



INAOE

Optimización del método de inversión de curvas de luz para objetos pequeños del sistema solar

por

Ramón López González

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIA Y
TECNOLOGÍA DEL ESPACIO**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Febrero 2020

Tonantzintla, Puebla

Bajo la supervisión de:

Dr. Jose Ramón Valdés Parra

Investigador Titular INAOE

Dr. José S. Guichard Romero

Investigador Titular INAOE

©INAOE 2020

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias parcial o totalmente
de esta tesis.



Resumen

Esta tesis presenta el método de inversión de curvas de luz para asteroides en el sistema solar de manera detallada, haciendo énfasis en la parte matemática, además de hacer uso de este método en observaciones prácticas para algunos objetos como ejemplo de su aplicación. Este método ocupa una gran variedad de herramientas matemáticas para las cuales es necesario tener un conocimiento previo de ellas y cierto nivel de dominio, no obstante, la parte más complicada es poder mezclar estas técnicas con la experiencia obtenida en las observaciones de los objetos, ya que de esto dependerá la obtención de los parámetros más importantes en el tratamiento de la información, tales como parámetros de dispersión o número de observaciones necesarias, y sobre todo de la reducción del tiempo de cálculos para técnicas aplicadas como lo son las series de Fourier.

Empezaremos dando una detallada descripción de las técnicas matemáticas empleadas por este método, empezando por el uso de curvas de luz, desde la obtención de éstas a partir de observaciones realizadas en la cámara Schmidt del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) y procesadas tanto por software especializado (MPO-Canopus) como código propio, hasta la representación de éstas en forma de series de Fourier. Damos un tratamiento sencillo a las leyes de dispersión de la luz para asteroides tomando en cuenta parámetros importantes no obtenidos directamente en este trabajo como lo es el albedo. Se explicara la manera en que se obtiene la forma del asteroide haciendo uso de la imagen Gaussiana extendida y del

teorema de reducción de Minkowski. Finalmente se presentan los resultados del uso de este método en asteroides observados en el INAOE haciendo uso de la cámara Schmidt.

El uso exitoso de este método implica la correcta combinación entre la teoría desarrollada en este trabajo y la experiencia adquirida durante las observaciones realizadas, ya que de esto dependerá el tiempo de cómputo, la cantidad de datos y/o número de series, y el error final en la obtención de todos los parámetros físicos de los asteroides examinados en esta tesis.

Índice general

Índice general	V
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	IX
1. Introducción	1
1.1. Motivación y justificaciones	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Observaciones	3
1.3.1. Histórica cámara Schmidt	3
1.4. Cuerpos menores del sistema solar	5
2. Fotometría de asteroides	15
2.1. Curvas de luz	15
2.2. Dispersión de luz	17
2.3. Series de Fourier	19
2.4. Densidad superficial Gaussiana	21
2.5. Minimización de Minkowski	22
3. Metodología observacional y analítica	25
3.1. Histórica Cámara Schmidt	25

3.2. Selección	29
3.3. Método de inversión	31
4. Observaciones y resultados	37
4.1. (1346) Gotha	40
4.2. (22) Kalliope	42
4.3. (711) Marmulla	44
4.4. (1318) Nerina	46
4.5. (1492) Oppolzer	48
4.6. (1117) Reginita	50
4.7. (5692) Shirao	52
4.8. (4713) Steel	54
4.9. (3028) Zhangguoxi	56
5. Conclusiones	59

Índice de figuras

1.1. Luis Enrique Erro (1950)	4
1.2. Histórica cámara Schmidt	4
1.3. Unión Astronómica Internacional	6
1.4. Elementos orbitales	9
2.1. Curva de luz	16
2.2. Dispersión de Lambert	18
2.3. Superficie Gaussiana para un cubo	22
3.1. Cámara Schmidt	26
3.2. Espejo primario	27
4.1.	41
4.2.	42
4.3.	43
4.4.	45
4.5.	47
4.6.	49
4.7.	51
4.8.	53
4.9.	55

4.10. 57

Índice de tablas

1.1. Elementos orbitales	8
1.2. Clasificación de asteroides (Center for Near Earth Objects Studies, 2019)	11
3.1. Ubicación cámara Schmidt	26
3.2. Características espejo primario	27
3.3. Características de la lente aplanadora de campo	28
3.4. Características de la lente correctora	28
3.5. Características CCD	29
3.6. Objetos seleccionados	31
4.1. Objetos seleccionados	39
4.2. Posición del eje de rotación	40
4.3. Posición del eje de rotación	42
4.4. Posición del eje de rotación	44
4.5. Posición del eje de rotación	46
4.6. Posición del eje de rotación	48
4.7. Posición del eje de rotación	50
4.8. Posición del eje de rotación	52
4.9. Posición del eje de rotación	54
4.10. Posición del eje de rotación	56

Capítulo 1

Introducción

La fotometría de asteroides es una disciplina cada vez más importante para el futuro, debido al reciente auge del interés dado a los cuerpos menores de nuestro sistema solar, ya que se prevee que próximamente actividades ligadas a éstos, como lo es la minería de asteroides, sean de importancia prioritaria para el futuro de la humanidad, además de la preocupación que ha estado siempre presente de que un cuerpo de esta índole tenga la probabilidad de impactar nuestro planeta. Debido a estas razones este trabajo presenta un desarrollo a detalle de uno de los métodos más importantes en el estudio de estos cuerpos, el método de inversión de curvas de luz, además de analizar las posibilidades de optimizar cada uno de los pasos implicados en el método.

1.1. Motivación y justificaciones

La reciente proliferación de avistamientos de meteoros en nuestro planeta, debido a la facilidad que se tiene hoy en día de poder documentar dichos eventos, ha elevado el interés acerca de este tipo de acontecimientos y de lo que pasa con sus progenitores antes de su encuentro con la Tierra. A pesar de que han sido estudiados desde muchos años atrás, el conocimiento que se tiene sobre los cuerpos menores que nos rodean es limitado, ya que conocemos alrededor de 20 000 objetos cercanos a la Tierra de entre

los 600 000 ya observados en el sistema solar (European Space Agency, 2019).

El análisis fotométrico de los asteroides necesita de un proceso sumamente metódico, desde la toma de imágenes a los objetos a observar, hasta la obtención de la forma de éstos. Éste es un proceso delicado, porque pequeñas modificaciones en su aplicación generan grandes diferencias en la solución final, en muchos casos la forma obtenida resulta completamente diferente a otras realizadas con los mismos datos de entrada. Debido a esto los resultados obtenidos son publicados en bases de datos a disposición de la comunidad científica como las de Minor Planet Center (MPC), Asteroid Model from Inversion Techniques (DAMIT) y la Asteroid Lightcurve Data Exchange Format (ALCDEF), con el objetivo de que las curvas de luz puedan ser utilizadas por otros observadores para generar nuevos parámetros físicos.

La justificación clave es poder hacer nuestras aportaciones a estas bases de datos sin la necesidad de esperar a comparar nuestras observaciones con otras pasadas o que estén por realizarse, además de generar nuestras propias bases de datos con nuestras imágenes, curvas de luz y formas de los asteroides determinadas por nuestro equipo.

Otra de las necesidades a solventar es el conocer a detalle el proceso que lleva a cabo el software que realiza la inversión, porque el entendimiento de cada una de las variables más importantes nos permite disminuir el tiempo necesario para encontrar la forma de un asteroide reduciendo así el coste computacional.

1.2. Objetivos

Este trabajo tiene 3 objetivos principales:

I. Entender el principio matemático del funcionamiento del método de inversión de curvas de luz. (Kaasalainen, 1992; Kaasalainen et. al. 2000)

II. Definir las variables más significativas en la determinación confiable de los parámetros físicos de los cuerpos menores del sistema solar.

III. Aplicar los conocimientos adquiridos en los dos primeros objetivos para poder aplicar este método en asteroides observados con la cámara Schmidt del INAOE.

En particular buscamos crear los fundamentos para generar nuestras propias bases de datos, utilizando observaciones realizadas por nosotros mismos y las curvas de luz y formas obtenidas, corroboradas por la metodología aquí presentada, además de contribuir a bases de datos universales , incorporando a ellas dichos resultados.

1.3. Observaciones

1.3.1. Histórica cámara Schmidt

El OANTon (Observatorio Astrofísico Nacional de Tonantzintla) fue fundado en 1942 por Luis Enrique Erro, uno de los personajes científicos más sobresaliente del siglo XX, siendo el instrumento más importante la Cámara Schmidt, diseñada para tomar fotografías de campo amplio del cielo.



Figura 1.1: Luis Enrique Erro (1950)

Con la participación, entre otros, de Carlos Graef Fernández, París Pishmish, Luis Rivera Terrazas y, sobre todo, Guillermo Haro se echó a andar la Cámara Schmidt en 1946, realizando grandes aportaciones a la astronomía del mundo, bajo el liderazgo de Guillermo Haro.

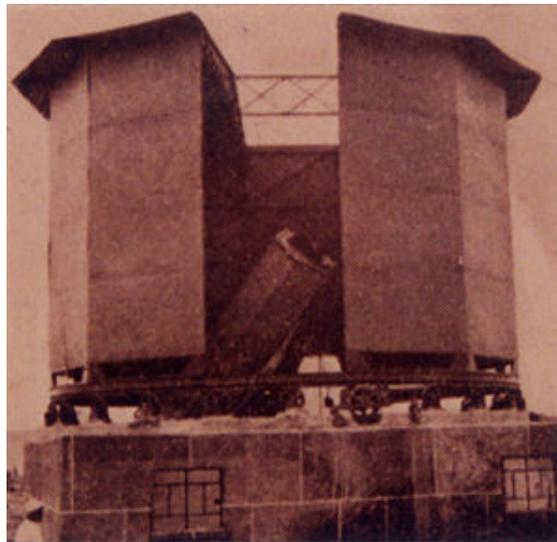


Figura 1.2: Histórica cámara Schmidt

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN. CUERPOS MENORES DEL SISTEMA SOLAR

La instalación fue apoyada por el presidente Manuel Ávila Camacho siendo Tonantzintla el lugar más idóneo debido a su situación geográfica, su latitud permite observar regiones celestes más hacia el sur.

Veinte años estuvo situada en la cima del cerro de Tonantzintla y en la década de 1960 fue movida a su ubicación actual, se cambió la montura ecuatorial por una de horquilla, los círculos horarios por motores de pasos y una consola de relojería mas precisa. El sistema óptico siempre ha sido el mismo, formado por una lente correctora de 66.04 centímetros de diámetro y un espejo esférico primario de 77.4 centímetros de diámetro.

Se obtuvieron más de 15,000 placas astronómicas en mas de 50 años, posteriormente el sistema de captura de imágenes se digitalizó, instalándose un dispositivo de carga acoplada (CCD) y un sistema de automatización para la montura, para esto fue necesario instalar un lente correctora de campo para reducir el campo de visión del telescopio.

1.4. Cuerpos menores del sistema solar

Los cuerpos celestes son todos aquellos objetos que forman parte del universo y pueden interactuar con otro cuerpo por la ley de gravedad, la mayoría de los puntos brillantes en el cielo son estrellas pero entre los cuerpos celestes que se pueden percibir se encuentran:

Estrellas.

Galaxias.

Planetas.

Asteroides.

Nebulosas.

Agujeros negros.

Como se ha recalcado a lo largo de este trabajo, el objetivo principal es analizar asteroides visibles desde la Tierra y es en la delimitación de estos cuerpos en lo que se centra este estudio. Los asteroides son restos del disco protoplanetario, podría decirse que son planetas que no terminaron de formarse, en consecuencia resulta muy difícil determinar, entre todos los objetos descubiertos, cuales son o no son planetas, por eso en el año 2006 la Unión Astronómica Internacional (IAU) publicó la resolución B5 la cual hace una distinción entre los objetos presentes en los distintos sistemas planetarios:

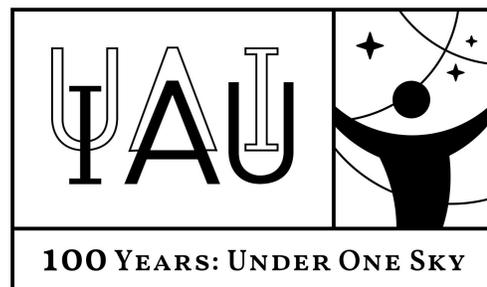


Figura 1.3: Unión Astronómica Internacional

La IAU establece que planetas y otros cuerpos, con excepción de satélites, en el sistema solar son definidos en tres categorías distintas de la siguiente manera:

1. Un planeta es un cuerpo que:
 - a) Esta en órbita alrededor del Sol.
 - b) Tiene suficiente masa para vencer las fuerzas de cuerpo rígido y asumir una forma de equilibrio hidrostático (casi esférico).
 - c) Ha despejado el espacio alrededor de su órbita.
2. Un planeta enano es un cuerpo que :

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN. CUERPOS MENORES DEL SISTEMA SOLAR

- a) Esta orbitando alrededor del sol.
- b) Tiene suficiente masa para vencer las fuerzas de cuerpo rígido y asumir una forma de equilibrio hidrostático (casi esférico).
- c) No ha despejado el espacio alrededor de su órbita.
- d) No es un satélite.

