



**INAOE**

**INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA,  
ÓPTICA Y ELECTRÓNICA.**

**Atajos a la adiabaticidad  
para el oscilador armónico  
cuántico y clásico.**

por

**Lic. Montserrat Huerta Sandoval.**

Tesis sometida como requisito para obtener el grado de:

**Maestra en Ciencias en la Especialidad  
de Óptica.**

Agosto de 2024,

Tonantzintla, Puebla.

Supervisada por:

**Dr. Irán Ramos Prieto**

Coordinación de Óptica, INAOE.

©INAOE 2024

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes mencionando la fuente.





# Agradecimientos

Al culminar esta etapa tan significativa en mi formación académica, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una u otra manera, han contribuido a que este proyecto se convierta en una realidad.

En primer lugar, agradezco profundamente a mi asesor de tesis, el Dr. Irán Ramos, por su invaluable orientación, paciencia y constante apoyo. Su dedicación y conocimiento fueron fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

No puedo dejar de mencionar a mis compañeros de posgrado, quienes con su amistad y colaboración hicieron más llevadero este camino. Las horas de estudio y discusión, así como las tardes que pasamos jugando, son recuerdos que atesoraré siempre.

A mi familia, mi más profundo agradecimiento por su amor incondicional, por creer en mí y por brindarme su apoyo en todo momento.

Quiero expresar un especial agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por el apoyo financiero otorgado durante mi posgrado. Este respaldo fue fundamental para poder concentrarme plenamente en mis estudios, y sin él, este logro no habría sido posible.

A todos ustedes, muchas gracias.

# Resumen

El estudio de sistemas cuánticos y clásicos sometidos a variaciones adiabáticas es una área central en la física teórica y aplicada [1, 2]. Estas variaciones se caracterizan por cambios lentos y graduales en los parámetros de control del sistema, permitiendo analizar la evolución del sistema de manera controlada y predecible. Un sistema ampliamente investigado en este contexto es el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo [3-7]. Este sistema es un modelo paradigmático tanto en mecánica cuántica como en mecánica clásica, y tiene aplicaciones en áreas como la óptica cuántica, la teoría de campos y las tecnologías cuánticas emergentes basadas en la denominada termodinámica cuántica [8, 9]. En el marco de la mecánica cuántica, el control preciso de la frecuencia del oscilador permite la manipulación de estados cuánticos, la implementación de operaciones cuánticas y el diseño de protocolos para la computación cuántica y la simulación de sistemas complejos. En la mecánica clásica, este sistema es un banco de pruebas útil para el desarrollo y validación de teorías dinámicas y métodos de control.

En este trabajo, nos centramos en los protocolos adiabáticos aplicados al oscilador armónico, empleando invariantes del tipo Lewis-Ermakov [4, 6]. Estos invariantes ofrecen un marco sólido para analizar la dinámica de sistemas con parámetros que varían en el tiempo. Se basan en la identificación de cantidades conservadas durante la evolución del sistema, proporcionando una herramienta útil para comprender su comportamiento tanto en el régimen clásico como en el cuántico. Los invariantes de Lewis-Ermakov permiten describir la evolución del sistema sin la necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones de movimiento en cada instante de tiempo. Además, establecen una relación mediante transformaciones canónicas y/o unitarias entre el hamiltoniano en  $t = t_0$  y en tiempos posteriores,  $t = t_f$ . Esta relación facilita la identificación de cantidades conservadas y la definición de operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico, que mantienen las relaciones de conmutación en diferentes tiempos.



# Abstract

The study of quantum and classical systems undergoing adiabatic variations is a central area in theoretical and applied physics [1, 2]. Adiabatic variations are characterized by slow and gradual changes in system parameters, allowing for the controlled and predictable analysis of system evolution. A widely studied system in this context is the harmonic oscillator with time-dependent frequency [3-7]. This system serves as a paradigmatic model in both quantum and classical mechanics, with applications in quantum optics, field theory, and emerging quantum technologies based on quantum thermodynamics [8, 9]. In the framework of quantum mechanics, precise control of the oscillator frequency enables manipulation of quantum states, implementation of quantum operations, and design of protocols for quantum computation and simulation of complex systems. In classical mechanics, this system serves as a useful testbed for the development and validation of dynamic theories and control methods.

In this work, we focus on adiabatic protocols applied to the harmonic oscillator, using Lewis-Ermakov type invariants [4, 6]. These invariants provide a robust framework for analyzing the dynamics of systems with time-varying parameters. They are based on identifying conserved quantities during the system's evolution, offering a useful tool to understand its behavior in both classical and quantum regimes. Lewis-Ermakov invariants describe the system's evolution without the need to explicitly solve the equations of motion at each instant. Furthermore, they establish a relationship through canonical and/or unitary transformations between the hamiltonian at  $t = t_0$  and at later times,  $t = t_f$ . This relationship facilitates the identification of conserved quantities and the definition of creation and annihilation operators of the harmonic oscillator, maintaining commutation relations at different times.



# Índice general

Agradecimientos . . . . .	II
Resumen . . . . .	III
Abstract . . . . .	V
<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo</b>	<b>4</b>
2.1. Transformación canónica $\mathbf{S}(t)$ . . . . .	5
2.2. Invariantes de Lewis-Ermakov . . . . .	11
2.3. Transformaciones unitarias y factorización temporal . . . . .	15
<b>3. Atajos a la adiabaticidad</b>	<b>23</b>
3.1. Teorema adiabático . . . . .	24
3.2. Protocolos de atajos a la adiabaticidad . . . . .	25
3.2.1. Inverse Engineering (IE) . . . . .	26
3.2.2. Counterdiabatic Driving (CD) . . . . .	27
3.2.3. Local Counterdiabatic Driving (LCD) . . . . .	28
3.3. Enfoque de transformaciones unitarias e invariantes a los diferentes protocolos	29
<b>4. Discusión y Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>



# Índice de figuras

3.1. Evolución temporal del módulo al cuadrado de la función de onda $ \langle x \Psi_n(t)\rangle ^2$ para un estado de Fock inicial $ \Psi_n(0)\rangle =  n\rangle$ , con $n = 3$ . Se considera una relación de frecuencias $\omega_0/\omega_f = 0.25$ . . . . .	31
3.2. Coeficiente adiabático $Q$ para los tres protocolos de atajos a la adiabaticidad: IE (Ecuación (3.43)), LCD (Ecuación (3.48)), y CD (Ecuación (3.62)), con una relación de frecuencias $\omega_0/\omega_f = 0.1$ y un tiempo final $t_f = 2$ . . . . .	36

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de sistemas cuánticos y clásicos sometidos a variaciones adiabáticas de parámetros es una área central en la física teórica y aplicada [1, 2]. Las variaciones adiabáticas se caracterizan por cambios lentos y graduales en los parámetros del sistema, permitiendo analizar la evolución del sistema de manera controlada y predecible. Un sistema ampliamente investigado en este contexto es el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo [3-7]. Este sistema es un modelo paradigmático tanto en mecánica cuántica como en mecánica clásica, y tiene aplicaciones en áreas como la óptica cuántica, la teoría de campos y las tecnologías cuánticas emergentes basadas en la denominada termodinámica cuántica [8, 9]. En el marco de la mecánica cuántica, el control preciso de la frecuencia del oscilador permite la manipulación de estados cuánticos, la implementación de operaciones cuánticas y el diseño de protocolos para la computación cuántica y la simulación de sistemas complejos. En la mecánica clásica, este sistema es un banco de pruebas útil para el desarrollo y validación de teorías dinámicas y métodos de control [10, 11].

En este trabajo, nos centramos en los protocolos adiabáticos aplicados al oscilador armónico, empleando invariantes del tipo Lewis-Ermakov [4, 6]. Estos invariantes ofrecen un marco sólido para analizar la dinámica de sistemas con parámetros que varían en el tiempo. Se basan en la identificación de cantidades conservadas durante la evolución del sistema, proporcionando una herramienta útil para comprender su comportamiento tanto en el régimen clásico como en el cuántico. Los invariantes de Lewis-Ermakov permiten describir la evolución del sistema sin la necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones de movimiento en cada instante de tiempo. Además, establecen una relación mediante

transformaciones canónicas o unitarias entre el hamiltoniano en  $t = t_0$  y en tiempos posteriores,  $t = t_f$ . Esta relación facilita la identificación de cantidades conservadas y la definición de operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico, que mantienen las relaciones de conmutación en diferentes momentos.

El primer paso en nuestro análisis consiste en emplear transformaciones canónicas en las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo [5, 6]. A través de estas transformaciones, se puede derivar el invariante clásico, una cantidad conservada que facilita la comprensión de la dinámica del sistema bajo variaciones adiabáticas. Las ecuaciones de Hamilton permiten describir el sistema en términos de sus coordenadas y momentos generalizados. Mediante transformaciones canónicas adecuadas, es posible encontrar una representación en la que el invariante clásico se hace evidente, simplificando así el análisis del sistema [4, 12].

Posteriormente, las variables dinámicas clásicas se promueven a operadores cuánticos, lo que permite extender nuestro enfoque al marco de la mecánica cuántica. De manera análoga al caso clásico, el uso de transformaciones unitarias permiten derivar invariantes cuánticos, los cuales proporcionan una descripción completa del comportamiento del sistema cuántico bajo cambios adiabáticos de los parámetros. En la mecánica cuántica, los invariantes de Lewis-Ermakov se relacionan con los estados propios y los operadores de evolución, proporcionando una herramienta para diseñar protocolos de control en sistemas cuánticos [13, 14].

En las siguientes secciones se detallarán tres protocolos adiabáticos específicos y su implementación, tanto en el contexto clásico como en el cuántico, ilustrando la aplicación de los invariantes de Lewis-Ermakov en la descripción de la dinámica de sistemas con frecuencia dependiente del tiempo. Se abordará cómo estos invariantes se utilizan para diseñar rutas de evolución que minimizan las excitaciones no deseadas en sistemas cuánticos, aspecto crucial para aplicaciones en tecnologías cuánticas emergentes. En cada uno de los tres casos, se obtendrá el parámetro de adiabaticidad y el hamiltoniano correspondiente, expresado en términos de los operadores de creación y aniquilación [7, 15, 16].



# Capítulo 2

## Oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo

La dinámica de sistemas físicos con oscilaciones armónicas, cuya frecuencia varía en función del tiempo, presenta un desafío significativo en la física teórica [3]. En este capítulo analizamos el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo y algunas de sus variantes (hamiltonianos cuadráticos) desde la perspectiva formal de las ecuaciones de Hamilton. Introducimos transformaciones canónicas dependientes del tiempo que describen con precisión su evolución dinámica en términos de cantidades conservadas [4-6]. De particular interés para el desarrollo de este trabajo es el enfoque de Leach [5, 6] sobre transformaciones canónicas en hamiltonianos cuadráticos. Además, extendemos este análisis a la mecánica cuántica, utilizando transformaciones unitarias dependientes del tiempo para abordar sistemas de tipo oscilador armónico cuántico con frecuencia variable y algunas de sus variantes. Esta formulación permite comprender los efectos de la evolución temporal en sistemas cuánticos de tipo oscilador armónico, abriendo la puerta a aplicaciones prácticas en diversas áreas de la física, como óptica cuántica, física de la materia condensada, termodinámica cuántica, entre otras [8, 17-20].

En este contexto, se destaca el papel fundamental de las ecuaciones de tipo Ermakov y los invariantes de Lewis, herramientas que permiten estudiar propiedades cuánticas a partir del análisis de cantidades conservadas, especialmente en el contexto de los atajos a la adiabaticidad. Estos atajos representan una vía prometedora para manipular sistemas cuánticos de manera eficiente, evitando la pérdida de coherencia debido a cambios rápidos en los parámetros del sistema [21, 22].

A lo largo de este capítulo, se analiza detalladamente el vínculo entre las transformaciones canónicas dependientes del tiempo, la mecánica cuántica y las estrategias asociadas a los atajos a la adiabaticidad, proporcionando así un marco teórico sólido y práctico para comprender y aplicar estos conceptos a hamiltonianos de tipo oscilador.

## 2.1. Transformación canónica $\mathbf{S}(t)$

El oscilador armónico simple es un modelo fundamental y versátil en los ámbitos de la física clásica y cuántica. Su dinámica se describe de manera precisa y elegante mediante la mecánica de Hamilton. Por ejemplo, consideremos una partícula de masa  $m$  (suponemos  $m = 1$  en adelante), que está sometida a un potencial cuadrático. En este contexto, el hamiltoniano correspondiente es

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2), \quad (2.1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular, y las variables canónicas conjugadas  $x$  y  $p$  representan la posición y el momento de la partícula, respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por las ecuaciones de Hamilton, que se determinan tomando en cuenta el hamiltoniano Eq. (2.1), como:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\omega^2 x. \quad (2.2)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se reduce a una ecuación diferencial de la forma:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0. \quad (2.3)$$

Esta última ecuación puede resolverse utilizando diversos métodos ya conocidos. Sin embargo, como se verá más adelante, un enfoque particularmente conveniente es emplear transformaciones canónicas. Mediante este método, es posible determinar que las soluciones para  $x(t)$  y  $p(t)$  se pueden escribir como [23, 24]:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha), \quad p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.4)$$

donde  $E$  es la energía (constante), y  $\alpha$  es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales del problema físico en particular.

