



**I  
N  
A  
O  
E**

# Propiedades no-lineales en enfocamiento plasmonico

por

**Msc.Fabián Camilo Cubillos Morales**

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de  
**DOCTORADO EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD  
DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica**

Agosto, 2024

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. Gabriel Martínez Niconoff, INAOE**

**Dr. Israel Julián Macías, INAOE**

©INAOE 2024

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias  
en su totalidad o en partes de esta tesis



---

# Agradecimientos

A mi familia y amigos por su soporte moral. Al Dr. Gabriel M. Niconoff y al Dr. Israel Julián M. por su acompañamiento y destacada dirección. Finalmente a Conacyt por permitirme culminar mis estudios de posgrado. *A todos y a ninguno.*

---

# Resumen

Se exploran las propiedades no-lineales en la focalización plasmónica, abordando desde los fundamentos teóricos de las ondas evanescentes (OE) hasta aplicaciones avanzadas en plasmónica y óptica no-lineal. Se comienza con una derivación detallada de la función de relación de dispersión para OE, considerando su naturaleza no-homogénea. Esta función sirve como base para analizar la interferencia entre OE y su aplicación en el control de la polarización. Se desarrolla un modelo del espectro angular evanescente y se aplica a transmitancias periódicas, demostrando la posibilidad de generar campos evanescentes con patrones de auto-imágenes. El estudio avanza hacia la generación de plasmones-polaritones superficiales estructurados (SSPPs) mediante el acoplamiento con OE interferidas, proporcionando simulaciones numéricas detalladas de este proceso. Finalmente se estudia la focalización de plasmones superficiales utilizando la teoría de catástrofes. Se explora la formación de regiones cóusticas en campos plasmónicos y su potencial para inducir efectos no-lineales, como la generación de armónicos superiores y el efecto fotoeléctrico mejorado. Se presenta un modelo teórico para describir la formación de estas regiones cóusticas y se complementa con simulaciones numéricas que visualizan los efectos de enfocamiento en diversas geometrías.

**Palabras clave:** Ondas evanescentes, plasmones de superficie, enfoque plasmónico, teoría de catástrofes, óptica no lineal, cóusticas, relación de dispersión, control de polarización, polaritones de plasmones de superficie estructurados, dispositivos fotónicos.

# Abstract

This thesis explores nonlinear properties in plasmonic focusing, covering theoretical foundations of evanescent waves (EWs) to advanced applications in plasmonics and nonlinear optics. All begins with a detailed derivation of the dispersion relation function for EWs, considering their non-homogeneous nature. This function serves as a

basis for analyzing interference between EWs and its application in polarization control. An evanescent angular spectrum model is developed and applied to periodic transmittances, demonstrating the possibility of generating evanescent fields with self-imaging patterns. The study progresses to the generation of structured surface plasmon polaritons (SSPPs) through coupling with interfered EWs, providing detailed numerical simulations of this process. The thesis culminates in an in-depth analysis of surface plasmon focusing using catastrophe theory. The formation of caustic regions in plasmonic fields and their potential to induce nonlinear effects, such as higher harmonic generation and enhanced photoelectric effect, are explored. A theoretical model is presented to describe the formation of these caustic regions and is complemented by numerical simulations visualizing focusing effects in various geometries. This research advances our understanding of evanescent waves and surface plasmons, providing both solid theoretical foundations and practical perspectives for future applications in nanophotonics and nonlinear optics. The developed models and techniques offer new tools for designing advanced plasmonic devices and precise control of light at subwavelength scales, paving the way for innovations in fields such as high-resolution imaging, ultrasensitive sensing, and quantum information technologies.

**Key words:** Evanescent waves, surface plasmons, plasmonic focusing, catastrophe theory, nonlinear optics, caustics, dispersion relation, polarization control, structured surface plasmon polaritons, photonic devices

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Objetivos . . . . .	9
1.2.1. Objetivo general . . . . .	9
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	9
1.3. Motivación . . . . .	9
1.4. Metodología . . . . .	11
<b>2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>13</b>
2.1. Ondas evanescentes . . . . .	13
2.1.1. Reflexión y refracción de una onda plana . . . . .	14
2.2. Polarización y representación matricial . . . . .	22
2.2.1. Representación de la matriz de Jones . . . . .	22
2.2.2. Esfera de Poincaré . . . . .	23
2.2.3. Matriz de correlación . . . . .	24
<b>3. FUNCIÓN DE RELACIÓN DE DISPERSIÓN PARA ONDAS EVANESCENTES Y SUS APLICACIONES</b>	<b>26</b>
3.0.1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera . . . . .	26
3.0.2. Soluciones de onda plana y ondas evanescentes . . . . .	27
3.0.3. Polarización y componentes no homogéneas . . . . .	28
3.1. Derivación de la función de relación de dispersión para OE . . . . .	28
3.1.1. Respuesta dipolar y dipolo de acoplamiento inducido . . . . .	28
3.2. Interferencia entre ondas evanescentes y control de polarización . . . . .	35

3.2.1.	Superposición entre dos ondas evanescentes . . . . .	35
3.2.2.	Estados de polarización y representación de los vectores de Jones	36
3.2.3.	Matriz de correlación y representación de la esfera de Poincare .	37
3.3.	Modelo del espectro angular evanescente . . . . .	38
3.3.1.	Aplicación a transmitancias periódicas . . . . .	39
<b>4.</b>	<b>GENERACIÓN DE PLASMÓNES SUPERFICIALES ESTRUCTURADOS CON OE INTERFERIDAS</b>	<b>46</b>
4.1.	Determinación de la relación de dispersión mas simple para SPPs . . .	47
4.1.1.	SPP en materiales nobles 2D . . . . .	50
4.2.	Excitación SSPP . . . . .	56
4.2.1.	Resultados numéricos . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>Enfocamiento de plasmones superficiales: Teoría de catástrofes y regiones cóusticas</b>	<b>63</b>
5.1.	Fundamentos teoría de catástrofes y máquina de catástrofes de Zeeman	64
5.2.	Cóusticas y enfocamiento del campo . . . . .	67
5.3.	Aplicación de la Teoría de Catástrofes a Plasmónes Superficiales . . . .	71
5.4.	Cálculo detallado de la frecuencia efectiva en la región singular . . . . .	74
5.5.	Descripción del campo plasmónico . . . . .	77
5.6.	Generación de redistribución de carga . . . . .	79
5.7.	Resultados numéricos . . . . .	81
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>86</b>

---

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Introducción

El campo de la nanofotónica ha experimentado un crecimiento exponencial en las últimas décadas, impulsado por la necesidad de controlar y manipular la luz a escalas nanométricas [1]. En este contexto, la exploración de los plasmones-polaritones de superficie (SPPs) y su interacción con las ondas evanescentes (OEs) ha emergido como un área de investigación particularmente fructífera [2, 3]. Este trabajo busca profundizar en la comprensión de la física fundamental en la interfaz donde se generan las ondas evanescentes, y a partir de este conocimiento, desarrollar aplicaciones innovadoras en el campo de la nanofotónica. Las OE, que surgen en la propagación de ondas electromagnéticas en interfaces y medios limitados [4], ofrecen una herramienta única para el control y manipulación de la luz a escala nanométrica. Estas ondas, caracterizadas por su decaimiento exponencial desde la interfaz, juegan un papel crucial en fenómenos como la reflexión total interna frustrada y la microscopía de campo cercano [5]. Por otro lado, los plasmones superficiales, oscilaciones colectivas de electrones en la interfaz de un metal y un dieléctrico [6], presentan un potencial extraordinario para la miniaturización de dispositivos ópticos y la mejora de sus capacidades funcionales. Un aspecto particularmente valioso de este trabajo es la aplicación de conceptos fundamentales de la óptica clásica, como la interferencia y la difracción, al dominio de la óptica superficial y plasmónica [4, 7]. Esta aproximación permite tender un puente entre la física bien establecida de la óptica convencional y los fenómenos emergentes en la escala nanométrica, proporcionando nuevas perspectivas y herramientas para el control de la luz en dimensiones subwavelength. Además, este estudio incorpora elementos de la teoría de catástrofes [8, 9] en el análisis de campos plasmónicos, especialmente en

el contexto de la focalización en regiones cóusticas. Esta aplicación innovadora de la teoría de catástrofes a la óptica plasmónica promete revelar nuevos fenómenos y posibilidades para la manipulación precisa de campos ópticos en la nanoescala. Este estudio se centra en varios aspectos clave: Análisis de la relación de dispersión para las OEs y su implementación en el estudio de campos ópticos estructurados [10]. Exploración de la dinámica de excitación de los SPPs a través del acoplamiento directo con ondas evanescentes interferidas estructuradas [11]. Estudio de la focalización de campos plasmónicos en regiones cóusticas para inducir efectos fotoeléctricos no lineales [12]. La interferencia y difracción OE, conceptos fundamentales en óptica clásica, adquieren nuevas dimensiones cuando se aplican a la óptica superficial. Por ejemplo, la interferencia de OE puede generar patrones de campo cercano con características únicas [10], mientras que la difracción de estas ondas puede conducir a efectos de auto-imagen en escalas subwavelength [13]. Para abordar estos desafíos, este trabajo se estructura en una serie de análisis teóricos y diseños experimentales que buscan caracterizar la eficiencia y las propiedades de estos fenómenos. Se emplean técnicas analíticas avanzadas, simulaciones numéricas y, cuando es posible, validación experimental para proporcionar una comprensión integral de los fenómenos estudiados. La aplicación de estos conceptos a la nanofotónica promete abrir nuevas vías para el diseño de dispositivos ópticos avanzados, incluyendo sensores ultrasensibles [14], circuitos ópticos integrados [15], y nuevas plataformas para la computación óptica [16]. Además, la comprensión profunda de la interacción entre OE y plasmones superficiales podría conducir a avances significativos en campos como la espectroscopía mejorada por superficie [17] y las tecnologías de información cuántica [18]. En resumen, este trabajo busca no solo avanzar en la comprensión fundamental de la física de las ondas evanescentes y los plasmones superficiales, sino también explorar cómo estos conocimientos pueden aplicarse para desarrollar nuevas tecnologías nanofotónicas. Al tender un puente entre la óptica clásica y la plasmónica, y al incorporar conceptos avanzados como la teoría de catástrofes, este estudio aspira a contribuir significativamente al campo emergente de la nanofotónica y sus aplicaciones.



## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

- Investigar y caracterizar la física fundamental de las ondas evanescentes en interfaces, calculando su relación de dispersión para implementarla en el acoplamiento con plasmones superficiales estructurados. Utilizar funciones de catástrofe para analizar las propiedades no-lineales de los campos plasmónicos en la vecindad de las regiones singulares.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Derivar y analizar la relación de dispersión para ondas evanescentes, considerando su naturaleza no homogénea.
- Estudiar los efectos de interferencia en ondas evanescentes y su impacto en el control de la polarización, así como también los efectos de difracción debido a transmitancias periódicas y el efecto de auto-imagen.
- Desarrollar un modelo de acoplamiento entre ondas evanescentes interferidas y plasmones-polaritones superficiales estructurados (SSPPs).
- Investigar las propiedades no-lineales en la focalización de campos plasmónicos utilizando la teoría de singularidades (catástrofes), analizando la formación de regiones cóusticas y su potencial para inducir efectos no-lineales.

## 1.3. Motivación

El campo de la nanofotónica se encuentra en la vanguardia de la investigación científica, ofreciendo posibilidades sin precedentes para el control y manipulación de la luz a escalas inferiores a la longitud de onda. En este contexto, la interacción entre OE y plasmones superficiales emerge como un área de investigación particularmente prometedora, con potenciales aplicaciones que abarcan diversos campos tecnológicos. La motivación principal de este trabajo radica en la necesidad de comprender más profundamente la física fundamental de las ondas evanescentes en interfaces y explorar cómo este conocimiento puede aplicarse para desarrollar nuevas tecnologías nanofotónicas.

Las ondas evanescentes, con su naturaleza de decaimiento exponencial, proporcionan un medio único para manipular la luz en escalas nanométricas, mientras que los plasmones superficiales ofrecen la posibilidad de confinar y guiar la luz en dimensiones muy por debajo del límite de difracción. Al investigar la interacción entre ondas evanescentes y plasmones superficiales, buscamos abrir nuevas vías para el diseño de dispositivos ópticos avanzados y el control preciso de la luz a escala nanométrica. Este enfoque promete superar las limitaciones actuales en la miniaturización de dispositivos ópticos y podría conducir a avances significativos en áreas como las comunicaciones ópticas, el procesamiento de información cuántica y la computación óptica. Estas investigaciones podrían conducir al desarrollo de dispositivos de comunicación más eficientes y compactos, capaces de manejar mayores volúmenes de datos a velocidades más altas. Un aspecto particularmente fascinante y motivador de esta investigación es la exploración de efectos no lineales inducidos por campos plasmónicos focalizados en regiones cáusticas. Este fenómeno podría conducir a avances significativos en áreas como la espectroscopía ultrasensible y la manipulación de la materia a escala atómica. La posibilidad de generar y controlar campos electromagnéticos intensamente localizados abre nuevas oportunidades para el estudio de interacciones luz-materia en regímenes previamente inaccesibles. Este trabajo no solo busca contribuir al avance del conocimiento científico fundamental, sino también sentar las bases para futuras aplicaciones tecnológicas revolucionarias. Anticipamos que los resultados de esta investigación podrían tener un impacto significativo en áreas como la computación óptica, donde la manipulación precisa de la luz a escala nanométrica podría llevar al desarrollo de circuitos ópticos ultrarrápidos y energéticamente eficientes. En el campo de los sensores ultrasensibles, las técnicas desarrolladas podrían permitir la detección de moléculas individuales o cambios minúsculos en el entorno local, con aplicaciones potenciales en diagnóstico médico y monitoreo ambiental. En el ámbito de las comunicaciones cuánticas, la capacidad de controlar y manipular estados cuánticos de luz mediante estructuras plasmónicas podría abrir nuevas vías para la implementación de protocolos de comunicación cuántica robustos y escalables. Además, en el campo emergente de la nanotecnología avanzada, las técnicas desarrolladas podrían encontrar aplicaciones en la fabricación de nanoestructuras con precisión sin precedentes, potencialmente revolucionando la producción de dispositivos electrónicos y fotónicos de próxima generación.

## 1.4. Metodología

Esta tesis emplea una combinación de enfoques teóricos, analíticos y numéricos para investigar las propiedades de las ondas evanescentes y los plasmones superficiales, así como sus aplicaciones en nanofotónica. La metodología se divide en varias etapas clave:

### 1. Análisis teórico:

- Derivación de la función de relación de dispersión para ondas evanescentes, considerando su naturaleza no homogénea.
- Desarrollo del modelo de espectro angular evanescente.
- Aplicación de la teoría de catástrofes al estudio de plasmones superficiales y formación de cústicas plasmónicas.

### 2. Modelado matemático:

- Formulación de ecuaciones que describen la interferencia y difracción de ondas evanescentes.
- Desarrollo de expresiones matemáticas para la generación de plasmones-polaritones superficiales estructurados (SSPPs) mediante el acoplamiento con OE interferidas.
- Modelado de la formación de regiones cústicas en campos plasmónicos usando teoría de singularidades.

### 3. Simulaciones numéricas:

- Implementación de simulaciones 2D utilizando el método de elementos finitos en el dominio del tiempo (FETD) con el software COMSOL MULTIPHYSICS.
- Modelado de la propagación de plasmones superficiales en diversas geometrías, incluyendo estructuras semicirculares, elípticas y parabólicas.
- Análisis numérico de la formación y evolución de cústicas plasmónicas.

### 4. Análisis de resultados:

- Interpretación de los resultados numéricos en el contexto de la teoría desarrollada.

- Evaluación de las implicaciones de los hallazgos para aplicaciones potenciales en nanofotónica y óptica no lineal.

**5. Propuesta de aplicaciones:**

- Exploración de posibles aplicaciones de los fenómenos estudiados, como el efecto fotoeléctrico mejorado y el diseño de dispositivos plasmónicos avanzados.

---

# Capítulo 2

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

*“Thoroughly conscious ignorance is the prelude to every real advance in science.”*

James Clerk Maxwell.

### 2.1. Ondas evanescentes

Las OE son oscilaciones del campo electromagnético que no se propagan como ondas convencionales, sino que su energía se concentra espacialmente cerca de la fuente. Estas ondas juegan un papel crucial en diversos fenómenos ópticos y tienen numerosas aplicaciones prácticas en la ciencia y la tecnología modernas.

Una característica fundamental de las ondas evanescentes es la ausencia de flujo neto de energía en la región donde existen. Esto se debe a que el vector de Poynting, promediado durante un ciclo de oscilación completo, es cero en estas regiones [19].

En óptica y acústica, las OE se generan cuando las ondas que viajan a través de un medio sufren una reflexión total interna en su frontera debido a que inciden sobre esta a un ángulo mayor que el ángulo crítico[20]. Una explicación física para la existencia de las ondas evanescentes es que el campo eléctrico y/o magnético (o presiones de radiación para la acústica) no pueden ser discontinuos en la frontera, lo que sería el caso si no hubiera un campo evanescente oscilatorio. En la mecánica cuántica, la explicación física es análoga: la función de onda de Schrödinger, que representa el movimiento de una partícula normal a la frontera, no puede ser discontinua en la frontera. La versatilidad de las OE ha permitido su aplicación en diversos campos. Por ejemplo, en la microscopía de fluorescencia de reflexión total interna (TIRF), las ondas evanescentes se utilizan para iluminar selectivamente una capa muy delgada de la muestra, permitiendo la visualización de procesos celulares cerca de la membrana plasmática con una resolución

axial excepcional [21]. Esta técnica ha revolucionado el estudio de procesos como la exocitosis, permitiendo a los investigadores observar la fusión de vesículas individuales con la membrana celular en tiempo real.

Las ondas electromagnéticas evanescentes han sido ampliamente usadas, como es el caso de ejercer presión de radiación en pequeñas partículas para atraparlas[22]. Con esto se les puede enfriar a muy bajas temperaturas[23], como también para iluminar objetos muy pequeños como las células biológicas, una única proteína o moléculas de ADN para microscopía (microscopía fluorescente de reflexión total interna). También, la onda evanescente de una fibra óptica puede usarse en un sensor de gas[24], y están presentes en la técnica de espectrometría infrarroja conocida como reflexión total atenuada[25].

En ingeniería eléctrica, las OE se encuentran en la región del campo cercano con un tercio de la longitud de onda de cualquier antena de radio. Durante la operación normal, una antena emite campos electromagnéticos alrededor de la región de campo cercano y una porción de la energía del campo es reabsorbida, mientras que la restante es radiada como ondas EM. Recientes avances incluyen el desarrollo de una rendija de Bragg basada en grafeno, demostrando su eficacia en la excitación de ondas EM superficiales con estructura periódica realizado con la técnica de acoplamiento de prisma[26]. Por otra parte, las soluciones a la ecuación de Schrödinger involucran ondas evanescentes, dando lugar al fenómeno de tunelamiento en la mecánica ondulatoria[27]. Por último, en la microscopía, los sistemas capaces de capturar la información de las ondas evanescentes permiten la generación de imágenes de alta resolución[28], mientras que los sistemas ópticos convencionales están restringidos por el límite de difracción. Aquellos sistemas que hacen uso de las OE, como las súper lentes y microscopía óptica de barrido de campo cercano, pueden superar este límite. Sin embargo, el problema reside en la precisión del sistema que captura las ondas evanescentes. El límite de la resolución se establece como:

$$k \propto \frac{1}{d} \ln \frac{1}{\delta}, \quad (2.1)$$

$k$  es el vector de onda maximal,  $d$  es la distancia del objeto al sensor y  $\delta$  es un parámetro del factor de calidad del sensor.

### 2.1.1. Reflexión y refracción de una onda plana

En el estudio de las OE, se debe analizar primero el fenómeno de la reflexión total interna, el cual es un resultado de exceder cierto ángulo crítico, más conocido como el ángulo de Brewster[20]. Consideremos la reflexión y refracción de la luz en una interfase plana entre dos medios con diferentes propiedades dieléctricas; lo que significa diferentes

índices de refracción. En este fenómeno, podemos dividir los diferentes aspectos en dos clases. Las propiedades cinéticas como: Ángulo de reflexión igual al ángulo de incidencia y la ley de Snell  $\sin i / \sin r = n' / n$ , donde  $i$ ,  $r$  son los ángulos de incidencia y refracción, mientras que  $n$  y  $n'$  corresponden a los índices de refracción de los medios. Por otra parte, se tienen las propiedades dinámicas como: Intensidades de la radiación reflejada y refractada, como también los cambios de fase y polarización. De aquí que las propiedades cinéticas vienen dadas de la naturaleza ondulatoria del fenómeno y del hecho que son tres las condiciones de frontera que deben satisfacerse. Aunque estas no dependen de la naturaleza detallada de las ondas o las condiciones de frontera.

Los símbolos y el sistema coordenado apropiado para el problema se muestran en la Fig.1. El medio debajo y encima del plano  $z = 0$  tiene permeabilidades y permitividades  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $\mu'$ ,  $\epsilon'$  respectivamente. Los índices de refracción se definen a través de la velocidad de fase de una onda[29], y son  $n = \sqrt{\mu\epsilon/\mu_0\epsilon_0}$  y  $n' = \sqrt{\mu'\epsilon'/\mu_0\epsilon_0}$ . Una onda plana con vector de onda  $\mathbf{k}$  y frecuencia  $\omega$  incide desde el medio  $\mu$ ,  $\epsilon$ . Las ondas refractadas y reflejadas tienen vectores de onda  $\mathbf{k}'$  y  $\mathbf{k}''$  respectivamente. Finalmente,  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal dirigido desde el medio  $\mu$ ,  $\epsilon$  al medio  $\mu'$ ,  $\epsilon'$ . Consideremos que la onda plana incidente está polarizada linealmente con vector de polarización  $E_0$ . De acuerdo a esto, las ondas incidentes, refractada y reflejada son:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \omega t)} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k},$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{z} - \omega t)} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'} \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'}{k'},$$

y

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{z} - \omega t)} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B}'' = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''}{k},$$

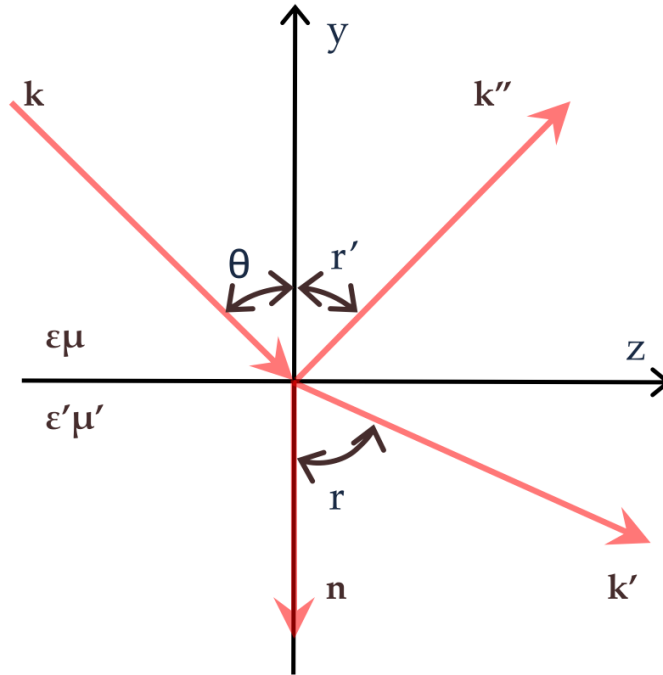


Figura 2.1: Onda incidente  $\mathbf{k}$  sobre una interfase plana entre dos medios distintos, dando lugar a una onda reflejada  $\mathbf{k}''$  y una onda refractada  $\mathbf{k}'$ .

respectivamente.

Los números de onda tienen las magnitudes:

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| = k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.5)$$

$$|\mathbf{k}'| = k' = \omega \sqrt{\mu'\epsilon'}$$

La existencia de las condiciones de frontera en  $y = 0$ , las cuales deben satisfacerse en todos los puntos sobre el plano en todos los tiempos, implica que la variación espacial y temporal de todos los campos debe ser la misma en  $y = 0$ . Consecuentemente, se deben tener los factores de fase todos iguales en  $y = 0$ :

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z})_{y=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{z})_{y=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{z})_{y=0} \quad (2.6)$$

independientemente de la naturaleza de las condiciones de frontera. Las ecuaciones 2.6 contienen los aspectos cinemáticos de la reflexión y la refracción. Se puede ver inmediatamente que todos los tres vectores de onda deben estar en un plano. De esta



manera, con la notación de la Fig 2.1:

$$k \operatorname{sen} \theta = k' \operatorname{sen} r = k'' \operatorname{sen} r' \quad (2.7)$$

Cuando  $k'' = k$ , se encuentra que  $\theta = r'$ ; es decir el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Esto se conoce como la ley de Snell

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu' \epsilon'}{\mu \epsilon}} = \frac{n'}{n} \quad (2.8)$$

Las propiedades dinámicas están contenidas en las condiciones de frontera, es decir las componentes normales de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  son continuas; componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son continuas. En términos de los campos (2.2)-(2.4) estas condiciones de frontera en  $y = 0$  son:

$$[\epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \epsilon' \mathbf{E}_0'] \bullet \mathbf{n} = 0$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'] \bullet = 0$$

(2.9)

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \times \mathbf{n} = 0$$

$$\left[ \frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \right] \times \mathbf{n} = 0.$$

Cuando se aplican estas condiciones de frontera, es conveniente considerar dos situaciones separadas: una en la que la onda plana incidente está linealmente polarizada con su vector de polarización perpendicular al plano de incidencia (plano definido por  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{n}$ ), y la otra cuando el vector de polarización es paralelo al plano de incidencia. El caso general de polarización elíptica arbitraria se puede obtener con las combinaciones lineales apropiadas de los dos resultados siguiendo a [29].

Primero se considera el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia, como se muestra en la Fig. 2.2. Todos los campos eléctricos se muestran dirigidos fuera de la página del observador. Las orientaciones de los vectores  $\mathbf{B}$  se escogen para darle un flujo positivo de energía en la dirección de los vectores de onda. Ya que todos los campos eléctricos son paralelos a la superficie, la primera condición de frontera en (2.9) no lleva a nada. La tercera y cuarta ecuación en (2.9) dan:

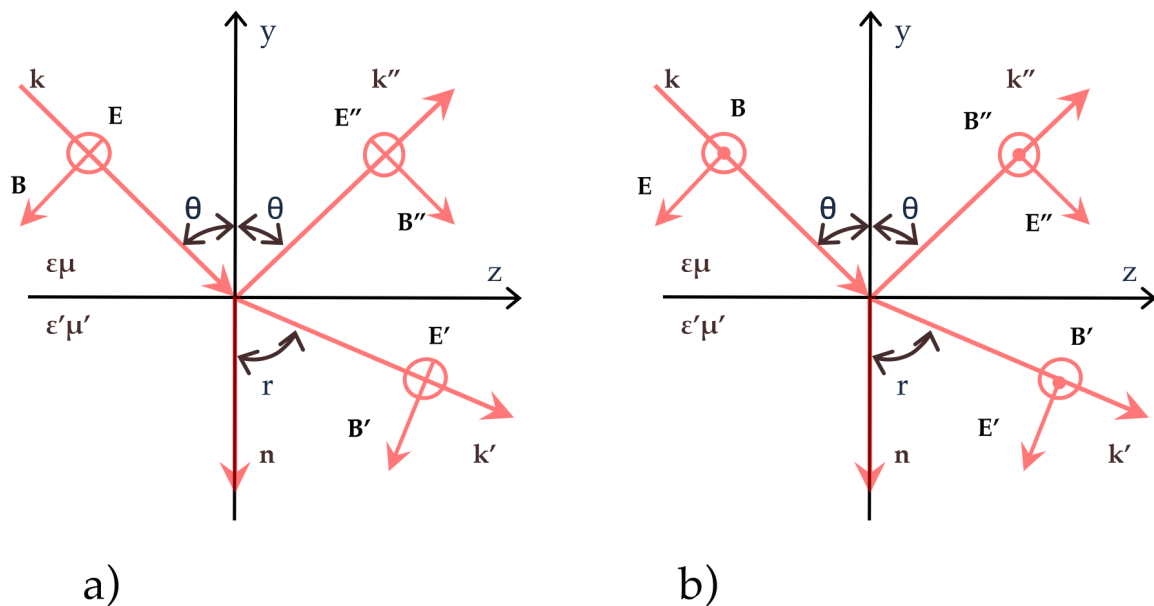


Figura 2.2: a) Reflexión y refracción con polarización a) perpendicular y b) paralela al plano de incidencia.

$$E_0 + E_0'' - E_0' = 0$$

(2.10)

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0 - E_0'')\cos\theta - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0'\cos r = 0$$

mientras que la segunda, usando la ley de Snell duplica la tercera. Las amplitudes relativas de las ondas refractada y reflejada se pueden encontrar de (2.10). Estas son:

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos\theta}{n\cos\theta + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}$$

(2.11)

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos\theta - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}}$$

Para  $\mathbf{E}$  perpendicular al plano de incidencia.