3. Todos los otros objetos, con excepción de satélites, orbitando el sol serán referidos colectivamente como "cuerpos menores del sistema solar".

Antes de realizar una definición de las diversas clasificaciones, que serán de importancia en este trabajo, es necesario introducir las variables necesarias para determinar las propiedades orbitales de cada cuerpo celeste. Estos elementos orbitales son datos necesarios para determinar la forma, tamaño y orientación que tiene la órbita de un objeto y que determinan su posición en cada instante.

El Minor Planet Center es el encargado de confirmar si un objeto es nuevo y después de las primeras estimaciones astrométricas calcula una órbita preliminar que permite generar las primeras efemérides.

Para determinar el tamaño y la forma de la órbita son necesarios dos elementos, excentricidad (e) y el semieje mayor de la órbita (a); la inclinación del plano orbital (i), la longitud del nodo ascendente (Ω) y el argumento del perihelio (ω) definen la orientación de la órbita y la fecha de paso por el perihelio (T) define la posición del objeto en cada momento. (Lissauer y de Pater 2013)

Semieje mayor	a	La mitad de la longitud del eje mayor de una órbita elíptica
Excentricidad	e	Grado de desviación con respecto a una órbita circular
Inclinación del plano orbital	i	Ángulo entre el plano orbital y la eclíptica
Longitud del nodo ascendente	Ω	Ángulo entre el equinoccio vernal y el nodo ascendente
Anomalia verdadera	M	Distancia angular desde el perihelio hasta la posición actual del cuerpo
Argumento del perihelio	ω	Ángulo entre el nodo ascendente y el perihelio

Tabla 1.1: Elementos orbitales

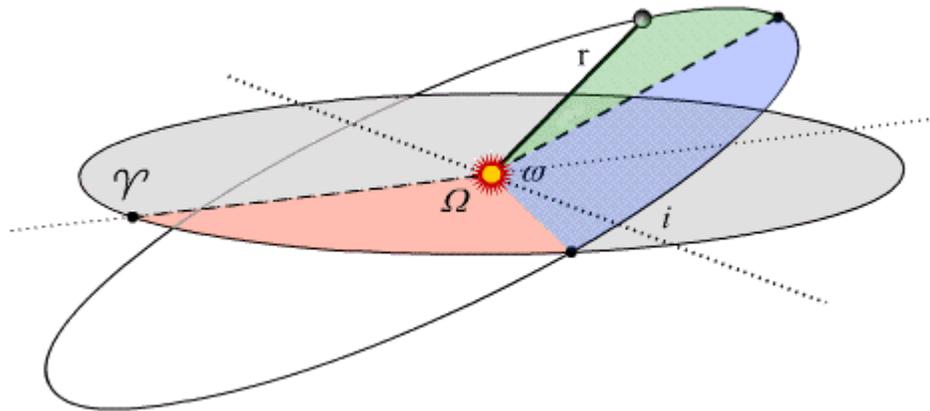


Figura 1.4: Elementos orbitales

Dada esta resolución nuestros objetos de estudio caen en la categoría de cuerpos menores del sistema solar, pero también es necesario delimitar entre asteroides y cometas al estar ambos incluidos en esta categoría. La diferencia principal es su composición, los asteroides están compuestos principalmente de metal o roca, mientras que los cometas están compuestos en su mayoría de agua, hielo y partículas de polvo los cuales al acercarse al sol pierden material formando dos colas.

La forma fundamental de agrupar asteroides es debido a su distribución en el sistema solar, siendo esta clasificación la que sigue:

Asteroides cercanos a la tierra (NEOs)

Son asteroides que han sido empujados por la atracción gravitacional de planetas cercanos a órbitas que les permiten entrar en el espacio orbital de la tierra, la mayoría de éstos formados en el sistema solar interno entre las órbitas de Marte y Júpiter; el principal interés en ellos es debido a su estado de restos relativamente inalterados remanentes del proceso de formación del sistema solar hace 4.6 billones de años. Muchos de estos asteroides son pedazos sobrantes de la aglomeración inicial de los

planetas internos.

Estos asteroides ofrecen pistas de la mezcla química de la cual los planetas se formaron, si queremos conocer la composición de esta mezcla primordial debemos determinar los constituyentes químicos de los restos sobrantes de este proceso de formación.

Los asteroides cercanos a la tierra (NEAs) están divididos en grupos de acuerdo a los valores de su perihelio (q), afelio (Q) y su semieje mayor (a):

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN. CUERPOS MENORES DEL SISTEMA SOLAR

NEAs	$q < 1,3 \text{ UA}$	Asteroides cercanos a la Tierra
Atiras	$a < 1,0 \text{ UA};$ $Q < 0,983 \text{ UA}$	NEA cuya órbita esta contenida en la órbita de la Tierra
Atens	$a < 1,0 \text{ UA};$ $Q > 0,983 \text{ UA}$	NEAs que cruzan la órbita de la Tierra con semiejes mayores mas menores que los de la órbita de la Tierra
Apollos	$a > 1,0 \text{ UA};$ $q < 1,017 \text{ UA}$	NEAs que cruzan la órbita de la Tierra con semiejes mayores mas grandes que los de la órbita de la Tierra
Amors	$a > 1,0 \text{ UA};$ $1,017 < q <$ $1,3 \text{ UA}$	NEAs que se acercan a la Tierra con órbitas exteriores a la de la Tierra pero interiores a la de Marte
PHAs	$MOID \leq$ $0,05 \text{ UA};$ $H \leq 22,0$	Asteroides potencialmente peligrosos cuya distancia de intersección orbital mínima (MOID por sus siglas en inglés) es menor o igual a 0.05 UA y su magnitud absoluta (H) es 22 o más brillante

Tabla 1.2: Clasificación de asteroides (Center for Near Earth Objects Studies, 2019)

Asteroides del Cinturón Principal

La mayoría de los asteroides conocidos orbitan dentro del cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter, se estima que existen entre 1.1 y 1.9 millones de asteroides con un diámetro mayor a 1 kilómetro, de los cuales se han observado alrededor de 600,000, y varios millones de asteroides más pequeños.

Trojanos

Estos asteroides comparten órbita con un planeta mayor, pero no colisionan con él debido a que se encuentra orbitando dos lugares especiales llamados puntos lagrangianos L4 y L5. La atracción gravitacional del sol y el planeta está balanceada por la tendencia del troiano a abandonar la órbita. La mayoría están en la órbita de Júpiter los cuales se predice son tan numerosos como los del cinturón principal, aunque también existen en Marte y Neptuno, además de que la NASA descubrió uno en la tierra en el 2011 (NASA, 2011).

Centauros

Asteroides con semieje mayor similar a los planetas exteriores, entre Júpiter y Neptuno; poseen órbitas inestables debido a la atracción gravitacional de los planetas cercanos. El principal interés en estos es que recuerdan a cometas ya que muestran una coma alrededor y a veces se comportan como asteroides normales.

Objetos trans-neptunianos

Estos objetos son los más lejanos al Sol, el Minor Planet Center reportó en 2018 1,910 de estos objetos ubicados en el cinturón de Kuiper. Estos objetos están subdivididos de acuerdo a las áreas del sistema solar donde orbitan, siendo estas el cinturón de Kuiper,

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN. CUERPOS MENORES DEL SISTEMA SOLAR

Disco Disperso o la nube de Oort; y a su vez están subdivididos en plutinos, plutoides, objetos clásicos del cinturón de Kuiper, objetos del disco disperso y objetos interiores de la nube de Oort.

Capítulo 2

Fotometría de asteroides

La determinación de la forma tridimensional y el comportamiento de la luz dispersada de la superficie de un cuerpo usando fotometría es el objetivo del método de inversión de curvas de luz; este proceso comprende tres pasos:

- 1) Se determina una función o funciones con la información contenida en las curvas de luz.
- 2) Se derivan expresiones separadas para la distribución del albedo y el inverso de la curvatura Gaussiana, de la superficie del asteroide, a partir de la función obtenida en el primer paso.
- 3) Determinar el radio vector de la superficie desde la curvatura Gaussiana.

El objetivo es expresar las dependencias entre la forma del asteroide, el comportamiento de la luz dispersada y la geometría observada de una manera donde la solución para el problema inverso se pueda buscar.

2.1. Curvas de luz

Las curvas de luz se obtienen mediante observaciones fotométricas de los objetos de estudio, midiendo la cantidad de energía a través de una cierta banda de longitudes de

onda, utilizando un sistema de filtros; el sistema fotométrico más utilizado es el de Johnson. Estas curvas de luz son gráficos que muestran el brillo de un objeto en cierto periodo de tiempo, pueden ser obtenidas para distintos objetos que varían su brillo al pasar el tiempo, tales como novas, supernovas o estrellas variables. Los datos obtenidos a partir de las curvas de luz son de ayuda para poder identificar procesos que suceden en los cuerpos de estudio e identificar categorías de eventos estelares; actualmente podemos conocer a que objeto puede pertenecer cierta curva de luz acorde a la forma que esta tiene, razón por la cual al conseguir una nueva curva de luz la podemos comparar con las curvas de luz estándar y así identificar lo que estamos observando.

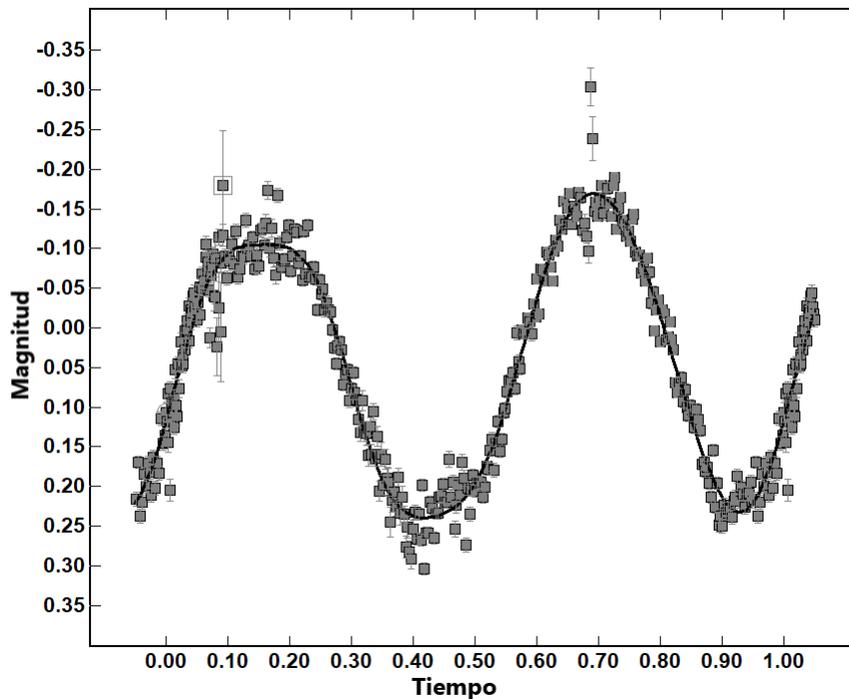


Figura 2.1: Curva de luz

2.2. Dispersión de luz

Este trabajo principalmente hace uso de dos leyes de dispersión de la luz sobre superficies, basadas en el modelo físico de reflexión difusa el cual es un modelo de dispersión única donde esta dispersión es isotrópica. El modelo asume que la luz atraviesa la superficie siendo atenuada exponencialmente mientras lo hace, tomando en cuenta todos los mecanismos que reducen el brillo del rayo de luz, como lo son la absorción y la dispersión. Cada elemento de volumen atravesado por el rayo de luz dispersa parte de él isotrópicamente, igual en todas direcciones dentro de los 4π estereorradianos alrededor de él.

Para la inversión de curvas de luz generalmente se hace uso de la ley de Lambert y la ley de Lommel-Seeliger, una combinación de estas dos leyes permite realizar el método de inversión de manera satisfactoria, aunque es posible utilizar leyes de acuerdo a cada asteroide.

Ley de Lambert

Esta ley establece que la iluminación producida por una fuente de luminosa sobre una superficie es directamente proporcional a la intensidad de la fuente y al coseno del ángulo que forma la normal a la superficie con la dirección de los rayos de luz e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a dicha fuente.

