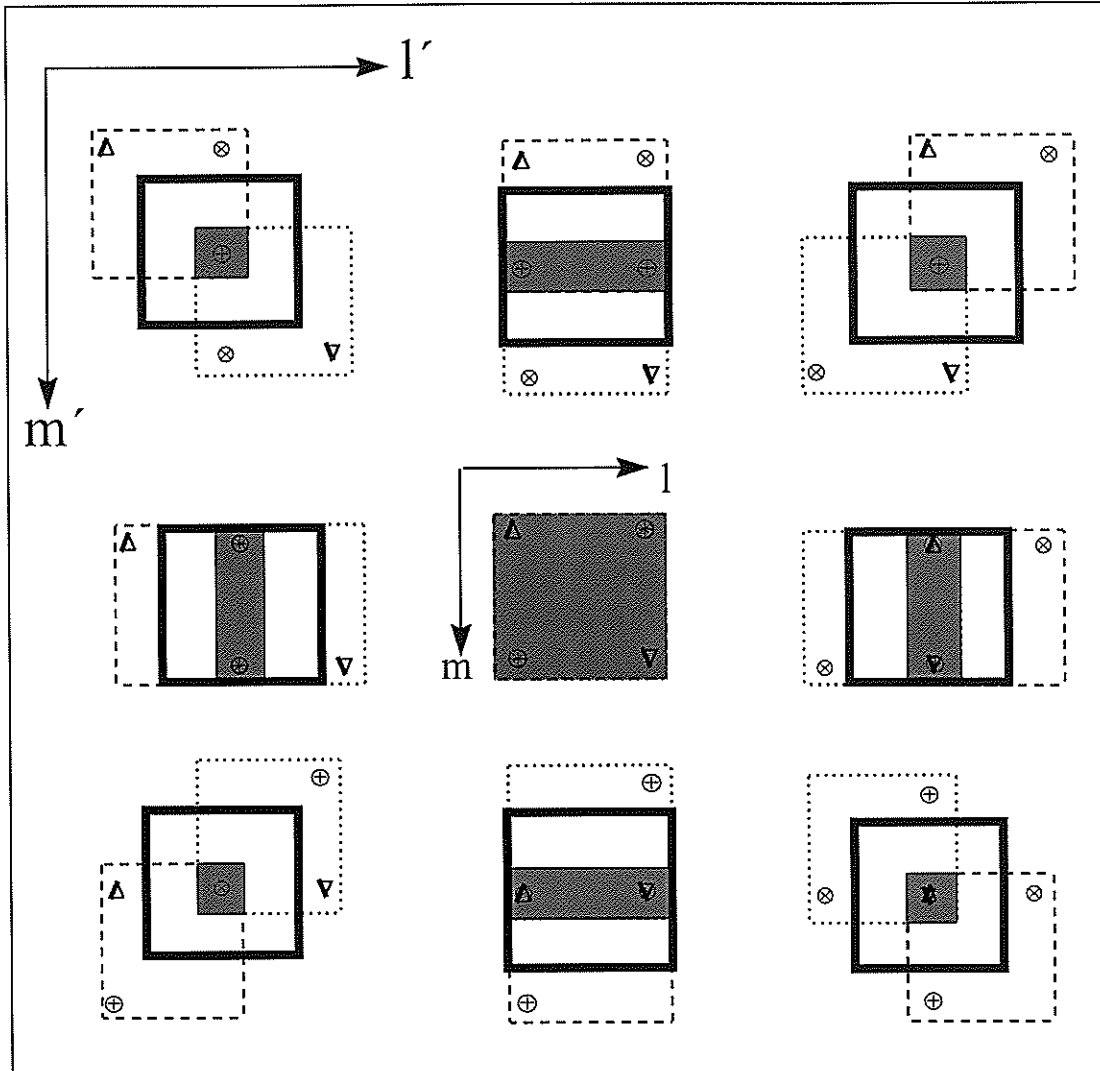


Fig. 5.3. Soportes de la función  $r_f(l, m; l', m')$  con áreas de  $L \times M$  píxeles para diferentes valores de  $l', m'$ , (rectángulos sombreados).

### V-3. Función de espectro complejo mutuo discreto.

La **fecm** discreta (**fecmd**) ( $R_F(p, p')$ ) del espectro en amplitud compleja  $F(p)$  es la **TFDd** discreta (**TFDd**) 2-D en las variables  $l, l'$  de la  $r_f(l, l')$ . Por definición la **fecmd** es:

$$R_F(p, p') = F(p + p'/2)F^*(p - p'/2), \quad (5.2)$$

donde  $F(p)$  es la **TFDd** de la función  $f(l)$ . Al usar un algoritmo de

**TF** de radix  $2^n$ , si la región donde esta definida  $r_f(l, l')$  es un cuadrado de  $2L \times 2L$  píxeles, entonces la función  $R_F(p, p')$  es un cuadrado de  $2L \times 2L$  píxeles. Dentro de esta región se encuentra definido el ancho de banda asociado a la **fecmd**. La **fecmd**  $R_F(p, p')$  muestra como cada frecuencia  $p$  tiene asociadas  $p'$  frecuencias vecinas que pueden modificar el valor de  $p$ . En la dominio de la **fecmd** es en donde se puede filtrar información bilinealmente degradada, usando el filtro de Wiener bilineal discreto. Para calcular el estimado a la **ILIDd**, posteriormente, se regresará al espacio de  $r_f(l, l')$ . Otra forma de obtener el estimado  $\hat{f}(l)$  a la **ILIDd** es: a partir de **fecmd** obtener el estimado al espectro de la **ILIDd** ( $F^*(0)\hat{F}(p)$ ), para posteriormente por medio de una **TFId** discreta (**TFId**) obtener el estimado a la **ILIDd**, el cual estará indeterminado hasta una constante.

#### V-4. Distribución de Cohen discreta.

En esta sección se propone una metodología para simular numéricamente la relación que existe entre la **fimd**, la **fecmd** y la **DCd**. Sean  $l, l'; p, p'$  las variables discretas de las variables continuas  $x, x'; u, u'$  respectivamente; entonces, la **TFDd** de  $r_f(l, l')$ , en la variable  $l$ , es la **FAd** asociada a  $f(l)$ , esto es:

$$A_f(p', l) = \sum_{l=0}^{L-1} r_f(l, l') e^{-j2\pi \frac{p'l}{L}}, \quad (5.3)$$

y la **DWd** de  $f(l)$  es la **TFDd** de  $r_f(l, l')$  en la variable  $l'$ , esto es:

$$W_f(l, p) = \sum_{l'=0}^{L-1} r_f(l, l') e^{-j2\pi \frac{pl'}{L}}. \quad (5.4)$$

Por otro lado, se cumplen las siguientes dos relaciones:

$$A_F(l', p') = A_f(p', l'), \quad (5.5)$$

y

$$W_F(p, l) = W_f(l, p), \quad (5.6)$$

donde,

$$A_F(l, p') = \sum_{p'=0}^{L-1} R_F(p, p') e^{j2\pi \frac{pl'}{L}}, \quad (5.7)$$

y

$$W_F(p, l) = \sum_{p'=0}^{L-1} R_F(p, p') e^{j2\pi \frac{p'l}{L}}. \quad (5.8)$$

Como la **DCd** y la **DWd** tienen las mismas variables y están relacionadas por medio de una convolución, de acuerdo a la Ec. (2.15), tenemos que:

$$C_f(l, p) = W_f(l, p) *_{l,p} \Phi(l, p), \quad (5.9)$$

o en términos de la **FAd**:

$$C_f(l, p) = \sum_{l'=0}^{L-1} \sum_{p'=0}^{L-1} A_f(p', l') \phi(p', l') e^{j2\pi \left( \frac{p'l - pl'}{L} \right)}, \quad (5.10)$$

donde  $\Phi(l, p)$ , ver la Ec.(5.9), es igual a la aplicación de una **TFId** y **TFDd** sobre el "kernel"  $\phi(p', l')$ , esto es:

$$\Phi(l, p) = \sum_{l'=0}^{L-1} \sum_{p'=0}^{L-1} \phi(p', l') e^{j2\pi \left( \frac{p'l - pl'}{L} \right)}. \quad (5.11)$$

Para funciones reales no-negativas 2-D, el cálculo numérico de su **DCd** se puede realizar de la siguiente forma:

1. Se toman muestras de  $f(x, y)$  y se obtiene  $r_f(l, m; l', m')$
2. Se obtiene  $A_f(p', q'; l', m')$  (a partir de  $r_f(l, m; l', m')$ )
3. Se obtiene  $A_f(p', q'; l', m') \phi(p', q'; l', m')$  (una vez definido el "kernel").
4. Se obtiene  $C_f(l, m; p, q)$  de la aplicación sucesiva de una **TFDd-2D** y una **TFId-2D** sobre el producto  $A_f(p', q'; l', m') \phi(p', q'; l', m')$ ,

algunas gráficas, de la **DCd** de funciones en una dimensión,  $f(l)$ , siguiendo los pasos (1) al (4), ya se han publicado<sup>15,22,28-33,58</sup> para un "kernel" dado. En el caso de funciones bidimensionales se han obtenido secuencias de la **DWd** 4-D siguiendo un esquema similar al de la Fig. 5.3<sup>32,33</sup>.

A fin de tener una idea del número total de posibles distribuciones de intensidad que se pueden generar para representar a la **DWd** 4-D asociada a una función bidimensional, supongamos que se tiene una imagen ( $f(l,m)$ ) de  $256 \times 256$  píxeles, para cada punto  $l,m$  la **fmnd** es una matriz de  $512 \times 512$  píxeles, de tal forma que el arreglo de matrices que forma la **fmnd** es de 262144. Es conveniente tener en cuenta que para un punto  $l,m$ , los valores de los píxeles que se localizan fuera del producto de los soportes de  $f(l+l'/2; m+m'/2)$  y  $f(l-l'/2; m-m'/2)$  son cero (ver Fig. 5.3). Cuando,  $l=m=0$ , el producto  $f(l'/2; m'/2)f(-l'/2; -m'/2)$  tiene una ventana máxima ( $256 \times 256$  píxeles) con píxeles cuyos valores, en general, son diferentes de cero. Luego, en lugar de operar con matrices de  $512 \times 512$  elementos podemos reducir el tamaño de las matrices y operar con matrices de  $256 \times 256$  elementos, de esta manera se evitan operaciones innecesarias y un tiempo extremadamente grande de procesamiento de información. De la misma forma que en el caso en una dimensión, la recuperación de la función  $f(l,m)$  a partir  $r_f(l,m,l',m')$  es otro problema a resolver: como las variables  $l,l'; m,m'$  son enteros positivos y la **fmnd** solo se puede valorar para valores enteros, entonces los valores de las variables discretas  $l',m'$  únicamente pueden tomar valores enteros múltiplos de dos, esto implica que para valores impares la **fmnd** no puede ser valuada y por lo tanto, para estos valores,  $f(l,m)$  no puede ser recuperada. La forma clásica de resolver éste problema es doblar el número de las muestras originales de la función  $f(l,m)$ , como ya se ha propuesto en varios trabajos<sup>29,63-65</sup>, pero el costo de sobre muestrear es aumentar, al menos, al cuadrado el número total de operaciones, con el consiguiente gasto de tiempo de cómputo y memoria. Otra forma, es generalizar la propuesta para el caso de funciones de una sola variable (Secc. V.2), esto es: primero, compeler a que la

$r_f(l, m; l', m')$  sea evaluada, para toda  $l, m$ , en los píxeles donde el soporte del producto  $f(l+l'/2, m+m'/2)f(l-l'/2, m-m'/2)$  sea diferente de cero, y segundo, definir la extensión del dominio donde el soporte de dicho producto quede centrado (en el sistema de referencia dado por las coordenadas  $l', m'$ ). Finalmente, para el caso en que la función "kernel" sea igual a la unidad, el soporte de  $r_f(l, m; l', m')$ , el ancho de banda de la **fecmd** y el producto del soporte por el ancho de banda en la **DWd** (o en la **FAd**) asumimos están relacionados de acuerdo al esquema propuesto por Bamler<sup>3</sup>.

### V-5. Recuperación de la fim a partir de su Distribución de Cohen discreta.

Una vez que se obtiene la **DCd** asociada a la función  $f(l, m)$ , lo que se desea es recuperar la función  $f(l, m)$ . En el caso de imágenes en luz incoherente  $f(l, m)$  es real y no-negativa, entonces una vez que se tiene la **DCd** el procedimiento es como sigue:

1. Se aplica **TFId** 4-D a la **DCd** y se obtiene  $A_f(p', q'; l', m')\phi(p', q'; l', m')$ .
2. Se asume que la función "kernel" es conocida, entonces, sí el "kernel" no tiene ceros, el resultado obtenido en (1) se divide por  $\phi^*(p', q'; l', m')/(|\phi(p', q'; l', m')|^2 + 0.0001)$  y por consiguiente  $A_f(p', q'; l', m')$  se puede evaluar. En el caso de que el "kernel" tenga ceros, entonces  $A_f(p', q'; l', m')\phi(p', q'; l', m')$  se multiplica por  $\phi^*(p', q'; l', m')/(|\phi(p', q'; l', m')|^2 + e)$ , donde  $e$  es un número que decrece de acuerdo al número de ceros del kernel, con lo cual se obtiene  $\hat{A}_f(p', q'; l', m')$ .
3. Aplicando una **TFId** 2-D a  $\hat{A}_f(p', q'; l', m')$ , se tiene  $\hat{r}_f(l, m; l', m')$  que es un estimado a  $r_f(l, m; l', m')$ .
4. Sí  $l' = m' = 0$ , entonces  $\hat{r}_f(l, m; 0, 0) = |\hat{f}(l, m)|^2$ . Como  $f(l, m) \geq 0$  entonces  $+\sqrt{\hat{r}_f(l, m; 0, 0)}$  es el valor del estimado deseado.

El caso en que la **DCd** coincida con la **DWd** (esto es, cuando el "kernel" es igual a la unidad) ya ha sido reportado<sup>13</sup>; cuando el

"kernel" es diferente a uno queda mucho por ser investigado, al menos en procesamiento bilineal de imágenes degradadas.

### V-6. Procesamiento bilineal numérico de imágenes bilineales degradadas sin ruido.

En esta sección se trata los casos de imágenes degradadas espacialmente de forma invariante, este caso ya han sido reportado con algoritmos lineales<sup>14</sup>. Como veremos los procesadores bilineales digitales permiten también tratar los casos de imágenes variantemente degradadas cuando físicamente se separan regiones con desenfoques diferentes. El procedimiento es el siguiente:

1. Se calcula  $R_G(p, q, p', q')$  a partir de  $G(p, q)$
2. Se calcula  $R_H(p, q, p', q')$  a partir de  $H(p, q)$
3. Se obtiene el filtro bilineal de Wiener discreto,  $R_\Omega(p, q, p', q')$ , utilizando la siguiente relación

$$R_\Omega(p, q, p', q') = \frac{R_H^*(p, q, p', q')}{|R_H(p, q, p', q')|^2 + 2 \operatorname{Re}\{R_{H,e}(p, q, p', q')\} + e^2}, \quad (5.12).$$

donde  $e$  es un numero real no-negativo.

4. Se multiplican  $R_G(p, q, p', q')$  por  $R_\Omega(p, q, p', q')$  para obtener un estimado,  $\hat{R}_f(p, q, p', q')$ .
5. Se obtiene  $\hat{r}_f(l, m, l', m')$  a partir de  $\hat{R}_f(p, q, p', q')$ .
6. Se calculan los valores de la **ILIDD**  $\hat{f}(l, m) = +\sqrt{\hat{r}_f(l, m, 0, 0)}$ , los cuales dependen tanto de la **FTO** como del valor numérico del parámetro  $e$ .

Sí la imagen degradada es espacialmente variante por regiones, entonces el procedimiento de recuperación de la **fm** de la **ILID** es el siguiente:

1. Se separan físicamente la imagen variantemente degradada por regiones (diferente región para cada degradación)
2. Se calculan la  $R_G(p, q, p', q')$  y la  $R_H(p, q, p', q')$  para cada región obtenida en el primer paso

3. Para cada región, se calculan los filtros bilineales de Wiener discretos con los resultados obtenidos en el segundo paso y se asigna un valor de  $\epsilon$  que puede o no ser diferente (para cada región), dependiendo del valor del coeficiente del polinomio de aberraciones.
4. Se multiplican el(los) resultado(s) obtenido(s) en el segundo paso por el(los) resultado(s) obtenidos en el tercer paso, de acuerdo a la degradación de la región y al filtro bilineal de Wiener correspondiente, y así poder restaurar cada región
5. Para cada región se obtiene un estimado a la **fecmd** asociada al espectro de la **ILIDd**, de tal forma que se obtendrán tantos estimados como regiones con diferentes de degradaciones y valores de éstas se tengan.
6. Se calcula el estimado a la **fimd** para cada **fecmd** que se obtuvo en el paso cinco.
7. Por regiones, de acuerdo a la degradación, se obtienen
 
$$\hat{f}(l,m) = +\sqrt{\hat{f}_f(l,m;0,0)}$$

### V-7. Procesamiento bilineal numérico de imágenes bilineales degradadas con ruido.

Este caso no ha sido reportado. La suposición de que la imagen degradada tiene ruido aditivo facilita encontrar un algoritmo iterativo para calcular el mejor estimado a la **ILIDd**. Nuevamente, se trata por separado el caso en que la imagen sea invariante o variantemente degradada. Al ruido se le asocia una estadística y se considera independiente de la imagen. El ruido se puede agregar a la **fim** de la imagen degradada o a la imagen degradada misma para, después, obtener la **fim** de la imagen degradada con ruido.

Existen dos posibles formas de tratar de minimizar el ruido usando procesadores bilineales: la primera forma es al momento de generar la **fimd** asociada a la imagen degradada con ruido, en este caso se sugiere aplicar un filtro pasa medias (o cualquier otro que filtro de ruido) sobre la **fimd** y posteriormente iniciar cualquiera de los procedimientos dados en la sección V.6 para restaurar imágenes; la segunda forma es emplear cualquiera de los dos procedimientos esbozados en la sección V.6 y al final aplicar un filtro pasa medias sobre el estimado a la **ILIDd**, para obtener el



estimado a la **ILIDd** con el ruido ya minimizado. En principio, cualquiera de los dos métodos debe de llevar a resultados buenos; sin embargo, como veremos en el siguiente capítulo ninguno de los dos métodos es totalmente exitoso sobre todo cuando el coeficiente del polinomio de aberraciones aumenta y/o el nivel de ruido también se incrementa.

### V-8. Procesamiento bilineal numérico iterativo de imágenes bilineales degradadas con ruido.

En el capítulo IV se encontraron dos relaciones bilineales iterativas (Ecs. (4.12) y (4.23)) con las cuales se puede restaurar la **fm** de imágenes espacialmente degradadas de forma invariante con ruido aditivo. La primera es una extensión a sistemas bilineales de sistemas lineales, en la cual en cada iteración se aplica un filtro pasa medias para minimizar el ruido, de otra forma el ruido se esta retro alimentando y sumando en cada iteración, por consiguiente la relación señal ruido decrece haciendo difícil obtener un buen estimado a la **ILIDd**. La segunda relación, en teoría, no tiene el problema de que el nivel de ruido se incremente, aunque en la practica se tiene el problema de que las frecuencias altas del ruido (por pequeñas que sean) se amplifican y retroalimentan cada vez que se aumentan el número de iteraciones, por la acción del filtro bilineal de Wiener. Por consiguiente, parte de este trabajo es adoptar criterios de cuando una imagen degradada con ruido se puede o no restaurar.

#### PORCEDIMIENTO ITERATIVO.

De las fórmulas iterativas que se encontraron en el capítulo IV, se eligió operar en el espacio de las frecuencias mutuas debido a que se quiere comparar los resultados ya reportados con los aquí encontrados; esto es, se opera con la Ec. (4.12). Se tienen dos posibilidades: en la primera, se encuentra el espectro de la imagen degradada con ruido y al resultado se le obtiene su **fecmd**, en la segunda se obtiene la **fm<sub>d</sub>** de la imagen espacialmente degradada y con ruido aditivo y numéricamente se calcula su **fecmd**. Una vez que se obtiene la **fecmd** se aplica el algoritmo iterativo. Para el

caso de imágenes con degradación espacialmente invariante se asume que los valores de  $e_0$  y  $c$  así como el nivel de ruido, cantidad y tipo de degradación de la imagen son valores de entrada al programa; los pasos a llevar a cabo son los siguientes:

1. Se toma  $k=0$  y se calculan numéricamente las siguientes expresiones:

$$R_{\Omega}^{(0)}(p, q, p', q') = \frac{R_H^*(p, q, p', q')}{|R_H(p, q, p', q')|^2 + 2 \operatorname{Re}\{R_{H, e_0}(p, q, p', q')\} + e_0^2}, \quad (5.13)$$

$$R_{G+N}(p, q, p', q') = \sum_{m'=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} r_{g+n}(l, m, l', m') e^{-j2\pi \frac{lp+mq+l'p'+m'q'}{L}} \quad (5.14)$$

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(1)}(p, q, p', q') = R_{\Omega}^{(0)}(p, q, p', q') R_{G+N}(p, q, p', q'). \quad (5.15)$$

2. Calcular  $\hat{r}_{\hat{f}}^{(1)}(l, m, l', m') = \sum_{q=0}^{L-1} \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{q'=0}^{L-1} \sum_{p'=0}^{L-1} R_{\hat{F}}^{(1)}(p, q, p', q') e^{j2\pi \frac{lp+mq+l'p'+m'q'}{L}}$
3. Evaluar  $\hat{f}^{(1)}(l, m) = +\sqrt{\hat{r}_{\hat{f}}^{(1)}(l, m, 0, 0)}$ .
4. Para  $k>0$ , se calcula numéricamente

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(k+1)} = \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)} + R_{\Omega}^{(k)}(R_{G+N} - R_H \hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}), \quad (5.16)$$

donde se han quitado los índices  $p, q, p', q'$  de los argumentos de las funciones  $R_{\Omega}^{(k)}$ ,  $\hat{R}_{\hat{F}}^{(k)}$ ,  $R_{G+N}$  y  $R_H$ . Además el filtro bilineal de Wiener es:

$$R_{\Omega}^{(k)} = \frac{R_H^*}{|R_H|^2 + 2 \operatorname{Re}\{R_{H, c^k e_0}\} + c^{2k} e_0^2}, \quad (5.17)$$

con

$$\alpha_0 = 1, \quad (5.18)$$

5. Calcular,

$$\hat{f}_f^{(k)}(l, m; l', m') = \sum_{q=0}^{L-1} \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{q'=0}^{L-1} \sum_{p'=0}^{L-1} R_{\hat{f}}^{(k)}(p, q; p', q') e^{j2\pi \frac{lp+mq+l'p'+m'q'}{L}}, \quad (5.19)$$

6. Evaluar para toda  $l, m$

$$\tilde{f}^{(k)}(l, m) = +\sqrt{\tilde{r}_{\tilde{f}}^{(k)}(l, m; 0, 0)}. \quad (5.20)$$

7. Si la imagen no tiene ruido el proceso se termina en el paso 6, eligiendo algún criterio de convergencia. En el caso de la imagen de un punto desenfocado con ruido, éste se minimiza con un filtro, reductor de ruido, pasa medias o mediana en el dominio de las **fim**'s y se aplica otro filtro (**RNC**) en el dominio de las **fecm**'s.

A continuación se establecerá algunos criterios de convergencia con sus posibles beneficios.

### CRITERIO DE CONVERGENCIA.

Como el procedimiento es iterativo conviene tener uno o más criterios de convergencia y así parar el procedimiento iterativo.

Un primer criterio es esperar a que se realice un determinado número de iteraciones y observar el resultado. De la experiencia obtenida se observa que sí el valor del coeficiente de la aberración de la pupila compleja de salida tiende a aumentar, se requiere un mayor número de iteraciones (dados  $c$  y  $e_0$ ). Por otro lado, si el número de iteraciones es superior al requerido, entonces el estimado obtenido se puede deteriorar con respecto al mejor estimado y el procedimiento no es válido.

Un segundo criterio, es calcular el módulo al cuadrado de la diferencia entre dos estimados sucesivos, cuando dicho módulo sea menor que una cantidad prescrita el procedimiento iterativo deja de funcionar. Sin embargo, este criterio puede tener un estimado que no sea el mejor, debido a las siguientes consideraciones: **i)** a que la cantidad prescrita para parar el procedimiento no sea la adecuada o **ii)** a que el valor del coeficiente  $e_m$  no varíe con la rapidez necesaria, generando un número muy grande de iteraciones sin obtener el resultado deseado.

Un tercer criterio es comparar la **ILIDd** con su estimado, previamente calculado, por medio del cálculo del módulo al

cuadrado de su diferencia o en forma indirecta, al estilo de Maeda<sup>46</sup>, obteniendo un porcentaje del parecido del estimado de la **ILIDd** con la **ILIDd** misma (o el objeto). Este último procedimiento tiene la desventaja de suponer a priori que se conoce la **ILIDd**, lo cual en general se desconoce.

Un cuarto criterio de convergencia es que el procedimiento sea del tipo interactivo<sup>36</sup>, parar el procedimiento cuando visualmente se obtenga el mejor estimado, con o sin ruido, para posteriormente aplicar el filtro reductor del ruido. Este criterio es subjetivo pero si se usa conjuntamente un criterio numérico el resultado final puede ser bueno.

## FILTRO REDUCTOR DEL RUIDO.

La mayoría de los filtros que reducen el ruido son filtros pasa medias, esto es, filtros que cortan las frecuencias altas, pero dejan pasar las frecuencias bajas y medias del ruido. Estos filtros pueden ser o no lineales y operar indiferentemente con imágenes de tonos de gris o con imágenes binarias. Actualmente, existen filtros no-lineales para minimizar el nivel de ruido en una imagen binaria con ruido aditivo, este tipo de filtros supone que la imagen no tiene degradación espacial. Estos filtros hacen uso del concepto de Red Neuronal Celular (**RNC**) y tienen un amplio campo de aplicación en aquellas imágenes que se transmiten y procesan en tiempo real con técnicas analógicas usando circuitos VLSI<sup>40,42,45</sup>. En este trabajo se adapta e implementa digitalmente un filtro **RNC** reductor de ruido. El filtro **RNC** también se puede aplicar a imágenes binarias ligeramente desenfocadas para enfocarlas sin usar el filtro de Wiener.

El algoritmo se implementa en una computadora personal Pentium II. Por otro lado, se utiliza la referencia<sup>42</sup> para implementar la **RNC**, la cual opera en células de  $3 \times 3$  píxeles, hasta minimizar el nivel de ruido en cada célula de la imagen. En el filtro **RNC** el proceso iterativo se repite y se para cuando todas las células se han estabilizado, esto es, cuando cada una de las células ya no modifica su valor, aún cuando se lleven a cabo más iteraciones. A continuación se hace un resumen de la forma en que opera el filtro

**RNC**, que se utiliza en este trabajo, usando la notación bilineal aquí propuesta.

Es conveniente mencionar que debido a la **ecuación de salida** que se elige, en la **RNC**, se normalizan los valores obtenidos del último estimado  $\hat{f}_{j+n}^{(k+1)}$ , para después mapear estos valores entre -1 y +1 (-1 para los valores igual a cero y +1 para los valores igual a uno) y de esta forma construir la función de entrada, que se aplica en la **ecuación de estado**.

Un modelo simplificado de un **RNC** dinámico tiene como **ecuación de estado** la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}_{f_{i,r}}(l,l';t) = & -\hat{r}_{f_{i,r}}(l,l';t) + \sum_{C_{i,r} \in V_{l,l'}} A_{i,i'}(l,l') S_{i,i'}(l,l';t) \\ & + \sum_{C_{i,r} \in V_{l,l'}} B_{i,i'}(l,l') \mu_{i,i'}(l,l') + c, \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde  $V_{l,l'}$  es la vecindad de la celda o píxel  $(i,i')$  y  $C_{i,r}$  son las celdas vecinas a la celda  $(i,i')$ . Las funciones  $\hat{r}_f, \dot{\hat{r}}_f$  son, respectivamente, el estado actual y la derivada con respecto al tiempo del estado actual en el píxel  $(l,l')$ ; las plantillas  $A_{i,i'}(l,l'), B_{i,i'}(l,l')$  son de  $3 \times 3$ , píxeles cuyo elemento central  $(l,l')$  coincide con el centro de la celda que se está procesando, la matriz  $\mu_{i,i'}(l,l')$  son valores de entrada los que inicialmente se escogen igual al valor de  $\hat{r}_f$ . Finalmente  $c$  es una constante que se ajusta como valor umbral, este valor umbral depende del tipo de filtro (**AC** o **RNC**) que se utilice y es constante para todos los píxeles a procesar.

La **ecuación de salida** de la **RNC** tiene la siguiente forma

$$S_{i,i'}(l,l';t) = \frac{1}{2} \left( \left| \dot{\hat{r}}_{f_{i,r}}(l,l';t) + 1 \right| - \left| \dot{\hat{r}}_{f_{i,r}}(l,l';t) - 1 \right| \right). \quad (5.22)$$

la cual es una función no-lineal cuyo valor se estabiliza cuando  $S_{i,i'}(l,l';t)$  es igual a -1 ó +1 (para el caso de que la imagen sea

binaria). La gráfica de la función de la ecuación de salida es la Fig. 5.4, donde en la parte lineal se localizan todos los valores de  $\hat{r}_f$ .

Para llevar a cabo la eliminación de ruido con una **RNC** es necesario determinar el tamaño del radio de la vecindad, las dimensiones de las plantillas  $A_{i,r}(l,l'), B_{i,r}(l,l')$  con los valores de sus elementos. La Fig. 5.5 presenta un diagrama de bloques con la función de entrada, la función de salida y la ecuación de estado para llevar a cabo el procesado bilineal de  $\hat{r}_f$  con una **RNC**. De acuerdo a la Ec. (5.22), se asume que la plantilla de control ( $B_{i,r}(l,l')$ ) y la plantilla de

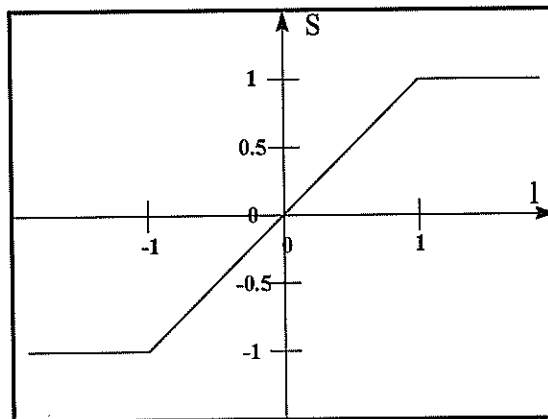


Fig. 5.4 Gráfica de la Ecuación de Salida en un **RNC**.

retroalimentación ( $A_{i,r}(l,l')$ ) están definidas de antemano con un tamaño de radio de vecindad igual a la unidad (de  $3 \times 3$  píxeles).

El filtro **RNC** también se puede aplicar cuando la imagen binaria esta degradada y sin ruido en los dos casos siguientes: cuando el coeficiente de aberración de desenfoque es pequeño, usando el algoritmo no-iterativo (Ec. (3.23)) en su restauración. En el caso en que el coeficiente de aberración sea grande, se puede emplear el algoritmo iterativo (Ec. (4.12) o Ec. (4.12)) hasta una

etapa en que el estimado a la **find** de la **ILIDd** este suficientemente cerca del mejor estimado de la  $r_f(l,l')$ , de esta forma se logra

reducir el número de iteraciones que se requieren para obtener el estimado óptimo.

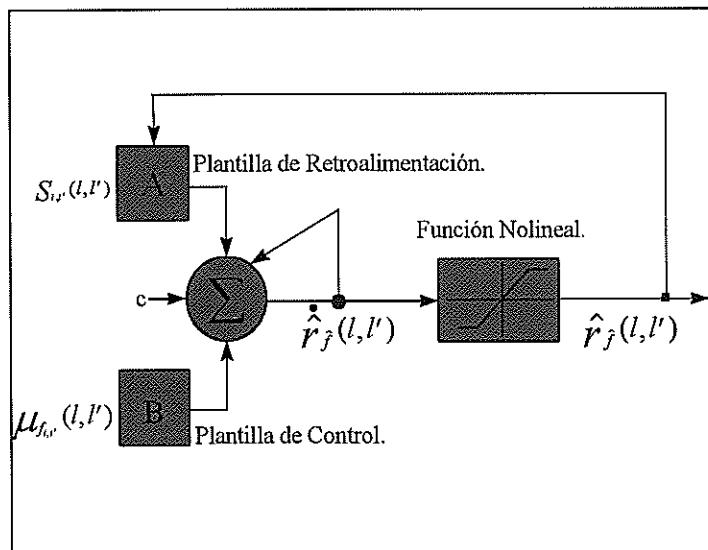


Fig. 5.5 Diagrama de Bloques para procesar  $\hat{r}_j(l,l')$  con una RNC.

Una explicación más detallada de cómo funcionan los filtros **RNC**, se puede obtener de las referencias arriba mencionadas; el apéndice C, complementa esta sección.

## CAPITULO VI.

### RESULTADOS.

#### VI-1 Introducción.

En este capítulo se presentan algunas simulaciones numéricas de imágenes degradadas por desenfoque y/o diferentes niveles de ruido que ilustran la información que podemos manejar y obtener de los procesadores bilineales.

Se presenta, como ejemplo, el caso de la imagen sin desenfoque y sin ruido, cuando el objeto es un punto. Este ejemplo ilustra la reducción de tiempo de computo en el calculo de las funciones bilineales como consecuencia de la simetría radial de la imagen del punto y de la **FTO** desenfocada así como la forma de disminuir el numero de muestras a analizar de cualquiera de estas las funciones. Para restaurar bilinealmente información, se obtiene el filtro bilineal de Wiener tanto en el dominio de las frecuencias mutuas como en el dominio de las coordenadas espaciales mutuas para una relación señal a ruido dada. De todas las posibles distribuciones en el espacio fase se elige la de Wigner por ser la de uso más difundido. Lo que se observa y se puede analizar en cada muestra es la distribución de intensidad, en los diferentes dominios de las funciones bilineales.

Finalmente, de los resultados obtenidos con las funciones bilineales se extraen (capitulo V) los estimados lineales a la **ILID** y se visualiza su distribución de intensidad para verificar ésta con resultados conocidos.

#### VI-2. Obtención de resultados.

Para ahorrar operaciones y tiempo de computo en la simulación numérica de la **fim**, de la **fecm** y de la **DW** procedemos de la siguiente forma:

1. se obtiene: las **fim**'s de las funciones en el dominio espacial, por ejemplo de la **fpei**; las **fecm**'s de las



funciones en el dominio de las frecuencias, por ejemplo la **FTO**; y las **DW**'s en dominio del espacio fase.

2. para visualizar distribuciones de intensidad tanto de las funciones bilineales como de las funciones lineales se les calcula numéricamente a todas estas funciones el logaritmo natural de la suma de uno más el modulo al cuadrado de la función.

Por último, es conveniente recordar que la **DW** de una función espacial es igual a la **DW** de la transformada de Fourier de dicha función. Sin embargo, debido a la manera seleccionada para observar las funciones bilineales, lo que despliega la **DW** asociada a la función espacial, es la distribución de intensidad en términos de las frecuencias espaciales, para una determinada posición; mientras que la **DW** de la transformada de Fourier de la función, despliega la distribución de intensidad en términos de las coordenadas espaciales, para un par de frecuencias dadas.

### VI-3. Procesado bilineal mono cromático de la imagen de un punto en un sistema óptico limitado por difracción.

La imagen de un punto de un sistema óptico con simetría radial sin aberraciones y limitado por difracción es el cuadrado de la función  $Bsenc(ar)$  ( $Bsenc^2(ar) = [2J_1(\pi ar) / \pi ar]^2$ ), donde  $J_1$  es la función Bessel de primer tipo y primer orden,  $a$  es el radio de la pupila del sistema óptico y  $r$  es la coordenada radial en el plano de la imagen. Como **FTO** es la Transformada de Fourier Directa (TFD) de  $Bsenc^2(ar)$ , por consiguiente la **fpei** coincide con la imagen de un punto (ver capítulo I).

Como la **fpei**, la **FTO**, el Filtro de Wiener en dominio de las frecuencias espaciales (**FWfe**) y el filtro de Wiener en el dominio de las coordenadas espaciales (**fWce**) todas tienen simetría radial, es suficiente tener información de la **fim**, la **fecm** y la **DW** a lo largo de uno de los ejes del sistema de coordenadas que define a la función bilineal para conocer su distribución de intensidad en cualquier región espacial o frecuencial, según sea el caso. La restricción anterior evita desplegar una gran cantidad de información asociada

información asociada a las funciones bilineales con simetría radial en 4-D.

En el caso mas general, la imagen a procesar no tiene ningún tipo de simetría. Por consiguiente, la representación bilineal no se puede reducir como en el ejemplo anteriormente dado. En este caso, como ya se menciona en el capítulo V, la información que se puede desplegar es proporcional al cuadrado del doble de número de píxeles de la imagen. Sin embargo, para familiarizarse de la forma en que operan los procesadores bilineales es suficiente trabajar con las funciones bilineales asociadas a la imagen de un punto.

Para el caso de la imagen de un punto, las Figs. (VI.1) a (VI.6) representan diferentes funciones lineales y bilineales para un **Sistema Óptico Limitado por Difracción (SOLD)** en luz mono cromática. Este ejemplo es interesante por que se puede observar como las frecuencias altas y los detalles finos se pueden restaurar (por efecto del filtro bilineal de Wiener) hasta alcanzar el equivalente a la imagen de un punto en luz coherente de una pupila real del doble de tamaño de la que originalmente se partió.

En la Fig. (VI.1), se presenta en tonos de gris la **fpei** (parte izquierda superior (**isu**)), la **FTO** (parte derecha superior (**dsu**)), el **fwfe** (parte izquierda inferior (**iin**)) y el **fwce** (parte derecha inferior (**din**)) de un **SOLD**. Cada una de estas funciones tiene 256X256 píxeles. El valor de  $e$  (la relación señal a ruido del **Fwfe**) es de  $1 \times 10^{-4}$  y el **fwce** es igual a la **TF Inversa (TFI)** del **Fwfe**. El diámetro de la **FTO** es de 56 píxeles lo cual implica que el radio de la pupila del sistema óptico de luz coherente es de 14 píxeles. En esta figura se puede observar la simetría radial que presentan las cuatro funciones y por lo tanto en lugar de aplicar el algoritmo de **TF discreta rápida (TFR)** en la obtención de cualquiera de las funciones a transformar, lineales o bilineales, se usa el algoritmo de **Transformada Coseno (TC) discreta rápida (TCr)**, (ver apéndice D), lo que conlleva a un ahorro en tiempo del orden de la mitad para el calculo de las transformaciones lineales.

En la Fig. (VI.2) se presentan la **fim** de la **fpei (isu)**, la **fecm** de la **FTO (dsu)**, la **fecm** del **fwfe (iin)**, la **fim** de la **fwce (din)**. Cada función bilineal esta compuesta de 25 cuadros, donde cada

cuadro (muestra) es una distribución de intensidad que tiene una posición diferente (o frecuencia espacial diferente) consecutiva de 255 posibles posiciones (para las **fim**'s, las **fecm**'s o las **WD**'s). En cada posición (o par de frecuencias) de la funciones bilineales, el cuadro tiene 256X256 píxeles; el cuadro superior izquierdo esta en el origen de coordenadas, el inmediato inferior es el segundo (con coordenadas (0,1)) y así consecutivamente, de tal forma que el último cuadro es el inferior derecho (con coordenadas (0,25)).