La raíz cuadrada en estas expresiones es  $n' \cos r$ , pero se usa la ley de Snell para expresarlo en términos del ángulo de incidencia. Para frecuencias ópticas, es común permitirse poner  $\mu/\mu' = 1$ . Las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) abajo, son mayormente usadas en el contexto óptico con  $n$  y  $n'$  reales, pero también son válidas para constantes dieléctricas complejas como es el caso de materiales conductores.

Si el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, como se muestra en la Fig. 2.2b), las condiciones de frontera involucradas son  $\mathbf{D}$  normal,  $\mathbf{E}$  tangencial y  $\mathbf{H}$  tangencial (las ecuaciones primera, tercera, y cuarta en (2.9)). El  $\mathbf{E}$  tangencial y el  $\mathbf{H}$  continuo demandan que:

$$\begin{aligned} \cos\theta(E_0 - E_0'') - \cos r E_0' &= 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0 + E_0'') - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0' &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

y  $\mathbf{D}$  normal continuo, más la ley de Snell, meramente duplica la segunda de estas ecuaciones. Las amplitudes de los campos reflejados y refractados son entonces:

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2nn' \cos\theta}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2 \cos\theta + n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}} \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2 \cos\theta - n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2 \cos\theta + n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

con  $\mathbf{E}$  paralelo al plano de incidencia. Para incidencia normal ( $\theta = 0$ ), tanto (2.11) como (2.13) se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} + 1} \rightarrow \frac{2n}{n' + n} \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} + 1} \rightarrow \frac{n' - n}{n' + n}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Los resultados de la derecha se obtienen cuando  $\mu' = \mu$ . Para la onda reflejada, la convención del signo es para la polarización paralela al plano de incidencia. Esto quiere decir que si  $n' > n$ , hay una inversión de fase para la onda reflejada.

Dos aspectos de las relaciones dinámicas en la reflexión y la refracción son importantes mencionar. El primero es que la polarización paralela al plano de incidencia tiene un ángulo de incidencia conocido como el ángulo de Brewster, para el cual no hay onda reflejada. Por simplicidad, cuando  $\mu' = \mu$  se encuentra que la amplitud de la onda reflejada en (2.13) se desvanece cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster:

$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \quad (2.15)$$

Una relación común es  $n'/n = 1,5$ ,  $\theta = 56$ . Si una onda plana de polarización mixta está incidiendo en una interfaz plana al ángulo de Brewster, la radiación reflejada está completamente polarizada en un plano con vector de polarización perpendicular al plano de incidencia. Este comportamiento puede ser usado para producir haces de luz polarizados en un plano, pero no es tan eficiente como otros medios empleando propiedades anisotrópicas de algún medio dieléctrico. Inclusive si la onda no polarizada es reflejada a ángulos mayores al de Brewster, hay una tendencia para que la onda reflejada sea predominantemente polarizada perpendicular al plano de incidencia. El éxito de los lentes oscuros es que transmiten selectivamente solo en una dirección de polarización. El segundo fenómeno se conoce como la reflexión total interna. La palabra interna implica que las ondas incidente y reflejada están en un medio de índice de refracción mayor que la onda refractada ( $n > n'$ ). La ley de Snell en (2.8) muestra que si  $n > n'$ , entonces  $r > \theta$ . Consecuentemente,  $r = \pi/2$  cuando  $\theta = \theta_0$ , donde:

$$\theta_0 = \sin^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \quad (2.16)$$

Para las ondas que inciden a  $\theta = \theta_0$ , la onda refractada se propaga paralela a la superficie. No puede haber flujo de energía a través de la superficie. Por lo tanto, a este ángulo de incidencia debe de haber reflexión total. Si  $\theta > \theta_0$ ,  $\sin r > 1$ . Esto quiere decir que  $r$  es un ángulo complejo con un coseno puramente imaginario.

$$\cos r = i\sqrt{\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}\right)^2 - 1} \quad (2.17)$$

El significado de estas cantidades complejas se vuelve claro cuando se considera el factor de propagación para la onda refractada:

$$e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{z}} = e^{ik'(z \operatorname{sen} r + y \operatorname{cos} r)} = e^{ik'(\operatorname{sen} \theta / \operatorname{sen} \theta_0)z} e^{-k'[(\operatorname{sen} \theta / \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 1]^{1/2}y} \quad (2.18)$$

Esto muestra que para  $\theta > \theta_0$  la onda refractada se propaga solo paralela a la superficie y es atenuada exponencialmente a lo largo de la interfaz. La atenuación se da dentro de muy pocas longitudes de onda de la frontera, excepto para  $\theta \simeq \theta_0$ . A pesar de que hay campos en el otro lado de la superficie, no hay flujo de energía a través de la superficie. Por lo tanto, la reflexión total interna ocurre para  $\theta \geq \theta_0$ . La falta de flujo de energía puede ser verificada calculando la componente normal promediada en el tiempo del vector de Poynting en el interior de la superficie:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'^*)] \quad (2.19)$$

con  $\mathbf{H}' = (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}') / \mu' \omega$  se encuentra que:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\mu'\omega} \operatorname{Re}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}') |\mathbf{E}'_0|^2] \quad (2.20)$$

pero  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}' = k' \operatorname{cos} r$  es puramente imaginario, así que  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = 0$ . El valor puramente imaginario (2.17) de  $\operatorname{cos} r$  veces  $n'$  es la cantidad apropiada para reemplazar la raíz cuadrada que aparece en la fórmula de Fresnel en (2.13) y (2.14). Un análisis más profundo muestra que las relaciones  $E''_0/E_0$  son ahora de módulo unitario, como se espera físicamente en la reflexión total interna. Sin embargo, la onda reflejada sufre un cambio de fase que es diferente de las otras dos clases de incidencia y depende del ángulo de incidencia, como también de  $n/n'$ . Estos cambios en la fase pueden ser usados para convertir un tipo de polarización en otra. Los rombos de Fresnel son instrumentos donde luz polarizada linealmente con igual amplitud en el plano de incidencia y perpendicular a este es convertida por dos reflexiones internas sucesivas, cada una involucrando un cambio de fase relativo de  $45^\circ$  en luz polarizada circularmente [19]. La onda evanescente que penetra en la región  $y < 0$  tiene un decaimiento exponencial en la dirección perpendicular,  $e^{-y/\delta}$ , donde  $\delta^{-1} = k\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta_0}$ . La penetración de la onda dentro de la región prohibida es el origen físico del efecto Goos-Hänchen: Si un haz de radiación que tiene una extensión transversa finita experimenta la reflexión total interna, el haz reflejado que emerge se desplaza lateralmente con respecto a la predicción de un rayo geométrico reflejado en la frontera 2.3.

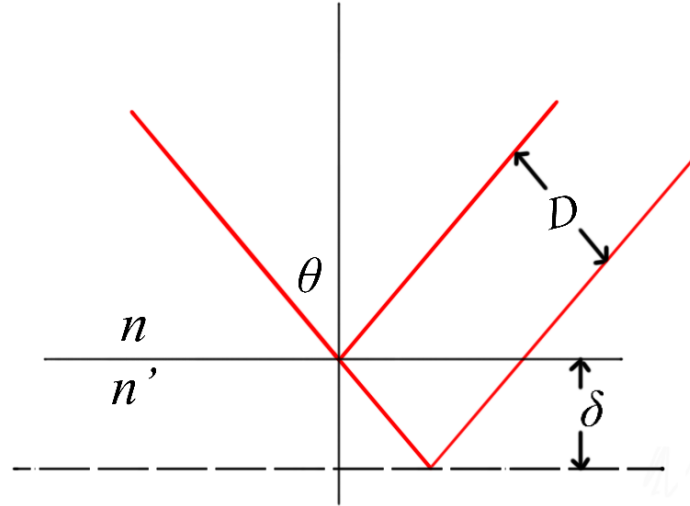


Figura 2.3: Efecto Goos-Hänchen: desplazamiento lateral del haz reflejado en la reflexión total interna.

## 2.2. Polarización y representación matricial

La polarización es una propiedad fundamental de las ondas electromagnéticas que describe la orientación y la fase de las oscilaciones del campo eléctrico. En esta sección, discutiremos los conceptos básicos de la polarización utilizando la representación de la matriz de Jones, la esfera de Poincaré y la matriz de correlación.

### 2.2.1. Representación de la matriz de Jones

La representación de la matriz de Jones es una herramienta poderosa para describir el estado de polarización de una onda electromagnética y el efecto de los elementos ópticos sobre la polarización. En esta representación, el campo eléctrico de una onda plana monocromática que se propaga a lo largo del eje  $z$  se puede escribir como un vector complejo de  $2 \times 1$ , conocido como el vector de Jones:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x e^{i\delta_x} \\ a_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

donde  $a_x$  y  $a_y$  son las amplitudes, y  $\delta_x$  y  $\delta_y$  son las fases de las componentes  $x$  e  $y$  del campo eléctrico, respectivamente. El vector de Jones puede representar varios estados de polarización:

- Polarización lineal:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (polarizado en x) o } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (polarizado en y)}$$

- Polarización circular:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \text{ (a derechas o a izquierdas)}$$

- Polarización elíptica:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta} \end{pmatrix} \text{ (caso general)}$$

Los elementos ópticos, como polarizadores, retardadores y rotadores, pueden representarse mediante matrices complejas de  $2 \times 2$  llamadas matrices de Jones. El efecto de un elemento óptico sobre el estado de polarización de una onda se puede calcular multiplicando el vector de Jones por la matriz de Jones correspondiente.

### 2.2.2. Esfera de Poincaré

La esfera de Poincaré es una representación geométrica de los estados de polarización de las ondas electromagnéticas<sup>3.4</sup>. Cada punto en la superficie de la esfera corresponde a un estado único de polarización, caracterizado por los parámetros de Stokes ( $S_0, S_1, S_2, S_3$ ). Los parámetros de Stokes están relacionados con las componentes del vector de Jones de la siguiente manera:

$$S_0 = |E_x|^2 + |E_y|^2$$

$$S_1 = |E_x|^2 - |E_y|^2$$

$$S_2 = 2\Re(E_x E_y^*)$$

$$S_3 = 2\Im(E_x E_y^*)$$

donde  $\Re$  y  $\Im$  denotan las partes real e imaginaria, respectivamente, y  $*$  representa el complejo conjugado.

Los parámetros de Stokes tienen un significado físico importante:

- $S_0$  representa la intensidad total de la onda electromagnética. Es siempre positivo y es igual a la suma de las intensidades de las componentes x e y del campo eléctrico.

- $S_1$  describe la tendencia de la polarización a ser lineal horizontal ( $S_1 > 0$ ) o vertical ( $S_1 < 0$ ). Si  $S_1 = 0$ , la polarización no tiene una componente lineal horizontal o vertical dominante.
- $S_2$  indica la tendencia de la polarización a ser lineal a  $+45^\circ$  ( $S_2 > 0$ ) o  $-45^\circ$  ( $S_2 < 0$ ). Si  $S_2 = 0$ , la polarización no tiene una componente lineal a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$  dominante.
- $S_3$  representa la tendencia de la polarización a ser circular a derechas ( $S_3 > 0$ ) o a izquierdas ( $S_3 < 0$ ). Si  $S_3 = 0$ , la polarización no tiene una componente circular dominante.

El grado de polarización (DOP) de una onda electromagnética se puede calcular a partir de los parámetros de Stokes:

$$DOP = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

Un DOP de 1 indica una polarización completamente polarizada, mientras que un DOP de 0 corresponde a una onda no polarizada. Valores intermedios de DOP representan ondas parcialmente polarizadas.

### 2.2.3. Matriz de correlación

La matriz de correlación, también conocida como matriz de coherencia o matriz de polarización, es una matriz hermítica de  $2 \times 2$  que proporciona una descripción completa del estado de polarización y del grado de polarización de una onda electromagnética[19]. La matriz de correlación se define como el producto externo del vector de Jones con su transpuesto conjugado:

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  denota el promedio temporal y  $^\dagger$  representa la transpuesta conjugada. La matriz de correlación tiene las siguientes propiedades:

- La traza de la matriz (suma de los elementos diagonales) representa la intensidad total de la onda.
- El determinante de la matriz está relacionado con el grado de polarización (DOP) de la onda:  $DOP = \sqrt{1 - \frac{4 \det(\mathbf{C})}{(\text{tr}(\mathbf{C}))^2}}$ .



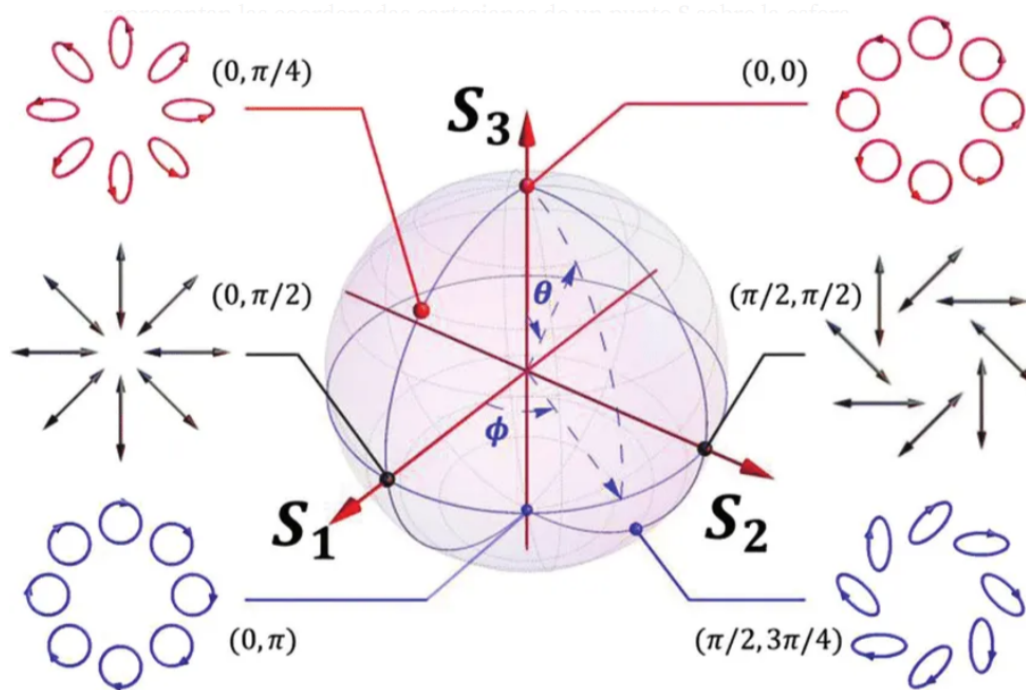


Figura 2.4: Representación de la esfera de Poincaré mostrando diferentes estados de polarización [30].

- Los autovalores y autovectores de la matriz proporcionan información sobre los estados principales de polarización y sus intensidades relativas.

La matriz de correlación es particularmente útil para estudiar ondas parcialmente polarizadas y no polarizadas, así como la evolución de los estados de polarización en sistemas ópticos complejos. Esta representación es particularmente útil en aplicaciones de metrología de alta precisión. Por ejemplo, en la fabricación de semiconductores, se utilizan interferómetros de ondas evanescentes basados en el análisis de la matriz de correlación para medir la planitud de obleas de silicio con una precisión de unos pocos nanómetros [31]. Esta capacidad de medición ultra-precisa es crucial para la producción de chips de computadora de alta densidad, impulsando la continua miniaturización y mejora del rendimiento en la industria de los semiconductores.

---

## Capítulo 3

# FUNCIÓN DE RELACIÓN DE DISPERSIÓN PARA ONDAS EVANESCENTES Y SUS APLICACIONES

Las ondas evanescentes (OE) han ganado notable atención en el campo de la óptica debido a sus propiedades únicas y potenciales aplicaciones en varios campos como óptica de campo cercano, plasmónica y nanofotónica [32, 33]. Estas ondas se caracterizan por su decaimiento exponencial y confinamiento entre dos medios, ofreciendo oportunidades para manipular la luz a escalas de longitudes de onda. Para entender del todo y explorar el comportamiento de las OE, es necesario encontrar y analizar su función de relación de dispersión. Recientemente, en este trabajo [34] se presentó un estudio de la determinación de la función de relación de dispersión para OE y su aplicación en campos ópticos superficiales. En este capítulo se examina a profundidad el trabajo mencionado, el cual es la base fundamental de este manuscrito.

### 3.0.1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera

El comportamiento de los campos electromagnéticos está definido por las ecuaciones de Maxwell, las cuales dan una descripción fundamental de las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos con la materia. En la ausencia de cargas libres y corrientes, las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial están dadas por [35]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\mathbf{B}$  es la densidad de flujo magnético,  $\mathbf{D}$  es el desplazamiento de campo eléctrico, y  $\mathbf{H}$  es la intensidad del campo magnético. En la interfaz entre dos medios con permitividades diferentes, las condiciones de frontera para los campos electromagnéticos deben satisfacerse para asegurar la continuidad y la conservación de la energía. Las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético deben ser continuas a través de la interfaz, mientras que las componentes normales del desplazamiento de campo eléctrico y la densidad de flujo magnético deben exhibir discontinuidades [19]. Estas condiciones de frontera determinan el comportamiento de las OE en la interfaz.

### 3.0.2. Soluciones de onda plana y ondas evanescentes

En un medio homogéneo, las soluciones de onda plana a las ecuaciones de Maxwell toman la forma [36]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{3.2}$$

donde  $\mathbf{E}_0$  es la amplitud compleja,  $\mathbf{k}$  es el vector de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\mathbf{r}$  es el vector de posición. Cuando el vector de onda tiene una componente real perpendicular a la interfaz y una componente imaginaria paralela a la interfaz, la onda plana se convierte en una OE. Las OE, como se ha mencionado, se caracterizan por un decaimiento exponencial en la dirección perpendicular a la interfaz, mientras preservan su naturaleza propagante a lo largo de la interfaz [37].

### 3.0.3. Polarización y componentes no homogéneas

Las OE presentan propiedades únicas de polarización que las distinguen de las ondas propagantes. A diferencia de estas ondas, las OE poseen una componente no homogénea del campo eléctrico, la cual es paralela a la dirección de propagación [38]. Esta componente no homogénea da lugar a interesantes efectos de polarización y juega un importante papel en la interacción de las OE con la materia. La presencia de la componente no homogénea también contribuye a una respuesta dipolar en la interfaz que será discutida a detalle en las siguientes secciones.

## 3.1. Derivación de la función de relación de dispersión para OE

### 3.1.1. Respuesta dipolar y dipolo de acoplamiento inducido

La estructura del campo electromagnético en una interfaz plana se puede describir como una respuesta a un estímulo generado por una onda plana con polarización P con ángulo de incidencia cercano al ángulo crítico. Esta respuesta produce una OE con estructura no homogénea que polariza el medio y asimismo induce dos dipolos mutuamente perpendiculares. Desde un punto de vista geométrico, la interfaz puede ser modelada como un conjunto de objetos conformados por regiones esféricas sólidas con diferentes permitividades en diferentes proporciones, como se muestra en la figura 3.1. Esta interpretación puede usarse como una explicación a la discontinuidad en la componente normal del vector de desplazamiento de campo eléctrico, el cual genera una carga de polarización superficial, es decir  $D_{x1} - D_{x2} = \sigma_s$ , donde  $\sigma_s$  es la densidad superficial de carga de polarización. Estas cargas de polarización interactúan con la componente no-homogénea del campo eléctrico representado por  $E_{z1} = E_{z2}$  y genera corrientes de polarización que justifican el carácter evanescente del campo óptico. Por lo tanto, se puede esperar que existan dos dipolos sobre la superficie, como está representado en la figura a)3.2. Cada dipolo es modelado como un sistema masa-resorte, el cual en la dirección de la coordenada z interactúa con cada uno a través de un dipolo de acoplamiento con un parámetro de restitución  $\kappa_a$ , como se muestra en la figura b)3.2 La principal consecuencia de esto es que el dipolo de acoplamiento modifica la frecuencia natural de oscilación para el dipolo-z. El momento dipolar a lo largo de la coordenada de propagación tiene un valor variable que puede ser controlado con la fuerza del campo eléctrico incidente. Esto permite introducir efectos no lineales. Se puede entender

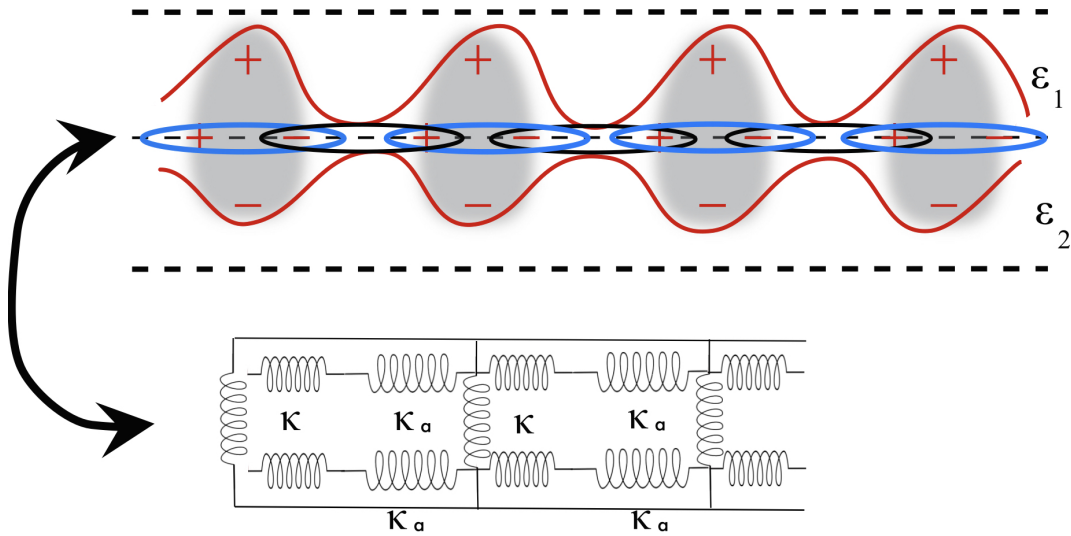


Figura 3.1: Modelo geométrico de la interfaz con regiones esféricas sólidas de diferentes permitividades.

fácilmente esto cuando existe una superposición entre los dipolos-z.

El acoplamiento dipolar puede ser representado matemáticamente incorporándolo en la función Lagrangiana, donde cada dipolo es modelado como un sistema masa-resorte. Considerando las condiciones de frontera del campo eléctrico y la respuesta dipolar de la componente no-homogénea, se puede obtener la función de relación de dispersión para las OE. La interfaz se considera como una colección de dipolos, cada uno consistiendo de dos cargas oscilatorias. Los dipolos se orientan perpendicular a la interfaz y su movimiento es descrito por el desplazamiento de  $z_1$  y  $z_2$ . La formulación Lagrangiana es empleada para obtener las ecuaciones de movimiento para los dipolos [39].

$$\mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) - \frac{1}{2}(\kappa z_1^2 + \kappa z_2^2 + \kappa_a(z_1 - z_2)^2) \quad (3.3)$$

donde  $m$  es la masa de las cargas oscilatorias,  $\kappa$  es la constante del resorte y  $\kappa_a$  es la constante de acoplamiento entre los dipolos. Las ecuaciones de movimiento pueden ser derivadas de la función Lagrangiana usando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

de esta manera

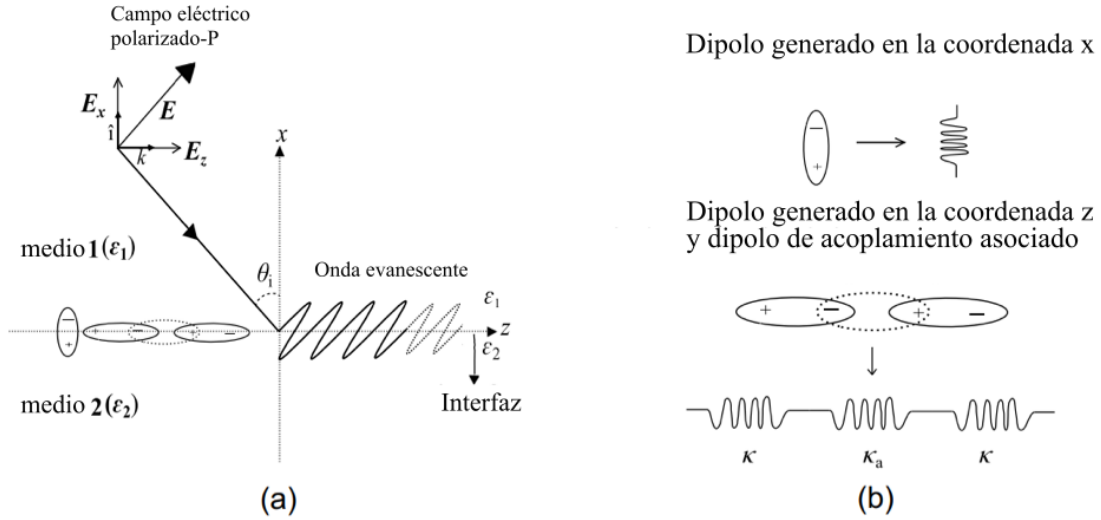


Figura 3.2: (a) Representación de los dipolos en la superficie. (b) Modelo masa-resorte de los dipolos acoplados.

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 + \omega_a^2 (z_1 - z_2) = 0 \quad (3.5)$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 - \omega_a^2 (z_1 - z_2) = 0 \quad (3.6)$$

donde  $\omega_0^2 = \kappa/m$  es la frecuencia natural de oscilación de los dipolos y  $\omega_a^2 = \kappa_a/m$  es la frecuencia de acoplamiento.

Para resolver las frecuencias fundamentales del sistema de dipolos acoplados, se asumen las conocidas soluciones de la forma  $z_1 = A_1 e^{i\omega t}$  y  $z_2 = A_2 e^{i\omega t}$ . Sustituyendo estas soluciones en las ecuaciones de movimiento y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones se encuentra que:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_a^2} \quad (3.7)$$

El acoplamiento entre los dipolos da lugar a una modificación de la frecuencia natural de oscilación a lo largo de la dirección  $z$ . Esto tiene importantes implicaciones para el tensor de permitividad y el comportamiento de las ondas evanescentes. Debido a que las ondas no homogéneas tienen dos componentes para el campo eléctrico: una transversal a la coordenada de propagación y la otra paralela a esta. La componente transversal genera el índice de refracción usual; sin embargo, la componente no homogénea polariza el medio y modifica el índice de refracción. Es por ello que esta componente debe ser considerada en el cálculo del índice de refracción.