Sea r la distancia entre un observador y una fuente luminosa, la proyección de una porción de superficie $\Delta A'$ sobre la esfera alrededor del observador es:

$$\Delta A = \Delta A' \cos(\alpha) \quad (2.1)$$

El ángulo sólido por el cual el observador ve el area proyectada será:

$$\Delta \Omega = \frac{\Delta A}{r^2} = \Delta A' \frac{\cos(\alpha)}{r^2} \quad (2.2)$$

El flujo de radiación en del ángulo sólido es directamente proporcional a la intensidad de la fuente:

$$\Delta\Phi = I\Delta\Omega = I\Delta A' \frac{\cos(\alpha)}{r^2} \quad (2.3)$$

Finalmente la irradianza en la superficie esférica sobre el observador es:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A'} = I \frac{\cos(\alpha)}{r^2} \quad (2.4)$$

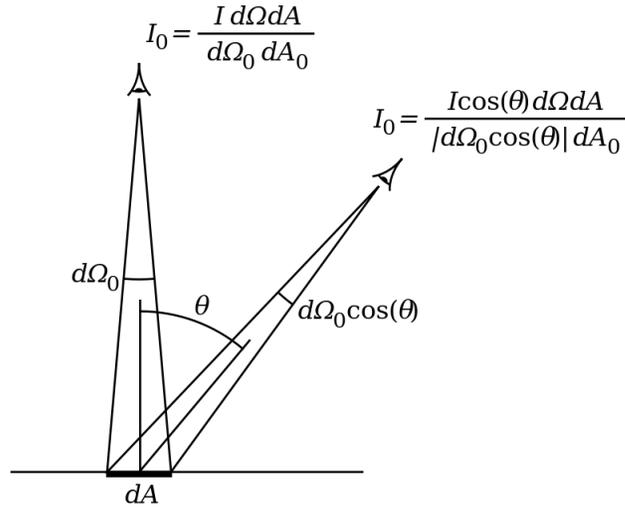


Figura 2.2: Dispersión de Lambert

Ley de Lommel-Seeliger

Considera una capa difusa, reflectante y transmisora de grosor t la cual produce atenuación por absorción y dispersión; luz atravesando una capa de grosor τ es atenuado por un factor $e^{-\tau}$. La superficie de tal capa es irradiada por un rayo con densidad de flujo radiante F en un ángulo de incidencia θ_i , la irradiancia sería:

$$E = F \cos(\theta_i) \quad (2.5)$$

Sean $\mu_0 = \cos(\theta_i)$ la dirección a la fuente del rayo incidente, $\mu = \cos(\theta_r)$ la dirección del rayo reflejado y ω_0 el albedo de la capa dispersora, la radiancia atenuada por el

factor $e^{-\tau/\mu}$ en la dirección μ será:

$$dL = \frac{\omega_0}{4\pi} F e^{-\tau/\mu_0} \frac{d\tau}{\mu} e^{-\tau/\mu} \quad (2.6)$$

En el caso de asteroides o superficies planetarias podemos considerar la capa como semi-infinita, es decir, $t = \infty$ por lo que al integrar la radiancia completa tendríamos la regla de reflectancia Lommel-Seeliger:

$$f_r = \frac{\omega_0}{4\pi} \frac{1}{\mu + \mu_0} \quad (2.7)$$

Siendo la irradianza $E = F\mu_0$ y la radiancia $L = f_r E$.

2.3. Series de Fourier

El principio básico de las series de Fourier es que toda función periódica de período T puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período T . El problema aparece naturalmente en astronomía, Neugebauer (1952) descubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales.

Fourier hizo un intento por demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. Una prueba satisfactoria de este hecho fue dada por Dirichlet en 1829. Riemann también hizo contribuciones importantes al problema. El análisis de Fourier ha sido impulsado por matemáticos como la talla de Lebesgue, Hardy, Littlewood, Wiener, Frobenius, Selberg, Weily Weyl entre otros.

Las series de Fourier describen funciones periódicas como una combinación lineal de exponenciales complejas, multiplicados por factores de peso que determinan la contribución relativa de cada componente a la función original. Al conjunto de expansiones en series de Fourier se le denomina base ortogonal. Toda función $f(t)$ periódica de periodo P se puede representar en forma de una suma infinita de

funciones armónicas:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n) e^{\frac{2i\pi nt}{P}} \quad (2.8)$$

$$F(n) = \frac{1}{P} \int_{t_1}^{t_1+P} f(x) e^{-\frac{2i\pi nt}{P}} dt \quad (2.9)$$

Siendo éstas su representación compleja.

La representación trigonométrica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.10)$$

Los coeficientes de Fourier a_n y b_n :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{p} \int f(t) dt \quad ; \quad -\frac{P}{2} \leq t \leq \frac{P}{2} \quad (2.11)$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int \cos(n\omega t) dt \quad ; \quad -\frac{P}{2} \leq t \leq \frac{P}{2} \quad (2.12)$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int \sin(n\omega t) dt \quad ; \quad -\frac{P}{2} \leq t \leq \frac{P}{2} \quad (2.13)$$

Algunos ejemplos:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad ; \quad x \in (-\pi, \pi) \quad (2.14)$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad ; \quad x \in (-\pi, \pi) \quad (2.15)$$

2.4. Densidad superficial Gaussiana

La información vectorial normal de superficie para cualquier objeto se puede mapear en una esfera unitaria llamada esfera Gaussiana, este mapeo es la imagen Gaussiana, en el cual los vectores normales a la superficie apuntan desde el centro de la esfera hasta un punto de la esfera en la orientación correspondiente.

Este modelo implica una colección de superficies normales sobre cada superficie en el objeto. Existe un numero fijo de estas superficies y un vector normal descansa sobre cada una de ellas, estos vectores se mueven de modo que sus puntos finales queden en la superficie de una esfera unitaria. Cada vector tiene un peso. Este mapeo es independiente de la posición, del origen y del sentido de los ejes del sistema coordinado, cada rotación de este sistema hace que cada vector rote de la misma manera, mientras que al ser también independiente de la escala del sistema coordinado un cubo de 2x2x2 cm tiene la misma representación que un cubo de 1x1x1 cm.

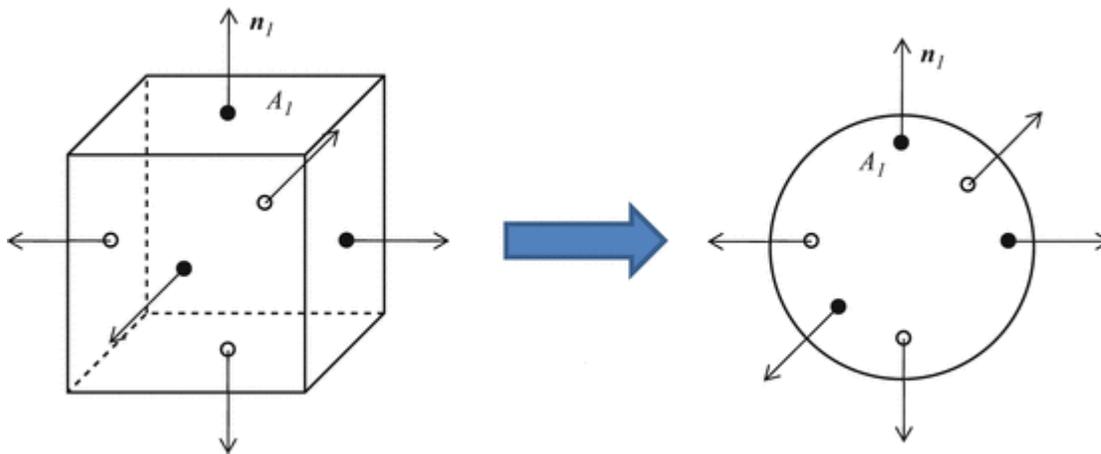


Figura 2.3: Superficie Gaussiana para un cubo

2.5. Minimización de Minkowski

El Teorema de minimización de Minkowski establece que un poliedro convexo es únicamente determinado por las áreas y las direcciones de los vectores normales de sus caras. Sea R un poliedro convexo con caras g_i y vectores unitarios u_i entonces:

$$V(A, R, R) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k l(R_i u_i) A(g_i) \quad (2.16)$$

Siendo $l(R_i u_i)$ una función de soporte detallada mas adelante y $A(g_i)$ el área de cada cara del poliedro R .

Básicamente lo que se necesita para la inversión de curvas de luz es resolver un problema de minimización para este teorema y encontrar las distancias desde el origen a las caras del poliedro, permitiéndonos reducir el problema:

$$V = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n l_j A_j(\mathbf{l}) \quad (2.17)$$

A_j es el área de la cara en el punto \mathbf{l} . Minkowski mostró que V alcanza su mínimo cuando A es homotético con l , es decir cada arista del volumen V aumenta en una

razón k respecto al volumen l , matemáticamente el volumen del cuerpo es igual a una constante positiva.

Capítulo 3

Metodología observacional y analítica

3.1. Histórica Cámara Schmidt

Es un telescopio catadióptrico que toma imágenes de gran campo, debido a su diseño óptico. Su diseño y su localización favorecieron descubrimientos hechos por este telescopio, tales como los objetos Haro-Herbig, estrellas azules, galaxias azules, nebulosas planetarias, estrellas T-Tauri. (Valdés et al., 2016). La Cámara Schmidt ha experimentado numerosas mejoras, desde la montura hasta el sistema de adquisición de imágenes, sin embargo, el sistema óptico ha sido siempre el mismo (Cardona et al., 2009), el cual está constituido por una lente correctora y un espejo primario. Se instaló una lente aplanadora de campo para reducir el campo de visión y así permitir el uso de un CCD.

3.1. HISTÓRICA DE LA CÁMARA SCHMIDT Y SU METODOLOGÍA OBSERVACIONAL Y ANALÍTICA

Longitud	98° 18' 54,36" Poniente
Latitud	19° 01' 53,4" Norte
Altitud	2180 msnm

Tabla 3.1: Ubicación cámara Schmidt



Figura 3.1: Cámara Schmidt

Las características de los lentes y espejos determinantes para las observaciones se

muestran a continuación:

Diámetro	$D = 77.4 \text{ cm}$
Diámetro efectivo	$D_e = 76.2 \text{ cm}$
Radio de curvatura	$R_c = 4\,314.82 \text{ mm}$
Longitud focal	$F = 2\,157.4 \text{ mm}$
Radio focal	$F/D_c = 3.25$
Escala de placa	95.6 arcsec/mm

Tabla 3.2: Características espejo primario

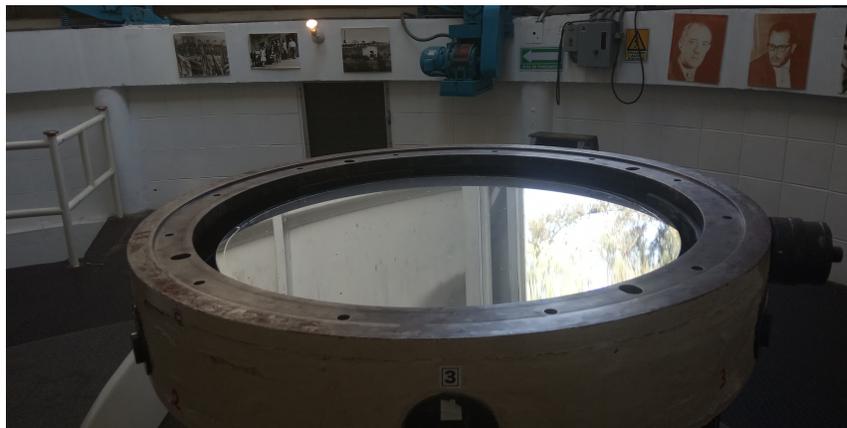


Figura 3.2: Espejo primario

3.1. HISTÓRICA ~~CÁMERA~~ ~~METODOLOGÍA~~ OBSERVACIONAL Y ANALÍTICA

Diámetro	190 mm
Radio de curvatura uno	1455.3095 mm
Radio de curvatura dos	1455.3095 mm

Tabla 3.3: Características de la lente aplanadora de campo

Diámetro	66.04 cm
Espesor	2.2352 cm

Tabla 3.4: Características de la lente correctora

Modelo	SBIG STF-8300
Distribución de píxeles	3,326x2,504
Tamaño del CCD	17.96x13.52 mm
Tamaño de pixel	5.4 μm
Escala de imagen	95.6 arcsec/mm
Campo de visión	28.9x21.76 arcmin
Escala de imagen	0.52 arcsec/pix

Tabla 3.5: Características CCD

3.2. Selección

Para poder aplicar este método y realizar la inversión de las curvas de luz satisfactoriamente es necesario realizar una selección de los objetivos con los cuales se va a trabajar, para esto tenemos en cuenta 3 factores principales:

1. La disponibilidad del asteroide para ser observado desde nuestra ubicación.
2. El periodo de rotación del asteroide.
3. El número de curvas de luz publicadas disponibles en la base de datos fotométrica

3.2. SELECCIÓN CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA OBSERVACIONAL Y ANALÍTICA

para curvas de luz de asteroides (ALCDEF).