En la Fig.(VI.3), se presenta en la parte **isu**, la **fecm** del producto de la **FTO** por el **FWfe**. En la parte **dsu**, se presenta la **fim** de la convolución de la **fpei** con el **fwce** para  $e = 1 \times 10^{-4}$ ; para  $e = 1 \times 10^{-8}$  y  $e = 1 \times 10^{-32}$ , esta convolución entre funciones bilineales se presenta en la parte **iin** y en la parte **din**, respectivamente. En esta figura la **fecm** y la **fim** están relaciones por transformadas coseno en 4-D de las funciones lineales **FTO**, **FWfe** y **fpei**, **fwce**.

Las Figs. (VI.4) y (VI.5) presentan distribuciones de intensidad de **DW**'s. La Fig. (VI.4) para: la **DW** asociada **fpei**, en la parte **isu**; la **DW** asociada a la **FTO**, en la parte **dsu**; la **DW** del **FWfe**, en la parte **iin** y la **DW** del **fwce**, en la parte **din**. En la Fig. (VI.5) se presentan el producto de la **DW** de la **FTO** por **FWfe** con  $e = 1 \times 10^{-4}$  (en la parte **isu**); la convolución de la **DW** entre la **fpei** con el **fwce** cuando  $e = 1 \times 10^{-4}$  (en la parte **dsu**) y cuando  $e = 1 \times 10^{-8}$  y  $e = 1 \times 10^{-32}$  las partes **iin** y **din**, respectivamente.

El producto de la **FTO** ( $H$ ) por el **FWfe** con  $e = 1 \times 10^{-4}$  se puede obtener usando la relación  $+\sqrt{R_{HxFWfe}(u, v; 0, 0)}$ , (Fig. (VI.2)). En la Fig. (VI.6), parte **isu**, se puede visualizar este producto; en la parte **dsu**, se visualiza la convolución de la **fpei** con el **fwce** para  $e = 1 \times 10^{-4}$ ; en la parte **iin** y en la parte **din** se muestra esta convolución, cuando  $e = 1 \times 10^{-8}$  y  $e = 1 \times 10^{-32}$ , respectivamente.

Las convoluciones, mostradas en la Fig. (VI.6), se obtienen de las funciones bilineales mostradas en las Fig. (VI.3); estas convoluciones son las imágenes restauradas de la **ILID** de un punto. El deterioro de la información se observa al comparar las partes **dsu**, **iin** y **din** de la Fig. (VI-2) con las de la Fig. (VI.6), lo cual redundo finalmente en que las imágenes restauradas sean de menor calidad conforme  $e$  se hace más pequeño, lo cual es de esperarse, puesto que conforme  $e \rightarrow 0$  el filtro bilineal de Wiener

tiende a aumentar las frecuencias altas del ruido introducido por el tamaño finito de la longitud de palabra de la computadora.

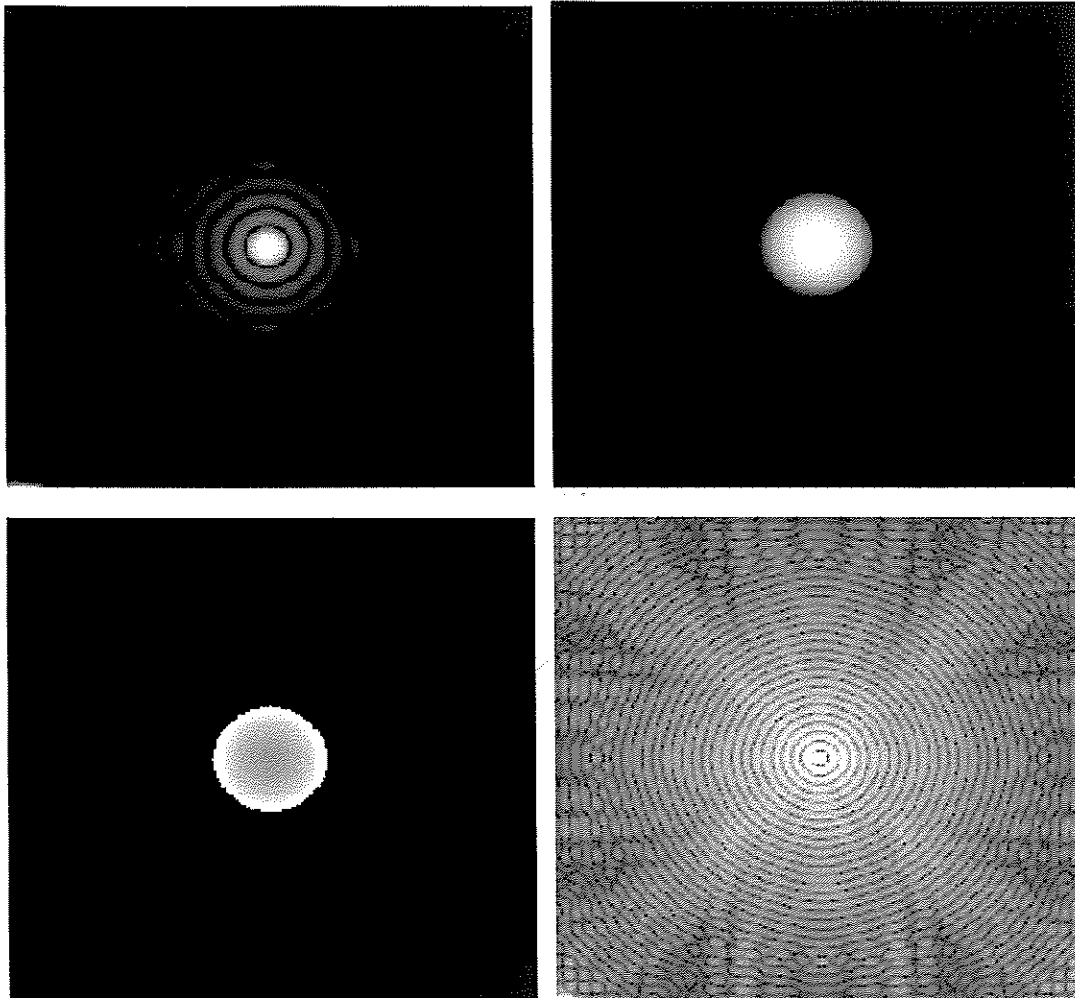
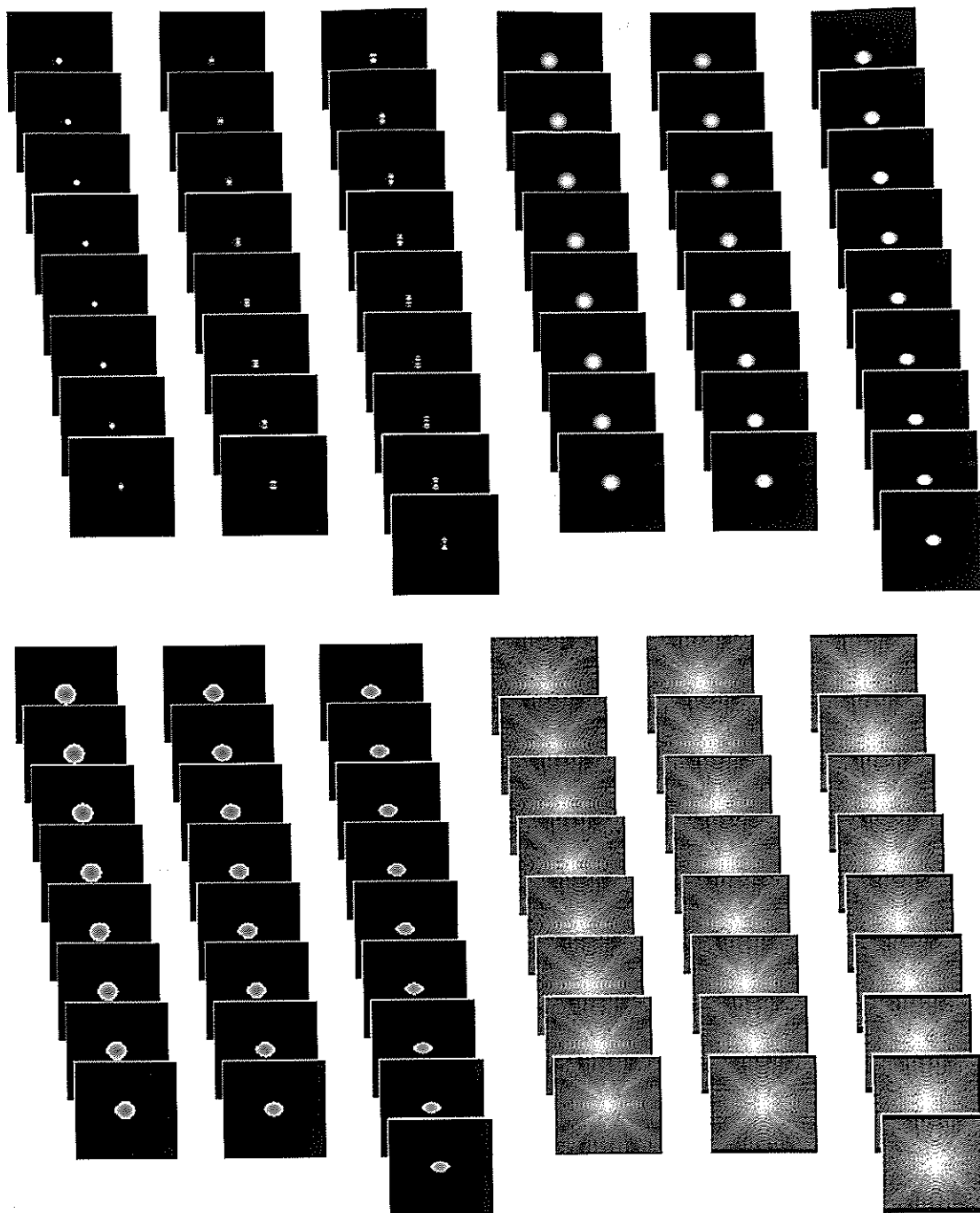


Fig.(VI.1). Para un **SOLD** y  $e = 1 \times 10^{-4}$ , la **fpei** (imagen) esta representada en la parte izquierda-superior (**isu**), la **FTO** en la derecha superior (**dsu**), el **FWfe** en la izquierda-inferior (**iin**) y el **fWce** en la derecha-inferior (**din**).



Fig(VI.2). . Para un **SOLD** y  $e = 1 \times 10^{-4}$ , la **fim** de la **fpei** esta en la parte **isu**. La **fecm** de la **FTO**, la **fecm** del **FWfe** y la **fim** del **FWce** están en las partes **dsu**, **iin** y **din**, respectivamente.

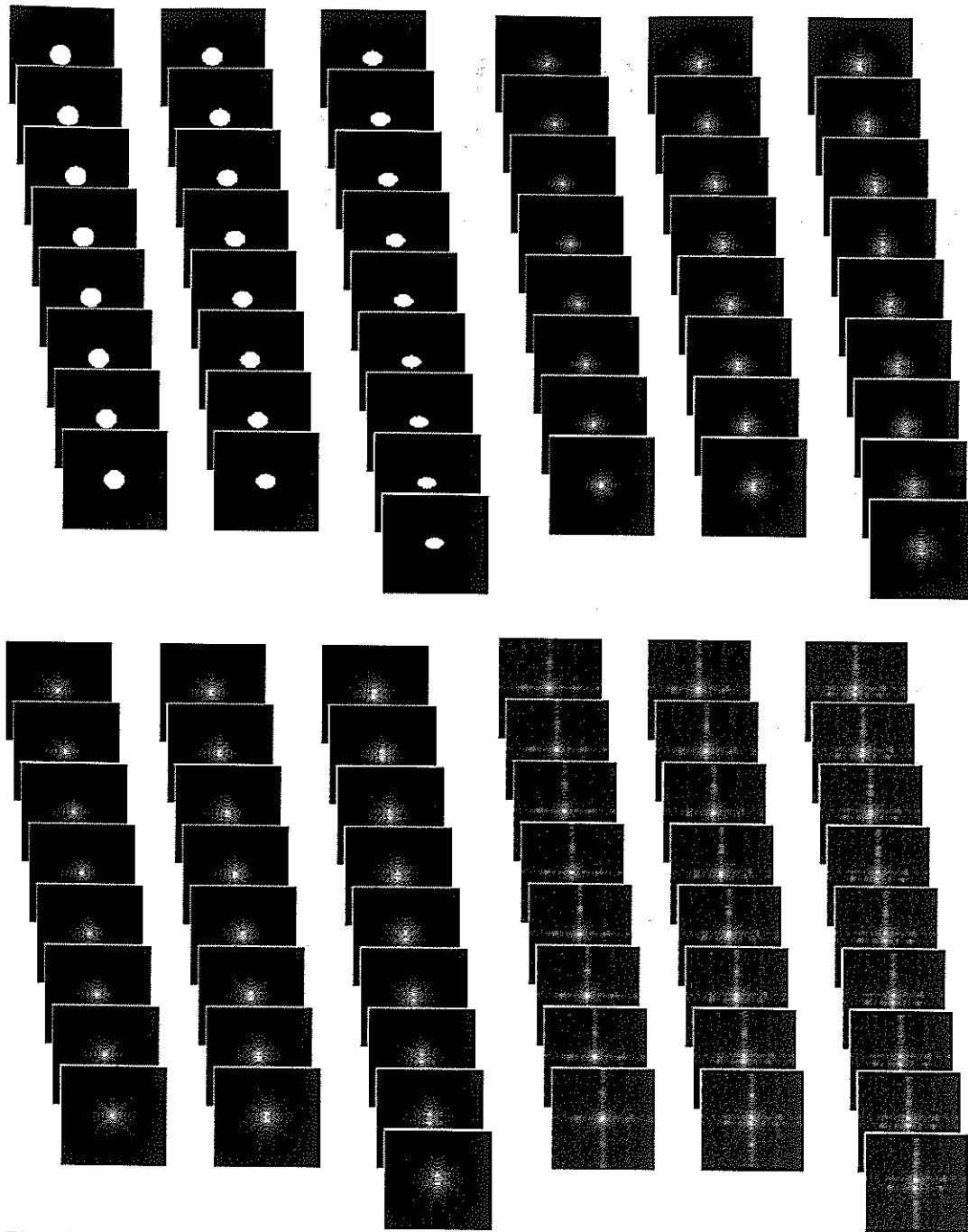


Fig. (VI.3). . Para un **SOLD**, la **fecm** del producto de la **FTO** con el **FWfe** esta en la parte **isu**. La **fim** de la convolución de la **fpei** con el **fwce** para:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (**dsu**),  $e = 1 \times 10^{-8}$  (**iin**) y  $e = 1 \times 10^{-32}$  (**din**), respectivamente.

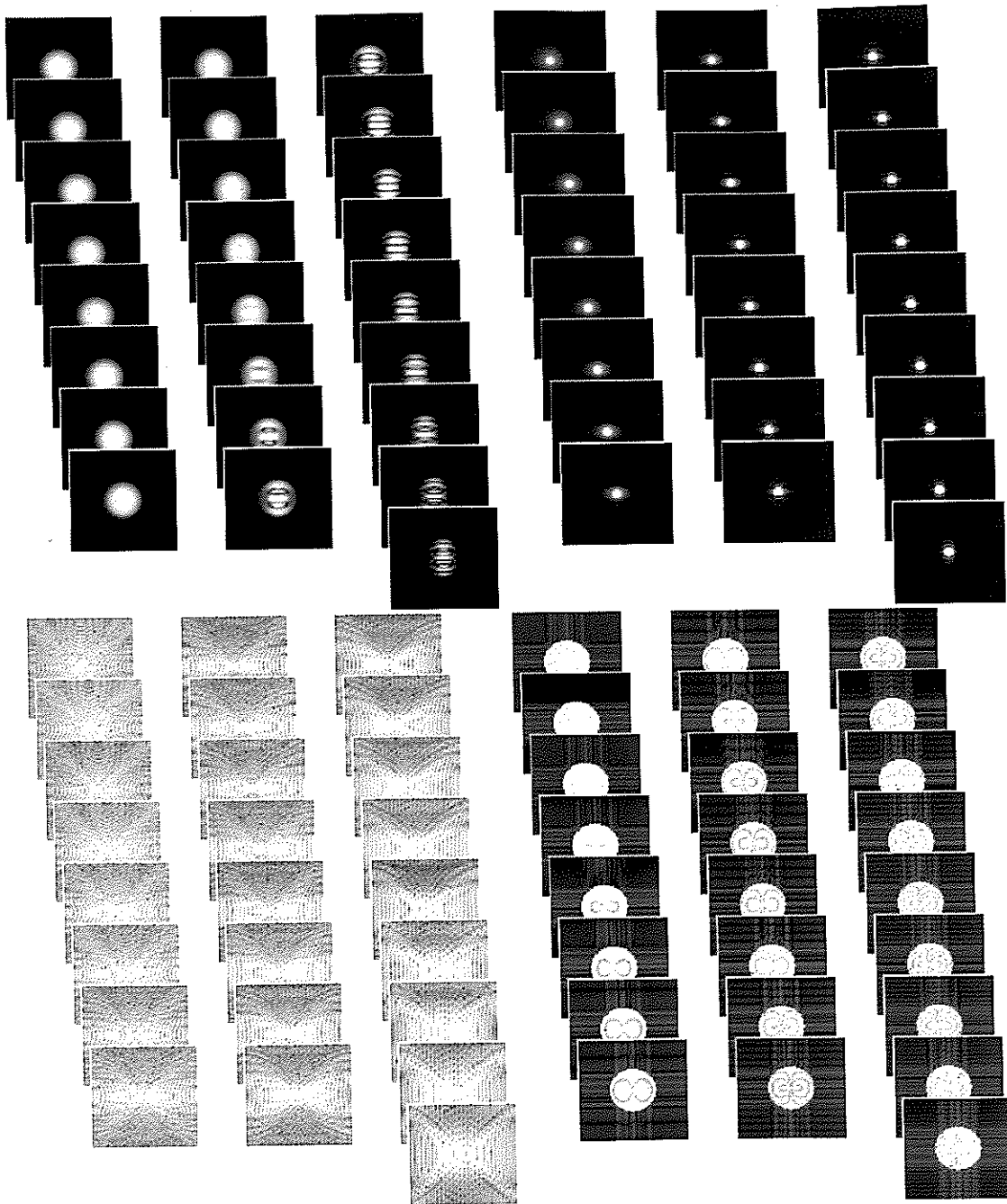


Fig. (VI.4). . Para un **SOLD** y  $e = 1 \times 10^{-4}$ , la **DW** de la **fpei** esta en la parte **isu**. La **DW** de la **FTO** en (**dsu**), la **DW** del **FWfe** en (**iin**), la **DW** del **fWce** en (**din**).

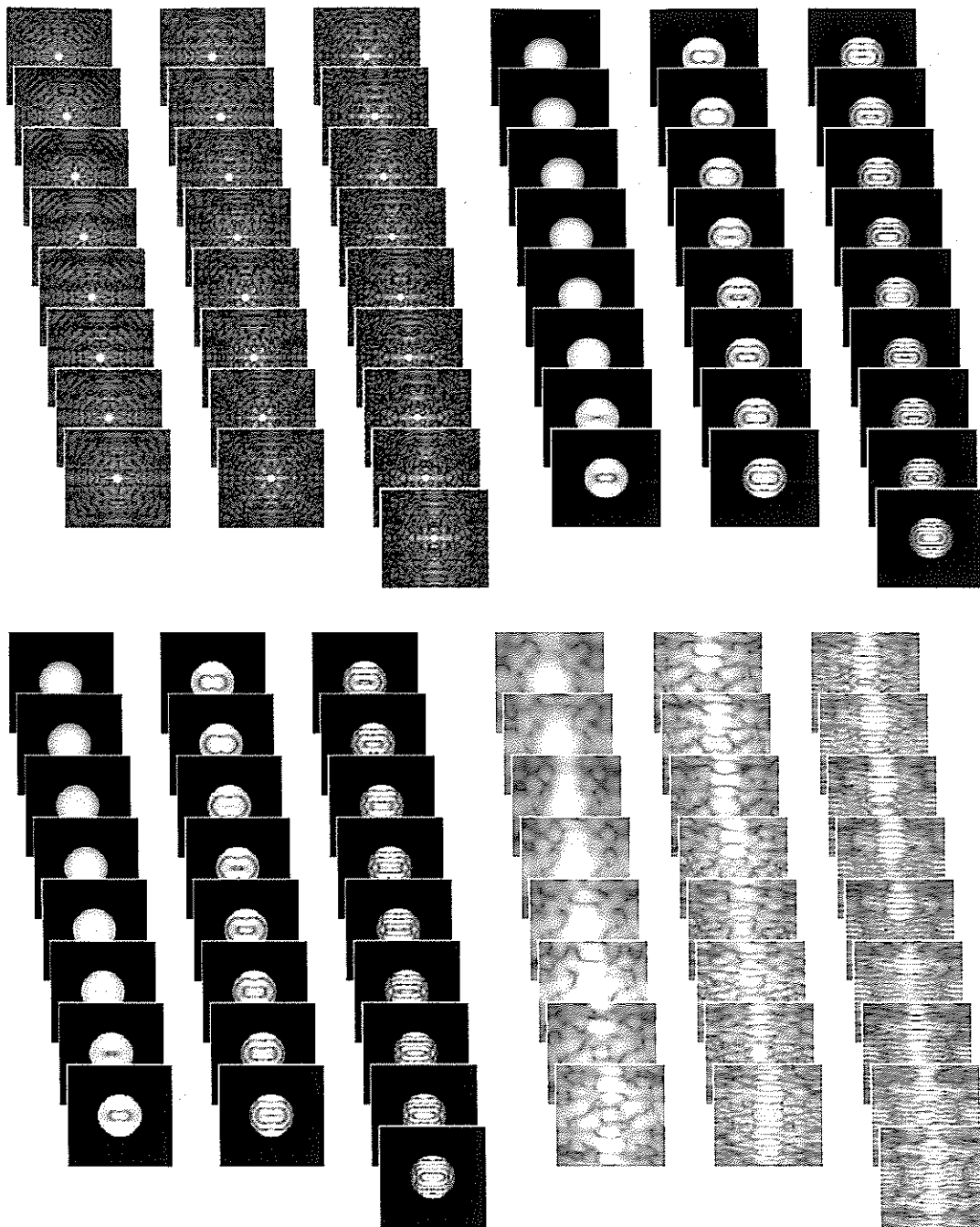


Fig. (VI.5). . Para un **SOLD**, la **DW** del producto de la **FTO** con el **FWfe** está en la parte **isu** donde  $e = 1 \times 10^{-4}$ . La **DW** de la convolución de la **fpei** con el **fWce** para:  $e = 1 \times 10^{-4}$  en **dsu**,  $e = 1 \times 10^{-8}$  en **iin** y  $e = 1 \times 10^{-32}$  en **din**.



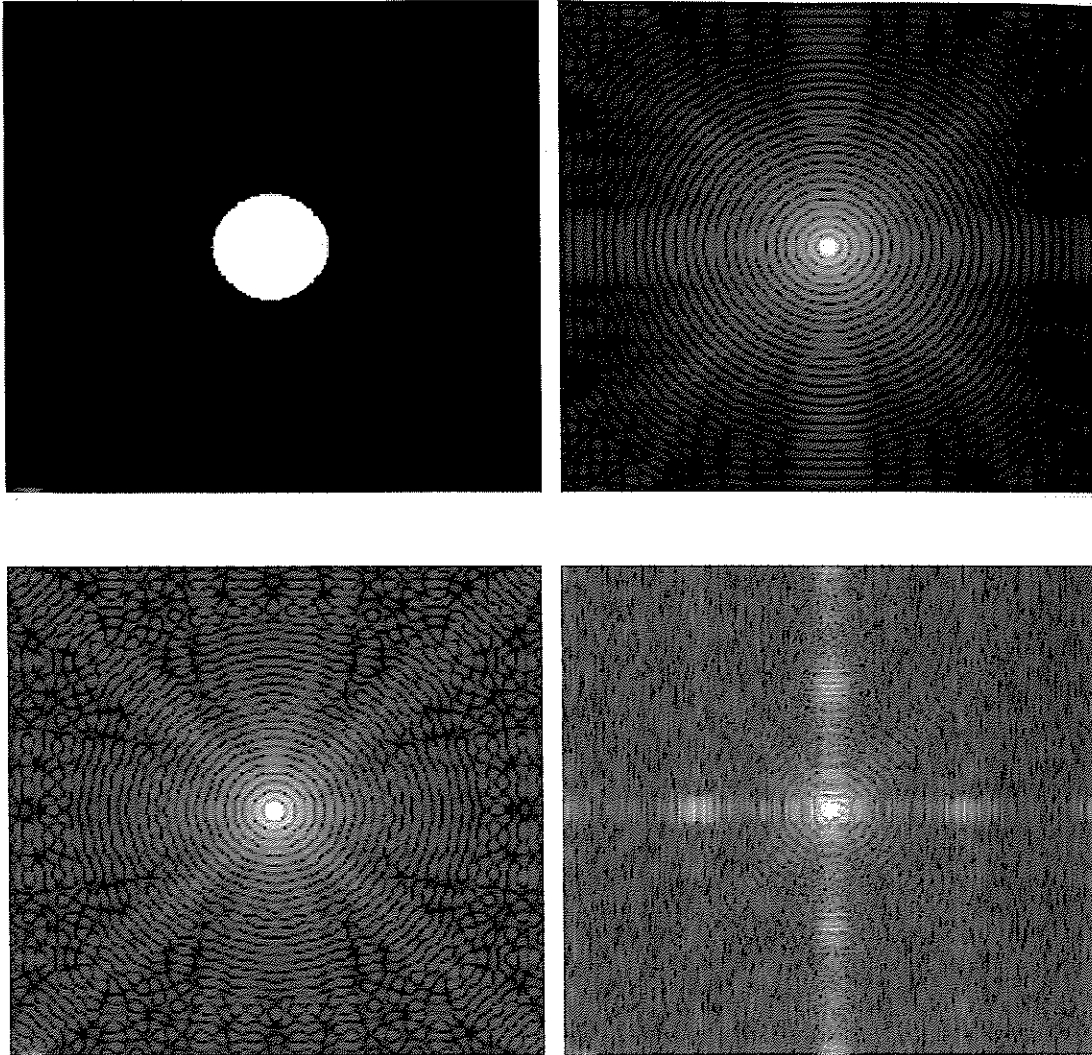


Fig. (VI.6). El producto de **FTO** por el **FWfe** esta en la parte **isu**, la convolución de la **fpei** con el **FWce** para:  $e = 1 \times 10^{-4}$  en **dsu**,  $e = 1 \times 10^{-8}$  en **iin** y  $e = 1 \times 10^{-32}$  en **din**, respectivamente.

En las Figs. (VI.4) y (VI.5) se presentan las **DW**'s asociadas a las funciones bilineales obtenidas en las Figs. (VI.2) y (VI.3), respectivamente. Las distribuciones de intensidad de los cuadros mostrados en cada una de las **DW** siguen el mismo orden de presentación de los cuadros de las **fim**'s o de las **fecm**'s. Las **DW**'s de las funciones espaciales muestran la distribución de energía en el dominio de las frecuencias para una posición dada y las **DW** de las funciones dependientes de la frecuencia muestran la distribución de energía en el dominio de las coordenadas espaciales para una frecuencia determinada. En la Fig. (VI.4) se muestran las **DW** de la convolución entre la **DW** de la **fpei** con la **DW** del **fwce** para  $e = 1 \times 10^{-4}$ ,  $e = 1 \times 10^{-8}$  y  $e = 1 \times 10^{-32}$ , respectivamente. Se puede observar de esta figura, que conforme el valor de  $e$  es más pequeño la **DW** redistribuye su patrón intensidad, disminuyendo el contraste de la información.

De los resultados mostrados se concluye que el procesamiento bilineal puede obtener resultados similares a los obtenidos procesando linealmente la información, siempre y cuando se aplique el filtro adecuado en el dominio bilineal indicado; de otra forma, los resultados no tienen por que parecerse. Por ejemplo, si filtramos linealmente la **DW** de la **fpei**, modificamos bilinealmente la **fim** de la imagen de un punto, lo cual no significa que se obtiene una restauración similar a la restauración lineal de la imagen de un punto.

#### VI-4. Procesado bilineal poli cromático de la imagen de un punto poli cromático en un sistema óptico limitado por difracción.

En este caso se hace uso de la suposición de que las longitudes de onda actúan independientemente, lo cual implica que para una  $Bsenc(ar)$  poli cromática se tiene una superposición de tres funciones  $Bsenc(ar)_\lambda$  dependientes de la longitud de onda, una para cada color primario (rojo, verde y azul). Así, si las **fim**'s de las **fpei** para cada longitud de onda son independientes, las **FTO**'s, las **fecm**'s y las **DW**'s para cada longitud de onda son independientes. También, se supone que el detector se localiza en el plano focal del color rojo del sistema óptico (ver apéndice H).

Como la relación entre dos longitudes de onda es directamente proporcional a la relación entre los diámetros de las funciones de las pupila reales asociadas a cada longitud de onda, entonces a menor longitud de onda mayor es el diámetro de la pupila real del **SOLD**.

La Fig. (VI.7) muestra, en la parte **isu**, las **fpei**'s para las longitudes de onda de los colores primarios y la **fpei** poli cromática (**fpei-p**). Esta misma figura también muestra las **FTO**'s para los colores primarios y la **FTO** poli cromática (**FTO-p**), en la parte **dsu**; para  $e = 1 \times 10^{-4}$ , en las partes **iin** y **din** se muestran respectivamente la **FWde-p** y la **fWce-p**, así como sus versiones mono cromáticas en los colores primarios.

Con la finalidad de abreviar la palabra poli cromático a las funciones bilineales se agrega a sus abreviaciones un guión seguido de una p negrita. Por ejemplo, la **fim** poli cromática se abreviará como **fim-p**.

La Fig. (VI.8) muestra en las partes **isu**, **dsu** y **iin**, respectivamente, las **fecm-p**'s asociadas a la **FTO-p**, al **FWfe-p** y al producto de la **FTO-p** con el **FWfe-p**. La convolución asociada a la transformada coseno 4-D del producto de la **FTO-p** por el **FWfe-p** se presenta en la parte **din**.

En la Fig. (VI.9) se muestran las funciones bilineales poli cromáticas: la **fim-p** de la **fpei-p**, en la parte **isu**; la **fim-p** de la convolución entre la **fpei-p** de un **SOLD** con el **fWce-p** cuando  $e = 1 \times 10^{-4}$ , en la parte **dsu**; cuando  $e = 1 \times 10^{-8}$  y  $e = 1 \times 10^{-32}$ , en las partes **iin** y **din**, respectivamente. A diferencia de la versión mono cromática (Fig. VI.3 partes **dsu**, **iin** y **din**, respectivas) se observa el efecto de la difracción de los colores primarios y sus combinaciones, en el origen de coordenadas, cerca de éste y conforme nos alejamos, ambas **fim**'s (mono cromática y poli cromática) muestran como los máximos secundarios desaparecen. De la Fig. (VI.9), al comparar las partes **isu** con la **dsu** y **iin** se puede notar claras diferencias en la distribución de la energía; sin embargo, de las partes **dsu** e **iin** no se alcanzan a notar diferencias, sobre todo cerca del origen de coordenadas, a pesar de que estas diferencias existen.

Las diferentes formas de la distribución en intensidad se puede observar en las **DW-p**'s respectivas, de una manera más evidente.

Claramente, cuando  $e = 1 \times 10^{-32}$ , la **fim-p** y la **DW-p** (ver Figs. (VI.10)) son muy diferentes a sus similares, cuando  $e = 1 \times 10^{-4}$  y  $e = 1 \times 10^{-8}$ , lo cual tiene como consecuencia que al recuperar el estimado a la **ILID** éste no se parezca a la imagen de un punto como lo muestra los resultados de la Fig. (VI.11), parte **din**. Por otro lado, los estimados a la **ILID**, si  $e = 1 \times 10^{-4}$  y  $e = 1 \times 10^{-8}$ , no son muy diferentes, como también se puede observar de la Fig. (VI.11), parte **isu** y parte **dsu**, así como de las Figs. (VI.9) y (VI.10), como ya se mencionó.

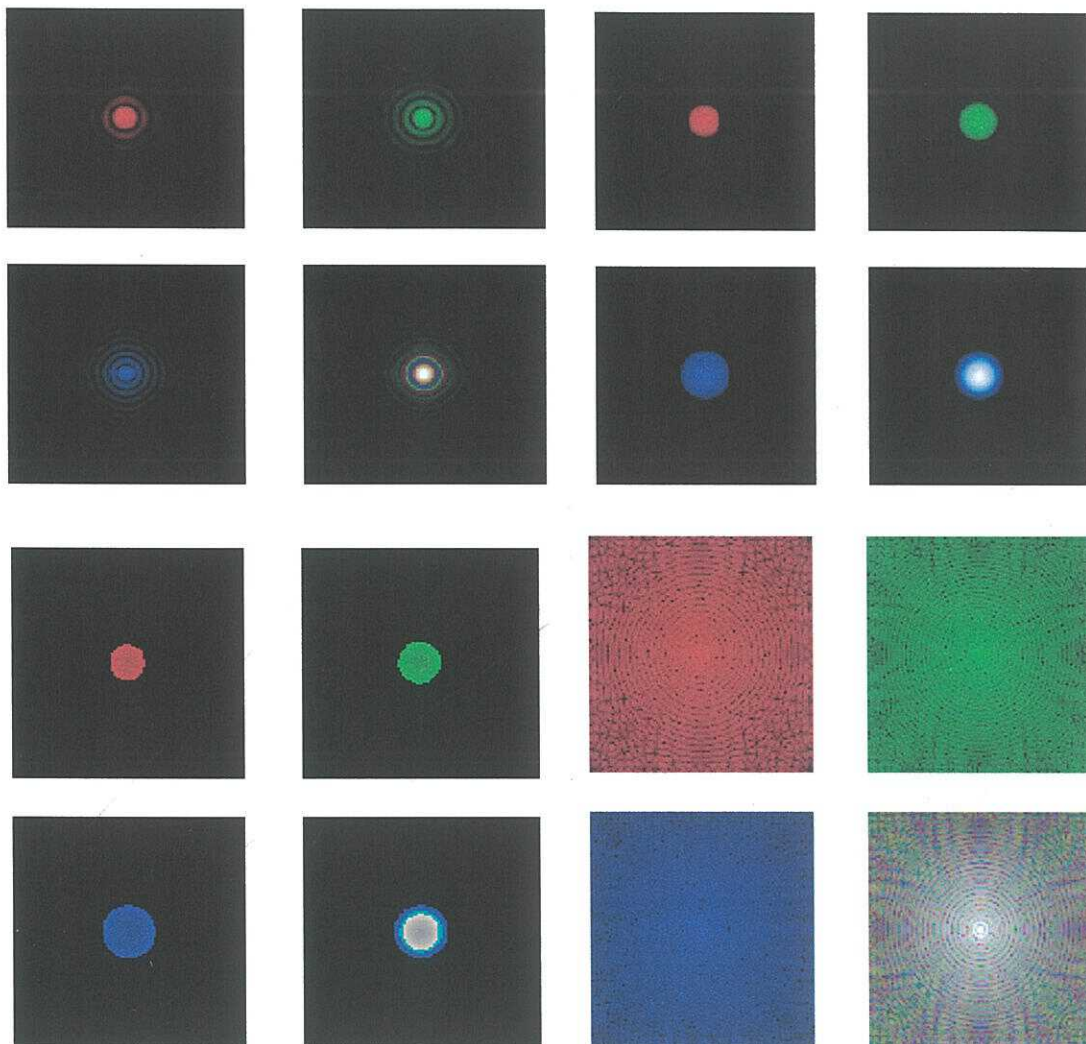


Fig. (VI.7). Para un **SOLD** la **fpei** (**is**), la **FTO** (**dsu**), el **FWfe** (**iin**) y el **fWce** (**din**) para los colores primarios y poli cromático (**fpei-p**, **FTO-p**, **FWfe-p** y **fWce-p**).



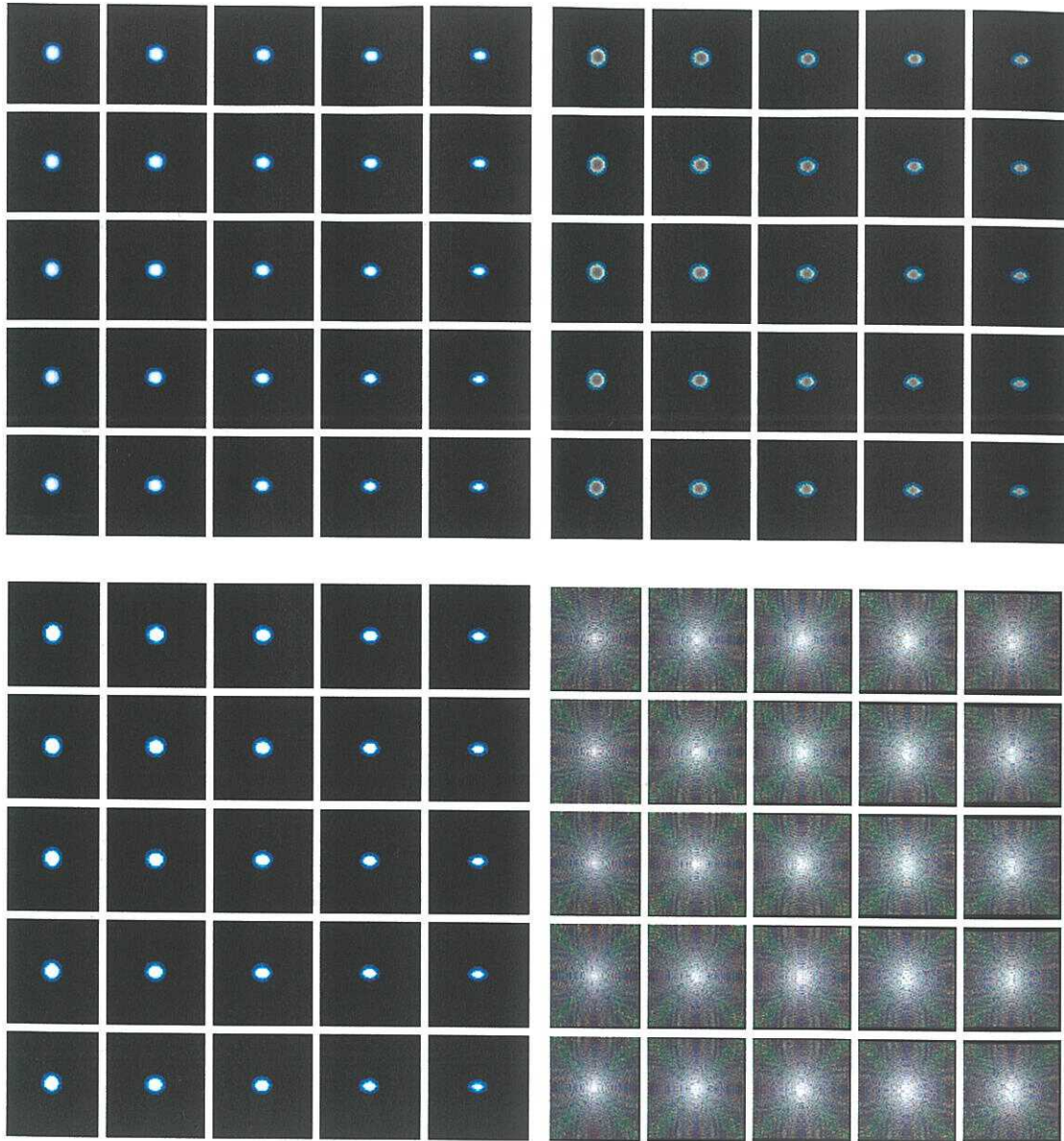


Fig. (Vi.8). Para un **SOLD** la *fecm*'s de la **OTF** (*isu*), la **FWfe** (*dsu*) y el **fWce** (*iin*). La parte *din* es la *fim* del **fWce** y el valor de  $e = 1 \times 10^{-4}$ .