La descomposición de una onda plana linealmente polarizada en la configuración-P induce efectos de polarización superficial modificando el tensor  $\hat{\epsilon}$  que depende del ángulo incidente  $\theta_i$ . Cuando la incidencia ocurre cerca al ángulo crítico, se puede describir la respuesta de la polarización usando las ecuaciones de movimiento anteriores incluyendo los dipolos en la coordenada  $x$  y una fuerza externa asociada al campo incidente, como:

$$\ddot{x} + \tau\dot{x} + \omega_{0x}^2 x = \frac{q}{m} A \cos \theta_i \cos \omega t \quad (3.8)$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_{0z}^2 z = \frac{q}{m} A \sin \theta_i \cos \omega t \quad (3.9)$$

$\omega_{0x}$  y  $\omega_{0z}$  son las frecuencias fundamentales,  $\omega$  es la frecuencia del haz incidente,  $\tau$  y  $\gamma$  son los términos de decaimiento y se pueden obtener de las condiciones de frontera del campo eléctrico. Para encontrar las frecuencias fundamentales  $\omega_{0x(1,2)}$  y  $\omega_{0z(1,2)}$  se usa un análisis extremal siguiendo las ideas de [19] y el resultado encontrado en (3.7). Las frecuencias fundamentales satisfacen entonces:

$$\omega_{0x(1,2)} = \omega_{0(1,2)}, \quad \omega_{0z(1,2)} = \sqrt{\omega_{0(1,2)}^2 \pm 2\omega_{a(1,2)}^2} \quad (3.10)$$

donde  $\omega_{0(1,2)} = \kappa/m$  y  $\omega_{a(1,2)} = \kappa_a/m$  representa la frecuencia modal asociada con el dipolo de acoplamiento. Para resolver las Ecs. (3.8) y (3.9) se usa el método de los coeficientes indeterminados. Asumamos soluciones de la forma:

$$x(t) = A_x \cos(\omega t + \phi_x) \quad (3.11)$$

$$z(t) = A_z \cos(\omega t + \phi_z) \quad (3.12)$$

donde  $A_x$ ,  $A_z$ ,  $\phi_x$  y  $\phi_z$  son constantes por ser determinadas. Sustituyendo las soluciones asumidas en (3.8) y (3.9) respectivamente

$$-A_x \omega^2 \cos(\omega t + \phi_x) - \tau A_x \omega \sin(\omega t + \phi_x) + \omega_{0x}^2 A_x \cos(\omega t + \phi_x) = \frac{q}{m} A \cos \theta_i \cos \omega t \quad (3.13)$$

$$-A_z \omega^2 \cos(\omega t + \phi_z) - \gamma A_z \omega \sin(\omega t + \phi_z) + \omega_{0z}^2 A_z \cos(\omega t + \phi_z) = \frac{q}{m} A \sin \theta_i \cos \omega t \quad (3.14)$$

Simplificando las ecuaciones usando identidades trigonométricas y agrupando térmi-

nos:

$$A_x[(\omega_{0x}^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \phi_x) - \tau\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_x)] = \frac{q}{m} A \cos \theta_i \cos \omega t \quad (3.15)$$

$$A_z[(\omega_{0z}^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \phi_z) - \gamma\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_z)] = \frac{q}{m} A \operatorname{sen} \theta_i \cos \omega t \quad (3.16)$$

Usando identidades trigonométricas para igualar los coeficientes de  $\cos \omega t$  y  $\operatorname{sen} \omega t$  en ambos lados de las ecuaciones:

$$A_x(\omega_{0x}^2 - \omega^2) \cos \phi_x + A_x \tau\omega \operatorname{sen} \phi_x = \frac{q}{m} A \cos \theta_i \quad (3.17)$$

$$A_x(\omega_{0x}^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \phi_x - A_x \tau\omega \cos \phi_x = 0$$

$$A_z(\omega_{0z}^2 - \omega^2) \cos \phi_z + A_z \gamma\omega \operatorname{sen} \phi_z = \frac{q}{m} A \operatorname{sen} \theta_i \quad (3.18)$$

$$A_z(\omega_{0z}^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \phi_z - A_z \gamma\omega \cos \phi_z = 0$$

resolviendo para las amplitudes  $A_x$  y  $A_z$  elevando al cuadrado y sumando las Ecs. (3.17) para  $A_x$  y (3.18) para  $A_z$ .

Para  $A_x$ :

$$A_x^2[(\omega_{0x}^2 - \omega^2)^2 + (\tau\omega)^2] = \left(\frac{q}{m} A \cos \theta_i\right)^2 \quad (3.19)$$

$$A_x = \frac{(q/m) A \cos \theta_i}{\sqrt{(\omega_{0x}^2 - \omega^2)^2 + (\tau\omega)^2}}$$

Para  $A_z$ :

$$A_z^2[(\omega_{0z}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2] = \left(\frac{q}{m} A \operatorname{sen} \theta_i\right)^2 \quad (3.20)$$

$$A_z = \frac{(q/m) A \operatorname{sen} \theta_i}{\sqrt{(\omega_{0z}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$



Ahora se expresan las permitividades en términos de las amplitudes  $A_x$  y  $A_z$ . El vector de desplazamiento eléctrico esta dado por:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el vector de polarización, y puede expresarse como:

$$\mathbf{P} = Nq\mathbf{r} \quad (3.22)$$

con  $\mathbf{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$  siendo el vector de desplazamiento de los dipolos. Sustituyendo las soluciones para  $x(t)$  y  $z(t)$  en el vector de polarización y después en el vector de desplazamiento eléctrico, se obtiene:

$$\frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{NqA_x}{\epsilon_0 A \cos \theta_i} = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m(\omega_{0x}^2 - \omega^2 + i\omega/\tau)}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\epsilon_{z1}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{NqA_z}{\epsilon_0 A \sin \theta_i} = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m(\omega_{0z}^2 - \omega^2 + i\omega/\gamma)}$$

$N$  es el número de densidad de dipolos,  $q$  es la carga de oscilación de las partículas,  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre y  $\tau$  es la constante de tiempo de amortiguación. Puede observarse que el índice de refracción en la interfaz tiene un valor modificable. Esto se debe a que la frecuencia  $\omega_{0z}$  depende de la fuerza del campo eléctrico en la componente  $z$  y el cual puede modificar el parámetro de acoplamiento  $\omega_a$ . Esta última permite una representación geométrica de los efectos no lineales [40, 41], en los cuales si la magnitud del campo incrementa, el momento dipolar aumenta igualmente, cuando se alcanza un valor crítico describe el solapamiento de los momentos dipolares. Los efectos lineales ocurren cuando los dipolos de acoplamiento apuntan en la dirección opuesta del dipolo de polarización y los no-lineales cuando apuntan en la misma dirección. Estos casos se pueden implementar considerando el signo en la Ec (3.10). En el caso lineal la estructura de las OE tienen una representación vectorial no homogénea, dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (a_1\hat{i} + b_1\hat{k}) \exp[i(\alpha_1x + \beta_1z)] \\ \mathbf{E}_2 &= (a_2\hat{i} + b_2\hat{k}) \exp[i(\alpha_2x + \beta_2z)] \end{aligned}$$

los subíndices hacen referencia a los medios 1,2 y  $\hat{i}$ ,  $\hat{k}$  son los vectores unitarios a lo

largo de  $x, z$  respectivamente. La estructura de los términos  $(a, b, \alpha, \beta)$  se obtiene de las condiciones de frontera impuestas por las Ecs. de Maxwell. Si la onda es generada por una onda plana incidente de amplitud  $A$  que se propaga cerca del ángulo crítico  $\theta_c$ , su amplitud satisface  $a = A \sin \theta_c$ ,  $b = A \cos \theta_c$ , con esto la expresión para la OE toma la forma:

$$\mathbf{E}_1 = A \left( \frac{1}{\epsilon_1} \frac{n_2 \hat{i}}{n_1} + \sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2} \hat{k} \right) \exp i(\alpha_1 x + \beta z) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{E}_2 = A \left( \frac{1}{\epsilon_2} \frac{n_2 \hat{i}}{n_1} + \sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2} \hat{k} \right) \exp i(\alpha_2 x + \beta z) \quad (3.25)$$

suponiendo que el medio tiene cero corrientes libres, es decir  $\nabla \cdot \mathbf{E}_{1,2} = 0$ , se obtiene

$$\alpha_1 \epsilon_2 = \alpha_2 \epsilon_1 \quad (3.26)$$

Así que para  $|\epsilon_1| > |\epsilon_2|$  implica que  $|\alpha_1| > |\alpha_2|$ . En consecuencia, el campo óptico se propaga una mayor distancia en la coordenada  $x$  en el medio 2. La propagación en los dos medios puede interpretarse como una profundidad de piel para las OE. La función de relación de dispersión se deriva substituyendo las expresiones para el campo eléctrico en la ecuación de Helmholtz, tal que:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{1,2} + k_{1,2}^2 \mathbf{E}_{1,2} = 0 \quad (3.27)$$

Expandiendo el operador Laplaciano e igualando los coeficientes se llega a:

$$k_1^2 = \alpha_1^2 + \beta^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \epsilon_1 \quad (3.28)$$

$$k_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \epsilon_2 \quad (3.29)$$

resolviendo para  $\beta$  se encuentra la función de relación de dispersión para las OE

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (3.30)$$

donde  $\epsilon_{1,2}$  son las permitividades relativas. Como podría esperarse, esta expresión tiene la misma estructura que la relación de dispersión de los modos plasmónicos su-

perficiales [42], con la diferencia de que en los plasmones superficiales la permitividad para los metales es compleja, siendo su parte real negativa y su valor absoluto debe ser mayor a la permitividad para el dieléctrico. Esta es una condición necesaria para que la expresión dentro de la raíz sea positiva. Gracias a esta similaridad es posible el acoplamiento directo de las OE con los campos plasmónicos superficiales, abriendo nuevas posibilidades para la manipulación y el control de los campos ópticos superficiales.

## 3.2. Interferencia entre ondas evanescentes y control de polarización

### 3.2.1. Superposición entre dos ondas evanescentes

En esta sección se investigan los efectos de interferencia que surgen de la superposición de dos OE. Considerando una rotación a lo largo del eje x se demuestra que el patrón de interferencia resultante presenta capacidades en el control de la polarización. Implementando lo anterior en las expresiones para el campo eléctrico de las OE, las Ecs. (3.24) y (3.25) toman la forma:

$$\mathbf{E} = (a\hat{i} + b \sin \theta \hat{j} + b \cos \theta \hat{k}) \exp[i(\alpha x + \beta(z \cos \theta + y \sin \theta))]. \quad (3.31)$$

Debido a la simetría de la Ec. (3.31) en ambos medios, se han omitido los subíndices. En consecuencia, la expresión resultante para la suma de las dos OE está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T = & (a\hat{i} + b \sin \theta \hat{j} + b \cos \theta \hat{k}) \exp i(\alpha x + \beta \sin \theta y + \beta \cos \theta z) \\ & + (a\hat{i} - b \sin \theta \hat{j} + b \cos \theta \hat{k}) \exp i(\alpha x - \beta \sin \theta y + \beta \cos \theta z) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$a$  y  $b$  son las amplitudes de las componentes homogéneas y no-homogéneas respectivamente.

Las componentes del campo evanescente interferido se encuentran como:

$$E_x = 2a \exp i(\alpha x + \beta z \cos \theta) \cos(\beta y \sin \theta) \quad (3.33)$$

$$E_y = 2ib \sin \theta \exp i(\alpha x + \beta z \cos \theta) \sin(\beta y \sin \theta) \quad (3.34)$$

$$E_z = 2b \cos \theta \exp i(\alpha x + \beta z \cos \theta) \cos(\beta y \sin \theta) \quad (3.35)$$

Estas expresiones revelan la estructura intrincada de la polarización para los campos evanescentes interferidos, los cuales pueden ser ajustados variando el ángulo relativo  $\theta$  entre las ondas superpuestas.

### 3.2.2. Estados de polarización y representación de los vectores de Jones

Con las expresiones anteriores se pueden describir las características de la polarización. Por ejemplo, estudiemos los estados de polarización en el plano  $y - z$ . De igual manera puede hacerse este análisis en otros planos. La polarización corresponde a un conjunto de estados elípticos limitados por una región envolvente definida por la geometría de las franjas de interferencia, la cual establece un estado global de polarización. Como se ha mencionado, los estados de polarización se pueden controlar fácilmente gracias a su dependencia del ángulo  $\theta$  y se pueden deducir de sus correspondientes vectores de Jones [43] dado por:

$$\mathbf{J}_{yz} = \begin{pmatrix} ib \sin \theta \sin(\beta y \sin \theta) \\ b \cos \theta \cos(\beta y \sin \theta) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Esta representación permite una descripción detallada de los estados de polarización a lo largo de la franja de interferencia. Se encuentra que la polarización evoluciona de estados lineales a elípticos con un cambio en la lateralidad de los estados elípticos dependiendo de la coordenada  $y$ . Por ejemplo, cuando  $y = 0$  corresponde a un estado lineal a lo largo de  $z$  y cuando  $y = \pi/2\beta \sin \theta$  el estado de polarización es lineal nuevamente en el eje  $y$ . En las regiones intermedias definidas por  $0 < y < \pi/2\beta \sin \theta$  los estados de polarización evolucionan siguiendo un conjunto de elipses con diferentes excentricidades y con orientación hacia la derecha. Por simetría, en la región  $-\pi/2\beta \sin \theta < y < 0$  la polarización es hacia la izquierda. Se ilustra este comportamiento en la figura 3.3. En una descripción completa de la polarización se incorporan los demás términos del campo eléctrico. Los vectores de Jones para cada plano se pueden escribir como:

$$J_{xy} = \begin{pmatrix} a \cos(\beta y \sin \theta) \\ ib \sin \theta \sin(\beta y \sin \theta) \end{pmatrix} \quad J_{xz} = \begin{pmatrix} a \cos(\beta y \sin \theta) \\ b \cos \theta \sin(\beta y \sin \theta) \end{pmatrix} \quad J_{yz} = \begin{pmatrix} ib \sin \theta \sin(\beta y \sin \theta) \\ b \cos \theta \cos(\beta y \sin \theta) \end{pmatrix}.$$

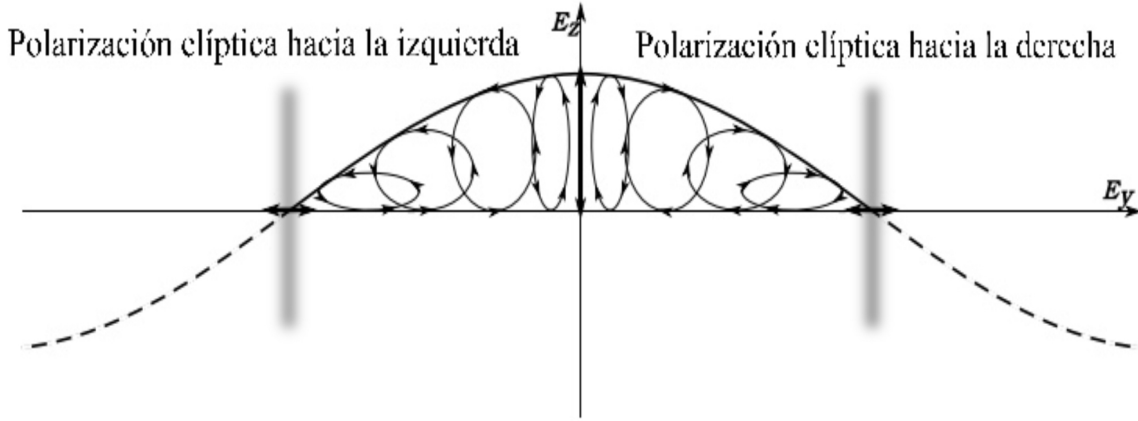


Figura 3.3: Evolución de los estados de polarización a lo largo de la franja de interferencia.

### 3.2.3. Matriz de correlación y representación de la esfera de Poincare

Para obtener más información de la dinámica de la polarización se emplea el formalismo de la matriz de correlación [19] dado por  $C = \mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger$  donde  $\mathbf{J}^\dagger$  es la transpuesta conjugada del vector. Las matrices de correlación para los correspondientes planos toman la forma:

$$C_{xy} = \begin{pmatrix} |a|^2 \cos(\vartheta y) \cos(\vartheta^* y) & -iab^* \sin \theta \cos(\vartheta y) \sin(\vartheta^* y) \\ ia^*b \sin \theta \cos(\vartheta^* y) \sin(\vartheta y) & |b|^2 \sin^2 \theta \sin(\vartheta y) \sin(\vartheta^* y) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$C_{xz} = \begin{pmatrix} |a|^2 \cos(\vartheta y) \cos(\vartheta^* y) & ab^* \cos \theta [\cos(\vartheta y) \cos(\vartheta^* y)] \\ a^*b \cos \theta [\cos(\vartheta y) \cos(\vartheta^* y)] & |b|^2 \cos^2 \theta [\cos(\vartheta y) \cos(\vartheta^* y)] \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$C_{yz} = \begin{pmatrix} |b|^2 \sin^2 \theta \sin(\vartheta y) \sin(\vartheta^* y) & ib^2 \cos \theta \sin \theta [\sin(\vartheta y) \cos(\vartheta^* y)] \\ -ib^2 \cos \theta \sin \theta [\cos(\vartheta y) \sin(\vartheta^* y)] & |b|^2 \cos^2 \theta [\cos(\vartheta y) \cos(\vartheta^* y)] \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

donde  $\vartheta_y = \beta \sin \theta y$ . Los estados de polarización pueden visualizarse en la esfera de Poincaré [38], con cada punto en la esfera representando un estado de polarización específico. La evolución de los estados de polarización a lo largo de la franja de interferencia traza una trayectoria sobre la esfera de Poincaré, dando una interpretación geométrica de la dinámica de la polarización. El radio de las esferas depende de la coordenada  $y$ . Sin embargo, sus cambios deben ser balanceados alrededor de él porque el radio está asociado con la energía del campo óptico. Gracias a que los vectores de Jones

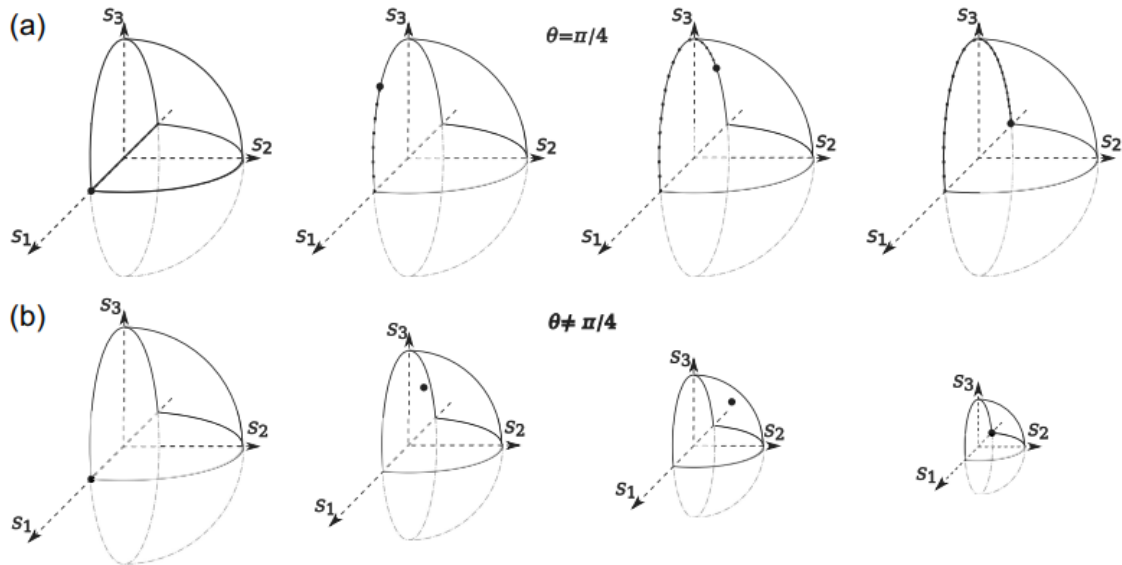


Figura 3.4: Representación de la esfera de Poincaré para diferentes ángulos de interferencia. (a)  $\theta = \pi/4$ , (b)  $\theta \neq \pi/4$ .

tienen una descomposición paramétrica en  $y$ , los estados evolucionan transversalmente a la franja de interferencia [44]. Diferentes ángulos dan como resultado casos interesantes, por ejemplo, si  $\theta = \pi/4$  el radio de la esfera de Poincaré sobre el plano  $y - z$  se convierte en constante y la evolución de los estados de polarización contendrá el estado circular. Esto significa que la polarización evoluciona sobre la esfera de Poincaré a lo largo de un círculo que contiene el polo norte, como se muestra en la figura a)3.4. Para los casos donde el ángulo relativo de interferencia es  $\theta \neq \pi/4$  se muestran en figura b)3.4.

### 3.3. Modelo del espectro angular evanescente

En la sección anterior se estudió los efectos de interferencia entre ondas evanescentes. En este apartado se describe la interacción entre OE y un objeto, lo cual genera efectos de difracción. En este modelo se propone que un conjunto de OE emergen del objeto, análogo al planteamiento de Huygens [19]. Se introduce el modelo de espectro angular [45] para las OE, en el cual un campo evanescente puede ser descrito como una superposición de ondas planas con vectores de onda complejos. De la función de relación de dispersión se puede definir la longitud de onda superficial, dada por:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \frac{2\pi}{\lambda_e} \quad (3.40)$$

donde  $\lambda_e$  es la longitud de onda superficial. La interacción de la onda evanescente con un objeto cuya función de transmitancia está dada por  $\mathbf{t}(y) = t(y)\hat{j} + g(y)\hat{k}$  genera un campo difractado cuya amplitud se puede escribir como:

$$\xi(\mathbf{r})_{1,2} = \exp(i2\pi\alpha x) \int_{-\infty}^{\infty} [T(u)_{1,2}\hat{j} + G(u)_{1,2}\hat{k}] \exp[i2\pi(uy + zv)] du \quad (3.41)$$

$T(u)$  y  $G(u)$  son las transformadas de Fourier de las funciones vectoriales de transmitancia y  $u, v$ , y  $\alpha$  son las frecuencias espaciales evanescentes. Para las OE las componentes de los vectores de onda son complejos y satisfacen la siguiente relación:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (3.42)$$

Las frecuencias espaciales se relacionan con las componentes del vector de onda como

$$\alpha = \frac{k_x}{2\pi}, \quad u = \frac{k_y}{2\pi}, \quad v = \frac{k_z}{2\pi} \quad (3.43)$$

sustituyendo estas expresiones en las relaciones del vector de onda se obtiene:

$$(2\pi\alpha)^2 + (2\pi u)^2 + (2\pi v)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (3.44)$$

simplificando la ecuación

$$\alpha^2 + u^2 + v^2 = \frac{1}{\lambda_e^2} \quad (3.45)$$

### 3.3.1. Aplicación a transmitancias periódicas

Para demostrar la relevancia del modelo de espectro angular evanescente, se aplicó este para el caso de transmitancias periódicas. Se considera una rejilla periódica ubicada perpendicular al medio de propagación. Esta aplicación es muy interesante porque demuestra la posibilidad de generar campos evanescentes con campos de auto-imágenes, similar al muy conocido efecto Talbot [46] en la óptica clásica. Los efectos de auto-imagen en campos ópticos han sido ampliamente estudiados, incluyendo su comportamiento bajo condiciones estocásticas. Cázares-Aguilar et al. [47] analizo la síntesis

de campos ópticos que siguen un proceso estocástico y cuyos valores medios estadísticos generan el efecto de auto-imagen con características de revivimientos. Este trabajo proporciona una base para entender cómo los procesos aleatorios pueden influir en la formación de patrones ópticos periódicos. La transmitancia periódica se describe por una función vectorial  $\mathbf{t}(x, y)$ , el cual se puede descomponer en dos componentes ortogonales:

$$\mathbf{t}(x, y) = t_h(y)\hat{j} + t_i(y)\hat{k} \quad (3.46)$$

donde  $t_h(y)$  y  $t_i(y)$  representan las componentes homogéneas y no homogéneas de la transmitancia, respectivamente. La transmitancia periódica se escribe explícitamente como:

$$\mathbf{t}(x, y) = e^{i2\pi\alpha x} \sum_{n,s=-\infty}^{\infty} \left[ a_n e^{\frac{2\pi yn}{d}} \hat{j} + b_s e^{\frac{i2\pi ys}{d}} \hat{k} \right] \quad (3.47)$$

$\alpha$  es la frecuencia espacial a lo largo de la coordenada  $x$ ,  $d$  es el periodo de la transmitancia y  $a_n$ ,  $b_s$  son los coeficientes de Fourier de las componentes homogéneas y no homogéneas. Se propone un diseño experimental 4.6 en el cual se ubica una rendija periódica perpendicular al medio de propagación para inducir la transmitancia periódica. La interacción de la OE con la transmitancia periódica genera un campo difractado evanescente el cual puede describirse usando el modelo del espectro angular.

El campo evanescente difractado en un punto  $\vec{X} = (x, y, z)$  esta dado por:

$$\xi(\vec{X}) = e^{i2\pi\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n,s=-\infty}^{\infty} \left[ a_n \delta\left(u - \frac{n}{d}\right) \hat{j} + b_s \delta\left(u - \frac{s}{d}\right) \hat{k} \right] e^{i2\pi(uy+zv)} du \quad (3.48)$$

$\delta$  es la función delta de Dirac,  $u$  y  $v$  son las frecuencias espaciales evanescentes a lo largo de las direcciones  $y$  y  $z$ . Usando la aproximación paraxial se asume que las OE se propagan a pequeños ángulos relativos al eje- $z$ . Esto permite aproximar la frecuencia espacial  $v$  usando una expansión en serie de Taylor:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\lambda_e^2} - \alpha^2 - u^2} \approx \frac{1}{\lambda_e} - \frac{\lambda_e}{2}(\alpha^2 + u^2) \quad (3.49)$$

sustituyendo esta aproximación dentro del termino exponencial que contiene  $v$  se tiene:



$$e^{i2\pi zv} \approx e^{i2\pi z \left( \frac{1}{\lambda_e} - \frac{\lambda_e}{2} (\alpha^2 + u^2) \right)} = e^{i2\pi \frac{z}{\lambda_e}} e^{-i\pi \lambda_e z (\alpha^2 + u^2)} \quad (3.50)$$

ahora substituyendo la aproximación paraxial en la integral:

$$\xi(\vec{X}) \approx e^{i2\pi \alpha x} e^{i2\pi \frac{z}{\lambda_e}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n,s=-\infty}^{\infty} \left[ a_n \delta \left( u - \frac{n}{d} \right) \hat{j} + b_s \delta \left( u - \frac{s}{d} \right) \hat{k} \right] e^{i2\pi u y} e^{-i\pi \lambda_e z u^2} du \quad (3.51)$$

Las funciones delta de Dirac tienen la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(u - u_0) du = f(u_0) \quad (3.52)$$

aplicando esto a la integral se obtiene:

$$\xi(\vec{X}) \approx e^{i2\pi \alpha x} e^{i2\pi \frac{z}{\lambda_e}} \sum_{n,s=-\infty}^{\infty} \left[ a_n e^{i2\pi \frac{n}{d} y} e^{-i\pi \lambda_e z \left( \frac{n}{d} \right)^2} \hat{j} + b_s e^{i2\pi \frac{s}{d} y} e^{-i\pi \lambda_e z \left( \frac{s}{d} \right)^2} \hat{k} \right] \quad (3.53)$$

simplificando la expresión

$$\xi(\vec{X}) \approx e^{ih} \sum_{n,s=-\infty}^{\infty} \left[ a_n e^{i2\pi \frac{n}{d} y} e^{-i\pi \lambda_e z \frac{n^2}{d^2}} \hat{j} + b_s e^{i2\pi \frac{s}{d} y} e^{-i\pi \lambda_e z \frac{s^2}{d^2}} \hat{k} \right] \quad (3.54)$$

En esta ecuación  $\exp(ih) = \exp[i2\pi(\alpha x + \sigma z)]$  con  $\sigma = 1/\lambda_e - \alpha^2 \lambda_e/2$ . De esta expresión puede encontrarse que el periodo al que se genera el fenómeno de auto-imagen es  $L = 2d^2/\lambda_e$ . Los resultados son consistentes puesto que en campos plasmónicos superficiales se ha reportado experimentalmente el efecto de auto-imagen [48], esto debido al carácter evanescente de los plasmones. La expresión general para la difracción considerando estructura en x es un problema muy interesante que aún queda por resolverse.