Dentro de estos criterios cada asteroide debe ser observado en diferentes oposiciones, a distintos ángulos de fase, esto permite tener una curva de luz de calidad. Para eso se hace uso del sitio web del Minor Planet Center (<http://www.minorplanet.info/call.html>) donde podemos realizar una búsqueda de los posibles objetivos durante cierta época del año, teniendo en cuenta la fecha de observación, el estado en la base de datos, magnitud y declinación. El periodo estará restringido a un máximo de 6 horas ya que esto nos permite observar un periodo completo por noche. Finalmente cada asteroide debe tener un mínimo de 4 o 5 curvas de luz en ALCDEF ya que en conjunción con las curvas de luz del INAOE tenemos el mínimo requerido para realizar la inversión.

Los objetos seleccionados para este trabajo fueron:

Asteroide	H (mag)	Diámetro [km]	Albedo	Periodo [h]
1346 Gotha	11.25	14.3346	0.2794	2.640
22 Kalliope	6.45	168.245	0.1687	4.148
3800 Karayusuf	15.1	1.5875	0.657	2.231
711 Marmulla	11.7	13.1307	0.22	2.721
1318 Nerina	12.2	11.7926	0.172	2.528
1492 Oppolzer	12.9	11.8797	0.089	3.769
1117 Reginita	11.7	10.2647	0.36	2.946
5692 Shirao	12.5	9.0473	0.2218	2.887
4713 Steel	13.2	5.2415	0.3468	5.199
3028 Zhangguoxi	10.6	25.0868	0.166	4.826

Tabla 3.6: Objetos seleccionados

3.3. Método de inversión

Para poder aplicar la inversión de curvas de luz es necesario cumplir ciertos requerimientos:

1. Las posiciones del Sol y de la Tierra relativas al asteroide son conocidas.
2. Polo de rotación es conocido.
3. El asteroide tiene rotación relajada (no precesa).
4. La fase rotacional del asteroide se puede calcular en cada momento.
5. La superficie del asteroide es convexa.

Partiremos de una ecuación que implique el flujo de luz observado en la tierra desde

3.3. MÉTODOS DE INVERSIÓN METODOLOGÍA OBSERVACIONAL Y ANALÍTICA

un elemento de superficie de área cuando el flujo incidente es F_{in} .

$$F_{obs} = \frac{F_{in}}{r^2} S(\mu, \mu_0, \alpha; P) d\sigma \quad (3.1)$$

F_{obs} : Flujo observado en la tierra

F_{in} : Flujo incidente

r : Distancia entre la tierra y el elemento de área

$S(\mu, \mu_0, \alpha; P)$: Ley de dispersión de la luz

$d\sigma$: Elemento de área

P : Parámetros de dispersión

(3.2)

Los valores F_{in} y r son siempre conocidos en las curvas de luz y se pueden normalizar para así obtener el brillo de un elemento de superficie:

$$L = S(\mu, \mu_0, \alpha; P) d\sigma \quad (3.3)$$

Consideraremos una superficie en un sistema paramétrico que la defina de manera única. Definiremos esta superficie con un vector $\mathbf{J}(u, v)$ paralelo a la superficie normal $\mathbf{n}(u, v)$ en el punto (u, v) :

$$\mathbf{J}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (3.4)$$

Al cambiar el brillo al nuevo sistema de coordenadas e integrarlo a lo largo de todos los elementos observables quedaría:

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{E}_0, \mathbf{r}, S) = \int_{S_+} \int S(\mu, \mu_0, \alpha; P) |\mathbf{J}(u, v)| dudv \quad (3.5)$$

El lado izquierdo son los datos recabados en las curvas de luz y S es la ley de dispersión, los datos que necesitamos están presentes en J para lo cual ocuparemos la densidad superficial Gaussiana, es necesario un sistema coordenado esférico para la superficie normal, donde cada punto está definido por las coordenadas polares (ϑ, ψ) en la dirección de la superficie normal. Este mapeo, estrictamente convexo, es único y es necesario conocer:

$$G(\vartheta, \psi) = \frac{|\mathbf{J}(\vartheta, \psi)|}{\text{sen}(\vartheta)} \quad (3.6)$$

La cantidad $G\text{sen}(\vartheta)$ representa el área del elemento de superficie en el punto (ϑ, ψ) . El sistema coordenado elegido previamente permite conocer $G(\vartheta, \psi)$ de manera relativamente simple, los límites de integración se vuelven constantes al rotar el sistema de manera adecuada. Por lo tanto el brillo integrado quedaría:

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{E}_0, \mathbf{r}, S) = \int_{S_+} \int S(\mu, \mu_0, \alpha; \omega_0) G(\vartheta, \psi) \text{sen}(\vartheta) d\vartheta d\psi \quad (3.7)$$

La rotación previamente mencionada consiste en mover el eje y para posicionarlo en la dirección de la tierra, mientras que el sol quedará en el plano xy a un ángulo α del eje y . Las nuevas direcciones de la tierra y el sol respectivamente serán:

$$\mu = \text{sen}(\psi) \text{sen}(\vartheta) \quad (3.8)$$

$$\mu_0 = \text{sen}(\psi - \alpha) \text{sen}(\vartheta) \quad (3.9)$$

Mientras que la ley de dispersión cambiaría:

$$S(\mu, \mu_0, \alpha) \rightarrow S'(\vartheta, \psi, \alpha) \quad (3.10)$$

El objetivo principal para poder conocer la forma del asteroide es conocer la forma de $G(\vartheta, \psi)$. Con el motivo de reducir el problema se propone representar $G(\vartheta, \psi)$ en

3.3. MÉTODOS DE INVERSIÓN METODOLOGÍA OBSERVACIONAL Y ANALÍTICA

forma de series de Laplace y reducir la tarea a conocer los coeficientes presentes en esta expansión, es decir:

$$G(\vartheta, \psi) = \sum_{lm} g_{lm} Y_l^m(\vartheta\psi) \quad (3.11)$$

En este punto podemos hacer uso de esta expansión y de cada uno de los coeficientes presentes para poder generar manualmente curvas de luz, o de manera optima, crear un código para poder determinar este ajuste haciendo uso de estos coeficientes, tarea realizada en paralelo con este trabajo.

Existen 3 rotaciones posibles para obtener el mismo resultado, sin embargo la más eficiente es usando ángulos de Euler, una rotación se representaría:

$$R(\gamma, \beta, \alpha) \quad (3.12)$$

E indicaría una rotación del ángulo α sobre el eje z en sentido positivo, después una rotación en el ángulo β sobre el eje y en el sentido positivo y finalmente una rotación en el ángulo γ sobre el nuevo eje z en la dirección positiva. El brillo integrado quedaria:

$$L(\alpha, \kappa, \epsilon, \delta) = \sum_{lm} g_{lm} \sum_{m'} d_{m'm}^{(l)}(\epsilon) e^{i(m'\kappa+m\delta)} I_{lm'}(\alpha) \quad (3.13)$$

En donde la rotación es:

$$D_{m'm}^{(l)}(\gamma, \beta, \alpha) = e^{im'\gamma} d_{m'm}^{(l)}(\beta) e^{im\alpha} \quad (3.14)$$

$$d_{m'm}^{(l)}(\beta) = \sum_{\lambda=0}^{l+m} \frac{(-1)^{l+m'-m} (l+m)! (l-m')!}{\lambda! (l+m-\lambda)! (l-m'-\lambda)! (m'-m+\lambda)!} \left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^{2l+m-m'-2\lambda} \left[\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^{m'-m+2\lambda} \quad (3.15)$$

Mientras que $I_{lm'}(\alpha)$:

$$I_{lm'}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} \int_0^{\pi} S'(\vartheta, \psi, \alpha) Y_l^{m'}(\vartheta, \psi) \sin(\vartheta) d\vartheta d\psi \quad (3.16)$$

La manera más conveniente es usar una expansión en series de Fourier para las curvas de luz, la ecuación 3.13 es una representación en series de Fourier sobre el ángulo δ

cuando los demás parámetros permanecen constantes, esto describe curvas de luz en distintas geometrías observables, de manera que el brillo quedaría:

$$L(\delta) = \sum_{lm} g_{lm} k_{lm} e^{im\delta} \quad (3.17)$$

En k_{lm} se incorporan todas las funciones e integrales de los ángulos que permanecen constantes. Mientras que las curvas de luz se pueden escribir:

$$L(\delta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\delta} \quad (3.18)$$

Claramente podemos notar que obtenemos un sistema de ecuaciones simultáneas:

$$c_m = \sum_{l \geq |m|}^L g_{lm} k_{lm} \quad (3.19)$$

El problema se ha reducido a encontrar g_{lm} y así conocer $G(\vartheta, \psi)$.

En el caso de que tengamos suficientes curvas de luz, de manera que el problema se vuelve tridimensional, es decir, conocemos el brillo para distintas configuraciones manteniendo solo un ángulo fijo, el problema se debe extender a los angulos conocidos, en el caso mas general:

$$L = L(\kappa, \epsilon, \delta) \quad (3.20)$$

Por lo tanto, las curvas de luz a un ángulo de fase dado se pueden escribir:

$$L(\kappa, \epsilon, \delta) = \sum_{lmm'} c_{mm'}^{(l)} D_{m'm}^{(l)}(\kappa, \epsilon, \delta) \quad (3.21)$$

Nuevamente podemos percatarnos de la relación que existe entre esta última y la ecuación 3.13 es:

$$g_{lm} = \frac{c_{m'm}^{(l)}}{I_{lm'}} \quad (3.22)$$

Obtenemos ecuaciones separadas para cada coeficiente desconocido, dependientes de la ley de dispersión y de las curvas de luz, datos previamente conocidos por nosotros.

3.3. MÉTODOS DE INVERSIÓN METODOLOGÍA OBSERVACIONAL Y ANALÍTICA

Para dispersión de Lommel-Seeliger las integrales $I_{31}, I_{51}, I_{71} \dots$ desaparecen y para Lambert lo hacen las integrales $I_{40}, I_{60}, I_{80} \dots$ y $I_{42}, I_{62}, I_{82} \dots$

Cada una de estas integrales se calcula mediante métodos estadísticos y aproximaciones numéricas con ayuda del software LcInvert, sin embargo esta determinación consume una cantidad de tiempo de computo importante y a su vez cada integral calculada es una posible solución a la ecuación de luminosidad debido a que el software no conoce las condiciones de las observaciones hechas, la ley de dispersión utilizada o el albedo de cada asteroide. En este trabajo procedimos a calcular estas integrales y a determinar estos parámetros e incorporarlos a las condiciones de la inversión y así reducir el tiempo de computo.

Finalmente debemos encontrar el volumen del asteroide a partir de la densidad superficial Gaussiana para lo cual haremos uso del teorema de minimización de Minkowski, el cual establece que es posible construir una función que únicamente describa la superficie de un cuerpo a partir de la curvatura Gaussiana y una función de soporte, la cual alcanza su mínimo cuando la densidad superficial Gaussiana y esta función de soporte pertenecen a la misma superficie.

Sea $\mathbf{n}(\vartheta\psi) = (\text{sen}(\vartheta)\cos(\psi), \text{sen}(\vartheta)\text{sen}(\psi), \cos(\vartheta))^T$ un vector normal unitario y $\mathbf{r}(\vartheta\psi)$ el radiovector de la superficie, la función de soporte será la distancia desde el origen del plano tangente sobre la superficie en el punto $(\vartheta\psi)$:

$$\varrho(\vartheta\psi) = \mathbf{n}(\vartheta\psi) \cdot \mathbf{r}(\vartheta\psi) \quad (3.23)$$

El volumen de dos cuerpos convexos de acuerdo al teorema de minimización de Minkowski es:

$$V(R, S) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varrho_R(\vartheta\psi) \varrho_S(\vartheta\psi) \text{sen}(\vartheta) d\vartheta d\psi \quad (3.24)$$

Siendo R y S dos superficies distintas

Capítulo 4

Observaciones y resultados

El proceso de observación se llevo a cabo desde Noviembre de 2017 a abril de 2019, periodo en el cual, además de observar los objetos presentados más adelante, se participo en la campaña mexicana de fotometría de asteroides.