Por otro lado, cuando se considera que la frecuencia depende del tiempo,  $\omega = \omega(t)$ , resulta conveniente reescribir las ecuaciones de Hamilton en forma matricial. Sea  $\mathbf{z}$  un

vector en el espacio fase definido por  $x$  y  $p$ , el hamiltoniano, dado por la Eq. (2.1), en forma matricial puede escribirse como:

$$H(t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \cdot \begin{bmatrix} \omega^2(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{z}, \quad (2.5)$$

donde

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \omega^2(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

y  $\mathbf{z}^T$  es el vector transpuesto de  $\mathbf{z}$ .  $\mathbf{H}$  es una matriz que contiene los coeficientes que acompañan a  $x$  y  $p$  en la Eq. (2.1). De esta forma, las ecuaciones de Hamilton, dadas por la Eq. (2.2), pueden escribirse en forma compacta como [5, 6]:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{z}, \quad (2.7)$$

donde  $\dot{\mathbf{z}} = \frac{d\mathbf{z}}{dt}$ , y  $\mathbf{J}$  es una matriz simpléctica estándar definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Consideremos ahora una transformación canónica dependiente del tiempo, la cual transforma el vector  $\mathbf{z}$  en el espacio fase a un nuevo vector  $\mathbf{z}_s$ , dada por:

$$\mathbf{z}_s = \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{z}, \quad (2.9)$$

donde

$$\mathbf{z}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ p_s \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

determina un vector en el espacio fase transformado por  $\mathbf{S}(t)$ , y donde  $\mathbf{S}(t)$  es una matriz con coeficientes dependientes del tiempo, de la forma [6]:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

en donde  $A = A(t)$ ,  $C = C(t)$  y  $D = D(t)$  son coeficientes que dependen del tiempo. Esta transformación debe de mantener invariante a los paréntesis de Poisson, si y solo si

$$\mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}(t)^T = \mathbf{J}. \quad (2.12)$$

Además, es necesario que las ecuaciones de Hamilton en el marco transformado mantengan la misma forma que en el marco original, es decir:

$$\dot{\mathbf{z}}_s = \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{z}_s, \quad (2.13)$$

con:

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

donde  $\rho = \rho(t)$  es una función auxiliar que varía con el tiempo y  $\omega_0 = \omega(0)$ . Es importante señalar que, aunque  $\omega_0$  representa la frecuencia  $\omega(t)$  evaluada en  $t = 0$ , en términos generales,  $\omega_0$  puede ser cualquier constante, siempre y cuando se cumpla la condición de que el Hamiltoniano conmute con el invariante en  $t = 0$ , como se discutirá más adelante. Además, la forma de  $\mathbf{H}_s$  se define para facilitar la factorización de la dependencia temporal del Hamiltoniano transformado. Esta propiedad resulta crucial en el formalismo de la mecánica cuántica, particularmente en el contexto del invariante de Lewis-Ermakov, ya que permite resolver la ecuación de Schrödinger para Hamiltonianos dependientes del tiempo.

En consecuencia, derivando la Eq. (2.9) y usando la Eq. (2.13), se tiene que:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{H}_s \cdot [\mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{z}] = \mathbf{S}(t) \cdot \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{S}}(t) \cdot \mathbf{z}. \quad (2.15)$$

Despejando  $\mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{z}$  de la relación anterior y utilizando la Eq. (2.7), se tiene que:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) \cdot \mathbf{z} = [\mathbf{J} \cdot \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{z}, \quad (2.16)$$

de donde finalmente

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}. \quad (2.17)$$

Esta última ecuación diferencial es la que debe satisfacer  $\mathbf{S}(t)$ , junto con las condiciones establecidas en las Ecs. (2.12) y (2.13). Al considerar las expresiones de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{H}_s$ , se obtiene que  $\mathbf{S}(t)$  cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{A} & 0 \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C}{\rho^2} & -A + \frac{D}{\rho^2} \\ -\frac{A\omega_0^2}{\rho^2} + D\omega^2(t) & -C \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{A} = \frac{C}{\rho^2}, \quad (2.19a)$$

$$0 = -A + \frac{D}{\rho^2}, \quad (2.19b)$$

$$\dot{C} = -\frac{A\omega_0^2}{\rho^2} + D\omega^2(t), \quad (2.19c)$$

$$\dot{D} = -C. \quad (2.19d)$$

Finalmente, después de realizar algunas manipulaciones algebraicas, se puede reducir a una única ecuación que determinará los tres coeficientes. Estos coeficientes están dados por:

$$A = \frac{A_0}{\rho}, \quad C = -A_0\dot{\rho}, \quad D = A_0\rho. \quad (2.20)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{S}(t) = A_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\dot{\rho} & \rho \end{bmatrix},$$

donde  $A_0$  es una constante que se se determina a partir de la condición dada por la Eq. (2.12), es decir,

$$\mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}(t)^T = \begin{bmatrix} \frac{A_0}{\rho} & 0 \\ -A_0\dot{\rho} & A_0\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_0}{\rho} & -A_0\dot{\rho} \\ 0 & A_0\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

Realizando el producto matricial de la anterior ecuación se obtiene que

$$A_0^2 = 1. \quad (2.21)$$

Finalmente, la matriz  $\mathbf{S}(t)$  está determinada por:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\dot{\rho} & \rho \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Otro resultado de gran importancia, utilizando el enfoque de Leach [5, 6], es que se puede obtener directamente la ecuación de Ermakov a partir de la ecuación diferencial para  $C(t)$ , Eq. (2.19c), sustituyendo las expresiones de  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$ , de tal manera que:

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{\omega^2(0)}{\rho^3}. \quad (2.23)$$

La ecuación de Ermakov, representada en la Ec. (2.23), es fundamental en el estudio de invariantes de movimiento, ya que describe la evolución de una función  $\rho$  que conserva

propiedades significativas a lo largo del tiempo. Este formalismo proporciona un marco teórico sólido para comprender la dinámica de sistemas con frecuencias variables en el tiempo. A través de  $\rho(t)$ , podemos obtener una comprensión profunda de cómo estos sistemas mantienen características esenciales, incluso ante cambios en su comportamiento oscilatorio debido a variaciones en la frecuencia  $\omega(t)$ .

Este concepto no solo es crucial en la física teórica, sino que también tiene aplicaciones prácticas en diversas áreas, como la óptica cuántica y la física de la materia condensada. En particular, los atajos hacia la adiabaticidad, que exploraremos en secciones posteriores, destacan como ejemplos clave de cómo estos invariantes pueden utilizarse para manipular sistemas cuánticos de manera eficiente, evitando la pérdida de coherencia bajo condiciones de cambios rápidos en los parámetros del sistema [9].

Una generalización del hamiltoniano  $H(t) = \frac{1}{2} [p^2 + \omega^2(t)x^2]$ , en el contexto de hamiltonianos cuadráticos, se expresa mediante el hamiltoniano:

$$H(t) = \frac{1}{2} [p^2 + \omega^2(t)x^2 + \lambda(xp + px)]. \quad (2.24)$$

en donde  $\lambda = \lambda(t)$ .

En la mecánica clásica, la forma simétrica  $xp + px$  puede representar un acoplamiento lineal entre la posición y el momento de la partícula. Este tipo de término puede surgir en sistemas donde hay interacciones lineales que no distinguen entre posición y momento. Las ecuaciones de Hamilton asociadas al hamiltoniano Eq. (2.24) son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p + \lambda x, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\omega^2(t)x - \lambda p. \quad (2.25)$$

Siguiendo el enfoque de Leach [6], las ecuaciones de Hamilton asociadas al hamiltoniano dado en la Eq. (2.24), en forma matricial, se escriben como:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2(t) & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z}, \quad (2.26)$$

donde identificamos que la matriz asociada al hamiltoniano  $\mathbf{H}$  es:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \omega^2(t) & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Para resolver la Eq. (2.17) en su forma matricial específica para este caso,

$$\begin{bmatrix} \dot{A} & 0 \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A\lambda + \frac{C}{\rho^2} & -A + \frac{D}{\rho^2} \\ -\frac{A\omega^2(t)}{\rho^2} - C\lambda + D\lambda & -C + D\lambda \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

utilizamos tres de las cuatro ecuaciones anteriores para obtener:

$$\dot{A} + A\lambda - \frac{C}{\rho^2} = 0, \quad (2.29a)$$

$$-A + \frac{D}{\rho^2} = 0, \quad (2.29b)$$

$$C - D\lambda + \dot{D} = 0, \quad (2.29c)$$

y demostramos que:

$$A = \frac{1}{\rho}, \quad C = \lambda\rho - \dot{\rho}, \quad D = \rho. \quad (2.30)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación para  $\dot{C}$  obtenemos:

$$\ddot{\rho} + [\omega^2(t) - \lambda^2 - \dot{\lambda}] \rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}, \quad (2.31)$$

que corresponde a una ecuación generalizada de Ermakov. Se ha omitido la constante  $A_0$  para asegurar que  $\mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}(t)^T = \mathbf{J}$  y así conservar el paréntesis de Poisson en la transformación. En consecuencia,

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ \lambda\rho - \dot{\rho} & \rho \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

En resumen, la transformación  $\mathbf{S}(t)$  para Hamiltonianos cuadráticos, como los definidos por las Ecs. (2.1) y (2.24), convierte las ecuaciones de movimiento en ecuaciones de Hamilton que, aunque dependientes del tiempo (dependencia determinada por  $\rho$ ), presentan esta dependencia de forma factorizada. Es decir, se obtienen ecuaciones de Hamilton de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{z}}_s = \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{z}_s, \quad (2.33)$$

donde  $\mathbf{z}_s$  está determinada por la transformación de coordenadas y momentos:

$$\mathbf{z}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ p_s \end{bmatrix} = \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{z}. \quad (2.34)$$

La matriz  $\mathbf{H}_s$  define el nuevo hamiltoniano :

$$H_s(t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_s^T \cdot \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{z}_s = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \cdot \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z}. \quad (2.35)$$

A continuación, utilizaremos los resultados obtenidos en esta sección para destacar la eficacia de la transformación canónica  $\mathbf{S}(t)$ . En particular, analizaremos cómo esta transformación simplifica las ecuaciones de movimiento para hamiltonianos cuadráticos dependientes del tiempo, al factorizar la dependencia temporal de una manera que facilita tanto

su resolución analítica como numérica en los sistemas dinámicos considerados. Además, exploraremos la aplicabilidad de la transformación  $\mathbf{S}(t)$  en el contexto de la mecánica cuántica, investigando su papel en la formulación de operadores y en la evolución temporal de estados cuánticos, con un énfasis especial en los invariantes de tipo Lewis-Ermakov [3, 6].

## 2.2. Invariantes de Lewis-Ermakov

En el estudio de los invariantes de Lewis-Ermakov, las transformaciones canónicas juegan un papel crucial para comprender la dinámica de sistemas con frecuencias y acoplamientos dependientes del tiempo. Estas transformaciones permiten identificar y manejar las cantidades conservadas del sistema, proporcionando una comprensión más profunda de su evolución temporal [4-6].

Una vez establecido el hamiltoniano, ya sea

$$H(t) = \frac{1}{2}[p^2 + \omega^2(t)x^2] \quad \text{o} \quad H(t) = \frac{1}{2}[p^2 + \omega^2(t)x^2 + \lambda(xp + px)], \quad (2.36)$$

el siguiente paso para resolver las ecuaciones de Hamilton es aplicar una transformación canónica dependiente del tiempo, como lo vimos en la sección anterior. La dependencia temporal es un factor común en ambos casos, por lo que resulta esencial establecer la relación entre las variables canónicas originales  $(x, p)$  y las nuevas variables canónicas  $(x_s, p_s)$ . Para el primer caso, el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, la transformación canónica se obtiene a partir de la matriz  $\mathbf{S}(t)$  y se expresa como:

$$\begin{bmatrix} x_s \\ p_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\dot{\rho} & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Cuando se incluye el término  $\lambda(xp + px)$  en el hamiltoniano, la transformación canónica se modifica para incluir este efecto, obteniendo la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} x_s \\ p_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ \lambda\rho - \dot{\rho} & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

De esta manera, las nuevas variables canónicas  $(x_s, p_s)$  en términos de las variables originales  $(x, p)$  se expresan como:

$$x_s = \frac{x}{\rho}, \quad p_s = [\lambda\rho - \dot{\rho}]x + \rho p. \quad (2.39)$$

Cuando  $\lambda = 0$ , esta transformación se reduce inmediatamente a la forma obtenida en Eq. (2.37). Para mantener la generalidad en el análisis, consideramos el caso donde  $\lambda \neq 0$ . Esta generalización permite abordar sistemas más complejos y captar una gama más amplia de fenómenos físicos, como la fricción dependiente del tiempo en un sistema masa-resorte. La correcta elección y aplicación de estas transformaciones canónicas es fundamental para entender y resolver las dinámicas de sistemas con frecuencias y acoplamientos dependientes del tiempo.