Por otra parte, pueden utilizarse técnicas de microscopía para detectar los efectos de auto-imagen como ha sido reportado [49, 50]. Finalmente, se presenta una simulación numérica del campo evanescente difractado para la visualización de la intensidad y la fase en diferentes planos de  $z$ , mostrado en la figura 3.6. Para este caso se consideró una rendija con un periodo de transmitancia  $d = 1$  y una longitud de onda superficial evanescente de  $\lambda_e = 0,1$  en unidades naturales, se realizó el estudio hasta un  $z = 50$  y debido a que los planos de auto-imagen son múltiplos enteros de  $L$  se encontraron dos planos de auto-imagen en  $z = 20,02$  y  $z = 40,04$ . Para un caso de la óptica figura 3.7, luz roja con  $\lambda_e = 700nm$  y  $d = 1400nm$  se encontraron los dos primeros planos de auto-

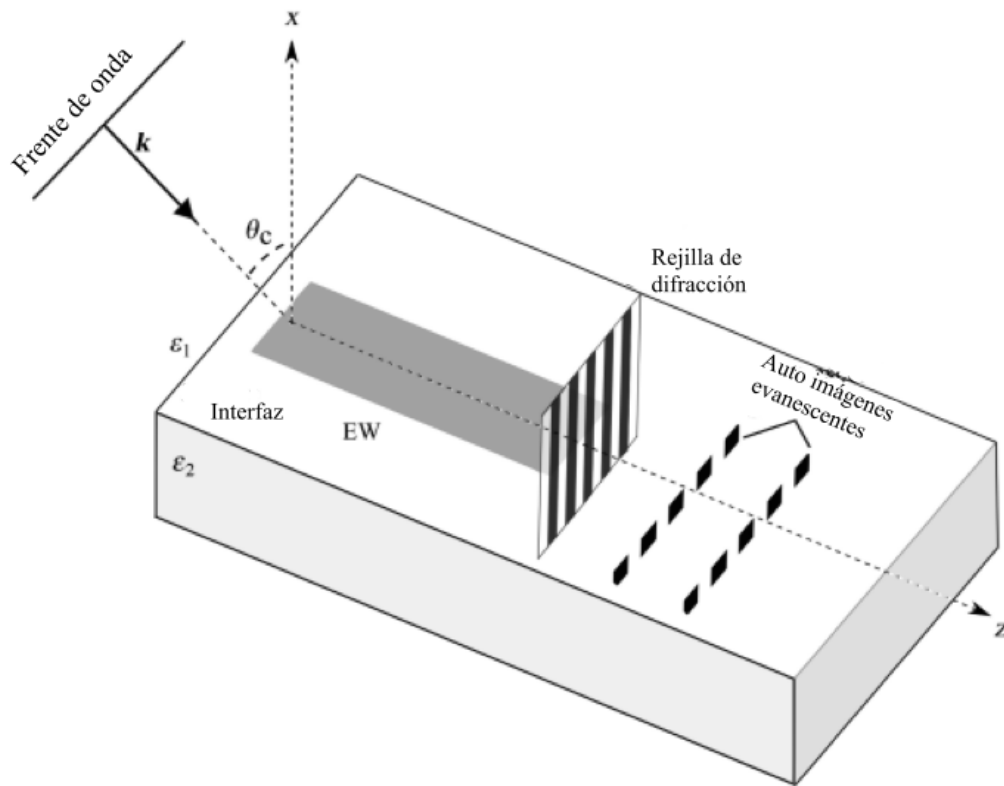


Figura 3.5: Diseño experimental propuesto para generar campos evanescentes con transmitancia periódica.

imagen en  $z = 5,5912\mu m$  y  $z = 11,1824\mu m$ . Al expresar estas unidades en unidades físicas reales de la óptica, se hace evidente que los efectos de difracción y auto-imagen ocurren en escalas muy pequeñas. Esto es consistente con el hecho de que las OE están confinadas cerca de la superficie y decaen exponencialmente a medida que se alejan de ella. Por otra parte, para observar efectos de difracción significativos, el periodo de la transmitancia debe ser del mismo orden de magnitud o mayor que la longitud de onda superficial de la OE. Esta relación es fundamental para el diseño de dispositivos ópticos que aprovechen la difracción de ondas evanescentes, como rejillas de difracción o estructuras plasmónicas.

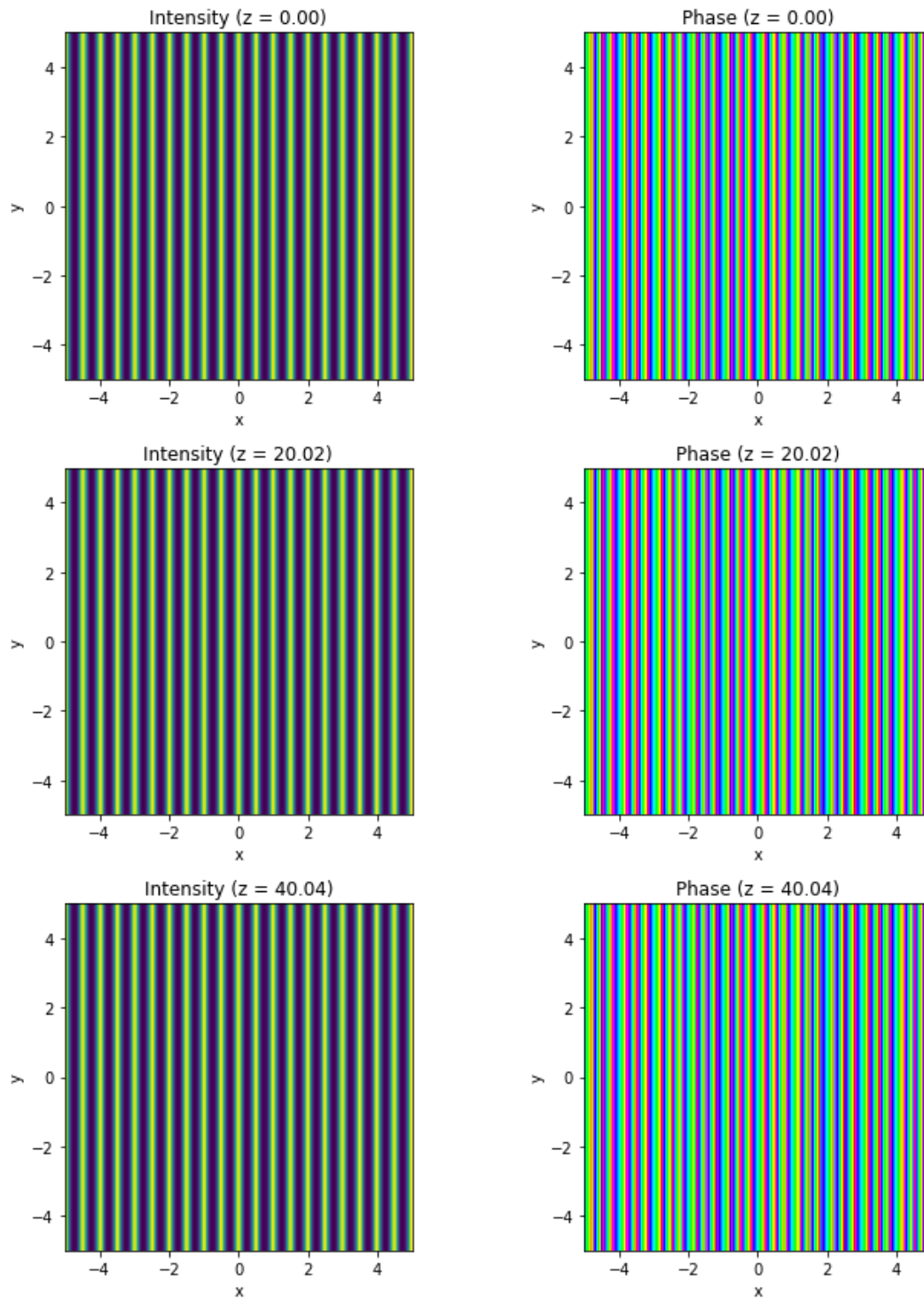


Figura 3.6: Simulación numérica del campo evanescente difractado mostrando la intensidad y fase en diferentes planos de  $z$  para  $d = 1$  y  $\lambda_e = 0,1$  en unidades naturales.

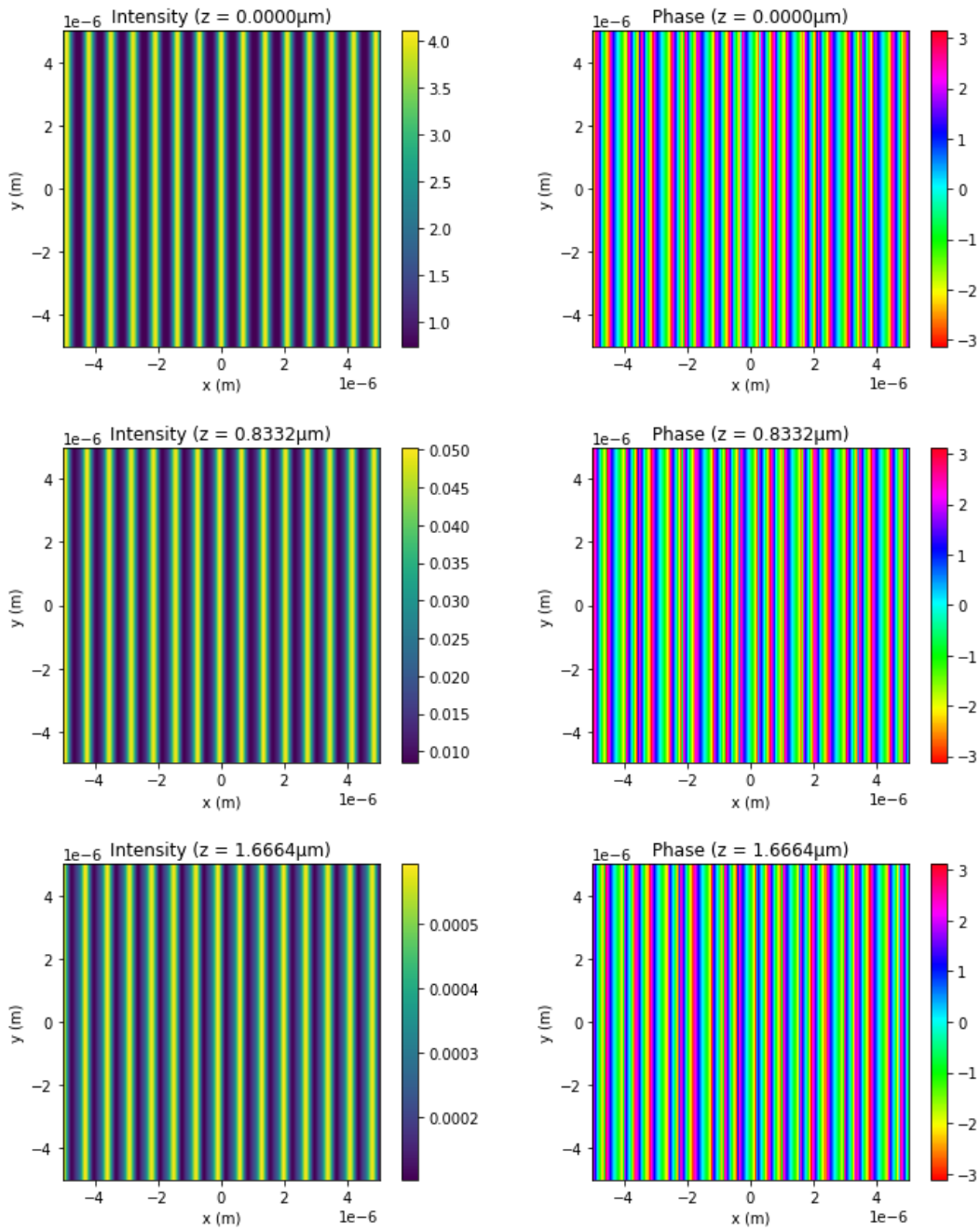


Figura 3.7: Simulación numérica del campo evanescente difractado para luz roja con  $\lambda_e = 700\text{nm}$  y  $d = 1400\text{nm}$ .

---

## Capítulo 4

# GENERACIÓN DE PLASMÓNES SUPERFICIALES ESTRUCTURADOS CON OE INTERFERIDAS

Los plasmónes-polaritónes superficiales (SPPs) son ondas electromagnéticas que se propagan a lo largo de una interfaz entre un dieléctrico y un metal, estas están acopladas a las oscilaciones colectivas de los electrones libres en el metal [42, 51]. Los SPPs han ganado mucha atención debido a su habilidad de confinar la luz en nano-escalas, permitiendo varias aplicaciones en la nanofotónica como en procesamiento de información óptica, sensado en la escala nano e imágenes de alta resolución [52]. Este capítulo introduce los principios de la resonancia de plasmón superficial y además se describe una configuración innovadora para la excitación de plasmónes-polaritónes superficiales estructurados (SSPPs) por el acoplamiento de OE interferidas con una interfaz metal-dieléctrico. El enfoque propuesto presenta diferentes ventajas en relación a los métodos clásicos, como el acoplamiento por medio de un prisma [53, 54], o el acoplamiento por medio de rejillas [55, 56], al eliminar la necesidad de componentes externos y proporcionar más flexibilidad en el diseño y control del proceso de excitación del plasmón. Los campos evanescentes que se propagan en un medio dieléctrico sirven como la fuerza impulsora para excitar SSP en la superficie del metal. La interferencia de estas OE crea un efecto de acoplamiento constructivo, llevando a la formación de un campo plasmónico bien definido con patrones espaciales intrincados. Este campo plasmónico estructurado puede ser utilizado para manipular y controlar la luz en nano-escalas [52]. El incremento

en el control sobre los modelos ópticos de plasmones logrado mediante este enfoque de acoplamiento es muy prometedor para diversas aplicaciones. Por ejemplo, las propiedades difractivas del campo plasmónico estructurado pueden ser aprovechadas para idear patrones ópticos complejos, permitiendo avances en el procesamiento de información óptica y manipulación. Los efectos de interferencia pueden ser explorados para crear dispositivos basados en este efecto en nano-escalas, como lo son las guías de onda [57] y los moduladores [58]. Por otra parte, la habilidad para generar un campo plasmónico estructurado 2D abre las posibilidades para mejorar la focalización de la luz en la nano-escala. Al adaptar cuidadosamente la distribución de los campos plasmónicos, es posible focalizar la luz en puntos extremadamente pequeños, sobrepasando el límite de difracción de la óptica clásica. Estas capacidades para mejorar la capacidad de enfocamiento tienen implicaciones para aplicaciones en imágenes de alta resolución [59], litografía óptica [60] y sensado en nanoescalas [61].

## 4.1. Determinación de la relación de dispersión más simple para SPPs

Para desarrollar una imagen clara de qué son los SPPs, investiguemos el sistema más simple que los admite, es decir, la interfaz metal-dieléctrico en bloque 4.1. Imagine una interfaz metal-dieléctrico en el plano  $zx$  en  $y = 0$ . La región dieléctrica es  $y > 0$  y la región del metal es  $y < 0$ . Como no existe una dirección preferida en el plano  $xz$ , sin pérdida de generalidad, nos centramos en una onda superficial que se propaga en la dirección  $x$ . El plano de propagación se define como el plano abarcado por la dirección de propagación y la normal a la superficie. En este caso, el plano de propagación es simplemente el plano  $zy$ . Generalmente, las ondas electromagnéticas que se propagan se pueden clasificar en polarización s o p, dependiendo de si el campo eléctrico o magnético es perpendicular al plano de propagación. Consideremos primero el caso de la polarización p (u onda TM).

Ya que estamos interesados en un modo TM de onda superficial que se propaga en la dirección  $z$  y decae en la dirección  $x$ , podemos escribir los campos eléctricos y magnéticos en el dieléctrico y el metal como:

$$\mathbf{E}_d = (0, E_{yd}, E_{zd})e^{i(k_{SPP}z - \omega t)}e^{k_y d y} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}_d = (H_{xd}, 0, 0)e^{i(k_{SPP}z - \omega t)}e^{k_y d y} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{E}_m = (0, E_{ym}, E_{zm})e^{i(k_{SPP}z - \omega t)}e^{-k_{ym}y} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{H}_m = (H_{xm}, 0, 0)e^{i(k_{SPP}z - \omega t)}e^{-k_{ym}y} \quad (4.4)$$

donde los superíndices d y m denotan cantidades en el dieléctrico y el metal, respectivamente.  $k_{SPP}$  es la constante de propagación compleja del SPP. Tanto  $k_{yd}$  como  $k_{ym}$  son números reales positivos que describen la decadencia del campo lejos de la interfaz metal-dieléctrico. Basándonos en las condiciones de frontera, sabemos que las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos, y la componente perpendicular del campo de desplazamiento eléctrico, son continuas a través de la frontera metal-dieléctrico en  $y = 0$ . Por lo tanto,  $E_{zd} = E_{zm}$ ,  $H_{xd} = H_{xm}$ , y  $\epsilon_d E_{yd} = \epsilon_m E_{ym}$ . De las ecuaciones de Maxwell, sabemos que  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext}$ . Como no hay carga externa y la permitividad es constante en el dieléctrico y el metal por separado,  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  debe cumplirse en los dos regímenes. Combinando esto con las Ecs. 2 y 4, tenemos:

$$-ik_{SPP}E_z = k_{yd}\frac{D_y}{\epsilon_d} \quad (4.5)$$

$$-k_{SPP}E_z = -k_y\frac{D_y}{\epsilon_m} \quad (4.6)$$

Esto se simplifica a

$$\frac{k_{xd}}{\epsilon_d} = -\frac{k_{xm}}{\epsilon_m}. \quad (4.7)$$

A partir de esta relación, podemos ver por qué el SPP solo existe entre un dieléctrico,  $\epsilon_d > 0$ , y un metal,  $\epsilon_m < 0$ . Para que el campo decaiga en la dirección x, tanto  $k_{xd}$  como  $k_{xm}$  deben ser positivos, lo que significa que  $\epsilon_d$  y  $\epsilon_m$  deben tener signos opuestos. Para derivar la expresión para  $k_z$ , usamos la ecuación de onda de Helmholtz  $\nabla^2 \vec{E} = -k_0^2 \epsilon \vec{E}$ , que se deriva de las dos ecuaciones rotacionales de Maxwell. Insertando las Ecs. 2 y 4 en la ecuación de Helmholtz conduce a:

$$k_{SPP}^2 = k_0^2 \epsilon_d - k_{yd}^2 \quad (4.8)$$

$$k_{SPP}^2 = k_0^2 \epsilon_m - k_{ym}^2 \quad (4.9)$$

donde  $k_0$  es el número de onda en el espacio libre. Finalmente, combinando las Eqs. 7-9, llegamos a la expresión para la constante de propagación del SPP

$$k_{SPP} = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_d \epsilon_m}{\epsilon_d + \epsilon_m}} \quad (4.10)$$

La parte real de  $k_{SPP}$  está relacionada con la longitud de onda del SPP por  $\lambda_{SPP} =$



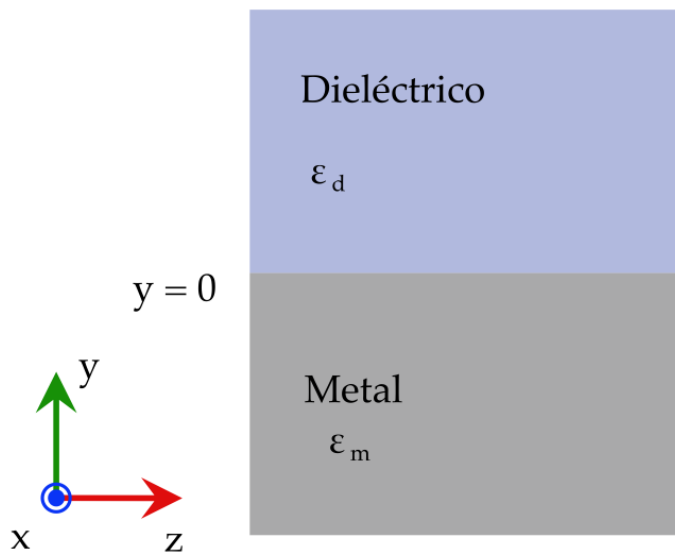


Figura 4.1: Interfaz metal-dieléctrica en  $y=0$ . Este sistema soporta SPPs que se propagan en la dirección  $z$  y decaen exponencialmente en  $y$ .

$2\pi/\text{Re}(k_z)$ , mientras que la parte imaginaria describe la pérdida de propagación del SPP. En general,  $\epsilon_d$  y  $\epsilon_m$  dependen de la frecuencia, por lo que  $k_{SPP}$  también depende de la frecuencia. La relación de  $k_{SPP}$  y la frecuencia es a menudo lo que queremos saber para caracterizar los SPP en un sistema. Recuerda que la discusión anterior se basa puramente en la suposición de que el SPP es una onda TM. Para la posibilidad de la onda TE, se pueden seguir los mismos pasos de derivación y demostrar que todas las amplitudes de campo deben ser cero. Esto significa que los SPP solo existen como una onda TM, lo que también es una característica distintiva de los SPP.

Como una forma de validar el modelo y visualizar los resultados físicos, se simula en COMSOL Multiphysics los SPP en la interfaz de plata (metal) y aire (dieléctrico). La función dieléctrica de la plata está bien descrita por el modelo de Drude con un valor de la frecuencia de plasma de alrededor de 9.6 eV. Para este modelo se pueden usar las propiedades de la plata construidas en la librería del software. Luego de correr la simulación, podemos observar la propagación de los SPP. De izquierda a derecha, las imágenes a continuación muestran los SPP a 350 nm y 360 nm de longitud de onda. Como se esperaba, el campo se propaga en la dirección  $z$  y decae en la dirección  $y$ . El decaimiento es más rápido en el lado del metal debido a la alta absorción. De manera notable, la longitud de onda del SPP (parte real  $k_{SPP}$ ) y la disipación (parte imaginaria  $k_{SPP}$ ) varían significativamente con la frecuencia o la energía fotónica. Para tener una idea cuantitativa entre la frecuencia y  $k_{SPP}$ , se grafican usando la energía de fotón

en el eje- $y$ , contra el  $k_{SPP}$  en el eje- $x$ . El vector de onda de los SPP es una cantidad compleja, pero cuando se grafica se considera la parte real por defecto. Es muy usual en el estudio de los SPP que se defina una figura de mérito conocida como el factor  $Q$ , como la razón entre la parte real de  $k_{SPP}$  y su parte imaginaria. Cuando  $k_{SPP}$  tiene una parte imaginaria pequeña (factor  $Q$  más grande), el SPP se puede propagar en una distancia más larga relativa a su longitud de onda antes de decaer del todo. Un factor  $Q$  grande es preferible para aplicaciones prácticas como biosensores [62] y switches ópticos [63]. Se gráfica el factor  $Q$  en la curva, donde el color más brillante representa un factor  $Q$  más grande y más oscuro un factor más pequeño. En adición, la línea punteada representa la línea de luz  $\omega = ck_0$ . Esta línea es la relación de dispersión del número de onda frecuencial para los fotones en el espacio libre. Finalmente, se gráfica la Ec. (4.10) como una curva sólida. Como se puede observar, la dispersión simulada y la expresión analítica muestran estar en buena concordancia.

La dispersión que se muestra en la Fig. 4.2c es muy representativa de la dispersión de SPP en metales nobles. Esta gráfica es útil para obtener información acerca de las características de los SPPs. Más importante aún, muestra que la curva de dispersión de los SPP siempre se encuentra al lado derecho de la línea de luz. La implicación de esto es que la longitud de onda del SPP es siempre más pequeña que la de la luz en el espacio libre. Es por esto que los SPPs pueden ser usados para comprimir la longitud de onda de la luz y alcanzar una concentración del campo más alta. Por otra parte, esta discordancia entre el número de onda de la luz y la constante de propagación del SPP significa que no pueden ser excitados los SPP irradiando directamente a la superficie metálica con luz, algún mecanismo externo es requerido para la concordancia del vector de onda. Generalmente se excitan los SPPs usando reflexión total interna con un prisma [53], rejillas de difracción [55], dispersión [54] o pasándolo a través de un haz de electrones, inclusive con una fuente dipolar eléctrica cercana a la superficie [64]. El objetivo de estas técnicas es preparar el campo electromagnético para que su vector de onda coincida con el de los SPP a la misma frecuencia.

#### 4.1.1. SPP en materiales nobles 2D

A pesar de que simular los SPPs en la interfaz de un bloque de metal-dieléctrico sirve de ayuda para introducir la propagación y la dispersión de los SPP, es un ejemplo bastante simple y físicamente poco interesante. En esta sección se cubre un caso más interesante de una película delgada conductora cubierta de capas de dieléctrico. En esta clase de sistemas, tanto la superficie superior como la inferior soportan SPPs. Si la

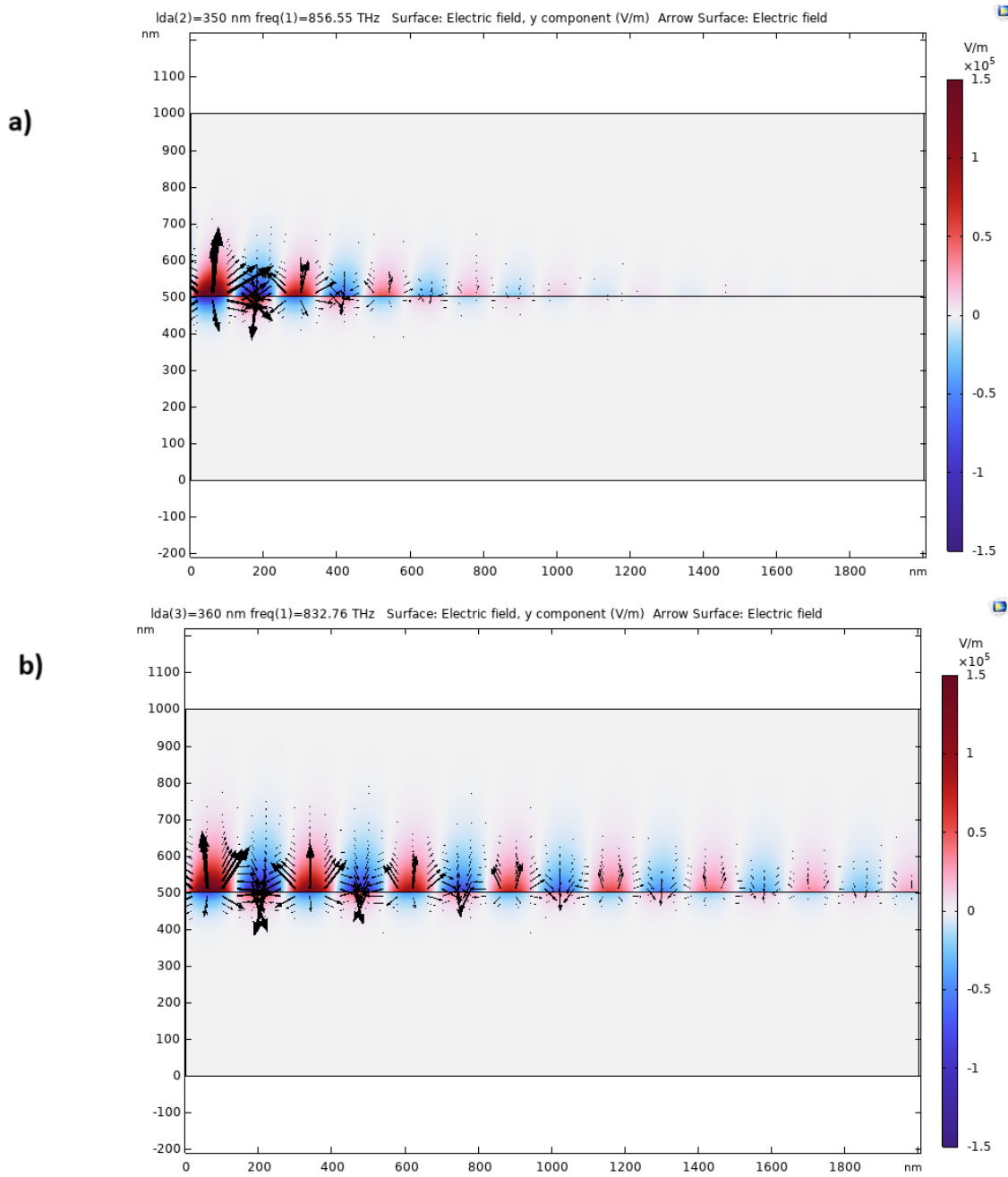


Figura 4.2: Simulación de SPP en la interfaz plata-aire. (a) Propagación de SPP a 350 nm. (b) Propagación de SPP a 360 nm.