Se han dividido los resultados en dos fases, en la primera de ellas se logró desarrollar código para poder generar nuestras propias curvas de luz, de esta manera tenemos el conocimiento de que es lo que esta pasando con los datos que generamos gracias a las imágenes tomadas con la Cámara Schmidt. Primeramente se usa software especializado para obtener las magnitudes de cada una de las imágenes generadas en una noche de observación; posteriormente introducimos estos datos en el código desarrollado por nuestro equipo y en el software CANOPUS, para así poder comparar ambas curvas de luz generadas, siendo este proceso satisfactorio en cada uno de los casos, con el añadido de que ahora conocemos cada una de las variables y el ajuste correcto necesario para optimizar la inversión de estas curvas de luz.

Finalmente procedimos a introducir estos datos y curvas de luz en el software LC-Invert y así obtener la forma de los asteroides observados. Cada una de las figuras previamente obtenidas por el procedimiento estándar dentro de la Cámara Schmidt de Tonantzintla resultaron coincidir con estas nuevas en adición de que el tiempo de

cómputo se redujo considerablemente. La mayor disminución de tiempo se presentó en el asteroide (1346) Gotha que paso de 48 horas a 25 minutos y la menor disminución se presentó en (22) Kalliope que se redujo de 3 horas a 20 minutos.

A continuación se presentan los asteroides seleccionados junto con la curva de luz correspondiente obtenida en la Cámara Schmidt, el gráfico donde se representa la dirección del polo de rotación y el modelo en tercera dimensión generado:

CAPÍTULO 4. OBSERVACIONES Y RESULTADOS

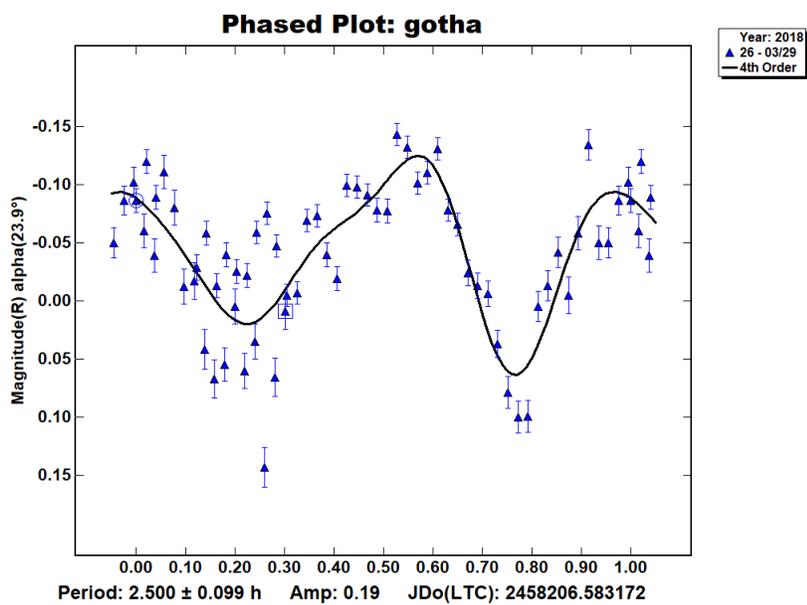
Asteroide	Fecha	Periodo [h]	Ángulo de fase [\emptyset]
1346 Gotha	29/Marzo/2018	2.640	23.88
22 Kalliope	29/Mayo/2018	4.148	16.97
	30/Mayo/2018	4.148	17.11
3800 Karayusuf	28/Marzo/2018	2.231	34.23
711 Marmulla	12/Marzo/2018	2.721	7.6
	16/Marzo/2018	2.721	9.52
	24/Marzo/2018	2.721	12.95
	9/Abril/2018	2.721	22.11
1318 Nerina	17/Marzo/2018	2.528	6.52
	27/Marzo/2018	2.528	12.27
1492 Oppolzer	18/Marzo/2018	3.769	5.85
	26/Marzo/2018	3.769	10.27
1117 Reginita	4/Octubre/2015	2.946	13.73
	8/Abril/2018	2.946	22.7
	9/Abril/2018	2.946	22.51
5692 Shirao	18/Marzo/2018	2.887	6.22
	26/Marzo/2018	2.887	2.21
	7/Abril/2018	2.887	4.86
4713 Steel	5/Junio/2018	5.199	28.84
3028 Zhangguoxi	1/Junio/2018	4.826	5.67
	2/Junio/2018	4.826	5.95

Tabla 4.1: Objetos seleccionados

4.1. (1346) Gotha

λ	β	χ^2
10.001	-57.697	0.07535
9.976	-57.162	0.0761

Tabla 4.2: Posición del eje de rotación



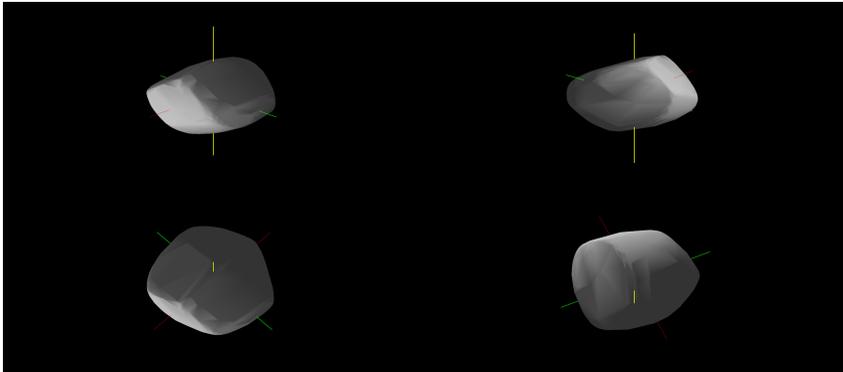
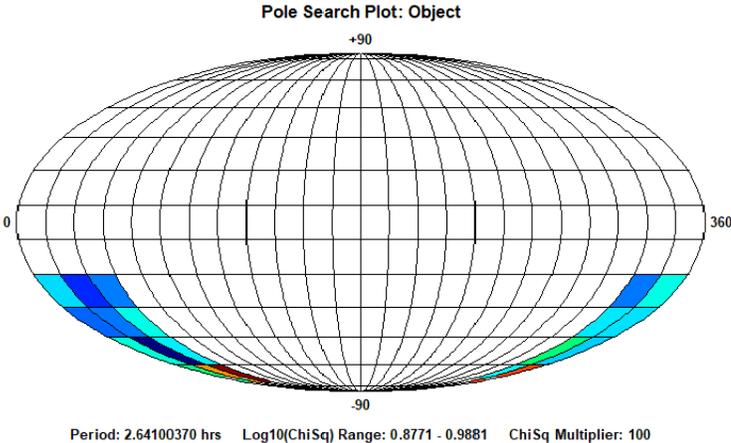


Figura 4.1

4.2. (22) Kalliope

λ	β	χ^2
195.292	-11.938	3.0714
180.915	-5.580	3.1109

Tabla 4.3: Posición del eje de rotación

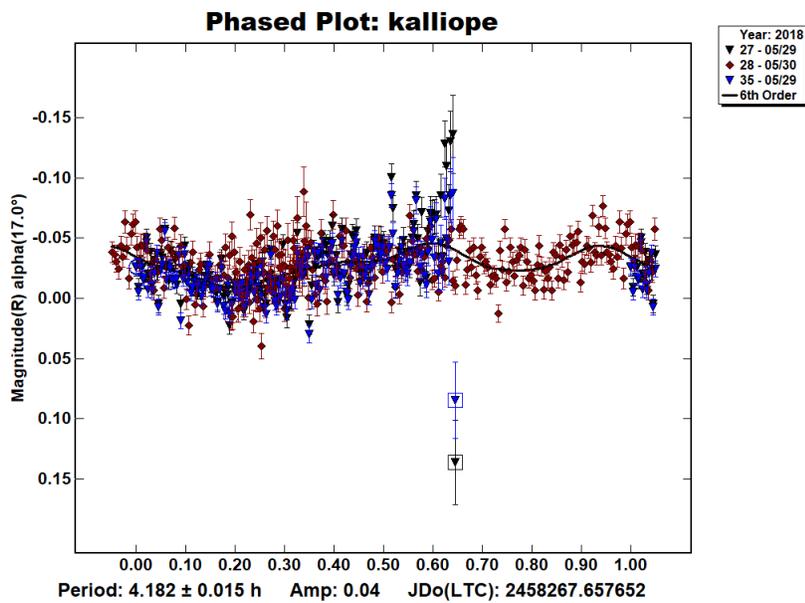


Figura 4.2

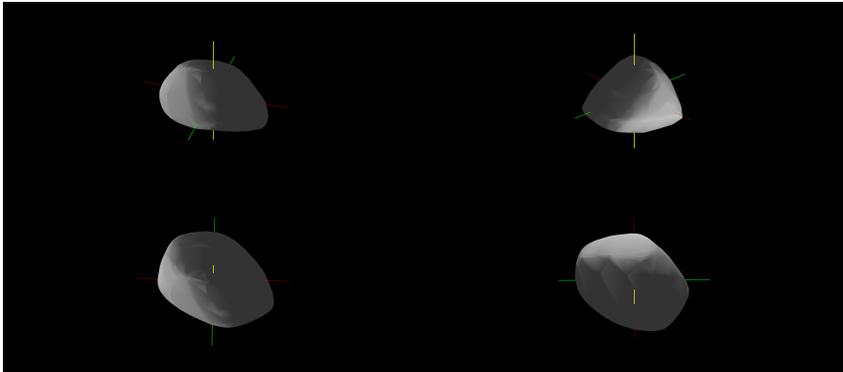
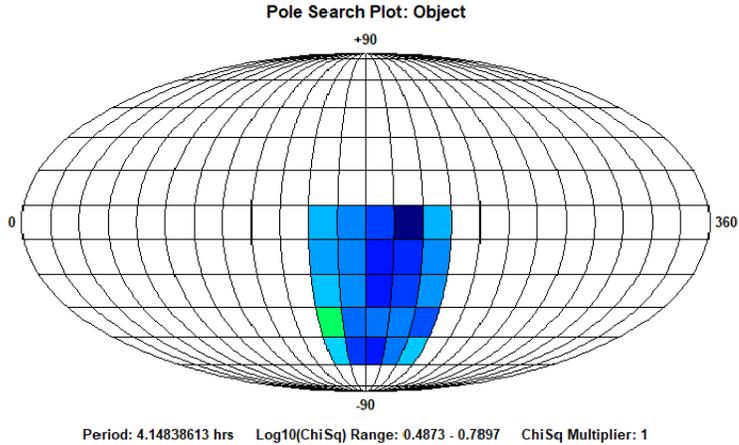
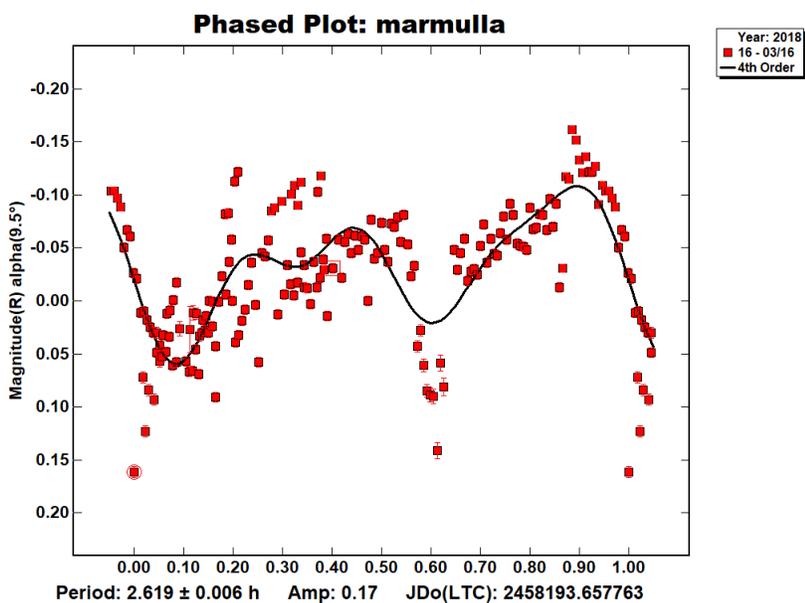


