



INAOE

Uso del Teselado como estrategia didáctica para aplicar el álgebra a perímetros, áreas y volúmenes

por

Ing. Elizabeth Villalobos Pérez

Tesis sometida como requisito
para obtener el grado de

**MAESTRA EN ENSEÑANZA DE CIENCIAS
EXACTAS**

por el

Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica.
Mayo 2025
Tonantzintla, Puebla.

Dirigida por:

Dr. Manuel Gerardo Corona Galindo
Investigador titular del INAOE

©INAOE 2025

La autora otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias
en su totalidad o en partes de esta tesis



Dedicatorias

A mi compañero de vida Mitchell, por ser mi fortaleza.

A mi querida prima Lily, quien en vida fue una gran maestra y fue mi inspiración para seguir el gran camino de la docencia (in memoriam).

A mis padres, por todo su apoyo.

A Mary y Sofy, por estar siempre conmigo en los momentos más complicados.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Manuel Gerardo Corona Galindo por su tiempo, paciencia, enseñanzas y guía constante durante la elaboración de este proyecto, así como por su acompañamiento en la dirección y redacción de esta tesis. A mi esposo Mitchell Ángel Gómez Ortega por su apoyo, enseñanzas y orientación a lo largo de este proceso. A mis compañeros Lidia, Diana, Josefina, Heriberto y al grupo de Metodología 2023 por sus aportaciones que enriquecieron este trabajo. A la profesora Verónica Mendoza Chimal, Directora del CBT No. 2 Bicentenario por permitir la implementación del proyecto y facilitar su ejecución. Al maestro Ricardo Ibarra Ramos, orientador del grupo tres de primer año (1°3) por su colaboración con el diagnóstico grupal y su apoyo durante el desarrollo del proyecto. Al Lic. Carlos Ortiz Naranjo, Director de Bachillerato Tecnológico, por su apoyo al otorgarme el periodo de licencia laboral que me permitió concluir esta investigación. A los alumnos, padres de familia y tutores del grupo 1°3, turno vespertino, por su participación y disposición para formar parte de esta investigación.

Resumen

La presente investigación describe la implementación del Teselado como estrategia didáctica para aplicar el álgebra en el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; ésta se complementó con ejercicios de gimnasia cerebral como recurso para favorecer el aprendizaje y estimular la creatividad. La estrategia se planteó y ejecutó en cinco fases, implementadas progresivamente, que incluyeron la elaboración de un Teselado y fue aplicada a un grupo de estudiantes de primer año de Educación Media Superior (EMS), con la finalidad de que los alumnos comprendieran el lenguaje algebraico y adquirieran habilidades para resolver operaciones algebraicas, mediante el trabajo en equipos colaborativos y desempeñando roles específicos. A través de la asociación de longitudes en figuras geométricas, los estudiantes lograron comprender el lenguaje algebraico y establecer su propia nomenclatura de términos algebraicos. Posteriormente, aplicaron dichas expresiones en las relaciones de perímetro, área y volumen, comprendiendo los procedimientos necesarios para realizar sumas, restas y multiplicaciones algebraicas. Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes no solo entendieron el lenguaje algebraico, sino que también aprendieron a resolver operaciones algebraicas de manera significativa.

Palabras clave: Teselado, estrategia didáctica, perímetro, área, volumen, lenguaje algebraico, operaciones algebraicas, geometría, álgebra

Abstract

This research describes the implementation of Tessellation as a didactic strategy to learn algebra in the calculation of perimeters, areas, and volumes. At the beginning, it was complemented by brain gym exercises as a resource to support learning and stimulating creativity. The strategy was designed and executed in five progressively implemented phases, which included the creation of a tessellation. It was applied to a group of first-year upper secondary education (EMS) students, with the aim of helping them understand algebraic language and develop skills to solve algebraic operations, through collaborative teamwork and specific role assignments. Through associating lengths in geometric figures, students were able to understand the algebraic language and they could establish their own nomenclature for algebraic terms. Subsequently, they applied these expressions to calculate of perimeter, area, and volume, gaining an understanding of the procedures required to perform algebraic addition, subtraction, and multiplication. The results obtained show that students not only understood algebraic language but also learned to solve algebraic operations in a meaningful way.

Key words: Tessellation, didactic strategy, perimeter, area, volume, algebraic language, algebraic operations, geometry, algebra

Índice general

Lista de figuras y gráficas	9
Lista de Tablas	12
1. Introducción	13
1.1. Problemática	16
1.2. Justificación	18
1.3. Pregunta de investigación	21
1.4. Hipótesis	22
1.5. Objetivo general	22
1.6. Objetivos específicos	22
1.7. Metas	22
1.8. Metodología	24
1.9. Recursos materiales y humanos para llevar a cabo el proyecto	25
1.10. Calendarización de las actividades	26
1.11. Descripción del proyecto	26
2. Implementación del Teselado como estrategia didáctica para aprender álgebra	29
3. Resultados	82
3.1. Resultados obtenidos en las exploraciones diagnósticas	82
3.2. Resultados obtenidos en la implementación de la estrategia	85
4. Discusión de los resultados	92

Índice general	8
5. Conclusiones	100
6. Trabajo futuro	103
Bibliografía	104
A. Listas de cotejo	108
B. Diagnóstico de orientación	111
C. Exploración diagnóstica de geometría	115
D. Exploración diagnóstica de álgebra	118
E. Exploración final de álgebra	122

Lista de figuras y gráficas

2.1. Problema 3: cálculo de perímetros y áreas	31
2.2. Problema 4: cercar y sembrar terreno	31
2.3. Etiquetas de identificación de los roles en el equipo	36
2.4. Implementación de ejercicios de Gimnasia Cerebral	37
2.5. Teselado del equipo 1	38
2.6. Rosa roja superior del Teselado del equipo 1	41
2.7. Rosa roja inferior del Teselado del equipo 1	41
2.8. Rosa naranja del Teselado del equipo 1	42
2.9. Formulario empleado por el equipo 1	43
2.10. Áreas de los triángulos	44
2.11. :Descomposición de áreas de la figura irregular 100, realizado por el equipo 4	45
2.12. Teselado del equipo 2	49
2.13. Sección izquierda del Teselado	52
2.14. Teselado impreso en 3D	53
2.15. Retiro de piezas del Teselado 3D	54
2.16. Teselado del equipo 3	55
2.17. Descomposición de figuras irregulares, realizado por el equipo 3	56
2.18. Teselado del equipo 4	58
2.19. Dimensiones del Teselado, equipo 4	60
2.20. Teselado del equipo 5	62
2.21. Figura irregular inferior izquierda	64
2.22. Figura irregular superior derecha	64

2.23. Teselado del equipo 6	66
2.24. Teselado del equipo 7	69
2.25. Teselado del equipo 8	70
2.26. Figura irregular morada	72
2.27. Teselado equipo 9	73
2.28. Teselado equipo 10	76
2.29. Teselado equipo 11	79
3.1. Gráfica 1: Resultados de la exploración diagnóstica de geometría, en la que se evaluaron los conocimientos previos acerca de perímetros, áreas y volúmenes	83
3.2. Cálculos de perímetro y área, realizados por estudiante del grupo en la exploración diagnóstica de geometría	84
3.3. Gráfica 2: Resultados de la exploración diagnóstica de álgebra	85
3.4. Resolución de una suma algebraica, realizada por estudiante del grupo en la exploración diagnóstica de geometría	85
3.5. Gráfica 3: Resultados de la exploración final de álgebra	86
3.6. Gráfica 4: Comparativo de resultados entre géneros	87
3.7. Gráfica 5: Comparativo de resultados entre exploraciones de álgebra	91
A.1. Lista de cotejo para la fase de construcción del Teselado	108
A.2. Lista de cotejo para la fase de desarrollo e implementación del lenguaje algebraico	109
A.3. Lista de cotejo para la fase de solución de operaciones algebraicas	110
B.1. Diagnóstico de orientación. Página 1	112
B.2. Diagnóstico de orientación. Página 2	113
B.3. Diagnóstico de orientación. Página 3	114
C.1. Exploración diagnóstica de geometría. Página 1	116
C.2. Exploración diagnóstica de geometría. Página 2	117
D.1. Exploración diagnóstica de álgebra. Página 1	119
D.2. Exploración diagnóstica de álgebra. Página 2	120

D.3. Exploración diagnóstica de álgebra. Página 3	121
E.1. Exploración final de álgebra. Página 1	123
E.2. Exploración final de álgebra. Página 2	124

Lista de Tablas

1.1. Materiales requeridos para el proyecto	26
1.2. Plan de actividades por mes	27
2.1. Temas contenidos en las preguntas de la exploración diagnóstica de álgebra	33
3.1. Estadística descriptiva de los resultados obtenidos en lenguaje algebraico .	90
3.2. Estadística descriptiva de los resultados obtenidos en operaciones algebraicas	91

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo describe la implementación de una estrategia didáctica basada en el Teselado, aplicada a perímetros, áreas y volúmenes para el aprendizaje de las operaciones fundamentales del álgebra, con el objetivo de mejorar el aprendizaje de las operaciones fundamentales del álgebra, promoviendo; además, que el estudiante construya su aprendizaje de forma colaborativa. Entenderemos por Teselado el recubrimiento de una superficie plana por piezas de mosaico de diferentes formas, y en cuanto a la estrategia, la vamos a definir como un plan con objetivos bien definidos, en nuestro caso, el aprendizaje de conceptos matemáticos. La estrategia didáctica propuesta se aplicó en un grupo de estudiantes de Educación Media Superior (EMS), que conformaban el grupo tres de primer año (1^o3) de la carrera “Técnico en Mecatrónica” en el Centro de Bachillerato Tecnológico (CBT) No.2 “Bicentenario”, ubicado en el municipio mexiquense de Huehuetoca.

En México, la Educación Media Superior (EMS) es considerada obligatoria desde el año 2012; esta etapa educativa inicia una vez concluida la Educación Básica (EB), la cual abarca un periodo de 12 años e incluye los niveles de preescolar, primaria y secundaria. En la EMS, la edad aproximada de ingreso es a partir de los 15 años, y los estudiantes permanecen en ella durante un trienio, egresando alrededor de los 17 o 18 años.

Para cursar la EMS en México, existen tres modalidades educativas: escolarizada, no escolarizada y mixta. A su vez, la modalidad escolarizada se divide en tres modelos educativos: bachillerato general, bachillerato tecnológico y profesional técnico. Estos modelos son impartidos en instituciones administradas por organismos federales, estatales, autónomos

o privados (INEE, 2017). El bachillerato general tiene un carácter propedéutico, ya que prepara al estudiante para cursar estudios de nivel superior; por otra parte, el bachillerato tecnológico y el profesional técnico no solo brindan formación para el acceso a la educación superior, sino que también permiten al estudiante obtener una carrera técnica.

De acuerdo con el documento “FUNDAMENTOS DEL MARCO CURRICULAR COMÚN DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR” de la Subsecretaría de Educación Media Superior (2022, p.3), todas las instituciones del país que imparten la EMS deben apegarse al Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS), el cual está sustentado en el paradigma de la Nueva Escuela Mexicana (NEM). El MCCEMS está conformado por dos componentes principales: el currículum fundamental y el currículum ampliado. En el caso de los bachilleratos tecnológicos, se incorpora el currículum laboral. El currículum fundamental está integrado por los aprendizajes indispensables para la comprensión y construcción del conocimiento, denominados recursos sociocognitivos; estos se agrupan en las áreas de Comunicación, Pensamiento Matemático, Conciencia Histórica y Cultura Digital.

La Nueva Escuela Mexicana (NEM), en su documento progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático (2022, p.4), establece que este pensamiento busca un medio, a través del cual los estudiantes adquieran y desarrollen habilidades del pensamiento como la observación, la intuición, la conjetura, la argumentación, así como la capacidad de modelar y comprender, mediante el lenguaje matemático, diversos fenómenos sociales, naturales e incluso personales. De esta manera, se propone un enfoque más amplio de las matemáticas, que trascienda la simple mecanización de procedimientos, promoviendo una comprensión más profunda y significativa en un entorno de colaboración, donde su aplicación sea en contextos reales.

Es por lo anterior, que la presente investigación se alineó a lo planteado en el recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, ya que al emplear el Teselado, como estrategia, aplicado a perímetros, áreas y volúmenes, los estudiantes aprendieron significativamente el lenguaje algebraico y la solución de operaciones algebraicas simples, Díaz Barriga y Hernández (2010) definen como estrategia a [...] “los medios o recursos para prestar ayuda pedagógica ajustada a las necesidades de progreso de la actividad constructiva de los

alumnos". En este contexto, el Teselado se empleó como recurso pedagógico para favorecer la construcción activa del conocimiento en un entorno colaborativo: nuestra definición de estrategia.

En esta estrategia didáctica se emplearon diversas figuras geométricas como teselas, cumpliendo dos condiciones esenciales, no dejar espacios entre ellas y no superponerse. Los Teselados pueden clasificarse en distintas categorías, siendo las más comunes los regulares e irregulares; sin embargo, en la presente investigación no se restringe el análisis a un solo tipo de teselado, con el objetivo de enriquecerla.

Por otra parte, esta estrategia fue diseñada desde un enfoque constructivista, con el propósito de que los estudiantes sean protagonistas en la construcción de su propio aprendizaje, mediante la incorporación de nuevos conocimientos a aquellos que ya forman parte de su estructura cognitiva. Esta visión coincide con lo planteado por Martínez (2022, p.173), quien señala que el aprendizaje es un proceso desarrollado por sujetos activos, a través de construcciones complejas que implican la sustitución o modificación de ideas previas mediante la integración de nuevos elementos. Como evidencia de este proceso, en este texto se encerraron entre comillas las aseveraciones propias de los estudiantes.

De acuerdo con lo señalado líneas arriba, se busca que sean los estudiantes quienes construyan su propio aprendizaje a lo largo de las cinco fases sucesivas que conforman este proyecto; por lo tanto, será necesario evaluar los avances en cada etapa, ya que como afirman Ley y Espinoza (2021), mediante la evaluación, el docente determina si los objetivos de aprendizaje se han cumplido. Al inicio de la estrategia, se aplicarán dos pruebas diagnósticas con el fin de identificar los conocimientos previos. Durante el desarrollo de las fases, se utilizarán instrumentos como una lista de cotejo (Anexo A), además de los cuadernos de apuntes del equipo, en ambos se evaluarán aspectos como la construcción del Teselado, la aplicación del lenguaje algebraico, la representación de operaciones algebraicas y su resolución; además, se considerarán elementos de carácter humano, como la integración y colaboración entre los miembros del equipo. Al concluir la implementación, se aplicará una evaluación final con el propósito de medir la eficacia de la estrategia.

Tal como se señaló al inicio del documento, esta estrategia fue implementada en un grupo de la carrera de Mecatrónica, identificado como 1°3. El trabajo se llevó a cabo durante

un periodo de 4 meses, con dos sesiones hebdomadarias de 40 minutos. Es importante mencionar que dentro de la Estructura Curricular de los Bachilleratos Tecnológicos, se incluye una hora semanal adicional destinada a un Taller de Apoyo al Aprendizaje. En este espacio se realizan actividades de reforzamiento o se complementan los temas de la materia principal, en este caso, la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático. Con la finalidad de no afectar el curso normal de la materia, en la UAC se trabajó con la estrategia didáctica aquí planteada, mientras que en el taller se abordaron temas complementarios de matemáticas.

De acuerdo con el informe proporcionado por el Departamento de Orientación (Anexo B), dicho grupo estaba conformado por 55 estudiantes: 43 hombres y 12 mujeres, cuyas edades oscilaban entre los 14 y 15 años. Del total de estudiantes, el 70 % presentaba un estilo de aprendizaje visual, el 25 % auditivo y el 5 % kinestésico. Los documentos que se anexan, contienen la información, tal como se envió a la autora, incluyendo la mala redacción.

1.1. Problemática

Quien suscribe el presente proyecto, Ingeniero en Control y Automatización, a lo largo de 10 años de experiencia como docente del área de Matemáticas y del área profesional de mecatrónica en el nivel Medio Superior (MS), ha podido identificar deficiencias importantes en el aprendizaje de los contenidos de las matemáticas, concretamente del álgebra, y cómo dichas deficiencias impactan en su formación técnica. Por ejemplo, tienen dificultades en la solución de las operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, salvo, paradójicamente, la división; a menudo, confunden operaciones a realizar en una expresión algebraica que demanda jerarquización de operaciones, manifestando, incluso, dificultades en el uso de paréntesis y corchetes. Debido a esto, no pueden realizar los análisis de circuitos; pueden plantear bien las ecuaciones, pero ya no las resuelven correctamente. Así, todas estas deficiencias las arrastran a lo largo de los cursos posteriores.

Aunado a esta situación, se han detectado en los estudiantes carencias aritméticas que obstaculizan el operar con términos algebraicos; verbigracia, presentan dificultades para identificar un término algebraico positivo y otro negativo; a menudo, los confunden al

realizar las operaciones, porque no pueden diferenciar entre el signo que, acompaña a un término dentro de un paréntesis, del de la operación que está fuera del paréntesis; aún más, cuando se tiene una operación de sumas y/o restas con números positivos y negativos dentro de un paréntesis no lo pueden comprender, mucho menos resolver; por ende, en el resultado, no logran reconocer si la cantidad resultante es positiva o negativa y prefieren escribir el posible resultado con ambos signos, el positivo y el negativo.

Por si esta problemática fuera menor, los estudiantes presentan dificultades para manejar el lenguaje algebraico, que no es tan común como aquel de la aritmética; además, ignoran los significados inherentes a sus símbolos (Palarea, 1999). Por tal motivo, al solicitarles que expresen algebraicamente algún problema, no lo hacen de forma correcta; o bien la representación es incompleta. Sobre esto, Castro (2012 p. 82) afirma que “[...] los estudiantes cometen más errores al realizar la traducción de enunciados verbales a su representación simbólica, que cuando se hace desde el simbólico al verbal”.

Así pues, los estudiantes no logran apropiarse del conocimiento algebraico; sólo recuerdan procedimientos mientras se imparten los temas. Cuando sólo se mecanizan algoritmos, queda plasmada la limitada comprensión de contenidos, lo cual conlleva poco conocimiento significativo (Papini, 2003); cada día, muestran poco interés por las matemáticas, toda vez que se consideran complejas, y sin utilidad futura. A contrapelo, prefieren invertir su tiempo en gadgets, videojuegos, redes sociales; o bien, practicar el fútbol y escuchar música; también, precisa mencionar que un porcentaje de ellos se encuentran inmersos en las adicciones. Ante tal espectro de preferencias y actividades, es imposible esperar que le den importancia a su formación académica.

En el Centro de Bachillerato Tecnológico (CBT) No.2 “Bicentenario”, perteneciente a la Subsecretaría de Educación Media Superior del Estado de México, se llevará a cabo el presente proyecto; dicho plantel se encuentra ubicado en la cabecera municipal Huehuetuense, cercano a la capital del país, siendo uno de los 125 municipios que constituyen tal entidad federativa. El Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) señala que, por su densidad poblacional, dicha alcaldía es considerada como semiurbana y cuenta con todos los servicios públicos; debido a ello, la institución mencionada, al estar ubicada en el centro del municipio, tiene agua potable, electricidad, drenaje, servicio de limpia,

transporte, seguridad pública y conectividad a internet. Respecto a la matrícula del plantel, el sistema de control escolar vía su plataforma virtual, turno vespertino, denominado Modelo Integral de Gestión Educativa (MIGE), evidencia que asciende a 449 alumnos, cuyas edades oscilan entre los 14 y 20 años. En este plantel, se estudian a nivel técnico tanto la carrera de Mecatrónica como Gastronomía, con tres grados cada una: primero, segundo y tercero.