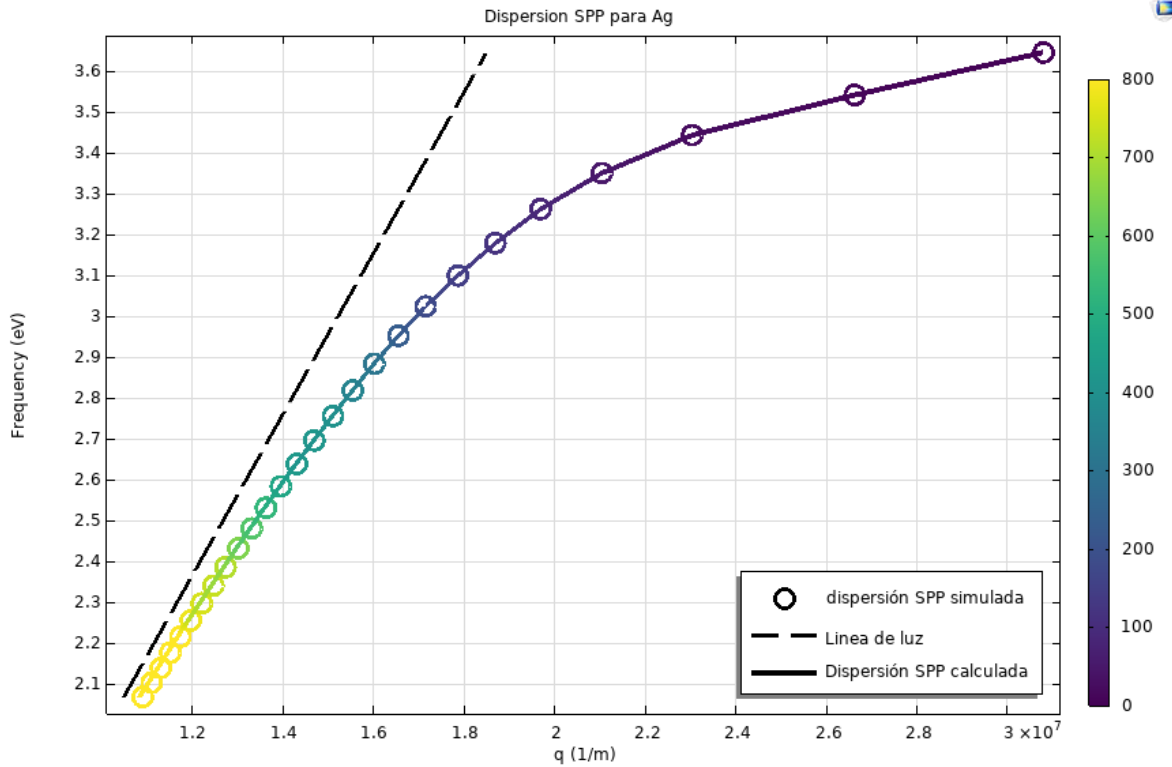


Figura 4.3: Constante de dispersión de propagación frecuencial simulada de los SPP en la interfaz de plata y aire. La dispersión de la luz en el espacio libre, o línea de luz, está representado con una línea punteada. El color representa el factor Q de los SPP

película del conductor es lo suficientemente delgada, el acoplamiento entre el SPP de la superficie y el del inferior conducirá a un modo híbrido. Resultando en la formación de modos simétricos y antisimétricos. La física de esta situación es análoga a osciladores armónicos mecánicos acoplados. Los materiales 2D han ganado una popularidad tremenda a medida que la industria de la electrónica se abre paso en la miniaturización. Resulta que los materiales 2D como el grafeno, pueden soportar también SPPs. Después de todo, el grafeno con alta conductividad se comporta como un metal. La principal diferencia es que los metales nobles usualmente tienen una frecuencia del plasma en el régimen ultravioleta o visible, lo que implica que los metales nobles soportan SPP en la frecuencia óptica. El grafeno, por otra parte, soporta SPPs en el régimen infrarrojo [65], haciéndolo un material único y con ventajas para ciertas aplicaciones como captación de infrarrojos [66] y metamateriales [67]. Otra propiedad interesante del grafeno es que su conductividad puede cambiarse por dopaje químicamente o sintonización eléctrica. Esto permite la sintonización de SPPs, lo cual no puede lograrse con metales convencionales. Con la simulación de la propagación y dispersión para los SPP, se puede investigar los SPPs en el grafeno depositado sobre un sustrato de  $\text{SiO}_2$ . Las gráficas a continuación muestran las curvas de dispersión con la energía de Fermi para el grafeno puesta en 0.2 eV (izquierda) y 0.5 eV (derecha). Se puede observar una clara diferencia debido a la conductividad del grafeno. Si se le compara con la dispersión SPP de los metales, se puede ver que la línea de luz está casi alineada con el eje  $y$ . Esto se debe a que la constante de propagación de los SPP es mucho más grande que el número de onda de la luz en el espacio libre. En otras palabras, la longitud de onda de los SPP es mucho más pequeña. Se muestra en la Fig. 4.5 la propagación a 28 THz para el caso de una energía de Fermi de 0.2 eV. A 28 THz la longitud de onda en el espacio libre es aproximadamente  $10 \mu\text{m}$ , mientras que la longitud de onda del SPP es menos de  $100 \text{ nm}$ . Se logra la compresión de la longitud de onda. Sin embargo, debe notarse que en este caso el factor  $Q$  no es muy grande. El SPP decae completamente luego de propagarse unos cuantos cientos de nanómetros. Un factor de  $Q$  más grande puede lograrse mejorando la calidad cristalina del grafeno o enfriándolo a temperaturas criogénicas [68].

A primera vista puede parecer extraño que no hay SPP en el rango de frecuencias alrededor de 33 THz en las gráficas para la dispersión. Esto se debe a que la permitividad del sustrato de  $\text{SiO}_2$  se vuelve negativa como un resultado de su resonancia de fonones [69]. Aunque no se muestra aquí, se puede derivar analíticamente la relación de dispersión para este tipo de sistema con las condiciones de frontera en cada interfaz. La derivación se vuelve rápidamente engorrosa a medida que la geometría del sistema es más compleja. La ventaja de usar COMSOL para simular los SPPs radica en su

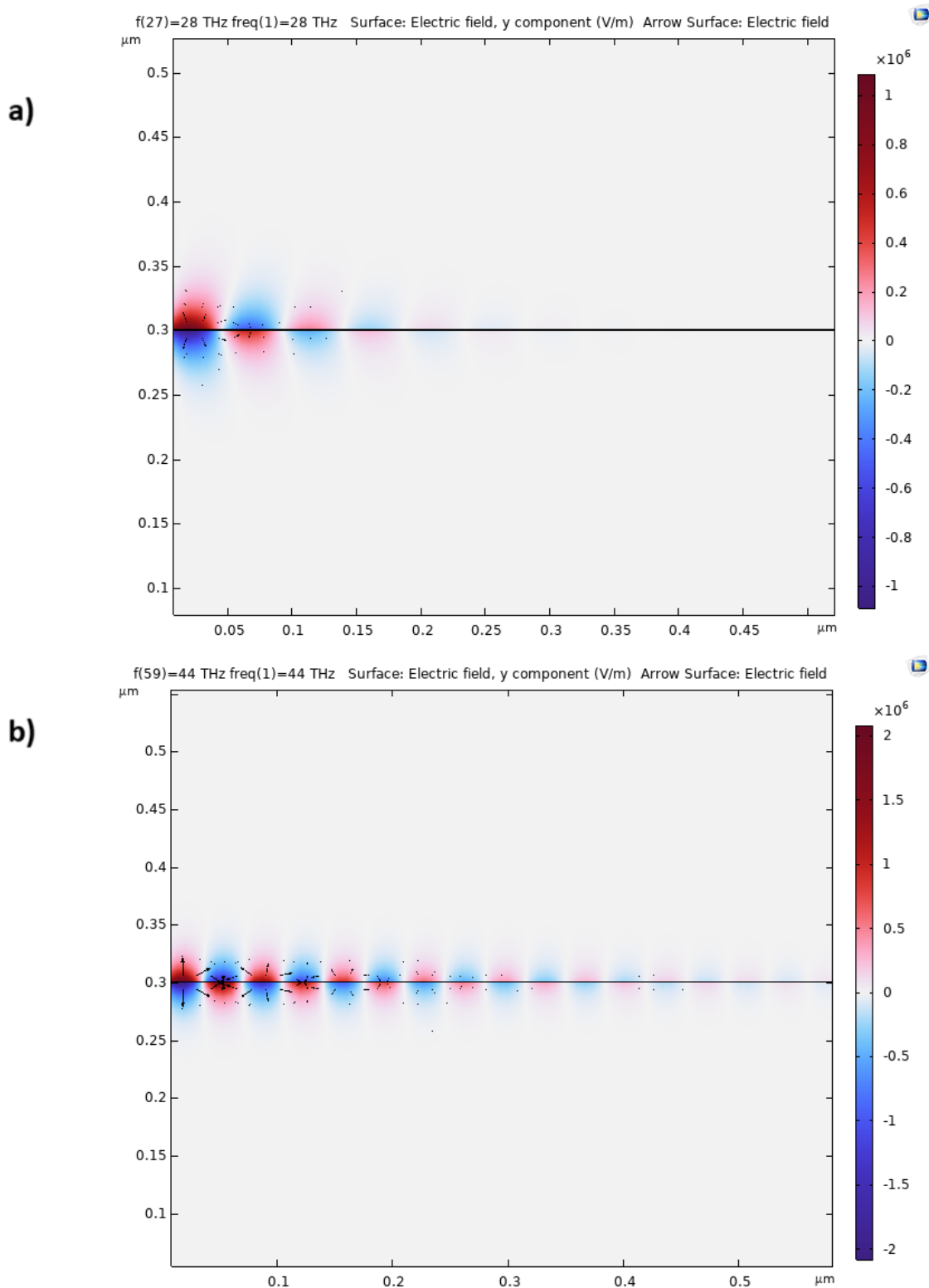


Figura 4.4: Propagación de SPP en grafeno sobre  $\text{SiO}_2$ . (a) Energía de Fermi 0.2 eV. (b) Energía de Fermi 0.5 eV.

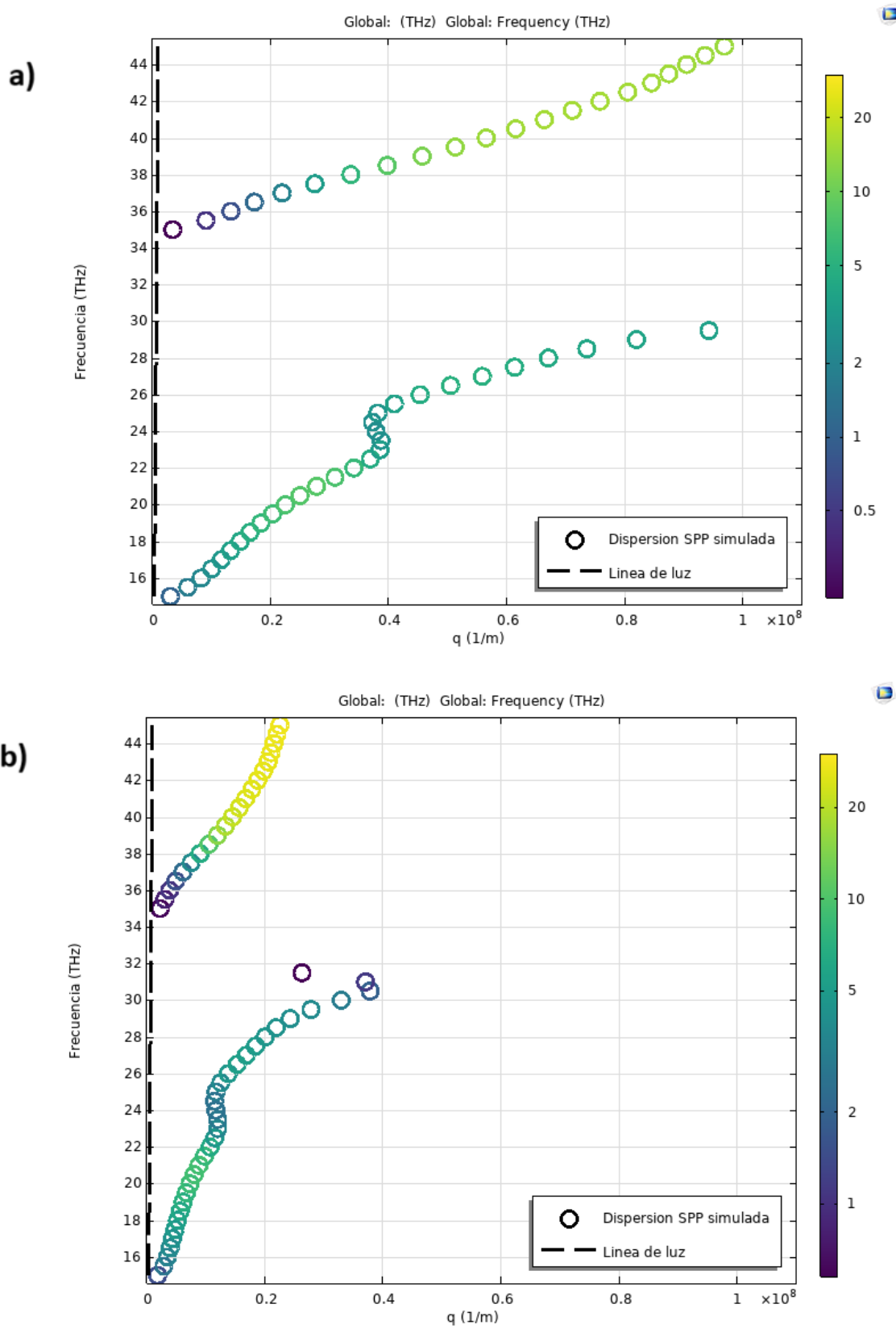


Figura 4.5: Curvas de dispersión para los SPP en grafeno con energía de Fermi 0.2 eV a) y 0.5eV b).

flexibilidad, la dispersión para SPP se puede calcular en el software sin importar qué tan compleja es la composición geométrica.

## 4.2. Excitación SSPP

En la sección 3.2.1 se determino la superposición de dos OEs como

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2e^{i\alpha x} e^{i\beta_e z \cos \theta} [\hat{i} \cos(\beta y \sin \theta) + 2i\hat{j} \sin(\beta y \sin \theta) \sin \theta + \hat{k} \cos \theta \cos(\beta y \sin \theta)], \quad (4.11)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre las OEs y es el parámetro de control, y  $\alpha$  es un coeficiente de amortiguación. La Fig. 4.6 presenta un esquema ilustrativo del montaje experimental propuesto para la generación de plasmones superficiales estructurados mediante la interferencia de ondas evanescentes. Se muestra una configuración básica para la interferencia de ondas evanescentes, donde dos haces de luz coherentes se cruzan en la superficie de un medio dieléctrico con un ángulo controlado. Estos haces interferidos generan un patrón de interferencia evanescente que se propaga a lo largo de la superficie del dieléctrico. Seguido de esto, esta onda evanescente interferida se acopla directamente a la interfaz metal-dieléctrico para generar un campo de plasmones superficiales estructurados. El montaje experimental implica la incidencia directa de los haces interferidos sobre un sustrato dieléctrico, sobre el cual se ha depositado una película delgada de metal. La onda evanescente resultante de la interferencia se acopla a los plasmones superficiales en la interfaz metal-dieléctrico, creando un campo de plasmones superficiales estructurados con una distribución espacial controlada. Este campo de plasmones se puede visualizar y caracterizar utilizando un sistema de detección adecuado, como lo es por ejemplo el NSOM (microscopía óptica de barrido por campo cercano) [1]. La etapa de posicionamiento motorizada permite un control preciso de la posición y orientación de la muestra y los componentes ópticos, mientras que el sistema de control y adquisición de datos automatiza el experimento y adquiere los datos experimentales para su posterior análisis y caracterización.

Esencialmente, para generar los SSPPs el término de fase para las OE debe coincidir con la función de relación de dispersión para los SPP, esto es:

$$\beta_e \cos \theta = k_{SPP} = \frac{\omega_p}{c} \left( \frac{\epsilon_d \epsilon_m}{\epsilon_d + \epsilon_m} \right)^{1/2}. \quad (4.12)$$



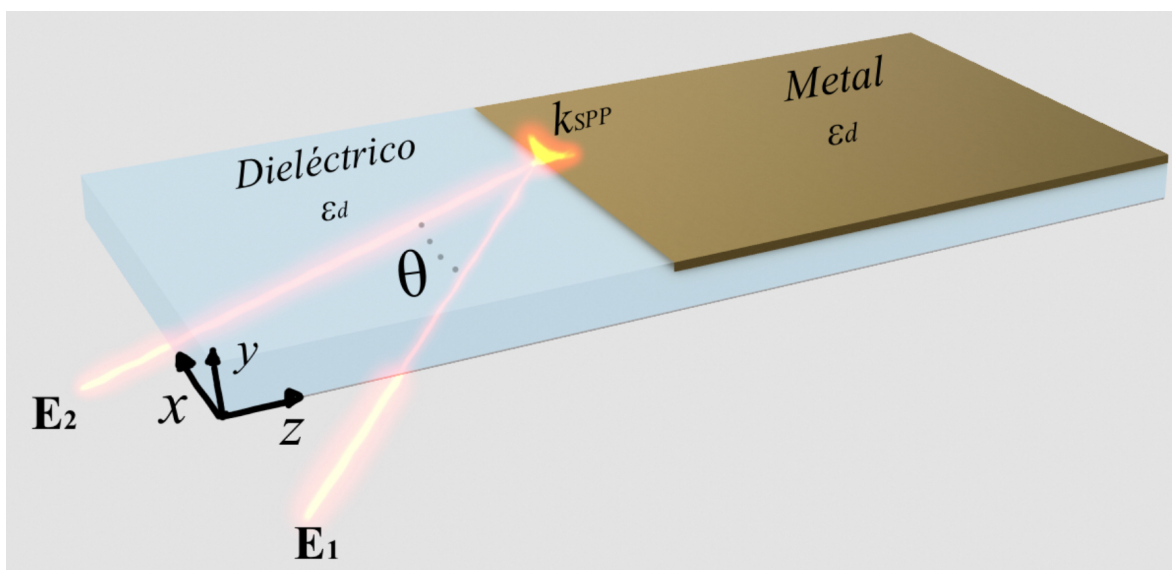


Figura 4.6: Esquema del montaje experimental propuesto para la generación de plasmones superficiales estructurados mediante la interferencia de ondas evanescentes.

Debe notarse que para que la condición de resonancia se cumpla y para que  $\theta$  sea real,  $|\epsilon_d| \geq |\epsilon_m|$ . Esta condición crítica asegura un acoplamiento apropiado de fase para campos plasmónicos, resultando en efectos plasmónicos mejorados y transferencia de energía eficiente [70].

#### 4.2.1. Resultados numéricos

En los experimentos numéricos se empleó el método de elementos finitos en el dominio del tiempo (FETD) con el software COMSOL MULTIPHYSICS para una onda evanescente interferida y una forma Gaussiana temporal que incide en el dieléctrico. La geometría 2D consiste de una superficie dieléctrico-metal con una altura de  $6\lambda$  y un ancho de  $20\lambda$ . La longitud de onda usada fue  $633 \text{ nm}$ , con permitividades relativas de  $\epsilon_a = 1$ ,  $\epsilon_d = 2,236$  y la permitividad compleja para una película de Au de  $50 \text{ nm}$  de  $\epsilon_m = -11,8 + 1,2i$ . Es importante mencionar que para una película de  $50 \text{ nm}$ , los efectos de confinamiento cuántico y dispersión superficial pueden modificar ligeramente las propiedades ópticas del Au en comparación con el material en volumen. Sin embargo, el modelo de Rakić implementado en COMSOL no tiene en cuenta los efectos de tamaño [71]. Para simulaciones más precisas de películas muy delgadas (menos de  $20 \text{ nm}$ ), se podrían necesitar modelos más avanzados que incluyan correcciones por efectos de tamaño [72]. En la práctica, para una película de  $50 \text{ nm}$ , el valor calculado debería ser una buena aproximación para usar en simulaciones de COMSOL. Este valor de per-

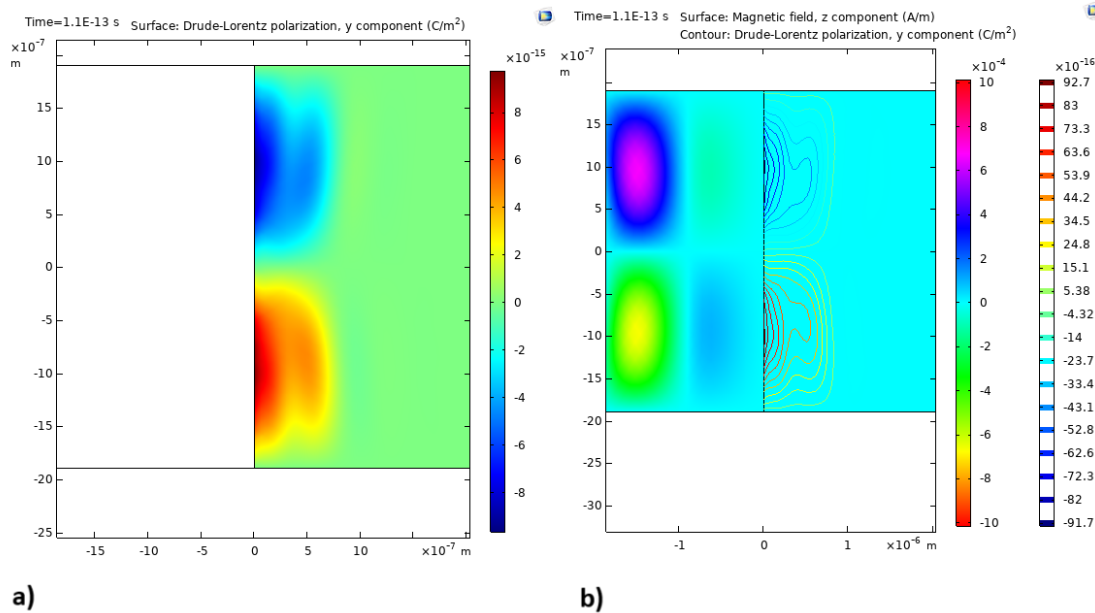


Figura 4.7: Simulaciones 2D de la propagación de SSPPs después de 110 fs para ángulos de interferencia de  $5^\circ$ . a) Componente  $y$  del campo de polarización y b) Componente fuera de plano del campo magnético y la componente  $y$  del campo de polarización(contorno).

mitividad indica que el oro a esta longitud de onda tiene un comportamiento metálico fuerte, con una parte real negativa significativa, lo que es crucial para la existencia y propagación de plasmones superficiales. Se corrieron simulaciones 2D en el dominio del tiempo para cuatro ángulos distintos,  $5^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$  entre las OE interferidas. Luego de 110 fs y 120 fs, las simulaciones arrojaron datos valiosos de espectroscopía, esto es ilustrado en las Fig. 4.7 y 4.8 respectivamente. A través de estas simulaciones se ganan conocimientos más profundos en la dinámica del campo plasmónico estructurado y su respuesta bajo varias condiciones, se ratifica la fuerte dependencia de la frecuencia y adicionalmente el parámetro angular para el control del patrón de interferencia.

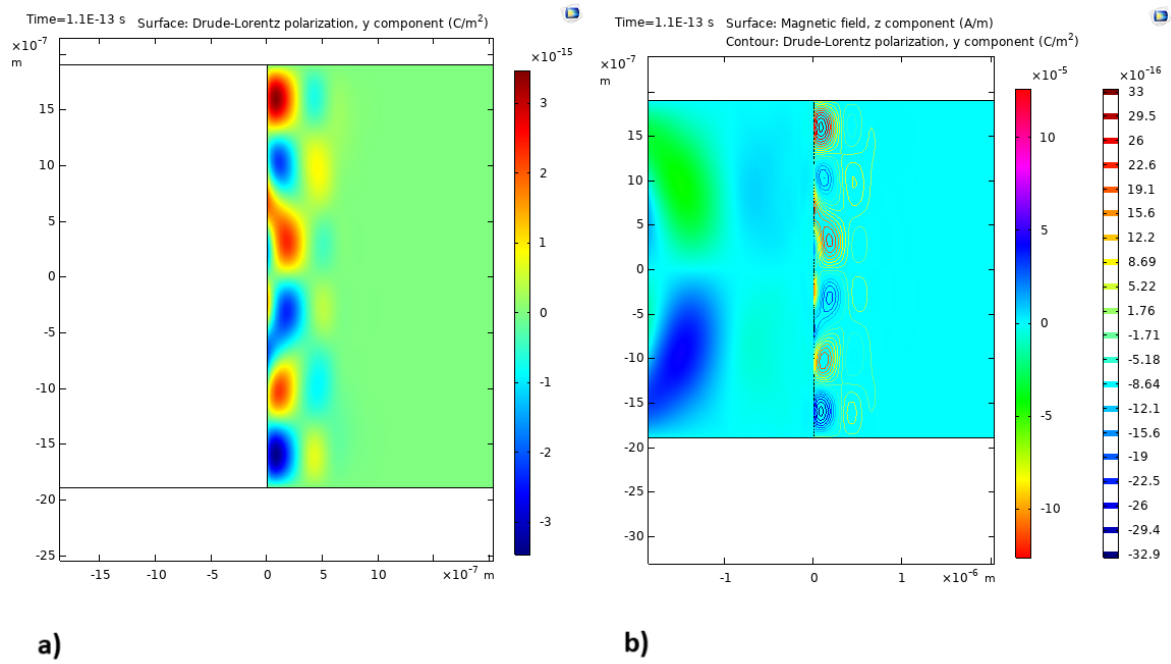


Figura 4.8: Simulaciones 2D de la propagación de SSPPs después de 110 fs para ángulos de interferencia de 30°. a) Componente  $y$  del campo de polarización y b) Componente fuera de plano del campo magnético y la componente  $y$  del campo de polarización (contorno).