Para resolver las ecuaciones de Hamilton en el marco definido por  $\mathbf{S}(t)$ , debemos de reconocer que el hamiltoniano en este marco, está determinado por

$$\begin{aligned} H_s(t) &= \frac{1}{2} \mathbf{z}_s^T \cdot \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{z}_s \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_s & p_s \end{bmatrix} \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ p_s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\rho^2} [p_s^2 + \omega_0^2 x_s^2], \end{aligned} \quad (2.40)$$

de donde se tiene que las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x}_s = \frac{p_s}{\rho^2}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\omega_0^2}{\rho^2} x_s. \quad (2.41)$$

Las ecuaciones anteriores pueden resolverse de manera sencilla si proponemos una transformación canónica independiente del tiempo que transforme las variables  $(x_s, p_s)$  a nuevas variables  $(Q, P)$  a través de

$$x_s = \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}} \sin Q, \quad p_s = \sqrt{2\omega_0 P} \cos Q. \quad (2.42)$$

Si bien podría parecer que este procedimiento se podría haber implementado desde el inicio, sin necesidad de utilizar la transformación  $\mathbf{S}(t)$ , hacerlo así no preservaría el paréntesis de Poisson, dado que en las ecuaciones anteriores,  $\omega(t)$  sustituiría a  $\omega_0$ . Este caso es análogo a la situación que surge al definir operadores de creación y aniquilación con frecuencias dependientes del tiempo, donde el conmutador de dichos operadores no permanece invariante para todo tiempo  $t$ .

Sustituyendo  $x_s$  y  $p_s$  en la Eq. (2.40), obtenemos que

$$H_s(t) = \frac{\omega_0}{\rho^2} P. \quad (2.43)$$

y las ecuaciones de Hamilton resultantes son:

$$\dot{Q} = \frac{\omega_0}{\rho^2}, \quad \dot{P} = 0. \quad (2.44)$$

Estas ecuaciones pueden integrarse directamente, de manera que

$$Q(t) = Q_0 + \alpha(t), \quad P(t) = P_0, \quad (2.45)$$

donde  $\alpha(t) = \omega_0 \int_0^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}$ , y  $(Q_0, P_0)$  son constantes determinadas por las condiciones iniciales del sistema. Sustituyendo  $Q(t)$  y  $P(t)$  en la Eq. (2.42), obtenemos que las variables  $x_s$  y  $p_s$  en el marco transformado  $\mathbf{S}(t)$  son:

$$x_s = \sqrt{\frac{2P_0}{\omega_0}} \sin Q(t), \quad p_s = \sqrt{2\omega_0 P_0} \cos Q(t). \quad (2.46)$$

Finalmente, de las ecuaciones Eq. (2.39), las variables  $x$  y  $p$  en el marco original están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2P_0}{\omega_0}} \sin Q(t) \rho, \\ p &= \frac{\sqrt{2\omega_0 P_0}}{\rho} \left[ \cos Q(t) - \frac{(\lambda\rho - \dot{\rho})\rho}{\omega_0} \sin Q(t) \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Por otro lado, utilizando Eq. (2.39) y Eq. (2.43) se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} [p_s^2 + \omega_0^2 x_s^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\xi x + \rho p)^2 + \omega_0^2 \frac{x^2}{\rho^2} \right], \end{aligned} \quad (2.48)$$

en donde  $I = \omega_0 P$  y  $\xi = (\lambda\rho - \dot{\rho})$ .

Esta última ecuación, de acuerdo a la Eq. (2.44), es constante en el tiempo, lo que conduce a un invariante. Este invariante, conocido como el invariante de Lewis-Ermakov, representa una cantidad conservada en el sistema. Como se mencionó anteriormente, la función  $\rho$  satisface la ecuación descrita por la Eq. (2.31). El invariante de Lewis-Ermakov, en este contexto, es una cantidad conservada específica asociada a sistemas que obedecen a ecuaciones diferenciales particulares. La conservación de este invariante implica que, aunque el sistema evolucione temporalmente, ciertas propiedades intrínsecas se mantienen constantes, proporcionando una herramienta poderosa para analizar y resolver dichas ecuaciones. El cumplimiento de la ecuación establecida en la Ec. (2.31) por la función  $\rho$  es crucial para garantizar la conservación del invariante de Lewis-Ermakov. Esto destaca la profunda relación entre las soluciones de las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema y las cantidades que se mantienen constantes a lo largo de su evolución temporal.

En resumen, se ha determinado que para el hamiltoniano :

$$H(t) = \frac{1}{2} [p^2 + \omega^2(t)x^2 + \lambda(xp + px)],$$

las variables  $x$  y  $p$  se transforman mediante la matriz  $\mathbf{S}(t)$  de la siguiente manera:

$$x_s = \frac{x}{\rho}, \quad p_s = (\lambda\rho - \dot{\rho})x + \rho p,$$

y el invariante asociado a este hamiltoniano es:

$$I = \frac{1}{2} \left[ (\xi x + \rho p)^2 + \omega_0^2 \frac{x^2}{\rho^2} \right].$$

Cuando  $\lambda(t) = 0$ , el hamiltoniano se simplifica a:

$$H(t) = \frac{1}{2} \left[ p^2 + \omega^2(t)x^2 \right],$$

y las variables transformadas  $x$  y  $p$  son:

$$x_s = \frac{x}{\rho}, \quad p_s = \rho p - \dot{\rho}x,$$

con el invariante correspondiente dado por:

$$I = \frac{1}{2} \left[ (\rho p - \dot{\rho}x)^2 + \omega_0^2 \frac{x^2}{\rho^2} \right].$$

Como se explorará en la siguiente sección, la forma adoptada por las variables canónicas  $x$  y  $p$  bajo la transformación  $\mathbf{S}(t)$  proporciona información valiosa sobre las transformaciones unitarias y los parámetros necesarios para obtener efectos equivalentes en los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  en el contexto cuántico. Esto sugiere que las propiedades y simetrías del sistema clásico pueden ser trasladadas al marco cuántico mediante transformaciones adecuadas, facilitando el estudio y la resolución de problemas cuánticos complejos. Además, la ecuación de Ermakov desempeña un papel crucial en la factorización temporal, permitiendo obtener un hamiltoniano que conmute en diferentes instantes de tiempo. Esta propiedad es fundamental para la integrabilidad del sistema y se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$\ddot{\rho} + [\omega^2(t) - \lambda^2 - \dot{\lambda}] \rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}. \quad (2.49)$$

La ecuación de Ermakov no solo asegura la existencia de invariantes, sino que también facilita la construcción de soluciones exactas para sistemas dinámicos complejos. En resumen, la transformación de las variables y la conservación del invariante de Lewis-Ermakov subrayan la profunda interrelación entre las propiedades geométricas del sistema y sus invariantes dinámicos, proporcionando una poderosa herramienta para el análisis tanto en la mecánica clásica como en la mecánica cuántica.

## 2.3. Transformaciones unitarias y factorización temporal

En esta sección, analizaremos dos transformaciones unitarias dependientes del tiempo,  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$ , que al aplicarse de manera conjunta tienen el mismo efecto sobre los operadores de posición y momento que la transformación canónica  $\mathbf{S}(t)$  ejerce sobre las variables canónicas  $x$  y  $p$ . Como se demostrará más adelante, estas transformaciones actúan sobre los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  de la siguiente manera:

$$\hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t) \hat{x} \hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t) = \frac{\hat{x}}{\rho}, \quad \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t) \hat{p} \hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t) = (\lambda\rho - \dot{\rho}) \hat{x} + \rho\hat{p}, \quad (2.50)$$

las cuales representan el análogo cuántico de las ecuaciones obtenidas en el caso clásico (véase Eq. (2.39)) cuando las variables canónicas  $x$  y  $p$  se promueven a operadores. Para introducir las transformaciones mencionadas, comenzaremos con ejemplos y definiciones en el caso de una frecuencia constante. Posteriormente, abordaremos el caso de interés donde la frecuencia varía en el tiempo. Estas transformaciones no solo permiten factorizar la dependencia temporal en hamiltonianos de osciladores armónicos con frecuencia variable, sino que también facilitan la recuperación del invariante de Lewis-Ermakov al promover las variables dinámicas de posición y momento a operadores, es decir,  $(x, p) \rightarrow (\hat{x}, \hat{p})$ . Además, en esta sección se ilustra un método alternativo para obtener el invariante en un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo.

Para comenzar, consideremos el equivalente cuántico del oscilador armónico descrito por el hamiltoniano (2.1), donde las variables canónicas  $x$  y  $p$  se promueven a los operadores de posición  $\hat{x}$  y momento  $\hat{p}$ . Así, el hamiltoniano del oscilador armónico cuántico, independiente del tiempo, se expresa como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2). \quad (2.51)$$

Los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  satisfacen la relación de conmutación fundamental  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck. Para simplificar, en las secciones siguientes adoptaremos la convención  $\hbar = 1$ . Además, sabemos de la ecuación independiente de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (2.52)$$

que la función de onda  $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$  se expresa en términos de las funciones de Hermite

$H_n(x)$  de la siguiente manera [25]:

$$\psi_n(x) = \frac{(\omega/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\omega \frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{\omega}x). \quad (2.53)$$

Por otro lado, la evolución del estado de este sistema está gobernada por la ecuación de Schrödinger,

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (2.54)$$

cuya solución es:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (2.55)$$

donde  $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t}$  es el operador de evolución y  $|\Psi(0)\rangle$  es una condición inicial. Para aplicar el operador de evolución a esta condición inicial de manera efectiva, es necesario factorizar la función exponencial que contiene a los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ . Sin embargo, debido a la relación de conmutación entre estos operadores, dicha factorización no puede realizarse directamente. Una técnica comúnmente utilizada para superar esta dificultad es proponer un *ansatz* y luego resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultante [26].

Un método alternativo para determinar el operador de evolución, que se ajusta mejor a nuestros objetivos, consiste en considerar una transformación unitaria dependiente del tiempo, la cual transforma un hamiltoniano dado,  $\hat{H}$ , en otro hamiltoniano efectivo. Para ilustrar este enfoque, consideremos una transformación unitaria  $\hat{\mathcal{T}}(t)$  tal que  $|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{T}}(t) |\phi(t)\rangle$ . Al sustituir este vector de estado en la ecuación de Schrödinger, Eq. (2.54), se obtiene un nuevo hamiltoniano efectivo, dado por:

$$\hat{H}_{\mathcal{T}}(t) = \hat{\mathcal{T}}^\dagger(t) \hat{H}(t) \hat{\mathcal{T}}(t) - i \hat{\mathcal{T}}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{\mathcal{T}}(t)}{\partial t}, \quad (2.56)$$

donde, al igual que en el caso de las ecuaciones de Hamilton, la ecuación de Schrödinger puede reescribirse como otra ecuación de Schrödinger en términos de  $\hat{H}_{\mathcal{T}}(t)$  cuando  $\hat{\mathcal{T}}(t)$  es una transformación unitaria:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \hat{H}_{\mathcal{T}}(t) |\phi(t)\rangle. \quad (2.57)$$

Es evidente que  $|\phi(t)\rangle$  representa un nuevo vector de estado en este marco de referencia transformado. Como se observa, la relación entre  $|\Psi(t)\rangle$  y  $|\phi(t)\rangle$  se establece a través de la transformación unitaria  $\hat{\mathcal{T}}(t)$ , de manera análoga a como  $\mathbf{S}(t)$  relaciona las variables de posición y momento en diferentes marcos de referencia.

En consecuencia, consideremos inicialmente el hamiltoniano del oscilador armónico con frecuencia constante, Eq.(2.31), y definamos dos transformaciones unitarias dependientes del tiempo que se expresan explícitamente de la siguiente manera[27]:

$$\hat{\mathcal{D}}(t) = e^{i\frac{\dot{u}}{2u}\hat{x}^2}, \quad (2.58)$$

$$\hat{\mathcal{S}}(t) = e^{-i\frac{\ln(u)}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})} \quad (2.59)$$

donde  $u = u(t)$  es una función arbitraria que varía en el tiempo. Usando la Eq. (2.56), el hamiltoniano resultante al transformar  $|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{D}}(t)|\phi(t)\rangle$  es:

$$\hat{H}_{\mathcal{D}}(t) = \frac{1}{2} \left[ \hat{p}^2 + \left( \frac{\ddot{u}}{u} + \omega^2 \right) \hat{x}^2 \right] + \frac{\dot{u}}{2u} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}), \quad (2.60)$$

donde

$$\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t) \hat{x} \hat{\mathcal{D}}(t) = \hat{x}, \quad \hat{\mathcal{D}}^\dagger(t) \hat{p} \hat{\mathcal{D}}(t) = \hat{p} + \frac{\dot{u}}{u} \hat{x}, \quad (2.61)$$

son obtenidas utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) y

$$-i \frac{\partial \hat{\mathcal{D}}(t)}{\partial t} \hat{\mathcal{D}}^\dagger(t) = \frac{\ddot{u}u - \dot{u}^2}{2u^2} \hat{x}^2. \quad (2.62)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, el hamiltoniano resultante al aplicar una segunda transformación  $|\phi(t)\rangle = \hat{\mathcal{S}}(t)|\varphi(t)\rangle$ , dado el hamiltoniano  $\hat{H}_{\mathcal{D}}(t)$ , es

$$\hat{H}_{\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{p}^2}{u^2} + u (\ddot{u} + \omega^2 u) \hat{x}^2 \right], \quad (2.63)$$

donde

$$\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t) \hat{x} \hat{\mathcal{S}}(t) = u \hat{x}, \quad \hat{\mathcal{S}}^\dagger(t) \hat{p} \hat{\mathcal{S}}(t) = \frac{\hat{p}}{u}, \quad -i \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}(t)}{\partial t} \hat{\mathcal{S}}^\dagger(t) = -\frac{\dot{u}}{u} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \quad (2.64)$$