Atinente a la infraestructura, las instalaciones del plantel están compuestas por dos edificios: uno y dos. El primero, alberga 5 aulas escolares, oficinas administrativas, un laboratorio que se ocupa para prácticas sobre ámbito Técnico en Mecatrónica, más informático; el dos también cuenta con 5 salones, Laboratorio de Ciencias Experimentales y un taller para actividades inherentes a la carrera de Técnico en Gastronomía. Debido al sismo del 2017, un edificio (dos) fue inhabilitado por daños; así que en el patio del plantel se instalaron aulas móviles fabricadas de multipanel para impartir clases. Actualmente, dichas aulas ya no son utilizadas para su fin primigenio, sino como oficinas del área de vinculación y orientación; en consecuencia, el espacio para realizar actividades deportivas es muy limitado.

1.2. Justificación

El MCCEMS de los bachilleratos tecnológicos federales (SEP, 2023), está integrado por tres currículos: fundamental, ampliado y laboral, distribuidos en una trayectoria académica de seis semestres. Los primeros dos están enfocados al estudio de contenidos disciplinares propios del nivel MS; el tercero, tiene como objetivo transmitir conocimientos técnicos para la incorporación al campo laboral. Durante el segundo semestre, currículo fundamental, se abordan las matemáticas, con la materia “Pensamiento matemático II”, cuyos contenidos están centrados en Álgebra y Geometría; marco idóneo para el presente proyecto, que propone emplear el Teselado como estrategia, a fin de vincular estas dos áreas; aprendiendo significativamente operaciones algebraicas, utilizando conceptos geométricos como auxiliares, se evitará la memorización y utilización de procedimientos mecanizados.

El grupo con quienes se aplicó el presente proyecto, pertenecía al segundo semestre de la carrera Técnico en Mecatrónica. Esta especialidad pertenece al área de Fisicomatemáticas,

y requiere de conocimientos sólidos de álgebra, pues desde el segundo semestre es utilizada en la solución de problemáticas inherentes a dicha especialidad. Al respecto, Márquez (2019) menciona “Todos los estudiantes deben ser capacitados para abordar problemas numéricos usando variables, fórmulas y ecuaciones como un lenguaje para comunicarse con la tecnología”.

En este semestre, la formación técnica está conformada por tres submódulos (asignaturas):

1. Realiza circuitos eléctricos y electrónicos para sistemas de control; 2. Mide e interpreta las variables de los sistemas eléctrico, electrónico y mecánico de sistemas; 3. Realiza circuitos electrónicos digitales para sistemas de control.

Con la finalidad de amparar los contenidos abordados en los dos primeros submódulos, se requiere que el estudiante domine las operaciones algebraicas fundamentales, solucione ecuaciones con una o dos incógnitas, más manejo de las reglas que gobiernan factorizaciones; dentro del submódulo III, se demanda tener desarrollado el pensamiento lógico y simbólico para modelar matemáticamente el comportamiento de los circuitos; además, es necesario manejar álgebra, ya que se utiliza como base en el diseño lógico de circuitos digitales para el álgebra booleana, y así hacer una transición entre las matemáticas teóricas a tono con aplicaciones del ámbito tecnológico e industrial (Mejías y Alsina, 2021).

Como ya se mencionó en líneas anteriores, la estrategia didáctica utilizada fue el Teselado; éste consiste en el recubrimiento de un Plano Euclidiano con polígonos llamados teselas, baldosas o mosaicos; su construcción requiere de dos condiciones; a saber, que las figuras no sean superpuestas y no se dejen espacios vacíos entre ellas (Piñeiro, 2000). Además, en el armado del Teselado, existen 4 configuraciones, regular, semirregular, periódicas y aperiódicas. Para fines del presente proyecto, se aplicará el Teselado regular, pues requiere del empleo de polígonos congruentes entre sí, como el triángulo equilátero, cuadrado y hexágono regular para cubrir un plano (Piñeiro, 2000). El conocimiento de estos polígonos, así como el cálculo de sus perímetros y áreas ya se encuentran en la estructura cognitiva del estudiante, pues fueron contenidos abordados en niveles escolares anteriores.

El Teselado se asociará con el manejo del lenguaje algebraico, mediante la representación de las medidas asociadas a distintas formas geométricas que conformen el mosaico. Esto implica que el estudiante debe realizar en su cerebro un cambio del registro físico al semiótico vía

un Sistema de Representación Semiótico Visual Geométrico (SRSVG, Palarea y Socas, 1999), estableciendo con ello una relación entre el álgebra y geometría. En el transcurso del proceso, el estudiante podrá relacionar magnitudes desconocidas de los polígonos como longitud, apotema, área con letras, conllevando, entonces, la capacidad de expresar cantidades diferentes mediante distintas literales. Presentando de esta manera el tema en mención, se espera que el lenguaje algebraico adquiera significado en la mente del estudiante y se manifieste cuando se construya un mosaico de Teselado con diferentes polígonos, así también que la expresión matemática correspondiente al cálculo de su perímetro o área sea expresado como una operación algebraica confiable.

En las progresiones 12 y 13, contenidas en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) — anteriormente, materia—, denominada “Pensamiento Matemático II”, se demanda, que el estudiante sea apto para relacionar un problema contextualizado de su entorno, considerando parámetros matemáticos idóneos para su descripción. La propuesta encaminada para tal fin, es vía los procedimientos algebraicos y geométricos comprendidos en el Teselado; razón por la cual, se ha escogido como estrategia didáctica para que el alumno ponga en juego sus habilidades mentales a fin de lograr el conocimiento significativo del álgebra. Al utilizar el Teselado, el alumno hará uso de la geometría como medio, pues al estar manipulando diversas figuras geométricas, realizará bosquejos con diferentes expresiones matemáticas, esperando que el manipuleo de las figuras favorezca el aprendizaje de las operaciones algebraicas inherentes, evitando, así, la mecanización y retención temporal de procedimientos, vicio acendrado en los estudiantes de este nivel.

El presente proyecto se plantea, además, con miras a que el estudiante sea quien construya su propio conocimiento, dejando a la docente las propuestas de problemáticas, interpretables como desafíos, cuyas soluciones se logren mediante un proceso de acierto y error que requiera la exploración y planteamiento de diversas soluciones con Teselado; más la investigación de los posibles medios de solución, vinculados a sus conocimientos previos, latentes en su estructura cognitiva; esto guarda relación con lo que plantea Godino (2004) “El conocimiento progresa como resultado de la construcción personal del sujeto enfrentado a tareas problemáticas”. Es deseable también que todo este trabajo, fortalezca la interacción entre compañeros de grupo, articulada a la colaboración entre pares para lograr objetivos

comunes, acompañados por la docente; ya que, a este último, el alumno tendrá que notificar sus resultados, recurriendo a sus habilidades comunicativas y al uso del lenguaje matemático. Como ya se mencionó en el planteamiento del problema, los estudiantes manifiestan poco interés frente al conocimiento matemático, pues no le encuentran sentido a su aprendizaje; razón por la cual, en el presente proyecto se propone, como parte de las actividades iniciales, realizar de manera conjunta, estudiantes más docente, una reseña histórica del álgebra, geometría y cómo éstas, unidas a una inteligencia espacial muy desarrollada, han incidido sobre diversas disciplinas; a saber, arte, construcción, aparte de política; todo ello, con miras a sensibilizar al estudiante, rompiendo el paradigma de rigidez mental que tienen sobre matemáticas, las comprendan como una ciencia en constante desarrollo a través del tiempo y reconozcan que su evolución también ha enfrentado diversas dificultades; por ejemplo, la transición de aritmética numérica a álgebra simbólica.

En el marco de lo expuesto previamente, se espera que los alumnos identifiquen la relación estrecha matemáticas-arte; enmarquen el Teselado como una expresión artística que utiliza figuras geométricas secuenciadas, útiles en la construcción de baldosas, murales o bocetos que afluyen a la conformación de un simbolismo y diseño geométrico en un marco lógico-matemático (González, 2004). Adicionalmente, al trabajar el mosaico Teselado, se resuelve una problematización y aplicación lúdica de las matemáticas, útil para afianzar conceptos, evitando que se conciba el aprendizaje a formas dogmáticas, carente de significado y restringidas.

1.3. Pregunta de investigación

¿Mediante el Teseleado como estrategia de aprendizaje, el alumno de primer año de Bachillerato Tecnológico logrará aprender a realizar y resolver operaciones algebraicas?

1.4. Hipótesis

El establecimiento de una relación entre el álgebra y la geometría, vía el Teselado como estrategia didáctica, favorecerá el aprendizaje del lenguaje algébrico, aparte de plantear y resolver operaciones algebraicas sin la mecanización de procedimientos.

1.5. Objetivo general

Mejorar el aprendizaje significativo de las operaciones algebraicas en estudiantes de bachillerato tecnológico mediante el Teselado, utilizando perímetros, áreas y volúmenes.

1.6. Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general, se proponen los siguientes objetivos específicos:

1. Aplicar una exploración diagnóstica con preguntas específicas para identificar los conocimientos previos acerca de perímetros, áreas, volúmenes y operaciones fundamentales de álgebra.
2. Desarrollar el proceso de asociación entre representaciones geométricas y expresiones algebraicas, fomentando la verbalización del lenguaje algebraico.
3. Mediante el uso de Teselado, aplicado al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, crear las condiciones que propicien el aprendizaje significativo de las operaciones algebraicas fundamentales.
4. Evaluar el impacto de la estrategia didáctica aplicada para medir su eficiencia y efectividad.

1.7. Metas

1. Identificar conocimientos previos sobre perímetros, áreas y volúmenes para emplearlos como subsunsores en el aprendizaje de operaciones fundamentales del álgebra.

2. Desarrollar modelos peculiares de Teselado, usando figuras geométricas, para construir la relación entre Geometría y lenguaje algebraico.
3. Resolver ejercicios asociados a situaciones de la vida cotidiana, relacionadas con perímetros, áreas y volúmenes, dirigidas a definir una estrategia personal que sirva para realizar operaciones algebraicas. Enseguida, abrir la posibilidad de que los mismos estudiantes, planteen problemas que impliquen operaciones algebraicas y se puedan resolver utilizando el Teselado.
4. Diseñar instrumentos de exploración que permitan medir cuantitativa y cualitativamente los aprendizajes alcanzados, al tiempo que sirvan también para evaluar la eficacia y efectividad de la estrategia planteada.

1.8. Metodología

Como ya se ha mencionado líneas arriba, mediante la construcción de un mosaico, el presente proyecto está encaminado a que los estudiantes aprendan a resolver operaciones algebraicas, además de significar el lenguaje algebraico. Los estudiantes deben enriquecer la elaboración del mosaico colaborativamente en un ambiente gobernado por el intercambio de ideas y promoción creativa. En este contexto, será indispensable primeramente contar con acuerdos de convivencia que fomenten el trabajo en equipo, así como la armonía y respeto entre pares. Dicho convenio será propuesto en plenaria por la docente y perfeccionado por los estudiantes dentro del grupo.

Después, se aplicará una exploración diagnóstica, destinada a que la docente determine los conocimientos previos adquiridos en niveles educativos anteriores. Esta evaluación permitirá planear sesiones dentro y fuera de clase para resarcir las carencias de conocimiento necesario para el desarrollo del proyecto.

En seguida, se dividirá al grupo en equipos de trabajo colaborativo; éstos, estarán integrados por 5 estudiantes. En la conformación de los equipos, se tomarán en consideración los resultados obtenidos en la exploración diagnóstica, considerando un alumno de alto rendimiento, dos de medio y dos de bajo. La idea es que el mejor estudiante encamine el trabajo del equipo, intercambiando ideas y fomentando las habilidades comunicativas en pos de favorecer el aprendizaje.

En la ejecución de las fases de construcción del mosaico, implementación del lenguaje matemático y operaciones algebraicas, se asignarán roles a cada uno de los estudiantes que conformen el equipo a fin de que cada miembro contribuya en la ejecución de las actividades. Para lograrlo, se designará por elección libre al estudiante que ejerza el rol de líder, quien dirigirá al grupo a buscar soluciones a los desafíos que aparezcan en la construcción del mosaico, además de guiar en la designación del lenguaje matemático adecuado, así como a resolver las operaciones algebraicas inherentes. Otros dos estudiantes, tendrán el rol de activistas, cuya responsabilidad radicará en la construcción del mosaico, asignación de lenguaje matemático, y la solución de operaciones algebraicas; otro estudiante, desempeñará el rol de secretario, teniendo como cometido, tomar notas del desarrollo del

proyecto. Finalmente, un estudiante ocupará el rol de orientador, y será quien guíe al equipo en el cumplimiento de actividades, además de buscar la información que se requiera en la realización de las tareas.

Con el objeto de evaluar los conocimientos alcanzados por los estudiantes, el proceso evaluativo de este trabajo es tanto cualitativo como cuantitativo. En cuanto al aspecto cualitativo, se valorará la pericia para plantear y solucionar operaciones; además, del empleo adecuado del lenguaje algebraico en disertaciones provocadas por la docente. Por lo que toca a lo cuantitativo, se medirán los resultados obtenidos mediante una evaluación escrita que será aplicada al finalizar la ejecución del proyecto.

1.9. Recursos materiales y humanos para llevar a cabo el proyecto

1. Humanos

Se contará con la participación de estudiantes de primer año que cursen la carrera de Técnico en Mecatrónica, previa obtención del consentimiento informado por parte de sus padres o tutores, mediante la firma de la Carta de Consentimiento Informado.

2. Materiales

Los materiales empleados para esta investigación se detallan en la Tabla 1.1. Debe quedar asentado que la responsable del proyecto sufragó los costos.

Resultados esperados

1. Lograr en los estudiantes el aprendizaje significativo de las operaciones algebraicas.
2. Que los alumnos den un significado al lenguaje matemático.

Cantidad	Descripción	Costo unitario	Costo total
1	Caja con 8 plumones para pizarra	\$160	\$160
1	Paquete con 20 pliegos de cartulina	\$65	\$65
1	Paquete de 100 hojas de diferentes colores	\$90	\$90
21	Reglas de plástico	\$7	\$147
21	Tijeras para cortar papel	\$10.90	\$229
11	Barras de pegamento	\$17.00	\$187
5	Rollos de ácido poliláctico (PLA) de diferentes colores	Material donado por la docente	-
100	Impresiones de reglas de convivencia, exploración diagnóstica, etc.	\$1.00	\$100
5	Impresoras 3D	Laboratorio de emprendimiento	-
1	Computadora portátil	Material de la docente	-
1	Cañón proyector	Material de la institución	-
Total			\$978

Tabla 1.1 Materiales requeridos para el proyecto

1.10. Calendarización de las actividades

El progreso de las actividades de esta investigación se especifican en la Tabla 1.2

1.11. Descripción del proyecto

El presente proyecto pone a consideración del lector una estrategia didáctica, basada en Teselado, dirigida al aprendizaje de las operaciones algebraicas, utilizando a la geometría plana como auxiliar para calcular perímetros, áreas y volúmenes. Dicho propósito contiene 5 fases, dirigidas a la adquisición del aprendizaje algebraico, y conformadas de manera que los estudiantes realicen actividades constructivistas, usando conocimiento espacial y geométrico.

Fase uno: Exploración Diagnóstica. En esta etapa, la docente aplicará una exploración diagnóstica escrita, donde los estudiantes resolverán ejercicios de operaciones algebraicas, supuestamente conocidas, siendo el meollo la traducción del lenguaje común al matemático; además, deberán calcular perímetros, áreas y volúmenes sencillos. El objetivo de esta

Actividad	MES											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diseño y aplicación de la exploración diagnóstica												
Elaboración de las reglas de convivencia												
Puesta en marcha de la propuesta didáctica												
Fase 1: Exploración Diagnóstica												
Fase 2: Creación del mosaico Teselado												
Fase 3: Implementación del lenguaje algebraico												
Fase 4: Operaciones algebraicas adicionales utilizando el Teselado.												
Fase 5: Evaluación del aprendizaje.												
Diseño y aplicación de la exploración final												
Revisión y análisis de los resultados arrojados de la exploración final, producto de la aplicación de la estrategia didáctica												
Escritura de la tesis												

Tabla 1.2 Plan de actividades por mes

exploración es identificar las carencias sobre conocimientos previos; o bien, la adquisición errónea de los mismos, que desemboca en aplicaciones equivocadas.

Fase dos: Creación del mosaico de Teselado. En esta etapa, la docente planteará a los estudiantes como desafío, la construcción de un arreglo sistemático, considerando elementos geométricos y utilizando figuras de diferentes tamaños (con proporcionalidad en los lados); además, el mosaico deberá seguir patrones repetitivos entre figuras, evitando imbricaciones, así como dejar espacios vacíos entre ellas; esto es, deben estar bien acopladas. La primera prueba de construcción del mosaico se trabajará con cartulina y hojas coloridas; posteriormente, el modelado se replicará utilizando material medianamente rígido, tal que

permita a los estudiantes quitar, manipular y colocar las figuras como si se tratara de un rompecabezas. Una vez terminada esta construcción, se les solicitará investigar, y reportar por escrito, sobre los elementos algebraicos que aprendieron, así como su posible aplicación en la construcción de vitrales, pisos y murales; de la misma manera, se cuestionará a los estudiantes en qué situaciones cotidianas han observado alguno de los patrones repetitivos encontrados en sus investigaciones.

Fase tres: Implementación del lenguaje algebraico. Cuando todas las longitudes ya hayan sido especificadas algebraicamente, se harán los cálculos necesarios para determinar perímetros y áreas de las figuras. Así también, se podrán expresar el perímetro de cada figura y del contorno total que corresponda al Teselado como una adición de términos. En seguida, utilizando la operación producto, podrán representar las áreas de cada figura geométrica y del Teselado como un término algebraico cuadrático; asimismo, para lograr la escritura de un polinomio, se les pedirá que realicen la adición total de las áreas.

Fase 4: Operaciones algebraicas adicionales utilizando el Teselado. Una vez construida la operación algebraica que represente el perímetro, así como el área total de su mosaico, se les pedirá que agrupen las operaciones y términos semejantes para reducirlos. Cuando los alumnos hayan podido realizar estas cuentas, se les solicitará que manipulen el Teselado, quitando piezas como en un rompecabezas, asociando ésta sustracción de piezas con la operación resta, y haciendo los cálculos correspondientes. Esto permitirá que planteen y resuelvan diversos polinomios, reforzando así su aprendizaje.

Fase 5: Evaluación del aprendizaje. Una vez concluida la implementación de la estrategia didáctica, igual que con la finalidad de medir el aprendizaje alcanzado por los estudiantes, se diseñará y aplicará una exploración final. Esta consistirá en la solución de operaciones algebraicas, más ejercicios escritos, que traduzcan expresiones del lenguaje cotidiano al matemático.

Valga como nota, señalar que algunos de los Teselados se presentan en páginas completas a fin de que la asociación algebraica se vea con claridad.

Capítulo 2

Implementación del Teselado como estrategia didáctica para aprender álgebra

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, la puesta en marcha de la estrategia se llevó a cabo en 5 fases progresivas, siendo la exploración diagnóstica la primera de ellas. Para la implementación de la estrategia, era necesario primero identificar en los estudiantes, los conocimientos previos de dos áreas fundamentales; a saber geometría y álgebra; por lo tanto, fue necesaria la aplicación de dos exploraciones en diferentes momentos: la de geometría, al inicio del curso escolar, y la de álgebra una vez concluido el repaso de geometría.