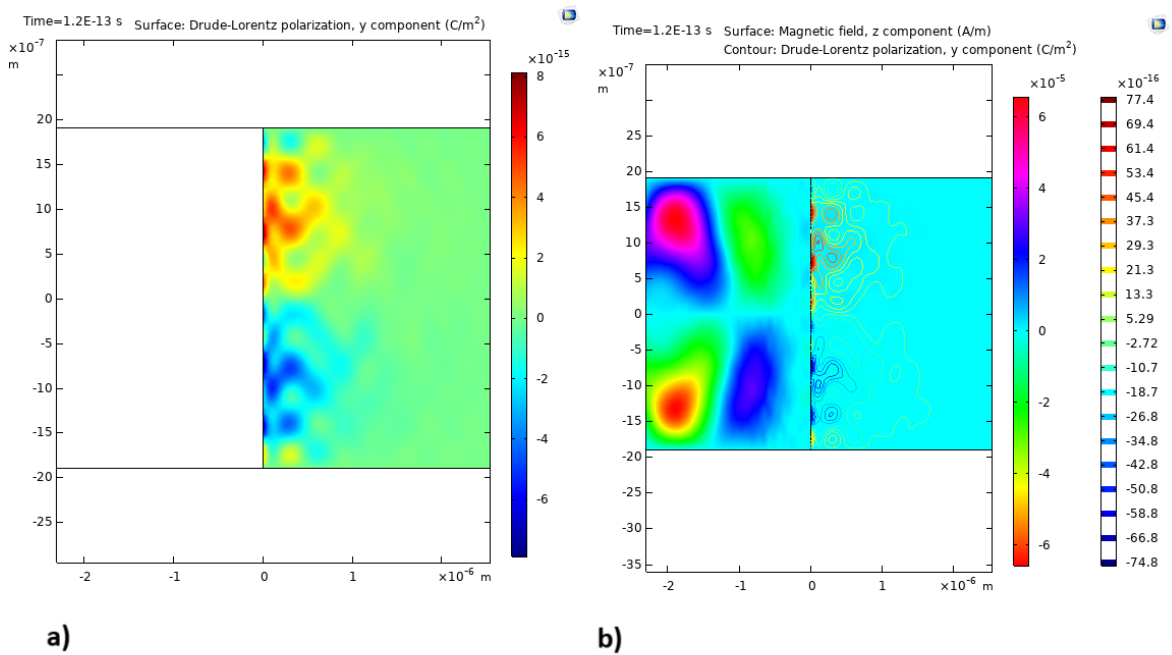


Figura 4.9: Simulaciones 2D de la propagación de SSPPs después de 120 fs para ángulos de interferencia de 60°. a) Componente  $y$  del campo de polarización y b) Componente fuera de plano del campo magnético y la componente  $y$  del campo de polarización(contorno).

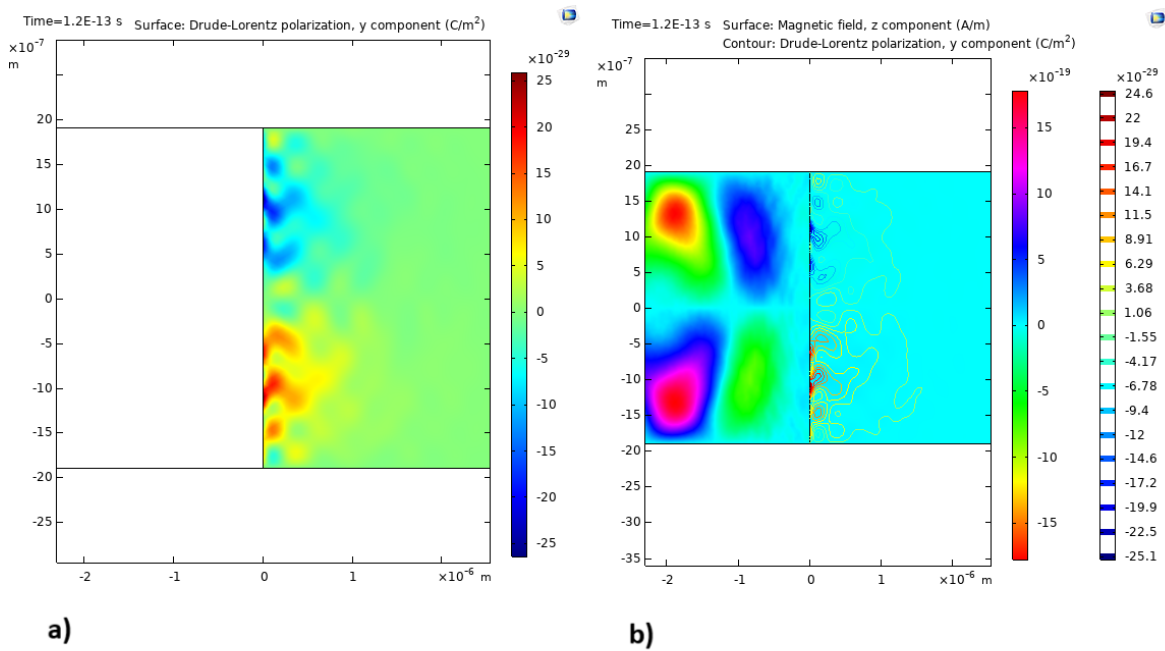


Figura 4.10: Simulaciones 2D de la propagación de SSPPs después de 120 fs para ángulos de interferencia de  $80^\circ$ . a) Componente  $y$  del campo de polarización y b) Componente fuera de plano del campo magnético y la componente  $y$  del campo de polarización (contorno).

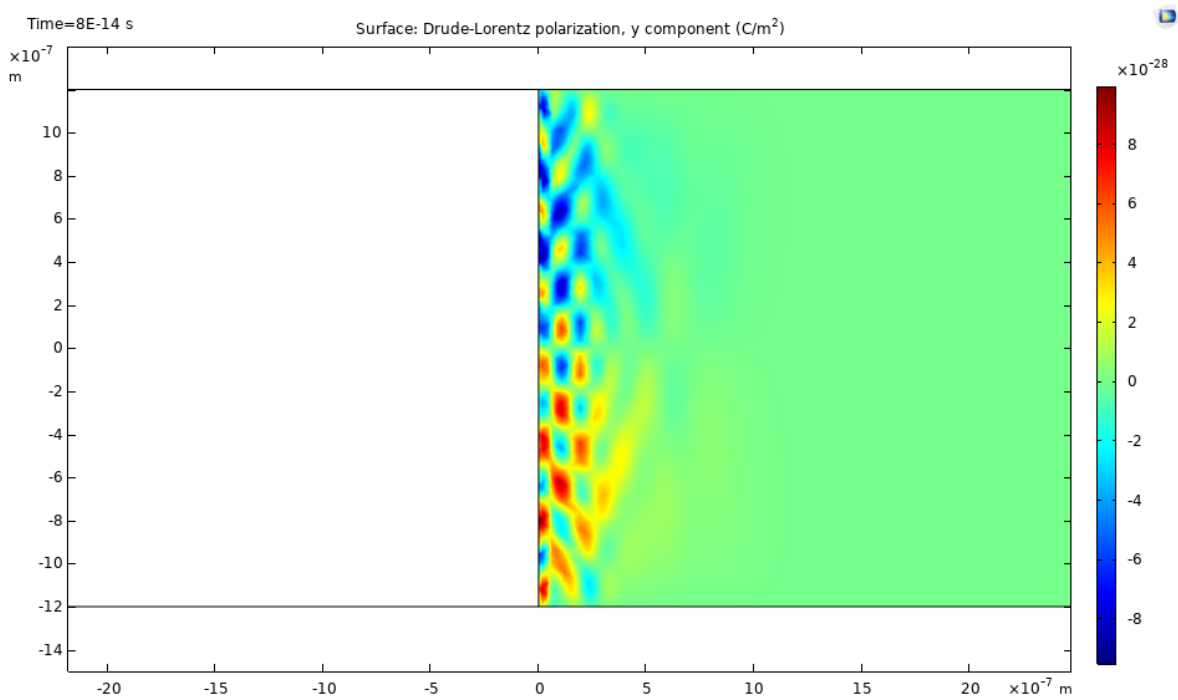


Figura 4.11: Simulaciones 2D de la propagación de SSPPs después de 80 fs para ángulos de interferencia de  $80^\circ$  y una longitud de onda incidente de 400nm. Componente  $y$  del campo de polarización.

---

## Capítulo 5

# Enfocamiento de plasmones superficiales: Teoría de catástrofes y regiones cóusticas

En los capítulos anteriores, hemos explorado la física fundamental de las ondas evanescentes (OE) y su interacción con los plasmones superficiales. Hemos derivado la función de relación de dispersión para las OE y estudiado cómo estas pueden acoplarse con plasmónes-polaritónes superficiales estructurados (SSPPs) [10]. Continuando con esta línea de investigación, este capítulo se enfoca en un fenómeno fascinante que emerge en la propagación de plasmones superficiales: las regiones cóusticas.

Las cóusticas son manifestaciones de singularidades en la óptica geométrica, donde la intensidad del campo electromagnético se concentra a lo largo de curvas o superficies [8]. Aunque tradicionalmente estudiadas en la óptica clásica, las cóusticas también aparecen en el contexto de los plasmones superficiales [4], ofreciendo nuevas oportunidades para la manipulación y el control de la luz a escala nanométrica.

Las propiedades de las regiones de enfoque, también conocidas como regiones cóusticas, han sido objeto de estudio detallado. Saldivia Gomez et al. [73] investigo la estabilidad de estas regiones y sus propiedades vorticiales y solitónicas. Este trabajo demuestra que las regiones de enfoque pueden exhibir comportamientos similares a cargas y corrientes, lo que proporciona una perspectiva valiosa para nuestro análisis de cóusticas plasmónicas.

La formación de regiones cóusticas en plasmones superficiales representa una convergencia única entre la teoría de catástrofes, la óptica no lineal y la plasmónica [9]. Este fenómeno no solo es de interés teórico, sino que también tiene implicaciones prácti-

cas significativas para el diseño de dispositivos plasmónicos avanzados y aplicaciones en nanofotónica [74].

En este capítulo, exploraremos la teoría subyacente a la formación de cáusticas en plasmones superficiales, basándonos en nuestro entendimiento previo de la propagación de ondas evanescentes y plasmones. Analizaremos cómo las características únicas de los plasmones superficiales, incluyendo su confinamiento y su sensibilidad a la geometría de la interfaz, influyen en la formación y propiedades de las regiones cáusticas [2].

Un aspecto crucial de nuestro estudio será la investigación del potencial de las regiones cáusticas plasmónicas para inducir efectos no lineales, como la generación de armónicos superiores y el efecto Kerr [75]. Estos fenómenos no lineales, potenciados por la alta concentración de campo en las regiones cáusticas, podrían abrir nuevas vías para aplicaciones en óptica no lineal a escala nanométrica.

Además, examinaremos la posibilidad de utilizar campos evanescentes interferidos, como los discutidos en capítulos anteriores, para controlar y modular las regiones cáusticas plasmónicas [76]. Esta integración de conceptos podría proporcionar nuevas herramientas para el diseño de dispositivos plasmónicos con funcionalidades avanzadas.

Nuestro análisis no se limitará a consideraciones teóricas, sino que también explorará las implicaciones prácticas de este fenómeno. Discutiremos cómo las regiones cáusticas en plasmones superficiales podrían aplicarse para mejorar el efecto fotoeléctrico [1], desarrollar sensores ultrasensibles [14] y avanzar en técnicas de nanolitografía plasmónica [12].

Comenzaremos revisando brevemente los conceptos fundamentales de la teoría de catástrofes y su aplicación en óptica, para luego extender estos conceptos al dominio de los plasmones superficiales. Desarrollaremos un modelo teórico para describir la formación de regiones cáusticas en plasmones superficiales, incorporando los efectos de la geometría de la interfaz y las propiedades de los materiales. Utilizaremos técnicas analíticas y numéricas para estudiar la distribución del campo electromagnético en estas regiones y su evolución temporal [77].

## 5.1. Fundamentos teoría de catástrofes y máquina de catástrofes de Zeeman

La teoría de catástrofes, desarrollada principalmente por René Thom en la década de 1960, proporciona un marco matemático para estudiar los cambios discontinuos en sistemas dinámicos [78]. Esta teoría encuentra aplicaciones en diversos campos, desde



la física y la biología hasta las ciencias sociales, y es particularmente relevante en el estudio de fenómenos ópticos como las cústicas.

En el contexto de la teoría de catástrofes, una “catástrofe” se refiere a un cambio abrupto en el comportamiento de un sistema como resultado de una pequeña variación en los parámetros que lo controlan. Matemáticamente, esto se representa mediante funciones potenciales que dependen de variables de estado y parámetros de control. La forma general de estas funciones potenciales es:

$$V(x; \lambda) = V_0(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x) \tag{5.1}$$

donde  $x$  representa las variables de estado,  $\lambda_i$  son los parámetros de control,  $V_0(x)$  es el potencial no perturbado, y  $g_i(x)$  son funciones de perturbación.

Thom clasificó las catástrofes elementales en siete tipos fundamentales para sistemas con hasta cuatro parámetros de control [79]. Entre estas, las más relevantes para nuestro estudio de cústicas plasmónicas son:

1. La catástrofe de pliegue:  $V(x; a) = x^3/3 + ax$
2. La catástrofe de cúspide:  $V(x; a, b) = x^4/4 + ax^2/2 + bx$
3. La catástrofe de cola de golondrina:  $V(x; a, b, c) = x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx$

La máquina de catástrofes de Zeeman, introducida por E.C. Zeeman, proporciona una representación mecánica intuitiva de la catástrofe de cúspide [80]. Este dispositivo consiste en un disco elástico circular conectado por hilos elásticos a dos puntos fijos. Al mover el disco, se observan saltos discontinuos en su orientación, ilustrando visualmente el concepto de catástrofe.

La Figura 5.1 muestra un esquema de la máquina de catástrofes de Zeeman. En el panel (a), se observa la vista superior del dispositivo, donde un disco elástico (D) está conectado por dos hilos elásticos a puntos fijos (A y B). El disco puede moverse en el plano XY. El panel (b) muestra el diagrama de bifurcación resultante, donde se aprecian las regiones de estabilidad y las líneas de catástrofe donde ocurren saltos discontinuos en la orientación del disco.

En el contexto de la óptica, la teoría de catástrofes se aplica al estudio de cústicas, que son manifestaciones físicas de singularidades en la función de fase de un campo óptico. La función de fase  $\Phi(x, y, z)$  en la aproximación de la óptica geométrica satisface la ecuación eikonal:

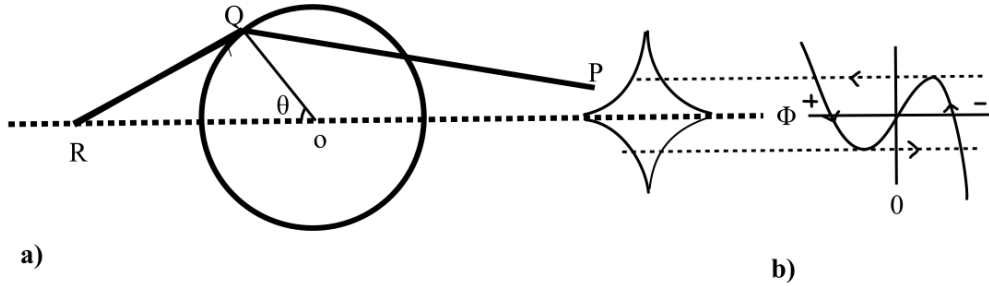


Figura 5.1: Esquema de la máquina de catástrofes de Zeeman. (a) Vista superior del dispositivo. (b) Diagrama de bifurcación resultante.

$$(\nabla\Phi)^2 = n^2(x, y, z) \tag{5.2}$$

donde  $n(x, y, z)$  es el índice de refracción del medio. Las cúspides ocurren cuando el determinante del Hessiano de  $\Phi$  se anula:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.3}$$

Esta condición corresponde a la confluencia de rayos ópticos y resulta en una intensificación localizada del campo electromagnético.

La aplicación de la teoría de catástrofes al estudio de cúspides plasmónicas nos permite analizar y predecir las regiones de alta intensidad de campo que se forman cuando los plasmones superficiales se propagan en estructuras metálicas con geometrías específicas. En el caso de los plasmones superficiales, la función de fase  $\Phi$  está íntimamente relacionada con la geometría de la interfaz metal-dieléctrico y las condiciones de excitación del plasmón.

## 5.2. Cáusticas y enfocamiento del campo

Las cáusticas son fenómenos ópticos fascinantes que se manifiestan como concentraciones singulares de intensidad luminosa. En el contexto de la óptica geométrica, las cáusticas se definen como la envolvente de un sistema de rayos [8]. Sin embargo, esta descripción geométrica es insuficiente para capturar la rica estructura de las cáusticas en la óptica ondulatoria, donde los efectos de difracción juegan un papel crucial.

En la óptica ondulatoria, las cáusticas se describen matemáticamente como singularidades en la función de fase del campo electromagnético. Consideremos un campo escalar  $u(\mathbf{r})$  que satisface la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r})u = 0 \quad (5.4)$$

donde  $k$  es el número de onda y  $n(\mathbf{r})$  es el índice de refracción del medio. En la aproximación de la óptica geométrica, podemos escribir  $u(\mathbf{r})$  en la forma:

$$u(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ik\Phi(\mathbf{r})} \quad (5.5)$$

donde  $A(\mathbf{r})$  es la amplitud y  $\Phi(\mathbf{r})$  es la fase. Las cáusticas ocurren cuando el determinante del Hessiano de  $\Phi(\mathbf{r})$  se anula:

$$\det \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0 \quad (5.6)$$

Esta condición marca los puntos donde la aproximación de la óptica geométrica falla y se necesita un tratamiento más sofisticado.

Las cáusticas se clasifican según la teoría de singularidades, que está estrechamente relacionada con la teoría de catástrofes discutida en la sección anterior. En la figura 5.2 se muestran algunos casos de cáusticas. Las cáusticas más comunes son:

1. Pliegue ( $A_2$ ): La cáustica más simple, que aparece como una línea brillante en 2D o una superficie en 3D.
2. Cúspide ( $A_3$ ): Aparece como un punto brillante en 2D o una línea en 3D, donde dos pliegues se encuentran.
3. Cola de golondrina ( $A_4$ ): Una singularidad de orden superior que aparece como un punto en 3D.

El enfocamiento del campo electromagnético en las cáusticas conduce a intensidades locales muy altas. En la aproximación de la óptica geométrica, estas intensidades serían

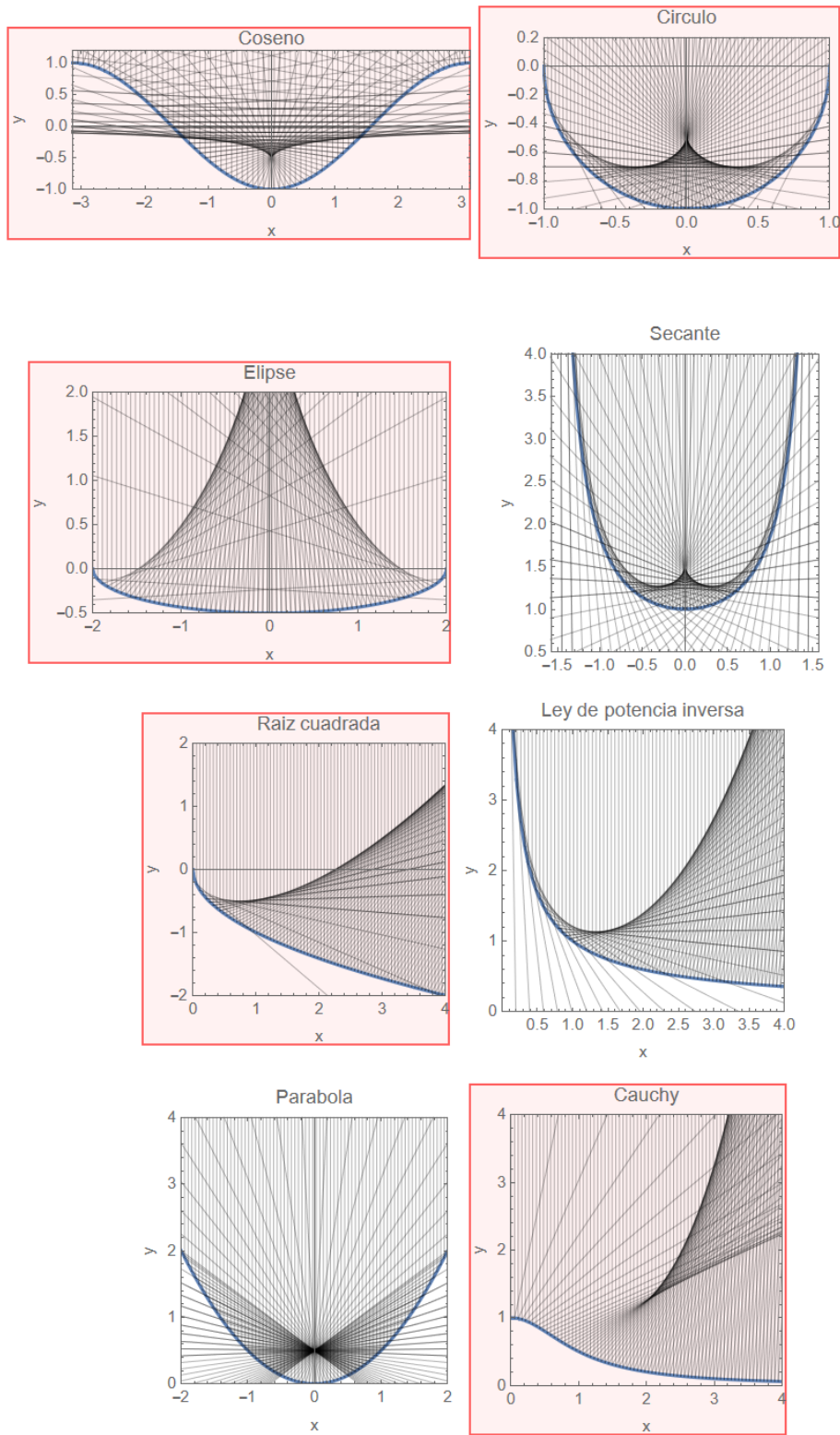


Figura 5.2: Ejemplos de cáusticas. Imagen generada usando Wolfram Mathematica.

infinitas. Sin embargo, la teoría ondulatoria completa revela una estructura fina de patrones de difracción cerca de las cústicas [9].

Para una cústica de pliegue, por ejemplo, la intensidad del campo cerca de la cústica se puede describir mediante la función de Airy:

$$I(x) \propto \text{Ai}^2(-x) \tag{5.7}$$

donde  $x$  es una coordenada local que mide la distancia desde la cústica. Esta función muestra un pico principal seguido de una serie de máximos y mínimos secundarios.

En el caso de cústicas de orden superior, como la cúspide, la distribución de intensidad se describe mediante integrales de Pearcey:

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(t^4 + xt^2 + yt)) dt \tag{5.8}$$

La intensidad cerca de una cústica de cúspide es proporcional a  $|P(x, y)|^2$ .

El enfocamiento del campo en las cústicas tiene importantes implicaciones prácticas. Por un lado, las altas intensidades locales pueden ser útiles en aplicaciones como el procesamiento de materiales, la espectroscopía y la microscopía. Por otro lado, en sistemas ópticos de alta potencia, las cústicas pueden causar daños no deseados debido a las concentraciones extremas de energía.

En el contexto de los plasmónes superficiales, las cústicas adquieren una importancia adicional. Los plasmónes superficiales son oscilaciones colectivas de electrones en la interfaz entre un metal y un dieléctrico, que pueden concentrar la luz en volúmenes subwavelet. Cuando los plasmones superficiales forman cústicas, el confinamiento del campo puede ser aún más extremo, llevando a intensidades locales extraordinariamente altas [4].

La formación de cústicas plasmónicas puede controlarse mediante la geometría de la interfaz metal-dieléctrico. Por ejemplo, una ranura parabólica en una superficie metálica puede actuar como un espejo parabólico para los plasmónes superficiales, concentrándolos en un punto focal. Estructuras más complejas pueden generar cústicas de orden superior.

Una de las formas más directas de enfocar plasmónes superficiales es mediante el uso de estructuras geométricas específicas en la superficie metálica. Un ejemplo notable es el "ojo de buey" plasmónico, demostrado experimentalmente por Liu et al. [81]. Esta estructura consiste en surcos circulares concéntricos grabados en una superficie metálica, que actúan como una lente para los plasmónes superficiales.

La Figura 5.3 muestra un esquema de una lente plasmónica de "ojo de buey". Los

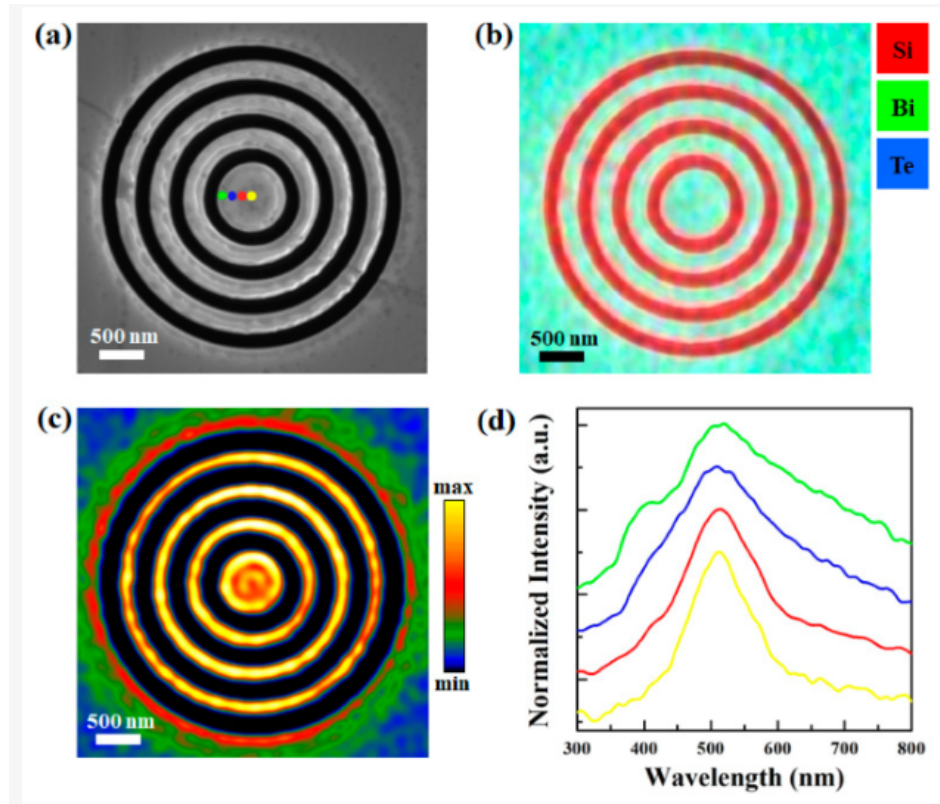


Figura 5.3: Esquema de una lente plasmónica de "ojo de buey". Los surcos concéntricos enfocan los plasmones superficiales hacia el centro, creando un punto de alta intensidad [82].

plasmónes superficiales se propagan desde los surcos hacia el centro, donde interfieren constructivamente para formar un punto focal de alta intensidad. Basados en estos sistemas se han logrado avances en el diseño de nano-antenas [83] como también emisores de electrones ultrarrápidos sintonizables en la nano-escala [84].

Martínez-Niconoff et al. [85] han propuesto teóricamente la generación de regiones de enfoque tipo Pearcey para campos plasmónicos cuando la condición de contorno sigue una curva parabólica. Su trabajo sugiere que, cuando la función de fase sigue un comportamiento no lineal, puede interpretarse como una función de catástrofe, lo que podría llevar a la formación de cústicas plasmónicas.

La función de fase propuesta por Martínez-Niconoff et al. tiene la forma:

$$L = \beta \sqrt{y^4 + ay^2 + by + c} \quad (5.9)$$

donde  $\beta$  es el vector de onda del plasmón superficial, y  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son parámetros que dependen de la geometría específica.

### 5.3. Aplicación de la Teoría de Catástrofes a Plasmónes Superficiales

La teoría de catástrofes, desarrollada por René Thom, ofrece un marco matemático poderoso para analizar singularidades en sistemas dinámicos. En el contexto de los plasmónes superficiales, esta teoría nos permite estudiar cómo las singularidades en el campo plasmónico evolucionan en respuesta a cambios en la geometría de la interfaz o en las propiedades ópticas de los materiales.

A diferencia de la óptica de rayos, los plasmónes superficiales son fenómenos ondulatorios, por lo que nuestro punto de partida debe ser la ecuación de Helmholtz. Para plasmónes superficiales en una interfaz metal-dieléctrico, esta ecuación toma la forma:

$$\nabla^2 E + k_0^2 \epsilon(x, y, z) E = 0 \quad (5.10)$$

donde  $E$  es el campo eléctrico,  $k_0 = \omega/c$  es el número de onda en el vacío, y  $\epsilon(x, y, z)$  es la función dieléctrica que describe las propiedades ópticas del medio. En una interfaz plana, la solución de esta ecuación para plasmónes superficiales tiene la forma de una onda evanescente:

$$E(x, y, z) = E_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} e^{-\kappa_y |y|} \quad (5.11)$$

donde  $k_x$  es la componente del vector de onda paralela a la interfaz,  $k_z$  es la componente de propagación, y  $\kappa_y$  es el coeficiente de decaimiento perpendicular a la interfaz.