Figura 4.3

4.3. (711) Marmulla

λ	β	χ^2
58.142	12.157	0.8624
58.419	9.357	0.8626

Tabla 4.4: Posición del eje de rotación



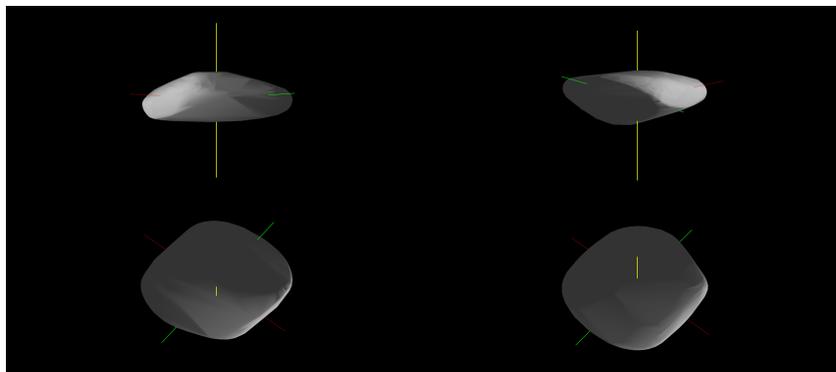
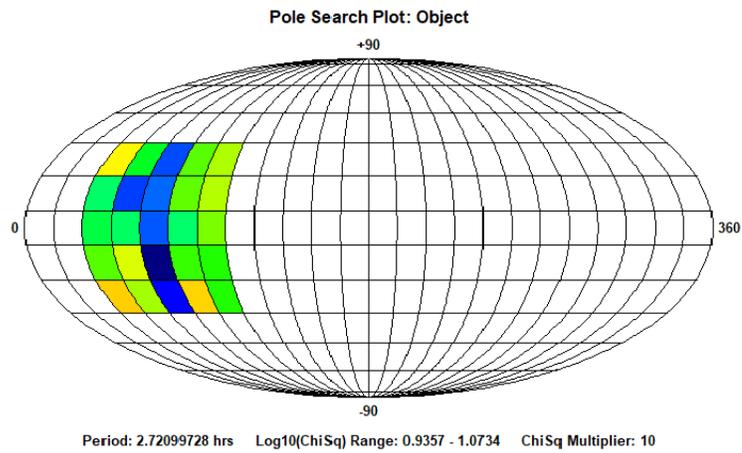
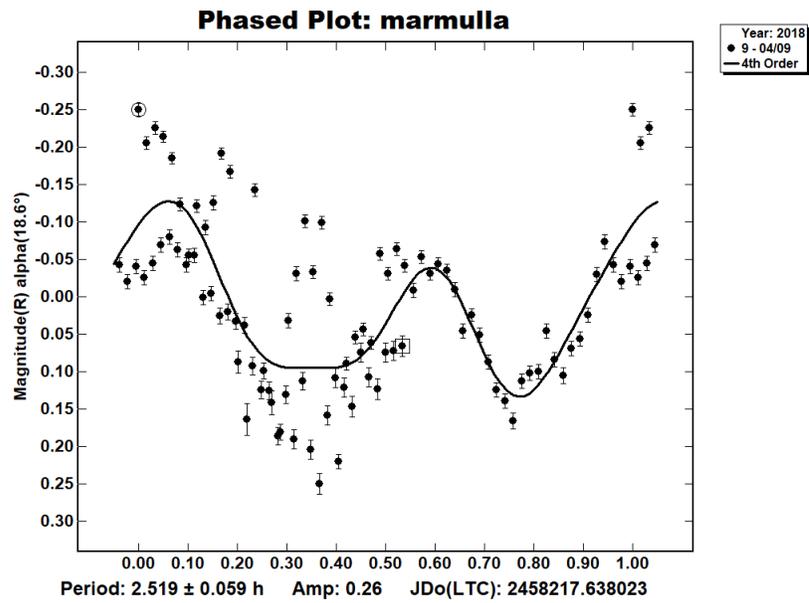
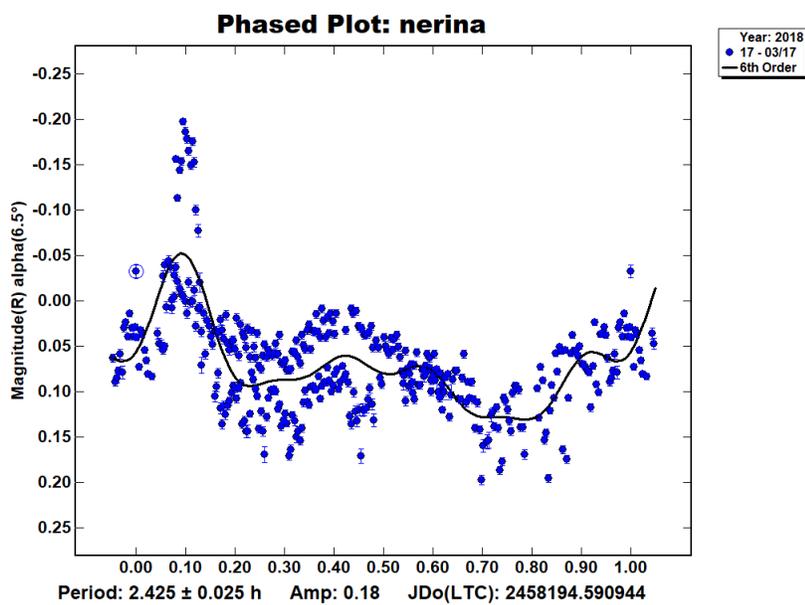


Figura 4.4

4.4. (1318) Nerina

λ	β	χ^2
137.911	-20.318	1.3664
123.377	-37.079	1.3778

Tabla 4.5: Posición del eje de rotación



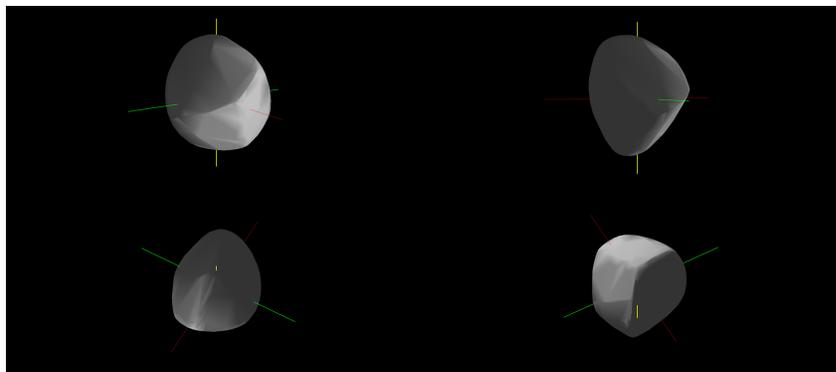
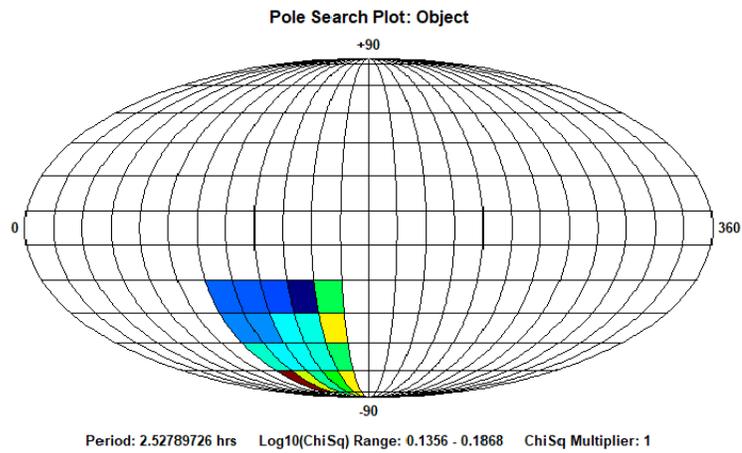
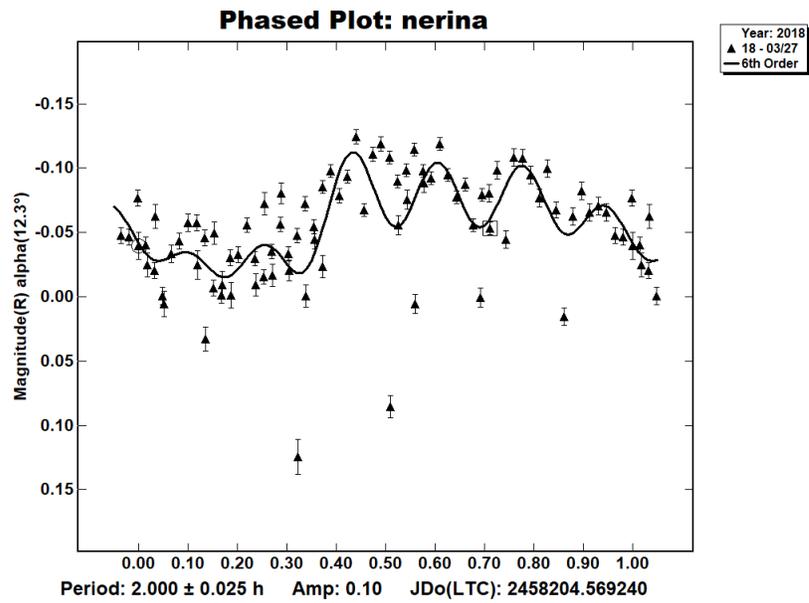
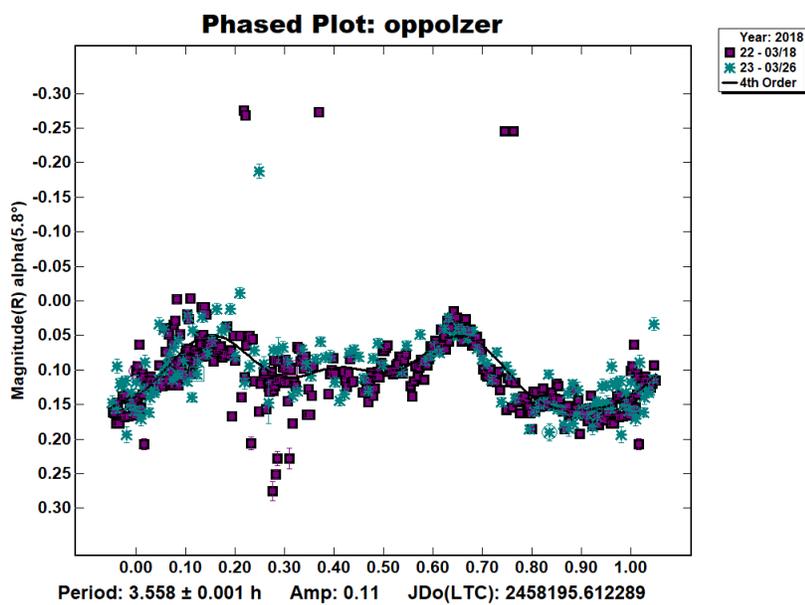


Figura 4.5

4.5. (1492) Oppolzer

λ	β	χ^2
263.179	-16.741	1.0811
235.170	-35.180	1.0821

Tabla 4.6: Posición del eje de rotación



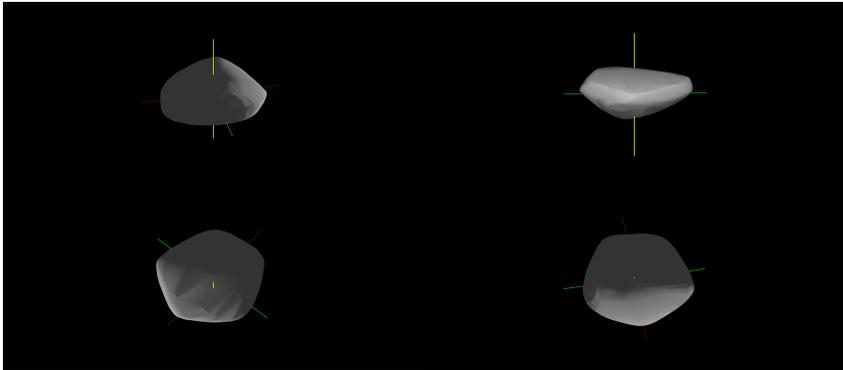
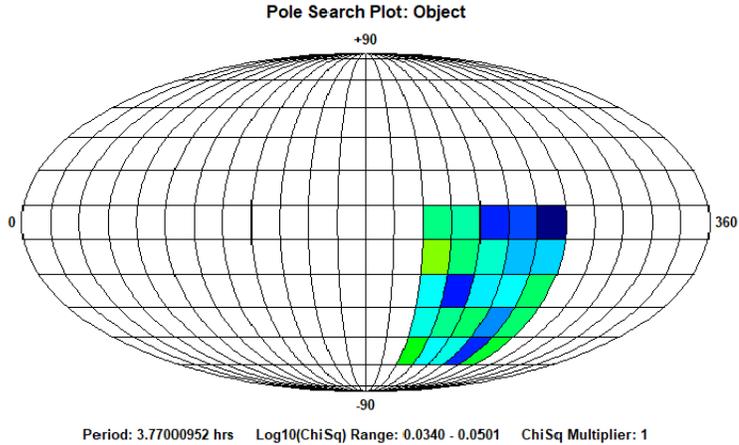
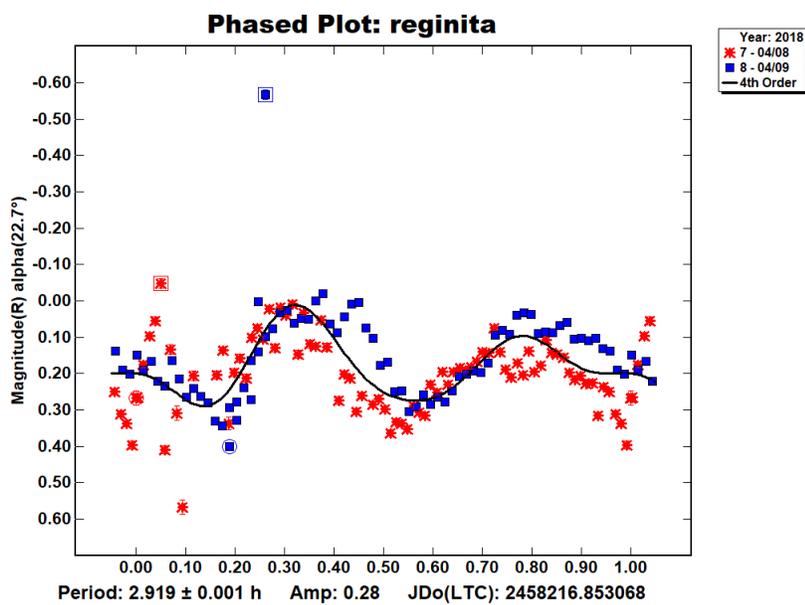