Para la exploración de geometría (Anexo C), se planteó un examen escrito que contenía ejercicios, problemas contextualizados e identificación de figuras geométricas, para cuya solución fue destinada una sesión de 40 minutos. La resolvieron sólo 50 de los 55 estudiantes; ya que 5 no se presentaron ese día. Debido a esto, a 4 de ellos, se les destinó la siguiente clase para que la resolvieran; al que faltó, se le envió a casa, pues estaba incapacitado por accidente de motocicleta.

Con base en los resultados obtenidos en la exploración, y con el propósito de nivelar conocimientos para ser utilizados durante el desarrollo de la estrategia, se destinaron dos semanas para realizar un repaso de geometría. Como primera actividad, se les solicitó a los estudiantes llevar a clase un compendio de tablas matemáticas que contuviera imágenes

de las figuras y cuerpos geométricos, más las expresiones para calcular perímetros, áreas y volúmenes. Durante la clase, y utilizando dichas tablas como material de consulta, se solicitó a los estudiantes que relacionaran las figuras y cuerpos que aparecían en su material, con aquellas que podían apreciar en su entorno; además, con el fin de rememorar conceptos y potenciales cálculos de perímetro, área y volumen, se les pidió que identificaran los cálculos que podrían llevar a cabo con aquellas figuras de su ambiente.

Posteriormente, utilizando las relaciones previamente identificadas en el formulario, se trabajó con cálculos de perímetros y áreas de figuras geométricas; para dichas cuentas, se les pidió a los estudiantes que todas las operaciones aritméticas fueran realizadas a mano, *i.e.*, sin ayuda de calculadora. Una vez que los estudiantes identificaron y diferenciaron cálculos de perímetro y área, se recordó el concepto de volumen como un cálculo que se puede realizar en los cuerpos geométricos tridimensionales; además, los estudiantes también resolvieron problemáticas contextualizadas que implicaban cálculos de perímetros y áreas. El primero de estos ejercicios, consistió en plantear un problema para determinar cuántas losetas cuadradas, de 25 *cm* de lado, se necesitaban para cubrir una superficie de 50 m². Este ejercicio buscaba que el estudiante calculara el área de cada loseta, convirtiera las unidades de metros a centímetros y dividiera el área total de la superficie entre el área de una loseta, obteniendo así el número total de baldosas requeridas. Otro ejercicio consistió en resolver un problema relacionado con una chalina de 120 *cm* de largo y 30 *cm* de ancho; en este caso, se pidió únicamente calcular el perímetro de la bufanda. En el tercer ejercicio, se planteó el cálculo del perímetro y el área de las figuras que componían una bandera *sui generis*, de 60 *cm* por 50 *cm*; ésta contenía en la parte superior tres franjas transversales rectangulares, dos rojas y una amarilla intercaladas de 10 *cm* de ancho y 50 *cm* de largo cada una; mientras que la franja de la parte inferior era más ancha, 30 *cm* por 50 *cm*, y contenía *ad hoc* dos triángulos rectángulos y un triángulo isósceles con dimensiones por calcular (*cf.* Figura 2.1). El objetivo de este ejercicio, era que los estudiantes infirieran que, calculando cada área y sumándolas, deberían obtener la superficie total de la bandera.

En el último ejercicio, se planteó la problemática de cercar y sembrar un terreno, calculando el perímetro y área total; dicha parcela era una figura irregular, compuesta de una terna de rectángulos colocados a lo largo uno después del otro. Las tres figuras tenían la base

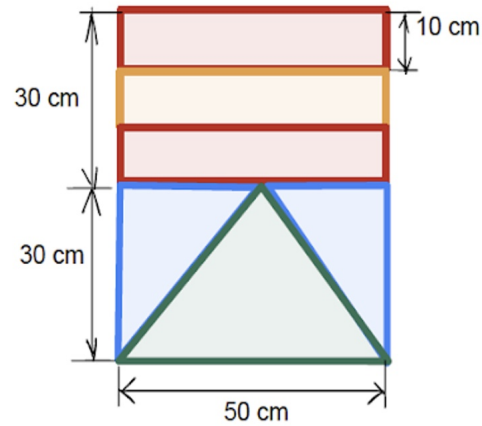


Figura 2.1 Problema 3: cálculo de perímetros y áreas

de $3m$, pero diferentes alturas, la primera era de un metro de altura, la segunda $2.8m$ y la tercera $4m$. Además, a cada lado del segundo rectángulo, se tenían dos triángulos rectángulos cuyas dimensiones eran $2m$ de base y $2.8m$ de altura (*cf.* Figura 2.2). Este ejercicio tenía como objetivo que los estudiantes descompusieran la figura irregular en formas regulares, calcularan las áreas de cada una de las formas regulares, y dedujeran si el valor total de la superficie del terreno se podía obtener sumando todas las áreas pequeñas que lo conformaban.

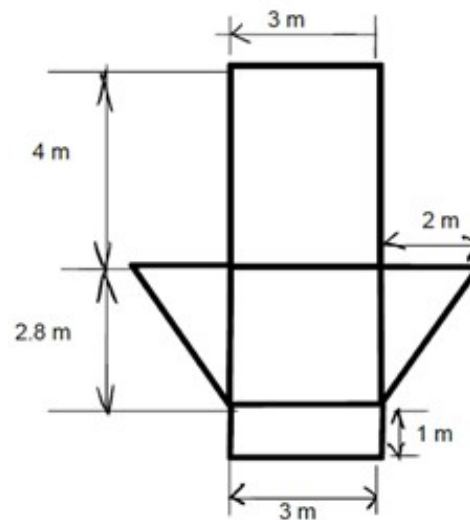


Figura 2.2 Problema 4: cercar y sembrar terreno

Después de haber resuelto el problema, para concluir con la nivelación de conocimientos, se introdujo el concepto de proporcionalidad, entre números enteros, mediante el trazado de figuras geométricas proporcionales. En esta actividad, los estudiantes trazaron, en hojas de sus cuadernos, diversas figuras geométricas regulares; posteriormente, se les pidió que dibujaran las mismas figuras, duplicando la dimensión de cada lado; por ejemplo, si trazaban un triángulo equilátero de $2cm$ por lado, la longitud duplicada sería de $4cm$; esto se realizó con el propósito de que los estudiantes relacionaran, que una figura es proporcional, cuando sus dimensiones aumentan o disminuyen con la misma relación, pero conservando su forma.

Al concluir las semanas de repaso con geometría, se realizó la aplicación de la segunda exploración diagnóstica, la de álgebra (Anexo D); esta estuvo conformada por 12 preguntas de dos tipos: cuatro consistían en resolver ejercicios en los cuales los estudiantes debían demostrar el procedimiento utilizado para llegar a la solución, y ocho consistían en seleccionar la respuesta correcta entre cuatro opciones. En esta exploración se abordaron los temas de lenguaje algebraico, solución de operaciones algebraicas, leyes de los signos, leyes de los exponentes, reducción de términos semejantes y generalización. El tiempo destinado para la solución fue de 40 minutos; sin embargo, los estudiantes requirieron de menos tiempo, concluyéndola en 30 minutos. El día de la exploración, asistieron 53 estudiantes, ya que uno tenía una semana sin presentarse y reportarse a la escuela, otro no se presentó por problemas de salud de su progenitor.

Al concluir las semanas de repaso con geometría, se realizó la aplicación de la segunda exploración diagnóstica, la de álgebra (Anexo D); esta estuvo conformada por 12 preguntas de dos tipos: cuatro consistían en resolver ejercicios en los cuales los estudiantes debían demostrar el procedimiento utilizado para llegar a la solución, y ocho consistían en seleccionar la respuesta correcta entre cuatro opciones. En esta exploración se abordaron los temas de lenguaje algebraico, solución de operaciones algebraicas, leyes de los signos, leyes de los exponentes, reducción de términos semejantes y generalización (*cf.* Tabla 2.1). El tiempo destinado para la solución fue de 40 minutos; sin embargo, los estudiantes requirieron de menos tiempo, concluyéndola en 30 minutos. El día de la exploración, asistieron 53 estudiantes, ya que uno tenía una semana sin presentarse y reportarse a la escuela, otro no

se presentó por problemas de salud de su progenitor.

Una vez resuelta la exploración diagnóstica de álgebra, se pasó a la fase de construcción del

Número de pre-gunta	Tema que identificar	Tipo de pregunta
1	Identificar el álgebra como una rama de las matemáticas, en la que las operaciones son representadas mediante números y letras	opción múltiple
2	Asociar el uso del paréntesis con la operación algebraica producto, leyes de los signos y exponentes	opción múltiple
3	Traducir del lenguaje común al algebraico	opción múltiple
4	Reducción de polinomios mediante la suma y resta algebraica, y la aplicación correcta de las leyes de los signos	abierta
5	Asociar el cálculo de un perímetro con la operación algebraica suma	opción múltiple
6	Sumas algebraicas y leyes de los signos	abierta
7	Asociar el cálculo de un perímetro con la operación algebraica suma	opción múltiple
8	Asociar el uso del paréntesis en la operación algebraica producto, aplicación de las leyes de los signos y exponentes	abierta
9	Identificar figuras geométricas y sus propiedades, asociar la multiplicación algebraica al cálculo de áreas	opción múltiple
10	Sumas algebraicas y leyes de los signos	abierta
11	Identificar figuras geométricas y sus propiedades, expresar un área, utilizando el lenguaje algebraico	opción múltiple
12	Asociar longitudes con un término algebraico, generalizar	abierta

Tabla 2.1 Temas contenidos en las preguntas de la exploración diagnóstica de álgebra

Teselado, la cual, utilizando figuras geométricas regulares e irregulares, consistió en cubrir el área de una cartulina de 65 cm $\times$ 50 cm; para esta actividad se utilizaron, además, hojas de colores, regla, pegamento y tijeras.

En esta fase, los estudiantes tuvieron que trabajar colaborativamente; para ello, la docente, tomando en cuenta los resultados obtenidos por los estudiantes en la exploración de álgebra, formó 11 equipos de 5 integrantes cada uno. La conformación de cada equipo fue con un estudiante de rendimiento alto, dos de medio y dos de bajo; se hizo así con la finalidad de que el alumno con alto desempeño guiará al equipo, y los de medio sirvieran como enlace para impulsar el aprendizaje y motivación de los estudiantes de rendimiento bajo. Precisa mencionar que en el grupo había menos féminas que varones y las alumnas preferían trabajar con sus iguales, evitando integrarse con los compañeros; empero, la docente se empeñó en distribuir a las mujeres en los 11 equipos.

Con el objetivo de evitar confusión y duplicidad de actividades entre los integrantes del equipo, la docente creó roles con tareas específicas a modo que cada miembro del equipo ejerciera un rol. Para identificarlos y diferenciarlos, se le asignaron nombres, los cuales fueron propuestos y elegidos por el grupo mediante consenso. Las denominaciones seleccionadas fueron: líder, quien buscó soluciones a problemáticas; socios, quienes construyeron el Teselado, designaron el lenguaje algebraico y resolvieron las operaciones; soporte, encargado de buscar la información necesaria para consultar fórmulas o reglas; secretario, quien se encargó de tomar notas durante el proyecto. Así, los roles fueron distribuidos entre los 5 integrantes del equipo, quedando conformado por un líder, dos socios, un soporte y un secretario.

La actividad inicial de la estrategia, como se mencionó en la justificación se espera que los estudiantes identifiquen la relación estrecha matemáticas-arte; para lograrlo se inició con un recorrido cronológico de la evolución de las matemáticas, realizada en plenaria por la docente y enriquecida por los estudiantes. Durante este recorrido, se proyectaron diversas fotografías, donde se mostró la aplicación de las matemáticas tanto en la construcción como en las artes, encontrándose entre estas, los Teselados del Imperio árabe, siendo el momento idóneo para que la docente explicara las generalidades del proyecto que construirían más adelante.

Con el propósito de que los estudiantes dedujeran las características constructivas de un Teselado, la docente solicitó que observaran minuciosamente las fotografías que ella estaba proyectando vía *power point*, poniendo especial atención en los detalles de construcción del Teselado, a fin de que, posteriormente en plenaria, discutieran sus observaciones. Al respecto, Roberto señaló “tienen patrones repetitivos”; Edgar, “las figuras están ordenadas en secuencia”; el resto del grupo indicó “que lo componían distintas figuras con colores diferentes”, “que no estaban encimadas y que no había espacios entre ellas”.

Posteriormente, se inició con la construcción del Teselado, considerando las características constructivas identificadas previamente. Para llevar a cabo esta actividad y las siguientes, fue necesario trasladar el grupo a otra aula más amplia, pues el salón de clases no contaba con el mobiliario adecuado que permitiera trabajar adecuadamente.

Para comenzar con dicha construcción, la docente presentó al grupo, el listado de los 11 equipos y sus respectivos integrantes. Una vez que los estudiantes identificaron a su equipo y miembros, la docente les otorgó 5 minutos para reunirse y elegir sus roles. Al concluir con la designación, se presentaron al grupo los acuerdos de convivencia; además, el listado de materiales que se le estaba entregando a cada equipo.

A los líderes de cada equipo, se les entregaron los materiales necesarios para construir el Teselado, los cuales consistieron en un pliego de cartulina de 65 *cm* de ancho por 50 *cm* de largo, hojas de diferentes colores, tijeras, dos barras de pegamento, dos reglas de 30 *cm* de longitud, un plumón para pizarrón, un cuaderno tamaño profesional y etiquetas de identificación para ser utilizadas, tanto en los cuadernos como en la ropa para mostrar los roles (*cf.* Figura 2.3).

A fin de favorecer el aprendizaje e incrementar la creatividad, cuando fue necesario, al inicio de las sesiones de construcción del Teselado, los estudiantes realizaron ejercicios de Gimnasia Cerebral (Ibarra, 2007, p.10) (*cf.* Figura 2.4).

Aunque todos los Teselados satisficieron las demandas de construcción propuestas e identificadas en la fase 2, estas fueron muy diversas y peculiares. A continuación, se describen y muestran algunas de ellas. Además, en el contexto de la pregunta de investigación, se



Figura 2.3 Etiquetas de identificación de los roles en el equipo

darán a conocer los detalles de ese aprendizaje.

Equipo 1 (cf. Figura 2.5). Desde el punto de vista de la autora, este Teselado es el más artístico; en la disposición de las figuras, se puede apreciar la presencia de tres rosas de diferentes colores: dos rojas y una anaranjada. En su construcción se utilizaron 206 figuras, 42 irregulares, y 164 triángulos de diferentes tipos, equiláteros, isósceles y escalenos. Para evitar dejar espacios entre las figuras, el equipo las delineó con plumón, semejando juntas de pisos cubiertos con loseta.

Después de que el Teselado quedó construido, se solicitó al equipo que midiera con una regla de 30 cm todas las longitudes de las figura geométricas y las registraran. Una vez que el equipo tuvo las mediciones, se les solicitó que representaran algebraicamente a cada una de ellas. Llegados a este punto, la docente señaló que deberían haber usado el mismo tipo



Figura 2.4 Implementación de ejercicios de Gimnasia Cerebral

de literal, pues usaron indistintamente a minúscula (a) y A mayúscula (A); lo mismo con las otras literales. Las representaciones que resultaron de este proceso se muestra en (2.1)

$$\begin{aligned} a &= 7 \text{ cm}, & b &= 2 \text{ cm}, & c &= 3 \text{ cm}, & d &= 5 \text{ cm}, \\ e &= 8 \text{ cm}, & f &= 9 \text{ cm}, & g &= 11 \text{ cm}, & i &= 13 \text{ cm}, & j &= 1 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Mediante este proceso, se asociaron las representaciones geométricas a las expresiones algebraicas, fomentando la verbalización del lenguaje algebraico.

Durante el proceso del establecimiento del lenguaje algebraico, el equipo expresó a la docente la inquietud de que no tendrían letras suficientes para representar a todas las longitudes; para solucionarlo, con ayuda de la docente, identificaron aquellas longitudes que podrían ser proporcionales para que mediante esa relación pudieran representar términos algebraicos. Al respecto, las representaciones algebraicas fueron: $2b=4 \text{ cm}$, asociando que $b= 2 \text{ cm}$; por lo tanto, 4 cm es el doble de b , y $4b=8 \text{ cm}$. Así mismo, identificaron



Figura 2.5 Teselado del equipo 1

proporcionalidades entre otros diferentes términos algebraicos; por ejemplo, de (2.1) $e=8\text{ cm}$, entonces $e=4b$. Esta asociación se hizo con todos los trazos del Teselado. Mediante esta actividad, los estudiantes entendieron la utilidad de usar letras para representar cualquier cantidad, longitud en este caso; además, aprendieron que el coeficiente que acompaña a un término algebraico representa la relación entre éste y otra cantidad. También, entendieron que escribir un punto entre dos variables representa una multiplicación, igual que si se quita el punto y se dejan las dos variables juntas. En suma aprendieron *in actio vitae* el significado del lenguaje semiótico.

Para continuar con el establecimiento del lenguaje algebraico, se solicitó al equipo que expresaran algebraicamente el perímetro total del Teselado; para ello, emplearon los términos algebraicos que habían propuesto anteriormente en (2.1). Precisa mencionar que para realizar esta actividad, el equipo tenía los conocimientos previos del cálculo de perímetros, además de que ya asociaban el término algebraico con una longitud; en consecuencia, representaron el perímetro como una adición de términos:

$$\begin{aligned} \text{perímetro} = & 2b + 2b + 2b + d + f + g + 2d + 2c + d + a + b + e + g \\ & + c + d + h + 2d + c + b + d + d + e + d + g + j + 2b + 2c + 2b \\ & + 2c + a + c + d + a + 2b + j + e + d + 2e \end{aligned} \quad (2.2)$$

Utilizando esta representación, se abordó la operación suma, reduciendo términos; en este proceso, el equipo identificó aquellos términos semejantes y después los sumó. Para realizar esta operación, se recurrió al significado de la representación algebraica de las longitudes; así, el equipo dedujo que se tendrían que sumar aquellas letras que representaban longitudes iguales. Como resultado de realizar la suma algebraica, reduciendo términos, el equipo proporcionó la siguiente ecuación:

$$\text{perímetro} = 14b + 12d + f + 3g + 9c + 3a + 5e + 2j \quad (2.2a)$$

Con la finalidad de que el equipo continuara practicando las sumas algebraicas, se les solicitó que, mediante el mismo procedimiento, obtuvieran los perímetros de la rosa roja superior (cf. Figura 2.6), de la rosa roja inferior (cf. Figura 2.7) y de la rosa naranja (cf.

Figura 2.8), obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \text{perímetro rosa roja superior} &= d + d + b + c + a + 2c + a + 2c \\
 &\quad + d + 2c + c + d + 2b + c + c \\
 &\quad + d + d + b
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Después de reducir términos semejantes obtuvieron la ec. (2.3a)

$$\text{perímetro rosa roja superior} = 6d + 4b + 10c + 2a \tag{2.3a}$$

Por lo que toca a la otra rosa roja

$$\begin{aligned}
 \text{perímetro rosa roja inferior} &= 2c + b + b + 2c + 2c \\
 &\quad + b + c + b + c + c + 2b
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Una vez realizada la reducción de términos semejantes obtuvieron la ec. (2.4a)

$$\text{perímetro rosa roja inferior} = 9c + 6b \tag{2.4a}$$

Asimismo, emplearon los mismos procedimientos en la tercera rosa

$$\text{perímetro rosa naranja} = 2b + c + 2c + 2c + c + d + a + b + j + 2b \tag{2.5}$$

$$\text{Perímetro rosa naranja} = 5b + 6c + d + a + j \tag{2.5a}$$

Las reducciones se realizaron sumando términos semejantes, pues en estas ecuaciones no había signos negativos.