Ahora, si consideramos que  $u(t)$  es solución a la ecuación del oscilador armónico clásico, es decir,  $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ , entonces el hamiltoniano  $\hat{H}_{\mathcal{S}}(t)$  se reduce a

$$\hat{H}_{\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{2u^2} \hat{p}^2 \quad (2.65)$$

y la solución a la ecuación de Schrödinger asociada a  $\hat{H}_{\mathcal{S}}(t)$  es

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{u^2(\tau)}} |\varphi(0)\rangle. \quad (2.66)$$

En consecuencia, en el marco original del sistema, la evolución del estado  $|\Psi(t)\rangle$  está dada por:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2}\int_0^t\frac{d\tau}{u^2(\tau)}}\hat{\mathcal{S}}^\dagger(0)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(0)|\Psi(0)\rangle, \quad (2.67)$$

donde  $\hat{\mathcal{S}}^\dagger(0)$  y  $\hat{\mathcal{D}}^\dagger(0)$  son las transformaciones unitarias definidas por las Eqs. (2.58) y (2.59), evaluadas en  $t = 0$ . Por ejemplo, si consideramos la solución particular de la ecuación del oscilador armónico  $u(t) = \cos(t)$ , con  $\omega = 1$ , estas transformaciones en  $t = 0$  corresponden a la identidad. Por lo tanto, para  $t \neq 0$ , las transformaciones  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$  se pueden expresar como:

$$\hat{\mathcal{D}}(t) = e^{-i\frac{\tan(t)}{2}\hat{x}^2}, \quad \hat{\mathcal{S}}(t) = e^{-i\frac{\ln[\cos(t)]}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})}. \quad (2.68)$$

Así, el vector de estado en el tiempo  $t$  se puede escribir como:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\tan(t)}{2}\hat{x}^2} e^{-i\frac{\ln[\cos(t)]}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})} e^{-i\frac{\tan(t)}{2}\hat{p}^2} |\Psi(0)\rangle. \quad (2.69)$$

Este resultado muestra que el operador de evolución para el oscilador armónico cuántico puede obtenerse mediante las transformaciones unitarias  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$ . La deducción del operador de evolución, conocido como el operador de transformada fraccionaria de Fourier, se realizó de esta manera para ilustrar el efecto de estas transformaciones unitarias y para utilizar algunos de estos resultados en los siguientes análisis.

Ahora abordaremos el punto central de esta sección, centrando nuestra atención en las transformaciones unitarias dependientes del tiempo  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$ . Analizaremos el análogo cuántico del oscilador generalizado descrito en la Eq. (2.36):

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} [\hat{p}^2 + \omega^2(t)\hat{x}^2 + \lambda(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})]. \quad (2.70)$$

Comenzar con este hamiltoniano será relevante en el próximo capítulo. Por ahora, nos concentraremos en transformar y encontrar el invariante cuántico asociado a este hamiltoniano. En los diferentes protocolos de adiabaticidad, tomaremos  $\lambda(t) = 0$  como un caso particular cuando sea necesario.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso independiente del tiempo, consideraremos una generalización de la transformación unitaria  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  de la Eq. (2.58), dada por:

$$\hat{\mathcal{D}}(t) = \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\dot{u}}{u} - \lambda\right)\hat{x}^2\right]. \quad (2.71)$$

Por lo tanto, los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  bajo esta transformación se expresan como:

$$\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\hat{x}\hat{\mathcal{D}}(t) = \hat{x}, \quad \hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\hat{p}\hat{\mathcal{D}}(t) = \hat{p} + \left(\frac{\dot{u}}{u} - \lambda\right)\hat{x}. \quad (2.72)$$

Mientras que la derivada de la Eq. (2.71) es:

$$-i\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\frac{\partial\hat{\mathcal{D}}(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{u}}{u} - \frac{\dot{u}^2}{u^2} - \dot{\lambda}\right)\hat{x}^2. \quad (2.73)$$

Utilizando las Eqs. (2.72) y (2.73), es posible obtener que el hamiltoniano resultante de la transformación dependiente del tiempo, dada por  $|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{D}}(t)|\phi(t)\rangle$ , es:

$$\hat{H}_{\mathcal{D}}(t) = \hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\hat{H}(t)\hat{\mathcal{D}}(t) - i\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\frac{\partial\hat{\mathcal{D}}(t)}{\partial t}. \quad (2.74)$$

Este hamiltoniano  $\hat{H}_{\mathcal{D}}(t)$  tiene en cuenta tanto las contribuciones del hamiltoniano original  $\hat{H}(t)$  como las derivadas de la transformación unitaria dependiente del tiempo. Esto permite analizar cómo las propiedades dinámicas del sistema se modifican debido a la evolución temporal de la transformación, proporcionando una comprensión más profunda de los invariantes cuánticos y de los efectos adiabáticos en el sistema estudiado.

La segunda transformación unitaria que se considera es  $\hat{\mathcal{S}}(t)$ , definida de manera similar a la Eq. (2.59). Usando las ecuaciones correspondientes, se obtiene que el hamiltoniano en el marco de la transformación, donde  $|\phi(t)\rangle = \hat{\mathcal{S}}(t)|\varphi(t)\rangle$ , es:

$$\hat{H}_{\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\hat{p}^2}{u^2} + [(\omega^2(t) - \lambda^2 - \dot{\lambda})u + \ddot{u}]u\hat{x}^2\right\}. \quad (2.75)$$

Este hamiltoniano  $\hat{H}_{\mathcal{S}}(t)$  refleja las modificaciones inducidas por la transformación unitaria  $\hat{\mathcal{S}}(t)$  y proporciona una perspectiva adicional sobre la dinámica del sistema. Al considerar ambas transformaciones,  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$ , podemos explorar una variedad de protocolos adiabáticos y comprender mejor los invariantes cuánticos asociados con estos sistemas. Es importante destacar la factorización temporal en el hamiltoniano  $\hat{H}_{\mathcal{S}}(t)$  ya que esto permite la integración inmediata de la ecuación de Schrödinger, y la conmutatividad de dicho hamiltoniano para diferentes tiempos.

Finalmente, si se considera que  $u \rightarrow \rho$ , es decir, que  $u$  cumple con la ecuación de Ermakov,

$$\ddot{\rho} + [\omega^2(t) - \lambda^2 - \dot{\lambda}]\rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}, \quad (2.76)$$

el hamiltoniano del sistema, dado por la Ecuación (2.75), se transforma a la siguiente forma:

$$\hat{H}_{\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{2\rho^2}\left(\hat{p}^2 + \omega_0^2\hat{x}^2\right). \quad (2.77)$$

Esta expresión representa el hamiltoniano de un oscilador armónico cuya frecuencia depende del tiempo. Es importante destacar que la dependencia temporal, a diferencia del

hamiltoniano en el marco original, está factorizada. Esto simplifica el análisis del sistema, ya que permite separar la dependencia temporal de otros componentes del hamiltoniano, y sobre todo, conmuta a diferentes tiempos. La evolución temporal del estado del sistema en este nuevo marco se describe por:

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-i\frac{\alpha(t)}{2}(\hat{p}^2 + \omega_0^2 \hat{x}^2)} |\varphi(0)\rangle, \quad (2.78)$$

donde

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{1}{\rho^2(\tau)} d\tau. \quad (2.79)$$

Por otro lado, en el marco original del sistema, el estado en el tiempo  $t$  está dado por:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)e^{-i\frac{\alpha(t)}{2}(\hat{p}^2 + \omega_0^2 \hat{x}^2)} \hat{\mathcal{S}}^\dagger(0)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(0)|\Psi(0)\rangle, \quad (2.80)$$

donde los operadores  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$  representan transformaciones unitarias específicas que se aplican al estado inicial. Expresado de manera explícita, esto es:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{2}[\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \lambda(t)]\hat{x}^2} e^{-i\frac{\ln|\rho(t)|}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})} e^{-i\frac{\alpha(t)}{2}(\hat{p}^2 + \omega_0^2 \hat{x}^2)} e^{i\frac{\ln|\rho(0)|}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})} e^{-\frac{i}{2}[\frac{\dot{\rho}(0)}{\rho(0)} - \lambda(0)]\hat{x}^2} |\Psi(0)\rangle. \quad (2.81)$$

En esta formulación, no se han asignado valores específicos a las condiciones iniciales para  $\rho(0)$  y  $\dot{\rho}(0)$ , permitiendo que se mantenga la generalidad del análisis.

Otro resultado notable es que, utilizando las transformaciones  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$ , se puede encontrar el invariante  $\hat{I}(t)$  para el oscilador armónico cuántico descrito por la ecuación (2.70). Este invariante está dado por:

$$\hat{I}(t) = \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)\hat{H}_0\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t), \quad (2.82)$$

donde

$$\hat{H}(0) = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega_0^2 \hat{x}^2), \quad (2.83)$$

es el hamiltoniano del oscilador armónico independiente evaluado en  $t = 0$ . La forma explícita de dicho invariante es:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{2} \left[ (\xi \hat{x} + \rho \hat{p})^2 + \omega_0^2 \frac{\hat{x}^2}{\rho^2} \right], \quad (2.84)$$

donde  $\xi = \lambda\rho - \dot{\rho}$ . De manera análoga al caso clásico, se encontró que para el hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \left[ \hat{p}^2 + \omega^2(t)\hat{x}^2 + \lambda(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \right],$$

los operadores de posición y momento se transforman de la siguiente manera:

$$\hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)\hat{x}\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t) = \frac{\hat{x}}{\rho}, \quad \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)\hat{p}\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t) = (\lambda\rho - \dot{\rho})\hat{x} + \rho\hat{p}.$$

Además, el invariante dado por la ecuación (2.84) para este hamiltoniano es el equivalente cuántico del invariante para el caso clásico dado en la ecuación (2.48). Nuevamente, si  $\lambda = 0$ , se obtiene que para el hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} [\hat{p}^2 + \omega^2(t)\hat{x}^2], \quad (2.85)$$

con las transformaciones unitarias simplificadas

$$\hat{\mathcal{D}}(t) = e^{i\frac{\dot{\rho}}{2\rho}\hat{x}^2}, \quad \hat{\mathcal{S}}(t) = e^{-i\frac{\ln\rho}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})}, \quad (2.86)$$

los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  se transforman de la siguiente manera:

$$\hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)\hat{x}\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t) = \frac{\hat{x}}{\rho}, \quad \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)\hat{p}\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t) = \rho\hat{p} - \dot{\rho}\hat{x}. \quad (2.87)$$

Finalmente, el invariante, también equivalente al caso clásico, es:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{2} \left[ (\rho\hat{p} - \dot{\rho}\hat{x})^2 + \omega_0^2 \frac{\hat{x}^2}{\rho^2} \right]. \quad (2.88)$$

Es posible demostrar directamente que, en ambos casos ( $\lambda \neq 0$  y  $\lambda = 0$ ), se cumple la siguiente relación:

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} - i[\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0. \quad (2.89)$$

La conservación del invariante  $\hat{I}(t)$  en el tiempo es fundamental para el análisis de la evolución temporal del oscilador armónico cuántico, actuando como una constante del movimiento que proporciona una descripción precisa y estable de la dinámica del sistema. Este invariante permite simplificar la resolución de problemas complejos, facilitando la obtención de soluciones exactas y una mejor comprensión de las características del sistema. Las transformaciones unitarias  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$  destacan la conexión profunda entre las descripciones clásica y cuántica del sistema, permitiendo mapear soluciones del régimen clásico al cuántico y preservando simetrías y propiedades dinámicas. Estas transformaciones revelan la estructura subyacente de las soluciones y simplifican el análisis del sistema al mostrar la invariabilidad de ciertas combinaciones lineales de los operadores de posición y momento.

En resumen, la conservación del invariante y el uso de transformaciones unitarias son herramientas poderosas para explorar y entender las propiedades intrínsecas del oscilador

armónico cuántico. Estas técnicas facilitan el análisis detallado de su evolución temporal, permitiendo abordar problemas complejos de manera sistemática y efectiva, y establecen un puente sólido entre las descripciones clásica y cuántica del sistema.

# Capítulo 3

## Atajos a la adiabaticidad

En el amplio campo de la física cuántica, los atajos a la adiabaticidad han emergido como herramientas fundamentales para el control dinámico de sistemas cuánticos que evolucionan rápidamente. Estos atajos constituyen una estrategia para superar los desafíos asociados con cambios abruptos en los parámetros de un sistema, permitiendo mantener la coherencia cuántica incluso en condiciones no adiabáticas [9, 28-32]. El teorema adiabático, un principio central en esta disciplina, establece las condiciones bajo las cuales un sistema cuántico se mantiene en su estado fundamental durante cambios lentos y graduales de sus parámetros externos. Sin embargo, en la práctica, la estricta adiabaticidad a menudo no es viable cuando se requieren transiciones rápidas o cuando el sistema está sujeto a fluctuaciones imprevistas. En estos escenarios, los atajos a la adiabaticidad son esenciales. Estos métodos permiten preservar la integridad cuántica durante transiciones no adiabáticas, evitando la pérdida de coherencia y posibilitando un control efectivo de sistemas cuánticos en evolución [33-35].

Los atajos a la adiabaticidad no solo mejoran la manipulación de estados cuánticos, sino que también optimizan el tiempo y los recursos necesarios para llevar a cabo transiciones controladas con alta fidelidad. La aplicabilidad de estos atajos se extiende a áreas clave como la computación cuántica, donde permiten la implementación eficiente de puertas lógicas y algoritmos cuánticos, y la ingeniería cuántica, donde facilitan el diseño y control de sistemas cuánticos. Además, son esenciales en la manipulación precisa de partículas en sistemas como trampas de iones, condensados de Bose-Einstein y redes ópticas [36].