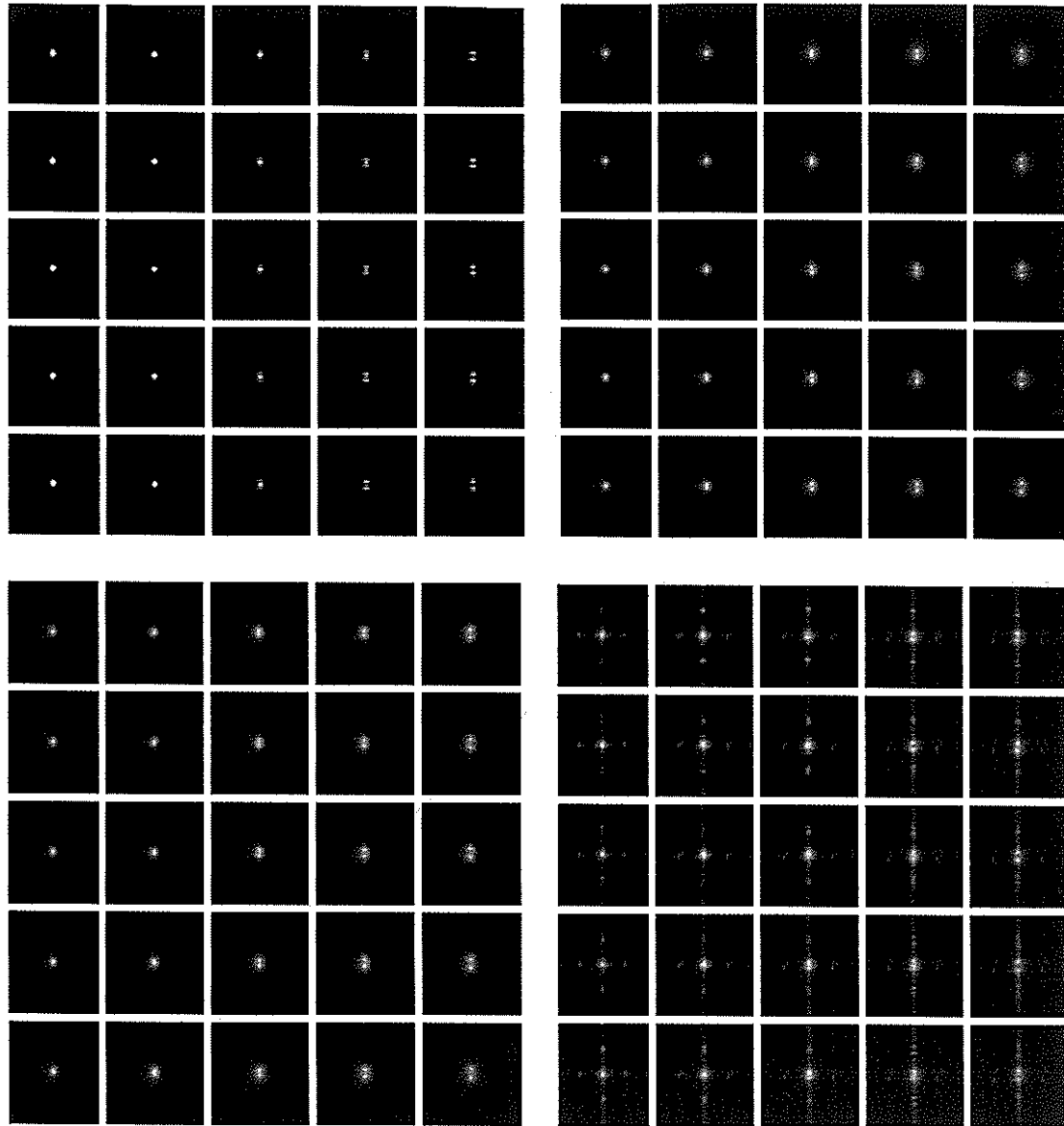


Fig. (VI.9). Para un **SOLD** la **fim-p** de la **fpei-p** (*isu*). La **fim-p** de la convolución de la **fpei-p** con el **fWce-p** donde:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (*dsu*);  $e = 1 \times 10^{-8}$  (*iin*) y  $e = 1 \times 10^{-32}$  (*din*).

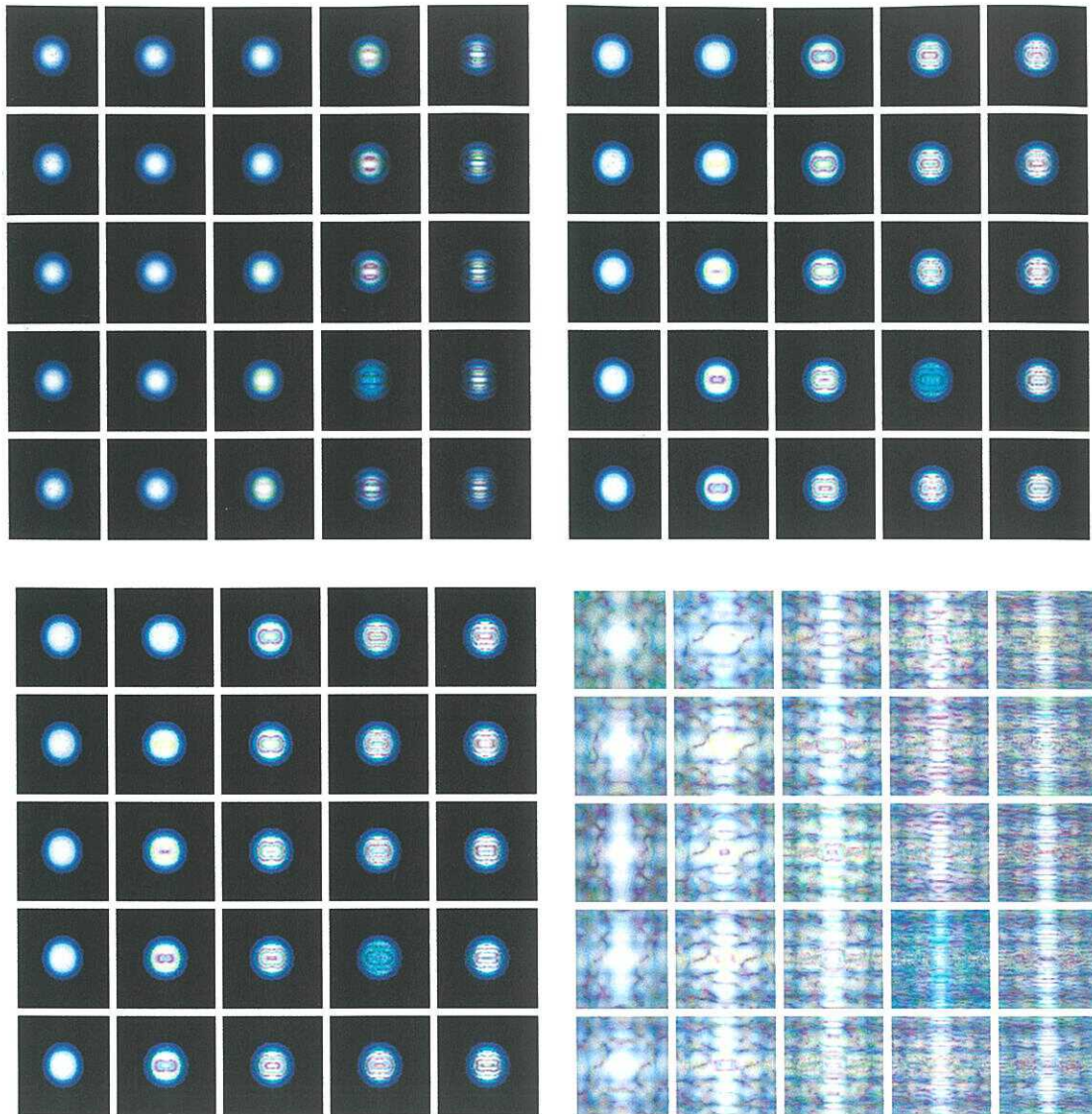


Fig. (VI.10). Para un **SOLD**, la **WD-p** de la **fpei-p (isu)**. La **DW-p** de la convolución de la **fpei-p** con el **fwce-p** donde:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (**dsu**);  $e = 1 \times 10^{-8}$  (**iin**) y  $e = 1 \times 10^{-32}$  (**din**).



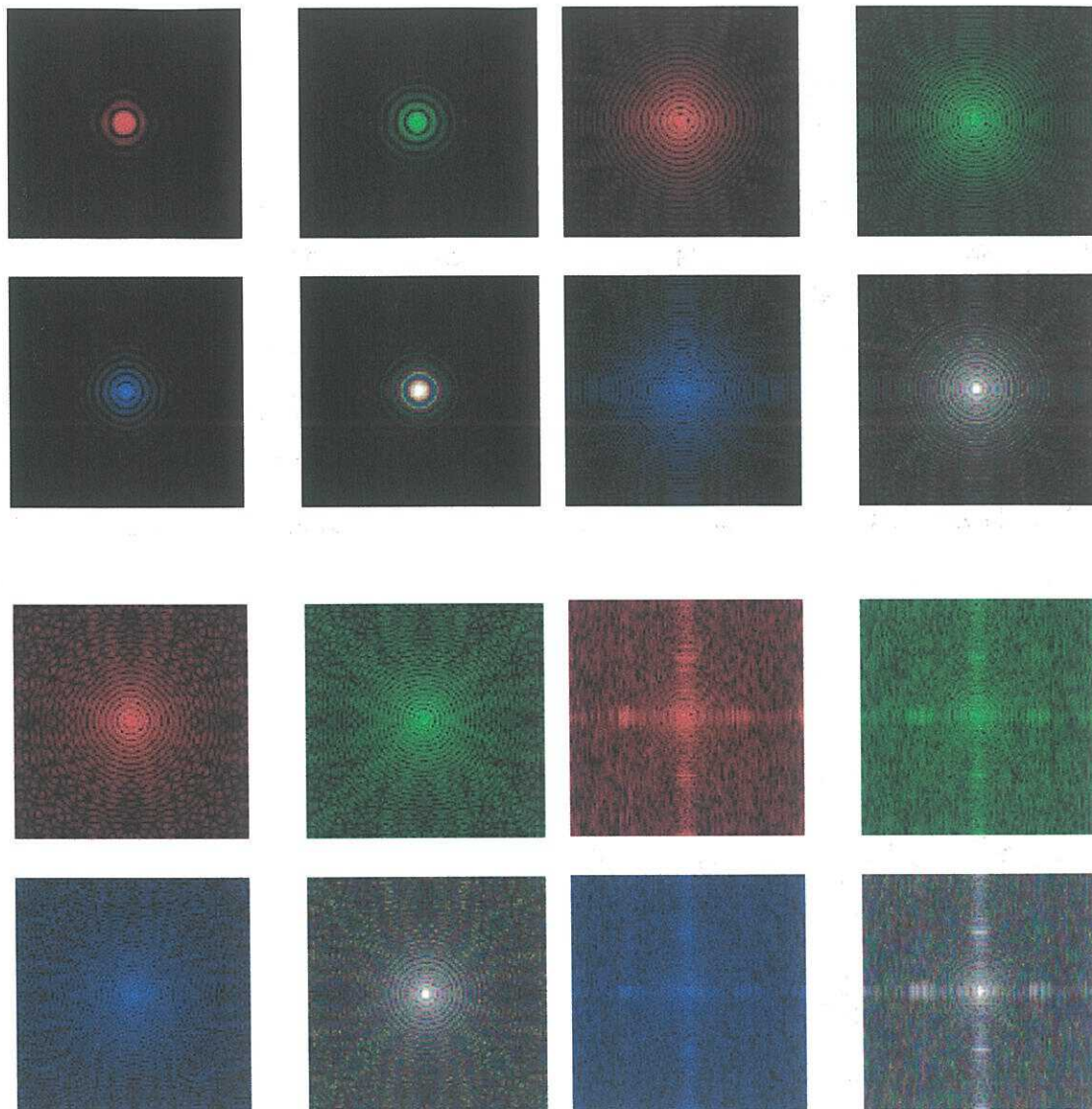


Fig. (VI.11). Para un **SOLD**, la **fpei** para los colores primarios y la **fpei-p (isu)**. La convolución de la **fpei** con el **fWce** para los colores primarios y la **fpei-p** con el **fWce-p** donde:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (**dsu**);  $e = 1 \times 10^{-8}$  (**iin**) y  $e = 1 \times 10^{-32}$  (**din**).



### VI-5. Procesado bilineal de la imagen bilineal de un punto en un sistema óptico desenfochado, casos: mono cromático y poli cromático.

Tanto en el caso mono cromático como poli cromático el número de ceros de la **FTO** aumenta debido a que el coeficiente de desenfoque aumenta, por consiguiente, se espera que disminuya la calidad de la restauración con procesadores bilineales (de la misma forma que sucede en restauración lineal). En el caso mono cromático el coeficiente de desenfoque es de 2 longitudes de onda y en el caso poli cromático el desenfoque para el rojo, verde y azul es de 2, 2.40 y 2.88 longitudes de onda, respectivamente (ya que se

tiene que cumplir la siguiente relación:  $\frac{w_{02,r}}{\lambda_r} = \frac{w_{02,v}}{\lambda_v} = \frac{w_{02,a}}{\lambda_a}$ , donde  $w_{02}$  es el coeficiente de desenfoque y  $\lambda$  es la longitud de onda).

En las Figs. (VI.12) a (VI.15) se muestra el caso mono cromático. En la Fig. (VI.12) se encuentra la **fpei (isu)**, la **FTO (dsu)**, el **FWfe (iin)** y el **fWce (din)**. La **fpei** esta claramente deteriorada y la **FTO** tiene un mayor número de ceros, los cuales en principio deberían tener simetría radial. También se puede observar que el **FWfe** y el **fWce** aumentan su complejidad de tal forma que su implementación física, para ser usados en un procesador bilineal óptico, se puede hacer muy laboriosa. Por lo anterior, se espera que la **fim** de la **fpei** para cada punto y las **fecm's** de la **FTO**, del **FWfe** y del **fWce** para cada par de frecuencias presenten distribuciones de intensidad mas complicadas que las de un **SOLD**, pero con cierto tipo de simetría con respecto al origen de coordenadas (espaciales o de frecuencias espaciales). Por consiguiente, esta simetría, con respecto al origen de coordenadas, debe manifestarse en las **fim's** de la convolución de la **fpei** desenfocada con el **fWce** y en las **DW's** asociadas a esta convolución como lo muestran las Figs. (VI.13) y (VI.14).

De las Figs. (VI.13) y (VI.14) se observa que conforme el valor de  $e \rightarrow 0$ , tanto las **fim's** como las **DW's** tienden a degradarse con detalles que no pertenecen a la imagen y por consiguiente debemos esperar que los estimados a la **ILID** (convolución de la **fpei**

degradada con el  $fWce$  para los diferentes valores de  $e$ ) estén degradados (ver Fig.(VI.15).

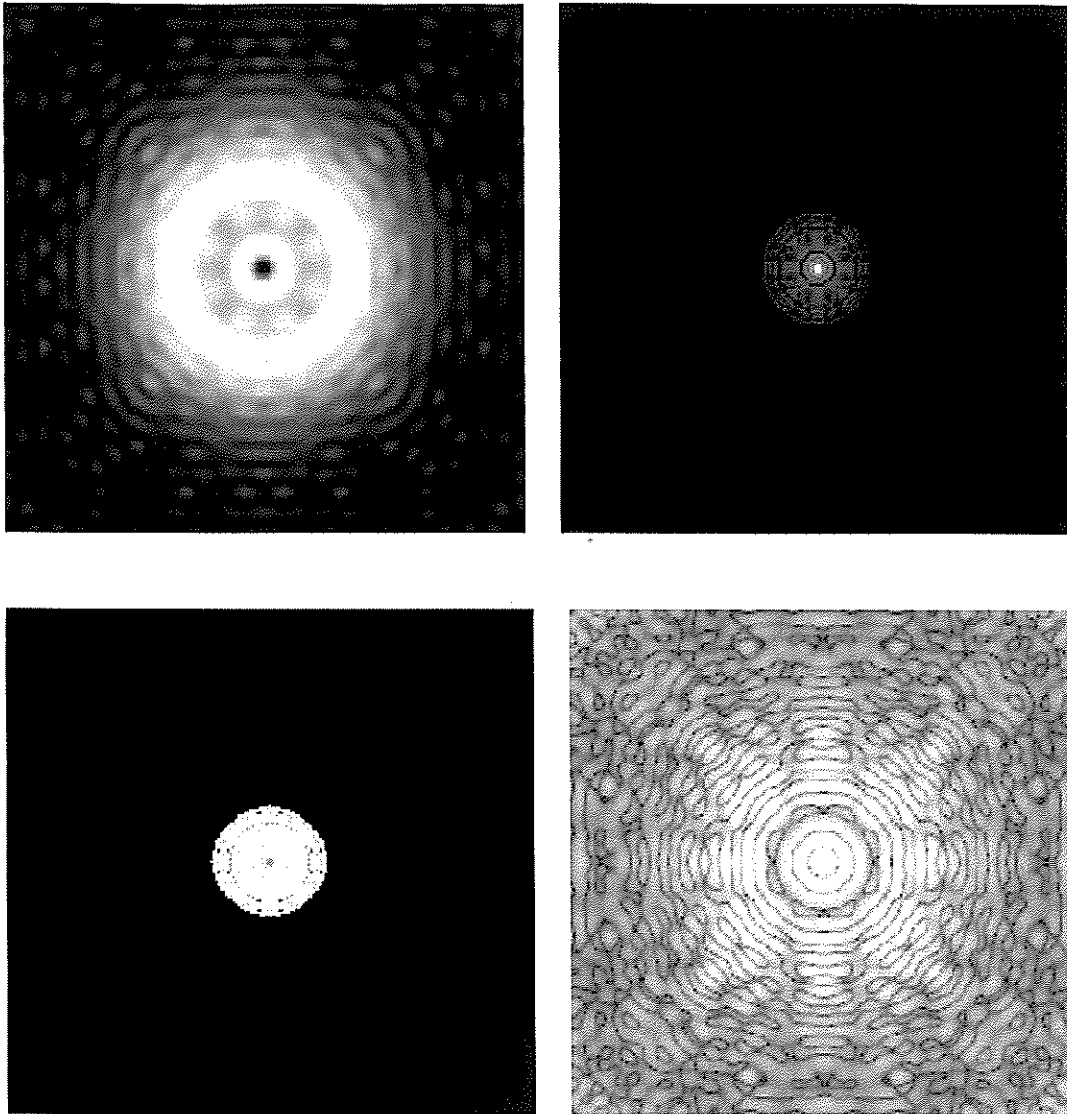


Fig. (VI.12). La  $fpei$ ,  $FTO$ ,  $FWfe$  y el  $fWce$  de un Sistema Óptico Desenfocado (SOD) con  $2\lambda$ .

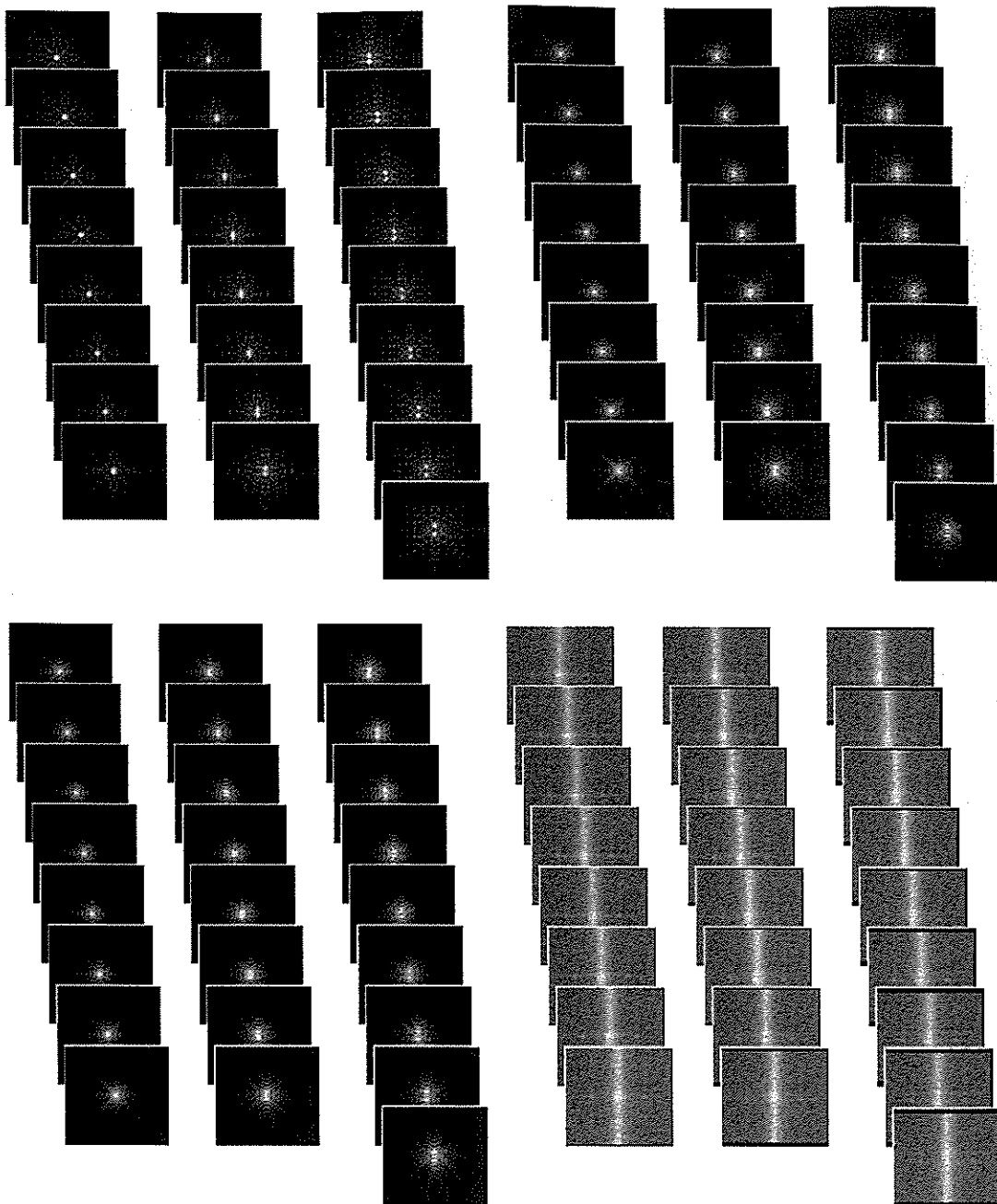


Fig. (VI.13). Para un **SOD** de  $2\lambda$ , la **fim** de la convolución de la **fpei** con el **fWce** donde;  $e = 1 \times 10^{-4}$  (**isu**);  $e = 1 \times 10^{-8}$  (**dsu**);  $e = 1 \times 10^{-32}$  (**iin**) y  $e = 1 \times 10^{-40}$  (**din**).

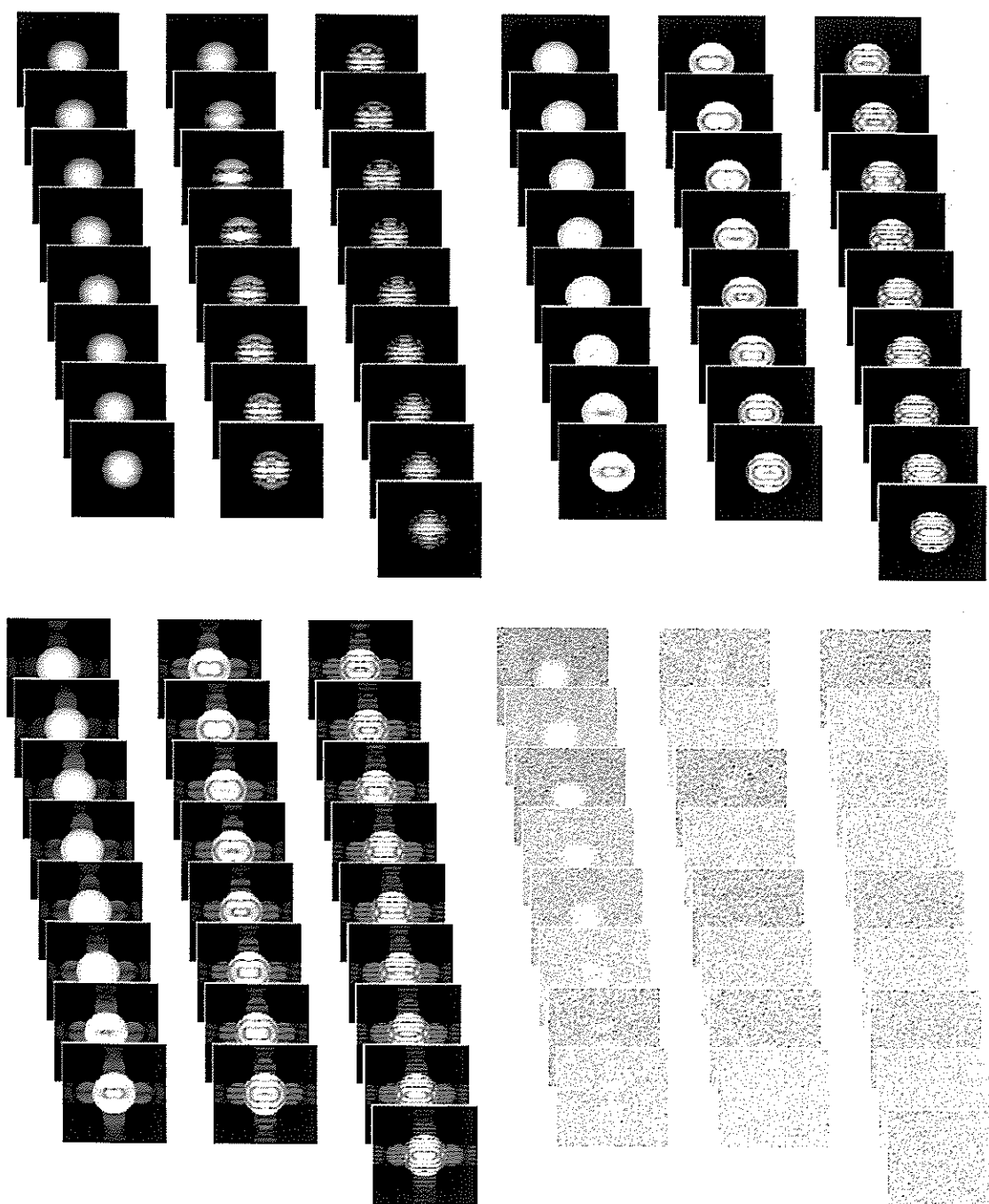


Fig. (VI.14). Para un  $SOD$  de  $2\lambda$ , la  $DW$  de la convolución de la  $f_{pei}$  con el  $fWce$  donde:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (*isu*);  $e = 1 \times 10^{-8}$  (*dsu*);  $e = 1 \times 10^{-32}$  (*iin*) y  $e = 1 \times 10^{-40}$  (*din*).

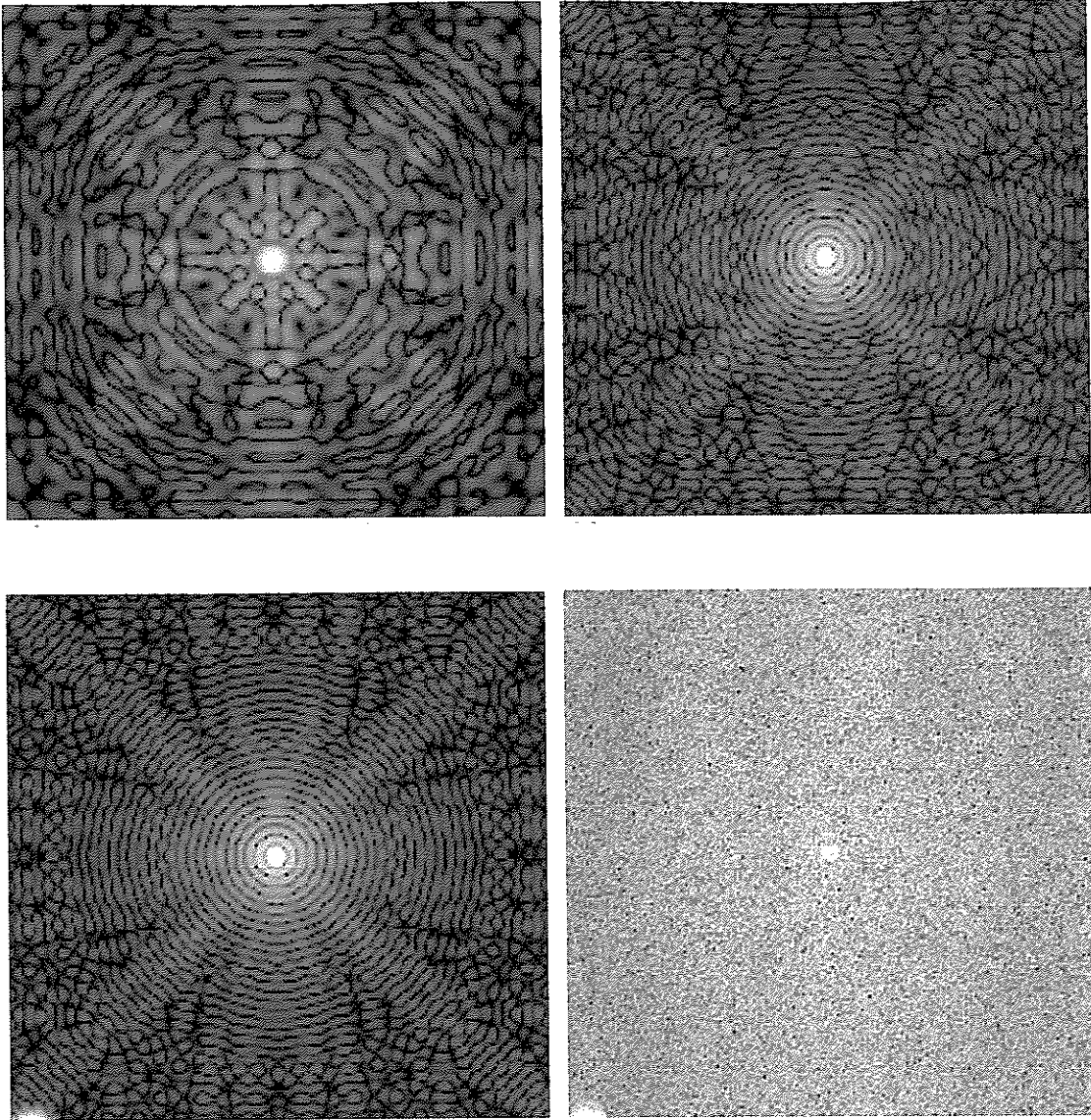


Fig.(VI.15). Para un **SOD** de  $2\lambda$ , la convolución de la **fpei** con el **FWce** donde:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (**isu**);  $e = 1 \times 10^{-8}$  (**dsu**),  $e = 1 \times 10^{-32}$  (**iin**) y  $e = 1 \times 10^{-40}$  (**din**), respectivamente.

En las Figs. (VI.16) a (VI.20) se muestra el caso poli cromático. En la Fig. (VI.16) se observa la complejidad en la distribución de energía que presentan la **fpei-p**, la **FTO-p**, la **FWfe-p** y el **FWce-p** como consecuencia del incremento al valor del desenfoque. Esta complejidad se refleja en las funciones bilineales:

**fm's** de la **fpei-p** y la **fwce-p**, y en las **fecm's** de la **FTO-p** y el **FWfe-p**, como se muestra en la Fig. (VI.17). La Fig. (VI.18) muestra las **fm's** de los estimados a la **ILID** y la Fig. (VI.19) las **DW's** de estos estimados para los casos en que el parámetro  $e$  disminuye su valor ( $10^{-4}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-34}$  y  $10^{-40}$ , respectivamente). Finalmente, la Fig. (VI.20) muestra los estimados a la **ILID**, que se obtienen de las figuras (VI.18) y (VI.19), para los diferentes valores de  $e$ . De esta última figura, estimados a la **ILID**, se puede observar que la imagen restaurada se degrada, por detalles en forma de ruido, al disminuir el valor de  $e$ , como es de esperarse.

#### **VI-6. Procesado bilineal iterativo de la imagen bilineal de un punto para un sistema óptico con o sin desenfoque.**

Hasta lo aquí expuesto, el valor de  $e$  se propone a priori, condición que no siempre lleva a una buena restauración. En el capítulo IV, se encontró la relación iterativa para restaurar bilinealmente una imagen degradada espacialmente con ruido aditivo. Este algoritmo iterativo puede usarse cuando la imagen degradada tiene ruido muy pequeño introducido por la longitud finita de la palabra de memoria de la computadora o por la digitalización misma de la imagen. El ruido debido a la longitud finita de la palabra de memoria existe, ya que aparece en las imágenes restauradas, como se puede inferir de los resultados hasta aquí obtenidos, pero éste no se puede observar directamente de la imagen original degradada. De la sección anterior se desprende que conforme el valor de  $e$  disminuye aumenta el ruido en la imagen a restaurar, pero también se sabe que si  $e$  aumenta su valor, entonces, el filtro bilineal de Wiener actúa como un filtro pasa bajas disminuyendo tanto la cantidad de ruido como la cantidad de detalles de la imagen. Los dos argumentos anteriores llevan a la posibilidad de que si se controla iterativamente el parámetro  $e$  se puede encontrar un mejor estimado a la **ILID**.