Figura 2.6 Rosa roja superior del Teselado del equipo 1

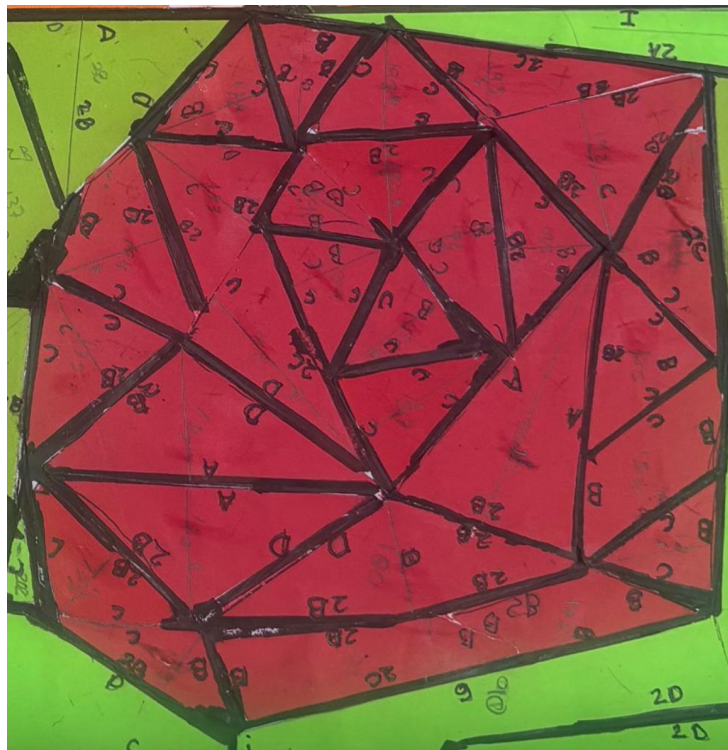


Figura 2.7 Rosa roja inferior del Teselado del equipo 1

Como resultado de realizar dichas operaciones, el equipo asoció los términos algebraicos lineales al cálculo de los perímetros; dicho conocimiento les ayudó para que, más adelante,

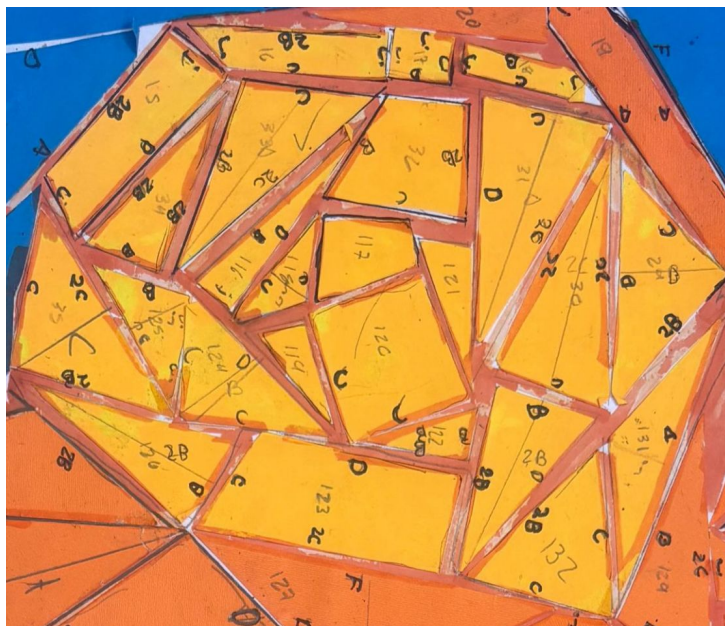


Figura 2.8 Rosa naranja del Teselado del equipo 1

podieran vincular los términos algebraicos cuadráticos y cúbicos con las áreas y volúmenes, respectivamente; así, en la suma y resta de polinomios aprendieron a diferenciarlos y a agruparlos correctamente.

Posterior a la operación adición, el equipo desarrolló la multiplicación algebraica; en ésta, se emplearon los conocimientos previos del cálculo de áreas y volúmenes. Con el propósito de trabajar la multiplicación, la docente solicitó al equipo obtener algebraicamente el área de todas las figuras geométricas; para ello, se emplearon las mismas relaciones y métodos de un cálculo aritmético. Siguiendo este procedimiento, el equipo sustituyó en las relaciones de área los términos algebraicos y los operaron, poniendo así en práctica la multiplicación algebraica.

Para calcular las áreas regulares como el triángulo, el equipo trazó y midió sus alturas; enseguida, asociaron estas medidas con algunas representaciones algebraicas ya establecidas. Cuando todas las longitudes estuvieron asociadas con letras, se sustituyeron los valores dados en la ecuación (2.1), empleando las fórmulas de área incluidas en su formulario (*cf.* Figura 2.9), como ejemplo de ese proceso se muestran las sustituciones realizadas para obtener las áreas de las Figuras (2.10), paneles (a), (b) y (c)

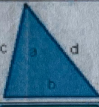
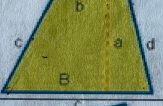
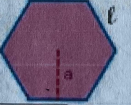
Perímetros y áreas de los polígonos			
Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Triángulo		P = Suma de los lados $P = b + c + d$	$A = \frac{b \cdot a}{2}$ $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p = semiperímetro
Cuadrado		$P = 4 \cdot a$	$A = a^2$
Rectángulo		$P = 2(b + a)$	$A = b \cdot a$
Rombo		$P = 4 \cdot a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide		$P = 2(b + c)$	$A = b \cdot a$
Trapezio		$P = B + c + b + d$	$A = \frac{B+b}{2} \cdot a$
Trapezoide		$P = a + b + c + d$	A = Suma de las áreas de los dos triángulos
Polígono regular		$P = n \ell$	$A = \frac{1}{2} P \cdot a$

Figura 2.9 Formulario empleado por el equipo 1

$$\text{área del triángulo } 10 = \frac{2c \cdot a}{2} = \frac{2ca}{2} = ca \quad (2.6)$$

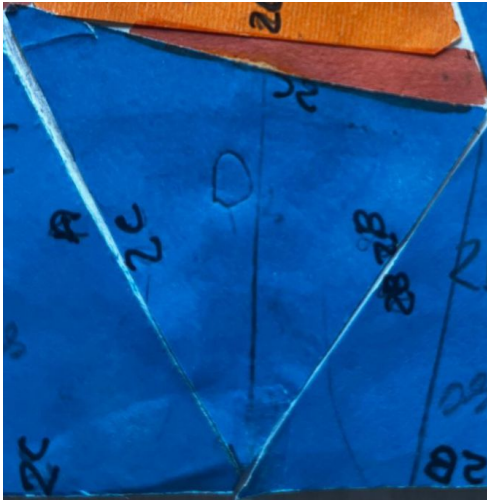
$$\text{área del triángulo } 59 = \frac{2b \cdot 2c}{2} = \frac{4bc}{2} = 2bc \quad (2.7)$$

$$\text{área del triángulo } 53 = \frac{2b \cdot b}{2} = \frac{2b^2}{2} = b^2 \quad (2.8)$$

Utilizaron el mismo procedimiento para obtener el área del rectángulo regular que contenía el Teselado. Como resultado de esta operación, el equipo obtuvo la siguiente expresión:

$$\text{área del rectángulo} = \text{base} \times \text{altura} = a \cdot f = af \quad (2.9)$$

Precisa mencionar que este equipo primero trabajó con las figuras regulares; una vez que se comprendió el procedimiento, realizaron la sustitución de términos algebraicos en los cálculos de las figuras irregulares; por ejemplo, para obtener el área total de la figura



(a) triángulo 10



(b) triángulo 59



(c) triángulo 53

Figura 2.10 Áreas de los triángulos

100 (cf. Figura 2.11), el equipo la descompuso en figuras regulares y calculó sus áreas; posteriormente, las sumó tal como se muestra en la ecuación (2.10). Debe hacerse notar que el equipo trazó una la línea media del triángulo equilátero para identificar la altura, y no se trata de otra división. Durante el proceso de descomposición de figuras irregulares, el equipo tuvo la guía y asesoría de la docente.



Figura 2.11 :Descomposición de áreas de la figura irregular 100, realizado por el equipo 4

área de la figura 100 = área triángulo 1 + área triángulo 2 + área triángulo 3

$$\begin{aligned} \text{área triángulo 1} &= \frac{2c \cdot d}{2} = \frac{2cd}{2} = cd \\ \text{área triángulo 2} &= \frac{e \cdot 2b}{2} = \frac{2eb}{2} = eb \\ \text{área triángulo 3} &= \frac{e \cdot 2b}{2} = \frac{2eb}{2} = eb \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\text{área de la figura 100} = cd + eb + eb = cd + 2eb$$

Con la finalidad de que este equipo practicara la suma algebraica, reduciendo términos algebraicos, la docente les solicitó que obtuvieran el área total de las rosas. Para realizarlas las adiciones, el equipo infirió que se trataba de un procedimiento igual al utilizado en la ecuación (2.10); en consecuencia, expresaron el área total como la siguiente suma de

términos algebraicos

$$\begin{aligned}
 \text{área de rosa roja superior} &= cj + bc + 2b^2 + 2bc + b^2 + b^2 + bc + b^2 \\
 &\quad + b^2 + c^2 + b^2 + ac + ac + dc + bc + bj \\
 &\quad + b^2 + b^2 + bc + bc + b^2 + bc + bc + b^2 \\
 &\quad + bc + bj + bj
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

y después de reducir téminos semenjantes obtuvieron:

$$\text{área de la rosa roja superior} = cj + 10bc + 11b^2 + c^2 + 2ac + dc + 3bc \tag{2.11a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{área de rosa roja inferior} &= \frac{dc}{2} + ab + \frac{db}{2} + dc + \frac{cj}{2} + \frac{c^2}{2} + b^2 \\
 &\quad + bc + \frac{bc}{2} + bc + dc + bc + bj + 2b^2 \\
 &\quad + bc + cj + db + bj + c^2 + \frac{ca}{2} + \frac{cj}{2} \\
 &\quad + bj + \frac{cj}{2} + \frac{bc}{2} + bc + b^2 + db + \frac{c^2}{2} \\
 &\quad + \frac{dc}{2}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

o bien

$$\begin{aligned}
 \text{área de la rosa inferior} &= 3dc + ab + \frac{5db}{2} + \frac{5cj}{2} + 2c^2 + 4b^2 + 6bc + \\
 &\quad 3bj + \frac{ca}{2}
 \end{aligned} \tag{2.12a}$$

Para el caso de la rosa naranja

$$\begin{aligned}
 \text{área rosa naranja} &= dc + db + ba + b^2 + 2b^2 + db + d^2 + bj + bc \\
 &\quad + bj + b^2 + j^2 + c^2 + dc
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Reduciendo términos semejantes obtuvieron

$$\begin{aligned}
 \text{área de rosa naranja} &= 2dc + 2db + ba + 4b^2 + d^2 + dj + bc \\
 &\quad + bj + j^2 + c^2
 \end{aligned} \tag{2.13a}$$

Al obtener las áreas, este equipo identificó y comprendió el uso de las leyes de los exponentes, específicamente en la operación producto. Observaron que en figuras geométricas donde el área se determina mediante la multiplicación de dos longitudes iguales, representadas con la misma literal, los exponentes se suman. Asimismo, comprendieron que al multiplicar dos longitudes diferentes, el resultado de la operación se expresa con dos letras distintas. Además, al trabajar con la adición de áreas, el equipo identificó aquellos términos algebraicos que no eran semejantes; es decir, no tenían la misma letra ni el mismo exponente.

Después de trabajar con áreas, el equipo continuó con la multiplicación algebraica, ahora aplicada a volúmenes. Cabe mencionar que se imprimió en 3D una réplica del Teselado para trabajar con una tercera dimensión, la altura, cuyo valor fue de 1 cm; por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (2.1), la representación algebraica que le correspondió fue $j=1 \text{ cm}$. Usando la tercera dimensión, el equipo desarrolló la multiplicación algebraica correspondiente al cálculo de volúmenes, ampliando el procedimiento empleado en el cálculo de áreas. Algunas de las expresiones obtenidas fueron:

$$\text{volumen del prisma triangular 10} = \frac{2c \cdot a \cdot j}{2} = \frac{2caj}{2} = caj \quad (2.14)$$

$$\text{volumen del prisma triangular 59} = \frac{2b \cdot 2c \cdot j}{2} = \frac{4bcj}{2} = 2bcj \quad (2.15)$$

$$\text{volumen del prisma triangular 53} = \frac{2b \cdot b \cdot j}{2} = \frac{2b^2j}{2} = b^2j \quad (2.16)$$

$$\text{volumen del prisma rectangular} = a \cdot f \cdot j = afj \quad (2.17)$$

La última operación realizada por este equipo fue la sustracción algebraica; en esta, se utilizaron las ecuaciones (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.11), (2.12) y (2.13). El procedimiento consistió en la extracción de figuras del Teselado; esto con la finalidad de que el equipo asociara la falta de figuras con la operación sustracción, y le diera cuerpo asociando el signo negativo al término algebraico que representaba la figura extraída. Para realizar esta operación, la docente comenzó retirando algunas figuras geométricas que pertenecían al

perímetro del Teselado; en seguida, solicitó al equipo que reescribieran la ecuación (2.2), pero teniendo en cuenta las consideraciones sobre la resta descritas líneas arriba.

Al representar el perímetro, el equipo empleó los mismos términos algebraicos utilizados en la ecuación (2.2), pero cambió el signo postivo por negativo en los términos correspondientes a las longitudes de las figuras que fueron retiradas. Así, obtuvieron la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{perímetro} = & 2b + 2b - 2b + d - f - g - 2d + 2c + d + a + b + e + g \\ & + c + d + 2d + c + d - d - d + b + e + d + g + 2b \\ & - 2c + 2b + 2c + a + c + j + d - a + 2b - j + e + d - 2e \end{aligned} \quad (2.18)$$

Aplicando la reducción de términos semejantes en ecuación la (2.18), el equipo realizó las sumas y restas algebraicas correspondientes para simplificar la expresión, llegando a la siguiente ecuación

$$\text{perímetro} = -f + 10b + g + 5d + 5c + a + e \quad (2.18a)$$

Con la finalidad de que el equipo continuara practicando las restas algebraicas, se empleó el mismo procedimiento utilizado en el perímetro, pero en las ecuaciones del cálculo de áreas de las rosas, ecs (2.11), (2.12) y (2.13), obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{área de rosa roja superior} = & cj + bc - 2b^2 + 2bc + b^2 \\ & - b^2 + bc + b^2 + b^2 + c^2 + b^2 \\ & + ac - ac + dc + bc - bj + b^2 + b^2 + bc \\ & + bc + b^2 - bc + bc + b^2 + bc - bj + bj \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{área de la rosa roja superior} = cj + 8bc + 5b^2 + c^2 + dc - bj \quad (2.19a)$$

Al realizar operaciones de suma y resta algebraicas, mediante el retiro de figuras, este equipo aprendió que dos o más términos algebraicos se suman cuando tienen el mismo signo, ya sea positivo o negativo; además, comprendieron que si los términos algebraicos tienen signos diferentes, se restan, predominando el signo de aquel que tenga mayor valor

absoluto.



Figura 2.12 Teselado del equipo 2

Equipo 2 (cf. Figura 2.12). En este Teselado de 22 figuras, el elemento central es un cuadrado morado, de 21.5 cm de lado, girado 45° con respecto a la horizontal; el resto del mosaico se completó con rectángulos tanto azules como rojos, triángulos isósceles y rectos, así como trapezios con la misma característica, distribuidos de forma simétrica con respecto a un eje vertical a la mitad del Teselado, mostrando una estructura estética.

Este equipo aprendió el lenguaje algebraico, empleando el mismo procedimiento que utilizó el equipo anterior. Las mediciones de las longitudes fueron:

$$\begin{aligned}
 a &= 11 \text{ cm}, & f &= 25.5 \text{ cm}, & g &= 14 \text{ cm}, & h &= 7.5 \text{ cm}, & i &= 13 \text{ cm}, \\
 j &= 10 \text{ cm}, & k &= 16 \text{ cm}, & l &= 3 \text{ cm}, & m &= 5.5 \text{ cm}, & n &= 7 \text{ cm}, \\
 o &= 6.5 \text{ cm}, & p &= 4.5 \text{ cm}, & s &= 5 \text{ cm}, & t &= 8 \text{ cm}, & v &= 18 \text{ cm}, \\
 u &= 6 \text{ cm}, & x &= 1 \text{ cm}, & z &= 37 \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Con la finalidad de representar términos algebraicos, acompañados de coeficientes diferentes de uno, al igual que en el equipo anterior, se identificaron aquellas longitudes proporcionales; por ejemplo, en la ecuación (2.20) aparece $n = 7\text{cm}$; luego entonces, el doble es $2n = 14\text{cm}$. A este equipo también se le realizó la misma corrección respecto a la escritura de las literales, ya que en su representación utilizaron letras mayúsculas y minúsculas indistintamente. En cuanto al desarrollo de las operaciones algebraicas, este equipo también empleó procedimientos similares a los del equipo anterior; a saber, expresó el perímetro del Teselado como una suma algebraica y redujo términos semejantes para sumarlos. Al concluir este proceso, se obtuvieron como resultado las ecuaciones (2.21) y (2.21a).

$$\begin{aligned}
 \text{perímetro} &= c + h + c + 2n + b + m + i + b + 2n \\
 &+ c + h + c + 2n + k + l + l + b + 2n
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Después de reducir los términos semejantes obtuvieron la siguiente ec.

$$\text{perímetro} = 4c + 2h + 8n + 3b + k + 2l + m + i + k \tag{2.21a}$$

Posteriormente, aplicando los procedimientos utilizados en el cálculo de áreas y volúmenes, el equipo realizó multiplicaciones algebraicas. Algunas de las ecuaciones resultantes de este proceso fueron:

$$\text{área del cuadrado central} = c \cdot c = c^2 \tag{2.22}$$

$$\text{área del rectángulo azul marino derecho} = i \cdot h = ih \tag{2.23}$$

$$\text{área del triángulo amarillo neón} = \frac{2n \cdot c}{2} = \frac{2nc}{2} = nc \quad (2.24)$$

$$\text{área del trapecio amarillo neón} = \frac{(m+k)m}{2} = \frac{m^2}{2} + \frac{km}{2} \quad (2.25)$$

Precisa mencionar que durante el trabajo con la ecuación (2.25), el equipo tuvo problemas al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma para eliminar los paréntesis, y así obtener algebraicamente el área de los trapecios. A fin de solucionar esta problemática, la docente guió al equipo, recordándoles el procedimiento empleado en aritmética y animándolos a aplicarlo al álgebra.