En este contexto, la comprensión y perfeccionamiento de los atajos a la adiabaticidad

es vital para aplicaciones prácticas en diversos campos. La investigación en estos conceptos no solo proporciona una comprensión más profunda de la dinámica cuántica, sino que también abre nuevas oportunidades para el desarrollo de tecnologías avanzadas basadas en los principios fundamentales de la mecánica cuántica [37]. Esta exploración no solo mejora la eficiencia y robustez de los sistemas cuánticos actuales, sino que también impulsa el progreso hacia el diseño de dispositivos cuánticos de próxima generación, capaces de operar con mayor precisión y confiabilidad en una variedad de entornos tecnológicos. La implementación efectiva de estos atajos promete revolucionar áreas tecnológicas emergentes, estableciendo nuevas fronteras en el control y la manipulación de sistemas cuánticos.

### 3.1. Teorema adiabático

En el contexto de la física cuántica, en un proceso adiabático el cambio de las condiciones externas del sistema varían de manera gradual. Si el hamiltoniano que describe al sistema varía lo suficientemente lento desde un estado inicial de  $\hat{H}_i$  a algún estado final de  $\hat{H}_f$ , el teorema adiabático establece que si el sistema comienza en  $n$ -ésimo estado propio de su hamiltoniano inicial  $\hat{H}_i$ , dicho estado evolucionará al  $n$ -ésimo estado propio de  $\hat{H}_f$ . [25] A diferencia de los procesos no adiabáticos, en los cuales los parámetros del hamiltoniano del sistema varían rápidamente y, como consecuencia, inducen transiciones entre los estados cuánticos del sistema, en una evolución adiabática las transiciones entre los estados se minimizan. De aquí surge la importancia del teorema adiabático y sus implicaciones, ya que proporciona las condiciones bajo las cuales un sistema cuántico permanecerá en el eigenestado correspondiente durante toda la evolución, siempre y cuando los cambios en los parámetros del hamiltoniano se realicen de manera suficientemente lenta.

En ese sentido, consideramos un hamiltoniano dependiente del tiempo  $\hat{H}(t)$  que satisface la ecuación de valores propios [2]:

$$\hat{H}_0(t) |n(t)\rangle = E_n |n(t)\rangle \quad (3.1)$$

donde  $|n(t)\rangle$  son los eigenestados instantáneos de  $\hat{H}(t)$ . Dichos estados, en general, no son solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, sin embargo, es posible construir soluciones aproximadas a partir de ellos. En este sentido, bajo aproximación

adiabática, el estado del sistema puede ser escrito como

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (3.2)$$

donde

$$\theta_n(t) = - \int_0^t E_n(t') dt', \quad \gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n(t') | \dot{n}(t') \rangle dt', \quad (3.3)$$

son la fase dinámica y la fase geométrica o fase de Berry respectivamente. Esta última, es adquirida por el sistema cuando realiza una trayectoria que lo devuelve a su estado inicial bajo una evolución adiabática [30].

Si bien es cierto que a través de una evolución adiabática se logra una mayor estabilidad y control de nuestro sistema (lo que puede implicar una mayor eficiencia en algunas de sus aplicaciones), también presenta ciertas limitaciones. En particular, el requerimiento de que los cambios en los parámetros del sistema sean lentos conduce a procesos que no son prácticos en aplicaciones que requieren respuestas rápidas o bien repeticiones del proceso. Con el fin de contrarrestar estas limitaciones, se han diseñado diversas técnicas entre las que destacan los atajos adiabáticos, los cuales son el enfoque principal de este trabajo y se discutirán en la siguiente sección.

## 3.2. Protocolos de atajos a la adiabaticidad

Los atajos adiabáticos son técnicas utilizadas para lograr los mismos resultados obtenidos a partir de lentos cambios adiabáticos de los parámetros de control de un sistema cuántico en un tiempo significativamente más corto sin sacrificar la estabilidad y control del sistema. Se basan en el diseño de trayectorias específicas que siguen los parámetros de control del sistema y que permiten emular los efectos de un proceso adiabático en un tiempo más corto. Dichas trayectorias pueden obtenerse al agregar términos extras al hamiltoniano original del sistema con el fin de contrarrestar las transiciones no adiabáticas y mantener al sistema en su estado deseado a lo largo de la evolución [9].

En esta sección, exploraremos tres diferentes protocolos de atajos a la adiabaticidad específicamente para el oscilador armónico cuántico. Estos protocolos incluyen la adición de términos globales para compensar las transiciones no adiabáticas, el mapeo del término contra-diabático a un potencial local o incluso el uso de invariantes dinámicos.

### 3.2.1. Inverse Engineering (IE)

En el protocolo de Ingeniería Inversa, aplicada al oscilador armónico, se busca diseñar la trayectoria que debe seguir la frecuencia  $\omega(t)$  con el fin de obtener, en un tiempo más corto, el mismo estado final que se obtendría tras una evolución adiabática. Para lograr este objetivo, se recurre a los invariantes de movimiento de Lewis-Riesenfeld [4].

Para el caso del oscilador armónico (ver Eq. (3.9)), la forma del invariante  $\hat{I}(t)$  se encuentra proponiendo un hamiltoniano de forma cuadrática, el cual debe cumplir con

$$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = \frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t} + i[\hat{H}(t), \hat{I}(t)] = 0, \quad (3.4)$$

con

$$\hat{I}(t) = \alpha_x(t)\hat{x}^2 + \alpha_p(t)\hat{p}^2 + \alpha_{xp}(t)(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \quad (3.5)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se tendrá que el invariante es:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{2} \left[ (\rho\hat{p} - \dot{\rho}\hat{x})^2 + \frac{\omega_0^2}{\rho^2}\hat{x}^2 \right], \quad (3.6)$$

donde, nuevamente,  $\rho$  satisface una ecuación de Ermakov cuyas soluciones deben ser reales para que  $\hat{I}(t)$  sea hermitiano. La frecuencia  $\omega_0$  en principio es una constante arbitraria que puede fijarse como la frecuencia inicial, es decir  $\omega_0 = \omega(0)$ .

Por otra parte, las eigenfunciones de  $\hat{I}(t)$  [31] están dadas por

$$\langle x|\phi_n(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \rho}} \exp \left[ \frac{i}{2} \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i\omega_0}{\rho^2} \right) x^2 \right] H_n \left( \sqrt{\omega_0} \frac{x}{\rho} \right), \quad (3.7)$$

con eigenvalores  $\lambda_n = \omega_0(n + 1/2)$ .

Para diseñar el atajo adiabático, inicialmente  $\omega(t)$  se considera desconocida excepto para tiempos inicial y final, donde  $\omega(0) = \omega_0$  y  $\omega(t_f) = \omega_f$ , respectivamente [38]. Para que el invariante  $\hat{I}(t)$  y el hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  conmuten en  $t = 0$  y  $t = t_f$ , y por tanto compartan eigenfunciones en esos instantes, es necesario fijar condiciones específicas sobre la función  $\rho$  [39]:

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = 0, \quad \ddot{\rho}(0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\rho(t_f) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_f}}, \quad \dot{\rho}(t_f) = 0, \quad \ddot{\rho}(t_f) = 0. \quad (3.9)$$

La función  $\rho(t)$  puede ser propuesta como un polinomio que se ajusta a estas condiciones. Un enfoque común es utilizar un polinomio de quinto grado, que es el de menor grado

que cumple con todas las condiciones de frontera. Una vez que se ha determinado la función  $\rho(t)$ , la frecuencia  $\omega(t)$  buscada puede ser obtenida de la ecuación de Ermakov para finalmente construir el hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  correspondiente al atajo adiabático.

### 3.2.2. Counterdiabatic Driving (CD)

En el formalismo contra-diabático, el hamiltoniano del sistema es modificado de forma que el estado cuántico siga la trayectoria adiabática del hamiltoniano original en un tiempo más corto [28].

En el formalismo general, desarrollado en [2], se considera un hamiltoniano dependiente del tiempo  $\hat{H}_0(t)$ , cuyas eigenenergías y eigenestados instantáneos están dados por Eq. (3.1). De acuerdo con el teorema adiabático visto en la sección anterior, los estados del sistema son

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |n(t)\rangle,$$

en donde  $\theta_n(t)$  y  $\gamma_n(t)$  son la fase dinámica y geométrica respectivamente. Para estos estados, buscamos un hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  tal que representen la dinámica exacta:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi_n(t)\rangle. \quad (3.10)$$

Para este hamiltoniano, los estados  $|\Psi_n(t)\rangle$  deben seguir exactamente a los  $|n(t)\rangle$  para que no ocurran transiciones entre los eigenestados de  $\hat{H}_0(t)$  para cualquier tiempo.  $\hat{H}(t)$  está relacionado con el operador de evolución correspondiente a través de,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = \hat{H}(t) \hat{U}(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}(t) = i \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} \hat{U}(t)^\dagger. \quad (3.11)$$

Eligiendo

$$\hat{U}(t) = \sum_n \exp \left\{ -i \int_0^t E_n(t') dt' - \int_0^t \langle n(t') | \dot{n}(t') \rangle dt' \right\} |n(t)\rangle \langle n(0)|, \quad (3.12)$$

es posible encontrar, utilizando Eq. (3.11), que

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \sum_n |n(t)\rangle E_n \langle n(t)| + i \sum_n (|\dot{n}(t)\rangle \langle n(t)| - \langle n(t)| \dot{n}(t)\rangle |n(t)\rangle \langle n(t)|) \\ &\equiv \hat{H}_0(t) + \hat{H}_1(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

A través de este formalismo (también es conocido como algoritmo de seguimiento sin transición de Berry), se encuentra el hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  que impulsa lo eigenestados  $|n(t)\rangle$  de  $\hat{H}_0(t)$  sin generar transiciones entre ellos.

Una vez establecido el protocolo de manera general, busquemos aplicarlo al caso del oscilador armónico dependiente del tiempo, para el cual:

$$\hat{H}_0(t) = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega_t^2 \hat{x}^2), \quad \omega_t = \omega(t). \quad (3.14)$$

Los eigenestados de este hamiltoniano, en la representación de coordenadas, pueden escribirse como

$$\langle x|n(t)\rangle = \frac{(\omega_t/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{\omega_t}{2}x^2\right) H_n(\sqrt{\omega_t}x) \quad (3.15)$$

Seguendo el algoritmo de Berry, es posible encontrar que el hamiltoniano  $\hat{H}_1(t)$  es [16] :

$$\hat{H}_1(t) = -\frac{\dot{\omega}_t}{4\omega_t}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \quad (3.16)$$

De acuerdo con Eq. (3.13), el hamiltoniano correspondiente al atajo adiabático es:

$$\hat{H}_{CD}(t) = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega_t^2 \hat{x}^2) - \frac{\dot{\omega}_t}{4\omega_t}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \quad (3.17)$$

el cual está asociado a un oscilador armónico generalizado con términos cruzados que implican una interacción no local [40].

### 3.2.3. Local Counterdiabatic Driving (LCD)

El método CD visto anteriormente, presenta limitaciones importantes debido a que requiere el conocimiento de los eigenestados y eigenvalores de  $\hat{H}(t)$  como función del tiempo. Como resultado, este formalismo no es adecuado para determinados sistemas [41]. Además, la implementación práctica del hamiltoniano contradiabático puede ser complicada ya que puede involucrar interacciones no triviales y difíciles de realizar experimentalmente. A fin de abordar estas limitaciones, se han desarrollado técnicas alternativas como lo es la aproximación LCD (Local Counterdiabatic Driving), en la cual, el hamiltoniano dado por Eq. (3.17) es mapeado a un nuevo hamiltoniano equivalente con un potencial local a través de una transformación unitaria dada por [15]:

$$\hat{U}_x = \exp\left(i\frac{\dot{\omega}_t}{4\omega_t}\hat{x}^2\right). \quad (3.18)$$

Al aplicar dicha transformación a  $\hat{H}_{CD}$  se obtiene un nuevo hamiltoniano de la forma:

$$\hat{H}_{LCD} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \Omega_t^2 \hat{x}^2), \quad (3.19)$$

con una frecuencia modificada que depende del tiempo

$$\Omega_t^2 = \omega_t^2 - \frac{3\dot{\omega}_t^2}{4\omega_t^2} + \frac{\ddot{\omega}_t}{2\omega_t}. \quad (3.20)$$

El hamiltoniano  $\hat{H}_{LCD}$  también conduce la evolución a lo largo de la trayectoria adiabática del sistema de interés. A diferencia del protocolo CD, es más sencillo de implementar experimentalmente y considerarse en un entorno físico diferente como un oscilador armónico ordinario con frecuencia modificada [29].

### 3.3. Enfoque de transformaciones unitarias e invariantes a los diferentes protocolos

Anteriormente, hicimos una revisión sobre tres protocolos de atajos adiabáticos aplicados al oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, los cuales utilizan distintos enfoques para obtener el hamiltoniano asociado a cada uno de los atajos. En esta sección, veremos cómo cada uno de estos métodos puede ser interpretado y analizado bajo un enfoque de transformaciones unitarias, lo cual nos proporciona una perspectiva distinta que integra los tres protocolos bajo una misma teoría.