Por razones de tiempo de computo el algoritmo iterativo se utiliza únicamente para el caso de imágenes mono cromáticas. El algoritmo se aplica para cincuenta iteraciones tanto para la imagen



bilineal de un punto con cero desenfoque como para cuando el desenfoque es igual a dos longitudes de onda; los valores de  $e_0$  y  $c$  son 1 y 0.1, respectivamente. A diferencia de los resultados

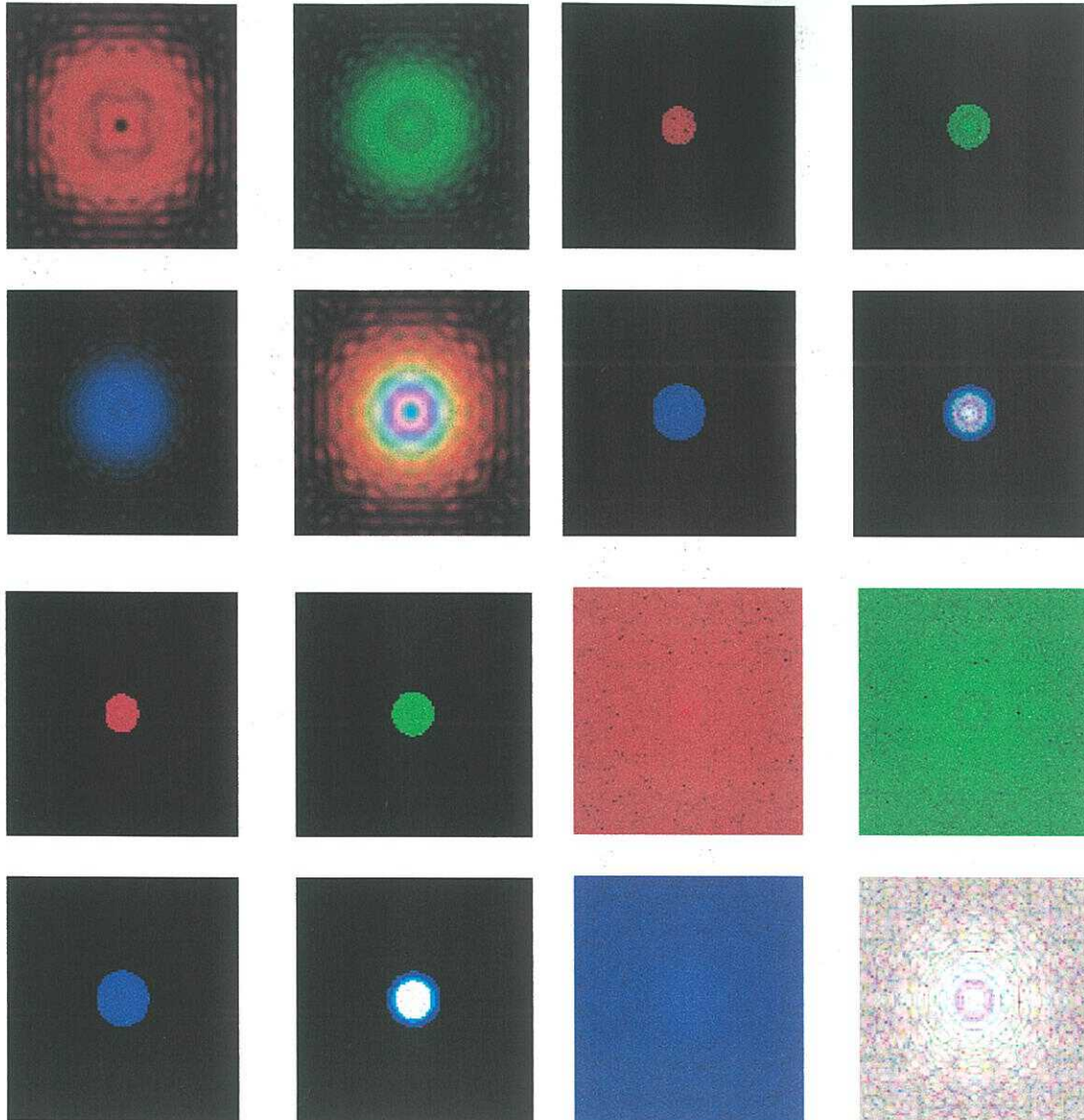


Fig. (VI.16). Las *fpei* para los colores primarios y su versión poli cromática (*isu*); las *FTO's* (*dsu*), los *FWfe's* (*iin*) y los *fWce's* (*din*). Para un *SOD* con  $2\lambda$  y  $e = 10^{-4}$ .

anteriormente presentados, para cada iteración se despliegan 30 posibles distribuciones de intensidad consecutivos de 256, que

conformarían toda la función bilineal, sin embargo, para obtener los estimados a la *fpei* se tiene que tomar en cuenta los 256 posibles

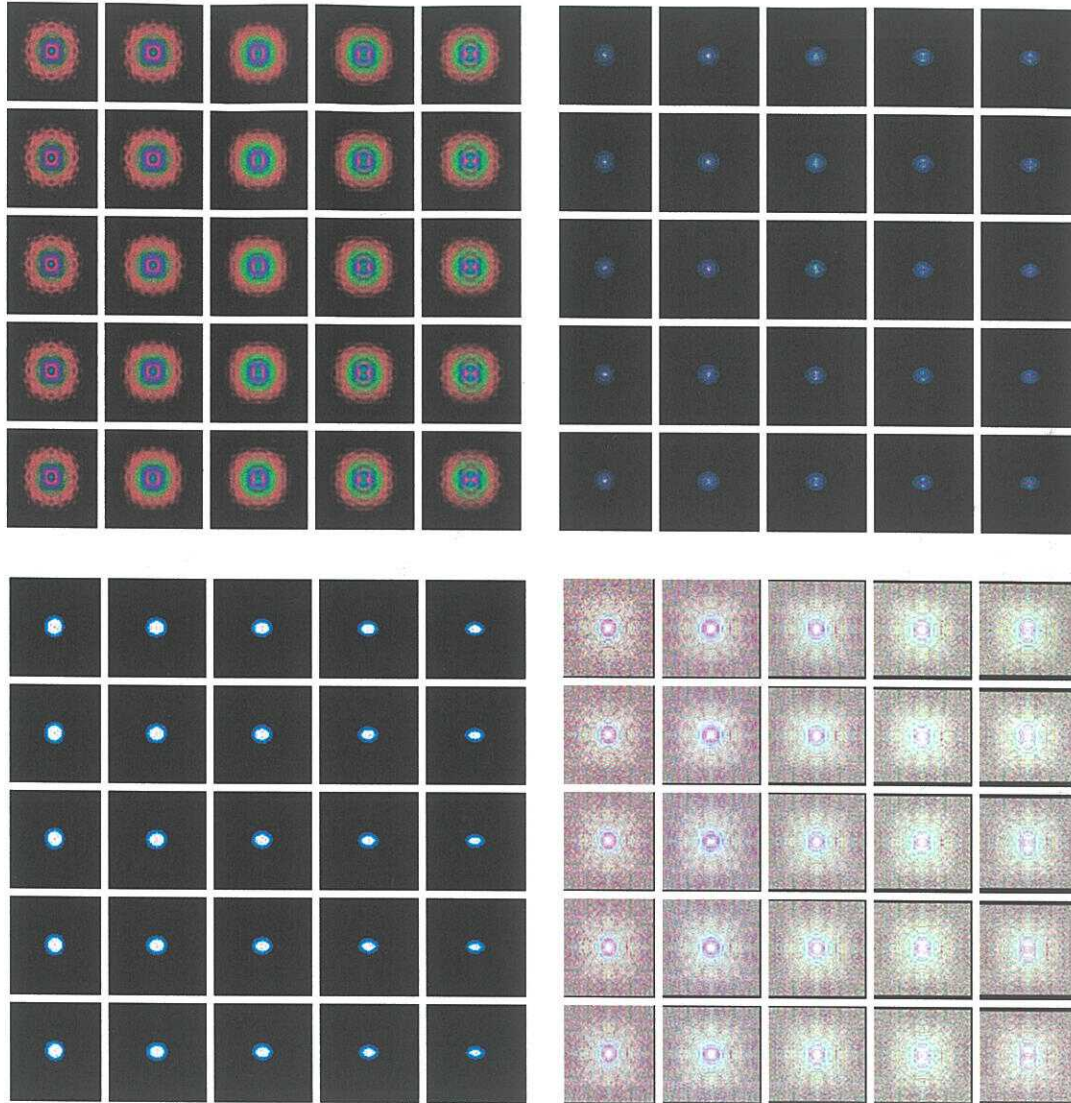


Fig. (VI.17). La *fim-p* de la *fpei-p* (*isu*), la *fecm-p* de la *FTO-p* (*dsu*), la *fecm-p* del *FWfe-p*. (*iin*), la *fim-p* del *fWce-p* (*din*). Para un *SOD* con  $2\lambda$  y donde  $e = 1 \times 10^{-4}$ .

distribuciones en amplitud compleja o intensidad, como ya se mencionó. En la Fig. (VI.21) se observa los estimados de las *DW*'s de los estimados a las *fim*'s a la *ILID*, para cuatro iteraciones; en



la parte **isu** se presenta la primera iteración, en la parte **dsu** la quinta iteración, en las partes **iin** y **din** las iteraciones 15 y 32, respectivamente. La Fig. (VI.22) son los estimados a la **fim**'s de la **fpei** obtenidos de los estimados dados en la Fig. (VI.21); las iteraciones están dadas en el mismo orden de ésta última figura. Tanto en la Fig. (VI.21) como (VI.22) se notan claras diferencias en las distribuciones de intensidad de las funciones bilineales, las

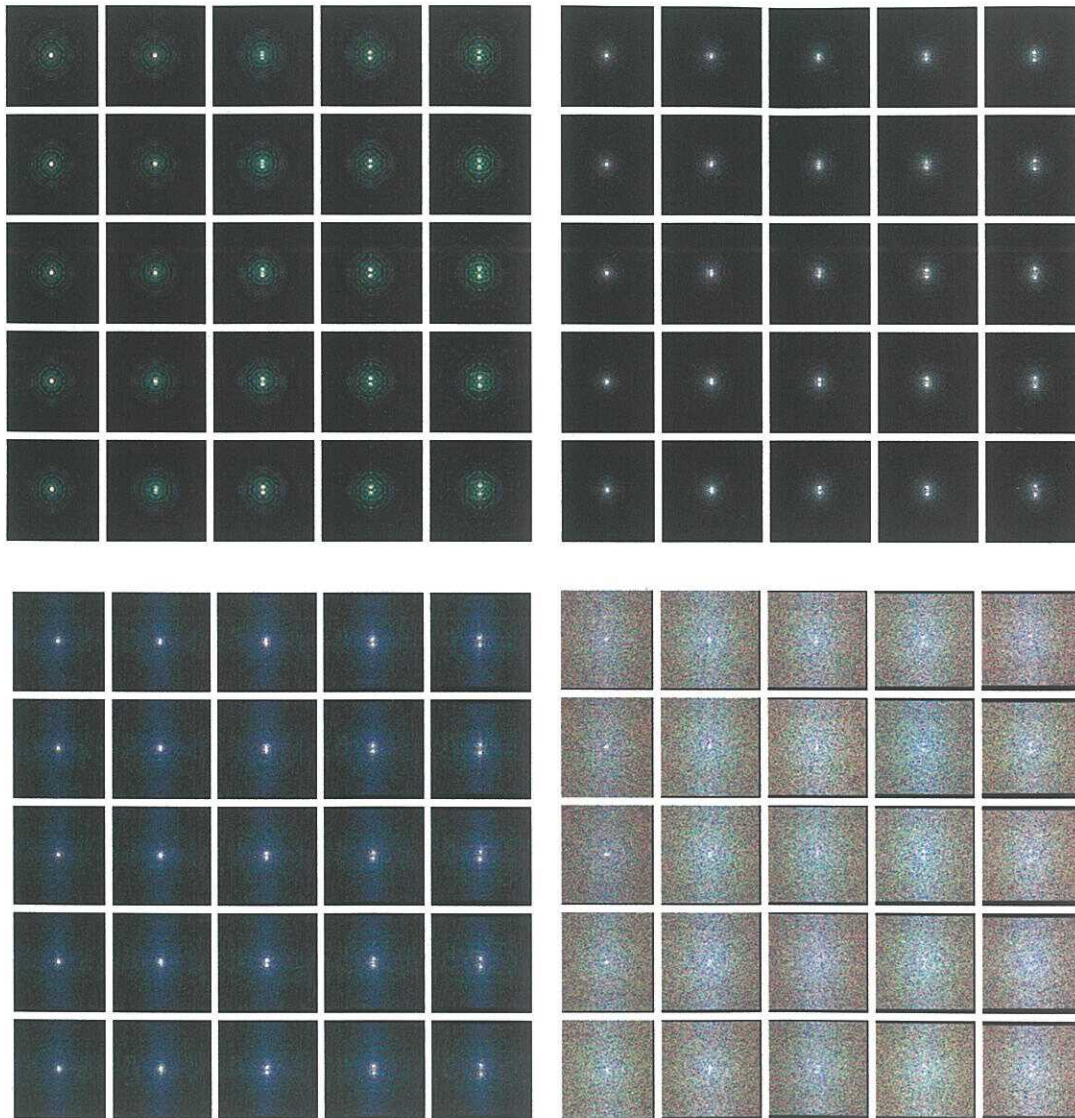


Fig. (VI.18). La **fim-p** de la convolución de la **fpei-p** degradada con el **fWce-p** para un **SOD** de  $2\lambda$  y con:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (**isu**),  $e = 1 \times 10^{-8}$  (**dsu**),  $e = 1 \times 10^{-34}$  (**iin**),  $e = 1 \times 10^{-40}$  (**din**).



diferencias de las funciones bilineales son aún mas claras conforme nos alejamos del origen de coordenadas. En la Fig. (VI.23) se observa los estimados a la **fpei** al ir aumentando el valor de la iteración; el estimado a la **fpei** más hacia la izquierda es para la primera iteración y el más a la derecha para la iteración 32; también

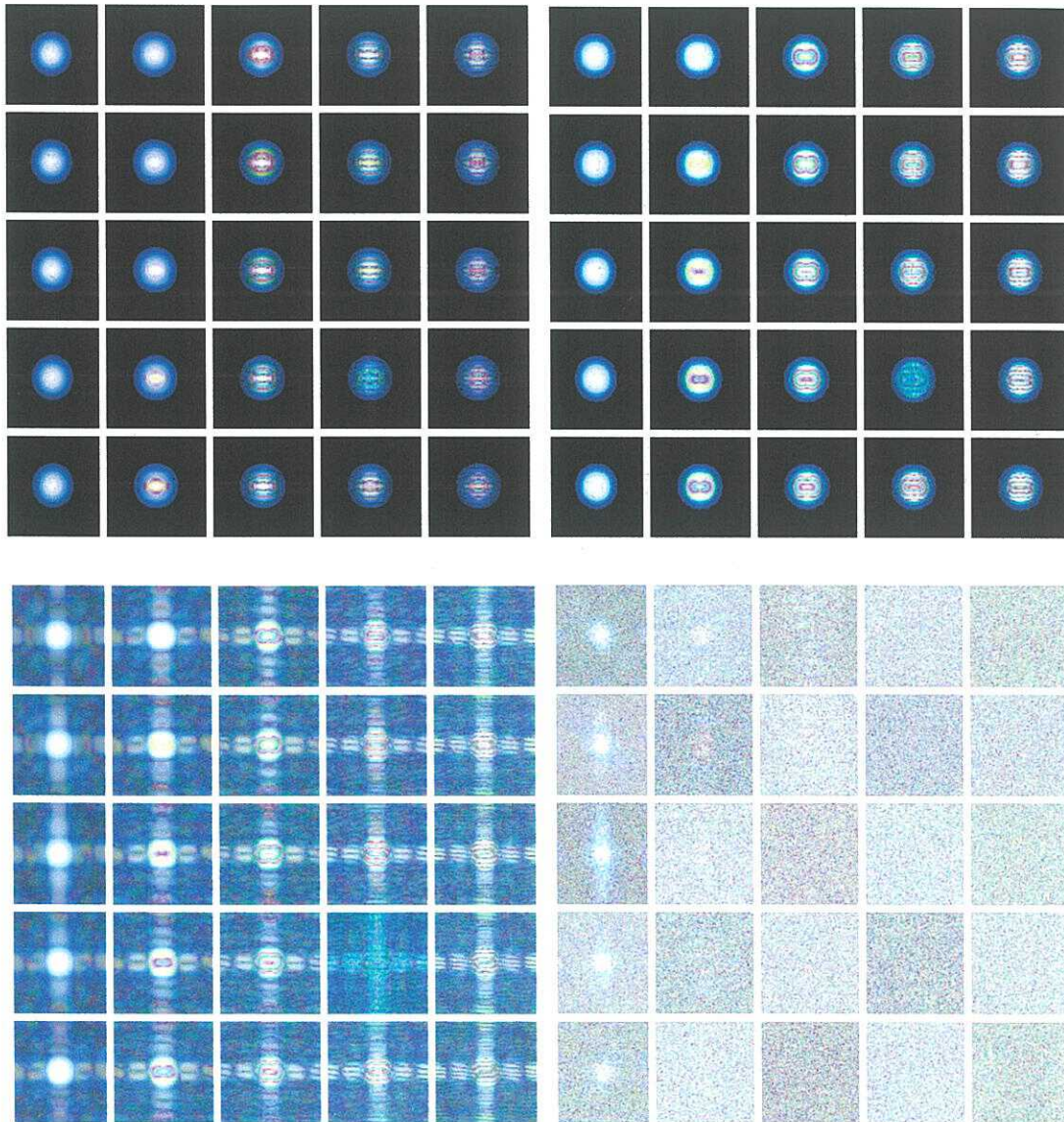


Fig. (VI.19). Las **DW's** de la convolución de la **fpei-p** degradada con el **fwce-p** para un **SOD** de  $2\lambda$  y con:  $e=1x10^{-4}$  (**isu**),  $e=1x10^{-8}$  (**dsu**),  $e=1x10^{-34}$  (**iin**) y  $e=1x10^{-40}$  (**din**).



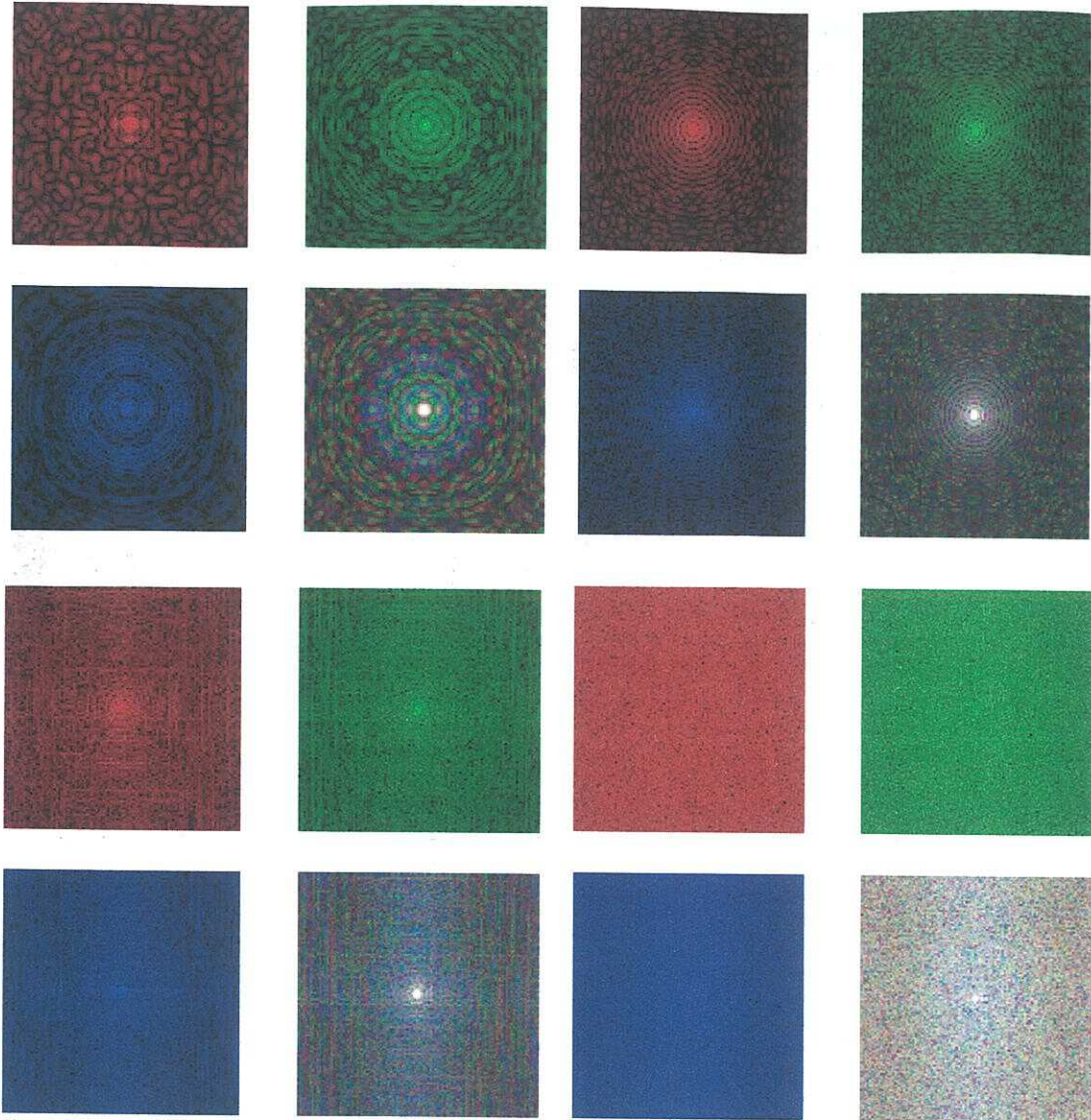


Fig. (VI.20). La convolución de las *fpei-p* con el *fWce-p* para un *SOD* de  $2\lambda$  y con:  $e = 1 \times 10^{-4}$  (*isu*),  $e = 1 \times 10^{-8}$  (*dsu*),  $e = 1 \times 10^{-34}$  (*iin*) y  $e = 1 \times 10^{-40}$  (*din*).

se puede observar que el mejor estimado a la *fpei* (aquel que presenta el mayor número de frecuencias altas), es el de la iteración cinco, lo cual puede ratificarse observando las Figs. (VI.21) y (VI.22), en la parte derecha superior.

Cuando el valor del coeficiente de desenfoque es de dos longitudes de onda, las Figs. (VI.24) a (VI.26) representan las mismas funciones a las de las Figs. (VI.21) a (VI.23) excepto que

ahora las iteraciones son, en orden, la uno, la cinco, la quince y la treinta y cuatro. De la Fig. VI.26. se observa que el mejor estimado es para la iteración cinco, el cual a la vez es de menor calidad al estimado en la iteración tres, de la Fig. (VI.23).

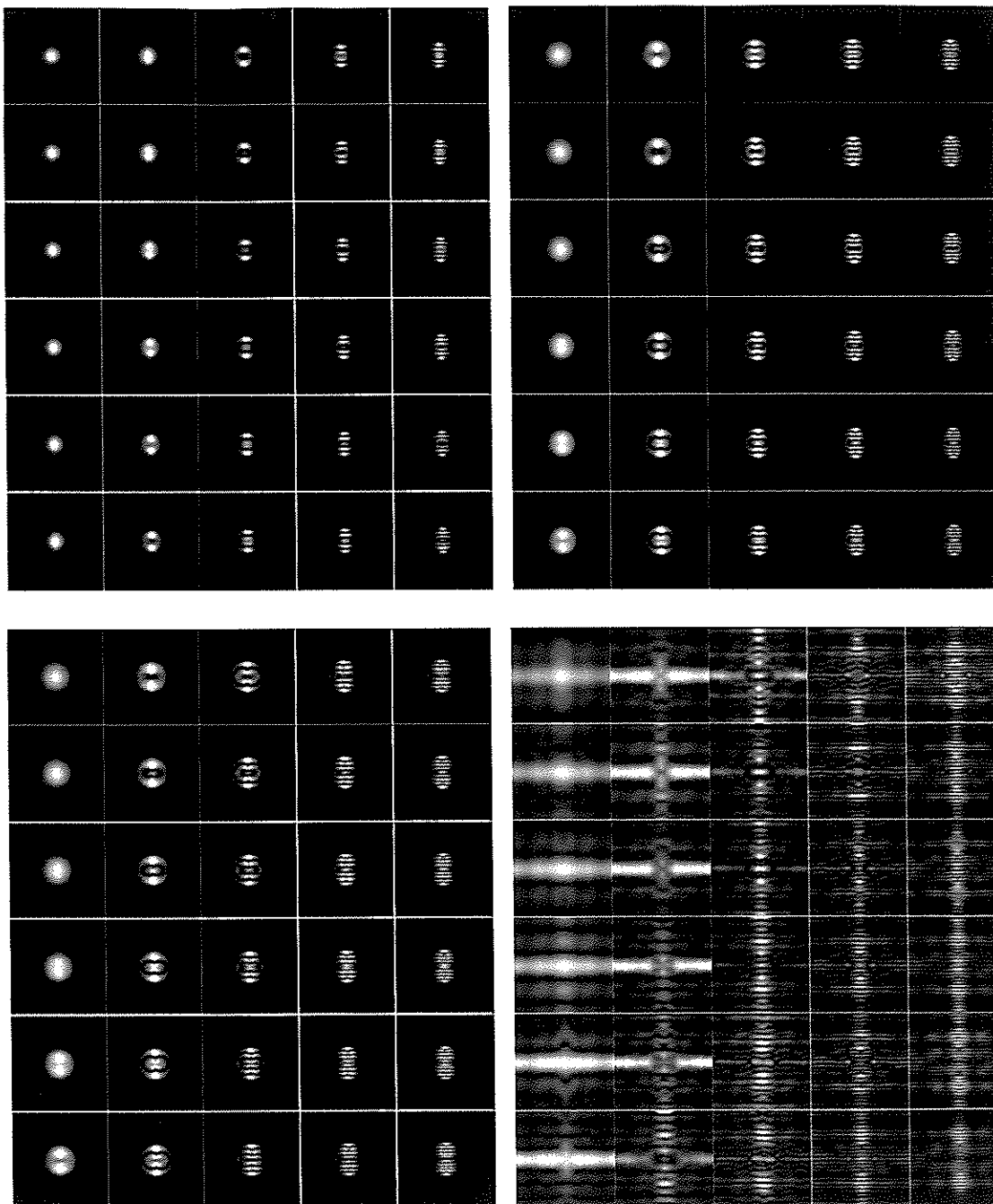


Fig. (VI.21). Estimados de las DW's de la *fpei* de un **SOLD** para las iteraciones 1,3,15 y 32 respectivamente, con  $e_0 = 1$  y  $c = 0.1$ .

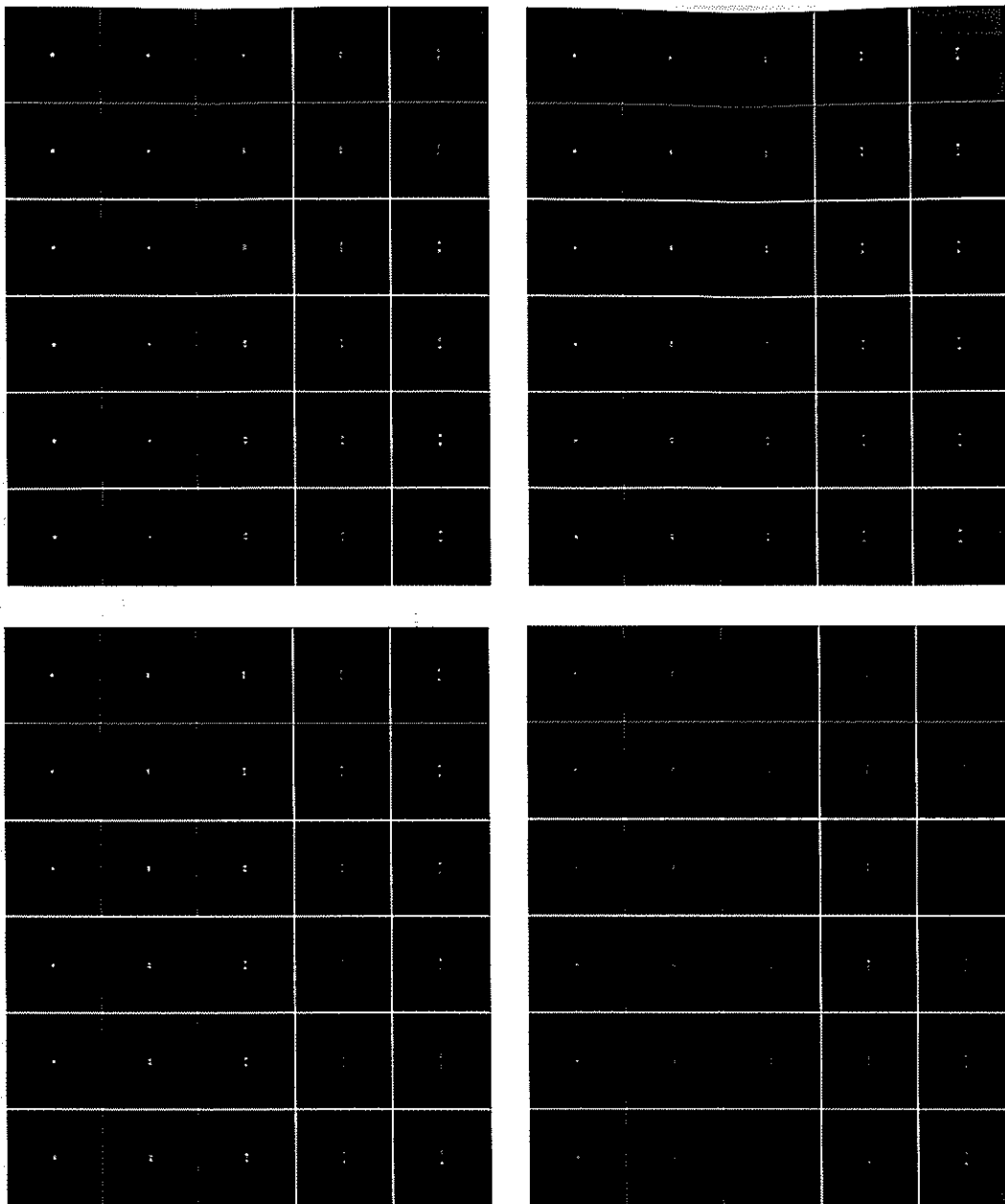


Fig. (VI.22). Estimados de las *fim*'s de la *fpei* obtenidos de la Fig. (VI.21).



Fig. (VI.23). Estimados de las *fpei*'s de un *SOLD* obtenidos de la Fig. (VI.22).

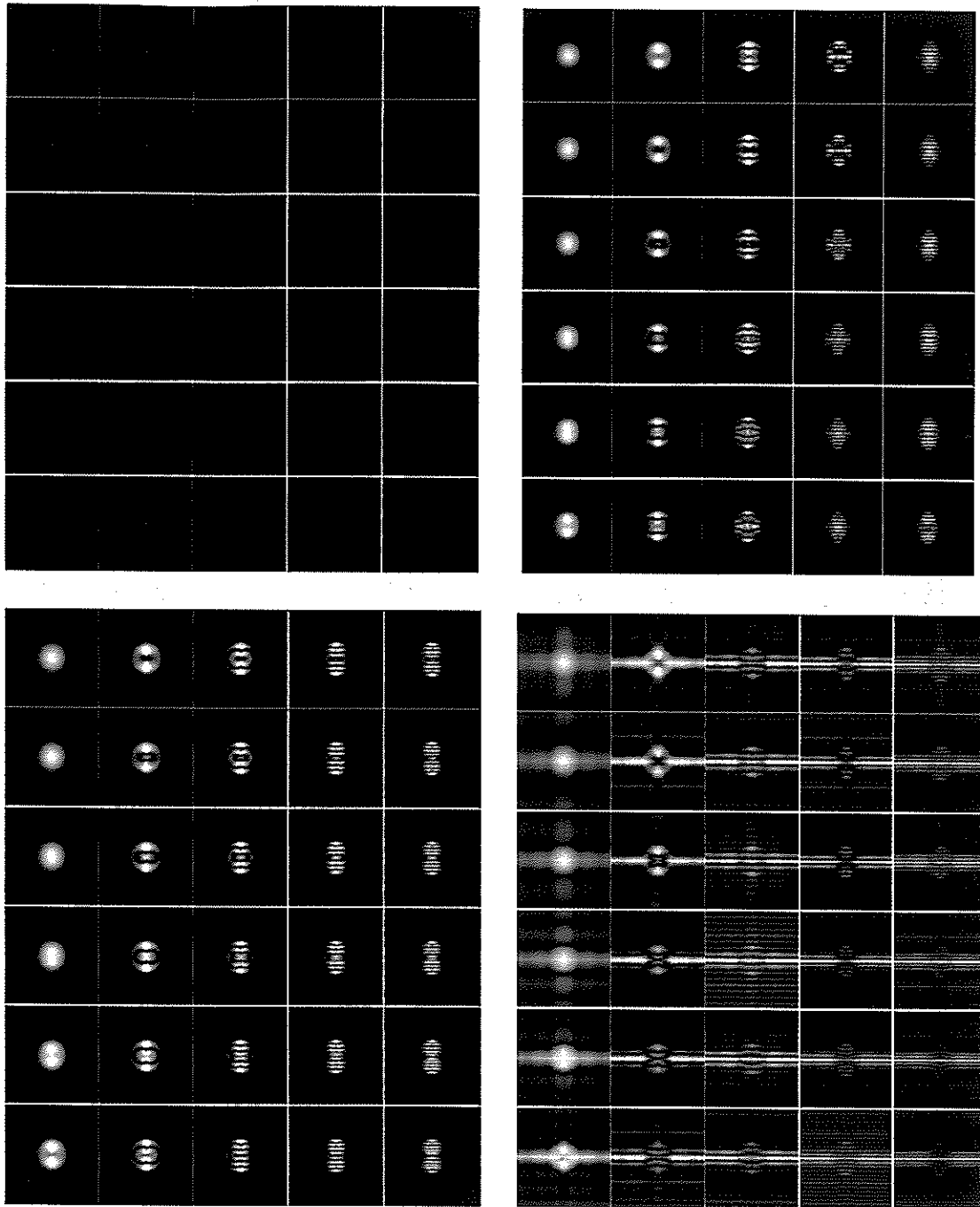


Fig. (VI.24). Estimados de las *DW's* de la *fpei* con desenfoque  $w_{20} = 2$  para las iteraciones 1,5,15 y 34, respectivamente, con  $e_0 = 1$  y  $c = 0.1$ .

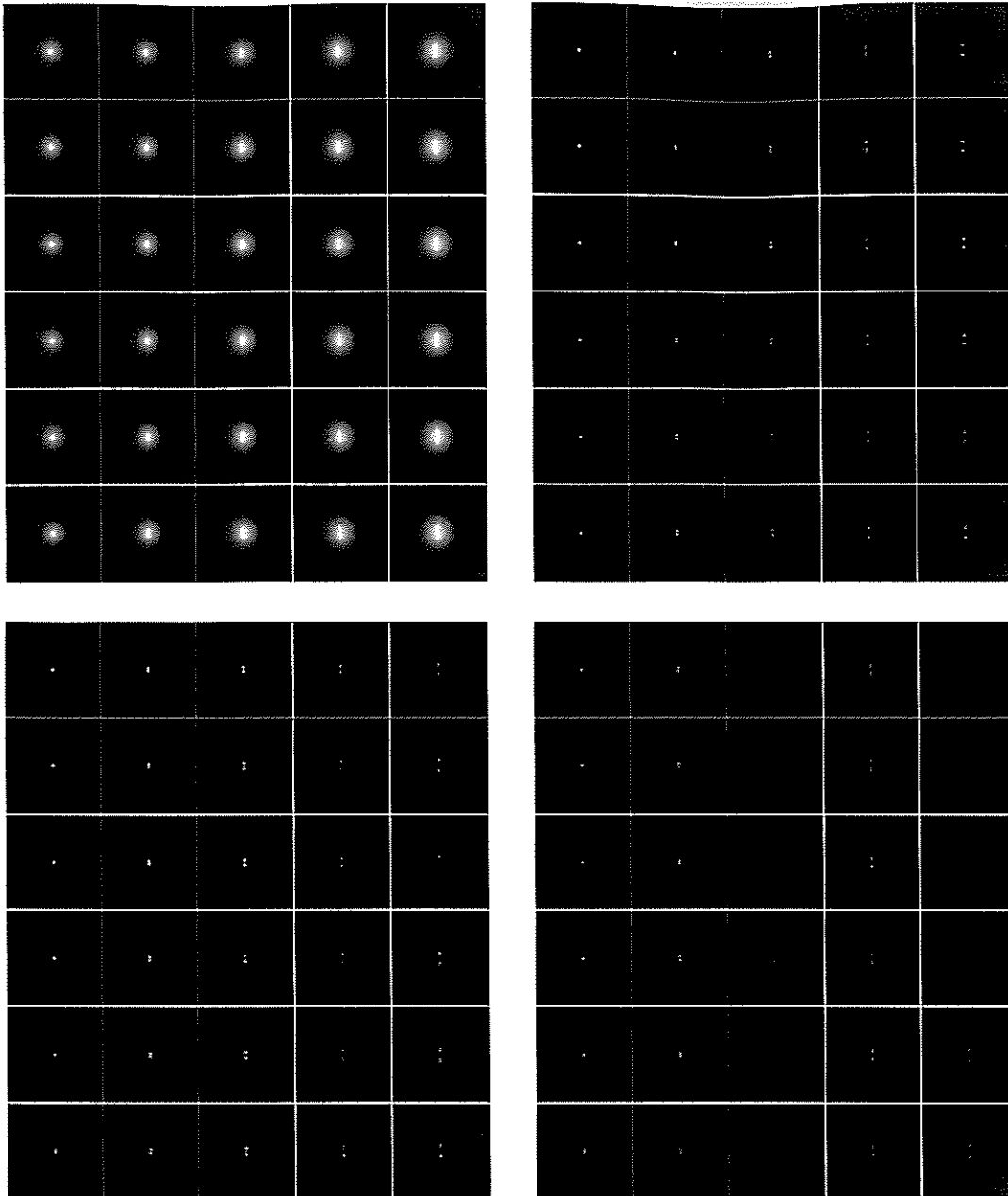


Fig. (VI.25). Estimados de las *fim*'s de la *fpei* obtenidos de la Fig. (VI.24).

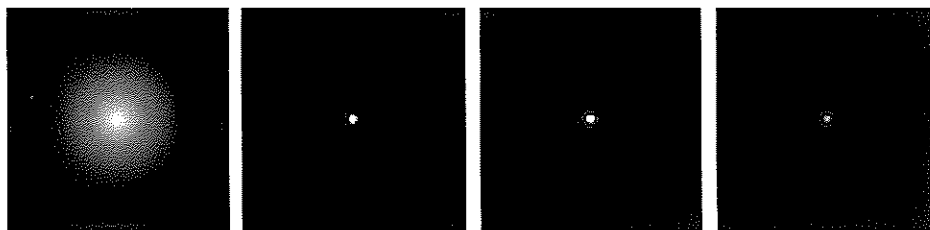


Fig. (VI.26). Estimados de las *fpei*'s de un *SOD* obtenidos de la Fig. (VI.25).

De los resultados obtenidos se puede concluir que los estimados bilineales, con valores de  $e_0$ ,  $c$  y desenfoque dados (para modificar el filtro de Wiener bilineal iterativo), primero se acercan al estimado óptimo y después se alejan de éste conforme el número de iteraciones empieza a crecer, además se genera ruido, debido al tamaño finito de la palabra de memoria. Por otro lado, la pupila real bilineal poco a poco se deforma geoméricamente alejándose de la pupila real circular, lo cual implica que la imagen restaurada tiene efectos debidos a esta deformación geométrica .

Adicionalmente, cuando el número de iteraciones empieza a crecer, otro efecto más es la inversión de los valores del filtro bilineal de Wiener, como lo muestra la Fig. (VI.27). Sin embargo, en este caso, el producto de las funciones bilineales asociadas al filtro de Wiener y a la **FTO** solo modifican sus valores en la frontera geométrica, por consiguiente tanto la **DW** como la **fim** de la **fpei** se desvían de sus respectivos estimados óptimos (ver Fig. (VI.27)), por lo cual el estimado a la **fpei** se espera no sea el mejor (ver Figs. (VI.21) a (VI.23)).

### VI-7. Procesado bilineal iterativo de la imagen bilineal desenfocada de un punto con ruido.

El algoritmo iterativo utilizado para esta sección se basa en la Ec. (4.12)<sup>46</sup>. La razón de usar este algoritmo es: por un lado tener el algoritmo operando bilinealmente con conocimiento de que existen resultados publicados de su versión lineal y por el otro lado observar como actúa el filtro **RNC** (dominio de las frecuencias) conjuntamente con el filtro mediana (dominio de las coordenadas espaciales) cuando se aplican como parte del algoritmo. En esta sección, el ruido aditivo en la imagen degradada es mayor que el ruido generado por la longitud finita de la palabra de memoria de la computadora; este ruido, es suficientemente grande (variancias mayores a 1.0) y se puede observar sin ninguna dificultad en la imagen o en su espectro. Se espera que el ruido aumente, por efecto del filtro bilineal de Wiener conforme el producto  $ec^k$  ( $k$ =número de iteraciones) tiende a cero, pero debido al filtro



mediana hace que el ruido no rebase un determinado nivel, de tal forma que se pueda aplicar el filtro **RNC**. Por otro lado, si el producto  $ec^k$  aumenta (ver Apéndice F) entonces el

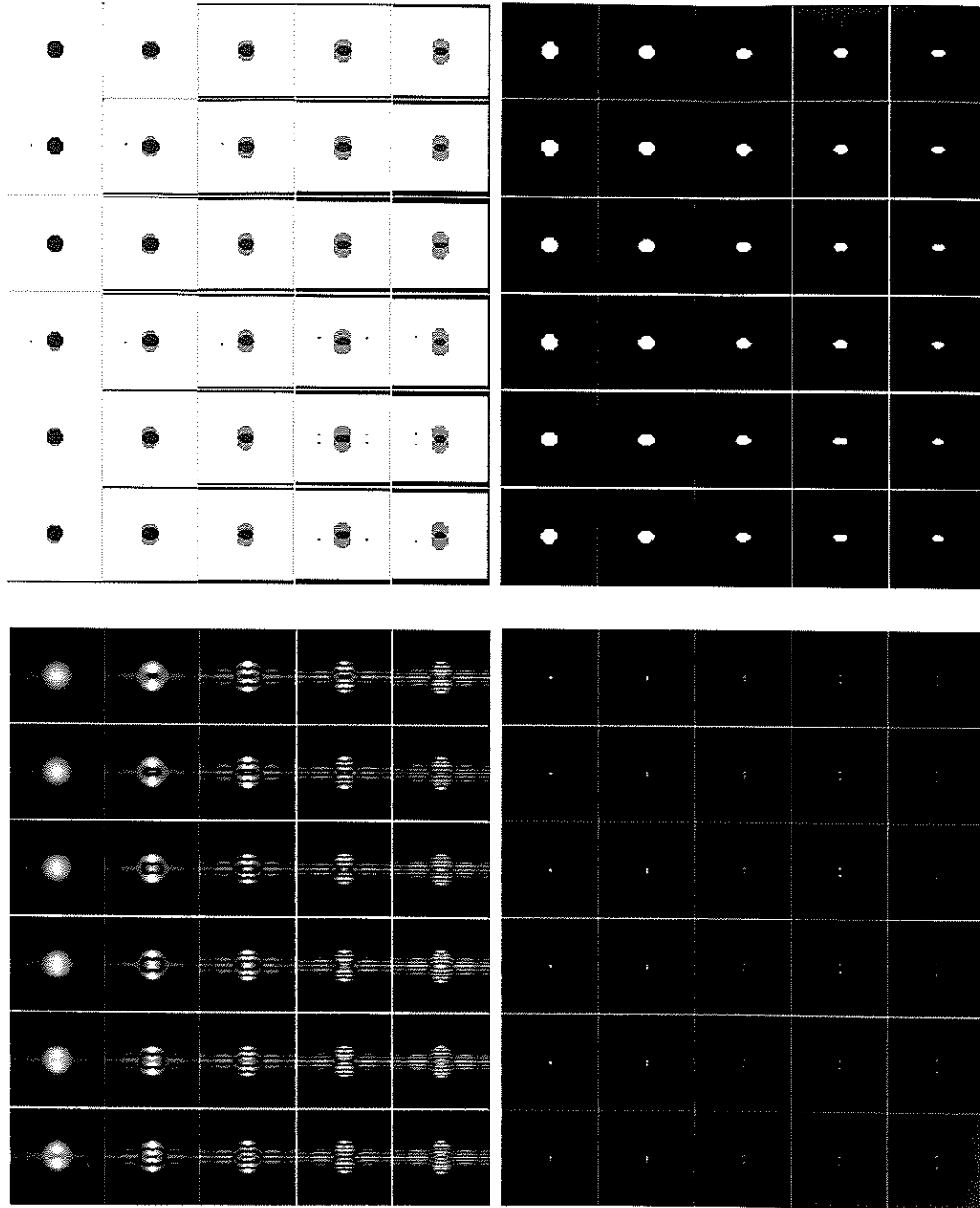


Fig.(VI.27). Para la iteración 32 el filtro Wiener bilineal invierte sus valores, **isu**. El producto del filtro Wiener bilineal con la función bilineal asociada a la **FTO** se presenta en **dsu**, el estimado a la **DW** de la **fpei** en la parte **iin** y el estimado a la **fim** de la **fpei** en la **din**.

filtro bilineal de Wiener actúa como un pasa bajas (al igual que el filtro mediana) pero el filtro **RNC** elimina el ruido remanente; por lo tanto, se espera que la imagen bilineal restaurada tenga baja resolución.