Debido a que este equipo trabajó con figuras regulares, no realizó la descomposición de figuras irregulares, tal como lo hizo el equipo anterior; sin embargo, con el objeto de que practicasen la adición algebraica, la docente les solicitó que sumaran áreas por secciones; para ello, dividieron el Teselado en dos partes iguales mediante una línea vertical (*cf.* Figura 2.13), obteniendo como resultado la ec. (2.26) y su correspondiente reducción, mostrada en la ecuación (2.26a)

$$\begin{aligned} \text{área sección izquierda} = & nc + nc + 2uh + ic + nc + nc + \\ & \frac{3kl + 3lc}{2} + \frac{3lh}{2} + \frac{lh}{2} + \frac{hc + hd}{2} + c^2 \\ & + \frac{m^2 + km}{2} + \frac{al + 3l^2}{2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

o bien, después de reducir términos semejantes

$$\begin{aligned} \text{área sección izquierda} = & 4nc + 2uh + ic + 2lh + c^2 + \\ & \frac{3kl + 3lc}{2} + \frac{hc + hd}{2} + \frac{m^2 + km}{2} + \frac{al + 3l^2}{2} \end{aligned} \quad (2.26a)$$

Es importante mencionar que en estos ejercicios de adición, este equipo enfrentó dificultades para resolver operaciones con términos algebraicos fraccionarios. Con la finalidad de ayudarles a superar este obstáculo, la docente los asesoró, y guió durante el proceso. Además, al trabajar con este tipo de expresiones, el equipo identificó y aprendió que existen casos en los que no se pueden sumar todos los términos algebraicos; para llegar a esta



Figura 2.13 Sección izquierda del Teselado

conclusión, asociaron el área de las figuras con su representación algebraica. De esta manera, el equipo infirió que no se podían sumar porque se trataba de áreas diferentes.

Usando el mismo procedimiento que el del equipo anterior, se realizaron las multiplicaciones algebraicas aplicadas a volúmenes, empleando como altura x en la ecuación (2.20). El resultado de este procedimiento se proporciona en las ecuaciones (2.27), (2.28), (2.29) y (2.30)

$$\text{volumen del prisma triangular} = \frac{2n \cdot c \cdot x}{2} = \frac{2ncx}{2} = ncx \quad (2.27)$$

$$\text{volumen del prisma rectangular} = c \cdot c \cdot x = c^2x \quad (2.28)$$

$$\text{volumen del prisma rectangular} = i \cdot h \cdot x = ihx \quad (2.29)$$

$$\text{volumen prisma trapezoidal} = \frac{(m^2 + km)x}{2} = \frac{m^2x + kmx}{2} \quad (2.30)$$

Al concluir con la multiplicación algebraica, este equipo aprendió a emplear las leyes de los signos. Además, aplicó la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma para la eliminación de los paréntesis.

Igual que con el equipo anterior, la sustracción algebraica se realizó retirando piezas del Teselado 3D (cf. Figura 2.14 y Figura 2.15). El resultado de este proceso se muestra en las ecuaciones (2.31) y (2.32), y la reducción de términos semejantes se pone de manifiesto en las ecuaciones (2.31a) y (2.32a)

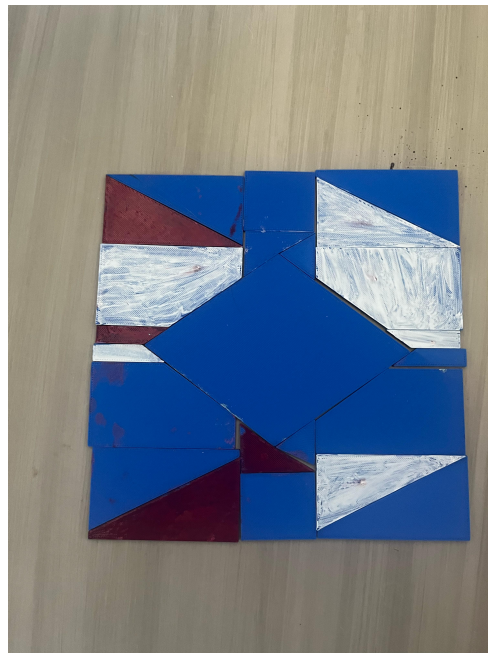


Figura 2.14 Teselado impreso en 3D

$$\begin{aligned} \text{perímetro} &= c + h + c - 2n + b + m + i + b - 2n \\ &+ c - h + c + 2n + k + l - l - b - 2n \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\text{Perímetro} = 4c - 4n + b + m + i + k \quad (2.31a)$$

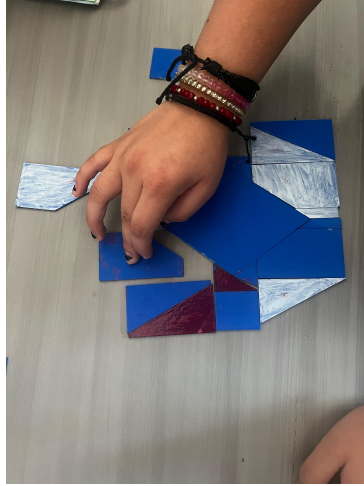


Figura 2.15 Retiro de piezas del Teselado 3D

$$\begin{aligned}
 \text{área sección izquierda} &= nc + nc - 2uh + ic - nc - nc \\
 &\quad - \left(\frac{3kl + 3lc}{2} \right) + \frac{3lh}{2} + \frac{lh}{2} + \frac{hc + hd}{2} \\
 &\quad + c^2 + \frac{m^2 + km}{2} + \frac{al + 3l^2}{2}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 \text{área sección izquierda} &= -2uh + ic + 2lh + c^2 + \left(\frac{-3kl - 3lc}{2} \right) + \\
 &\quad \frac{hc + hd}{2} + \frac{m^2 + km}{2} + \frac{al + 3^2}{2}
 \end{aligned} \tag{2.32a}$$

Tras concluir con este procedimiento, este equipo aprendió a asociar la resta algebraica mediante el retiro de figuras. Asimismo, identificó que en el caso de las restas con fracciones, todos los términos algebraicos que la integran cambian de signo positivo al negativo, cuando antecede un signo negativo a la fracción.

Equipo 3 (*cf.* Figura 2.16). Este Teselado se construyó con 44 figuras. El elemento central esta constituido por 6 rombos que conforman una estrella; el resto del mosaico esta cubierto por 38 figuras geométricas entre las que se encuentran rombos, triángulos rectángulos e isósceles, trapecios, rectángulos, cuadrados y figuras irregulares.

Para desarrollar e implementar el lenguaje algebraico, así como resolver sumas, restas y multiplicaciones algebraicas, este equipo empleó los mismos procedimientos que aquellos utilizados por los dos equipos anteriores; a través de éstos, dio significado al lenguaje

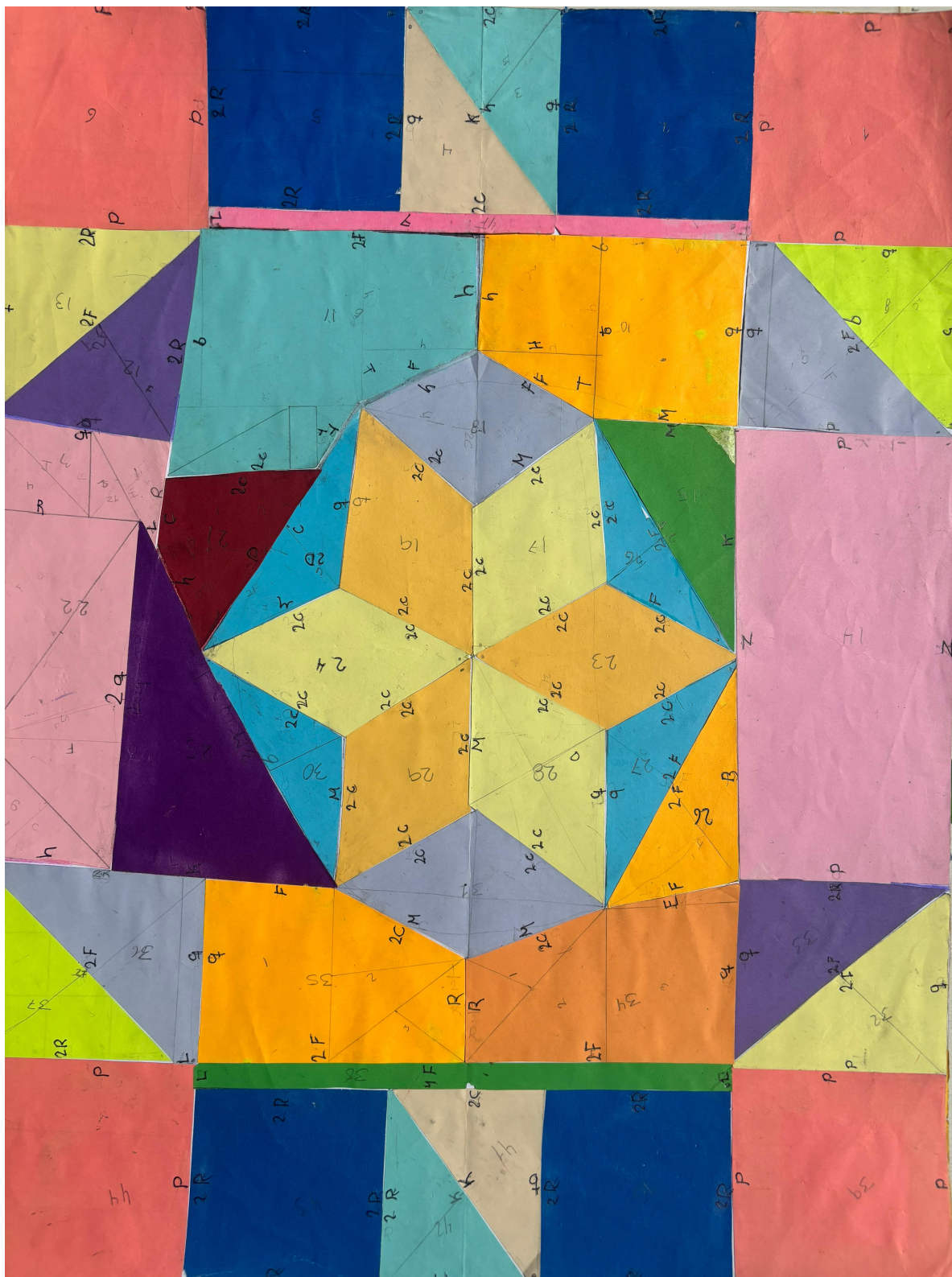


Figura 2.16 Teselado del equipo 3

semiótico; además, aprendió a resolver operaciones algebraicas.

El lenguaje algebraico implementado por este equipo se muestra en la expresión (2.33). Asimismo, este equipo realizó correcciones en la escritura de las literales, tal como lo hicieron los equipos anteriores, ya que inicialmente utilizaron letras mayúsculas y minúsculas de forma indistinta.

$$\begin{aligned}
 b &= 13 \text{ cm}, & c &= 4 \text{ cm}, & 2c &= 8 \text{ cm}, & f &= 7 \text{ cm}, & 2f &= 14 \text{ cm}, \\
 4f &= 28 \text{ cm}, & j &= 15 \text{ cm}, & k &= 12 \text{ cm}, & 2k &= 24 \text{ cm}, & l &= 1 \text{ cm}, \\
 z &= 23 \text{ cm}, & m &= 7.5 \text{ cm}, & 3m &= 22.5 \text{ cm}, & p &= 11 \text{ cm}, & q &= 9 \text{ cm}, \\
 2q &= 18 \text{ cm}, & r &= 5 \text{ cm}, & 2r &= 10 \text{ cm}, & h &= 6 \text{ cm}, & t &= 3 \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

En este equipo, se destaca el procedimiento realizado para obtener el área total de la estrella (*vide infra*), la cual se aprecia al centro del Teselado, además de aquellas irregulares como la figura (2.17), extraída de la parte inferior del Teselado. El cálculo de las áreas se muestra en las ecuaciones (2.34a) y (2.36a)

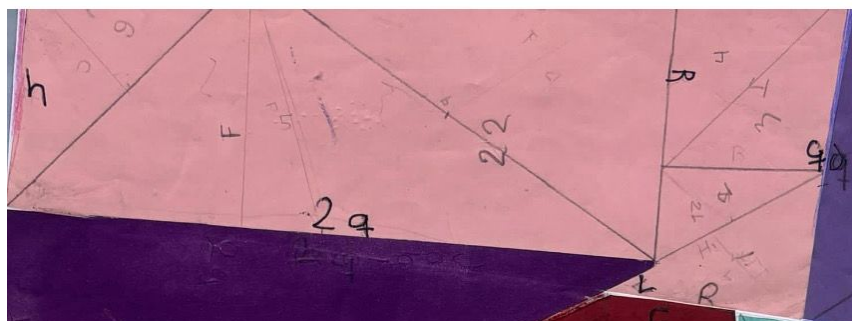


Figura 2.17 Descomposición de figuras irregulares, realizado por el equipo 3

$$\begin{aligned}
 \text{área de la estrella} &= \text{área figura 17} + \text{área figura 19} + \text{área figura 24} \\
 &\quad + \text{área figura 29} + \text{área figura 28} + \text{área figura 23}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Después de la sustitución de términos algebraicos se obtiene

$$\text{área de la estrella} = 2cf + 2cf + 2cf + 2cf + 2cf + 2cf = 12cf \tag{2.34a}$$

Además, este equipo realizó restas algebraicas empleando el mismo método de retiro de piezas utilizado por los equipos anteriores

$$\text{área de la estrella} = 2cf - 2cf + 2cf - 2cf + 2cf + 2cf \quad (2.35)$$

Reduciendo términos semejantes llegaron a

$$\text{área de la estrella} = 4cf \quad (2.35a)$$

Para obtener el área de la Figura 2.17, la descompusieron en siete triángulos; posteriormente, sumaron sus áreas.

$$\begin{aligned} \text{área figura 22} &= \text{área triángulo 1} + \text{área triángulo 2} + \text{área triángulo 3} \\ &+ \text{área triángulo 4} + \text{área triángulo 5} + \text{área triángulo 6} \\ &+ \text{área triángulo 7} \end{aligned} \quad (2.36)$$

También, después de la sustitución y posterior reducción de términos se llega a

$$\begin{aligned} \text{área figura 22} &= \frac{cr}{2} + \frac{ct}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{ct}{2} + cp + \frac{h^2}{2} + fq \\ &= cr + ct + cp + \frac{h^2}{2} + fq \end{aligned} \quad (2.36a)$$

Es importante mencionar que este equipo aprendió a reducir aquellos términos fraccionarios semejantes y aplicaron las leyes de los exponentes.

Equipo 4 (cf. Figura 2.18). Desde la perspectiva de la autora, en este Teselado se observan patrones de repetición geométricos compuestos principalmente por triángulos y cuadrados de colores brillantes, cubriendo toda la superficie sin dejar espacios en blanco. En su construcción se pueden apreciar 20 triángulos rectángulos, 4 rectángulos, 1 cuadrilátero, considerado por el equipo como un cuadrado rotado, 3 trapecios isósceles, 3 triángulos isósceles, 3 trapecios rectángulos y 2 cuadrados.

Posterior a la construcción del Teselado, este equipo comprendió el lenguaje algebraico y resolvió operaciones algebraicas, empleando los mismos procedimiento que aquellos utilizados por los equipos anteriores. Las representaciones algebraicas resultantes de este proceso



Figura 2.18 Teselado del equipo 4

se muestran en (2.37). En este equipo también se realizaron correcciones en la escritura de las literales, unificando el uso de letras minúsculas para mantener consistencia en la notación algebraica.

$$\begin{aligned}
 a &= 19.7 \text{ cm}, & b &= 7 \text{ cm}, & 2b &= 14 \text{ cm}, & c &= 9 \text{ cm}, & d &= 13.5 \text{ cm}, \\
 e &= 8.5 \text{ cm}, & f &= 18 \text{ cm}, & h &= 17 \text{ cm}, & i &= 8 \text{ cm}, & k &= 16 \text{ cm}, \\
 s &= 11.5 \text{ cm}, & u &= 2 \text{ cm}, & 2u &= 4 \text{ cm}, & v &= 10 \text{ cm}, & w &= 37 \text{ cm}, \\
 x &= 14.5 \text{ cm}, & y &= 10.5 \text{ cm}, & z &= 11 \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Durante la solución de operaciones algebraicas, este equipo se destacó por obtener el área total del Teselado, empleando por iniciativa propia dos métodos distintos: la aplicación de la fórmula para calcular el área de un rectángulo (2.38) y la suma del área total de las figuras (2.39). Para aplicar la fórmula de área, este equipo consideró las dimensiones del rectángulo como se muestra en la Figura 2.19

$$\begin{aligned}
 \text{Largo del Teselado} &= a + d + s + b + v \\
 \text{Ancho del Teselado} &= y + i + 2u + 2u + c + e \\
 \text{Área del Teselado} &= (a + d + s + b + v)(y + i + 4u + c + e)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Después de realizar la multiplicación expresada (2.38) y reducir términos semejantes, se obtiene la ecuación (2.38a)

$$\begin{aligned}
 \text{área del Teselado} &= ay + ai + 4au + ac + ae + dy + di \\
 &\quad + 4du + dc + de + sy + si + 4su + 2bs \\
 &\quad + cs + es + by + bi + 4bu + bc + be \\
 &\quad + vy + vi + 4vu + 2bv + cv + ev
 \end{aligned} \tag{2.38a}$$

Tras obtener la ecuación (2.38a), este equipo aprendió a multiplicar algebraicamente, relacionando el procedimiento empleado en aritmética con el algebraico, además; asoció y aprendió que, si el resultado de un producto se expresaba con dos o más letras, representaba longitudes diferentes.