Figura 4.6

4.6. (1117) Reginita

λ	β	χ^2
327.956	-43.436	1.2169
319.991	-64.240	1.2195

Tabla 4.7: Posición del eje de rotación



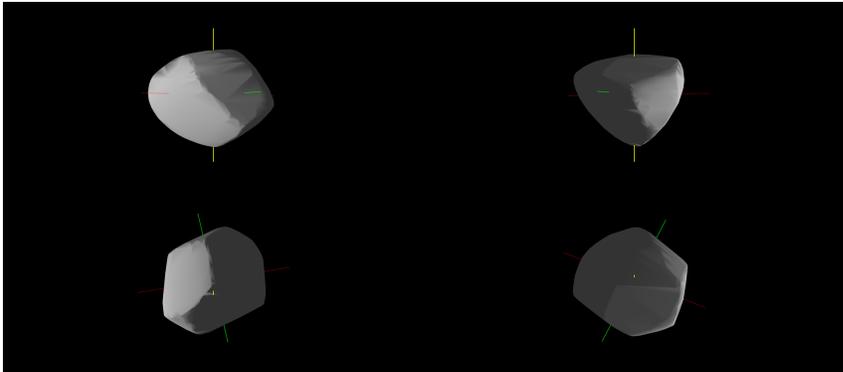
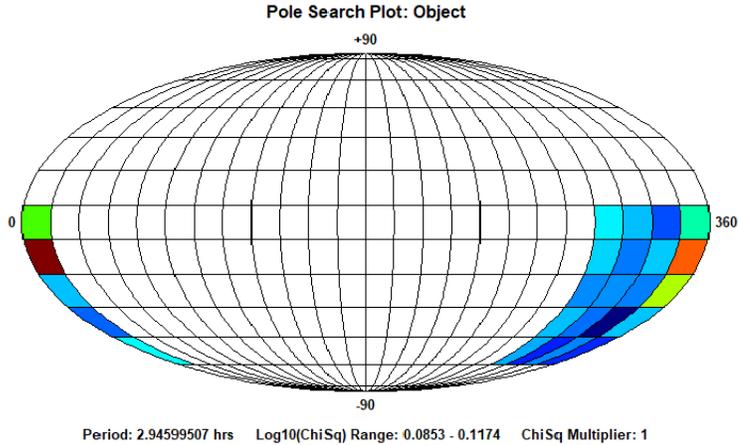
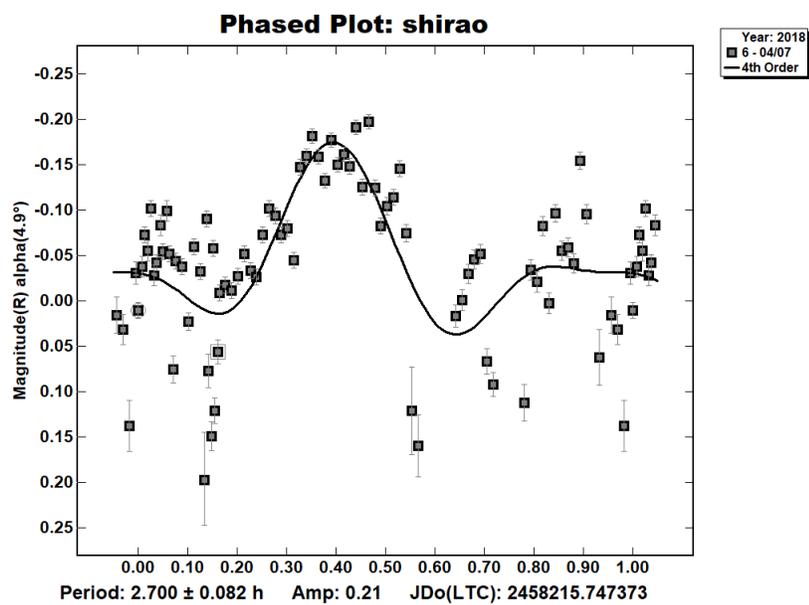


Figura 4.7

4.7. (5692) Shirao

λ	β	χ^2
114.634	-22.541	0.2544
113.100	-20.362	0.2559

Tabla 4.8: Posición del eje de rotación



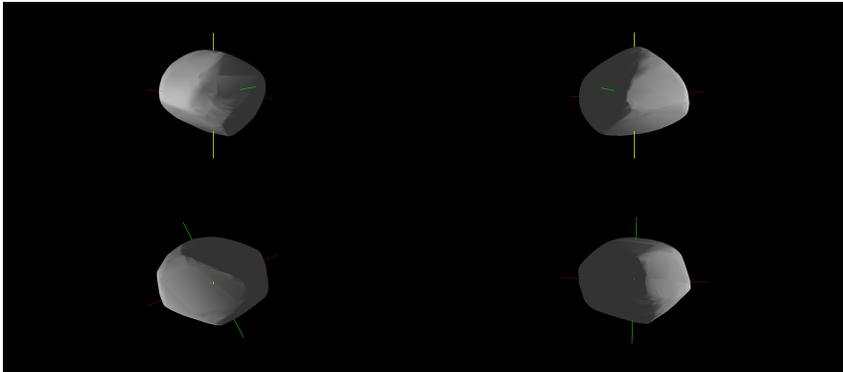
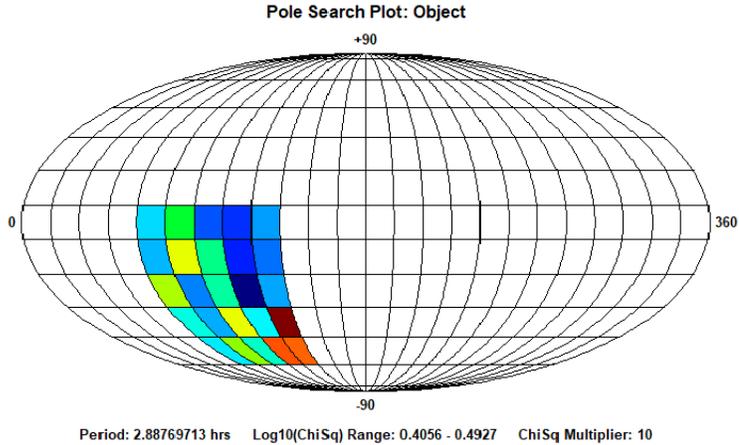
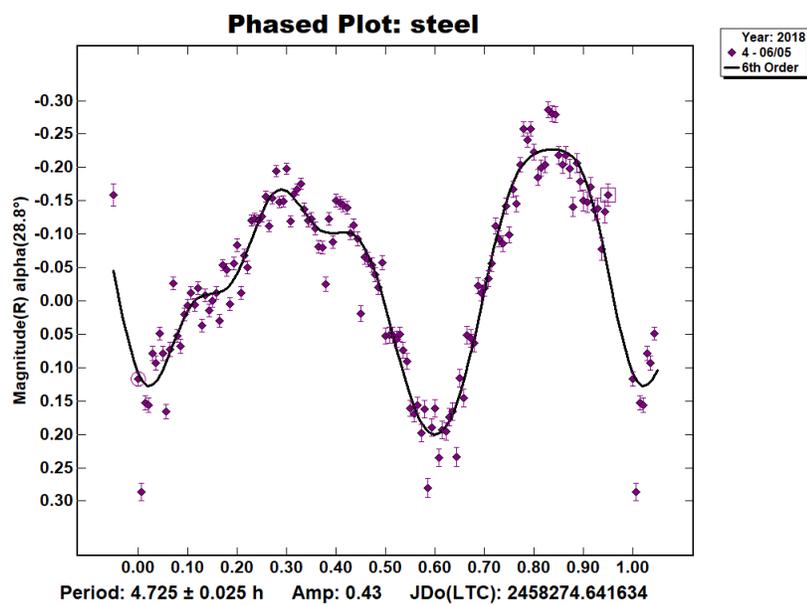


Figura 4.8

4.8. (4713) Steel

λ	β	χ^2
58.896	-2.911	0.8561
61.133	-2.633	0.8637

Tabla 4.9: Posición del eje de rotación



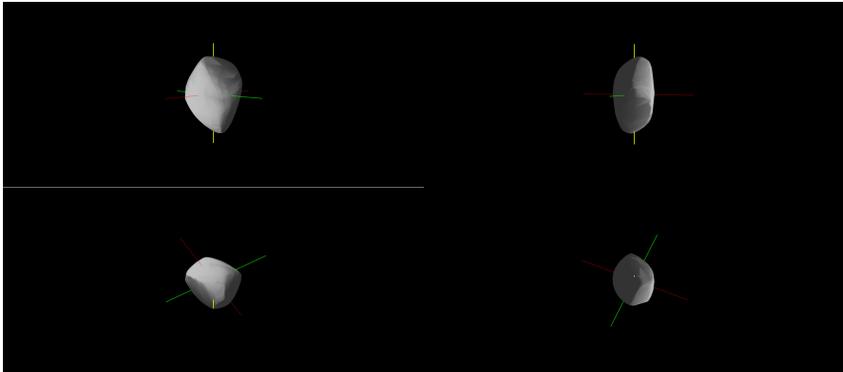
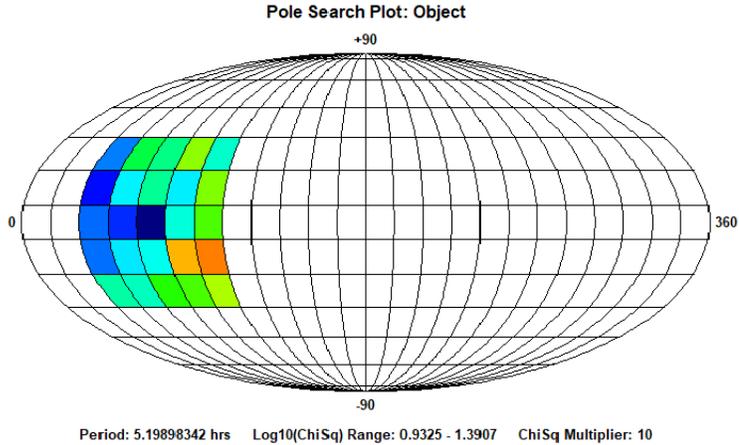
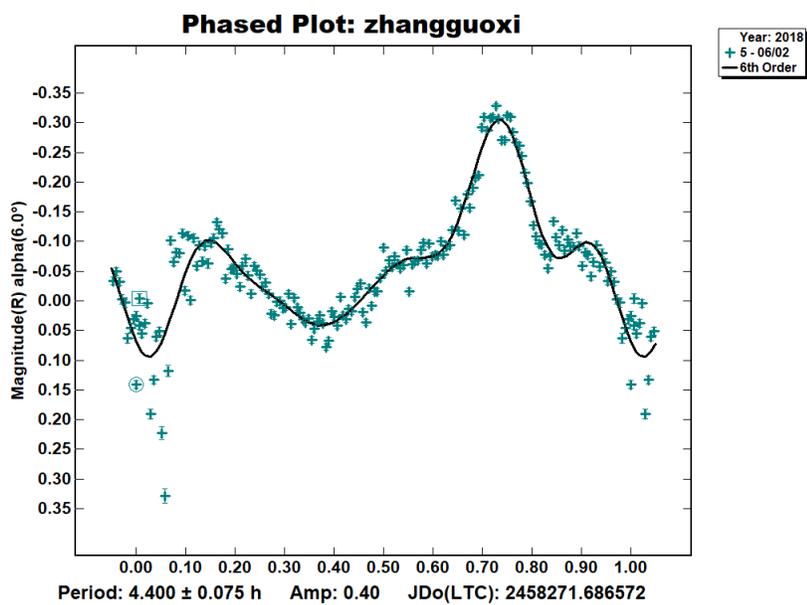