En esta sección se analizan tres casos: el primero es cuando el producto  $ec^k$  para cada iteración disminuye su valor cada vez mas con respecto a la unidad, se empieza con valores menores y cercanos a la unidad, conforme el numero de iteraciones aumenta el producto disminuye. En el segundo, el producto  $ec$  es muy pequeño pero aumenta al incrementarse el numero de iteraciones, primero acercándose a la unidad y después alejándose de ésta rápidamente. El tercero es cuando el valor del desenfoque es alto pero sin ruido, en este caso el filtro **RNC** se aplica al estimado de la **fecm** para eliminar los valores remanentes asociados al producto del filtro bilineal iterativo de Wiener por la **fecm** de la **FTO** desenfocada.

En los tres casos se muestran las **DW's** para cuatro posibles iteraciones. Además, en otras figuras se presenta el producto del espectro de la imagen de un punto por el filtro de Wiener (el cual se obtiene de su respectiva función bilineal), las imágenes restauradas, obtenidas de sus respectivas **fim's** y por último los filtros de Wiener obtenidos de los filtros bilineales iterativos de Wiener.

Finalmente, se presenta las imágenes con que se inicia el algoritmo bilineal iterativo: imagen desenfocada, imagen desenfocada mas ruido, imagen desenfocada con ruido filtrado (aplicando el filtro de mediana) conjuntamente con el modulo al cuadrado de la transformada coseno de cada una de las imágenes del primer reglón.

Para el primer caso se tiene la imagen desenfocada con ruido gaussiano cuya desviación estándar es  $\sigma^2 = 1.5$ . Inicialmente se aplica un filtro de mediana a la imagen con ruido para después a la imagen resultante aplicarle el algoritmo bilineal iterativo de restauración de imágenes bilineales. En cada iteración se aplica el filtro **RNC** a la **fecm** que resulta del producto del filtro bilineal de Wiener por la **fecm** asociada a la **FTO** desenfocada; siguiendo la secuencia del algoritmo se aplica el filtro mediana a la **fim** resultante de aplicarle la transformada coseno digital 4-D a la **fecm**

que resulta del producto anteriormente calculado. En la Fig. (VI.28) se muestra las **DW's** restauradas de una imagen con  $1.5\lambda$  de desenfoque para la 1ra, 3ra, 5ta y 8va iteración; los parámetros del filtro de Wiener son  $e_0 = 0.01$  y  $c = 0.6$  y el valor  $e_0 c^k$  reduce sus valores conforme aumenta la iteración. En este caso la **FTO** desenfocada tiene varios ceros reales<sup>34</sup>; luego, la función estimada del espectro de la imagen se obtiene (primera columna de la Fig.(VI.29)) del resultado de aplicar el filtro **RNC** a la **fecm** que resulta del producto antes mencionado para las iteraciones 1ra, 3ra, 5ta y 8va. La segunda columna presenta las imágenes obtenidas a partir de su **fim** asociada (la cual se obtiene de las **DW's** mostradas en la Fig. (VI.28), o de la transformada coseno 4-D del producto de las **femc's**). En la tercera columna se presenta la evolución del filtro lineal de Wiener para las mismas iteraciones. Lo que se observa de la primera columna de esta figura es (conforme el número de iteraciones aumenta) que aplicar el filtro **RNC** ayuda por un lado a eliminar el ruido y por el otro a obtener una **FTO** binaria que indica como puede ser la imagen restaurada (segunda columna).

En la Fig. (VI.30) se tiene en el primer reglón, la imagen degradada por el desenfoque, el nivel de ruido que se adiciona a esta imagen y el resultado de aplicar un filtro de mediana a la imagen anterior. En el segundo reglón se observa la distribución del módulo al cuadrado de los espectros asociados a cada una de las imágenes, que en este caso coinciden con el módulo al cuadrado de las **FTO**.

La Fig. (VI.31) y la Fig. (VI.32) representa las mismas funciones de las Figs. (VI.28) y (VI.29) cuando  $e_0 = 0.00001$  y  $c = 5$ . Este caso representa la situación en la cual el filtro bilineal iterativo de Wigner inicialmente actúa como un filtro bilineal pasa altas y conforme la iteración aumenta éste cambia a un filtro bilineal pasa bajas. De la Fig. (VI.31) es difícil observar cambios en las distribuciones de intensidad en las **DW's** conforme el número de iteraciones se incrementa (como fácilmente se observa en la Fig. (VI.28)), de hecho en las iteraciones 5ta (**iin**) y 8va (**din**) ya no se observa ningún cambio. Sin embargo, la primera columna de la Fig. (VI.32) indica claramente cambios de la función binaria para la 1ra y 3ra iteraciones; posteriormente, se comprobó que no existen

cambios a partir de la 4ta iteración. La imagen restaurada de un punto para las iteraciones indicadas, presente en la segunda

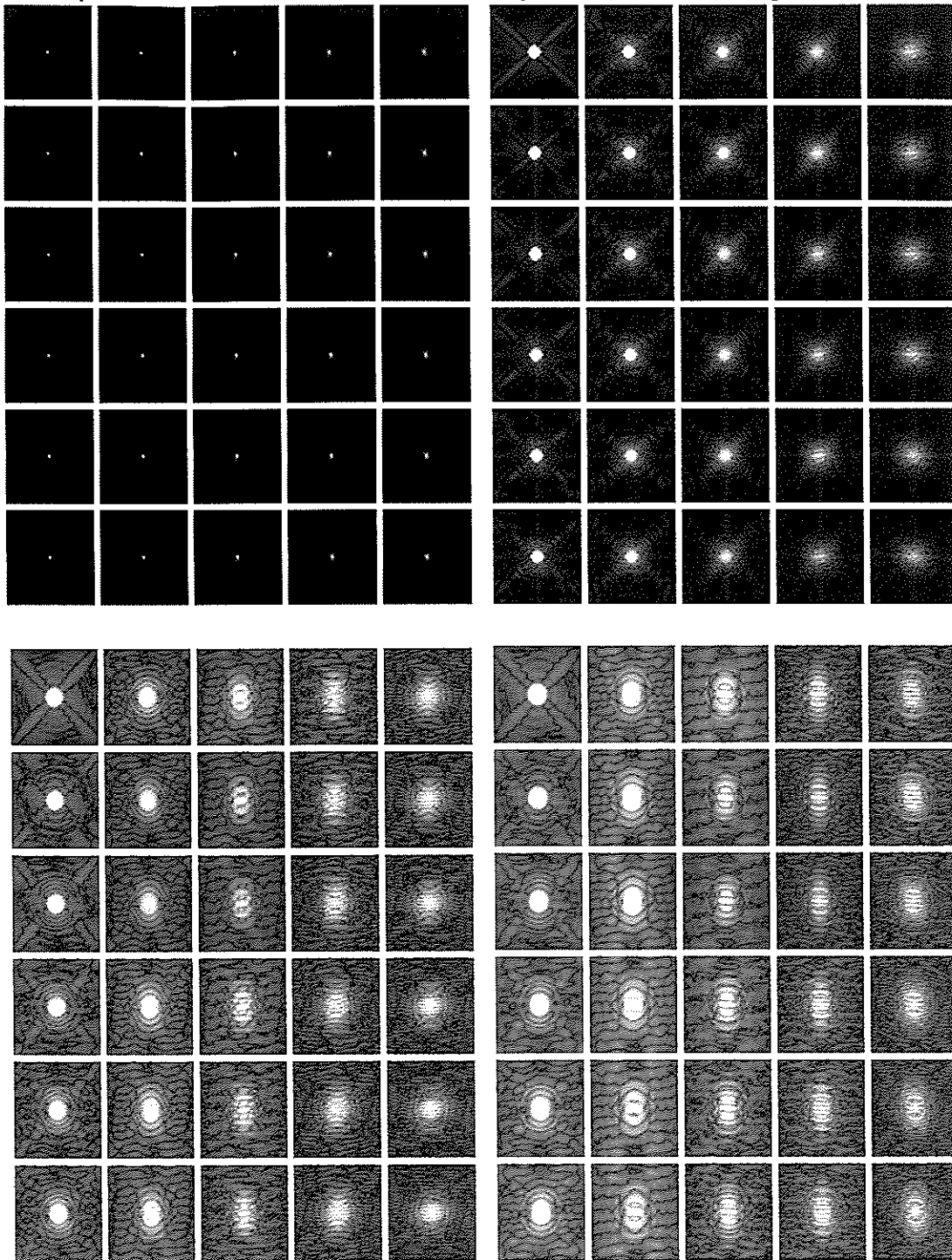


Fig. (VI.28). Las *DW's* de un *SOD* con  $w_{20} = 1.5$  y ruido con  $\sigma^2 = 1.5$  para las iteraciones 1ra (*isu*), 3ra (*dsu*), 5ta (*iin*) y 8va (*din*). El valor de  $e_0 = 0.01$  y  $c = 0.6$ .

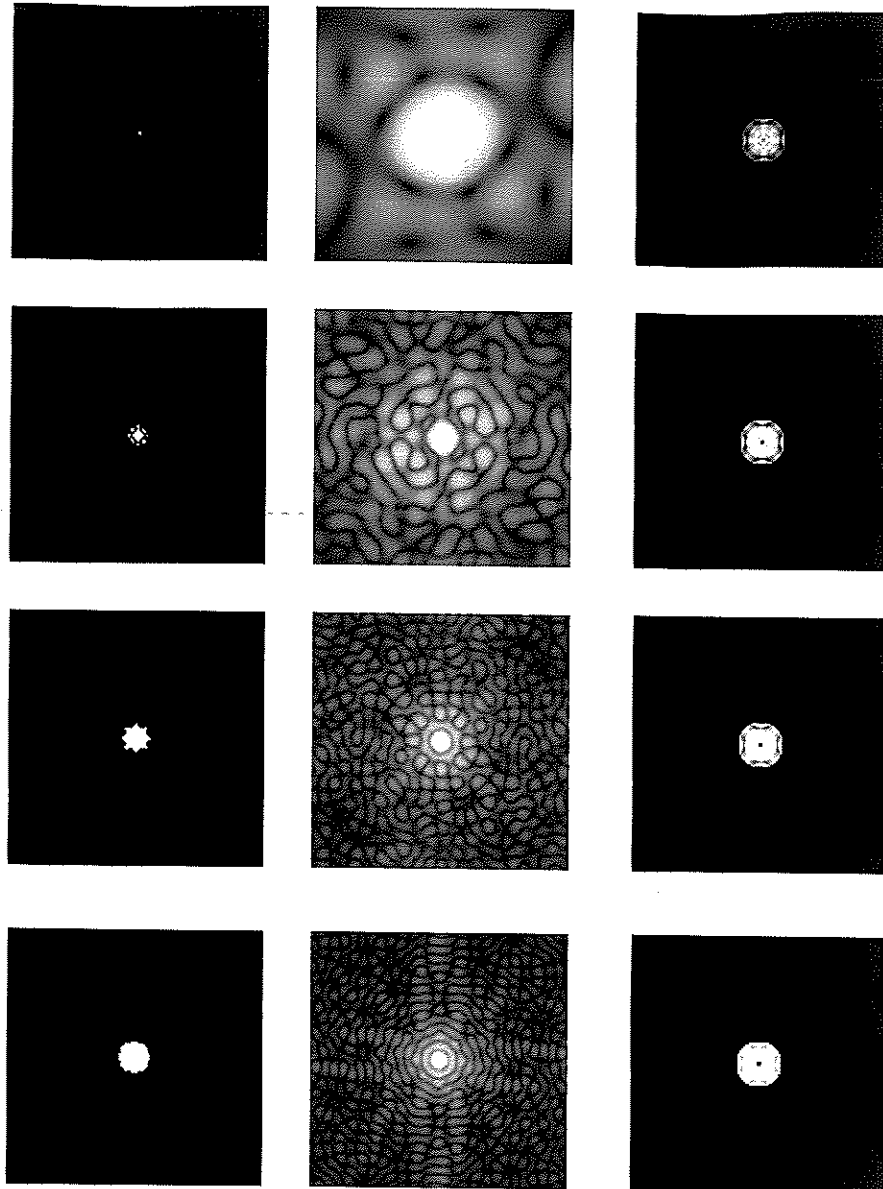
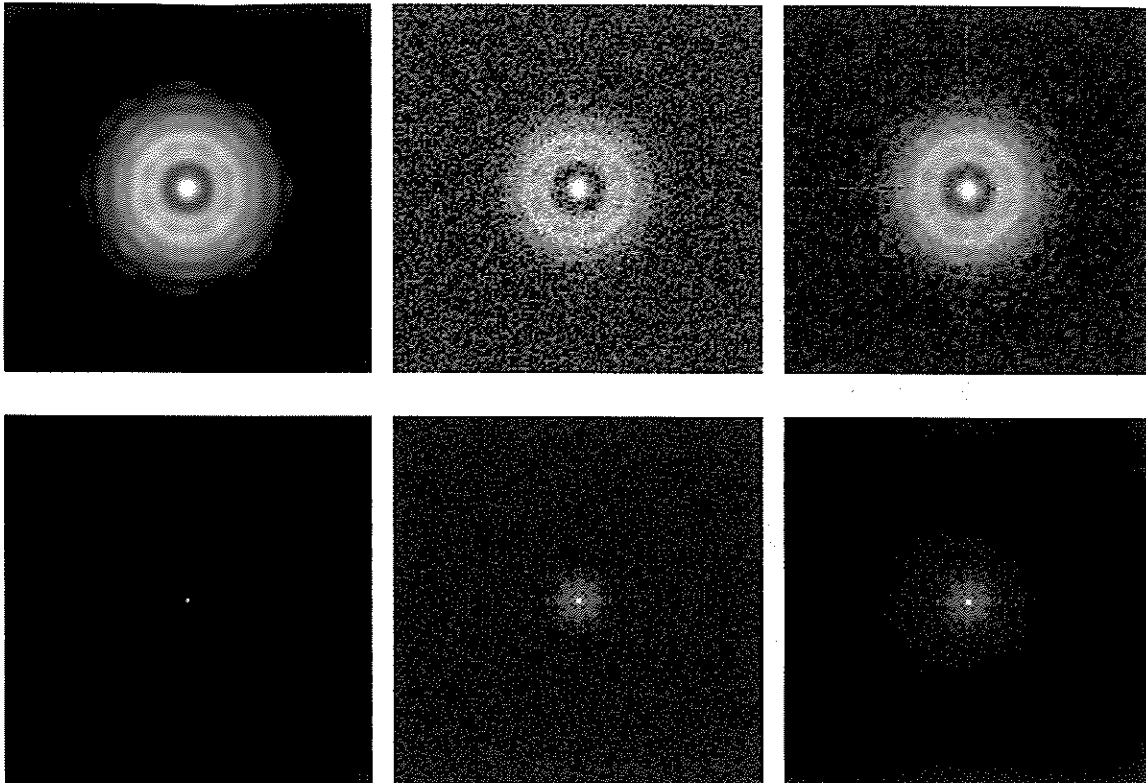


Fig. (VI.29). El producto del filtro de Wiener por la **OTF** de un **SOD** (primera columna) después de aplicar un **RNC**, la imagen restaurada (segunda columna) y el filtro de Wiener (tercera columna) para las iteraciones 1ra (primer renglón), 3ra (segundo renglón), 5ta (tercer renglón) y 8va (cuarto renglón). Los demás parámetros son los mismos que en la Fig. (VI.28).

columna, nos confirma lo anteriormente mencionado. La tercera columna muestra como el filtro de Wiener evoluciona su distribución

de intensidad conforme la iteración aumenta. Es conveniente



*Fig. (VI.30). Primer renglón (izquierda a derecha); imagen desenfocada ( $w_{20} = 1.5$ ) de un objeto puntual, con ruido ( $\sigma^2 = 1.5$ ), con filtro mediana. Segundo renglón (izquierda a derecha); modulo al cuadrado de las funciones de modulación óptica, respectivas.*

recalcar que la primera y segunda columna se obtienen de sus respectivas funciones bilineales **fecm** y **fim**.

En el tercer caso se usa el algoritmo bilineal iterativo para una **fim** asociada a una imagen desenfocada sin ruido, el coeficiente de desenfoco ( $w_{20}$ ) es de  $1.5\lambda$ . Lo que se desea mostrar es que el filtro **RNC** cuando se aplica en la iteración apropiada puede ahorrar un mayor número de iteraciones del algoritmo iterativo para encontrar el mejor estimado a la **fim** de la imagen restaurada. Nuevamente, en la Fig. (VI.33), se muestran las **DW's**

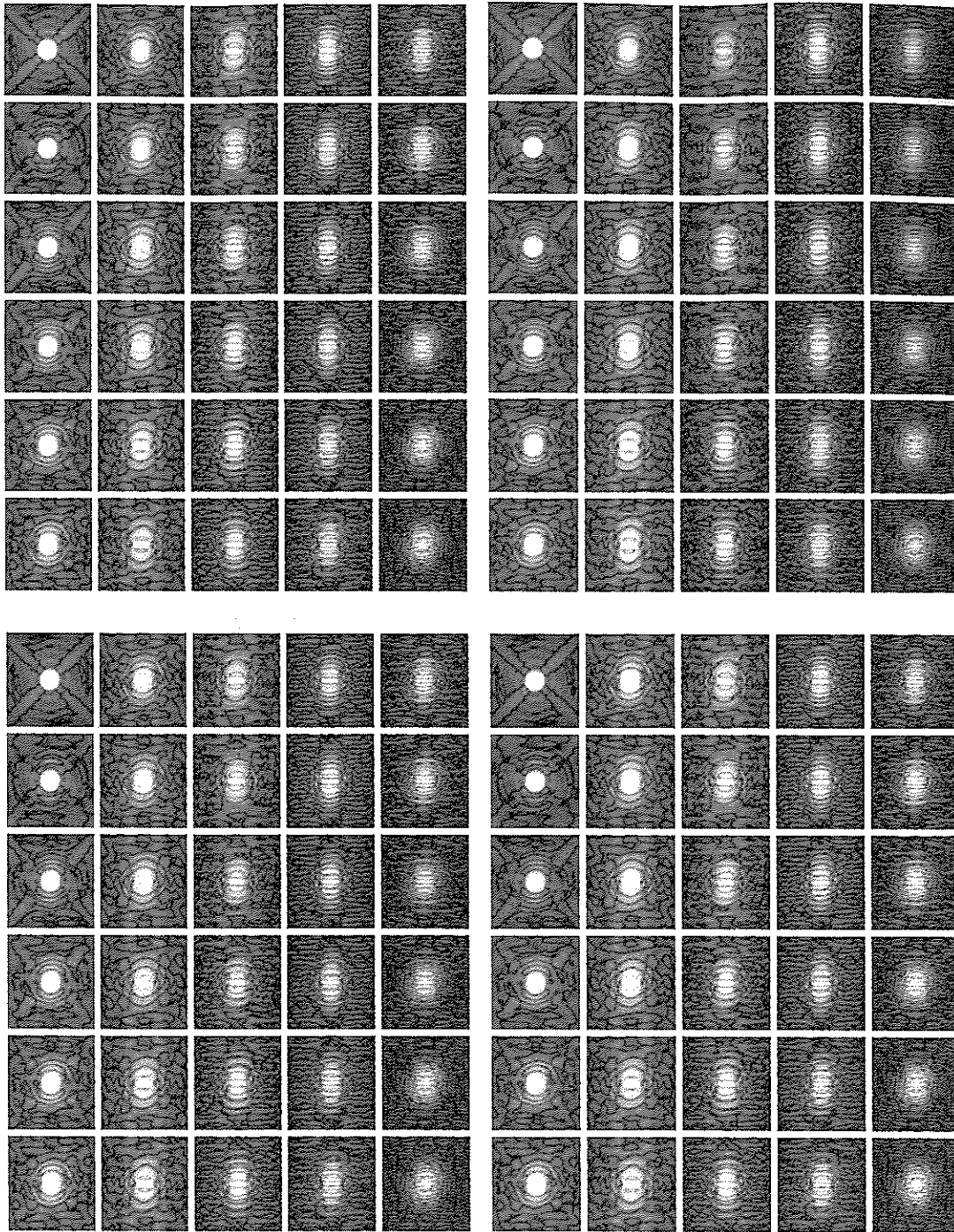


Fig.(VI.31). Las **DW**'s de un **SOD** con  $w_{20} = 1.5$  y ruido con  $\sigma^2 = 1.5$  para las iteraciones 1ra (**isu**), 3ra (**dsu**), 5ta (**iin**) y 8va (**din**). El valor de  $e_0 = 0.00001$  y  $c = 5$ .

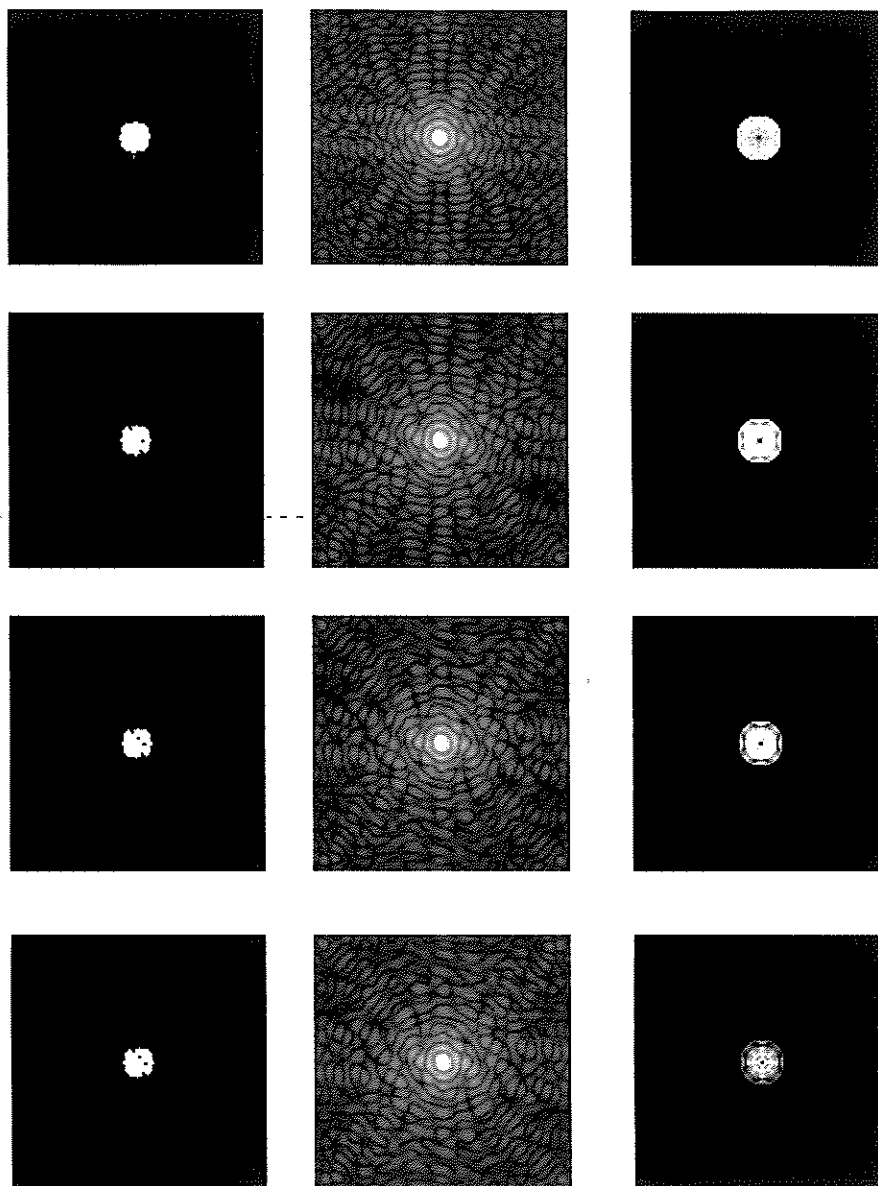


Fig. (VI.32). El producto del filtro de Wiener por la **OTF** de un **SOD** (primera columna) después de aplicar un **RNC**, la imagen restaurada (segunda columna) y el filtro de Wiener (tercera columna) para las iteraciones 1ra (primer renglón), 3ra (segundo renglón), 5ta (tercer renglón) y 8va (cuarto renglón). Los demás parámetros son los mismos que en la Fig. (VI.31).



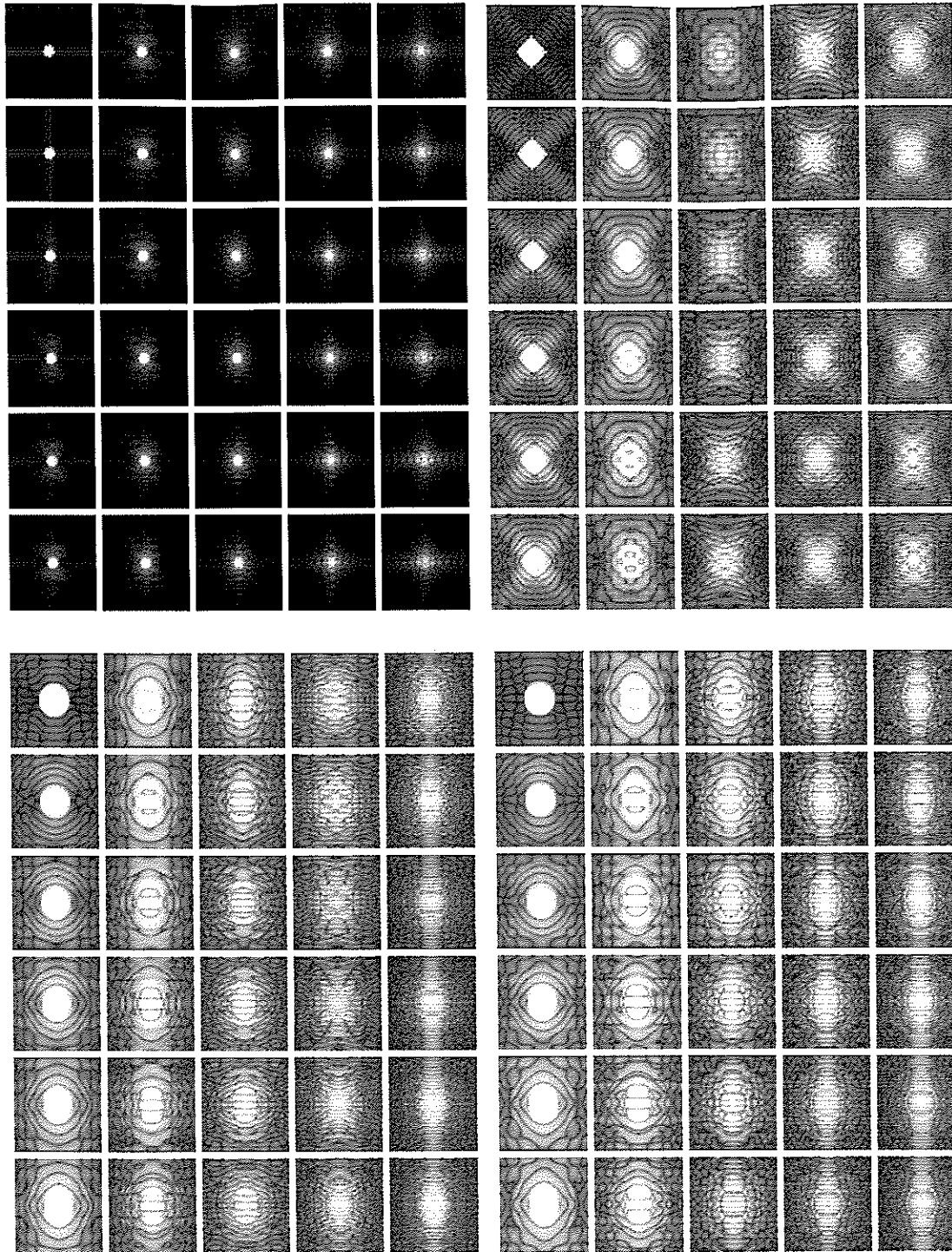


Fig. (VI.33). Las *DW's* del estimado de la fim de la imagen de un punto con desenfoco y sin ruido, para las iteraciones 1ra (*isu*), 2da (*dsu*), 3ra (*iin*) y 4ta (*din*). Los valores de  $e_0 = 0.01$ ,  $c = 0.1$  y  $w_{20} = 2\lambda$

donde  $k$  denota el índice de la iteración que se esta llevando a cabo. En este caso los valores de  $e_0$  y de  $c$  son 0.01 y 0.1, respectivamente, de tal forma que el filtro bilineal iterativo de Wiener inicialmente se comporta como un pasa bajas y conforme el numero de iteraciones aumenta es un pasa altas. Como se puede notar de la Fig. (VI.33), los cambios en las distribuciones de intensidad son pequeños conforme el numero de iteraciones aumenta de hecho, si no se aplica el filtro **RNC**, el numero de iteraciones que se tiene que llevar a cabo para obtener el estimado de la imagen restaurada con mejor resolución aumenta significativamente. Lo anterior se muestra en la cuarta columna de la Fig. (VI.34), donde se observan las distribuciones de intensidad de los estimados a la imagen de un punto una vez que se aplico el filtro **RNC**. En la en la primera columna de la Fig. (VI.34) se observa la distribución en intensidad de las  $\hat{F}^{(k)}(u, v)$  para las primeras cuatro iteraciones, sin aplicar el filtro **RNC**, del algoritmo bilineal iterativo; en la segunda columna se muestran los estimados a la imagen de un punto asociadas a las  $\hat{F}^{(k)}(u, v)$  dados en la primera columna; en la tercera columna se muestra el resultado de aplicar el **RNC** a las  $\hat{F}^{(k)}(u, v)$  de la primera columna y en la cuarta columna se muestran los estimados a la imagen de un punto obtenidos de los estimados de la tercera columna. Bajo las condiciones arriba dadas, después de la 4ta iteración la distribución de intensidad de las restauraciones de la imagen de un punto (el algoritmo realizo 40 iteraciones) no muestran cambio alguno.

Para comprobar que la restauración de la imagen desenfocada obtenida después de la cuarta iteración es la mejor (cuarta columna, cuarto reglón de la Fig. (VI.34)) que se puede obtener con el algoritmo bilineal iterativo y el filtro **RNC**, se procedió a correr este algoritmo para una imagen ligeramente desenfocada ( $w_{20} = .25\lambda$ ), sin cambiar los valores de  $e_0$  y  $c$ , del caso anterior. En estas condiciones la **FTO** no tiene ceros y por consiguiente se espera que el filtro bilineal iterativo de Wiener tenga su mejor desempeño conforme el numero de iteraciones aumenta. La Fig. (VI.35) muestra los resultados (equivalentes a los de la Fig. (VI.34)) que se obtienen: lo que se observa de esta figura es que el filtro

bilineal iterativo de Wiener por si mismo genera mejores estimados en las primeras dos iteraciones en comparación a los estimados que se obtienen al aplicar el filtro **RNC**; después de la cuarta iteración no existe diferencia entre los estimados

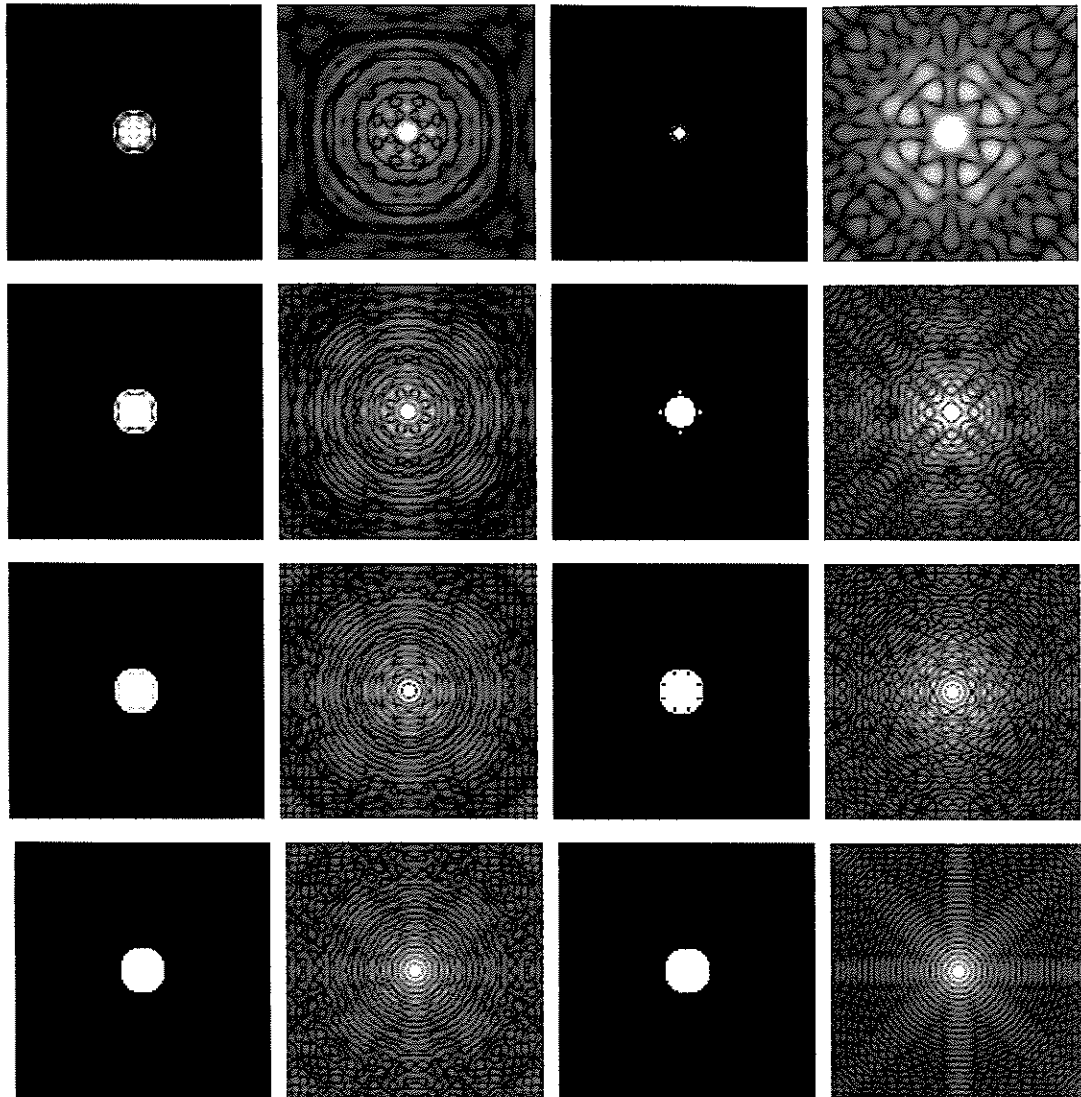


Fig. (VI.34). El producto del filtro de Wiener por la **OTF** de un **SOD** (primera columna), la imagen de un punto restaurada obtenida a partir de los datos de la primera columna (segunda columna), lo mismo de la primera columna después de aplicar un filtro **RNC** (tercera columna) y la imagen de un punto restaurada obtenida a partir de los datos de la tercera columna (cuarta columna) para las iteraciones 1ra (primer renglón), 2da (segundo renglón), 3ra (tercer renglón) y 4ta (cuarto renglón). Los demás parámetros son los mismos que en la Fig. (VI.33).

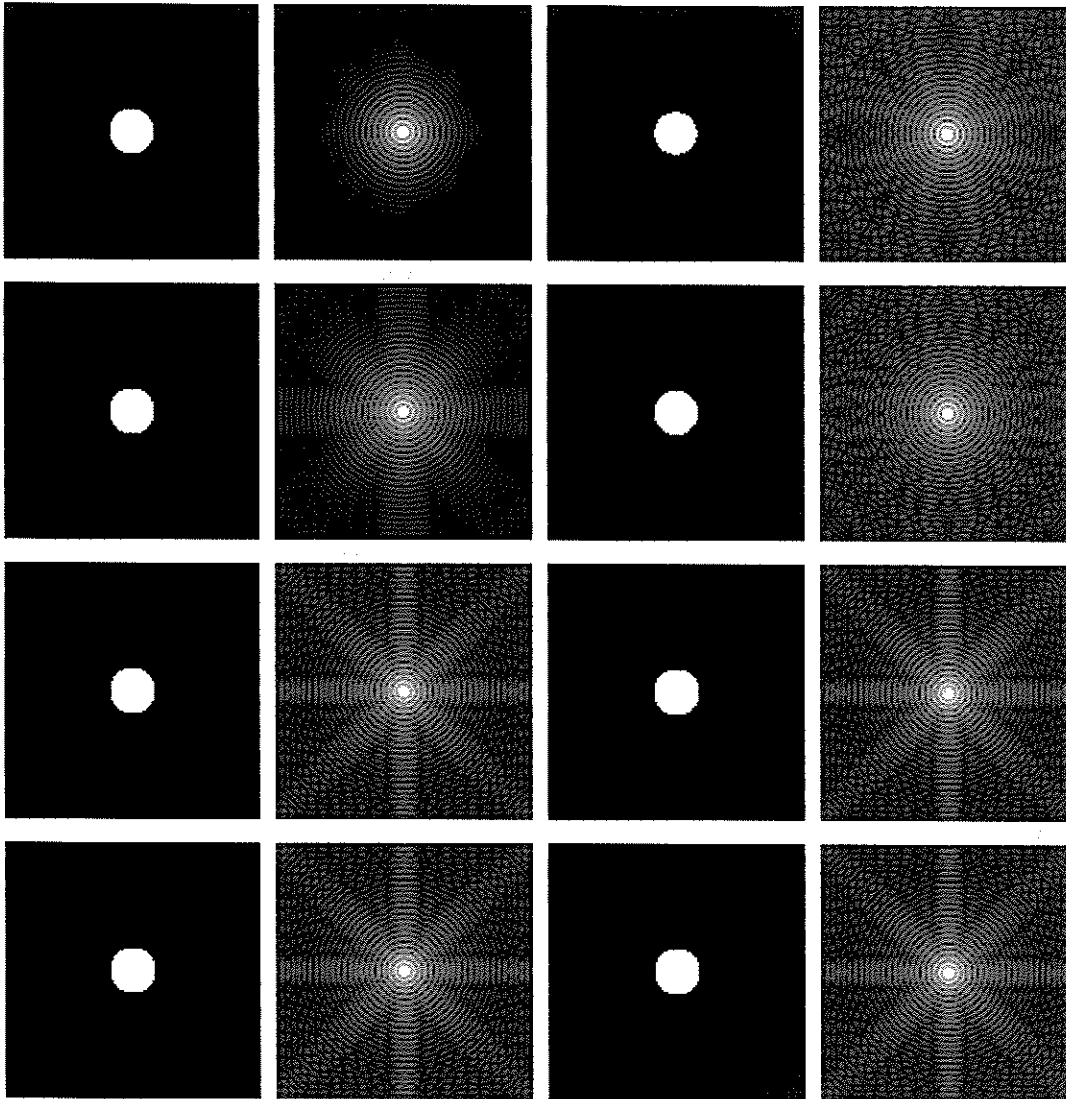


Fig. (VI.35). Para  $w_{20} = .25\lambda$  se muestran los resultados equivalentes a los obtenidos en la Fig. (VI.34).

obtenidos, sin o aplicando el filtro **RNC**. De los estimados obtenidos en la cuarta iteración, se puede concluir que éstos son los mejores para una imagen con un desenfoque fijo.