Para aplicar la teoría de catástrofes a este sistema, se estudia el campo plasmónico como un sistema que exhibe un comportamiento auto-regulado. De manera que la solución a la ecuación de onda es de la forma:

$$\psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) e^{i\omega(\phi)t} \quad (5.12)$$

sustituyendo en la ecuación de onda aparece la ecuación no-lineal de Helmholtz:

$$\nabla^2 (\phi(x, y, z) e^{i\omega(\phi)t}) = -\frac{\omega^2(\phi)}{v^2} \phi e^{i\omega(\phi)t} \quad (5.13)$$

Aplicando el método de fase estacionaria toma la forma:

$$\nabla^2 \phi + k^2(\phi) \phi = 0 \quad (5.14)$$

Como la función de amplitud debe recuperar su comportamiento lineal, se propone

que este tenga la forma:

$$k = k_0 + a\phi \quad (5.15)$$

Para justificar más rigurosamente la dependencia del vector de onda con la amplitud en campos plasmónicos estructurados, consideremos por simpleza la superposición de dos ondas planas con amplitudes ligeramente diferentes. Este análisis nos permitirá establecer una conexión directa entre la amplitud del campo y su vector de onda efectivo, proporcionando una base sólida para nuestro modelo auto-regulado. Consideremos dos ondas planas con amplitudes  $A_1$  y  $A_2$ , donde  $A_1 = A_2 + \epsilon$ , y  $\epsilon$  es un parámetro pequeño. El campo eléctrico resultante de la superposición de estos modos puede expresarse como:

$$E(x, t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (5.16)$$

donde  $\phi = \arctan((A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2))/(A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)))$ , y  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son las fases iniciales de los modos. Primero expandamos la expresión para la amplitud tal que:

$$A = \sqrt{(A_2 + \epsilon)^2 + A_2^2 + 2(A_2 + \epsilon)A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad (5.17)$$

$$= \sqrt{4A_2^2 + 2\epsilon A_2(1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) + \epsilon^2} \quad (5.18)$$

Aplicando teoría de perturbaciones y expandiendo en series de Taylor alrededor de  $\epsilon = 0$ , obtenemos:

$$A \approx 2A_2 + \epsilon \frac{1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)}{2} + O(\epsilon^2) \quad (5.19)$$

Definimos  $S = \sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)$  y  $C = \cos(\phi_1) + \cos(\phi_2)$  para simplificar. De igual manera para la fase:

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_2 S + \epsilon \sin(\phi_2)}{A_2 C + \epsilon \cos(\phi_2)}\right) \quad (5.20)$$

$$\approx \arctan\left(\frac{S}{C}\right) + \epsilon \frac{\sin(\phi_2)C - \cos(\phi_2)S}{A_2(C^2 + S^2)} + O(\epsilon^2) \quad (5.21)$$

El vector de onda efectivo  $k'$  puede expresarse entonces como:

$$k' = k + \frac{1}{x} \left[ \arctan(S/C) + \epsilon \frac{S \sin(\phi_2) - C \cos(\phi_2)}{A_2(C^2 + S^2)} \right] \quad (5.22)$$



Esta expresión revela explícitamente cómo una pequeña diferencia en las amplitudes de los modos plasmónicos interfirientes puede llevar a una modificación del vector de onda efectivo. En el contexto de campos plasmónicos estructurados, esto puede interpretarse como un mecanismo de auto-regulación, donde la amplitud del campo modifica sus propias características de propagación. Podemos generalizar este resultado para un campo plasmónico estructurado compuesto por múltiples modos:

$$k'_n = k_n + \frac{1}{x} \sum_m \epsilon_{nm} \frac{\partial \phi_n}{\partial A_m} \quad (5.23)$$

donde  $k'_n$  es el vector de onda efectivo del  $n$ -ésimo modo,  $\epsilon_{nm}$  representa la diferencia de amplitud entre los modos  $n$  y  $m$ , y  $\frac{\partial \phi_n}{\partial A_m}$  captura la sensibilidad de la fase del  $n$ -ésimo modo a cambios en la amplitud del  $m$ -ésimo modo.

Consecuentemente, introduciendo (5.15), la ecuación de Helmholtz se convierte en:

$$\nabla^2 \phi + (K_0^2 + 2aK_0\phi + a^2\phi^2)\phi = 0 \quad (5.24)$$

Se buscan soluciones a la ecuación anterior que sigan una trayectoria a través del conjunto de bifurcación 5.4. Se hace énfasis que la geometría del conjunto de bifurcación esta controlado por la condición de frontera. La ecuación de Helmholtz toma la forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (K_0^2\phi + 2aK_0\phi^2 + a^2\phi^3) = 0 \quad (5.25)$$

Esta propuesta tiene profundas implicaciones. Una de ellas es cómo la solución presenta efectos autorregulados, lo que significa que esta ecuación se puede obtener a partir de la ecuación de onda clásica donde la dependencia temporal es de la forma  $e^{-i\omega t}$ , realizando la derivada respecto al tiempo y sustituyendo en la ecuación de onda, se obtiene la ecuación de Helmholtz no lineal. La ecuación anterior admite una primera integral de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( K_0^2 \frac{\phi^2}{2} + 2aK_0 \frac{\phi^3}{3} + a^2 \frac{\phi^4}{4} \right) = E(x, z) \quad (5.26)$$

Integrando respecto a la variable  $y$ :

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2E(x, z) - (K_0^2\phi^2 + 2aK_0\phi^3 + a^2\phi^4)}} = \pm y + C \quad (5.27)$$

La integral completa es difícil de analizar porque tiene la forma de funciones elípti-

cas. Por esta razón, realizamos un análisis en términos de funciones de catástrofe. El término dentro de los corchetes tiene la forma de una función de catástrofe cúspide.

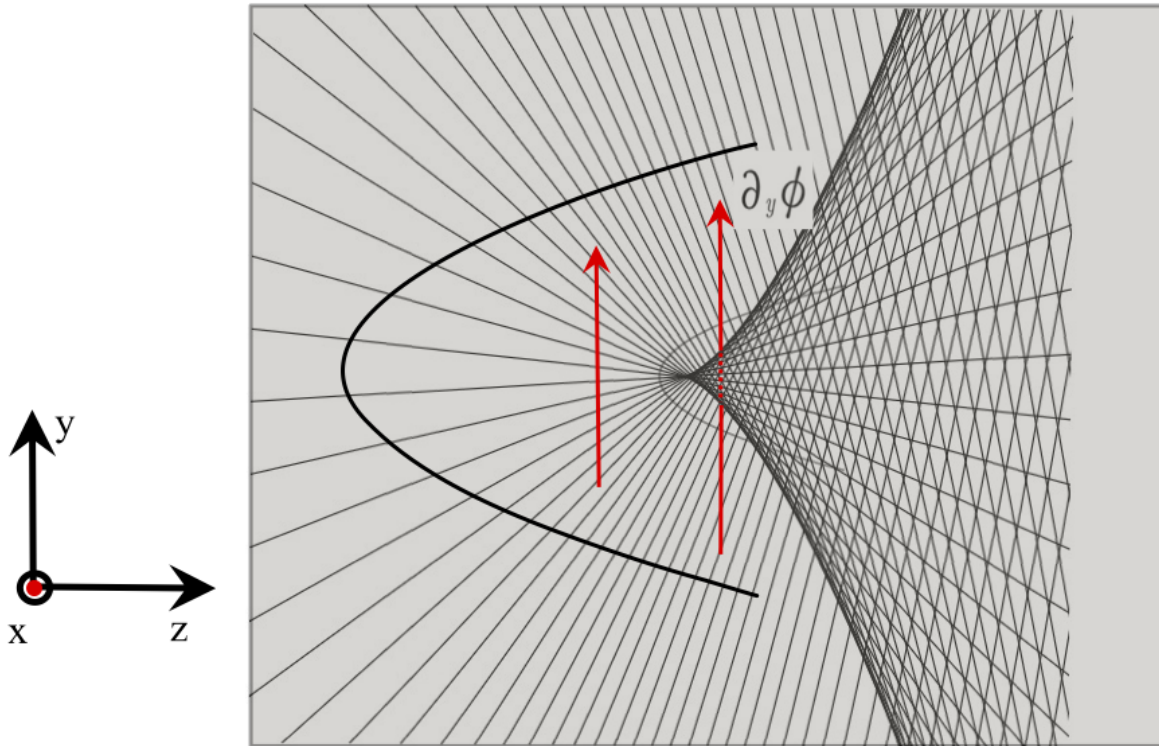


Figura 5.4: Ilustración de la región de enfoque tipo Pearcey para campos plasmónicos. La imagen muestra la formación de una cáustica plasmónica cuando la condición de contorno sigue una curva parabólica. Se observa la concentración del campo electromagnético en la región focal, donde se forma la singularidad tipo cúspide característica de la catástrofe de Pearcey.

## 5.4. Cálculo detallado de la frecuencia efectiva en la región singular

El cálculo de la frecuencia efectiva en la región singular de una cáustica plasmónica es crucial para entender cómo estos fenómenos no lineales pueden potencialmente superar la función de trabajo de un material y generar un efecto fotoeléctrico mejorado. Para abordar este problema, utilizaremos un método basado en la teoría de perturbaciones no lineales y el análisis de Fourier, específicamente el método de escalas múltiples.

Partimos de nuestra ecuación no-lineal modificada que describe la propagación del campo plasmónico:

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} + k_0^2(a\phi^3 + c\phi^2 + b\phi) = 0 \quad (5.28)$$

Esta ecuación encapsula la física esencial de nuestro sistema:  $y$  representa la coordenada espacial perpendicular a la dirección de propagación del plasmón superficial. El término lineal  $b\phi$  representa la propagación normal,  $c\phi^2$  introduce efectos no-lineales de segundo orden, y  $a\phi^3$  captura los efectos de alta intensidad en las regiones de cáustica.

Para resolver esta ecuación, asumimos que la solución tiene la forma de una onda con amplitud y fase variables:

$$\phi(y) = A(y) \cos(\Psi(y)) \quad (5.29)$$

Introducimos múltiples escalas espaciales:

$$y_0 = y, \quad y_1 = \epsilon y, \quad y_2 = \epsilon^2 y \quad (5.30)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro pequeño que caracteriza la intensidad de la no-linealidad. Físicamente,  $y_0$  representa la escala rápida de oscilación del campo, mientras que  $y_1$  y  $y_2$  representan escalas más largas en las que la amplitud y la fase evolucionan debido a efectos no lineales.

Expandimos nuestra solución en series de potencias de  $\epsilon$ :

$$\phi = \phi_0(y_0, y_1, y_2) + \epsilon\phi_1(y_0, y_1, y_2) + \epsilon^2\phi_2(y_0, y_1, y_2) + \dots \quad (5.31)$$

Al orden dominante, obtenemos:

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y_0^2} + k_0^2 b\phi_0 = 0 \quad (5.32)$$

cuya solución es:

$$\phi_0 = A(y_1, y_2) \exp(ik_0\sqrt{b}y_0) + c.c. \quad (5.33)$$

donde  $\omega_0 = k_0\sqrt{b}$  es la frecuencia lineal del plasmón superficial.

Al siguiente orden en  $\epsilon$ , obtenemos:

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial y_0^2} + k_0^2 b\phi_1 = -2\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y_0\partial y_1} - k_0^2 a\phi_0^3 - k_0^2 c\phi_0^2 \quad (5.34)$$

La condición de solubilidad para esta ecuación nos lleva a una ecuación para la evolución de la amplitud:

$$\frac{\partial A}{\partial y_1} = -i \frac{3k_0^2 a}{8k_0 \sqrt{b}} |A|^2 A - i \frac{k_0^2 c}{2k_0 \sqrt{b}} A^2 \quad (5.35)$$

Esta ecuación describe cómo la amplitud del campo cambia lentamente debido a los efectos no lineales, incluyendo ahora el término cuadrático.

La frecuencia efectiva del campo se puede calcular como:

$$k_{eff} = \frac{d\Psi}{dy} = k_0 \sqrt{b} + \epsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \dots \quad (5.36)$$

Utilizando la ecuación de evolución de la amplitud, podemos expresar la frecuencia efectiva como:

$$\omega_{eff} = \omega_0 + \frac{3k_0^2 a}{8\omega_0} |A|^2 + \frac{k_0^2 c}{2\omega_0} |A| \quad (5.37)$$

En la región de la cáustica, donde la amplitud alcanza su valor máximo  $A_{max}$ , la frecuencia efectiva será máxima:

$$\omega_{eff,max} = \omega_0 + \frac{3k_0^2 a}{8\omega_0} |A_{max}|^2 + \frac{k_0^2 c}{2\omega_0} |A_{max}| \quad (5.38)$$

Para que ocurra el efecto fotoeléctrico, necesitamos que la energía de los fotones efectivos supere la función de trabajo:

$$\hbar \omega_{eff,max} > W \quad (5.39)$$

donde  $W$  es la función de trabajo del material.

Esta condición se puede expresar explícitamente como:

$$\hbar \omega_0 + \hbar \frac{3k_0^2 a}{8\omega_0} |A_{max}|^2 + \hbar \frac{k_0^2 c}{2\omega_0} |A_{max}| > W \quad (5.40)$$

Físicamente, esta ecuación nos dice que incluso si la frecuencia original del plasmón superficial no es suficiente para causar el efecto fotoeléctrico, la concentración de energía en la cáustica puede aumentar localmente la frecuencia efectiva lo suficiente como para superar la barrera de la función de trabajo. El nuevo término cuadrático introduce una dependencia adicional en la amplitud del campo, lo que podría llevar a efectos no lineales más pronunciados o a umbrales de intensidad diferentes para la emisión fotoeléctrica.

Este fenómeno representa una forma de conversión ascendente de frecuencia mediada por la no linealidad del material. Es importante notar que este efecto ahora depende

tanto cuadrática como linealmente de la amplitud del campo, lo que podría resultar en comportamientos más complejos en las regiones de alta intensidad características de las cáusticas plasmónicas.

La validación experimental de este modelo requeriría medir cuidadosamente la emisión de electrones en función de la intensidad del campo plasmónico incidente, prestando especial atención a los umbrales de intensidad donde la emisión comienza a ocurrir para frecuencias que normalmente estarían por debajo del umbral fotoeléctrico. La presencia del término cuadrático podría manifestarse en una relación no lineal entre la intensidad del campo incidente y la energía de los electrones emitidos.

## 5.5. Descripción del campo plasmónico

El campo plasmónico puede ser generado por diversas configuraciones, pero en este estudio nos enfocamos en la excitación mediante una condición de frontera en forma de ranura curva grabada en la superficie metálica. La razón de esta elección es la condición de transversalidad [86], que implica que el campo plasmónico superficial debe propagarse de manera perpendicular a la geometría de la condición de frontera, como se muestra en la figura 5.5.

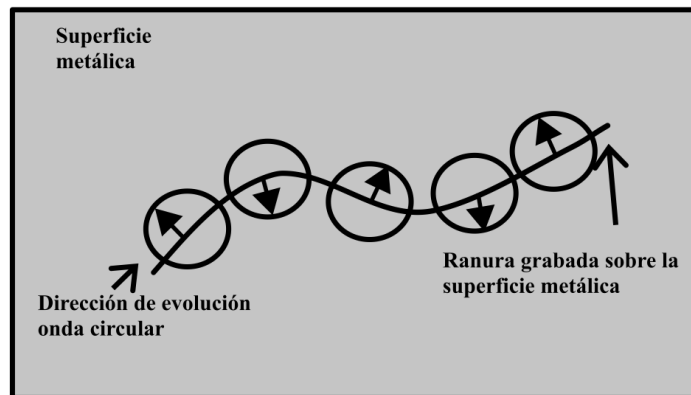


Figura 5.5: Representación esquemática de la condición de transversalidad en la generación de campos plasmónicos. La figura muestra cómo el campo plasmónico se propaga de manera perpendicular a la geometría de la condición de frontera, en este caso, una ranura curva grabada en la superficie metálica.

Todo campo plasmónico puede interpretarse como formado por un conjunto de cam-

pos plasmónicos elementales, cada uno asociado a una función de relación de dispersión  $\beta$  [6]. Para un medio semi-infinito,  $\beta$  tiene la forma:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2} \quad (5.41)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío, y  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son las permitividades del metal y el dieléctrico, respectivamente.

La expresión matemática para el campo eléctrico asociado al campo plasmónico elemental que se propaga en la coordenada  $z$  está dada por:

$$\vec{E} = \xi \exp(iz\beta) \exp(-\alpha x) \quad (5.42)$$

donde  $\xi$  es el vector de amplitud que lleva las propiedades directivas del campo plasmónico y  $\alpha$  es el factor de atenuación en la coordenada  $x$ .

Para que la Ec. (5.29) se cumpla, es necesario que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.43)$$

Esto significa que el promedio de la distribución de carga en la superficie metálica es cero. Reescribiendo el vector  $\xi$  de forma explícita, el campo eléctrico adquiere la forma:

$$\vec{E} = (a\hat{i} + b\hat{k}) \exp(iz\beta) \exp(-\alpha x) \quad (5.44)$$

La Eq. (5.32) implica una condición de balance entre los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$ , y  $\alpha$ , dada por:

$$(-a\alpha + bi\beta) = 0 \Rightarrow b = \frac{\alpha}{i\beta} a \quad (5.45)$$

La expresión para el campo plasmónico superficial elemental es entonces:

$$\vec{E} = \left( a\hat{i} + \frac{\alpha}{i\beta} a\hat{k} \right) \exp(iz\beta) \exp(-\alpha x) \quad (5.46)$$

Una expresión general puede obtenerse realizando una rotación alrededor del eje  $x$ , lo que resulta en un campo plasmónico superficial propagándose en la superficie  $y$ - $z$ :

$$\vec{E} = \left( a\hat{i} + \frac{\alpha}{i\beta} a \sin \theta \hat{j} + \frac{\alpha}{i\beta} a \cos \theta \hat{k} \right) \exp[i\beta(z \cos \theta + y \sin \theta)] \exp(-\alpha x) \quad (5.47)$$

Esta estructura dada por la Eq. (5.35) aún cumple con  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Utilizando el hecho de que los campos plasmónicos superficiales arbitrarios pueden expresarse como una suma de modos elementales, el campo plasmónico total es:

$$\vec{E}_T = \sum_n \left( a_n \hat{i} + \frac{\alpha}{i\beta} a_n \sin \theta_n \hat{j} + \frac{\alpha}{i\beta} a_n \cos \theta_n \hat{k} \right) \exp[i\beta(z \cos \theta_n + y \sin \theta_n)] \exp(-\alpha x) \quad (5.48)$$

La última ecuación es la representación discreta para el modelo del espectro angular. Para una representación continua, adquiere la forma:

$$\vec{E}_T = \iint \xi(u, v) \exp[i\beta(zu + yv)] \exp(-\alpha x) dudv \quad (5.49)$$

Debido a la linealidad, las Eqs. (5.36) y (5.37) satisfacen  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . En las siguientes secciones, mostraremos que esta condición no se cumple en las regiones de enfoque, generando redistribuciones de carga.

## 5.6. Generación de redistribución de carga

En esta sección, exploramos cómo las regiones de enfoque del campo plasmónico pueden llevar a la generación de redistribuciones de carga. Este fenómeno es crucial para entender la formación de cáusticas plasmónicas y sus posibles aplicaciones.

El modelo de Huygens-Fresnel establece que desde cada punto de una superficie emerge una onda circular. En nuestro caso, desde cada punto emerge una onda plasmónica circular. Para incluir un comportamiento vectorial, proponemos una condición de frontera de la forma:

$$\hat{T}(y, z) = \hat{\xi}(y, z) \delta(y - f(z)) \quad (5.50)$$

donde  $\delta$  es la función delta de Dirac, y  $\hat{T}(y, z)$  debe ser una función vectorial. Esto significa que desde cada punto de la ranura emerge una onda plasmónica circular, cuya evolución está determinada por el vector  $\hat{\xi}$ .

Esta representación permite geometrizar la integral de difracción plasmónica. El campo plasmónico puede escribirse como:

$$\vec{E}_T = \exp(-\alpha x) \int \hat{\xi}(y, z) \delta(y - f(z)) \frac{\exp(ikr)}{r} dy \quad (5.51)$$

donde  $r = [(y - y_0)^2 + (z_0 - f(y))^2]^{1/2}$ . La última ecuación nos permite hacer una descripción de la fase plasmónica para analizar la función de catástrofe asociada con el campo plasmónico.

A partir de la función de fase, podemos deducir la estructura del campo plasmónico. Cuando sigue un comportamiento no lineal, puede interpretarse como una función de catástrofe. La función delta de Dirac permite generar una estructura de fase  $f(y) = y^2$ , y la función de fase está dada por:

$$L = \beta \sqrt{(y - y_0)^2 + (z_0 - y^2)^2} \quad (5.52)$$

Esta ecuación puede expandirse como:

$$L = \beta \sqrt{y^4 + y^2(1 - 2z_0) + y(-2y_0) + z_0^2 + y_0^2} \quad (5.53)$$

La Ec. (5.41) tiene una estructura de función de catástrofe. Para generar la región de enfoque tipo Pearcey, debemos encontrar la envolvente de los puntos críticos. Utilizando el principio de Fermat:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} \beta \frac{4y^3 + 2ay + b}{\sqrt{y^4 + ay^2 + by + c}} = 0 \quad (5.54)$$

donde  $a = (1 - 2z_0)$ ,  $b = (-2y_0)$  y  $c = z_0^2 + y_0^2$ .

Analizando los términos en la Eq. (5.42), notamos que el término dentro de la raíz no puede ser cero porque esto implica que no existe una función de fase. Por lo tanto, el segundo término debe ser cero:

$$4y^3 + 2ay + b = 0 \quad (5.55)$$

Si obtenemos la segunda derivada, es posible encontrar la envolvente de los puntos críticos:

$$12y^2 + 2a = 0 \Rightarrow y = \left(-\frac{a}{6}\right)^{1/2} \quad (5.56)$$

Sustituyendo la Eq. (5.44) en (5.43), obtenemos:

$$4 \left(-\frac{a}{6}\right)^{3/2} + 2a \left(-\frac{a}{6}\right)^{1/2} + b = 0 \quad (5.57)$$

Esto significa que  $b = b(a)$ , lo que implica que estamos en la región de enfoque mostrada en la figura 5.2.

El campo plasmónico adquiere entonces la forma:



$$E_T = \int \hat{\xi}(y, z) \sqrt{y^4 + ay^2 + by + c} \exp(-\alpha x) \exp(i\beta \sqrt{y^4 + ay^2 + b(a)y + c}) dy \quad (5.58)$$

En la ecuación anterior, debe notarse que  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$  genera una redistribución de carga cuya representación está dada por:

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial a} \propto \varepsilon \exp(-\alpha x) \int i\beta \hat{\xi}(y) \frac{\exp\{i\beta(y^4 + ay^2 + b(a)y + c)^{-1/2}\} (y^2 + b'(a))}{2r} dy \quad (5.59)$$

Como conclusión parcial, el campo eléctrico plasmónico induce redistribuciones de carga en las regiones de enfoque que se utilizarán para generar procesos como el efecto fotoeléctrico plasmónico.

## 5.7. Resultados numéricos

Para visualizar los efectos de enfocamiento de los plasmones superficiales numéricamente, se considero una interfase curva en analogía a la ranura grabada en la superficie del metal. Por tanto los parámetros son los mismos usados en la sección 4.2.1, con excepción de la geometría la cual se modifico el ancho por un factor de  $\lambda/4$ . Los resultados numéricos presentados en las Figuras 5.6 y 5.7 ofrecen una visión fascinante de la propagación de plasmones superficiales y la formación de cáusticas plasmónicas en diversas geometrías. Estas simulaciones revelan la distribución del campo electromagnético, específicamente la componente  $y$  y de la polarización Drude-Lorentz y el campo magnético  $z$ , en la superficie de estructuras metálicas con formas distintas.

En la Figura 5.6, observamos tres geometrías fundamentales: una estructura semicircular, una elíptica y una parabólica. Cada una de estas formas interactúa de manera única con los plasmones superficiales, dando lugar a patrones de propagación y concentración de campo característicos. La Figura 5.7 complementa este estudio al proporcionar un acercamiento detallado de la estructura parabólica en dos instantes temporales diferentes, permitiéndonos observar la evolución dinámica de las cáusticas plasmónicas.

La propagación de los plasmones superficiales se manifiesta claramente en todas las geometrías estudiadas. Estas ondas electromagnéticas, confinadas en la interfaz metal-dieléctrico, siguen fielmente la curvatura de las estructuras metálicas. En el caso de la estructura semicircular, los plasmones se propagan de manera uniforme a lo largo de la superficie curva, creando un patrón simétrico y predecible. La estructura elíptica,

por su parte, induce una propagación asimétrica debido a su geometría no uniforme, lo que resulta en una distribución de campo más compleja. La estructura parabólica presenta el caso más intrigante, donde la propagación se concentra hacia el vértice de la parábola, dando lugar a efectos de enfocamiento notables.

El fenómeno más destacado en estos resultados es, sin duda, la formación de cústicas plasmónicas. Estas se manifiestan como regiones de alta intensidad de campo electromagnético, claramente visibles tanto en los gráficos de polarización como en los de campo magnético. En la estructura semicircular, observamos una concentración de campo en el centro de la curvatura, formando una cústica focal simple. La estructura elíptica presenta una cústica más compleja, con dos puntos focales característicos de su geometría. Sin embargo, es la estructura parabólica la que exhibe el caso más fascinante, con una fuerte concentración de campo en su foco, formando una cústica plasmónica bien definida y particularmente intensa.

La evolución temporal de la cústica plasmónica en la estructura parabólica, ilustrada en la Figura 5.7, añade una dimensión crucial a nuestro entendimiento. En el instante inicial, observamos la formación incipiente de la cústica en el foco de la parábola. En un momento posterior, esta cústica se ha desarrollado completamente, mostrando una mayor intensidad y una estructura más compleja. Esta progresión temporal subraya que la formación de cústicas plasmónicas es un proceso dinámico, donde la interferencia constructiva de los plasmones superficiales se acumula con el tiempo, intensificando el campo en el punto focal.

Estos resultados numéricos tienen implicaciones profundas y abren un abanico de aplicaciones potenciales. Primero, demuestran que es posible controlar la formación y características de las cústicas plasmónicas mediante el diseño cuidadoso de la estructura metálica. Esta capacidad de control geométrico es crucial para la ingeniería de dispositivos plasmónicos avanzados. Segundo, la formación de cústicas plasmónicas permite concentrar el campo electromagnético en regiones extremadamente pequeñas, superando el límite de difracción convencional. Esta propiedad podría revolucionar campos como la microscopía de super-resolución y potenciar diversos procesos ópticos no lineales.

Además, el aumento significativo de la intensidad local del campo en las cústicas podría llevar a un incremento sustancial de la frecuencia efectiva local. Este fenómeno es particularmente relevante para nuestra investigación sobre el efecto fotoeléctrico mejorado, ya que podría permitir superar la función de trabajo en materiales que normalmente no exhibirían emisión fotoeléctrica bajo iluminación convencional.

En un contexto más amplio, estos resultados proporcionan pautas valiosas para el

diseño de dispositivos plasmónicos optimizados. La capacidad de ajustar la geometría para obtener distribuciones de campo específicas abre nuevas posibilidades en áreas como la detección molecular ultrasensible, la catálisis plasmónica y las tecnologías de información cuántica basadas en plasmones.

En conclusión, estos resultados numéricos no solo validan nuestro modelo teórico, sino que también revelan la rica y compleja física involucrada en la formación de cáusticas plasmónicas. Demuestran el potencial de las estructuras plasmónicas para manipular y concentrar la luz a escalas nanométricas de maneras previamente inaccesibles. A medida que continuamos explorando este fascinante campo, anticipamos que las cáusticas plasmónicas jugarán un papel cada vez más importante en el desarrollo de nuevas tecnologías ópticas y fotónicas, abriendo caminos para el control y aprovechamiento de campos electromagnéticos intensos a escala nanométrica.