En el capítulo 2, habíamos encontrado que, para el oscilador armónico cuántico con frecuencia dependiente del tiempo, cuyo hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}[\hat{p} + \omega^2(t)\hat{x}], \quad (3.21)$$

a través de las transformaciones  $\hat{D}(t)$  y  $\hat{S}(t)$  simplificadas, se convertía en:

$$\hat{H}_S(t) = \frac{1}{2\rho^2}(\hat{p}^2 + \omega_0^2\hat{x}^2), \quad \omega_0^2 = \omega^2(0). \quad (3.22)$$

Por otro lado, para el hamiltoniano  $\hat{H}(t)$ , el invariante correspondiente puede ser obtenido a través de:

$$\hat{I}(t) = \hat{D}(t)\hat{S}(t)\hat{H}_0\hat{S}^\dagger(t)\hat{D}^\dagger(t), \quad \hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega_0^2\hat{x}^2). \quad (3.23)$$

Multiplicando por la derecha ambos lados de la última ecuación por  $\hat{D}(t)\hat{S}(t)$

$$\hat{I}(t)\hat{D}(t)\hat{S}(t) = \hat{D}(t)\hat{S}(t)\hat{H}_0, \quad (3.24)$$

que, al ser proyectados sobre estados de número  $\{|n\rangle\}$  se tendrá que

$$\hat{I}(t)|n_t\rangle = \lambda_0|n_t\rangle, \quad (3.25)$$

donde  $|n_t\rangle = \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)|n\rangle$  y  $\lambda_0 = \omega_0(n + 1/2)$ . De la Eq. (3.25), se puede deducir que tanto  $\hat{I}(t)$  como  $\hat{H}_0$  comparten eigenvalores aunque los eigenvectores son distintos para cada uno.

En  $t = 0$ , podemos imponer para  $\rho(t)$  las condiciones dadas por Eq. (3.8). De esta forma,  $\hat{I}(t)$  y  $\hat{H}_0$  no solo conmutan sino que además son los mismos y por tanto, en este instante comparten vectores propios. En términos de los operadores de aniquilación y creación:

$$\hat{a}_0 = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left( \hat{x} + \frac{i}{\omega_0} \hat{p} \right) \quad \text{y} \quad \hat{a}_0^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left( \hat{x} - \frac{i}{\omega_0} \hat{p} \right), \quad (3.26)$$

tanto  $\hat{H}_0$  como  $\hat{I}(0)$  pueden escribirse como:

$$\hat{I}(0) = \hat{H}_0 = \omega_0 \left( \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \frac{1}{2} \right). \quad (3.27)$$

Ahora bien, para  $t > 0$ ,  $\hat{I}(t)$  y  $\hat{H}_0$  ya no conmutan y los operadores de aniquilación y creación evolucionan a través de las transformaciones  $\hat{\mathcal{D}}(t)$  y  $\hat{\mathcal{S}}(t)$ :

$$\hat{a}_t = \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)\hat{a}_0\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t) \quad \text{y} \quad \hat{a}_t^\dagger = \hat{\mathcal{D}}(t)\hat{\mathcal{S}}(t)\hat{a}_0^\dagger\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)\hat{\mathcal{D}}^\dagger(t), \quad (3.28)$$

respectivamente. Utilizando Eq. (2.86) y la fórmula BCH se tiene que

$$\hat{a}_t = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \frac{\hat{x}}{\rho} + \frac{i}{\omega_0} (\rho\hat{p} - \dot{\rho}\hat{x}) \right] \quad \text{y} \quad \hat{a}_t^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \frac{\hat{x}}{\rho} - \frac{i}{\omega_0} (\rho\hat{p} - \dot{\rho}\hat{x}) \right], \quad (3.29)$$

los cuales satisfacen la relación de conmutación  $[\hat{a}_t, \hat{a}_t^\dagger] = 1$ . A partir de la Eq. (3.29) es posible obtener de los operadores de posición  $\hat{x}$  y momento  $\hat{p}$ ,

$$\hat{x} = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} (\hat{a}_t + \hat{a}_t^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{i}{\rho} \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} (\hat{a}_t^\dagger - \hat{a}_t) + \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{2\omega_0}} (\hat{a}_t + \hat{a}_t^\dagger). \quad (3.30)$$

De esta forma, sustituyendo los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  en el hamiltoniano Eq. (3.21) se tiene que

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \left[ Q_1(t) (\hat{a}_t \hat{a}_t^\dagger + \hat{a}_t^\dagger \hat{a}_t) + Q_2(t) (\hat{a}_t^2 + \hat{a}_t^{\dagger 2}) + i \frac{\dot{\rho}}{\rho} (\hat{a}_t^{\dagger 2} - \hat{a}_t^2) \right], \quad (3.31)$$

con

$$Q_1(t) = \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0} + \frac{\omega_0}{2\rho^2} + \omega^2(t) \frac{\rho^2}{2\omega_0} \quad \text{y} \quad Q_2(t) = \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\rho^2} + \omega^2(t) \frac{\rho^2}{2\omega_0}. \quad (3.32)$$

El estado del sistema al tiempo  $t$ , puede obtenerse a partir de la Eq. (2.81), que puede reducirse tomando en cuenta que  $\lambda(t) = 0$ , de manera que

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\frac{\dot{\rho}}{2\rho}\hat{x}^2} e^{-i\frac{\ln\rho}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})} e^{-i\frac{\alpha}{2}(\hat{p}^2+\omega_0^2\hat{x}^2)} e^{i\frac{\ln\rho(0)}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})} e^{-i\frac{\dot{\rho}(0)}{2\rho(0)}\hat{x}^2} |\Psi(0)\rangle. \quad (3.33)$$

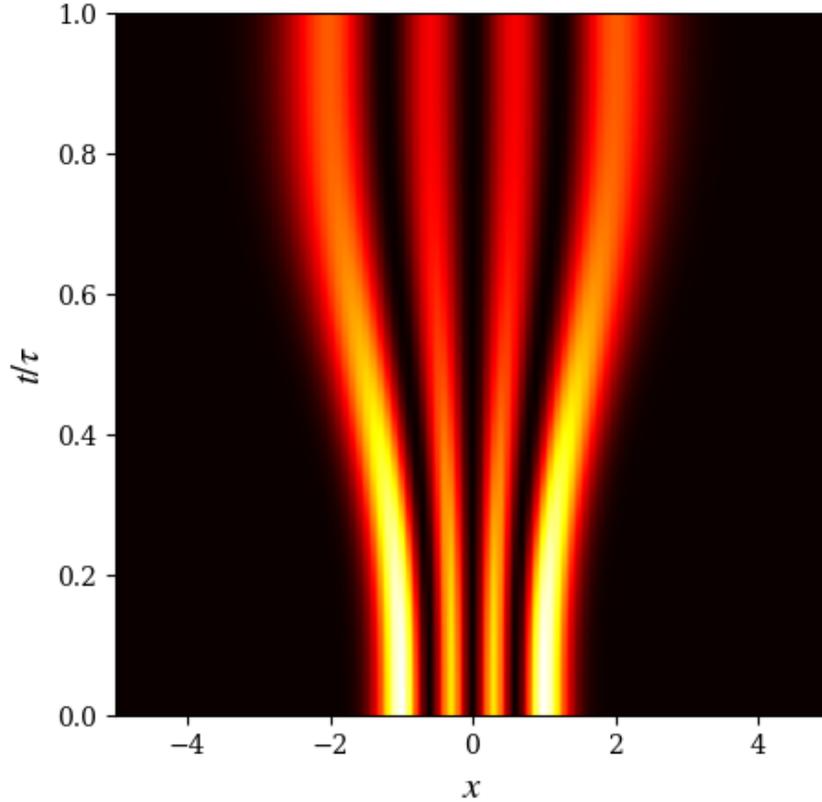


Figura 3.1: Evolución temporal del módulo al cuadrado de la función de onda  $|\langle x|\Psi_n(t)\rangle|^2$  para un estado de Fock inicial  $|\Psi_n(0)\rangle = |n\rangle$ , con  $n = 3$ . Se considera una relación de frecuencias  $\omega_0/\omega_f = 0.25$ .

Si consideramos nuevamente las condiciones de frontera de Eq. (3.8), el vector de estado se reduce a

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\frac{\dot{\rho}}{2\rho}\hat{x}^2} e^{-i\frac{\ln\rho}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})} e^{-i\frac{\alpha}{2}(\hat{p}^2+\omega_0^2\hat{x}^2)} |\Psi(0)\rangle. \quad (3.34)$$

Si  $|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n |n_t\rangle$ , la función de onda correspondiente a un solo modo es:

$$\langle x|\Psi_n(t)\rangle = \frac{(\omega_0/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2^n n! \rho}} e^{-i\alpha_n(t)} e^{i\frac{\dot{\rho}}{2}\left(\frac{\dot{\rho}+i\omega_0}{\rho^2}\right)x^2} H_n\left(\sqrt{\omega_0}\frac{x}{\rho}\right), \quad (3.35)$$

con  $\alpha_n(t) = -\omega_0(n + 1/2) \int_0^t \frac{dt'}{\rho^2}$ . En la Fig. 3.1 se observa la propagación de  $|\langle x|\Psi_n(t)\rangle|^2$  a diferentes tiempos.

Además, la energía promedio dependiente del tiempo para un eigenestado del hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  es

$$\langle \hat{H}(t) \rangle_n = \left[ \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0} + \frac{\omega_0}{2\rho^2} + \omega^2(t) \frac{\rho^2}{2\omega_0} \right] \left( n_t + \frac{1}{2} \right), \quad (3.36)$$

que puede ser rescrito como

$$\langle \hat{H}(t) \rangle_n = Q_{\text{IE}}(t) \langle \hat{H}(t) \rangle_{ad} \quad (3.37)$$

donde

$$\langle \hat{H}(t) \rangle_{ad} = \frac{\omega(t)}{\omega_0} \langle \hat{H}(0) \rangle \quad (3.38)$$

y

$$Q_{IE} = \frac{\omega_0}{\omega(t)} \left[ \frac{1}{2\rho^2} + \frac{\omega(t)^2 \rho^2}{2\omega_0^2} + \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0^2} \right] \quad (3.39)$$

son la energía adiabática promedio y el coeficiente adiabático, respectivamente [42].

El uso de las transformaciones unitarias, nos permite además encontrar una relación entre el hamiltoniano  $\hat{H}_{CD}$  del protocolo Counterdiabatic Driving visto anteriormente y un invariante de movimiento [13] asociado a un hamiltoniano de la forma:

$$\hat{H}_{CD}(t) = \frac{1}{2} \left[ \hat{p}^2 + \alpha^2(t) \hat{x}^2 + \lambda(t) (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}) \right], \quad (3.40)$$

Utilizando el enfoque de las transformaciones unitarias  $\hat{D}(t)$  y  $\hat{S}(t)$  dadas por Eq. (2.71) y Eq. (2.59) respectivamente, este hamiltoniano se convierte en

$$\hat{H}_S(t) = \frac{1}{2\rho^2} \left[ \hat{p}^2 + \omega_0^2 \hat{x}^2 \right] \quad (3.41)$$

donde nuevamente  $\omega_0 = \omega(0)$  y  $\rho$  satisface la ecuación de Ermakov

$$\ddot{\rho} + (\alpha^2 - \lambda^2 - \dot{\lambda})\rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}, \quad (3.42)$$

mientras que, el invariante es

$$\hat{I}_{CD}(t) = \frac{1}{2} \left\{ [(\rho\lambda - \dot{\rho})\hat{x} + \rho\hat{p}]^2 + \omega_0^2 \frac{\hat{x}^2}{\rho^2} \right\}. \quad (3.43)$$

Al igual que en el caso anterior, buscamos que  $\hat{H}_{CD}(t)$  e  $\hat{I}_{CD}(t)$  conmuten en  $t = 0$  y  $t = t_f$ , de manera que es necesario fijar condiciones de frontera para  $\rho(t)$ ,  $\alpha(t)$  y  $\lambda(t)$ .

En  $t = 0$ , podemos fijar  $\alpha(0) = \omega_0$ , mientras que  $\lambda(0) = 0$  y  $\dot{\lambda}(0) = 0$ . Para  $\rho(0)$  y sus derivadas, utilizamos las mismas condiciones dadas por Eq. (3.8).

En  $t = t_f$ , fijando  $\alpha(t_f) = \omega_f^2$ ,  $\lambda(t_f) = 0$  y  $\dot{\lambda}(t_f) = 0$  y las condiciones dadas por Eq. (3.9) para  $\rho(t_f)$  y sus derivadas, se garantiza que  $[\hat{H}_{CD}(t_f), \hat{I}_{CD}(t_f)] = 0$ .