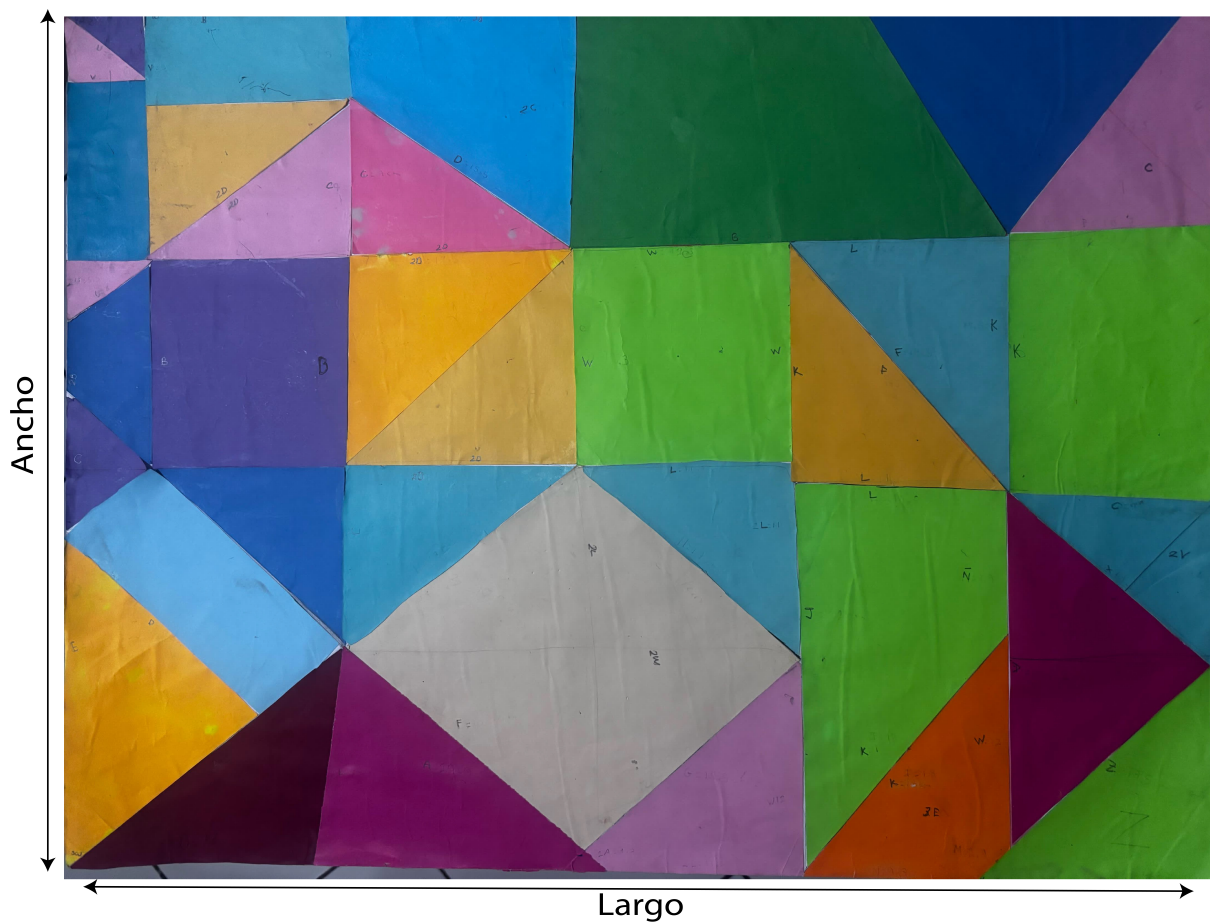


Figura 2.19 Dimensiones del Teselado, equipo 4

Aplicando el segundo método llegaron a

$$\begin{aligned}
 \text{área del Teselado} = & \frac{ce}{2} + de + wl + z^2 + 2u^2 + \frac{ze}{2} + \frac{fe}{2} \\
 & + ku + \frac{wl}{2} + \frac{jl}{2} + \frac{ce}{2} + \frac{fb}{2} + 2bu + 2bu \\
 & + 4u^2 + zu + zu + wu + wu + bv + \frac{v^2}{2} \\
 & + \frac{kc + mc}{2} + uv + \frac{cl}{2} + \frac{el}{2} + \frac{fz}{2} + lb \\
 & + \frac{bd}{2} + \frac{uv}{2} + \frac{uv}{2} + lv + ua + sc + vs \\
 & + c^2 + \frac{wl}{2}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Precisa mencionar que este equipo pudo representar fracciones de la multiplicación algebraica y potencias; empero, requirió apoyo de la docente para reducir los términos semejantes de

la ecuación (2.39), ya que, al igual que los otros equipos, tuvieron dificultades para realizar operaciones con términos fraccionarios. Después de realizar el procedimiento para obtener la ecuación (2.39a), este equipo aprendió que los términos algebraicos eran semejantes cuando se representaban con la misma letra y exponente; por lo tanto, si cumplían con esas dos condiciones, podrían sumarlos. El resultado de estas acotaciones quedó plasmado en la ecuación (2.39a)

$$\begin{aligned}
 \text{área del Teselado} = & 2wl + ce + z^2 + 6u^2 + \frac{ze}{2} + \frac{fe}{2} + ku + \frac{jl}{2} \\
 & + 4bu + 2zu + 2wu + bv + \frac{fb}{2} + de \\
 & + \frac{kc + mc}{2} + 2uv + \frac{v^2}{2} + \frac{cl}{2} + \frac{el}{2} + \frac{fz}{2} + lb \\
 & + \frac{bd}{2} + lv + ua + sc + vs + c^2
 \end{aligned} \tag{2.39a}$$

Posteriormente, la docente solicitó al equipo que realizara la sustracción algebraica utilizando el retiro de piezas del perímetro del teselado, tal como se hizo con los equipos anteriores. Este equipo representó las figuras que habían sido retiradas del teselado como términos algebraicos negativos dentro de la expresión previamente establecida para calcular el perímetro, confírase a la ecuación (2.40). Después, realizaron la reducción de términos semejantes, y se llegó a la ecuación. (2.40a)

$$\begin{aligned}
 \text{perímetro} = & -2e + a - l + k + f + w + 2d + c - l + 4d + 2e \\
 & - 4w + 2x + a - l + d - e + 2c - w + 3l + h
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Después de reducir términos semejantes llegaron a

$$\text{perímetro} = 2a + k + f - 4w + 7d + 3c - e + 2x + h \tag{2.40a}$$

Al practicar con diversos ejercicios de sustracción, este equipo aprendió a diferenciar los usos de las leyes de los signos. Comprendió que en la suma y resta no se emplea la multiplicación de signos. También relacionó y aprendió que el signo menos que acompaña a un término algebraico, representaba cantidades que se habían sustraído.



Figura 2.20 Teselado del equipo 5

Equipo 5 (*cf.* Figura 2.20). Este Teselado se construyó con 33 figuras, el elemento central es un círculo amarillo de 9.5 *cm* de radio, incrustado en 1 rectángulo beige de 37 *cm* de ancho por 26 *cm* de alto; el resto del mosaico se completó con 4 cuadrados verdes, 2 rectángulos amarillos y 22 triángulos de diferentes tipos en colores rosa y azul.

El equipo comprendió el lenguaje algebraico y resolvió operaciones algebraicas, utilizando procedimientos semejantes a los empleados por los equipos anteriores; sin embargo, en la solución de operaciones se resaltan los cálculos realizados para obtener el perímetro y área del círculo, además de otras figuras geométricas irregulares. En la implementación del lenguaje algebraico, este equipo concluyó que el radio también debía representarse de forma algebraica; esta inferencia surgió a partir del análisis de las fórmulas utilizadas en los cálculos de perímetro y área del círculo. Para representar el radio, este equipo empleó la letra "*i*", la cual se integra en la expresión (2.41), que muestra el lenguaje algebraico establecido por ellos. Asimismo, realizaron ajustes en la escritura de las literales, utilizando únicamente letras minúsculas.

$$\begin{aligned}
 b &= 15.5 \text{ cm}, & o &= 7 \text{ cm}, & 2o &= 14 \text{ cm}, & e &= 11.5 \text{ cm}, & y &= 12.5 \text{ cm}, \\
 i &= 9.5 \text{ cm}, & z &= 9.5 \text{ cm}, & m &= 14.5 \text{ cm}, & \tilde{n} &= 2.5 \text{ cm}, & q &= 8.5 \text{ cm}, \\
 t &= 3.7 \text{ cm}, & u &= 18.5 \text{ cm}, & r &= 8.5 \text{ cm}, & 2r &= 17 \text{ cm}, & g &= 6 \text{ cm}, \\
 2g &= 12 \text{ cm}, & v &= 12.8 \text{ cm}, & k &= 13.5 \text{ cm}, & h &= 2 \text{ cm}, & w &= 12 \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Además, este equipo identificó a " π " como una constante utilizada en los cálculos inherentes al círculo, por lo que incorporaron este símbolo a su lenguaje algebraico. También integró a su lenguaje algebraico una nueva representación para el cálculo de volúmenes, ésta fue $l = 1 \text{ cm}$

Este equipo realizó diversas operaciones algebraicas aplicadas a figuras regulares, como cuadrados, e irregulares, entre ellas la figura central, mediante la sustitución de términos algebraicos en las fórmulas correspondientes. Los resultados obtenidos para las figuras regulares se presentan en las ecs. (2.42), (2.43) y (2.44). En cuanto a las formas irregulares, como las de color beige mostradas en las Figuras (2.21) y (2.22), se obtuvieron el perímetro

y el área respectivamente, ambas expresiones se muestran en las ecs. (2.45) y (2.46)

$$\text{perímetro del círculo} = 2 \cdot \pi \cdot i = 2\pi i \quad (2.42)$$

$$\text{área de un círculo} = \pi i^2 \quad (2.43)$$

$$\text{volumen del cilindro} = \pi i^2 l \quad (2.44)$$

$$\text{perímetro del rectángulo irregular inferior} = \frac{3\pi i}{2} + a + k + q + t \quad (2.45)$$



Figura 2.21 Figura irregular inferior izquierda

$$\text{área la figura irregular superior derecha} = qv - \frac{\pi i^2}{4} \quad (2.46)$$



Figura 2.22 Figura irregular superior derecha

Es necesario mencionar que al resolver las operaciones algebraicas para obtener el perímetro y área del círculo, este equipo necesitó apoyo de la docente, ya que la presencia de “ π ” en las relaciones les causaba confusión; sin embargo, una vez que comprendieron que se trataba de una representación semiótica, lograron utilizarlo en las operaciones sin dificultad.

Al concluir con la fase de operaciones algebraicas, este equipo aprendió a sumar, restar y multiplicar algebraicamente, empleando tanto coeficientes enteros como fraccionarios; además, comprendió la aplicación de las leyes de los exponentes en la operación producto. Asimismo, para practicar la resta algebraica, este equipo empleó el retiro de figuras del Teselado 3D, al igual que los demás.

Equipo 6 (cf. Figura 2.23). Este Teselado se construyó con 34 figuras geométricas. En la parte central se observa una estrella de 12 picos, la cual está formada por 4 triángulos rectángulos más 8 cuadriláteros irregulares; los espacios restantes se cubrieron con 10 triángulos rectángulos, 8 cuadrados y 3 triángulos isósceles.

Al concluir la construcción del teselado, este equipo estableció el lenguaje algebraico mostrado en la expresión (2.47), empleando el mismo método que los equipos anteriores. Asimismo, realizaron la corrección en el uso de las literales, utilizando únicamente letras minúsculas. Cabe señalar que este equipo tuvo que redefinir la literal asociada a la longitud de 14.5 cm, pues inicialmente la habían representado con la letra “t”; sin embargo, tras la observación de que no se trataba de la misma longitud, corrigieron la notación y utilizaron la letra “p”. No obstante, en el teselado aún aparece la letra “t”, aunque en la expresión correspondiente al perímetro ya emplean correctamente la letra “p” para representar dicha medida.

$$\begin{aligned} x &= 7 \text{ cm}, & o &= 9 \text{ cm}, & l &= 10 \text{ cm}, & k &= 6 \text{ cm}, & d &= 9.5 \text{ cm}, \\ m &= 18 \text{ cm}, & r &= 12 \text{ cm}, & 2r &= 24 \text{ cm}, & t &= 14 \text{ cm}, \\ e &= 15 \text{ cm}, & 3x &= 21 \text{ cm}, & 2o &= 18 \text{ cm}, & z &= 1 \text{ cm} & p &= 14.5 \text{ cm}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Este equipo resolvió operaciones algebraicas de manera similar a los equipos anteriores. Mediante la reducción de términos algebraicos en las expresiones para calcular perímetros, aprendieron a sumar y restar algebraicamente, tal como se observa en las ecs. (2.48a) y (2.50a). Asimismo, al aplicar las fórmulas para obtener áreas y volúmenes, comprendieron

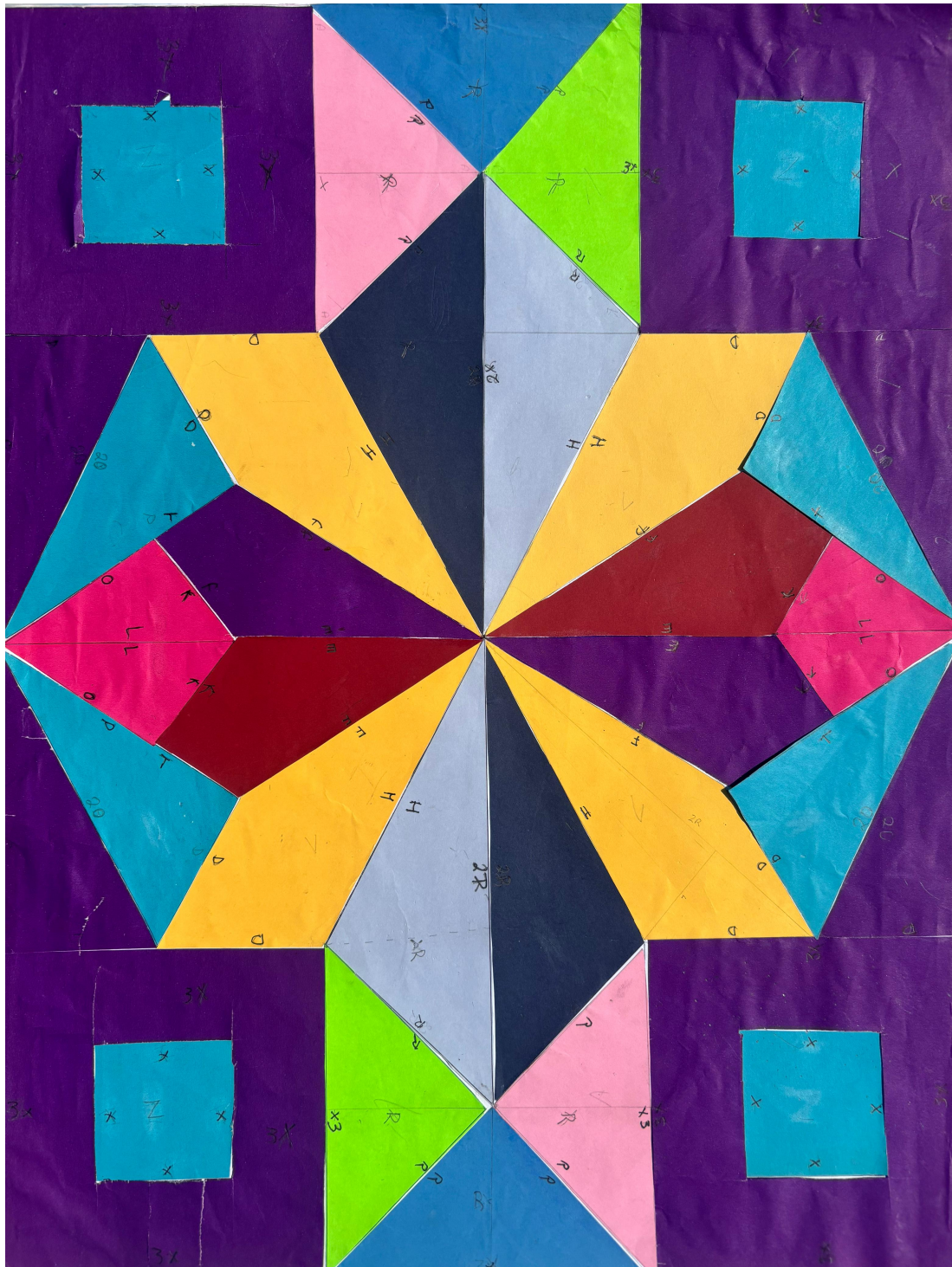


Figura 2.23 Teselado del equipo 6

la multiplicación algebraica, así como la aplicación de las leyes de los exponentes y los signos, como se muestra en las ecs. (2.50a) y (2.51)

Cabe mencionar que este equipo requirió menos apoyo de la docente para resolver las

operaciones, pues únicamente trabajó con términos algebraicos enteros y figuras irregulares de baja complejidad.

$$\begin{aligned}
 \text{perímetro de la estrella central} &= r + 2p + d + d + t + t \\
 &+ d + d + r + r + d \\
 &+ d + t + t + d + d + r
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Después de la reducción de términos semejantes se llegó a

$$\text{perímetro de la estrella central} = 4r + 8d + 2p + 4t \tag{2.48a}$$

En el caso del área de la estrella central, los estudiantes realizaron tanto sumas como restas; un ejemplo de la adición se muestra en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 \text{área de la estrella central} &= r^2 + r^2 + rj + rk + hf + hf + rj + rk + r^2 + r^2 \\
 &+ rj + rk + hf + hf + hf + hf
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Después de reducir términos semejantes

$$\text{área de la estrella} = 4r^2 + 3rj + 3rk + 6hf \tag{2.49a}$$

Además, este equipo practicó la sustracción aplicando el método de retiro de piezas del Teselado 3D; un ejemplo de este proceso se muestra en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}
 \text{área de la estrella} &= r^2 + r^2 - rj + rk + hf + hf - rj + rk + r^2 + r^2 \\
 &- rj + rk + hf - hf + hf - hf
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Después de reducir los términos semejantes obtuvieron

$$\text{área de la estrella central} = 4r^2 - 3rj + 3rk + 2hf \tag{2.50a}$$

También obtuvieron volúmenes, empleando $z=1 \text{ cm}$ como representación del espesor de la figura

$$\text{volumen del cubo} = 3x \cdot 3x \cdot z = 9x^2z \quad (2.51)$$

Equipo 7 (*cf.* Figura 2.24). Este Teselado tiene como elemento central un rectángulo color rosa mexicano con dimensiones de 21 cm de ancho y 17 cm de alto; en la parte superior e inferior de dicha figura se encuentran 2 triángulos isósceles, uno amarillo y otro verde; los espacios restantes se cubrieron con 11 trapecios, 6 triángulos y 2 rectángulos, sumando un total de 24 figuras geométricas.

Una vez concluida la fase de construcción del Teselado, este equipo comprendió el lenguaje algebraico a través de la asociación de las longitudes con letras, al igual que lo hicieron los equipos anteriores. El resultado de este proceso se muestra en la expresión (2.52). Asimismo, realizaron en su cuaderno la corrección de la escritura de las literales, empleando solo letras minúsculas.

$$\begin{aligned} a &= 6.5 \text{ cm}, & b &= 5.3 \text{ cm}, & c &= 21.5 \text{ cm}, & d &= 35 \text{ cm}, & f &= 11 \text{ cm}, \\ g &= 3.5 \text{ cm}, & h &= 7.5 \text{ cm}, & i &= 22 \text{ cm}, & j &= 7 \text{ cm}, & k &= 16 \text{ cm}, \\ l &= 17.3 \text{ cm}, & m &= 30.5 \text{ cm}, & n &= 22 \text{ cm}, & \tilde{n} &= 16.5 \text{ cm}, & o &= 13 \text{ cm}, \\ p &= 27 \text{ cm}, & q &= 9 \text{ cm}, & r &= 8 \text{ cm}, & s &= 5 \text{ cm}, & v &= 17.5 \text{ cm}, \\ w &= 21.5 \text{ cm}, & x &= 27 \text{ cm}, & y &= 15.5 \text{ cm}, & z &= 21.5 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Además, este equipo aprendió a resolver operaciones algebraicas utilizando los conceptos de perímetro, área y volumen, al igual que los equipos anteriores. Dado que su Teselado incluía numerosos trapecios, aplicaron la propiedad distributiva del producto respecto a la suma para eliminar paréntesis y así obtener las expresiones algebraicas que representaban las áreas de dichas figuras. En la resolución de operaciones algebraicas, este equipo se destaca por utilizar términos enteros y fraccionarios. En las ecuaciones (2.53), (2.53a), (2.54) y (2.55) se muestran algunas de las operaciones realizadas por este equipo.

$$\begin{aligned} \text{perímetro del Teselado} &= x + d + g + x + d + j + j \\ &+ d + x + g + x + d + j + o + j \end{aligned} \quad (2.53)$$



Figura 2.24 Teselado del equipo 7

$$\text{perímetro del Teselado} = 4x + 4d + 2g + 4j + o \quad (2.53a)$$

$$\text{área del trapecio azul} = \frac{(d + o)h}{2} = \frac{dh + oh}{2} \quad (2.54)$$

$$\text{área del trapecio rosa} = \frac{(i + j)h}{2} = \frac{ih + jh}{2} \quad (2.55)$$

Cabe mencionar que este equipo practicó la resta algebraica retirando figuras del Teselado



Figura 2.25 Teselado del equipo 8

3D, al igual que los demás equipos.

Equipo 8 (*cf.* Figura 2.25). Este Teselado fue construido con un total de 42 figuras. En el centro se ubica un cuadrado amarillo de 11 *cm* de largo por lado, rodeado por 4 triángulos equiláteros azules y 4 rombos de color guinda; los espacios restantes del mosaico se cubrieron con triángulos de distintos tipos, además de otras figuras geométricas irregulares.