Figura 4.9

4.9. (3028) Zhangguoxi

λ	β	χ^2
169.916	-35.433	1.1115
169.882	-30.507	1.1123

Tabla 4.10: Posición del eje de rotación



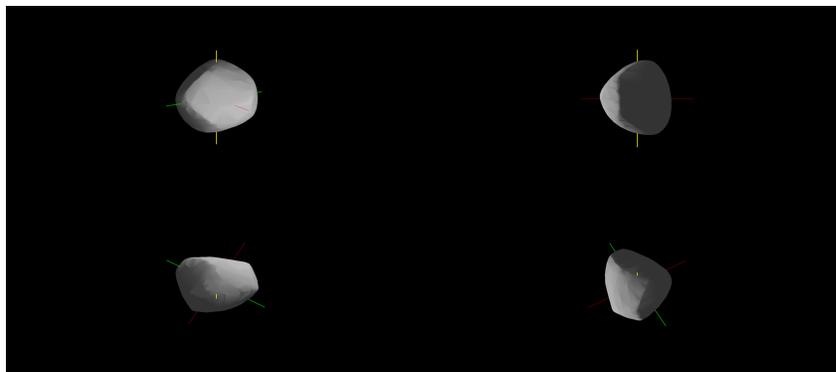
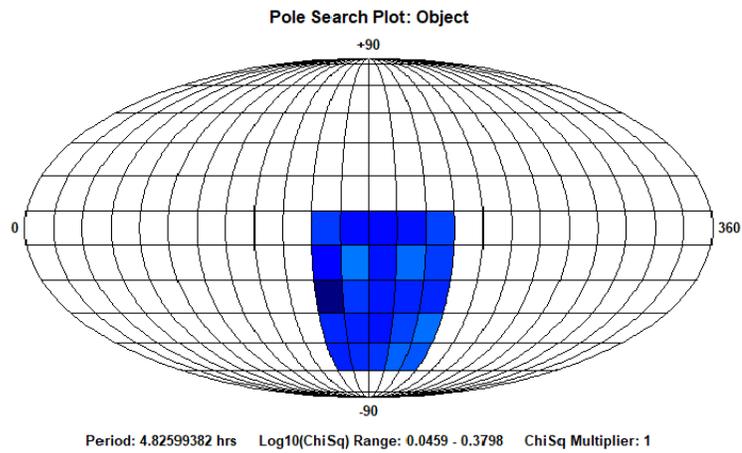
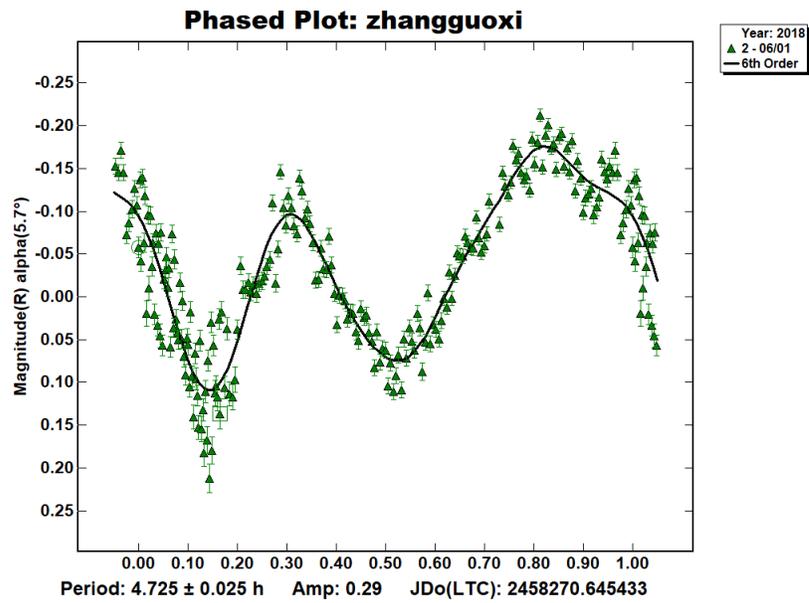


Figura 4.10

Capítulo 5

Conclusiones

Las imágenes presentadas en la sección anterior permite determinar en qué grado se lograron satisfacer cada uno de los objetivos planteados en esta tesis. El entendimiento del método y la determinación de los principales parámetros para la inversión de curvas de luz permitieron reducir el tiempo de tratamiento de la información hasta en un factor de 10, como lo es en el caso de (1346) Gotha y (1492) Opolzer donde en trabajos previos fue necesario un tiempo de alrededor de 12 horas (Cerdán G. 2018), desde la captura de la última imagen en la cámara Schmidt hasta la obtención de la forma tridimensional del asteroide, y en el cual para este trabajo el tiempo requerido fue de 1 hora.

El entendimiento del método de inversión de curvas de luz presentado nos ha permitido generar nuestras propias curvas de luz mediante un código diseñado en conjunto con esta tesis, las cuales formarán parte de la publicación de estos resultados obtenidos en revistas especializadas y bases de datos pertinentes en un futuro cercano, además de el primer compendio de asteroides y curvas de luz pertenecientes al INAOE con este proceso.

Cada una de las formas y de las curvas de luz es congruente con las ya reportadas en las distintas bases de datos lo cual nos advierte de la efectividad al realizar fotometría

diferencial haciendo uso de la cámara Schmidt del INAOE, presentando una gran oportunidad para futuros trabajos y la expansión de los datos generados en esta institución. La importancia de este punto radica en lo importante que se ha vuelto el monitoreo al cielo y en especial a estos objetos hasta el punto en el que grandes cantidades de recursos se invierten en esta tarea, el ejemplo más claro es el futuro Gran Telescopio Sinóptico (LSST)(<https://www.lsst.org/lsst/>), planeado a funcionar en 2022, donde una gran parte del tiempo de observación sera destinado al seguimiento de asteroides potencialmente peligrosos para nuestro planeta.

La principal recomendación es continuar estas observaciones para futuras tesis y publicaciones y extender cada una de las aportaciones en el campo de la fotometría, la cámara Schmidt del INAOE resulta ser una herramienta capaz de contribuir a este campo de manera satisfactoria.

Bibliografía

- 1 Arfken G., Weber H., Harris F.(2005). *Mathematical Methods for Physicists*, Hans-Jurgen Weber, Elsevier.
- 2 Badescu, (2013). *Asteroids, Prospective Energy and Material Resources*, Springer
- 3 Bessell, (2005). *Standard photometric systems*. 2005 Annual reviews of astronomy and astrophysics
- 4 Boehnhardt, H. (2009). *Earth and Solar System: Asteroids and Kuiper Belt Objects*. In Roth G. D. (Ed.), *Handbook of Practical Astronomy*(pp.483-497). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- 5 Cardona, O. et al (2009). *Nuevo Sistema de Control Cámara Schmidt*. Reporte Técnico, INAOE, Tonantzintla, Puebla, México.
- 6 Cardona, O. et al (2011). *Nuevo sistema de adquisición de imágenes astronómicas de la Cámara Schmidt usando un CCD enfriado*. Reporte Técnico, INAOE, Tonantzintla, Puebla, Mexico.
- 7 Center for Near Earth Object Studies. *NEO Basics*. https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neo_groups.html, 2019.
- 8 Dane C., R. Bajcsy, *Three-Dimensional Segmentation Using the Gaussian Image and Spatial Information*, Proc. Int'l Conf. on Pattern Recog. and Image Proc., pp. 54-56, 1981-August.
- 9 Dirichlet L., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à*

- représenter une fonction arbitraire entre des limites données. [On the convergence of trigonometric series which serve to represent an arbitrary function between given limits]*, Journal für die reine und angewandte Mathematik. 4: 157–169.
- 10 Durech, J. (2016). *Physical Models of Asteroids*. Habilitation Thesis, Charles University, Prague, Czech Republic.
- 11 Elkins-Tanton, L. T. (2010). *Asteroids, Meteorites and Comets: The Solar System*. New York, NY: Facts On File, Inc.
- 12 Elvis, M. et al. (2013). *Precision Rotation Periods and Shapes of Near-Earth Asteroids. Alternate Science Investigations for the Kepler Spacecraft*. Advanced online publication.
<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1309/1309,2333.pdf>
- 13 Encyclopedia of the Solar System (2nd Ed.). (2007). San Diego, CA: Academic Press.
- 14 Gallaway, M. (2016). *An Introduction to Observational Astrophysics*. Berlin: Springer International Publishing.
- 15 Harris, A. W., et al. (2014). *On the maximum amplitude of harmonics of an asteroid lightcurve*. Icarus, 235, 55-59.
- 16 Ikeuchi K., *Recognition of 3D Objects Using the Extended Gaussian Image*, IJCAI, pp. 595-600, Aug 1981.
- 17 International Astronomical Union (2006). *RESOLUTION B5: Definition of a Planet in the Solar System and RESOLUTION B6: Pluto*. Retrieved from https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution_GA26-5-6.pdf.
- 18 Jauregui-García, J. M. et al (2014). *Sistema de Control para la Cámara Schmidt de Tonantzintla. Reporte Técnico*, INAOE, Tonantzintla, Puebla, México.
- 19 Kaasalainen, M., Lamberg, J. (1992). *Inversion Methods for Interpretation of*

-
- Asteroid Lightcurves*. In Lunar and Planetary Inst., Asteroids, Comets, Meteors, 289-292.
- 20 Kaasalainen, M., Torppa, J. (2001). *Optimization Methods for Asteroid Lightcurve Inversion: I. Shape Determination*. *Icarus*, 153(1), 24-36.
- 21 Kaasalainen, M. et al. (2001). *Optimization Methods for Asteroid Lightcurve Inversion: II. The Complete Inverse Problem*. *Icarus*, 153(1), 37-51.
- 22 Kaasalainen, M. et al. (2004). *Photometry and models of eight near-Earth asteroids*. *Icarus*, 167(1), 178-196.
- 23 Kaasalainen, M., Durech, J. (2007). *Inverse Problems of NEO Photometry: Imaging the NEO Population*. *Proceeding IAU Symposium*, 236, inpress.
- 24 Lissauer, J. J. and de Pater, I. (2013). *Fundamental Planetary Science: Physics, Chemistry and Habitability*. New York, NY: Cambridge University Press.
- 25 Little J., *An Iterative Method for Reconstructing Convex Polyhedra from Extended Gaussian Images*, Proc. of the National Conf. on AI, pp. 247-250, 1983-August.
- 26 National Aeronautics and Space Administration (NASA). *NASA's Wise Mission Finds First Trojan Asteroid Sharing Earth's Orbit*. https://www.nasa.gov/home/hqnews/2011/jul/HQ11-247WISE_Trojan.html, Julio 27, 2011.
- 27 Nesvorn'y, D. et al. (2015). *Identification and dynamical properties of asteroid families*. In Michel, P. et al. (Eds.), *Asteroids IV*(297-321). Tucson: The University of Arizona Press.
- 28 Neugebauer O. (1952). *The Exact Sciences in Antiquity*. Princeton: Princeton University Press. 1952. Pp. ix, 191.
- 29 Romanishin, W. (2006). *Introduction to Astronomical Photometry Using CCDs*. Retrieved from
-

- [http : /www.physics.csbsju.edu/photometry/photometrywrccd06.pdf](http://www.physics.csbsju.edu/photometry/photometrywrccd06.pdf).*
- 30 Valdés, J. R. et al (2016). *Pruebas para determinar las propiedades ópticas de la Cámara Schmidt de Tonantzintla..* Reporte Técnico, INAOE, Tonantzintla, Puebla, México.
- 31 Viikinkoski, M. et al. (2017). *Adaptive optics and lightcurve data of asteroids: twenty shape models and information content analysis. Astronomy and Astrophysics*, 607(A117), pp. 14.
- 32 Warner, B. D. (2003). *A Practical Guide to Lightcurve Photometry and Analysis.* New York, NY: Springer-Verlag New York.
- 33 Woodham R. J., *Photometric Method for Determining Surface Orientation from Multiple Images, Optical Engineering* 19 pp. 139-144 (1980).