Debido a que  $\hat{H}_{CD}(t)$  e  $\hat{I}_{CD}(t)$  son los mismos en  $t = 0$  y además se reducen al caso discutido anteriormente, estos pueden ser escritos en términos de los operadores de aniquilación y creación Eq. (3.26). Por otro lado, para  $t > 0$  la evolución de estos operadores puede ser obtenida a partir de las transformaciones  $\hat{D}(t)$  y  $\hat{S}(t)$ . De esta forma, los operadores  $\hat{a}_t$  y  $\hat{a}_t^\dagger$  son:

$$\hat{a}_t = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left\{ \frac{\hat{x}}{\rho} + \frac{i}{\omega_0} [(\lambda\rho - \dot{\rho})\hat{x} + \rho\hat{p}] \right\} \quad \text{y} \quad \hat{a}_t^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left\{ \frac{\hat{x}}{\rho} - \frac{i}{\omega_0} [(\lambda\rho - \dot{\rho})\hat{x} + \rho\hat{p}] \right\}, \quad (3.44)$$

y los operadores de posición y momento

$$\hat{x} = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} (\hat{a}_t + \hat{a}_t^\dagger) \quad \text{y} \quad \hat{p} = \frac{i}{\rho} \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} (\hat{a}_t^\dagger - \hat{a}_t) - \frac{(\lambda\rho - \dot{\rho})}{\sqrt{2\omega_0}} (\hat{a}_t + \hat{a}_t^\dagger). \quad (3.45)$$

Si sustituimos  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  en el hamiltoniano Eq. (3.40), tendremos finalmente que

$$\hat{H}_{\text{CD}}(t) = \frac{1}{2} \left[ Q_1(t) (\hat{a}_t \hat{a}_t^\dagger + \hat{a}_t^\dagger \hat{a}_t) + Q_2(t) (\hat{a}_t^2 + \hat{a}_t^{\dagger 2}) + i \frac{\dot{\rho}}{\rho} (\hat{a}_t^{\dagger 2} - \hat{a}_t^2) \right], \quad (3.46)$$

con energía promedio

$$\langle \hat{H}_{\text{CD}}(t) \rangle_n = Q_{\text{CD}}(t) \langle \hat{H}(t) \rangle_n, \quad (3.47)$$

donde  $\langle \hat{H}_{\text{CD}}(t) \rangle_n$  es la energía adiabática promedio mencionada anteriormente y

$$Q_{\text{CD}}(t) = \frac{\omega_0}{\omega(t)} \left[ \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0^2} + \frac{1}{2\rho^2} + \frac{(\alpha^2 - \lambda^2)\rho^2}{2\omega_0^2} \right] \quad (3.48)$$

es el correspondiente coeficiente adiabático.

Hasta este punto, hemos encontrado el hamiltoniano asociado a dos diferentes protocolos en términos de sus respectivos operadores de aniquilación y creación y hemos definido, en cada caso, un coeficiente adiabático. En cada uno de los protocolos, la función  $\rho(t)$  asociada satisface distintas ecuaciones de Ermakov. Además, resulta importante destacar el hecho de que  $\hat{I}(t)$ , escrito en términos de  $\rho(t)$ , cumple con la condición  $d\hat{I}/dt = 0$ , es decir, es un invariante de movimiento no solo en  $t = 0$  y  $t = t_f$ , sino que a cualquier tiempo.

Si definimos de manera particular las funciones  $\alpha(t)$ ,  $\lambda(t)$  y  $\rho(t)$  para el hamiltoniano general  $\hat{H}_{\text{CD}}(t)$  de la siguiente manera:

$$\alpha(t) = \sqrt{\omega_t^2 + \frac{\dot{\omega}_t^2}{2\omega_t^2} + \frac{\dot{\Omega}_t \dot{\omega}_t}{2\Omega_t \omega_t}}, \quad \lambda(t) = - \left( \frac{\dot{\omega}_t}{2\omega_t} + \frac{\dot{\Omega}_t}{2\Omega_t} \right), \quad \rho(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\Omega_t}}, \quad (3.49)$$

donde

$$\Omega_t = \omega_t \sqrt{1 - \frac{\dot{\omega}_t^2}{4\omega_t^4}}, \quad (3.50)$$

el invariante de la Eq. (3.43) puede ser escrito como:

$$\hat{I}_{\text{CD}}(t) = \frac{\rho^2}{2} \left[ \hat{p}^2 + \omega_t^2 \hat{x}^2 - \frac{\dot{\omega}_t}{2\omega_t} (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}) \right]. \quad (3.51)$$

Si comparamos este último invariante con el hamiltoniano asociado al protocolo CD, se tendrá que  $\hat{I}_{\text{CD}}(t) = \hat{H}_{\text{CD}}/\rho^2$ . Al igual que en el caso anterior, es posible definir operadores de aniquilación y creación

$$\hat{a}_t = \sqrt{\frac{\Omega_t}{2}} \left( \zeta_t \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{\Omega_t} \right) \quad \text{y} \quad \hat{a}_t^\dagger = \sqrt{\frac{\Omega_t}{2}} \left( \zeta_t^* \hat{x} - i \frac{\hat{p}}{\Omega_t} \right), \quad (3.52)$$

donde  $\zeta_t = 1 - i\dot{\omega}_t/(2\omega_t\Omega_t)$  y  $[\hat{a}_t, \hat{a}_t^\dagger] = 1$ . De estos últimos operadores, pueden obtenerse los operadores de posición y momento

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_t}} (\hat{a}_t + \hat{a}_t^\dagger) \quad \text{y} \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\Omega_t}{2}} (\zeta_t \hat{a}_t^\dagger - \zeta_t^* \hat{a}_t) \quad (3.53)$$

Sustituyendo estos operadores en la Eq. (3.40), se tiene que

$$\hat{H}_{\text{CD}}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega_t^2}{\Omega_t} (\hat{a}_t \hat{a}_t^\dagger + \hat{a}_t^\dagger \hat{a}_t) + \frac{\dot{\omega}_t^2}{4\Omega_t \omega_t^2} (\hat{a}_t^2 + \hat{a}_t^{\dagger 2}) - i \frac{\dot{\Omega}_t}{2\Omega_t} (\hat{a}_t^{\dagger 2} - \hat{a}_t^2) \right], \quad (3.54)$$

es el hamiltoniano correspondiente al atajo adiabático cuya energía promedio dependiente del tiempo para un eigenestado de hamiltoniano es

$$\langle \hat{H}_{\text{CD}}(t) \rangle = Q_{\text{CD}}(t) \langle \hat{H}(t) \rangle_{ad} \quad (3.55)$$

con

$$Q_{\text{CD}}(t) = \frac{\omega_t}{\Omega_t}, \quad (3.56)$$

el coeficiente adiabático correspondiente.

Si por otro lado, consideramos que  $\alpha(t) = \tilde{\Omega}_t$  de la Eq. (3.20) y  $\lambda(t) = 0$ , el caso se reduce al hamiltoniano del oscilador armónico simple con una frecuencia modificada:

$$\hat{H}_{\text{LCD}}(t) = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \tilde{\Omega}_t^2 \hat{x}^2), \quad \tilde{\Omega}_t^2 = \omega_t^2 - \frac{3\dot{\omega}_t^2}{4\omega_t^2} + \frac{\ddot{\omega}_t}{2\omega_t}, \quad (3.57)$$

El procedimiento para obtener el hamiltoniano del atajo es el mismo descrito al inicio de esta sección. Se debe tener en cuenta que en este caso, la ecuación de Ermakov que debe satisfacer la función  $\rho(t)$  es

$$\ddot{\rho} + \tilde{\Omega}_t^2 \rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}, \quad (3.58)$$

De igual manera, tanto el invariante como los operadores de aniquilación, creación, posición y momento estarán dados por Eq. (2.88), Eq. (3.29) y Eq. (3.30) respectivamente de manera que el hamiltoniano  $\hat{H}_{\text{LCD}}(t)$  puede ser escrito como

$$\hat{H}_{\text{LCD}}(t) = \frac{1}{2} \left[ Q_1(t) (\hat{a}_t \hat{a}_t^\dagger + \hat{a}_t^\dagger \hat{a}_t) + Q_2(t) (\hat{a}_t^2 + \hat{a}_t^{\dagger 2}) + i \frac{\dot{\rho}}{\rho} (\hat{a}_t^{\dagger 2} - \hat{a}_t^2) \right], \quad (3.59)$$

con

$$Q_1(t) = \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0} + \frac{\omega_0}{2\rho^2} + \tilde{\Omega}^2(t) \frac{\rho^2}{2\omega_0} \quad \text{y} \quad Q_2(t) = \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\rho^2} + \tilde{\Omega}^2(t) \frac{\rho^2}{2\omega_0}. \quad (3.60)$$

Por último, la energía promedio para un eigenestado de  $\hat{H}_{\text{LCD}}$  es

$$\langle \hat{H}_{\text{LCD}}(t) \rangle_n = Q_{\text{LCD}}(t) \langle \hat{H}_{\text{LCD}}(t) \rangle_{ad} \quad (3.61)$$

### 3.3. ENFOQUE DE TRANSFORMACIONES UNITARIAS E INVARIANTES A LOS DIFERENTES P

donde

$$Q_{\text{LCD}}(t) = \frac{\omega_0}{\omega(t)} \left[ \frac{1}{2\rho^2} + \frac{\tilde{\Omega}^2(t)\rho^2}{2\omega_0^2} + \frac{\dot{\rho}^2}{2\omega_0^2} \right] \quad (3.62)$$

es el respectivo coeficiente adiabático.

Si proponemos  $\rho(t)$  como un polinomio de décimo grado:

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^9 A_i s^i, \quad s = \frac{t}{t_f}, \quad (3.63)$$

que satisfaga las condiciones de frontera:

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = 0, \quad \ddot{\rho}(0) = 0, \quad \rho^{(3)}(0) = 0, \quad \rho^{(4)}(0) = 0, \quad (3.64)$$

$$\rho(t_f) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_f}}, \quad \dot{\rho}(t_f) = 0, \quad \ddot{\rho}(t_f) = 0, \quad \rho^{(3)}(t_f) = 0, \quad \rho^{(4)}(t_f) = 0, \quad (3.65)$$

obtenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales a partir de los cuales pueden obtenerse los coeficientes  $A_i, i = 0, \dots, 9$ . Finalmente  $\rho(t)$  será:

$$\rho(t) = 1 + 126(\gamma - 1)s^5 - 420(\gamma - 1)s^6 + 540(\gamma - 1)s^7 - 315(\gamma - 1)s^8 + 70(\gamma - 1)s^9 \quad (3.66)$$

Los coeficientes adiabáticos  $Q_{\text{IE}}(t)$ ,  $Q_{\text{LCD}}(t)$  y  $Q_{\text{CD}}(t)$  se ilustran en la Fig. 3.2. Esta gráfica muestra la evolución del coeficiente adiabático  $Q$  a lo largo del tiempo para cada uno de los protocolos discutidos. Se observa cómo cada protocolo maneja la variación en la relación de frecuencias y el tiempo final, proporcionando una comparación de su eficacia en la aproximación adiabática bajo las condiciones especificadas.

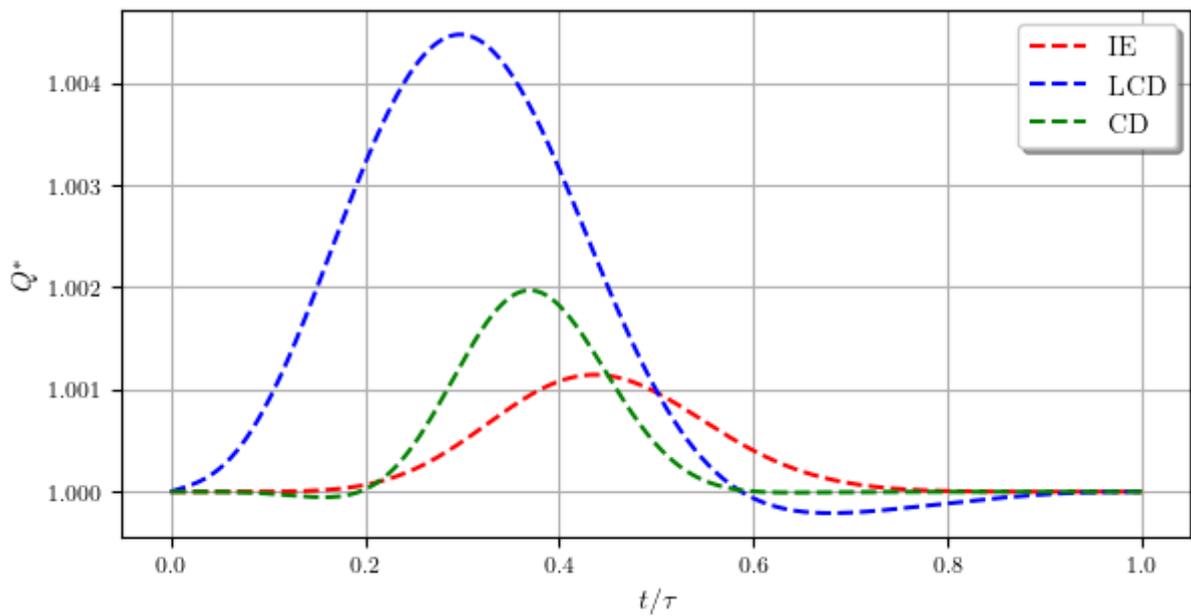


Figura 3.2: Coeficiente adiabático  $Q$  para los tres protocolos de atajos a la adiabaticidad: IE (Ecuación (3.43)), LCD (Ecuación (3.48)), y CD (Ecuación (3.62)), con una relación de frecuencias  $\omega_0/\omega_f = 0.1$  y un tiempo final  $t_f = 2$ .

# Capítulo 4

## Discusión y Conclusiones

El estudio de los atajos a la adiabaticidad aplicados al oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, tanto clásico como cuántico, proporciona una herramienta útil para acelerar procesos que deben variar de forma gradual para lograr un control efectivo del sistema considerado. En este capítulo discutimos los principales resultados y damos algunas conclusiones de nuestro estudio.