Este equipo comprendió el lenguaje algebraico y resolvió operaciones algebraicas, utilizando los mismos métodos que los equipos anteriores. El lenguaje que establecieron se muestra en la expresión (2.56); además, se puede observar que emplearon únicamente letras minúsculas para representar las longitudes, corrigiendo así la escritura original de su Teselado.

$$\begin{aligned}
 x &= 11 \text{ cm}, & a &= 14.5 \text{ cm}, & c &= 15 \text{ cm}, & e &= 17.5 \text{ cm}, & b &= 18.5 \text{ cm}, \\
 f &= 17 \text{ cm}, & j &= 8.5 \text{ cm}, & s &= 7 \text{ cm}, & m &= 10.5 \text{ cm}, & g &= 20.5 \text{ cm}, \\
 h &= 12 \text{ cm}, & y &= 16 \text{ cm}, & d &= 5 \text{ cm}, & z &= 8 \text{ cm}, & u &= 20 \text{ cm}, \\
 w &= 21 \text{ cm}, & f &= 17 \text{ cm}, & k &= 13 \text{ cm}, & l &= 3.5 \text{ cm}, & o &= 28 \text{ cm}, \\
 q &= 6 \text{ cm}, & p &= 1 \text{ cm}, & i &= 10 \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Posteriormente, el equipo resolvió diversas sumas algebraicas empleando términos enteros y fraccionarios, siendo ejemplo de ello la adición de las áreas correspondientes a las nueve figuras centrales del Teselado. *cf.* ec. (2.57) y ec. (2.57a); además, realizaron sumas que involucraban términos algebraicos con distintas potencias; por ejemplo, la ecuación (2.58)

$$\text{área del centro del Teselado} = x^2 + \frac{xr}{2} + \frac{xr}{2} + \frac{xr}{2} + \frac{xr}{2} + \frac{qw}{2} + \frac{qw}{2} + \frac{qw}{2} + \frac{qw}{2} \tag{2.57}$$

o bien, después de la reducción de términos

$$\text{área del centro del Teselado} = x^2 + 2xr + 2qw \tag{2.57a}$$

también, realizaron la reducción de términos con diferentes potencias

$$scp + x^2p + \frac{xr}{2} + \frac{xr}{2} + 4x + 3x + 3f = scp + x^2p + xr + 7x + 3f \tag{2.58}$$

En las operaciones realizadas por este equipo, se destacan los procedimientos realizados para obtener perímetros y áreas de figuras geométricas regulares e irregulares; por ejemplo, la Figura 2.26, cuyo resultado se muestra en la ec. (2.57); además, emplearon las relaciones de volúmenes para realizar multiplicaciones algebraicas, representando a la profundidad como $p = 1 \text{ cm}$, los resultados obtenidos de estas operaciones se muestran en las ecs.(2.59), (2.60) y (2.61)



Figura 2.26 Figura irregular morada

$$\text{Área figura morada} = \frac{ck}{2} + \frac{qw}{2} + \frac{xs}{2} \quad (2.59)$$

$$\text{Volumen prisma rectangular de base cuadrada} = x^2p \quad (2.60)$$

$$\text{Volumen prisma triangular} = \frac{xpr}{2} \quad (2.61)$$

Además, este equipo practicó la resta algebraica retirando figuras del Teselado 3D, al igual que los demás equipos.

Equipo 9 (cf. Figura 2.27). Este Teselado fue construido utilizando 27 figuras geométricas dispuestas de forma simétrica, respecto a un eje horizontal, dibujado a la mitad del Teselado y asimétrica, respecto a un eje vertical, visto también a la mitad del Teselado. Las figuras



Figura 2.27 Teselado equipo 9

que se muestran son un rombo amarillo rodeado por 6 trapecios escalenos de diferentes colores; los espacios restantes se cubrieron con 4 triángulos rectángulos, dos verdes y dos rojos carmesí; 4 triángulos isósceles, 2 de color guinda y dos negros; 5 rectángulos, dos

amarillos, dos naranja y uno gris; 4 figuras irregulares, una amarilla, dos de color azul fuerte y otra de color añil y 2 trapecios naranjas.

Al concluir con la fase de construcción del Teselado, este equipo estableció el lenguaje algebraico y resolvió operaciones algebraicas, utilizando los mismos procedimientos que los demás equipos, pero con la particularidad de que realizó cálculos para trapecios escalenos, rombo y figuras irregulares. El lenguaje establecido por este equipo se muestra en la expresión (2.62). Asimismo, realizaron la unificación en la escritura de las variables utilizando únicamente letras minúsculas, tal como lo hicieron los demás equipos

$$\begin{aligned}
 3s &= 24 \text{ cm}, & b &= 6 \text{ cm}, & c &= 25 \text{ cm}, & d &= 7 \text{ cm}, & e &= 20 \text{ cm}, \\
 f &= 23.5 \text{ cm}, & g &= 7.5 \text{ cm}, & i &= 23 \text{ cm}, & h &= 11 \text{ cm}, & l &= 19.5 \text{ cm}, \\
 j &= 26 \text{ cm}, & k &= 18 \text{ cm}, & 2b &= 12 \text{ cm}, & m &= 22 \text{ cm}, & n &= 8.5 \text{ cm}, \\
 o &= 2.5 \text{ cm}, & p &= 9 \text{ cm}, & q &= 10 \text{ cm}, & s &= 8 \text{ cm}, & u &= 17 \text{ cm}, \\
 x &= 27 \text{ cm}, & y &= 16 \text{ cm}, & 2g &= 15 \text{ cm}, & 2d &= 14 \text{ cm}, & w &= 3 \text{ cm}, \\
 r &= 8 \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

En el procedimiento de la multiplicación algebraica, este equipo analizó las relaciones para obtener el área del rombo e identificó que debía representar dos nuevas longitudes: la diagonal mayor y diagonal menor; para ello, empleó longitudes que ya estaban establecidas. Las representaciones utilizadas fueron $r=15 \text{ cm}$ y $s=8 \text{ cm}$.

Posteriormente, al resolver operaciones algebraicas aplicadas a perímetros, áreas y volúmenes, este equipo comprendió el uso del lenguaje algebraico; además, aprendió a multiplicar algebraicamente aplicando las leyes de los signos y resolvió sustracciones algebraicas sin la confusión en el manejo de los signos. Precisa mencionar que este equipo, al igual que los otros que trabajaron con trapecios, requirió apoyo de la docente para obtener sus áreas, así como la de las figuras irregulares.

Algunas de las expresiones más destacadas, obtenidas por este equipo se muestran en las

ecuaciones (2.63), (2.64), (2.65), (2.66) y (2.66a)

$$\text{área del rombo amarillo central} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2} = \frac{r \cdot s}{2} = \frac{rs}{2} \quad (2.63)$$

$$\text{área figura irregular gris} = \text{área del rectángulo} + \text{área del triángulo} = fq + \frac{qb}{2} \quad (2.64)$$

$$\text{área del trapecio escaleno} = \frac{(o + y)}{2} \cdot b = \frac{ob + yb}{2} \quad (2.65)$$

Este equipo, al igual que los demás, también realizó sustracciones algebraicas empleando el método de retiro de piezas; un ejemplo de ello se muestra en la ecuación 2.66

$$\text{perímetro} = -c + f - 3s + 3s + c - d - c + o - n - f + o + n \quad (2.66)$$

Después de realizar la reducción de términos semejantes obtuvieron:

$$\text{perímetro} = -c + 2o - d \quad (2.66a)$$

Equipo 10 (*cf.* Figura 2.28). Este Teselado se construyó con 26 figuras geométricas. En el centro se observa 1 rectángulo azul de 14 cm de ancho por 13.5 cm de largo, a su alrededor se aprecian 2 triángulos isósceles anaranjados además de 1 triángulo equilátero color azul. En cada esquina del Teselado, se observa 1 triángulo rectángulo; el resto del espacio fue cubierto con triángulos de los tres tipos, 2 trapecios y 1 rectángulo.

Después de construir su Teselado, este equipo estableció el lenguaje algebraico, empleando el mismo procedimiento que los demás equipos. Como resultado de este proceso, obtuvieron la expresiones mostradas en (2.67); además, realizaron unificación en la escritura de las variables utilizando únicamente letras minúsculas, tal como lo hicieron los demás equipos.



Figura 2.28 Teselado equipo 10

$$\begin{aligned}
a &= 14 \text{ cm}, & b &= 13.5 \text{ cm}, & c &= 13 \text{ cm}, & \frac{i}{2} &= 15 \text{ cm}, & e &= 22 \text{ cm}, \\
f &= 10.5 \text{ cm}, & \frac{g}{2} &= 7 \text{ cm}, & g &= 14 \text{ cm}, & h &= 21.5 \text{ cm}, & i &= 15 \text{ cm}, \\
2i &= 30 \text{ cm}, & j &= 16.5 \text{ cm}, & k &= 16 \text{ cm}, & \frac{l}{2} &= 9 \text{ cm}, & l &= 18 \text{ cm}, \\
m &= 4 \text{ cm}, & r &= 15.5 \text{ cm}, & n &= 10 \text{ cm}, & p &= 19 \text{ cm}, & q &= 21 \text{ cm}, \\
s &= 2 \text{ cm}, & t &= 17.5 \text{ cm}, & \frac{u}{2} &= 8 \text{ cm}, & u &= 16 \text{ cm}, & \frac{v}{2} &= 6 \text{ cm}, \\
v &= 12 \text{ cm}, & z &= 8.5 \text{ cm}, & o &= 18.5 \text{ cm}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Asimismo, empleó los mismos métodos que los equipos anteriores para resolver operaciones algebraicas; además, aplicó la sustracción algebraica utilizando el método de retiro de figuras del Teselado 3D, al igual que los demás equipos. Al hacerlo, este equipo aprendió a identificar los términos semejantes por su representación con la misma letra y exponente; además, al realizar operaciones de adición y sustracción, comprendieron que sólo podían sumar o restar términos que eran semejantes y que en estos casos, el único valor que se modifica es el coeficiente, y no el exponente. También aprendió a multiplicar algebraicamente, aplicando la regla de los exponentes para el producto. Este equipo destacó en las operaciones realizadas para obtener el área total del Teselado mediante la suma de las áreas de las figuras. El resultado de este procedimiento se muestra en las ec. (2.68) y (2.68a)

$$\begin{aligned}
\text{área total del Teselado} &= ac + h^2 + f^2 + ef + h^2 + \\
&\frac{ge}{2} + h^2 + \frac{ov + ev}{2} + \frac{vg}{2} + h^2 + \frac{gi}{2} \\
&+ \frac{au + eu}{2} + \frac{kv}{2} + ju + \frac{ce}{2} + \frac{rl}{2} + \frac{fb}{2} \\
&+ li + \frac{gf}{2} + gf + gf + \frac{gf}{2} + \frac{km}{2} + \frac{li}{2} \\
&+ \frac{bv}{2} + \frac{lf}{2} + \frac{ci}{2} + \frac{rv}{2} + \frac{sl}{2} + \frac{mi}{2}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Después de la reducción de términos semejantes se llega a

$$\begin{aligned}
 \text{área total del Teselado} = & ac + 4h^2 + f^2 + ef + \frac{ge}{2} + \frac{ov + ev}{2} \\
 & + \frac{vg}{2} + \frac{gi}{2} + \frac{au + ae}{2} + \frac{kv}{2} + ju + \frac{ce}{2} \\
 & + \frac{rl}{2} + \frac{fb}{2} + \frac{3li}{2} + 3gf + \frac{km}{2} + \frac{ci}{2} \\
 & + \frac{bv}{2} + \frac{lf}{2} + \frac{rv}{2} + \frac{sl}{2} + \frac{mi}{2}
 \end{aligned} \tag{2.68a}$$

Precisa mencionar que para reducir términos algebraicos de la ec. (2.68a), este equipo requirió del acompañamiento de la docente, ya que solo estaba integrado por 3 estudiantes. Asimismo, también necesitó apoyo en el cálculo de áreas y volúmenes.

Equipo 11 (*cf.* Figura 2.29). Para la construcción de este Teselado se utilizaron 33 figuras. En los extremos derecho e izquierdo, se observa un arreglo compuesto por 1 hexágono irregular, 1 triángulo rectángulo y 5 triángulos isósceles de diferentes tamaños, creando un patrón simétrico con respecto a un eje vertical que divide a la mitad al Teselado. En la parte central, colocaron 2 octágonos, uno grande color azul y uno pequeño amarillo, además de 2 trapecios, 2 triángulos escalenos, 4 triángulos rectángulos, 5 cuadrados, 2 triángulos isósceles y 2 rectángulos.

Una vez concluida la construcción del Teselado, este equipo comprendió el lenguaje algebraico y aprendió a resolver operaciones algebraicas, empleando los mismos procedimientos que los demás equipos. El lenguaje algebraico establecido por este equipo se muestra en la expresión (2.69). También, realizaron la corrección en la escritura de las literales, utilizando únicamente letras minúsculas, al igual que los demás equipos.

$$\begin{aligned}
 b = 7.5 \text{ cm}, & \quad k = 18 \text{ cm}, & l = 8.5 \text{ cm}, & \quad t = 12.5 \text{ cm}, & m = 6 \text{ cm}, \\
 u = 11 \text{ cm}, & \quad o = 2.5 \text{ cm}, & z = 2 \text{ cm}, & \quad c = 6.5 \text{ cm}, & d = 2.7 \text{ cm}, \\
 s = 3.5 \text{ cm}, & \quad p = 10.5 \text{ cm}, & m = 5.5 \text{ cm}, & \quad w = 22 \text{ cm}, & y = 7 \text{ cm}, \\
 q = 26.5 \text{ cm}, & \quad g = 12 \text{ cm}, & 2t = 25 \text{ cm}, & \quad a = 1 \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Este equipo se destacó por incorporar en su Teselado figuras geométricas con más de cuatro lados, específicamente hexágonos y octágonos. Dado que ambas figuras eran irregulares,



aplicaron el método de descomposición en triángulos para obtener las expresiones algebraicas que representaban sus áreas. En el caso del hexágono, lo dividieron en seis triángulos, calcularon algebraicamente el área de cada uno y luego sumaron los resultados; para el octágono, siguieron el mismo procedimiento, dividiéndolo en ocho triángulos. A través de este método, el equipo practicó la suma y multiplicación de expresiones algebraicas. La descomposición de triángulos se presenta en las ecs. (2.70), (2.71), (2.72) y (2.73); posteriormente, se evidencia el resultado de la suma algebraica en las ecuaciones (2.70a), (2.71a), (2.72a) y (2.73a)

$$\begin{aligned} \text{área del octágono azul} &= \text{triángulo 1} + \text{triángulo 2} + \text{triángulo 3} + \text{triángulo 4} \\ &+ \text{triángulo 5} + \text{triángulo 6} + \text{triángulo 7} + \text{triángulo 8} \end{aligned}$$

Substituyendo los términos algebraicos se obtiene

$$\text{área del octágono azul} = \frac{bg}{2} + \frac{bg}{2} + \frac{xg}{2} + \frac{bg}{2} + \frac{dg}{2} + \frac{dg}{2} + \frac{bg}{2} + \frac{xg}{2} \quad (2.70)$$

Reduciendo los términos semejantes se llega a

$$\text{área del octágono azul} = 2bg + dg + xg \quad (2.70a)$$

$$\begin{aligned} \text{área del octágono amarillo} &= \text{triángulo 1} + \text{triángulo 2} + \text{triángulo 3} + \text{triángulo 4} \\ &+ \text{triángulo 5} + \text{triángulo 6} + \text{triángulo 7} + \text{triángulo 8} \end{aligned}$$

De igual forma que en la ecuación anterior, se substituyen términos algebraicos

$$\text{área del octágono amarillo} = \frac{oz}{2} + \frac{oz}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{oz}{2} + \frac{oz}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{oz}{2} + \frac{oz}{2} \quad (2.71)$$

Reduciendo términos algebraicos se obtuvo

$$\text{área del octágono amarillo} = z^2 + 3oz \quad (2.71a)$$

Para las dos figuras siguientes se realizaron los mismos procedimientos que en las anteriores.

$$\begin{aligned} \text{área del hexágono azul} &= \text{triángulo 1} + \text{triángulo 2} + \text{triángulo 3} + \text{triángulo 4} \\ &+ \text{triángulo 5} + \text{triángulo 6} \end{aligned}$$

$$\text{área del hexágono azul} = \frac{l^2}{2} + \frac{gl}{2} + \frac{gl}{2} + \frac{yd}{2} + \frac{bx}{2} + \frac{bx}{2} \quad (2.72)$$

$$\text{área del hexágono azul} = \frac{l^2}{2} + gl + \frac{yd}{2} + bx \quad (2.72a)$$

$$\begin{aligned} \text{área del hexágono morado} &= \text{triángulo 1} + \text{triángulo 2} + \text{triángulo 3} + \text{triángulo 4} \\ &+ \text{triángulo 5} + \text{triángulo 6} \end{aligned}$$

$$\text{área del hexágono morado} = \frac{dl}{2} + \frac{gl}{2} + \frac{dl}{2} + \frac{ml}{2} + \frac{bl}{2} + \frac{gl}{2} \quad (2.73)$$

$$\text{área del hexágono morado} = dl + gl + \frac{ml}{2} + \frac{bl}{2} \quad (2.73a)$$

Se precisa mencionar que para resolver las sumas algebraicas de las ecuaciones (2.70a), (2.71a), (2.72a) y (2.73a), este equipo requirió ayuda de la docente, ya que al igual que a los demás equipos, tuvieron dificultades para reducir términos semejantes fraccionarios; empero, debido a que se trataba de fracciones de baja complejidad, después de resolver un ejercicio con ayuda, realizaron el resto de las sumas por su cuenta. Cabe mencionar que este equipo practico la resta algebraica retirando figuras del Teselado 3D, como lo hicieron los otros equipos.

Al concluir esta estrategia, el equipo logró sumar y restar expresiones algebraicas con términos enteros y fraccionarios, así como multiplicarlas aplicando las leyes de los exponentes.