## VI.8. Conclusiones.

Como lo dicta la teoría de Volterra, a partir de un evento lineal se construye, de acuerdo con restricciones físicas (proceso lineal en intensidad e invariancia espacial del procesador) un evento bilineal para restaurar información bilineal con diferentes funciones (**fim**, **fecm** y **DW**), lo cual permite restaurar bilinealmente imágenes desenfocadas con ruido con métodos numéricos. Estas funciones bilineales también generan algoritmos iterativos con el mismo propósito.

Por razones de simetría, rapidez en los resultados numéricos y entendimiento de los proceso bilineales, se restauran bilinealmente, con algoritmos discretos, imágenes desenfocadas de un punto, con diferentes desenfoces (mono cromáticas y poli cromáticas). El hecho de elegir la imagen de un objeto puntual no le restan generalidad al problema de restaurar bilinealmente información. Sin embargo, si ayuda a entender como operan los procesadores bilineales y por otro lado requiere menor cantidad de información en comparación con otro tipo de imagen; además, se tiene la posibilidad de trabajar con transformaciones discretas más rápidas que la de Fourier.

Cuando la imagen de un punto tiene ruido gaussiano, los resultados obtenidos con el algoritmo bilineal iterativo muestran que no es posible nulificar este ruido con los filtros convencionales, operando en el dominio de la **fim**. Estos resultados se puede mejorar cuando se usa una combinación de filtros de ruido, un filtro convencional operando en el dominio de la **fim** y otro operando (filtro **RNC**) en el dominio de la **fecm**.

Si la imagen además de ruido tiene desenfoco, el proceso bilineal iterativo logra restaurar información dependiendo del nivel de ruido y la cantidad de desenfoco. Nuevamente, se logran resultados alentadores, cuando se usa la combinación de filtros de ruido mencionado en el párrafo anterior.

Para un desenfoco relativamente grande se pueden obtener, con el algoritmo bilineal iterativo, mejores estimados conforme el numero de iteraciones aumenta, pero difícilmente se logra el estimado óptimo. En este caso, otra forma de usar el filtro **RNC** es aplicarlo al estimado de la **fecm** después de un determinado

numero de iteraciones, lo cual genera un estimado suficientemente cerca al deseado. Este resultado se puede verificar con los estimados obtenidos cuando la imagen tiene un desenfoque pequeño (o cero desenfoque), como muestran los últimos resultados de este trabajo.

Por consiguiente, se puede concluir los siguientes puntos: (a)- los procesadores bilineales para restaurar información bilineal degradada generan resultados equivalentes a los que se obtienen con procesadores lineales, cuando se usan los filtros bilineales adecuados; sin embargo, el propósito de los procesadores bilineales es procesar información bilineal (b)- las funciones bilineales despliegan información que ayudan a visualizar el contenido de información de los puntos vecinos a un determinado punto (**fim**), el contenido de frecuencias de ese punto (**DW**) y como afectan las frecuencias vecinas a una frecuencia particular (**fecm**), y (c)- la existencia de formas diferentes, dentro de un mismo dominio, de poder obtener resultados equivalentes a los obtenidos con procesadores lineales o de modificar esta información de forma no convencional.

El propósito de los procesadores bilineales para restaurar información no es competir en tiempo de procesamiento de la información o el de mejorar numéricamente los resultados que los procesadores lineales obtienen por si mismos. Pero uno de los posibles propósitos es adicionar elementos que permitan comprender como la bilinealidad puede complementar información lineal de una imagen.

El estudio de los sistemas bilineales en procesamiento de imágenes se justifica por si mismo puesto que permite la aplicación de filtros que modifique la información que por métodos lineales resulta difícil de imaginar, como ya se ha publicado<sup>32,33,58</sup>, o entender relaciones y propiedades generales (que el producto ancho de banda por el tamaño finito del soporte tiene un valor finito positivo). Finalmente, entender un proceso bilineal partiendo de un proceso lineal y viceversa es estimulante y un reto en el conocimiento de los eventos no-lineales.

## APÉNDICE A.

### ANÁLISIS DE LA **fpei** PARA CUALQUIER VALOR DEL COEFICIENTE DE DESENFQUE.

#### A-1. Introducción.

El desempeño de un sistema óptico en luz incoherente se puede llevar a cabo observando el comportamiento de la **FTO** o equivalentemente, la función de punto extendido en intensidad (**fpei**). En el caso unidimensional, la función de ambigüedad muestra de manera simultánea, en coordenadas polares, todas las **FTO**'s asociadas a desenfoques que un sistema óptico puede tener<sup>20</sup>.

En este apéndice se quiere encontrar como varia el valor de amplitud de la **fpei** al cambiar el valor del coeficiente de desenfoque, en la pupila de entrada en el sistema óptico.

#### A-2. La **fpei** para desenfoques.

La función de pupila compleja de un sistema óptico esta dada por la Ec. (1.5) del primer capítulo. En el caso de que el sistema tenga simetría radial y aberración de desenfoque, el polinomio de aberración de la pupila compleja se reduce a la siguiente forma:  $P(\rho) = \frac{\pi}{\lambda} w_{20} \rho^2$ , donde  $w_{20}$  es el valor del coeficiente de desenfoque (medido en longitudes de onda) y las coordenadas radial y angular  $\rho, \varphi$  respectivamente, están relacionadas con las coordenadas de la pupila  $u, v$  por las siguientes igualdades:  $\rho^2 = u^2 + v^2$  con  $\rho = u \cos \varphi$  y  $\rho = v \sin \varphi$ .

Por consiguiente, en el caso de desenfoque, la pupila compleja del sistema obedece la siguiente relación:

$$\Pi(\rho) = \begin{cases} p(\rho) e^{j \frac{\pi}{\lambda} w_{20} (\rho^2)} & \text{si } \rho^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{si } \rho^2 > a^2 \end{cases}, \quad (\text{A-1})$$

Como se puede mostrar, para sistemas ópticos con simetría radial la **fpei** es el modulo al cuadrado de la transformada de Hankel de  $\Pi(\rho)$ , esto es:

$$h(r) = \left| \int_0^a \Pi(\rho) J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho \right|^2, \quad (\text{A-2})$$

que puede expresarse en términos de la convolución de la transformada de Hankel de la pupila real  $p(\rho)$ , de radio  $a$ , con la transformada de Hankel de la función exponencial compleja asociada al desenfoque ( $e^{j\frac{\pi}{\lambda} w_{20} \rho^2}$ ). Esto es:

$$h(r) = \left| \int_0^a p(\rho) J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho \right|_r * \left| \int_0^\infty e^{j\frac{\pi}{\lambda} w_{20} \rho^2} J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho \right|^2, \quad (\text{A-3})$$

donde el símbolo  $*$  representa la convolución con respecto a la variable  $r$ , y la función  $J_0(\cdot)$  es la transformada de Hankel de primer tipo y de orden cero. Como la pupila real tiene un radio  $a$ , entonces sí  $r = x \cos \theta$ ,  $r = y \sin \theta$ , la transformada de Hankel de  $p(\rho)$  es:

$$\int_0^a J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho = a \frac{J_1(2\pi a r)}{r} \quad (\text{A-4})$$

donde  $J_1(\cdot)$  es la función de Bessel de primer tipo y de orden uno.

Por otro lado, la transformada de Hankel del factor  $e^{j\frac{\pi}{\lambda} w_{20} \rho^2}$  es:

$$\int_0^\infty e^{j\frac{\pi}{\lambda} w_{20} \rho^2} J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho = \frac{\lambda}{w_{20}} e^{-j\frac{\pi \lambda}{w_{20}} r^2}. \quad (\text{A-5})$$

Se observa de las Ecs. (A-3), (A-4) y (A-5) que la **fpei** depende tanto del radio  $a$  como del valor del coeficiente de desenfoque. Sí  $\beta = \lambda / w_{20}$ , entonces el resultado de la Ec. (A-5) se reduce a:



$$h(r) = \left| \pi a^2 \beta B \text{sinc}(ar) * \{ \cos(\pi \beta r^2) - j \text{sen}(\pi \beta r^2) \} \right|^2, \quad (\text{A-6})$$

donde la función  $B \text{senc}(ar) = \frac{J_1(2\pi ar)}{\pi r a}$ . La relación anterior se simplifica a la siguiente forma:

$$h(r) = (\pi a^2)^2 \beta^2 \{ | B \text{senc}(ar) * \cos(\pi \beta r^2) |^2 + | B \text{senc}(ar) * \text{sen}(\pi \beta r^2) |^2 \}. \quad (\text{A-7})$$

En condiciones paraxiales, es válida la siguiente relación,  $\cos(\pi \beta r^2) \approx 1$  y  $\text{sen}(\pi \beta r^2) \approx 0$  (sí  $w_{20} > 1$ , la relación se conserva para valores de  $r$  cada vez más grandes; sí  $w_{20} < 1$ , la relación es válida para valores de  $r$  pequeños). La consecuencia es que bajo estas condiciones  $h(r) \approx (\pi a^2)^2 \beta^2$ . Luego, para un radio  $a$  dado, la **fpei** depende como el inverso del cuadrado de la cantidad de desenfoque. En este caso, para un desenfoque dado la **fpei** tiene su máximo en el origen que es proporcional a la cuarta potencia del radio de la pupila real, pero disminuye conforme el punto de observación se aleja del origen del plano de detección. La Fig. (A.1). presenta el comportamiento del modulo al cuadrado de la función  $\text{sen}(\pi \beta r^2) \approx 0$  (parte izquierda) y de la función  $\cos(\pi \beta r^2) \approx 1$  (parte derecha) para cuando  $w_{20} = 0.5\lambda$  (parte superior) y de  $w_{20} = 2\lambda$  (parte inferior).

En caso de que el sistema óptico sea perfecto (con los coeficientes del polinomio de aberraciones igual a cero, excepto el coeficiente del desenfoque), entonces  $B \text{senc}(ar) = \delta(ar) = \frac{1}{a^2} \delta(r)$  y como  $\cos^2(\pi \beta r^2) + \text{sen}^2(\pi \beta r^2) = 1$ , luego de la Ec. (7), la **fpei** adopta la siguiente expresión:

$$h(r=0) = \left( \pi \frac{\lambda}{w_{20}} \right)^2, \quad (\text{A-8})$$

lo cual implica que bajo las condiciones arriba mencionadas, la **fpei** evaluada en el origen es una constante, de tal manera que sí se observa en el plano de desenfoque cero la intensidad es la máxima posible en relación a la intensidad en cualquier otro plano observación.

En el caso que la pupila compleja se reduzca a casi un punto,  $Bsinc(ar) = 1$ , tenemos de la Ec. (A-7) que:

$$h(r) = \beta(const.), \quad (A-9)$$

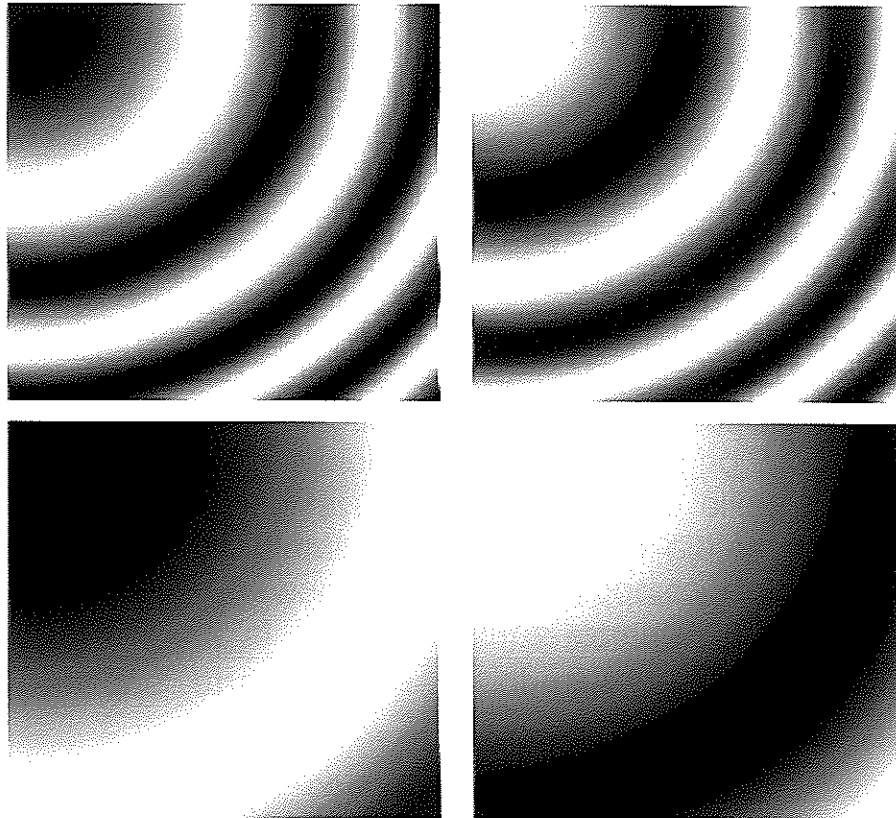


Fig.(A.1). Modulo al cuadrado de las funciones  $\text{sen}(\pi\beta r^2)$  y  $\text{cos}(\pi\beta r^2)$  cuando  $w_{20} = .5\lambda$  (arriba)  $w_{20} = 2\lambda$  (abajo).

donde la palabra *const.* representa una constante, de la Ec. (A-9) se observa que la intensidad del plano donde se detecta la intensidad varia al cuadrado del inverso del desenfoque siendo máxima cuando  $w_{20} = 0$ .

En algunas ocasiones se pueden obtener resultados numéricos interesantes aproximando el primer lóbulo de la FTO desenfocada por una función Gaussiana. Para valores del coeficiente de desenfoque donde el primer cero es menor que la mitad o mayor a una vigésima del ancho de banda de la FTO (entre

media longitud de longitud de onda y un par de longitudes de onda), la **fpei** se puede expresar como:

$$h(r) = (\pi\alpha^2\beta)^2 |Bsinc(ar) * gauss(\pi\beta r^2)|^2, \quad (A-10)$$

( $gauss(\pi\beta r^2) = e^{-\pi\beta r^2}$ , donde en ancho medio o variancia es directamente proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de desenfoque). Cuando el radio de la pupila real es suficientemente grande, la Ec. (A-10) puede reducirse a la siguiente expresión:

$$h(r) \approx (\pi\alpha^2\beta)^2 gauss^2(\pi\beta r^2), \quad (A-11)$$

lo cual implica que la **fpei** varía como el cuadrado de una función Gauss cuyo ancho medio depende de la cantidad de desenfoque, de la longitud de onda y cuya intensidad es como el inverso del cuadrado del desenfoque.

## APÉNDICE B.

### LA FUNCION DE PUNTO EXTENDIDO FRACCIONAL EN INTENSIDAD PARA DESENFQUES.

En este apéndice se desea encontrar como la **fpei** para desenfoques esta relacionada con la Transformada de Fourier Fraccional<sup>1</sup> de orden  $\alpha$  aplicada a la función de la pupila real de un sistema óptico, a la función resultante la denominaremos **fpe** fraccional en intensidad (**fpefi**).

La Transformada de Fourier Fraccional, de una función compleja  $p(u, v)$  [ $TF_\alpha\{p(u, v)\}$ ], esta definida de la siguiente forma:

$$TF_\alpha\{p(u, v)\} = \frac{je^{-j\alpha}}{2\pi \text{sen } \alpha} e^{-\frac{j}{2}(x^2+y^2)\cot\alpha} \iint e^{-\frac{j}{2}(u^2+v^2)\cot\alpha} e^{\frac{j}{\text{sen } \alpha}(ux+vy)} p(u, v) dudv. \quad (\text{B-1})$$

donde en general,  $\alpha$  es un numero fraccional. En el caso que la función  $p(u, v)$  sea la función de pupila real de un sistema óptico con simetría circular, esto es:

$$p(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u^2 + v^2) < 1 \\ 0 & \text{si } (u^2 + v^2) > 1 \end{cases}, \quad (\text{B-2})$$

entonces, la **fpefi** ( $h_\alpha(x, y)$ ), la podemos definir de la siguiente expresión:

$$h_\alpha(x, y) = |TF_\alpha\{p(u, v)\}|^2 = \frac{1}{4\pi^2 \text{sen}^2 \alpha} \left| \iint p(u, v) e^{-\frac{j}{2}(u^2+v^2)\cot\alpha} e^{\frac{j}{\text{sen } \alpha}(ux+vy)} dudv \right|^2, \quad (\text{B-3})$$

como la función  $\cot\alpha$  varía desde  $(+\infty, \text{hasta } -\infty)$   $\{\cot(0) = +\infty, \cot(\frac{\pi}{2}) = 0 \cot(\pi) = -\infty\}$ , luego podemos hacer la siguiente sustitución:

$$\cot\alpha = 4\pi w_{02},$$

lo cual implica que para  $\alpha = 0, w_{02} = \infty$ , para  $\alpha = \frac{\pi}{2}, w_{02} = 0$  y para  $\alpha = \pi, w_{02} = -\infty$ . Por consiguiente tenemos:

$$h_{\alpha}(x, y) = \left| TF_{ang\{\cot(4\pi w_{20})\}} \{P(u, v)\} \right|^2, \quad (\text{B-4})$$

o equivalentemente,

$$h_{\alpha}(x, y) = \frac{4w_{20}^2}{\cos^2 \alpha} \left| \iint p(u, v) e^{-j2\pi w_{02}(u^2+v^2)} e^{j2\pi \frac{2w_{20}}{\cos \alpha}(ux+vy)} dudv \right|^2. \quad (\text{B-5})$$

Sí hacemos los siguientes cambios de variables  $x' = \frac{2w_{02}}{\cos \alpha} x$  y  $y' = \frac{2w_{02}}{\cos \alpha} y$ , y definimos la función de pupila compleja para desenfoque como:

$$P(u, v) = \begin{cases} p(u, v) e^{-2\pi w_{02}(u^2+v^2)} & \text{si } u^2 + v^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } u^2 + v^2 > 1 \end{cases} \quad (\text{B-6})$$

entonces, la Ec. (B-5) puede escribirse como:

$$h_{\alpha} \left( \frac{\cos \alpha}{2w_{02}} x', \frac{\cos \alpha}{2w_{02}} y' \right) = \frac{4w_{02}^2}{\cos^2 \alpha} \left| \iint P(u, v) e^{j2\pi(ux'+vy')} dudv \right|^2. \quad (\text{B-7})$$

que es la expresión explícita de la **fpefi** en términos de la **fpei**, ambas expresadas en el sistema de coordenadas  $x', y'$ . De la Ecs. (B-3) y (B-7) la **fpefi** se puede escribir en el sistema de coordenadas  $x, y$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_{\alpha}(x, y) &= \frac{4w_{02}^2}{\cos^2 \alpha} h(x', y') \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \sin^2 \alpha} h \left( \frac{x}{2\pi \sin \alpha}, \frac{y}{2\pi \sin \alpha} \right). \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

Como la constante  $2\pi$  se obtiene de la definición de la transformada de Fourier fraccional no simétrica, luego si esta definición toma su versión simétrica la expresión anterior tiene la siguiente forma:

$$h_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} h\left(\frac{x}{\text{sen } \alpha}, \frac{y}{\text{sen } \alpha}\right). \quad (\text{B-9})$$

De la última relación podemos observar que si  $\alpha = \pi/2$ , entonces:

$$h_{\alpha=\pi/2}(x, y) = h(x, y). \quad (\text{B-10})$$

lo cual indica que cuando la fracción  $\alpha$  expresada en radianes, es  $\pi/2$ , la **fpefi** es la misma que la **fpei**, que es exactamente lo que se espera.

## APÉNDICE C.

### RED NEURONAL CELULAR PARA ESTIMAR IMÁGENES BILINEALES UN PUNTO DESENFOCADO.

La Red Neuronal Celular (**RNC**) ha probado ser un filtro de ruido eficaz; sin embargo, no es simple de programar y los tiempos de computo son grandes en relación a otros algoritmos para reducir ruido aditivo. La **RNC** se puede simular como un arreglo de procesadores analógicos no-lineales, capaces de analizar una señal continua, también se puede simular digitalmente para procesar señales digitales. El arreglo de procesadores analógicos (o digitales) puede implementarse para funciones lineales o bilineales (como ya menciono en el capítulo IV).

La estructura básica de una **RNC** es una celda, que se encuentra conectada por medio de conexiones con un vecindario (celdas que están dentro de un determinado radio, ver capítulo IV), las cuales se comunican entre sí y a la vez cada una se comunican con otras celdas, las cuales tienen sus respectivos vecindarios.

Para seguir con la notación empleada en sistemas bilineales y de acuerdo a las referencias<sup>40,42,55</sup>, denotamos una celda como  $C_{l,l'}$  donde  $l, l'$  son las coordenadas espaciales discretas y al conjunto de celdas vecinas (vecindario) por  $V_{l,l'}$ . Entonces, para un radio de acción dado (dentro del cual se encuentra el vecindario que puede modificar al valor de  $C_{l,l'}$ ) éste radio determina cuales son las celdas vecinas y el número de ellas. De esta forma si el radio de acción es uno, el vecindario de  $C_{l,l'}$  son ocho celdas, como se indica en la Fig. (C-1).

Una **RNC** es un sistema<sup>42</sup>. Por consiguiente, cualquier celda asociada a la **RNC** tiene una **función de entrada**  $\mu(l, l')$ , una **función de salida**  $S(l, l')$  y una **función de estado**. En nuestro caso, la  $\mu(l, l')$  es el mejor estimado de la función de intensidad

mutua (**fm**) de la imagen limitada por difracción (**ILID**) con ruido ( $n$ ) en la etapa  $k$ 'ésima ( $\hat{f}_{f+n}^{(k+1)}(l, l')$ ), al cual denotaremos en este apéndice como  $\hat{f}_f(l, l')$ . Sin embargo, en las dos últimas secciones del capítulo VI, se opero con la función bilineal,  $\hat{R}_f(l, l')$ , por ser la mas adecuada para restaurar la imagen desenfocada de un punto y aplicarle el filtro **RNC**.

La ecuación de estado de una celda del **RNC** en su estado estacionario, tiene la siguiente forma:

$$\hat{f}_{f,i,r}(l, l') = \sum_{C_{i,r} \in \mathcal{V}_{i,r}} A_{i,r}(l, l') S_{i,r}(l, l') + \sum_{C_{i,r} \in \mathcal{V}_{i,r}} B_{i,r}(l, l') \mu_{i,r}(l, l') + c \quad (C.1)$$

donde las plantillas  $A_{i,r}(l, l')$  y  $B_{i,r}(l, l')$  son espacialmente invariantes (los valores de los elementos de la plantilla no dependen de la posición de la celda, pero si pueden cambiar de acuerdo al tipo de procesamiento que se desee: eliminar el ruido, realce de borde, suavizar bordes, etc.),  $S_{i,r}(l, l')$  es la salida del sistema, la cual queda definida por medio de una ecuación de salida. El valor de la constante,  $c$ , se ajusta, al tipo de procesamiento o al nivel y tipo de ruido.

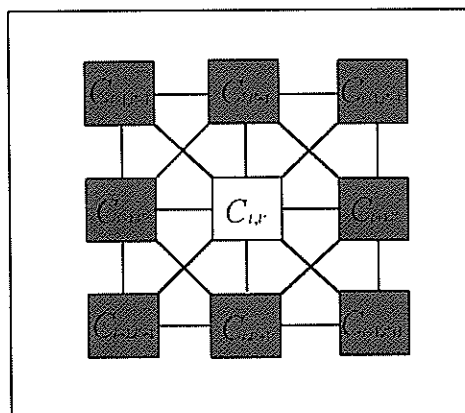


Fig. B-1 Celdas vecinas a  $C_{i,r}$  en una **RNC**



La ecuación de salida es no-lineal y tiene la siguiente expresión:

$$S_{i,l'} = \frac{1}{2} \left( \left| \hat{f}_{\hat{f}_{i,l'}}(l, l') + 1 \right| - \left| \hat{f}_{\hat{f}_{i,l'}}(l, l') - 1 \right| \right). \quad (C.2)$$

Las Ecs. (C.1) y (C.2) rigen la **RNC**.

En nuestro caso, una vez que se obtiene el mejor estimado de la **fim** de la **ILID** con ruido aditivo, aplicamos el **RNC** para eliminar el ruido. La entrada al sistema  $\mu_{i,l}(l, l')$  se hace igual al mejor estimado de la **fim** de la **ILID** con ruido (ver Ec. (5.20)), esto es:

$$\mu_{i,l'}(l, l') = \hat{f}_{\hat{f}_{i,l'+n}}^{(k+1)}(l, l'). \quad (C.3)$$

Inicialmente, como  $\hat{f}_{\hat{f}_{i,l'}}(l, l') = \hat{f}_{\hat{f}_{i,l'+n}}^{(k+1)}(l, l')$ , entonces escogemos el estado de la celda igual al valor del píxel de la función de entrada, esto es:

$$\mu_{i,l'}(l, l') = \hat{f}_{\hat{f}_{i,l'+n}}(l, l'), \quad (C.4)$$

y como la salida de la celda, la relación dada por la Ec. (C.2).

Finalmente, calculamos la ecuación de salida de la celda (ver Ec.(C.2)) a partir de las Ecs. (C.3) y (C.4).

Cuando se desea eliminar el ruido aditivo de una imagen binaria las plantillas  $A_{i,l'}(l, l')$  y  $B_{i,l'}(l, l')$  tienen la siguiente forma<sup>40,42</sup>:

$$A_{i,l'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{i,l'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (C.5)$$

la constante  $c$  dada en la Ec. (C.1) se hace igual a cero.

Sin embargo, cuando la **RNC** se aplica a la **fecm** de la imagen, de un punto, con un desenfoque pequeño ( $R_g(l, l')$ ),

entonces la plantilla  $A_{i,i'}(l,l')$  que proponemos tiene la siguiente forma:

$$A_{i,i'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

donde  $3 \leq \alpha \leq 8$ , dependiendo de la cantidad de desenfoque.

Otro caso de interés, en el que se puede aplicar la plantilla dada por la Ec. (C.6), es cuando la **fm** de la imagen desenfocada no tiene ruido aditivo, pero la degradación por desenfoque es suficientemente grande. En este caso lo normal es: primero aplicar el algoritmo iterativo, dado en el capítulo IV, para encontrar el mejor estimado  $\hat{R}_f^{(k+1)}(l,l')$ ; posteriormente, aplicar el filtro **RNC**, de esta forma se puede lograr un buen estimado de la **fm** a la **ILID** con sus frecuencias altas realzadas. Una forma de disminuir las iteraciones en las condiciones arriba mencionadas es parar el algoritmo iterativo bajo la condición de que el estimado calculado este suficientemente cerca del mejor estimado a la **ILID**, lo cual se puede llevar a cabo observando, en primera instancia, al estimado ya calculado, cuando esto suceda se aplica al  $\hat{R}_f^{(k+1)}(l,l')$  resultante el **RNC**, adaptando el valor de la constante  $\alpha$  entre los límites ya señalados, el resultado es: primero la obtención de la **fm** de la **ILID** y después la **ILID** misma con sus frecuencias altas realzadas.

En el caso de que el objeto sea de tonos de gris y de que su imagen degradada por desenfoque tenga ruido aditivo, la eliminación del ruido con ayuda de una **RNC**, una vez que se calculo el mejor estimado a la **fm** de la **ILID** con sus frecuencias altas realzadas, se puede llevar a cabo utilizando las Ecs. (C.1) y (C.2), para cada nivel de gris, este procedimiento involucra una gran cantidad de trabajo y por lo mismo casi nadie lo emplea. Otra forma de restaurar bilinealmente imágenes en tonos de gris con ruido pero sin degradaciones espaciales es usar el algoritmo dado en la referencia<sup>55</sup>, al mejor estimado,  $\hat{r}_{\hat{f}+n}^{(k+1)}(l,l')$ ; en este trabajo,

esta última metodología nunca se llegó a implementar numéricamente, es un trabajo que queda por llevar a cabo agregando además desenfoque.

## APÉNDICE D.

# TRANSFORMADA COSENO Y HARTLEY EN PROCESADO LINEAL Y BILINEAL DE IMÁGENES.

### Introducción.

La Transformada Coseno Directa (TCD), en su versión discreta (TCDd), resulta óptima en cuanto al número de operaciones lógicas y matemáticas a realizar en todas aquellas operaciones (convolución o multiplicación) en las cuales la función a transformar tenga una parte par o simetría radial. Actualmente existen varias versiones de la TCDd del tipo rápido, algunas muy eficientes que operan de forma óptima cuando las funciones que intervienen en el procesado de información cumplen ciertas propiedades de paridad. En procesado digital de imágenes espacialmente degradadas en el que la función de punto extendido en intensidad (fpei) tiene simetría circular y algunos de los términos del polinomio de aberración, de la pupila compleja, tienen aberraciones con simetría circular (ejemplos. desenfoque y/o esfericidad) se puede tener una buena reducción de tiempo (ligeramente mayor que la mitad en comparación al de una transformada de Fourier discreta) al usar la TCDd para encontrar el estimado a la imagen limitada por difracción (ILID) con sus frecuencias altas realzadas, como lo vemos a continuación.

### Definición.

La TCD 2-D ( $CF(u,v)$ ) de una función cualquiera  $f(x,y)$ , por definición es

$$CF(u,v) = \iint f(x,y) \cos\{2\pi(ux + vy)\} dx dy, \quad (D-1)$$

como  $f(x,y)$  tiene la posibilidad de ser una función compleja con sus partes reales e imaginarias compuestas de funciones pares o

impares, entonces debido a que el kernel de la transformación es una función par la **TCD** 2-D de la función  $f(x, y)$  es

$$CF(u, v) = \iint (\text{Re}\{f_{par}(x, y)\} + j \text{Im}\{f_{par}(x, y)\}) \cos\{2\pi(ux + vy)\} dx dy, \quad (\text{D-2})$$

en la cual la parte impar de la **TCD** es cero. En general, como se observa de la Ec. (D-2),  $CF(u, v)$  es compleja. La transformada coseno inversa (**TCI**) de  $CF(u, v)$  es la función  $f(x, y)$  y como el kernel de la transformación es par entonces la **TCI** tiene la misma forma que la **TCD**, esto es:

$$f(x, y) = \iint (\text{Re}\{CF_{par}(u, v)\} + j \text{Im}\{CF_{par}(u, v)\}) \cos\{2\pi(ux + vy)\} du dv. \quad (\text{D-3})$$

## PROCESADORES LINEALES Y LA TRANSFORMADA COSENO.

Si  $g(x, y)$  es la convolución entre el objeto ( $f(x, y)$ ), que emite en luz incoherente, y la **fpei** ( $h(x, y)$ ), entonces:

$$g(x, y) = f(x, y) *_{x,y} h(x, y), \quad (\text{D-4})$$

de la Ec. (D-4) como  $f(x, y)$  es real (se puede descomponer como la suma de su parte par más su parte impar) y no-negativa, entonces su transformada de Fourier (**TF**) es una función Hermitiana (suma de una función real par y una función imaginaria impar), esto es:

$$F(u, v) = \text{Re}\{F_{par}(u, v)\} + j \text{Im}\{F_{impar}(u, v)\}. \quad (\text{D-5})$$

Por otro lado, sí la **fpei**,  $h(x, y)$ , es una función real no-negativa con simetría circular, entonces su **TCD** es:

$$CH(u, v) = \iint h(x, y) \cos 2\pi(ux + vy) dx dy, \quad (\text{D-6})$$

es real y par. Luego, de la Ec. (D-4), donde la transformada de Fourier directa (**TFD**) de la convolución (en el espacio real) es igual

al producto de cada una de las **TFD** de las funciones (en el espacio de las frecuencias), de la Ec. (D-6) (tomando en cuenta las Ecs. (D-4) y (D-5)) se tiene que el espectro de la imagen degradada se puede expresar como una combinación de **TFD** y **TCD** aplicadas a  $f(x, y)$  y a  $h(x, y)$ , respectivamente, esto es:

$$G(u, v) = \{\text{Re}\{F_{par}(u, v) + j \text{Im}\{F_{impar}(u, v)\}\}\}CH(u, v). \quad (\text{D-7})$$

Si se quiere filtrar  $G(u, v)$  con el filtro de Wiener,  $\Omega = \frac{H}{|H|^2 + e}$  (simetría par y real), entonces, el estimado del espectro al objeto tiene la siguiente forma

$$\hat{F}(u, v) = \text{Re}\{F_{par}(u, v)\} + j \text{Im}\{F_{impar}(u, v)\} = G(u, v) \frac{CH(u, v)}{|CH(u, v)|^2 + e}, \quad (\text{D-8})$$

por consiguiente, el costo de calculo numérico, por combinar la **TFD** discreta (**TFDd**) y la **TCDd**, es menor al que se tiene al usar exclusivamente la **TFDd**. De la Ec.(D-8), se puede obtener un estimado a la **ILID** ( $\hat{f}(x, y)$ ), usando la **TF** inversa discreta (**TFId**).

### Procesadores bilineales, la transformada Coseno y la transformada deHartley.

Se sabe que la función de intensidad mutua (**fim**) de la imagen degradada,  $r_g(x, y; x', y')$ ; del objeto,  $r_f(x, y; x', y')$ , y de la **fpei**,  $r_h(x, y; x', y')$ , están relacionados por una convolución, en las variables  $x, y; x', y'$ , de la siguiente manera:

$$r_g(x, y; x', y') = r_f(x, y; x', y') *_{x, y; x', y'} r_h(x, y; x', y'), \quad (\text{D-9})$$

donde las tres **fim**'s ( $r_g, r_f, r_h$ ) son reales y no-negativas siendo, por definición, pares en las variables  $x', y'$ . La **fecm** es la **TFD**, en las variables  $x, y; x', y'$ , de su **fim** asociada. Por consiguiente, la Ec. (D-9) se puede escribir como

$$R_G(u, v; u', v') = R_F(u, v; u', v')R_H(u, v; u', v'), \quad (\text{D-10})$$

como la **fpei** es una función par en las variables  $x, y; x', y'$ ; luego, la **fecm**  $R_H(u, v; u', v')$  (par en las variables  $u, v; u', v'$ ) se puede obtener numéricamente aplicando una **TCDd** en las variables  $x, y; x', y'$ , lo cual conlleva ahorrar tiempo de computo (un poco más de un cuarto de tiempo de una **TFDd** en las mismas variables). Consecuentemente, el obtener numéricamente el filtro bilineal de Wiener ( $R_\Omega = \frac{R_{CH}}{|R_{CH}|^2 + R_{CH,e} + R_{e,CH} + e^2}$ ) con **TCDd** representa un ahorro significativo en operaciones numéricas.

Por otro lado, como la  $R_G(u, v; u', v')$  se puede obtener de su **fim** asociada ( $r_g(x, y; x', y')$ ) con la aplicación de una **TCDd** en las variables  $x', y'$  seguida por la aplicación de una **TFDd** en las variables  $x, y$ . Así se tiene un ahorro en tiempo de computo tal que el estimado a  $R_F(u, v; u', v')$ , se puede calcular con mayor velocidad.

Por consiguiente, de lo anteriormente mencionado en este apéndice, el estimado a la **fim** de la **ILID**,  $\hat{f}_z(x, y; x', y')$ , se puede obtener de la siguiente forma:

$$\hat{f}_z(x, y; x', y') = (TFI_{(u,v)}\{TCI_{(u',v')}\{R_G(u, v; u', v')\}\}) *_{x,y,x',y'} (TCI_{(u',v')}\{R_\Omega(u, v; u', v')\}), \quad (\text{D-11})$$

donde, el primer término de la convolución de la derecha de la Ec. (D-11), la  $TFI_{(u,v)}$  significa aplicar la **TFId** en las variables  $u, v$  a la función que resulte de aplicarle la **TCId** en las variables  $u', v'$ ,  $TC_{(u',v')}$ . Por lo que calcular numéricamente el estimado a la **fim** de la **ILID** usando la **TCId** en combinación con la **TFId** es más rápido que por el método tradicional, utilizar solamente la **TFId**.

Consecuentemente, en cualquier algoritmo iterativo, como los dados en el capítulo IV, se reducirá el tiempo de computo al utilizar una combinación apropiada de la **TCDd**, la **TCId**, la **TFDd** y la **TFId** en las simulaciones numéricas que pretendan la obtención del estimado de una imagen degradada, ya sea con procesos lineales o bilineales.

## Transformada de Hartley y transformada Coseno.

Como es bien conocido la transformada de Hartley (**TH**) de una función real es una función real, la cual tiene una parte par real y una parte impar real (en la transformada de Fourier la parte impar es imaginaria). Otra propiedad es que la **TH** directa y la **TH** inversa no cambian de signo (de la misma manera que la transformada coseno) y por consiguiente se puede utilizar indistintamente (no así en la transformada de Fourier). Si  $f(x, y)$  es una función cualquiera su **TH** es

$$HF(u, v) = \iint f(x, y) \text{cas}\{2\pi(ux + vy)\} dx dy \quad (\text{D-12})$$

y su inversa es

$$f(x, y) = \iint HF(u, v) \text{cas}\{2\pi(ux + vy)\} du dv, \quad (\text{D-13})$$

donde  $\text{cas}\{2\pi(ux + vy)\}$  es el kernel de la **TH**; este kernel es igual a la suma de la función coseno y de la función seno del argumento de la función  $\text{cas}\{2\pi(ux + vy)\}$ , esto es

$$\text{cas}\{2\pi(ux + vy)\} = \cos\{2\pi(ux + vy)\} + \text{sen}\{2\pi(ux + vy)\}, \quad (\text{D-14})$$

o equivalentemente, que

$$\text{cas}\{2\pi(ux + vy)\} = \sqrt{2} \cos\left\{2\pi(ux + vy) - \frac{\pi}{4}\right\}. \quad (\text{D-15})$$

En el caso de que  $f(x, y)$  sea real no negativa, entonces su **TH** es la suma de una **TC** con una transformada seno (**TS**), esto es:

$$HF(u, v) = \iint f_{\text{par}}(x, y) \cos\{2\pi(ux + vy)\} dx dy + \iint f_{\text{impar}}(x, y) \text{sen}\{2\pi(ux + vy)\} dx dy. \quad (\text{D-16})$$

Por otro lado,  $h(x, y)$  es una función real y par, entonces al aplicar la **TCD** a la **fpei** tenemos:



$$CH(u, v) = \iint h_{par}(x, y) \cos\{2\pi(ux + vy)\} dx dy, \quad (D-17)$$

lo cual conlleva a que el estimado al espectro de la **ILID** se pueda expresar como:

$$\hat{F}(u, v) = HG(u, v)C\Omega(u, v), \quad (D-18)$$

o equivalentemente

$$\hat{F}(u, v) = \{CG(u, v) + SG(u, v)\}C\Omega(u, v). \quad (D-19)$$

donde  $C\Omega(u, v) = \frac{CH(u, v)}{|CH(u, v)|^2 + e}$ . De la Ec. (D-19) se observa que el

resultado final es una función real con una parte par y una parte impar y por consiguiente podemos obtener el estimado a la **ILID**  $\hat{f}(x, y)$  por medio de una **TH** aplicada a  $\hat{F}(u, v)$ .