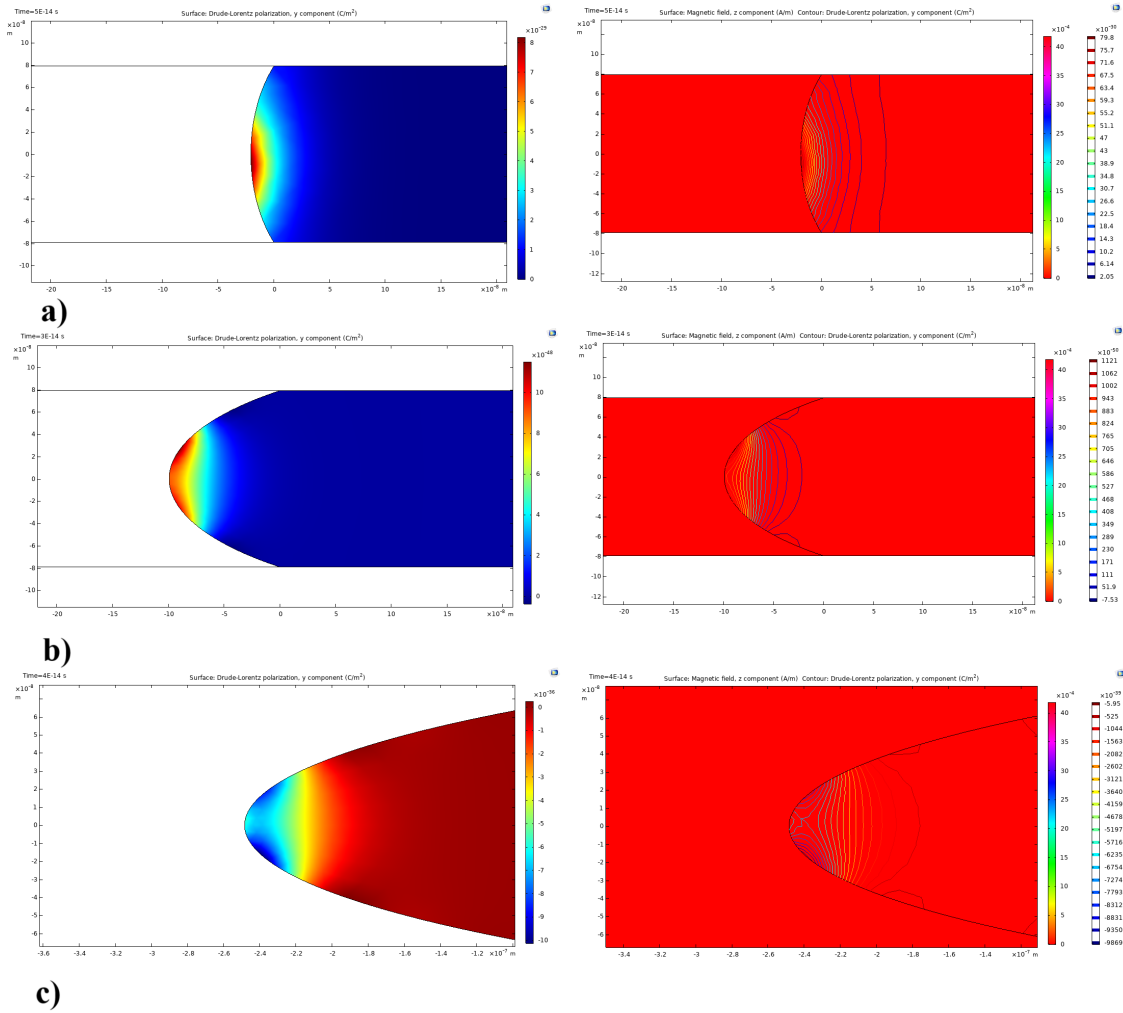


Figura 5.6: Simulaciones numéricas 2D de la propagación de plasmones superficiales en diferentes geometrías después de 110 fs. (a) Estructura semicircular. (b) Estructura elíptica. (c) Estructura parabólica. En cada par de imágenes, la izquierda muestra la componente y del campo de polarización y la derecha muestra la componente z del campo magnético. Las imágenes ilustran la formación de cáusticas plasmónicas y la concentración del campo electromagnético en regiones específicas dependiendo de la geometría.

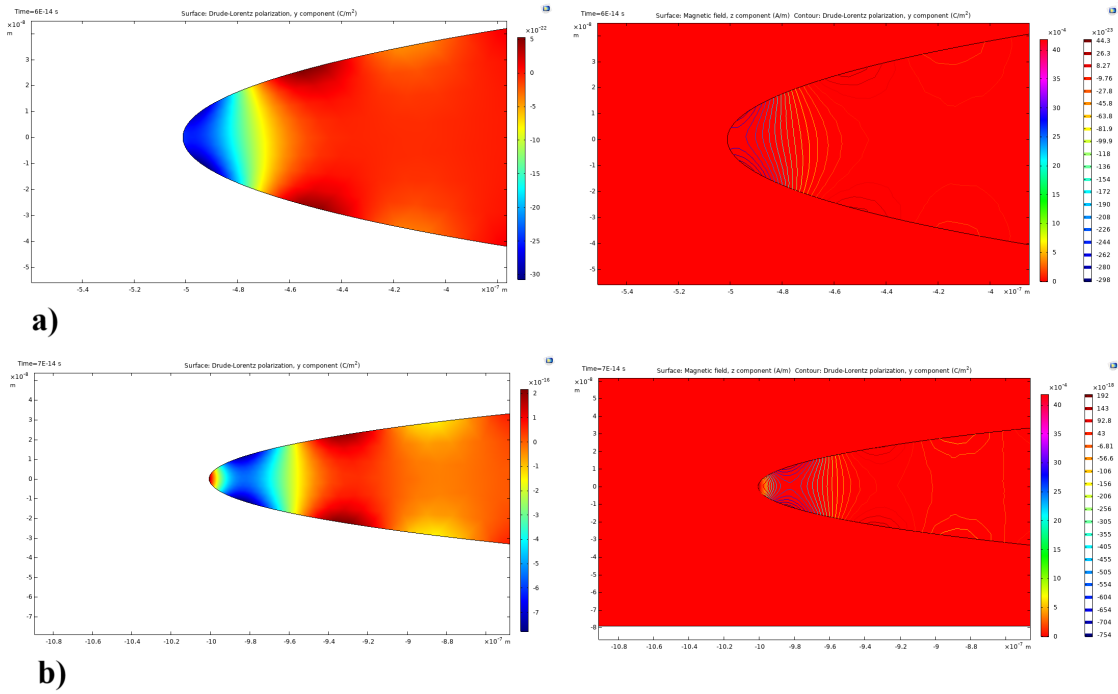


Figura 5.7: Evolución temporal de la cáustica plasmónica en una estructura parabólica. (a) Componente y del campo de polarización en un instante inicial  $t_1$ . (b) Componente  $z$  del campo magnético en el instante inicial  $t_1$ . (c) Componente y del campo de polarización en un instante posterior  $t_2$ . (d) Componente  $z$  del campo magnético en el instante  $t_2$ . Las imágenes ilustran el desarrollo y la intensificación de la cáustica plasmónica en el foco de la parábola a lo largo del tiempo.

---

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

Esta tesis ha logrado avances significativos en la comprensión y manipulación de ondas evanescentes y plasmones superficiales. Derivamos con éxito una función de relación de dispersión para OE, incorporando su naturaleza no homogénea, lo que proporciona una base sólida para la óptica bidimensional que involucra OE. Nuestro análisis de la interferencia de OE reveló un control preciso sobre las propiedades de polarización del campo óptico resultante, con potenciales aplicaciones en dispositivos ópticos avanzados. El modelo de espectro angular evanescente desarrollado permite predecir y analizar efectos de difracción en campos evanescentes, incluyendo la formación de patrones de auto-imagen. La configuración propuesta para excitar SSPPs mediante el acoplamiento con OE interferidas ofrece ventajas significativas sobre los métodos convencionales, permitiendo un mayor control sobre la estructura del campo plasmónico. La aplicación de la teoría de catástrofes al estudio de plasmones superficiales ha revelado mecanismos de formación de cáusticas plasmónicas, proporcionando nuevas perspectivas sobre el enfocamiento de campos electromagnéticos a escala nanométrica. Las simulaciones numéricas confirmaron la formación de cáusticas plasmónicas en diversas geometrías y demostraron el potencial de estas estructuras para concentrar campos electromagnéticos más allá del límite de difracción. El modelo teórico desarrollado para las cáusticas plasmónicas predice la posibilidad de inducir efectos no-lineales localizados, incluyendo un efecto fotoeléctrico mejorado, lo que abre nuevas vías para aplicaciones en óptica no-lineal y fotónica. En conjunto, este trabajo sienta las bases para futuras investigaciones en nanofotónica, ofreciendo nuevas herramientas para el diseño de dispositivos plasmónicos avanzados y el control preciso de la luz a escalas subwavelength.

La investigación presentada en esta tesis abre numerosas vías para futuros estudios y aplicaciones en el campo de la nanofotónica y la plasmónica. Un área particularmente

prometedora para la investigación futura es el estudio de la propagación de plasmones en guías de onda utilizando matrices estocásticas y cadenas de Markov. Este enfoque permitiría modelar de manera más precisa los efectos de la dispersión y las pérdidas en sistemas plasmónicos complejos, teniendo en cuenta las fluctuaciones aleatorias inherentes a escala nanométrica. La aplicación de métodos estocásticos podría proporcionar una comprensión más profunda de la dinámica de los plasmones en presencia de desorden y rugosidad superficial, factores críticos en dispositivos plasmónicos reales. Además, el uso de cadenas de Markov podría facilitar el análisis de la evolución temporal de los estados plasmónicos en guías de onda ramificadas o en redes plasmónicas complejas, permitiendo el diseño de circuitos ópticos más eficientes y robustos. Otra dirección interesante sería la extensión del modelo de cáusticas plasmónicas desarrollado en esta tesis para incluir efectos cuánticos, explorando así la interfaz entre la plasmónica clásica y la cuántica. Esto podría llevar al desarrollo de nuevos dispositivos híbridos que aprovechen tanto los efectos plasmónicos clásicos como los cuánticos. También sería valioso investigar la aplicación de los conceptos desarrollados aquí en el campo emergente de la optomecánica cuántica, explorando cómo las cáusticas plasmónicas podrían utilizarse para mejorar la interacción entre la luz y los sistemas mecánicos a escala nanométrica. Finalmente, la integración de materiales bidimensionales como el grafeno en las estructuras plasmónicas estudiadas podría abrir nuevas posibilidades para dispositivos sintonizables y reconfigurables, aprovechando las propiedades únicas de estos materiales en combinación con los fenómenos plasmónicos explorados en esta tesis.

---

# Bibliografía

- [1] Lukas Novotny y Bert Hecht. *Principles of nano-optics*. Cambridge university press, 2012.
- [2] William L Barnes, Alain Dereux y Thomas W Ebbesen. “Surface plasmon sub-wavelength optics”. En: *Nature* 424.6950 (2003), págs. 824-830.
- [3] Stefan Alexander Maier. *Plasmonics: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [4] Anatoly V Zayats, Igor I Smolyaninov y Alexei A Maradudin. “Nano-optics of surface plasmon polaritons”. En: *Physics reports* 408.3-4 (2005), págs. 131-314.
- [5] Daniel Courjon. *Near-field microscopy and near-field optics*. World Scientific, 2003.
- [6] Heinz Raether. *Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*. Springer, 1988.
- [7] Sergey I Bozhevolnyi, Valentyn S Volkov, Eloïse Devaux, Jean-Yves Laluet y Thomas W Ebbesen. “Channel plasmon subwavelength waveguide components including interferometers and ring resonators”. En: *Nature* 440.7083 (2006), págs. 508-511.
- [8] Michael V Berry y Christopher Upstill. “Catastrophe optics: Morphologies of caustics and their diffraction patterns”. En: *Progress in optics* 18 (1980), págs. 257-346.
- [9] John Frederick Nye. *Natural focusing and fine structure of light: caustics and wave dislocations*. CRC Press, 1999.
- [10] Fabian C. Cubillos-Morales, Gabriel Martínez Niconoff e Ilse I. Cazares Aguilar. “Structured surface plasmon generated with interfered evanescent waves”. En: *Plasmonics: Design, Materials, Fabrication, Characterization, and Applications XXI*. Ed. por Takuo Tanaka y Yu-Jung Lu. Vol. 12648. International Society for Optics y Photonics. SPIE, 2023, pág. 126480I. DOI: 10.1117/12.2677890. URL: <https://doi.org/10.1117/12.2677890>.



- 
- [11] Dror Sarid y William Challener. *Modern introduction to surface plasmons: theory, mathematica modeling, and applications*. Cambridge University Press, 2010.
- [12] Patrice Genevet y Federico Capasso. “Holographic optical metasurfaces: a review of current progress”. En: *Reports on Progress in Physics* 78.2 (2015), pág. 024401.
- [13] Mark R Dennis, Kevin O’Holleran y Miles J Padgett. “Singular optics: optical vortices and polarization singularities”. En: *Progress in Optics* 53 (2008), págs. 293-363.
- [14] Jeffrey N Anker, W Paige Hall, Olga Lyandres, Nilam C Shah, Jing Zhao y Richard P Van Duyne. “Biosensing with plasmonic nanosensors”. En: *Nature materials* 7.6 (2008), págs. 442-453.
- [15] Rupert F Oulton, Volker J Sorger, DA Genov, DFP Pile y X Zhang. “A hybrid plasmonic waveguide for subwavelength confinement and long-range propagation”. En: *Nature Photonics* 2.8 (2008), págs. 496-500.
- [16] David AB Miller. “Are optical transistors the logical next step?” En: *Nature Photonics* 4.1 (2010), págs. 3-5.
- [17] Surbhi Lal, Stephan Link y Naomi J Halas. “Nano-optics from sensing to waveguiding”. En: *Nature photonics* 1.11 (2007), págs. 641-648.
- [18] Mark S Tame, KC McEnery, ŞK Özdemir, J Lee, Stefan A Maier y MS Kim. “Quantum plasmonics”. En: *Nature Physics* 9.6 (2013), págs. 329-340.
- [19] Max Born y Emil Wolf. “Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light”. En: *Cambridge university press* (1999).
- [20] Eugene Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 2002.
- [21] Daniel Axelrod. “Total internal reflection fluorescence microscopy in cell biology”. En: *Traffic* 2.11 (2001), págs. 764-774.
- [22] Arthur Ashkin. “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure”. En: *Physical review letters* 24.4 (1970), pág. 156.
- [23] Steven Chu, JE Bjorkholm, A Ashkin y Alex Cable. “Experimental observation of optically trapped atoms”. En: *Physical Review Letters* 57.3 (1986), pág. 314.
- [24] Brian Culshaw. “Optical fiber sensor technologies: opportunities and-pitfalls”. En: *Journal of lightwave technology* 22.1 (2004), pág. 39.
- [25] NJ Harrick. “Surface chemistry from spectral analysis of totally internally reflected radiation”. En: *The Journal of Physical Chemistry* 64.9 (1960), págs. 1110-1114.

- [26] Weilu Gao, Jie Shu, Kimberly Reichel, Daniel V Nickel, Xiaowei He, Guang Shi, Robert Vajtai, Pulickel M Ajayan, Junichiro Kono, Daniel M Mittleman et al. “Graphene-based Bragg grating for the excitation of surface electromagnetic waves”. En: *Nano letters* 13.10 (2013), págs. 4745-4751.
- [27] David J Griffiths y Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [28] Eric Betzig y Jay K Trautman. “Near-field optics: microscopy, spectroscopy, and surface modification beyond the diffraction limit”. En: *Science* 257.5067 (1992), págs. 189-195.
- [29] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [30] Y. Liu, Y. Ke, H. Luo y S. Wen. “Photonic spin Hall effect in metasurfaces: a brief review”. En: *Nanophotonics* 6.1 (2017), págs. 51-70. DOI: 10.1515/nanoph-2015-0155.
- [31] Peter de Groot. “Optical surface profiling at the 50-picometer level”. En: *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection IX* 9525 (2015), 95251P.
- [32] Yuancheng Fan, Nian-Hai Shen, Thomas Koschny y Costas M Soukoulis. “Graphene plasmonics for tunable terahertz metamaterials”. En: *ACS Photonics* 6.12 (2019), págs. 3303-3318.
- [33] Anton Autere, Henri Jussila, Yunyun Dai, Yadong Wang, Harri Lipsanen y Zhipei Sun. “Nonlinear optics with 2D layered materials”. En: *Advanced Materials* 30.24 (2018), pág. 1705963.
- [34] Geovanni Arenas Muñoz, Ilse I. Cazares Aguilar, Elizabeth Saldivia Gomez, Juan C. Atenco Cuautle, Fabian Cubillos Morales, Andrea Garcia Guzman, Patricia Martinez Vara y Gabriel Martinez Niconoff. “Determination of the dispersion relation function for evanescent waves and its application to surface optical fields”. En: *Opt. Eng.* 62.5 (2023), pág. 058102. DOI: 10.1117/1.0E.62.5.058102.
- [35] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [36] Leonard Mandel y Emil Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [37] Heinz Raether. “Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings”. En: *Springer Tracts in Modern Physics* 111 (1988), págs. 1-133.
- [38] Todd Van Mechelen y Zubin Jacob. “Universal spin-momentum locking of evanescent waves”. En: *Optica* 3.2 (2016), págs. 118-126.

- [39] Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko. *Classical mechanics*. Addison Wesley, 2002.
- [40] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic Press, 2020.
- [41] Yuen-Ron Shen. *The principles of nonlinear optics*. Wiley-Interscience, 1984.
- [42] Stefan Alexander Maier. *Plasmonics: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [43] Robert Clark Jones. “A new calculus for the treatment of optical systems”. En: *Journal of the Optical Society of America* 31.7 (1941), págs. 488-493.
- [44] Jiao Lin, J P Balthasar Mueller, Qian Wang, Guanghui Yuan, Nicholas Antoniou, Xiao-Cong Yuan y Federico Capasso. “Polarization-controlled tunable directional coupling of surface plasmon polaritons”. En: *Science* 340.6130 (2013), págs. 331-334. DOI: 10.1126/science.1233746.
- [45] James A Lock. “Angular spectrum and localized model of Davis-type beam”. En: *Journal of the Optical Society of America A* 30.3 (2013), págs. 489-500. DOI: 10.1364/JOSAA.30.000489.
- [46] Henry Fox Talbot. “Facts relating to optical science. No. IV”. En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9.56 (1836), págs. 401-407.
- [47] I. Cázares-Aguilar, J.C. Atenco, P. Martínez-Vara, F. Cubillos-Morales, I. Julián-Macías y G. Martínez-Niconoff. “Stochastic modulation of the Montgomery’s rings to generate the self-imaging effect with revival features”. En: *Results in Optics* 16 (2024), pág. 100714. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rio.2024.100714>.
- [48] Weiwei Zhang, Chenlong Zhao, Jiabin Wang y Jingjing Zhang. “An experimental study of the plasmonic Talbot effect”. En: *Optics Express* 17.22 (2009), págs. 19757-19762. DOI: 10.1364/OE.17.019757.
- [49] B. Hecht, H. Bielefeldt, L. Novotny, Y. Inouye y D. W. Pohl. “Local Excitation, Scattering, and Interference of Surface Plasmons”. En: *Physical Review Letters* 77.9 (1996), págs. 1889-1892. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.1889.
- [50] A. Drezet, A. Hohenau, A. L. Stepanov, H. Ditlbacher, B. Steinberger, N. Galler, F. R. Aussenegg, A. Leitner y J. R. Krenn. “How to erase surface plasmon fringes”. En: *Applied Physics Letters* 89.9 (2006), pág. 091117. DOI: 10.1063/1.2339043.
- [51] Ekmel Ozbay. “Plasmonics: merging photonics and electronics at nanoscale dimensions”. En: *Science* 311.5758 (2006), págs. 189-193.

- [52] Jon A Schuller, Edward S Barnard, Wenshan Cai, Young Chul Jun, Justin S White y Mark L Brongersma. “Plasmonics for extreme light concentration and manipulation”. En: *Nature Materials* 9.3 (2010), págs. 193-204.
- [53] Erwin Kretschmann y Heinz Raether. “Radiative decay of non radiative surface plasmons excited by light”. En: *Zeitschrift für Naturforschung A* 23.12 (1968), págs. 2135-2136.
- [54] Andreas Otto. “Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection”. En: *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei* 216.4 (1968), págs. 398-410.
- [55] Heinz Raether. *Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*. Springer, 1988.
- [56] Rémi Bruhier y Alexandre Bouhelier. “Surface plasmon polaritons: From theory to deep subwavelength focusing”. En: *ACS Photonics* 9.10 (2022), págs. 3226-3247.
- [57] Eric M Yeatman. “Surface plasmon spatial light modulators based on liquid crystal”. En: *Applied Physics Letters* 57.16 (1990), págs. 1636-1638.
- [58] Zheyu Fang, Yinmin Wang y Sebastian Schlucker. “Nanoplasmonic modulators based on electrically controlled optical Kerr effect in graphene”. En: *Nano Letters* 15.9 (2015), págs. 6235-6240.
- [59] R Vander y SG Lipson. “High-resolution surface plasmon resonance imaging for single cells”. En: *Biophysical Journal* 96.12 (2009), págs. 5082-5088.
- [60] Jongwoo Kim, Youngjin Oh y No-Cheol Park. “Advanced plasmonic lithography: principles, challenges, and perspectives”. En: *Nanophotonics* 12.4 (2023), págs. 697-721.
- [61] Amanda J Haes y Richard P Van Duyne. “A nanoscale optical biosensor: sensitivity and selectivity of an approach based on the localized surface plasmon resonance spectroscopy of triangular silver nanoparticles”. En: *Journal of the American Chemical Society* 125.6 (2003), págs. 1779-1784.
- [62] Jirí Homola, Sinclair S Yee y Günter Gauglitz. “Surface plasmon resonance sensors: review”. En: *Sensors and Actuators B: Chemical* 54.1-2 (1999), págs. 3-15.
- [63] Matthew J Dicken, Luke A Sweatlock, Domenico Pacifici, Henri J Lezec, Kaushik Bhattacharya y Harry A Atwater. “Electrooptic modulation in thin film barium titanate plasmonic interferometers”. En: *Nano Letters* 8.11 (2008), págs. 4048-4052.
- [64] Palash Bharadwaj, Bradley Deutsch y Lukas Novotny. “Optical antennas”. En: *Advances in Optics and Photonics* 1.3 (2009), págs. 438-483.

- [65] Marinko Jablan, Hrvoje Buljan y Marin Soljačić. “Plasmonics in graphene at infrared frequencies”. En: *Physical Review B* 80.24 (2009), pág. 245435.
- [66] Tony Low y Phaedon Avouris. “Graphene plasmonics for terahertz to mid-infrared applications”. En: *ACS Nano* 8.2 (2014), págs. 1086-1101.
- [67] Long Ju, Baisong Geng, Jason Horng, Caglar Girit, Michael Martin, Zhao Hao, Hans A Bechtel, Xiaogan Liang, Alex Zettl, Y Ron Shen et al. “Graphene plasmonics for tunable terahertz metamaterials”. En: *Nature Nanotechnology* 6.10 (2011), págs. 630-634.
- [68] Achim Woessner, Mark B Lundberg, Yuanda Gao, Alessandro Principi, Pablo Alonso-González, Matteo Carrega, Kenji Watanabe, Takashi Taniguchi, Giovanni Vignale, Marco Polini et al. “Highly confined low-loss plasmons in graphene–boron nitride heterostructures”. En: *Nature Materials* 14.4 (2015), págs. 421-425.
- [69] Xiaoxia Yang, Xiangjian Kong, Baojun Bai, Xiaoyun Li, Dai Qing y Gengping Qin. “Graphene plasmonics for tunable terahertz metamaterials”. En: *Optics Express* 22.22 (2014), págs. 27054-27061.
- [70] William L Barnes, Alain Dereux y Thomas W Ebbesen. “Surface plasmon sub-wavelength optics”. En: *Nature* 424.6950 (2003), págs. 824-830.
- [71] Aleksandar D Rakić, Aleksandra B Djurišić, Jovan M Elazar y Marian L Majewski. “Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices”. En: *Applied optics* 37.22 (1998), págs. 5271-5283.
- [72] Uwe Kreibig y Michael Vollmer. *Optical properties of metal clusters*. Vol. 25. Springer Science & Business Media, 1995.
- [73] E. Saldivia Gomez, G. Arenas Munoz, J. C. Atenco Cuautle, F. Cubillos Morales, J. A. Martinez Martinez, P. Martinez Vara y G. Martinez Niconoff. “Stability of focusing regions and its vortex-solitonic properties”. En: *Optics Letters* 45.18 (2020), págs. 5121-5124. DOI: <https://doi.org/10.1364/OL.400069>.
- [74] Dmitri K Gramotnev y Sergey I Bozhevolnyi. “Plasmonics beyond the diffraction limit”. En: *Nature photonics* 4.2 (2010), págs. 83-91.
- [75] Martti Kauranen y Anatoly V Zayats. “Nonlinear plasmonics”. En: *Nature photonics* 6.11 (2012), págs. 737-748.

- [76] Jiao Lin, JP Balthasar Mueller, Qian Wang, Guanghui Yuan, Nicholas Antoniou, Xiao-Cong Yuan y Federico Capasso. “Polarization-controlled tunable directional coupling of surface plasmon polaritons”. En: *Science* 340.6130 (2013), págs. 331-334.
- [77] Jon A Schuller, Edward S Barnard, Wenshan Cai, Young Chul Jun, Justin S White y Mark L Brongersma. “Plasmonics for extreme light concentration and manipulation”. En: *Nature materials* 9.3 (2010), págs. 193-204.
- [78] René Thom. *Stabilité structurelle et morphogénèse*. New York: Benjamin-Addison Wesley, 1972.
- [79] Robert Gilmore. *Catastrophe theory for scientists and engineers*. New York: Dover Publications, 1981.
- [80] E. C. Zeeman. “Catastrophe Theory”. En: *Scientific American* 234.4 (1977), págs. 65-83.
- [81] Zhaowei Liu, Jennifer M. Steele, Werayut Srituravanich, Yuri Pikus, Cheng Sun y Xiang Zhang. “Focusing Surface Plasmons with a Plasmonic Lens”. En: *Nano Letters* 5.9 (2005), págs. 1726-1729. DOI: 10.1021/n1051013j.
- [82] Zheyu Fang, Yinmin Wang y Sebastian Schlücker. “Plasmonic Emission of Bullseye Nanoemitters on Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> Nanoflakes”. En: *Nano Letters* 15.9 (2015), págs. 6235-6240. DOI: 10.1021/acs.nanolett.5b02775.
- [83] Clara I. Osorio, Abbas Mohtashami y A. Femius Koenderink. “K-space polarimetry of bullseye plasmon antennas”. En: *Scientific Reports* 5 (2015), pág. 9966. DOI: 10.1038/srep09966.
- [84] Daniel B. Durham, Fabrizio Riminucci, Filippo Ciabattini, Andrea Mostacci, Andrew M. Minor, Stefano Cabrini y Daniele Filippetto. “Plasmonic Lenses for Tunable Ultrafast Electron Emitters at the Nanoscale”. En: *Phys. Rev. Appl.* 12 (5 nov. de 2019), pág. 054057. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.12.054057.
- [85] G. Martínez-Niconoff, J. A. Sánchez-Gil, H. V. Pérez-Martínez y P. Martínez-Vara. “Self-imaging and caustics in two-dimensional surface plasmon optics”. En: *Optics Communications* 359 (2016), págs. 207-213. DOI: 10.1016/j.optcom.2015.09.074.
- [86] Lev Elsgolts. *Differential Equations and the Calculus of Variations*. 1st. Translated from Russian by G. Yankovsky. Moscow: Mir Publishers, 1969.