Utilizando un enfoque basado en el uso de transformaciones canónicas en el caso clásico y transformaciones unitarias en caso cuántico, es posible diseñar atajos adiabáticos para el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo haciendo uso de los invariantes encontrados en cada caso. Además, se logra interpretar los protocolos Inverse Engineering (IE), Local Counterdiabatic Driving (LCD) y Counterdiabatic Driving (CD) bajo una misma teoría. En este último caso, se encuentra una relación entre el hamiltoniano  $\hat{H}_{\text{CD}}(t)$  encontrado en la teoría [15] y el invariante  $\hat{I}_{\text{CD}}(t)$  encontrado a través del enfoque de transformaciones unitarias. Un resultado importante es que, en cada caso, además del invariante asociado a cada atajo adiabático, se encuentran operadores de aniquilación y creación que satisfacen la relación de conmutación  $[\hat{a}_t, \hat{a}_t^\dagger] = 1$  a cualquier tiempo. Por otro lado, en la gráfica de la Fig. 3.2, se presentan los resultados obtenidos para el coeficiente adiabático para cada uno de los protocolos mencionados, en donde, para los protocolos CD y LCD, se tomaron como referencia las frecuencias  $\Omega_t$  y  $\tilde{\Omega}_t$  [15] respectivamente. Como puede observarse, los tres protocolos tienden a 1 para  $t = t_f$ , lo que indica que, en este tiempo, ya no hay transiciones entre los estados de energía del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo y por tanto siguen la trayectoria adiabática incluso en tiempos muy cortos. Los protocolos que presentan la mayor y

la menor cantidad de transiciones son el LCD y el IE, respectivamente. Esto sugiere que, aunque todos los protocolos logran eventualmente una evolución adiabática, el enfoque de Inverse Engineering (IE) es el más eficiente en minimizar las transiciones no deseadas, mientras que el Local Counterdiabatic Driving (LCD) requiere ajustes más precisos para alcanzar un comportamiento adiabático óptimo.

Finalmente, a partir de los resultados obtenidos con este trabajo, se planea estudiar la aplicación de los hamiltoniano  $\hat{H}_{\text{IE}}$ ,  $\hat{H}_{\text{CD}}$ ,  $\hat{H}_{\text{LCD}}$  en términos de sus respectivos operadores de aniquilación, en un arreglo de guías de onda. Este estudio permitirá explorar la viabilidad de implementar atajos a la adiabaticidad en sistemas ópticos, abriendo nuevas posibilidades para el control preciso de la propagación de luz en dispositivos fotónicos. La investigación futura se centrará en optimizar estos protocolos para mejorar la eficiencia y robustez de las guías de onda, contribuyendo así al avance de la tecnología de comunicación y procesamiento de información cuántica.

# Bibliografía

- [1] J. J. Sakurai y Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 2.<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 2017.
- [2] M V Berry. «Transitionless quantum driving». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.36 (ago. de 2009), pág. 365303. DOI: [10.1088/1751-8113/42/36/365303](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/36/365303).
- [3] H. R. Lewis. «Classical and Quantum Systems with Time-Dependent Harmonic-Oscillator-Type Hamiltonians». En: *Phys. Rev. Lett.* 18 (13 mar. de 1967), págs. 510-512. DOI: [10.1103/PhysRevLett.18.510](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.18.510).
- [4] Jr. Lewis H. R. y W. B. Riesenfeld. «An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field». En: *Journal of Mathematical Physics* 10.8 (nov. de 1969), págs. 1458-1473. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.1664991](https://doi.org/10.1063/1.1664991).
- [5] P. G. L. Leach. «On the theory of time-dependent linear canonical transformations as applied to Hamiltonians of the harmonic oscillator type». En: *Journal of Mathematical Physics* 18.8 (ago. de 1977), págs. 1608-1611. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.523447](https://doi.org/10.1063/1.523447).
- [6] P. G. L. Leach. «Invariants and wavefunctions for some time-dependent harmonic oscillator-type Hamiltonians». En: *Journal of Mathematical Physics* 18.10 (ago. de 1977), págs. 1902-1907. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.523161](https://doi.org/10.1063/1.523161).
- [7] Xi Chen, E. Torrontegui y J. G. Muga. «Lewis-Riesenfeld invariants and transitionless quantum driving». En: *Phys. Rev. A* 83 (6 jun. de 2011), pág. 062116. DOI: [10.1103/PhysRevA.83.062116](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.062116).
- [8] Sebastian Deffner y Steve Campbell. *Quantum Thermodynamics*. 2053-2571. Morgan y Claypool Publishers, 2019. ISBN: 978-1-64327-658-8. DOI: [10.1088/2053-2571/ab21c6](https://doi.org/10.1088/2053-2571/ab21c6).

- [9] D. Guéry-Odelin et al. «Shortcuts to adiabaticity: Concepts, methods, and applications». En: *Rev. Mod. Phys.* 91 (4 oct. de 2019), pág. 045001. DOI: [10.1103/RevModPhys.91.045001](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.045001).
- [10] Carlos Farina De Souza y Álvaro De Souza Dutra. «The propagator for a time-dependent mass subject to a harmonic potential with a time-dependent frequency». En: *Physics Letters A* 123.6 (1987), págs. 297-301. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(87\)90232-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(87)90232-5).
- [11] H. Bateman. «On Dissipative Systems and Related Variational Principles». En: *Phys. Rev.* 38 (4 ago. de 1931), págs. 815-819. DOI: [10.1103/PhysRev.38.815](https://doi.org/10.1103/PhysRev.38.815).
- [12] Jr. Lewis H. R. «Class of Exact Invariants for Classical and Quantum Time-Dependent Harmonic Oscillators». En: *Journal of Mathematical Physics* 9.11 (nov. de 1968), págs. 1976-1986. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1063/1.1664532](https://doi.org/10.1063/1.1664532).
- [13] M A Lohe. «Exact time dependence of solutions to the time-dependent Schrödinger equation». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.3 (dic. de 2008), pág. 035307. DOI: [10.1088/1751-8113/42/3/035307](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/3/035307).
- [14] A. Tobalina et al. «Fast atom transport and launching in a nonrigid trap». En: *Scientific Reports* 7.5753 (jul. de 2017). DOI: [10.1038/s41598-017-05823-x](https://doi.org/10.1038/s41598-017-05823-x).
- [15] Obinna Abah y Eric Lutz. «Performance of shortcut-to-adiabaticity quantum engines». En: *Physical Review E* 98.3 (sep. de 2018). ISSN: 2470-0053. DOI: [10.1103/physreve.98.032121](https://doi.org/10.1103/physreve.98.032121).
- [16] J G Muga et al. «Transitionless quantum drivings for the harmonic oscillator». En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 43.8 (abr. de 2010), pág. 085509. ISSN: 1361-6455. DOI: [10.1088/0953-4075/43/8/085509](https://doi.org/10.1088/0953-4075/43/8/085509).
- [17] R. J. Glauber y M. Lewenstein. «Quantum optics of dielectric media». En: *Phys. Rev. A* 43.1 (ene. de 1991), págs. 467-491. DOI: [10.1103/PhysRevA.43.467](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.467).
- [18] Stanley S. Coelho, Lucas Queiroz y Danilo T. Alves. «Exact solution of a time-dependent quantum harmonic oscillator with two frequency jumps via the Lewis-Riesenfeld dynamical invariant method». En: *Entropy* 24.12 (dic. de 2022), pág. 1851. ISSN: 1099-4300. DOI: [10.3390/e24121851](https://doi.org/10.3390/e24121851).
- [19] D. G. Vergel y E. J. S. Villaseñor. «The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: Applications to quantum field theory». En: *Annals of Physics* 324.6

- (jun. de 2009), págs. 1360-1385. ISSN: 0003-4916. DOI: [10.1016/j.aop.2009.03.003](https://doi.org/10.1016/j.aop.2009.03.003).
- [20] Sai Li et al. «Noncyclic nonadiabatic holonomic quantum gates via shortcuts to adiabaticity». En: *Frontiers of Physics* 16.5 (jun. de 2021). ISSN: 2095-0470. DOI: [10.1007/s11467-021-1087-4](https://doi.org/10.1007/s11467-021-1087-4).
- [21] Francisco Andrés A. Cárdenas-López y J. C. Retamal y X. Chen Retamal. «Shortcuts to adiabaticity in superconducting circuits for fast multi-partite state generation». En: *Communications Physics* 6.10 (jul. de 2023), págs. 1902-1907. ISSN: 0022-2488. DOI: [10.1038/s42005-023-01283-0](https://doi.org/10.1038/s42005-023-01283-0).
- [22] S. X. Chen A. Ruschhaupt y Schmidt et al. «Fast Optimal Frictionless Atom Cooling in Harmonic Traps: Shortcut to Adiabaticity». En: *Phys. Rev. Lett.* 104.6 (feb. de 2010), pág. 063002. DOI: [10.1103/PhysRevLett.104.063002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.063002).
- [23] Lifshitz E.M. Landau L.D. *Course of theoretical physics Vol. 1. Mechanics*. 3ed. Pergamon, 1976.
- [24] John L. Safko Herbert Goldstein Charles P. Poole. *Classical mechanics*. 3.<sup>a</sup> ed. Addison-Wesley, 2000.
- [25] David J. Griffiths y Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3.<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 2018.
- [26] H. Moya-Cessa y Francisco Soto-Eguibar. *Introduction to Quantum Optics*. Oct. de 2011. ISBN: 978-1-58949-061-1.
- [27] M. Fernández-Guasti y H Moya-Cessa. «Solution of the Schrödinger equation for time-dependent 1D harmonic oscillators using the orthogonal functions invariant». En: *Journal of Physics A Mathematical and General* 36 (feb. de 2003), pág. 2069. DOI: [10.1088/0305-4470/36/8/305](https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/8/305).
- [28] Mikio Nakahara. «Counterdiabatic formalism of shortcuts to adiabaticity». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 380.2239 (nov. de 2022). ISSN: 1471-2962. DOI: [10.1098/rsta.2021.0272](https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0272).
- [29] Adolfo del Campo. «Shortcuts to Adiabaticity by Counterdiabatic Driving». En: *Physical Review Letters* 111.10 (sep. de 2013). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.111.100502](https://doi.org/10.1103/physrevlett.111.100502).

- [30] M. V. Berry. «Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes». En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 392.1802 (1984), págs. 45-57. ISSN: 00804630.
- [31] Dionisis Stefanatos, Justin Ruths y Jr-Shin Li. «Frictionless atom cooling in harmonic traps: A time-optimal approach». En: *Physical Review A* 82.6 (dic. de 2010). ISSN: 1094-1622. DOI: [10.1103/physreva.82.063422](https://doi.org/10.1103/physreva.82.063422).
- [32] Erik Torrontegui et al. «Shortcuts to Adiabaticity». En: *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*. Elsevier, 2013, págs. 117-169. DOI: [10.1016/b978-0-12-408090-4.00002-5](https://doi.org/10.1016/b978-0-12-408090-4.00002-5).
- [33] Adolfo del Campo y Kihwan Kim. «Focus on Shortcuts to Adiabaticity». En: *New Journal of Physics* 21.5 (mayo de 2019), pág. 050201. DOI: [10.1088/1367-2630/ab1437](https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab1437).
- [34] G Nenciu. «On the adiabatic theorem of quantum mechanics». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 13.2 (feb. de 1980), pág. L15. DOI: [10.1088/0305-4470/13/2/002](https://doi.org/10.1088/0305-4470/13/2/002).
- [35] M. Born y V. Fock. «Beweis des Adiabatenatzes». En: *Zeitschrift für Physik* 51.3-4 (mar. de 1928), págs. 165-180. DOI: [10.1007/BF01343193](https://doi.org/10.1007/BF01343193).
- [36] Tang-You Huang, Boris A. Malomed y Xi Chen. «Shortcuts to adiabaticity for an interacting Bose–Einstein condensate via exact solutions of the generalized Ermakov equation». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 30.5 (mayo de 2020). ISSN: 1089-7682. DOI: [10.1063/5.0004309](https://doi.org/10.1063/5.0004309).
- [37] Mustafa. Demirplak. «Adiabatic Population Transfer with Control Fields». En: *J. Phys. Chem. A* 107.46 (nov. de 2003). DOI: [10.1021/jp030708a](https://doi.org/10.1021/jp030708a).
- [38] J. P. Palao, J. G. Muga y R. Sala. «Composite Absorbing Potentials». En: *Phys. Rev. Lett.* 80 (25 jun. de 1998), págs. 5469-5472. DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.5469](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5469).
- [39] Xi Chen y J. G. Muga. «Transient energy excitation in shortcuts to adiabaticity for the time-dependent harmonic oscillator». En: *Physical Review A* 82.5 (nov. de 2010). ISSN: 1094-1622. DOI: [10.1103/physreva.82.053403](https://doi.org/10.1103/physreva.82.053403).
- [40] M V Berry. «Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 18.1 (ene. de 1985), pág. 15. DOI: [10.1088/0305-4470/18/1/012](https://doi.org/10.1088/0305-4470/18/1/012).

- [41] S. Ibáñez et al. «Multiple Schrödinger Pictures and Dynamics in Shortcuts to Adiabaticity». En: *Physical Review Letters* 109.10 (sep. de 2012). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.109.100403](https://doi.org/10.1103/physrevlett.109.100403).
- [42] Mathieu Beau y Adolfo del Campo. «Nonadiabatic Energy Fluctuations of Scale-Invariant Quantum Systems in a Time-Dependent Trap». En: *Entropy* 22.5 (abr. de 2020), pág. 515. ISSN: 1099-4300. DOI: [10.3390/e22050515](https://doi.org/10.3390/e22050515).