Tanto la **THd** como la **TCd** tienen sus versiones rápidas (**THr** y **TCr**, respectivamente), es de esperarse que una **TCr** sea más veloz en sus tiempos de calculo que la **THr**. Luego, la combinación de usar la **THr** y la **TCr** para el calculo del estimado de la **ILID**, a partir de una imagen degradada por desenfoque, es mas rápido en tiempo de computo que la combinación **TFD** rápida (**TFDr**) con **TFI** rápida (**TFIr**).

Ejemplo: supóngase que se desea obtener la distribución de Wigner **DW** de una imagen espacialmente gradada por desenfoque,  $g(x, y)$ , entonces:

$$W_g(x, y; u, v) = W_f(x, y; u, v) *_{x,y} W_h(x, y; u, v), \quad (D-20)$$

o equivalentemente, de la siguiente forma

$$W_g(x, y; u, v) = TH_{(x',y')} \{r_f(x, y; x', y')\} *_{x,y} TC_{(x',y')} \{r_h(x, y; x', y')\}, \quad (D-21)$$

por consiguiente, si  $TS_{(x',y')} \{r_f(x, y; x', y')\} = SW_f(x, y; u, v)$  es la **TS** y  $TC_{(x',y')} \{r_f(x, y; x', y')\} = CW_f(x, y; u, v)$ , es la **TC** aplicadas respectivamente a  $r_f(x, y; u, v)$ , como  $SW_f(x, y; u, v) = 0$ , entonces, otra forma de escribir la Ec. (D-21) es:

$$W_g(x, y; u, v) = CW_f(x, y; u, v) *_{x,y} CW_h(x, y; u, v), \quad (D-22)$$

lo cual conlleva a que el cálculo de la **DW** de la imagen degradada en vez de llevarse a cabo con la **TFDr** se puede llevar a cabo exclusivamente con la **TCr**.

Luego, la simulación numérica de la **fecm** del espectro de la imagen degradada,  $R_G(u, v; u', v')$ , se reduce a calcular la **THr** de  $r_f(x, y; x', y')$  en las variables  $x, y; x', y'$  (primer término de la ecuación anterior), y multiplicarlo por la **TCr** de  $r_h(x, y; x', y')$  (en las mismas variables), esto es:

$$R_G(u, v; u', v') = HR_F(u, v; u', v') CR_H(u, v; u', v'), \quad (D-23)$$

De aquí que para obtener el estimado a la **fecm** de  $F(u, v)$  baste con llevar a cabo una **THr** de la **fim** asociada a la  $g(x, y)$  y multiplicarlo con el filtro bilineal de Wiener, el cual se obtiene con una **TCr** aplicada a la **fim** asociada a  $h(x, y)$ , esto es:

$$\hat{R}_F(u, v; u', v') = \frac{|TC\{r_h(x, y; x', y')\}|^2}{|TC\{r_g(x, y; x', y')\}|^4 + |TC\{r_h(x, y; x', y')\}|^2 e + e^2} TH\{r_g(x, y; x', y')\}. \quad (D-24)$$

donde **TC** y la **TH** se aplican en las variables  $x, y; x', y'$ , lo cual significativamente minimiza el número de operaciones.

Como  $\hat{R}_F(u, v; u', v')$  es una función real (ver Ec. (D-24)) para obtener el estimado de la **fim** asociada a **ILID** se le aplica la **TH** en las variables  $u, v; u', v'$ ; después, por los métodos señalados en el capítulo V, se puede obtener el estimado a la **ILID**,  $\hat{f}(x, y)$ .

En el capítulo VI se hace uso extensivo de algunas de las propiedades de la transformada coseno para calcular los estimados a las funciones bilineales (iterativamente o no) en la restauración de la imagen desenfocada de un objeto puntual con o sin ruido.

## APÉNDICE E.

### PROCESADOR BILINEAL HOLOGRÁFICO PARA OBTENER LA fecm.

En el capítulo III se describen los procesadores ópticos bilineales asociados a la **DW** y a la **fim**. En este apéndice se describe un procesador bilineal óptico asociado a la **fecm**. La utilidad del procesador bilineal óptico de la **fecm** radica en que puede desplegar y/o filtrar bilinealmente información en el dominio de las frecuencias espaciales mutuas, con lo cual se puede llevar a cabo filtraje bilineal para restaurar imágenes degradadas espacialmente. El procesador bilineal que aquí se propone es holográfico y consta de dos pasos como se explica mas adelante; sin embargo, también se puede implementar un procesador **fecm** haciendo un holograma de Fourier binario de la imagen degradada y sustituyendo éste en el plano que se pone la imagen degradada en el procesador bilineal **fim**.

El procesador bilineal **fecm** modifica únicamente la amplitud compleja de una frecuencia (o todo el conjunto de frecuencias) que se modifica conjuntamente con la frecuencia que nos interesa. En el caso de que se desee procesar bilinealmente una imagen espacialmente variante es necesario separar físicamente regiones con la misma cantidad de degradación; posteriormente, obtener con los procesadores que se indican en este apéndice la **fecm** de cada región. El filtro ideal para restaurar la **fecm** de una imagen degradada es el filtro bilineal de Wiener el cual cambia de forma y tamaño en cada región con diferente desenfoque.

La implementación del procesador óptico **fecm** sigue dos pasos. En el primer paso se tiene que grabar un holograma de imagen. La Fig. E.1. muestra el arreglo óptico con que se obtiene el holograma del espectro de la una imagen. Básicamente este arreglo es un holograma de imagen donde se graba el espectro de la imagen  $G(u,v)$ . La imagen  $g(x,y)$  se encuentra en el plano focal anterior de la lente  $L_1$  y el espectro se forma en su plano focal posterior. Existen varios arreglos ópticos para llevar a cabo hologramas de imagen, algunos de ellos clásicos, entre los cuales

se encuentra el de Vander Lugt<sup>34</sup>; el arreglo de la Fig. (E.1). es una simplificación de este arreglo óptico . El haz de referencia hace un ángulo ( $\alpha$ ) con el eje óptico de la lente transformadora  $L_1$  y sobre plano focal posterior de  $L_1$  se graba un holograma imagen de  $G(u,v)$  en una transparencia  $T(u,v)$ .

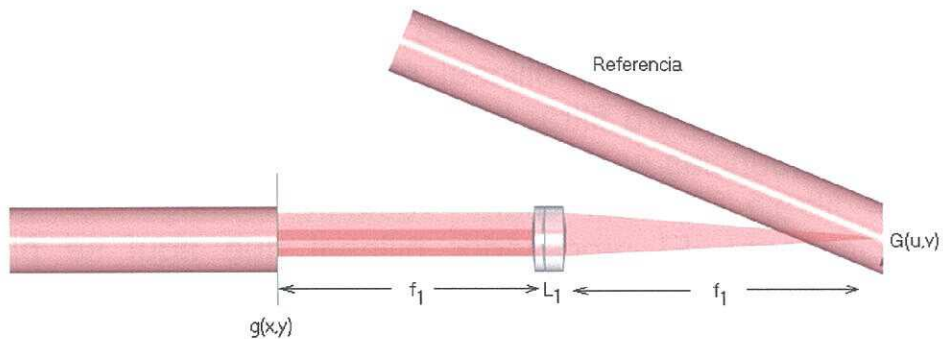


Fig. (E.1). Formación del holograma de Fourier de  $g(x,y)$ .

Una vez que se ha revelado la transparencia  $T(u,v)$ , donde se encuentra grabado el holograma, ésta se coloca como se indica en el procesador óptico dado en la Fig. (E.2), que es el segundo paso para obtener la fecm.

A continuación se explica la forma en que trabaja este procesador bilineal. La amplitud compleja de los haces que emerge de  $T(u,v)$  se puede escribir como:

$$T(u,v) \propto cte + G(u,v)e^{j2\pi\alpha v} + G^*(u,v)e^{-j2\pi\alpha v}, \quad (E-1)$$

donde  $e^{-j2\pi\alpha v}$  es el haz de referencia, al cual se le asocia una amplitud unitaria; al hacer incidir sobre  $T(u,v)$  un frente de onda

plano en la misma dirección del haz de referencia, tenemos que los haces que emergen de  $T(u,v)$  son tres: el primero tiene la dirección del haz de referencia, el segundo sale en una dirección

perpendicular al plano de  $T(u, v)$ , y el tercero tiene una dirección del doble del ángulo del haz de referencia.

De los tres haces que emergen solo se señala (en la Fig. (E.2)) el haz perpendicular al plano de  $T(u, v)$  (holograma) el cual incide sobre la lente  $L_2$ . La transparencia está en el plano focal anterior de la lente y en el plano focal posterior se forma la transformada de Fourier de  $G(u, v)$ , la cual se refleja en el espejo  $E$ . El haz reflejado en  $E$ , primero incide y después emerge de  $T(u, v)$  en la dirección que se señala en la Fig. (E.2), obteniéndose los siguientes tres términos.

$$T(u, v)G^*(-u, -v) \propto \text{cte}G^*(-u - v) + G(u, v)G^*(-u, -v)e^{j2\pi\alpha v} + G^*(u, v)G^*(-u, -v)e^{-j2\pi\alpha v}, \quad (\text{E-2})$$

de los tres términos de la derecha de la Ec. (E-2), el segundo representa la **fecm**,  $G(u, v)G^*(-u, -v)e^{j2\pi\alpha v}$ . Este término se propaga en la dirección opuesta al haz de reconstrucción con el ángulo  $\alpha$ , por lo que se recomienda poner un divisor de haz (DH), como se muestra en la figura, para desviar perpendicularmente a DH el haz y dirigirlo hacia la lente  $L_3$ . La lente  $L_3$  obtiene la imagen de la **fecm** con amplificación unitaria para un par de coordenadas fijas,  $u', v'$ . Si se desplaza  $T(u, v)$  a lo largo de las coordenadas  $u'$  y/o de  $v'$  se empieza a construir la **fecm** asociada a la función  $G(u, v)$ ,  $G(u + u'/2; u + u'/2)G^*(u - u'/2; v - v'/2)$ , que es finalmente lo que desea. El procedimiento parece sencillo, pero hasta no implementarlo físicamente no se sabrá si es práctico obtener la **fecm** de la forma propuesta. Lo que si podemos asegurar es que la implementación de la **fecm** siguiendo los pasos arriba mencionados es más costoso que los procesadores bilineales propuestos en el capítulo IV.

Para facilitar la interpretación de la Fig. (E.2) se muestra una simplificación de ésta en la Fig. (E.3).

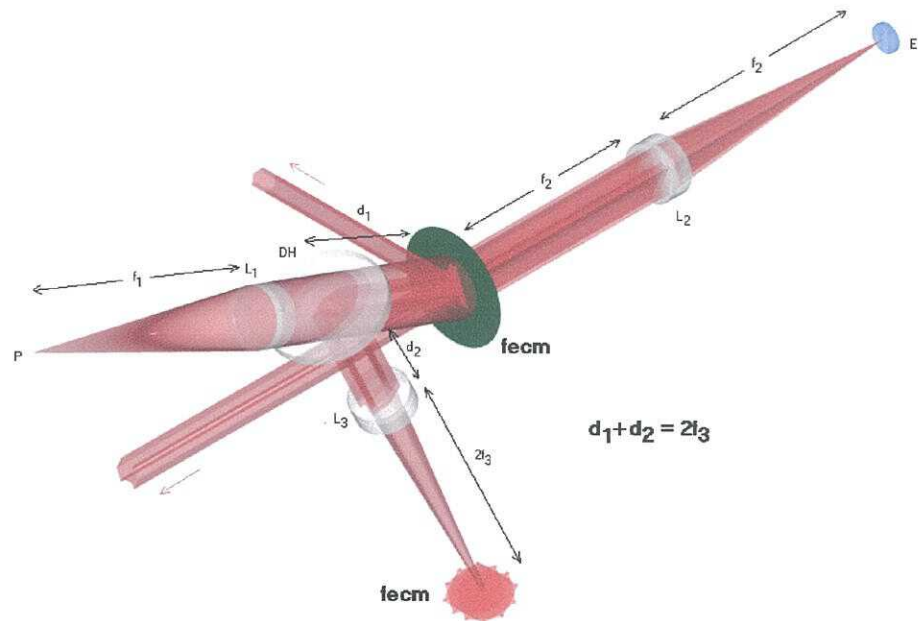


Fig. (E.2). Procesador bilineal para obtener la *fecm*.

Otra forma de obtener la *fecm* del espectro de una función es primero hacer un holograma de Fourier digital de la imagen degradada siguiendo algunas de las técnicas convencionales<sup>34</sup>; posteriormente, una vez reducido el holograma digital a sus dimensiones estándar, como segundo paso utilizamos el procesador óptico para desplegar la *fim* (ver capítulo IV).

En el plano de la transparencia se coloca el holograma digital y a una distancia de  $2f_3$  de la lente  $L_3$  podemos observar ahora la imagen de la *fecm* con amplificación unitaria. Este último arreglo permite implementar el filtro de Wiener bilineal digital para llevar a cabo la restauración bilineal de la *fecm* del espectro de la imagen degradada de una forma relativamente sencilla. La ventaja de este método es su menor costo en relación al primer método, arriba propuesto, aunque la resolución con que se obtienen los datos en el último método, puede ser mucho menor.

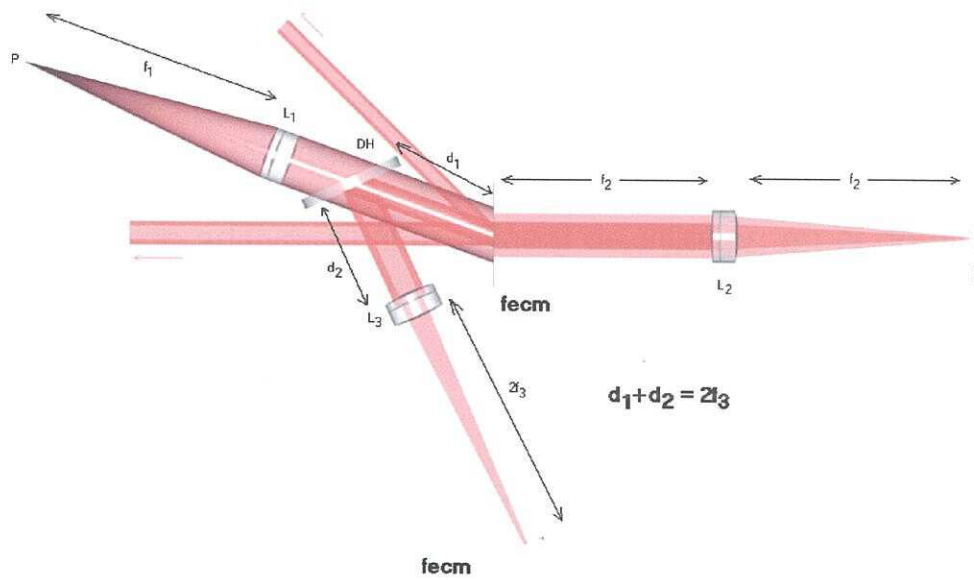


Fig. (E.3). Vista lateral de la Fig. (E.2).

## APÉNDICE F.

### FILTRO BILINEAL DE WIENER Y SU VERSIÓN ITERATIVA.

En este apéndice se hacen algunas consideraciones sobre el filtro bilineal de Wiener y su versión iterativa para el caso de restauración de imágenes bilineales degradadas espacialmente con o sin ruido aditivo. El filtro bilineal de Wiener, en el dominio de las frecuencias mutuas, tiene la siguiente forma:

$$R_{\Omega}(u, v; u', v') = \Omega(u + u'/2, v + v'/2) \Omega^*(u - u'/2, v - v'/2), \quad (\text{F-1})$$

donde,

$$\Omega(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + e}, \quad (\text{F-2})$$

en la Ec. (F-2),  $H(u, v)$  es la FTO. Por consiguiente, sustituyendo la Ec. (F-2) en la Ec. (F-1) y tomando en cuenta que  $e = \varepsilon c$  tenemos:

$$R_{\Omega}(u, v; u', v') = \frac{H^*(u + u'/2, v + v'/2)}{(|H(u + u'/2, v + v'/2)|^2 + \varepsilon c)} \frac{H(u - u'/2, v - v'/2)}{(|H(u - u'/2, v - v'/2)|^2 + \varepsilon c)}, \quad (\text{F-3})$$

la Ec. (F-3) puede escribirse de manera compacta como:

$$R_{\Omega} = \frac{R_H^*}{|R_H|^2 + \varepsilon c \{ |H(u + u'/2, v + v'/2)|^2 + |H(u - u'/2, v - v'/2)|^2 \} + \varepsilon^2 c^2}, \quad (\text{F-4})$$

donde  $R_H^*$ , es el complejo conjugado de la fecm asociada a la FTO (que para el caso de desenfoque es una función real), además se asume que tanto  $|R_H|^2$  como  $|H|^2$  están normalizados a la unidad.

A la función  $R_{\Omega}$ , dada por las Ecs. (F-1), (F-3) y (F-4), la denominaremos filtro bilineal de Wiener.



De la Ec. (F-4), si  $c \rightarrow 0$  y el valor de  $\varepsilon$  permanece constante, entonces el filtro bilineal de Wiener tiende al filtro bilineal inverso ( $R_\Omega = \frac{1}{R_H}$ ); por consiguiente, cuando se aplica el filtro bilineal de Wiener a una imagen bilineal degradada y con ruido aditivo la imagen bilineal restaurada tendrá un nivel alto de ruido aún cuando los valores de los coeficientes del polinomio de aberración sean pequeños. En el caso de que los valores de los coeficientes del polinomio de aberraciones sean tales que la FTO tenga ceros, el ruido (el ruido aditivo y el ruido debido al tamaño finito de la longitud de la palabra de la computadora) aún cuando sea pequeño también se amplificará borrando detalles de la imagen bilineal a restaurar. Sí el producto  $\varepsilon c > 1$ , y la fecm asociada a la FTO ( $R_H$ ) está normalizada a la unidad, el filtro bilineal de Wiener tiende a ser un filtro pasa bajas de tal forma que sí  $\varepsilon c \gg 1$ , entonces el efecto de este filtro tiende a anular los valores de las frecuencias espaciales altas y medias tanto del ruido como de la imagen bilineal, lo que redundo en que el estimado obtenido, de la imagen bilineal a restaurar, sea borroso y con ruido de muy baja frecuencia.

Por consiguiente, los valores del producto  $\varepsilon c$  en los cuales el filtro bilineal de Wiener puede actuar como filtro pasa medias, sin que amplifique notoriamente el ruido de una imagen degradada espacialmente, son aquellos mayores a la unidad. Lo anterior implica que la restauración de una imagen bilineal con ruido aditivo usando el filtro bilineal de Wiener puede llevarse a cabo para cuando los valores de los coeficientes del polinomio de aberración son tales que la FTO asociada no tiene ceros. Cuando los coeficientes aumentan su valor, aún cuando el nivel del ruido disminuya, la restauración tiende a ser de menor calidad.

Para el procedimiento iterativo, del capítulo IV y la Ec. (4-20) observamos que en la  $(k+1)$ 'ésima iteración, el estimado a la fecm del espectro de la imagen limitada por difracción es:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(k+1)} = \alpha_k R_\Omega^{(k)} R_{G_N}, \quad (\text{F-5})$$

donde,

$$R_{\Omega}^{(k)} = \frac{R_H}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_k} + R_{e_k, |H|^2} + R_{e_k}}, \quad (\text{F-6})$$

y

$$\alpha_k = 1 + \frac{e_k}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_{k-1}} + R_{e_{k-1}, |H|^2} + R_{e_{k-1}}} \alpha_{k-1}, \quad (\text{F-7})$$

con  $\alpha_0 = 0$  y  $\alpha_1 = 1$  (por definición). De la Ec. (F-6), para  $k = 1$ ,

obtenemos  $R_{\Omega}^{(1)} = \frac{R_H^*}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_1} + R_{e_1, |H|^2} + R_{e_1}}$ , que es el filtro bilineal de

Wiener, dado en la Ec. (F-4).

Sí por comparación, con el filtro bilineal de Wiener, llamamos  $[R_{\Omega}]^{(k)} = \alpha_k R_{\Omega}^{(k)}$  el filtro bilineal Wiener iterativo, entonces la Ec.(F-5) se puede escribir como:

$$\hat{R}_{\hat{F}}^{(k+1)} = [R_{\Omega}]^{(k)} R_{G_N}. \quad (\text{F-8})$$

Lo que a continuación mostraremos, tomando en cuenta el resultado de la Ec. (F-8), es que el filtro bilineal de Wiener iterativo en la etapa  $(k)$ ésima, es la superposición de filtros bilineales de Wiener ( $R_{\Omega}^{(k)}$ ), adecuadamente pesados.

De la Ec. (F-7) para  $k = 1$ , si  $\alpha_0 = 0$  necesariamente  $\alpha_1 = 1$ ; luego,

$$[R_{\Omega}]^{(1)} = R_{\Omega}^{(1)} \quad (\text{F-9})$$

Si  $k = 2$ , se sigue que  $\alpha_2 = 1 + \frac{e_2}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_1} + R_{e_1, |H|^2} + R_{e_1}}$ , con  $R_{e_1} = e_1^2$ . Por consiguiente,  $[R_{\Omega}]^{(2)} = R_{\Omega}^{(2)}(1 + \frac{e_2}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_1} + R_{e_1, |H|^2} + R_{e_1}})$ , o

escrito de otra forma:

$$[R_{\Omega}]^{(2)} = R_{\Omega}^{(2)} + \beta_2 R_{\Omega}^{(1)}, \quad (\text{F-10})$$

donde,

$$\beta_2 = \frac{e_2}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_2} + R_{e_2, |H|^2} + R_{e_2}}, \quad (\text{F-11})$$

Para  $k=3$ , tenemos  $\alpha_3 = 1 + \frac{e_3}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_2} + R_{e_2, |H|^2} + R_{e_2}} \alpha_2$ ,

por lo tanto,  $[R_\Omega]^{(3)} = R_\Omega^{(3)} (1 + \frac{e_3}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_2} + R_{e_2, |H|^2} + R_{e_2}} \alpha_2)$

de lo que podemos deducir que:

$$[R_\Omega]^{(3)} = R_\Omega^{(3)} + \beta_3 R_\Omega^{(2)} + \beta_3 \beta_2 R_\Omega^{(1)}, \quad (\text{F-12})$$

donde  $\beta_3 = \frac{e_3}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_2} + R_{e_2, |H|^2} + R_{e_2}}$ , y  $\beta_2$  es la dada por la Ec. (F-11).

Por consiguiente, para la  $m$ 'ésima iteración el filtro bilineal de Wiener iterativo tiene la siguiente forma:

$$[R_\Omega]^{(m)} = R_\Omega^{(m)} + \beta_m R_\Omega^{(m-1)} + \dots + \beta_m \beta_{m-1} \dots \beta_{m-k} R_\Omega^{(m-k)} + \dots + \beta_m \beta_{m-1} \dots \beta_2 R_\Omega^{(1)}, \quad (\text{F-13})$$

donde,

$$\beta_n = \frac{e_n}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_n} + R_{e_n, |H|^2} + R_{e_n}}, \quad \text{con } n=2, \dots, m. \quad (\text{F-14})$$

luego, la Ec. (F-13) se puede escribir como:

$$[R_\Omega]^{(m)} = R_H^* \sum_{j=0}^{m-1} \prod_{n=m-j}^m \left( \frac{e_{n+1}}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_n} + R_{e_n, |H|^2} + R_{e_n}} \right), \quad \text{con } e_{m+1} = 1, \forall m. \quad (\text{F-15})$$

Tomando en cuenta los resultados de la Ec. (F-15) y al sustituir éstos en Ec. (F-13), se puede observar que cada coeficiente asociado

a los filtros bilineales de Wiener ( $R_{\Omega}^{(k)}, k=1,2\dots m.$ ) se pueden escribir como:

$$\prod_{l=p}^m \beta_l = \varepsilon_1^{m-(p-1)} c^{\frac{m(m+1)-p(p-1)}{2}} \prod_{n=p}^m \left( \frac{1}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_n} + R_{e_n, |H|^2} + R_{e_n}} \right), \text{ con } p \geq 2, \dots m \quad (\text{F-16})$$

donde  $R_{e_n} = e^{2n}$ . Por consiguiente, al sustituir el resultado de la Ec. (F-16) en la Ec. (F-13), ésta última se puede escribirse como:

$$[R_{\Omega}]^{(m)} = R_{\Omega}^{(m)} + \sum_{p=2}^m R_{\Omega}^{(p-1)} \varepsilon^{m-(p-1)} c^{\frac{m(m+1)-p(p-1)}{2}} \prod_{n=p}^m \left( \frac{1}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_n} + R_{e_n, |H|^2} + R_{e_n}} \right), (\text{F-17})$$

sí  $\varepsilon=0$  o  $c=0$ , entonces,  $[R_{\Omega}]^{(m)} = R_{\Omega}^{(m)} = \frac{1}{R_H}$ , que es el filtro bilineal inverso, para cualquier valor de  $m$ .

De lo mencionado en el capítulo V, el tiempo de computo para calcular el filtro bilineal de Wiener ( $R_{\Omega}$ ) es al menos como el cuadrado del tiempo del mismo filtro en su versión lineal. Por lo anterior, es conveniente que para calcular el filtro bilineal de Wiener iterativo el número de iteraciones sea el menor posible; Como ejemplo, se propone que el valor de  $m$ , en cualquiera de las Ecs. (F-13), (F-15) o (F-17), sea tres. Si  $m=3$ , al sustituir los parámetros  $e_3$  y  $e_2$  la Ec. (F-12) toma la siguiente forma:

$$[R_{\Omega}]^{(3)} = \frac{R_H}{|R_H|^2 + 2|H|^2 \varepsilon c^3 + \varepsilon^2 c^6} + \left( \frac{\varepsilon c^3}{|R_H|^2 + 2|H|^2 \varepsilon c^3 + \varepsilon^2 c^6} \right) \left( \frac{R_H}{|R_H|^2 + 2|H|^2 \varepsilon c^2 + \varepsilon^2 c^4} \right) \\ + \left( \frac{\varepsilon c^3}{|R_H|^2 + 2|H|^2 \varepsilon c^3 + \varepsilon^2 c^6} \right) \left( \frac{\varepsilon c^2}{|R_H|^2 + 2|H|^2 \varepsilon c^2 + \varepsilon^2 c^4} \right) \left( \frac{R_H}{|R_H|^2 + 2|H|^2 \varepsilon c + \varepsilon^2 c^2} \right), (\text{F-18})$$

de la Ec. (F-18), se observa que cuando  $c \rightarrow 0$  y  $\varepsilon < 1$ , la contribución del segundo y del tercer término es casi nula porque el numerador de cada uno de estos términos es muy pequeño y dado que  $(|R_H|^2 + R_{|H|^2, e_3} + R_{e_3, |H|^2}) \gg \varepsilon^2 c^6$ , por consiguiente

$$[R_{\Omega}]^{(3)} \approx R_{\Omega}^{(3)} \approx \frac{R_H}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, \varepsilon_3} + R_{\varepsilon_3, |H|^2}}. \quad (\text{F-19})$$

En general, bajo las restricciones arriba mencionadas ( $c \rightarrow 0, \varepsilon < 1$ ), podemos escribir que

$$[R_{\Omega}]^{(m)} \approx R_{\Omega}^{(m)} \approx \frac{R_H}{|R_H|^2 + R_{|H|^2, \varepsilon_m} + R_{\varepsilon_m, |H|^2}}.$$

En el caso de que  $\varepsilon \approx 1$  y  $c \gg 1$  se puede mostrar, a partir de la Ec. (F-19), que una buena aproximación del filtro bilineal de Wigner es:

$$[R_{\Omega}]^{(3)} \approx \frac{R_H}{|R_H|^2 + \varepsilon^2 c^6} \rightarrow 0, \quad (\text{F-20})$$

lo cual conlleva a que cuando se aplica el filtro bilineal a una imagen degradada con o sin ruido se obtenga una imagen restaurada que tiene un fondo gris sin detalle (el efecto de las frecuencias medias y altas se suprime). Nuevamente, si  $\varepsilon < 1$  y  $c \gg 1$  para una  $m$  dada, entonces el filtro bilineal tiene la siguiente

$$\text{forma: } [R_{\Omega}]^{(m)} \approx \frac{R_H}{|R_H|^2 + \varepsilon^2 c^{2 \cdot m}} \rightarrow 0.$$

## APÉNDICE G.

### ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES BILINEALES EN PROCESADO BILINEAL DE IMÁGENES

La mayor parte de las propiedades asociadas a la función de distribución de Wigner ya han sido reportadas<sup>8,\*</sup>; asimismo como las propiedades de otras funciones bilineales, como son la función de Ambigüedad y la distribución de Cohen<sup>9,10</sup>, tanto en su versión continua como en su versión discreta. En este apéndice se establecen algunas de las propiedades de las funciones bilineales continuas más utilizadas en este trabajo, las cuales pueden ser demostradas fácilmente.

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos funciones reales o complejas y sus respectivas transformadas de Fourier son  $F(u)$  y  $G(u)$ , entonces las funciones bilineales cruzadas  $r_{f,g}(x, x')$ ,  $R_{F,G}(u, u')$ ,  $W_{f,g}(x, u)$  y  $A_{f,g}(u', x')$  son:

- 1-a.  $r_{f,g}(x, x') = f(x + x'/2)g^*(x - x'/2)$ ,
- 1-b.  $R_{F,G}(u, u') = F(u + u'/2)G^*(u - u'/2)$ ,
- 1-c.  $R_{F,G}(u, u') = \iint r_{f,g}(x, x')e^{-j2\pi(u'x + ux')} dx dx'$ ,
- 1-d.  $r_{f,g}(x, x') = \iint R_{F,G}(u, u')e^{-j2\pi(u'x + ux')} du du'$ ,
- 1-e.  $W_{f,g}(x, u) = \int r_{f,g}(x, x')e^{-j2\pi ux'} dx'$ ,
- 1-f.  $W_{F,G}(u, x) = \int R_{F,G}(u, u')e^{-j2\pi u'x} du'$ ,
- 1-g.  $A_{f,g}(u', x') = \int r_{f,g}(x, x')e^{-j2\pi u'x} dx$ ,
- 1-h.  $A_{F,G}(x', u') = \int R_{F,G}(u, u')e^{-j2\pi u'x'} du$ .

Cuando  $f(x) = g(x)$ , entonces de las definiciones (1-a) hasta (1-h) se tienen las siguientes definiciones bilineales:

- 2-a.  $r_f(x, x') = f(x + x'/2)f^*(x - x'/2)$ ,

$$\begin{aligned}
2\text{-b. } R_F(u, u') &= F(u + u'/2)F^*(u - u'/2), \\
2\text{-c. } R_F(u, u') &= \iint r_f(x, x')e^{-j2\pi(u'x + ux')} dx dx', \\
2\text{-d. } r_f(x, x') &= \iint R_F(u, u')e^{-j2\pi(u'x + ux')} du du', \\
2\text{-e. } W_f(x, u) &= \int r_f(x, x')e^{-j2\pi ux'} dx', \\
2\text{-f. } W_F(u, x) &= \int R_F(u, u')e^{-j2\pi u'x} du', \\
2\text{-g. } A_f(u', x') &= \int r_f(x, x')e^{-j2\pi u'x} dx, \\
2\text{-h. } A_F(x', u') &= \int R_F(u, u')e^{-j2\pi u'x'} du.
\end{aligned}$$

de la definición (1-e) hasta (1-h) y de la definición (2-e) hasta (2-h), se tienen las siguientes propiedades, que ilustran como en el dominio fase existe una simetría entre los ejes de coordenadas que determinan el eje de las frecuencias espaciales y el eje de la coordenada espacial.

$$\begin{aligned}
3\text{-a. } W_{F,G}(u, x) &= W_{f,g}(x, u), \\
3\text{-b. } A_{F,G}(x', u') &= A_{f,g}(u', x'), \\
3\text{-c. } W_F(u, x) &= W_f(x, u), \\
3\text{-d. } A_F(x', u') &= A_f(u', x').
\end{aligned}$$

Si  $g = f + h$ , entonces

$$\begin{aligned}
4\text{-a. } r_g(x, x') &= r_f(x, x') + r_h(x, x') + 2 \operatorname{Re}\{r_{f,h}(x, x')\}, \\
4\text{-b. } R_G(u, u') &= R_F(u, u') + R_H(u, u') + 2 \operatorname{Re}\{R_{F,H}(u, u')\}, \\
4\text{-c. } W_g(x, u) &= W_f(x, u) + W_h(x, u) + 2 \operatorname{Re}\{W_{f,h}(x, u)\}, \\
4\text{-d. } W_G(u, x) &= W_F(u, x) + W_H(u, x) + 2 \operatorname{Re}\{W_{F,H}(u, x)\}, \\
4\text{-f. } A_g(u', x') &= A_f(u', x') + A_h(u', x') + 2 \operatorname{Re}\{A_{f,h}(u', x')\}, \\
4\text{-g. } A_G(x', u') &= A_F(x', u') + A_H(x, u') + 2 \operatorname{Re}\{A_{F,H}(x', u')\}.
\end{aligned}$$

Si,  $g(x) = f(x) \underset{x}{*} h(x)$ , entonces

$$\begin{aligned}
5\text{-a. } r_g(x, x') &= r_f(x, x') \underset{x, x'}{*} r_h(x, x'), \\
5\text{-b. } R_G(u, u') &= R_F(u, u')R_H(u, u'), \\
5\text{-c. } W_g(x, u) &= W_f(x, u) \underset{x}{*} W_h(x, u),
\end{aligned}$$

$$5-d. \quad W_G(u, x) = W_F(u, x) *_{x'} W_H(u, x),$$

$$5-e. \quad A_g(u', x') = A_f(u', x') *_{x'} A_h(u', x'),$$

$$5-f. \quad A_G(x', u') = A_F(x', u') *_{x'} A_H(x', u').$$

Otras propiedades interesantes son:

$$6-a. \quad r_{af,bh}(x, x') = (ab)r_{f,h}(x, x'),$$

$$6-b. \quad R_{aF,bH}(u, u') = (ab)R_{F,H}(u, u'),$$

$$6-c. \quad W_{af,bh}(x, u) = W_{aF,bH}(u, x),$$

$$6-d. \quad A_{af,bh}(u', x') = A_{aF,bH}(x', u').$$

Algunas otras propiedades ya se mencionaron en los capítulos III y IV y otras más están las referencias dadas en la bibliografía del presente trabajo.

(\*) N.J. de Bruijn. A theory of generalized functions, applications to Wigner distribution and Weyl correspondence. Nieuw Archief voor Wiskunde (3), Vol. XXI, 205-280, (1973).



## APÉNDICE H.

### REPRESENTACIÓN DE TODOS LOS POSIBLES DESENFOQUES DE LA FTO O fpei BIDIMENSIONALES CON LA DW.

#### Introducción.

La teoría de la representación polar de los posibles desenfoques de la **FTO** usando la **FA** ya ha sido publicada<sup>20</sup> para el caso de pupilas en una y dos dimensiones. Sin embargo, la distribución de intensidad polar solo se presenta para el caso 1-D. En este apéndice se lleva a cabo la visualización de todos los posibles desenfoques de un sistema óptico para el caso de 2-D usando la **DW** mono cromática y poli cromática. Lo anterior es posible debido a la simetría radial que tienen la mayoría de las pupilas asociadas a un sistema óptico.

#### Caso mono cromático.

La **FTO** depende de las frecuencias espaciales  $u, v$ : entonces, cuando el polinomio de aberraciones es cero (para cualquier  $u, v$ ), la **FTO** se puede escribir, de acuerdo a la Ecs. (I.6) y (I.14), como:

$$H(u, v) = \iint R_{\Pi}(u, v; u', v') du' dv' . \quad (\text{H.1})$$

Donde  $R_{\Pi}(u, v; u', v')$  es la **fecm** asociada a la pupila compleja. En el caso de que la función de pupila compleja  $\Pi(u, v)$  sea igual a la pupila real  $P(u, v)$  con un desenfoque  $w_{20}$ , entonces:

$$\Pi(u, v) = \begin{cases} P(u, v) e^{-j \frac{2\pi w_{20}}{\lambda} (u^2 + v^2)} & \text{si } a^2 \leq u^2 + v^2 \\ 0 & \text{si } a^2 > u^2 + v^2 \end{cases} , \quad (\text{H.2})$$

donde  $w_{20}$  se mide en  $\lambda'$ s. Sustituyendo la Ec. (H.2) en la Ec. (H.1), obtenemos que la **FTO** puede escribirse, para una longitud de onda dada, como:

$$H(u, v; uw_{20}, vw_{20}) = \iint R_p(u, v; u', v') e^{-j2\pi(w_{20}uu' + w_{20}vv')} du' dv'. \quad (\text{H.3})$$

Por otro lado, la **DW** asociada a la pupila real es:

$$W_p(u, v; x, y) = \iint R_p(u, v; u', v') e^{-j2\pi(u'x + v'y)} du' dv', \quad (\text{H.4})$$

comparando la Ec. (H.4) con la Ec. (H.3), podemos observar que si  $x = w_{20}u$  y  $y = w_{20}v$ , la **DW** de la pupila real es equivalente a la **FTO** para cualquier desenfoque. Esto es:

$$H(u, v; w_{20}u, w_{20}v) = W_p(u, v; w_{20}u, w_{20}v). \quad (\text{H.5})$$

Como puede probarse, la diferencia entre la **DW** y **FA**  $\{W_p(u, v; w_{20}u, w_{20}v) = A_p(u, v; 2w_{20}u, 2w_{20}v)\}$  es una contracción de coordenadas, pero no de forma, como lo muestra la Ec. (H.5); por consiguiente, los resultados que aquí se muestran complementan los ya publicados<sup>20</sup>.

La tabla de distribución de intensidades de la **DW** para funciones con simetría radial es la misma que la dada en el capítulo VI. Para pupilas mono cromáticas, la Fig. (H.1) presenta la **DW** de una pupila real con diámetro de 28 píxeles a lo largo del eje de la frecuencia  $v$  (radio  $\rho$ , fijando  $u = 0$  y haciendo  $v = 0, 1, \dots, 29$  píxeles): el cuadro izquierdo superior (**isu**) es  $|W_p(0, 0; x, y)|^2$ , la cual resulta ser la **fpei** de una pupila circular; la inferior inmediata es  $|W_p(0, 1; x, y)|^2$  y el último cuadro (**derecho inferior (din)**) es  $|W_p(0, 29; x, y)|^2$ . Conforme la frecuencia espacial  $v$  aumenta la mancha central se alarga y disminuye su intensidad

de tal forma que  $|W_p(0,27;x,y)|^2$  es una constante, ya que el desplazamiento de las pupilas hace que el área en común pueda representarse casi como una función impulso. Tanto  $|W_p(0,28;x,y)|^2$  como  $|W_p(0,29;x,y)|^2$  son cero por que el área que forman el producto de las pupilas desplazadas es cero.

La Fig. (H.2) es un corte de la Función de Transferencia Modulada ( $\text{FTM} = |\text{FTO}|$ ) normalizada cuando el desenfoque es cero, y se obtiene de la Fig. (H.1). fijando los valores  $x = y = 0$ , para  $u = 0$  y  $v = 0,1,\dots,29$ .

Si rotamos  $180^\circ$  la Fig. (H.2), tomando como referencia el eje vertical, obtenemos la **MTF** bidimensional del sistema óptico.

Con la finalidad de observar detalles que en la Fig. (H.1) no son visibles, se obtiene la Fig. (H.3), para lo cual de la Fig. (H.1) se normaliza cada  $W_p(0,v;x,y)$  con  $v = 0,1,\dots,29$ .

La Fig. (H.4) muestra distribuciones de intensidad de la  $|W_p(0,v;x,y)|^2$  para diferentes valores de la variable  $x$ . Así la  $|W_p(0,v;0,y)|^2$  (primera figura de la izquierda a la derecha) es similar (pero no igual) al modulo al cuadrado de la **DW** de una pupila rectangular 1-D. Por consiguiente, de la  $|W_p(0,v;0,y)|^2$  podemos obtener todos los ceros posibles a los desenfoques asociados a la **FTO** de una pupila bidimensional. Para  $x = 10$ , obtenemos el modulo al cuadrado de la segunda distribución de intensidades mostrada en esta figura, la cual es ligeramente diferente a la primera. Conforme  $x$  aumenta a 20 (tercera distribución de intensidades asociada a la **DW**), observamos como ésta se modifica con respecto a la primera, de tal forma que para la cuarta ( $|W_p(0,v;30,y)|^2$ ) las diferencias son evidentes entre ellas. La quinta y la sexta son para  $x = 40$  y  $x = 50$ .

Similarmente, podemos construir las  $W_p(u,0;x,y)$  para  $y = 0,10,20,30,40,50$  y obtener resultados equivalentes a los

obtenidos en la Fig. (H.4), como consecuencia de la simetría radial de la  $W_p(u, v; x, y)$ . De aquí que podamos concluir que para obtener todas las FTO's desenfocadas, de un sistema óptico bidimensional con simetría radial, es suficiente obtener la  $W_p(0, v; 0, y)$  o la  $W_p(u, 0; x, 0)$  y a partir de sus respectivos orígenes de coordenadas trazar un radio (en el plano  $y, v$  o en el plano  $x, u$ , respectivamente) que al interceptar sus ceros generan las todas las FTO's desenfocadas<sup>20</sup>.

Mas aún, en el caso de pupilas bidimensionales se obtiene un numero infinito de DW's (variando  $u, v$ ) que permiten obtener todas FTO's desenfocadas, generando todas las posibles  $W_p(u, v; x, y)$  a lo largo de un radio predeterminado  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ .

### Caso poli cromático.

El caso poli cromático es mas completo, solo en el sentido de que existen tres focos diferentes e independientes, uno para cada color primario, como consecuencia de la suposición de que el sistema óptico tiene aberración cromática longitudinal. En el ejemplo mostrado, el plano del foco color azul esta mas cercano al sistema óptico, el plano del foco del rojo es el mas alejado y el plano del foco verde esta en la posición central. Lo anterior implica que existen tres posibles DW's, una para cada foco, y cada DW tiene los tres colores primarios dos de los cuales están ligeramente desenfocados.

La Figs. (H.5), (H.6) y (H.7) muestran las distribuciones de intensidad asociadas a la  $W_p(0, v; x, y)$  cuando la detección se hace en el plano del foco del color rojo, del color verde y del color azul, respectivamente

En el plano del foco del color rojo, del color verde y del color azul, respectivamente frecuencia de corte es  $\nu = 28$ , lo cual implica que el radio de la pupila en el color rojo es de 14 píxeles. La frecuencia de corte del verde es de  $\nu = 24$  (ver Fig. (H.6)) y la frecuencia de corte para la pupila que tiene su foco en el azul (Fig. (H.7)) es  $\nu = 28$ . En cualquiera de los tres casos la pupilas fuera de

frecuencia de corte para la pupila que tiene su foco en el azul (Fig. (H.7)) es  $\nu = 28$ . En cualquiera de los tres casos la pupilas fuera de

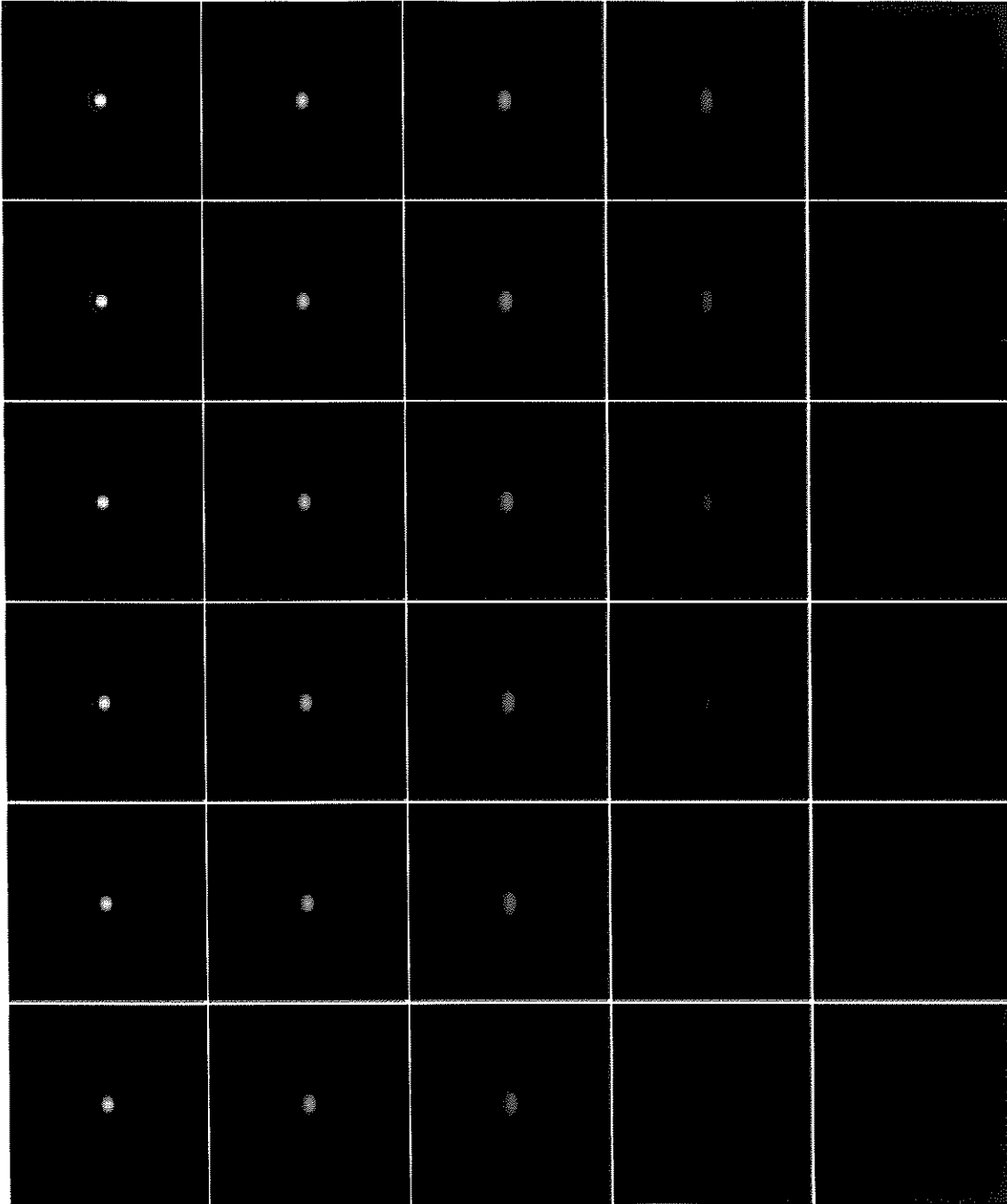


Fig. (H.1). El modulo al cuadrado de la *DW* de una pupila real limitada por difracción a lo largo del radio  $\rho = \nu$ . Cada cuadro tiene un sistema de coordenadas  $x, y$ .

foco tienen su coeficiente de desenfoque muy pequeños.

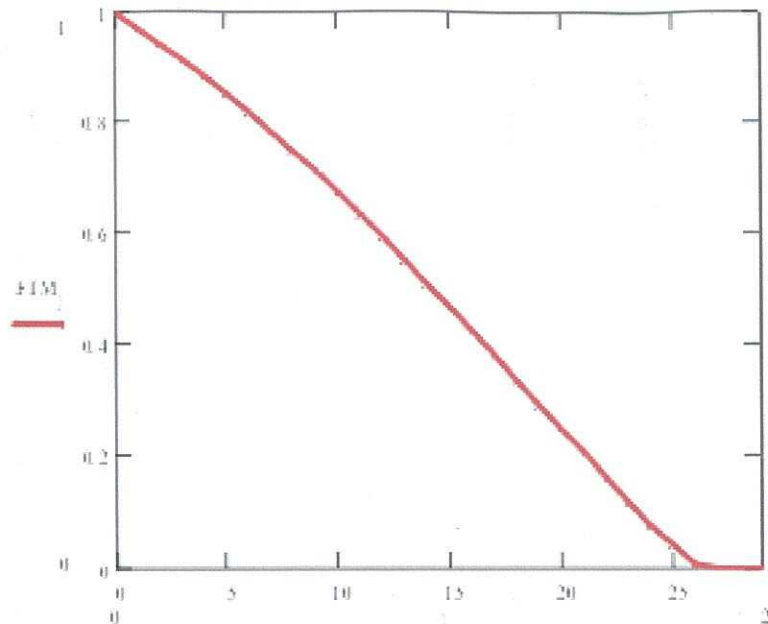


Fig. (H.2). La **FTM** para cero desenfoque obtenida de la Fig (H.1)..

La Fig. (H.8) presenta las distribuciones de intensidad asociadas a las  $W_p(0, v; 0, y)$  para las pupilas en foco del color rojo, verde y azul (de izquierda a derecha), respectivamente. En esta figura se puede observar claramente que la frecuencia de corte de la pupila cuyo foco es el color verde es la mas pequeña. Todas las **FTO**'s desenfocadas poli cromáticas se pueden obtener para cada una de las tres pupila en foco. Por consiguiente, cada desenfoque tiene tres posibles **FTO**'s poli cromáticas. De esta figura se observa que la **DW** con mas profundidad de foco es la que tiene asociada la pupila en el color verde, lo cual es evidente dado que el radio de esta pupila es el menor.

Finalmente, como la **FTO** es la **TFI** de la **fpei**, entonces  $W_H(u, v; x, y) = W_{fpei}(x, y; u, v)$ , relación válida tanto para el caso mono cromático como para el caso poli cromático.

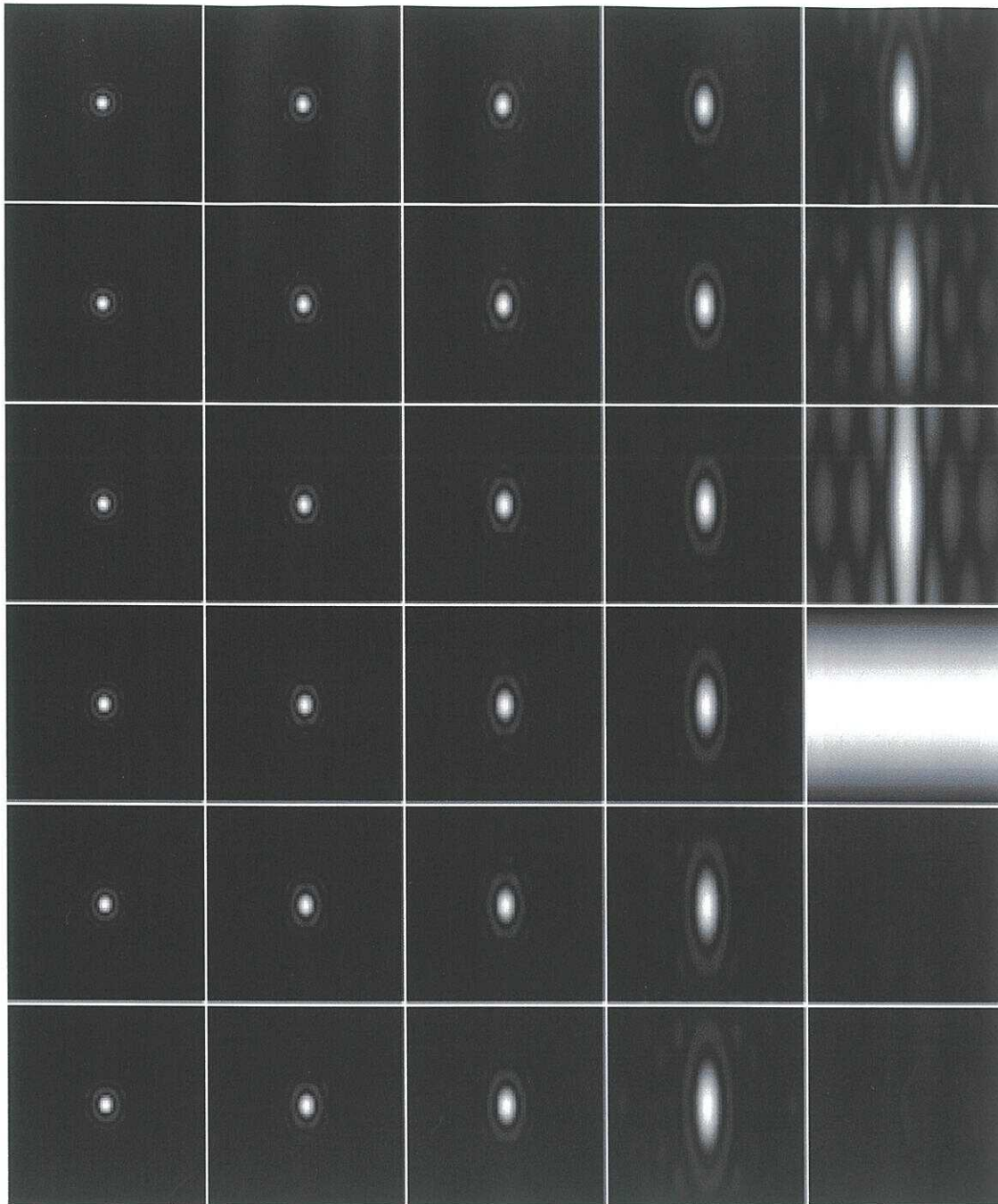


Fig. (H.3). Modulo al cuadrado de la *DW* de un pupila real limitada por difracción donde cada  $W_p(0, \nu; x, y)$  con  $\nu = 0, 1, \dots, 29$ , es normalizada a la unidad.

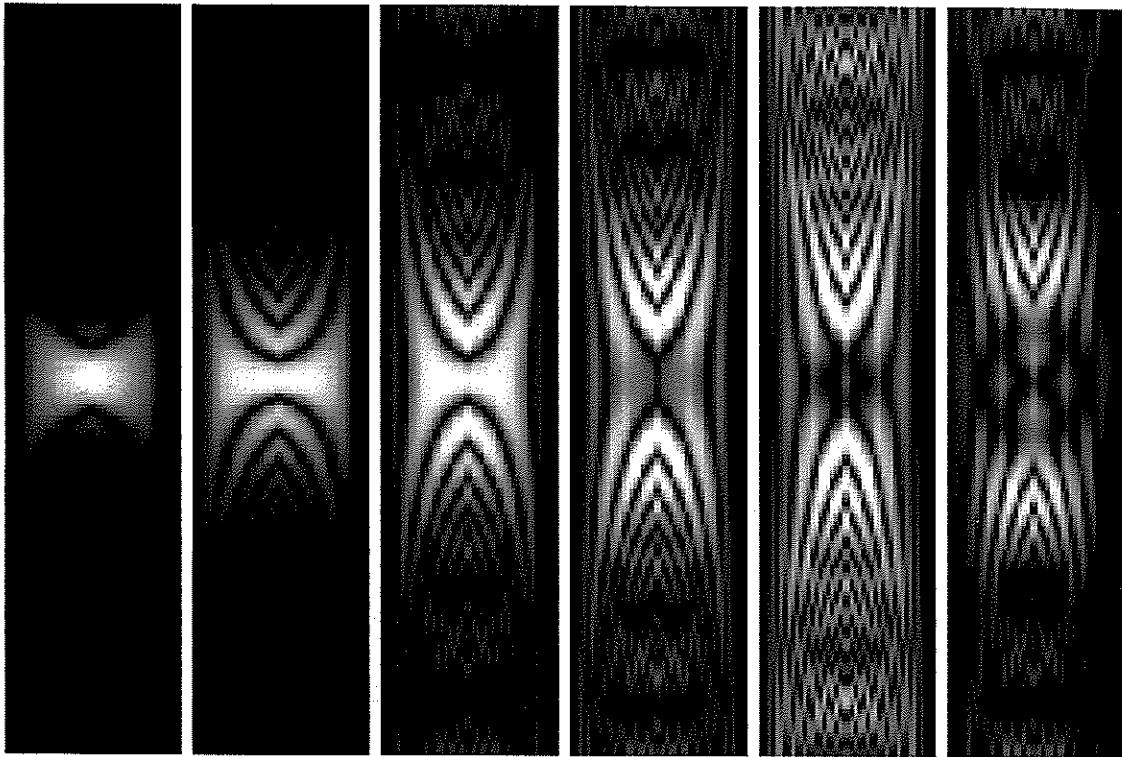


Fig. (H.4). El modulo al cuadrado de las DW's obtenidas de la  $W_p(0, v; x, y)$  (ver Fig. (H.1)) para  $x = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ .



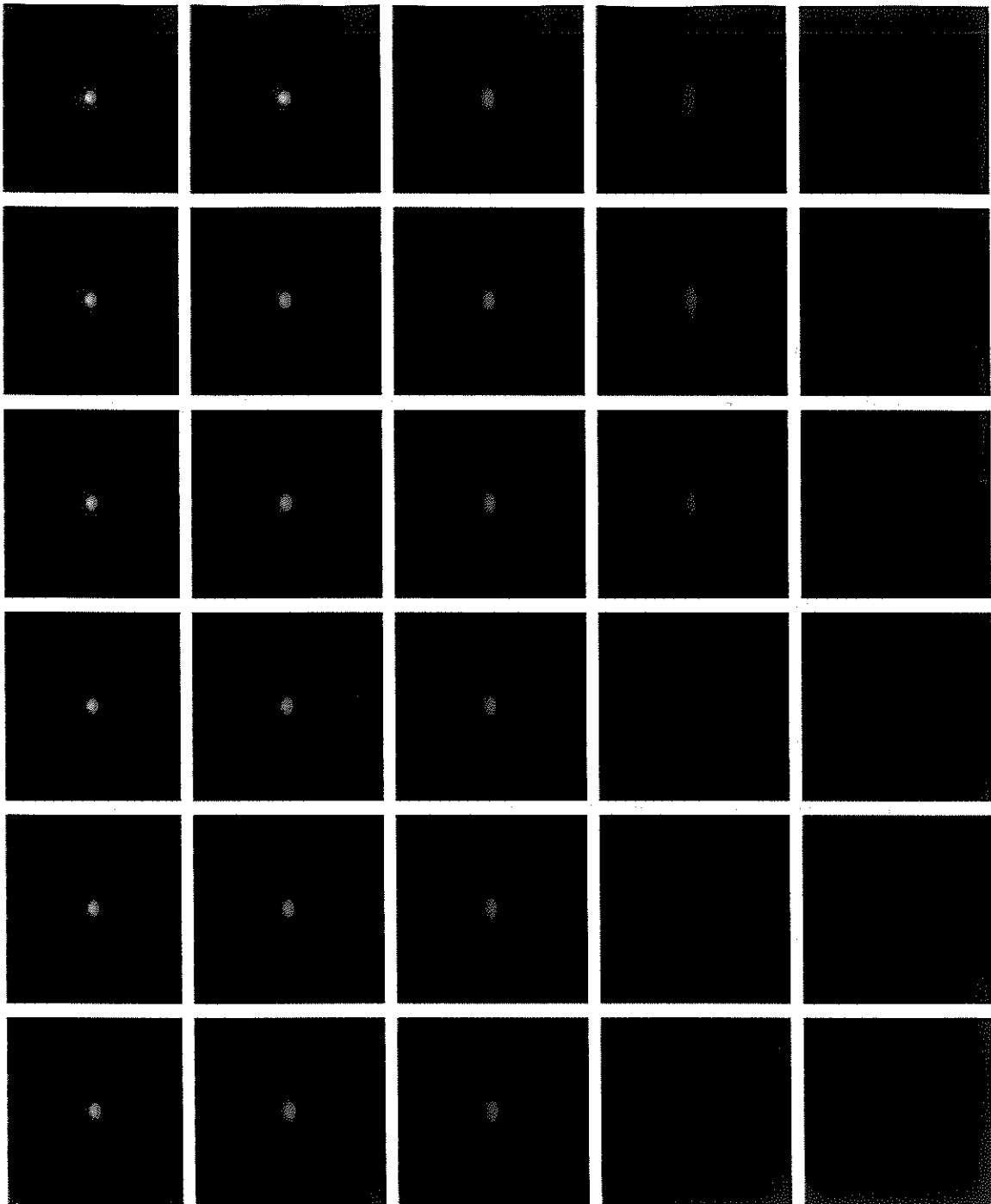


Fig. (H.5). La *DW* de una pupila real limitada por difracción a lo largo de un radio  $\rho = v$  y con foco en el color rojo.



Fig. (H.6). La *DW* de una pupila real limitada por difracción a lo largo de un radio  $\rho = v$  y con foco en el color verde.

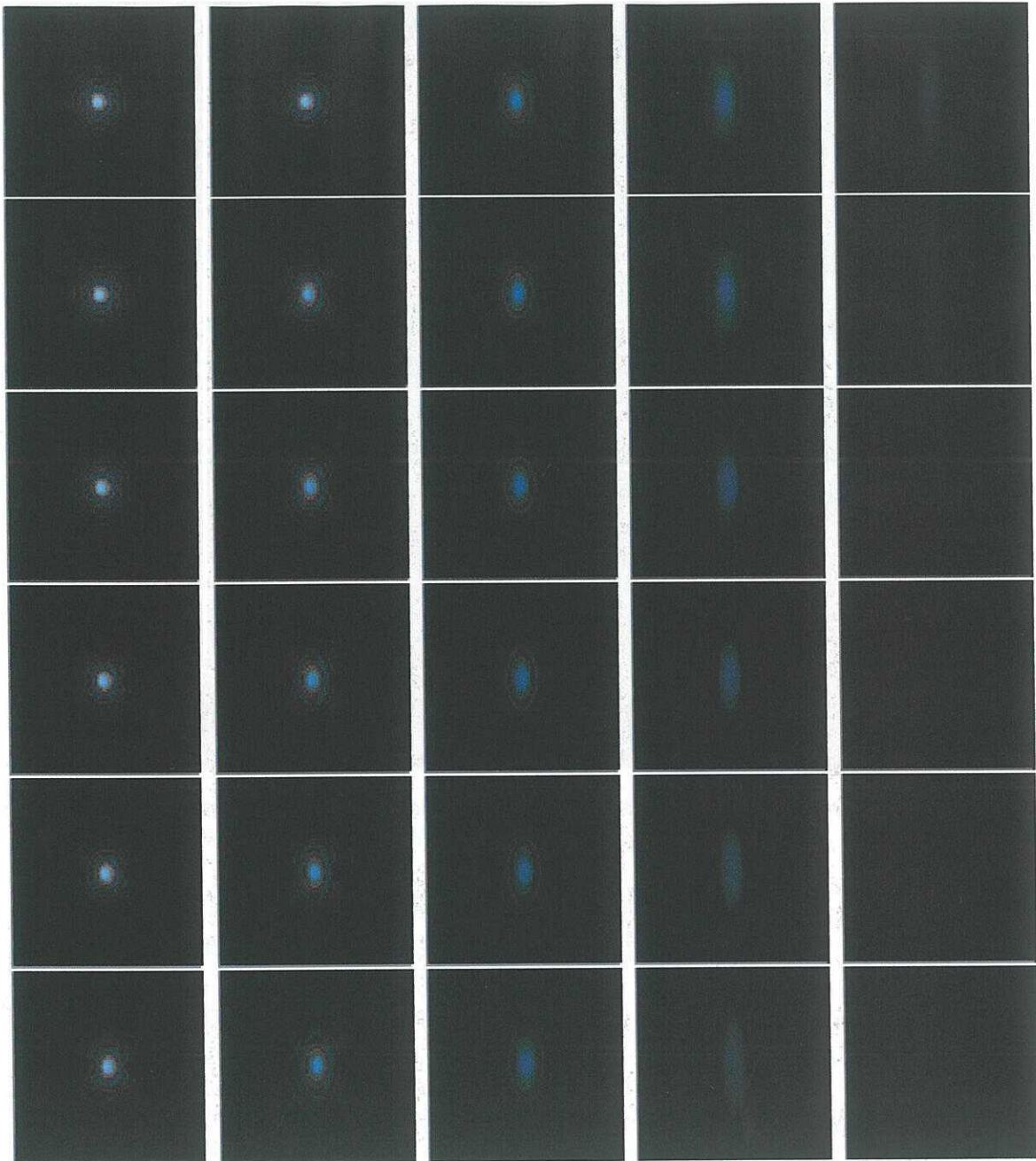


Fig. (H.7). La **DW** de una pupila real limitada por difracción a lo largo de un radio  $\rho = v$  y con foco en el color azul.

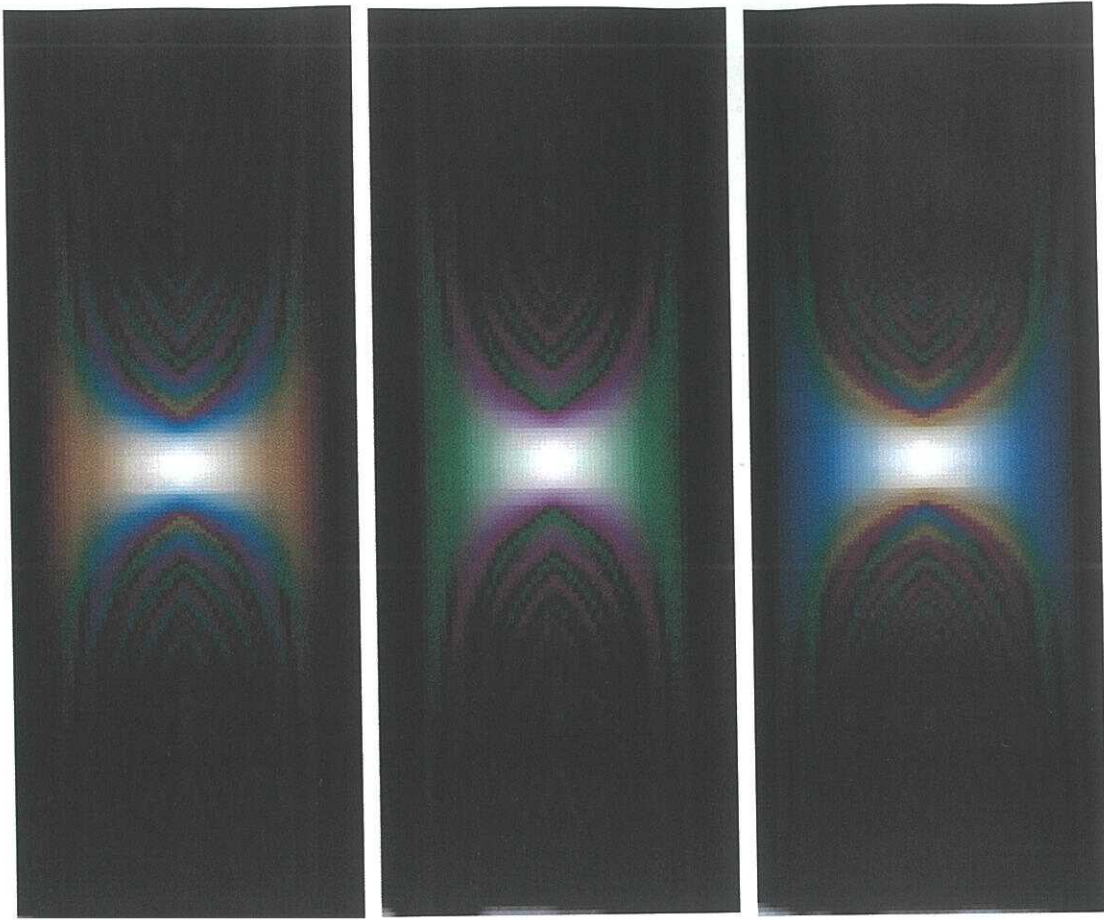


Fig. (H.8). *DW's* para los tres planos de la **fpei**: rojo, verde y azul (de izquierda a derecha), respectivamente.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

- [1] H.C. Andrews and B.R. Hunt. "Digital Image Restoration." Prentice-Hall, Inc. New Jersey. (1977).
- [2] . R.A. Athale, J.N. Lee, E.L. Robinson and H.H. Szu. "Acoustic-Optic Processors for Real-Time Generation of Time Frequency Representation." Optics Letters. **8**, 166-168, (1983)
- [3]. R. Bamler and H. Glunder. "The Wigner distribution function of two dimensional signals. Coherent-optical generation and display." Optica Acta. **30**, 1789-1803,(1983).
- [4]. H. O. Bartelt, K.H. Brenner and A.W. Lohmann. "The Wigner distribution function and its optical production." Opt. Comm. **32**, 32-38, (1980).
- [5]. M. J. Bastiaans. "The Wigner distribution function applied to optical signal and systems." Opt. Comm., **25**, 26-30, (1978).
- [6]. M. J. Bastiaans. "The Wigner distribution function and its application to first order optics." JOSA. **69**, 1710-1716, (1980).
- [7]. M. J. Bastiaans. "The Wigner distribution function of partially coherent light." Optica Acta, **28**, 1215-1224, (1981).
- [8]. M. J. Bastiaans. "Local-Frequency Description of Optical Signals and Systems." Eindhoven University of Technology Netherlands., (1988).
- [9]. R. H. T. Bates and M.C. McDonnell. "Image Restoration and Reconstruction." Clarendon Press Oxford. Boston and London. (1986).
- [10]. R. H. T. Bates and Hong Jiang. "Blind deconvolution- Recovering the seemingly irrecoverable." Internacional trends in optics. Edited by J.W. Goodman . Academic Press. 423-437, (1991)
- [11]. L. R. Berriel Valdós , J. Bescos y A. Santisteban. "Image Restoration for a Defocused Optical System." Appl. Opt. **22**, 2772., (1983).
- [12]. L. R. Berriel-Valdós, C. Gonzalo, J. Bésocos. "Computation of the Wigner distribution function by the Hartley transform." Application to image restoration". Opt. Comm. **68**, 339-344, (1988).

- [13]. L. R. Berriel-valdos and R.Ramos. "The Wigner Distribution Function in Iterative Image Processing." IV Wigner Symposium, 210-213, World Scientific (1996).
- [14]. L. R. Berriel-Valdos and R. Ramos. "Bilinear systems in Image Processing  
Space In(variant) Point Spread Intensity Function with Additive Noise." S.P.I.E. **2778**, 46-47, (1996).
- [15]. J. Bescós, G. Cristobal and J. Santamaría. "Local image filtering and texture classification through the Wigner distribution function." Proc. ICO. ,Quebec, canadian. 377-378, (1984).
- [16]. J. Bescós, J. H. Altamirano, A. Santisteban, & J. Santamaria. "Digital Restoration Models for Color Imaging", Appl. Optics, **22**, 419-425, (1988).
- [17]. M. Born, E Wolf. "Principles of Optics." Fifth Edition Chap. 9. Pergamon Press., (1975).
- [18]. R. N. Bracewell. "The Fourier Transform and its Applications". Mc. Graw Hill, New York, (1967).
- [19]. R. N. Bracewell. "Discrete Hartley transform." JOSA. **73**, 1832-1835, (1983).
- [20]. K. H. Brenner & J. Ojeda-Castaneda. "Ambiguity function and the Wigner distribution function applied to partially coherent imagery." Optica Acta. **31**, 213-223, (1984).
- [21]. A. C. M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker. "The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis.Part I.Continuous time signals." Philips J.R. **35**, 217-250,(1980).
- [22]. A. C. M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker. "The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis.Part II. Discrete time signals." Philips J.R. **35**, 277-300 ,(1980).
- [23]. A. C. M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker. "The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis.Part III. Relations with other time-frequency signal transformations." Philips J.R. **35**, 373-389, (1980).
- [24]. L. Cohen. "Generalized phase-space distributions." J. of Math. Phys. **7**,

- 781-786, (1966).
- [25]. L. Cohen. "Time-frequency distributions. A review." *Procc. IEEE.* **77**, 941-981, (1981).
- [26]. L. Cohen. "Positive time-frequency distributions functions." *IEEE. Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing.* **33**, 31-38,(1985).
- [27]. G. Cristobal, J. Bescós, J. Santamaría and J. Montes. "Wigner distribution representation of digital images." *Pattern Recognition Letters*, **5**, 215-221, (1987).
- [28]. G. Cristobal, J. Bescós and J. Santamaría. "Image analysis through the Wigner distribution function". *Appl. Opt.* **28**,262-267, (1989).
- [29]. G. Cristobal, C. Gonzalo and J. Bescós. "Image filtering and analysis through the Wigner distribution." *Advances in Electronics and electron physics. Academic Press Inc..* **80**, 309-397,(1991).
- [30]. D. Gabor. "Theory of communication" *J. IEE(london)*, **93**, 429-457, (1946).
- [31]. H. G. Glunder and R. Bamler. "Coherent optically performed operations in 4-D compound space spatial frequency domain with applications in image analysis and quality control. Proc." *SPIE.* **28**, 207-215. (1989).
- [32]. C. Gonzalo, J. Bescós, L.R. Berriel-Valdos and J. Santamaria. "Space-variant filtering through the Wigner distribution function." *Appl. Opt.* **28**, 730-736, (1989).
- [33]. C. Gonzalo, J. Bescós, L.R. Berriel-Valdos and P. Artal. "Optical digital implementation of the Wigner distribution function : use in space variant filtering of real images." *Appl. Opt.* **29**, 2569-2575, (1990).
- [34]. J. W Goodman. "Introduction to Fourier Optics." McGraw Hill, New York. (1968).
- [35]. R. V. L. Hartley. "A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems." *Proc. IRE.* **30**, 144-150, (1942).
- [36]. Y. Ichioka. "Interactive image processing for image restoration and enhancement. Currents trends in optics." Edited by F.T. Arechi and F.R. Aussenegg. Taylor and Francis, London Halsted Press 67-67, (1981).

- [37]. L. Jacobson and H. Wechsler. "Joint spatial-spatial frequency representation." *Signal Processing*, **14**, 37-68, (1988).
- [38]. B. Jähne. "Digital Image Processing: Concepts, Algorithms, and Scientific applications ", second edition, Springer-Verlang. (1993).
- [39]. D. Kundur and D. Hatzinakos. "Blind Image deconvolution." *IEEE Signal processing Magazine*. 43-64, May (1996).
- [40]. C.-C. Lee and J. Pineda de Gyvez. "Single Layer CNN Simulator." *Nonlinear Circuits & Systems and Neural Systems*. **6**. Proceedings IEEE ISCAS'94 London, 217-220, (1994).
- [41]. Y. Li, G. Eichmann and M. Conner. "Optical Wigner distribution and Ambiguity function for complex signals and images." *Opt. Comm.* **67**, 177-179, (1988).
- [42]. F. Lobato López. "Diseño de una Red Neuronal Celular para Eliminación de Ruido y Detección de Bordes". Tesis de Maestría, INAOE, Tonanzintla. Pue. México (1995).
- [43]. J. Maeda and Kazumi Murata. "Adaptive regularizations in an iterative regularized pseudo inverse method." *Opt. Comm.* **51**, 382-385, (1984).
- [44]. J. Maeda and Kazumi Murata. "Image restoration by an iterative damped method." *Appl. Opt.* **23**, 857-861, (1984).
- [45]. J. Maeda and Kazumi Murata. "Restoration of band-limited images by an iterative regularized pseudo inverse method." *JOSA*. **1**, 28-34, (1984).
- [46]. J. Maeda. "Image restoration by an iterative damped least-square method with non-negative constraint." *Appl. Opt.*, **24**, 751-757, (1985).
- [47]. D. Malacara. "Optical Shop Testing." Second Edition, Chap 13., 455-499 John Wiley & Sons , Inc., (1992).
- [48]. J. E. Moyal , "Quantum Mechanics as a Statistical Theory". *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45**, 99-124, (1949).



- [49]. J. Ojeda-Castañeda and E. E. Sicre, "Bilinear Optical Systems Wigner Distribution function and Ambiguity Function Representations," *Opt. Acta*, **31**, 255-260, (1984).
- [50]. J. Ojeda-Castañeda and L.R. Beriel-Valdos. And E. L. Montes. "Ambiguity Function as a Design Tool for High Focal Depth." *Appl. Optics* **27**, 790-795, (1988).
- [51] C. H. Page. "Instantaneous Power Spectra." *J. App. Phys.*, **23**, 103-106, (1952).
- [52]. A. Papoulis. "Ambiguity function in Fourier optics." *JOSA*. **64**, 779-788, (1974).
- [53]. P. Peretto. "An Introduction to the Modeling of Neuronal Networks". Cambridge University Press England (1992)
- [54]. W. K. Pratt. "Digital Image Processing", second edition, J. Wiley & Sons, Inc. New York. (1991).
- [55]. S. Sadeghi-Emamchaie, G.A. Jullien and W.C. Miller. "Parallel Median Filtering Using Cellular Neural Networks." Vol. 3. Proceedings IEEE-ISCAS'96 Atlanta, 461-464, (1996).
- [56]. B. A. C. Saleh. "Linear restoration of partially coherent images." *Opt. Comm.* **10**, 247-249, (1974).
- [57]. B. A. C. Saleh. "Linear restoration of partially coherent images. II Minimum mean square error." *Opt. Comm.* **27**, 13-17, (1974).
- [58]. B. A. C. Saleh. "Bilinear processing of 1-D signals by the use of linear 2-D coherent optical processor." *Appl. Opt.* **17**, 3408-3411, (1978).
- [59]. B. A. C. Saleh. "Optical bilinear transformations: General properties." *Optica Acta*. **26**, 777-779, (1979).
- [60]. B. A. C. Saleh and Wayne C. Goeke. "Linear restoration of bilinearly distorted images." *JOSA*. **70**, 506-515, (1980).
- [61]. B. A. C. Saleh. & S. I. Sayegh. "Restoration of partially coherent images by the use of a second degree nonlinear filter." *Appl. Opt.* **20**, 4089-4093, (1981).

- [62]. H. H. Szu and J. A. Blogett. "Wigner distribución and Ambigüity Function. Optics in Four Dimensions." AIP Conf. Proc. **65**, 355-381, (1980).
- [63]. B. V. K. Vijaya and C.W.Carrol. "Effects of sampling of signal detection using the cross-Wigner distribution function." Appl. Opt. **23**, 4090-4094, (1984).
- [64]. B. V. K. Vijaya and C.W.Carrol. "Performance of the Wigner distribution function based detection method." Optical Eng. **23**,732-737,(1984).
- [65]. B. V. K. Vijaya and C.W.Carrol. "Discrete Wigner synthesis. Signal Processing." **11**, 277-317, (1986).
- [66]. J. Ville. "Théorie et Applications de la notion de signal Analytique." **2A**, 61-74, (1948).
- [67]. V. Volterra. "Theory of the Functionals and of Integral and Integro-Differentials Equations"., Dover Publications, N. Y. (1959).
- [68]. F. M. Wahl. "Digital Image Signal Processing", A. House, London. (1987).
- [69]. E. Wigner. "On the quantum correction for thermodinamic equilibrium."Physics Review. **40**, 749-759, (1932).
- [70]. K. B. Wolf. "Wigner distribution function for paraxial polichromatic optics." Opt. Comm. **132**, 343-352, (1996).