Capítulo 3

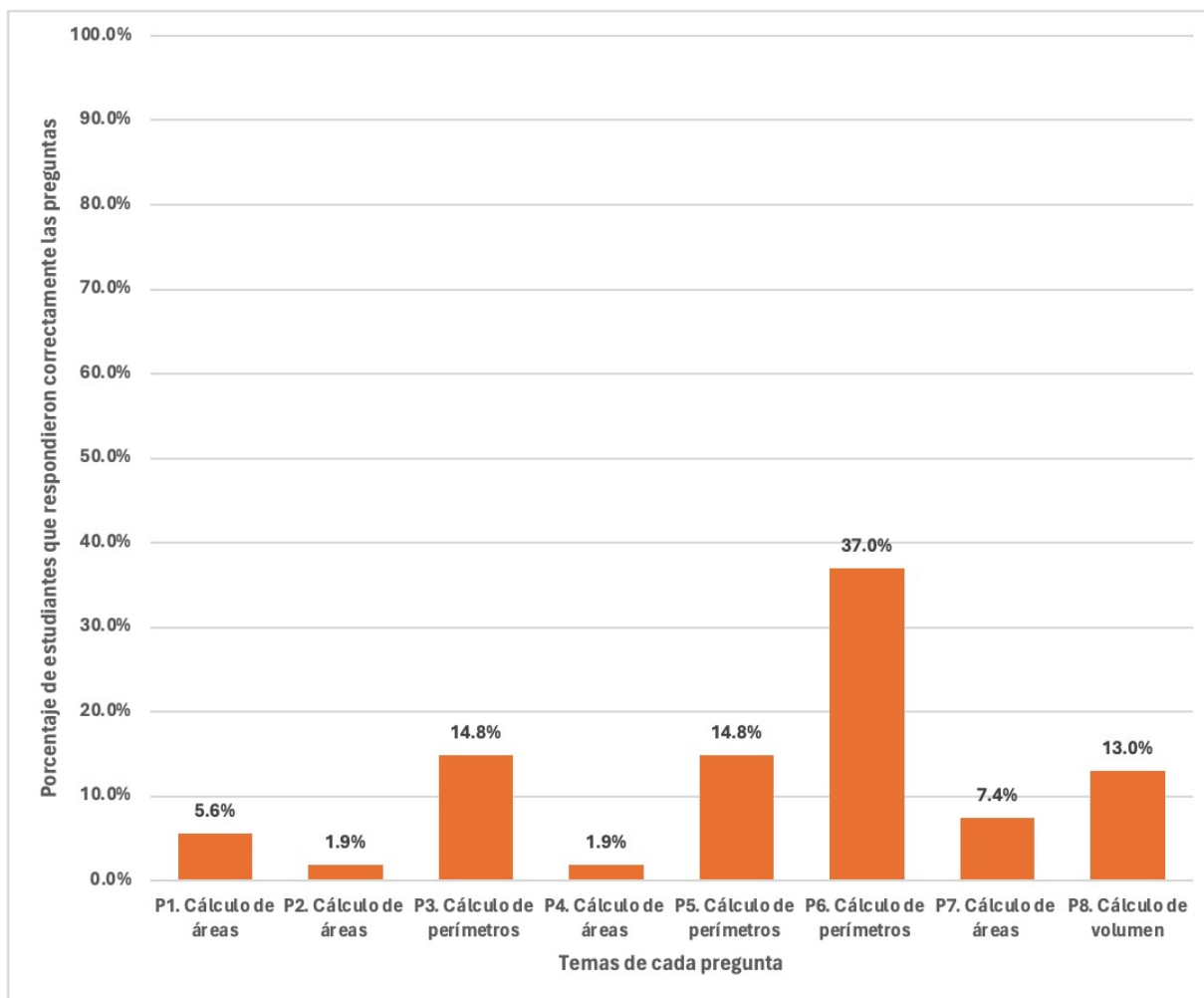
Resultados

Mediante el trabajo colaborativo y, vía el Teselado, realizando cálculos de perímetros, áreas y volúmenes, la presente investigación tuvo como objetivo mejorar la comprensión del lenguaje algebraico y promover el aprendizaje significativo sobre operaciones algebraicas en estudiantes de Bachilleratos Tecnológicos. Con el fin de que aprendieran, tanto el lenguaje algebraico como a resolver las operaciones algebraicas, se diseñó una estrategia fundamentada en el Teselado, la cual favoreció que los estudiantes construyeran su conocimiento de manera progresiva y práctica, adquiriendo un aprendizaje significativo a través de la asociación entre la geometría y las representaciones algebraicas.

3.1. Resultados obtenidos en las exploraciones diagnósticas

Al inicio de esta investigación se aplicó una evaluación diagnóstica sobre contenidos de geometría, conformada por ocho preguntas, las cuales contenían ejercicios para calcular perímetros, áreas y volúmenes, así como la identificación de figuras geométricas. La Gráfica 1 muestra que en las preguntas 1, 3, 5 y 6, que evaluaron el cálculo de perímetros, se obtuvieron porcentajes de respuestas correctas del 5.6 %, 14.8 %, 14.8 % y 3.7 %, respectivamente. Por otro lado, las preguntas 2, 4 y 7 relacionadas con el cálculo de áreas, presentaron

un desempeño aún más bajo, pues se obtuvo el 1.9 %, 1.9 %, y 7.4 % de respuestas correctas, respectivamente. Finalmente, en los ejercicios sobre el cálculo de volumen, solo el 13 % de los estudiantes respondió correctamente.



Gráfica 1: Resultados de la exploración diagnóstica de geometría, en la que se evaluaron los conocimientos previos acerca de perímetros, áreas y volúmenes

Con relación a los resultados anteriores, se identificó que los estudiantes confundían los procedimientos para calcular perímetro, área y volumen; por ejemplo, al resolver un problema de área, sumaron las longitudes en lugar de aplicar las fórmulas correctas; o bien, al calcular un perímetro, multiplicaron en vez de sumar (*cf.* Figura 3.2). Respecto a la identificación de figuras geométricas, el 35 % de los estudiantes reconoció correctamente aquellas construidas con 4 lados *v.g.* rombo y rectángulo; sin embargo, solo el 22 % identificó figuras con más

lados, como el hexágono.

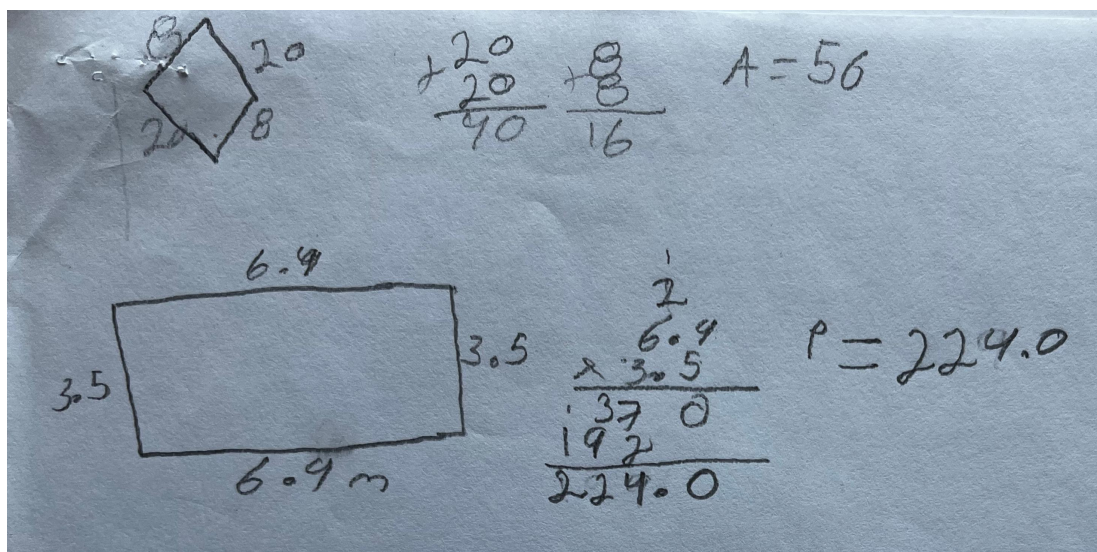
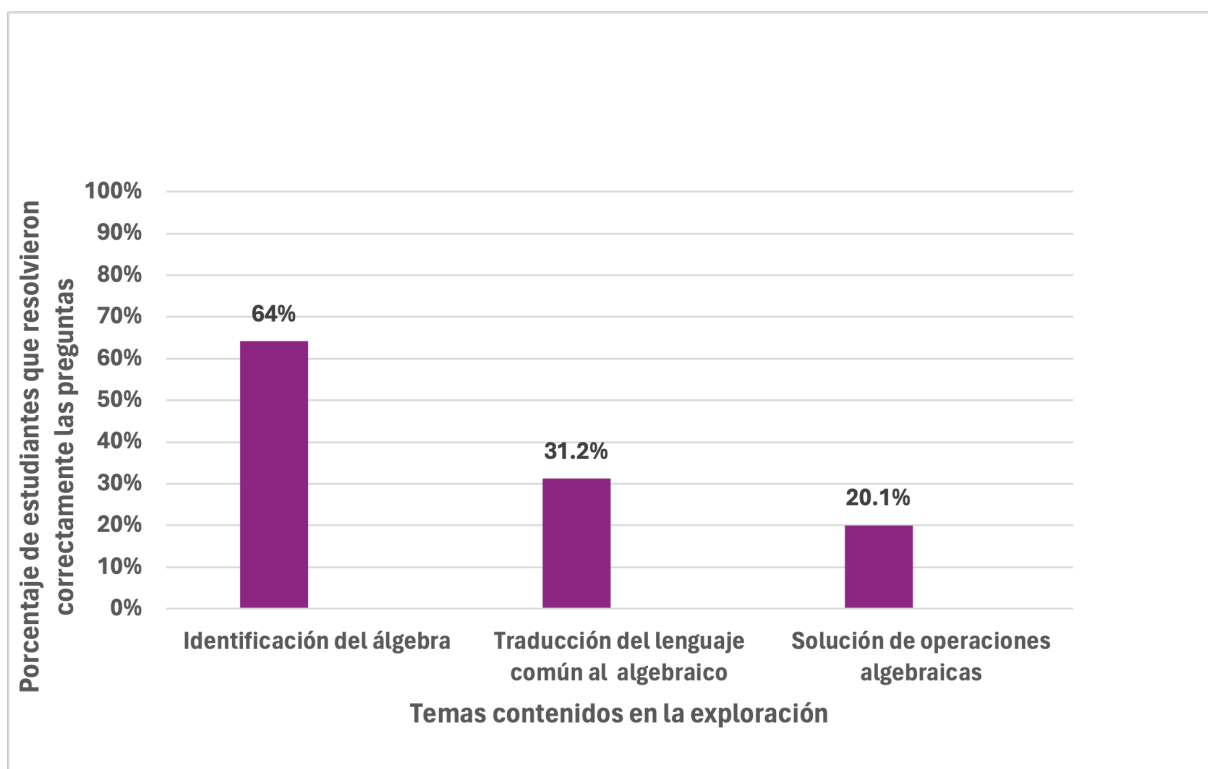


Figura 3.2 Cálculos de perímetro y área, realizados por estudiante del grupo en la exploración diagnóstica de geometría

La segunda exploración diagnóstica tuvo como tema central el álgebra, compuesta por doce preguntas cuyos temas se detallaron en el capítulo anterior (*cf.* Tabla 2.1). Los resultados de la Gráfica 2 muestran que el 64 % de los estudiantes identificaron el álgebra como la rama de las matemáticas, en la que las operaciones se representan mediante letras, números y signos; sin embargo, solo el 31.2 % logró traducir expresiones del lenguaje común al algebraico; por ejemplo, no relacionaron el coeficiente 2 en un término algebraico como el doble de un número cualquiera, ni diferenciaron los elementos que lo componen.

Respecto a la solución de operaciones algebraicas, los resultados muestran que los estudiantes enfrentaron dificultades significativas para resolverlas, pues solo el 20.1 % contestó correctamente los ejercicios de la exploración. Además se identificaron errores recurrentes, como la aplicación incorrecta de las reglas de los signos al reducir términos semejantes con signo negativo (*cf.* Figura 3.4)



Gráfica 2: Resultados de la exploración diagnóstica de álgebra

10. Reduzca la siguiente expresión.

$$(3x^2 + 2x + 13x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 4x + 3x^2 - 4x + 3x^2 - 4x + 3)$$

Fallaron operaciones

$$3x^2 + 2x + 13x^2 + 2x + 1 + (x^2 - 4x + 3x^2 - 4x + 3x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3x^2 + 13x^2 + x^2 + 3x^2 = 20x^2$$

$$= 2x + 2x - 4x - 4x - 4x - 4x = -8x$$

$$1 + 3 + 3 = 7$$

$$R = 20x^2 - 8x + 7$$

Figura 3.4 Resolución de una suma algebraica, realizada por estudiante del grupo en la exploración diagnóstica de geometría

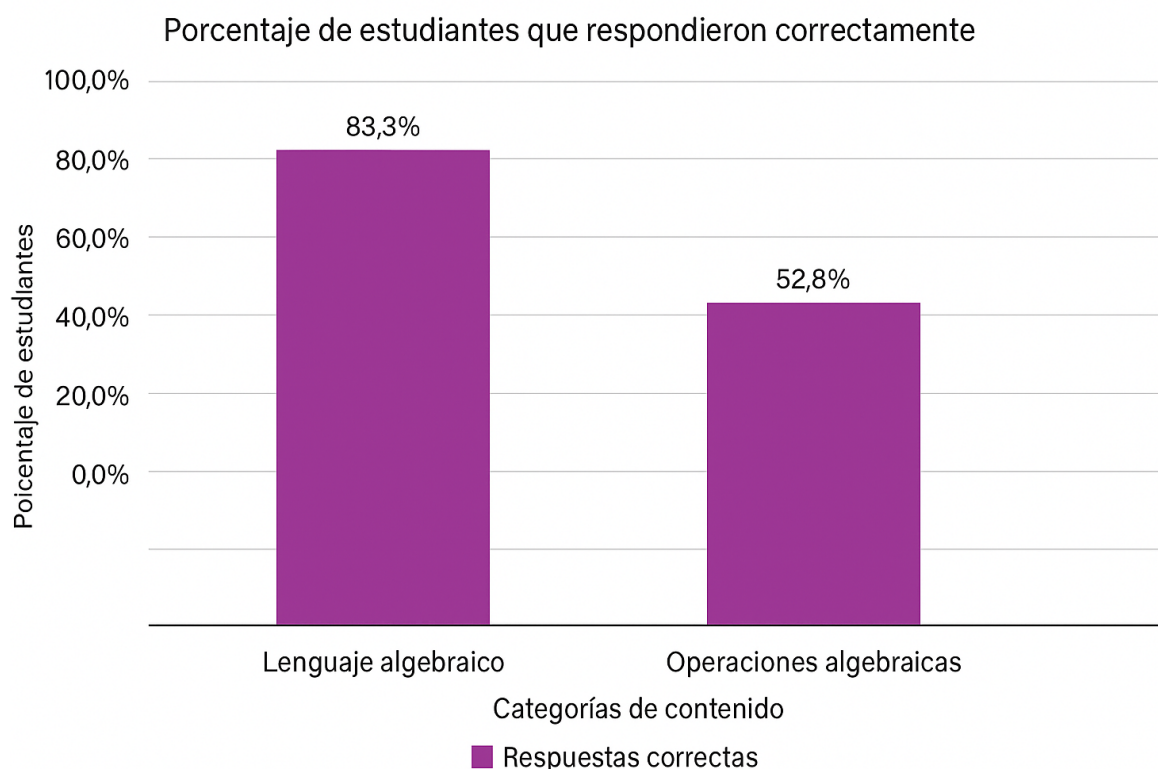
3.2. Resultados obtenidos en la implementación de la estrategia

Una vez concluida la implementación de la estrategia y con la finalidad de medir su efectividad, se aplicó a los estudiantes una exploración final (Anexo E); ésta estuvo conformada

por ocho ejercicios que requerían la resolución de operaciones algebraicas, así como la traducción de expresiones del lenguaje común al algebraico. Se precisa mencionar que los resultados que se presentan corresponden a 44 estudiantes, ya que durante el periodo de implementación de la estrategia hubo 10 bajas por situaciones académicas o conductuales; además, un estudiante sufrió un accidente vial que lo incapacitó para poder asistir a la escuela.

Los resultados obtenidos en la exploración final (*cf.* Gráfica 3), la primera barra muestra que 83.3 % de los estudiantes respondieron correctamente las preguntas relacionadas con el lenguaje algebraico, traduciendo enunciados comunes al lenguaje matemático, este dato se contrapone al 31 % obtenido en la exploración diagnóstica. En particular, los estudiantes identificaron los elementos que componen a un término algebraico, expresando el coeficiente como un factor que multiplica a la variable.

Con relación a la solución de operaciones algebraicas, en la segunda barra se observa que

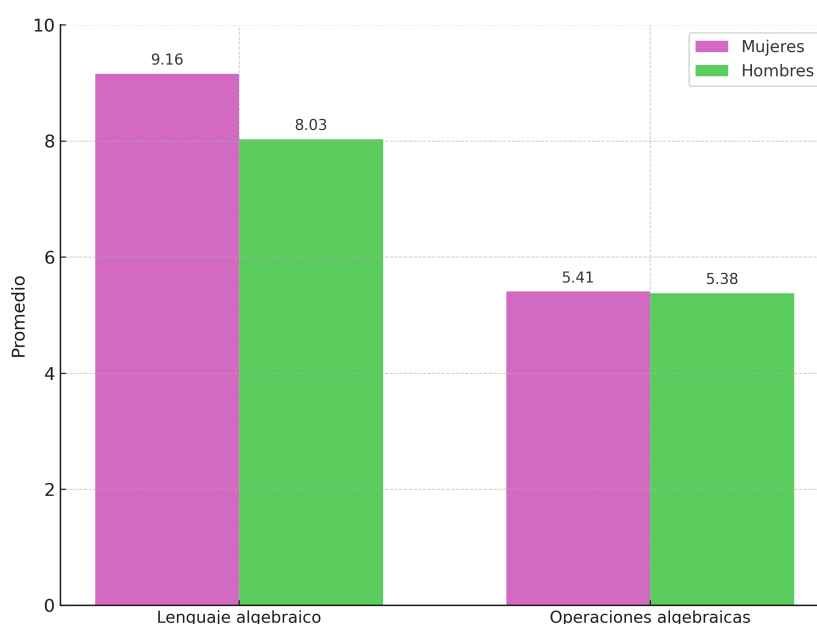


Gráfica 3: Resultados de la exploración final de álgebra

el 52.8 % de los estudiantes las resolvieron correctamente, dicho porcentaje contrasta con

el 20.1 % que se tuvo en el diagnóstico.

Adicional a este análisis, se realizó otro estudio de los resultados obtenidos por los estudiantes según su género (Cf. Gráfica 4). Los datos muestran que en la exploración final, respecto al tema de lenguaje algebraico, las integrantes femeninas del grupo obtuvieron un promedio 1.13 puntos superior al de los varones. Por otra parte, en el tema de operaciones algebraicas, la diferencia entre promedios fue mucho menor, ya que las mujeres superaron a los hombres por sólo tres centésimas.



Gráfica 4: Comparativo de resultados entre géneros

Al analizar la solución de operaciones, se observa que los estudiantes asociaron la operación adición con el cálculo de perímetros. En cuanto a la solución del producto algebraico, demostraron mayor conocimiento, ya que multiplicaron correctamente los coeficientes y aplicaron las leyes de los exponentes. Respecto a la solución de la sustracción, los estudiantes presentaron menor confusión para resolverla, pues identificaron el término algebraico negativo como una cantidad que se resta, aunado a que lograron eliminar los paréntesis con mayor facilidad.

Como se señaló en el capítulo anterior, a partir de la fase de construcción del Teselado y las posteriores, los estudiantes trabajaron en equipos colaborativos con roles definidos y

actividades específicas para cada integrante, mediante esta forma de trabajo se logró que los estudiantes asumieran con responsabilidad su función dentro del equipo, moderaran su comportamiento; además, contribuyó a mejorar su manera de comunicarse, ya que se volvió más efectiva. A la par, aprendieron a respetar las opiniones de todos los integrantes a intercambiar diferentes puntos de vista, también, desarrollaron la capacidad de afrontar retos, y buscar soluciones a diversas problemáticas, lo que los hizo más competitivos. En suma, al concluir con este proyecto, los estudiantes adquirieron habilidades para trabajar colaborativamente.

En el proceso de construcción del Teselado, cada equipo demostró su creatividad e ingenio, pues, como se aprecia en las figuras mostradas en el capítulo 2, todos los diseños fueron únicos y originales, en ellos se emplearon y dispusieron figuras geométricas tanto regulares como irregulares para la creación de diferentes formas, poniendo especial esmero en la armonía de los colores. Durante la elaboración del Teselado, los estudiantes aplicaron y comprendieron los conocimientos de figuras geométricas, simetría, rotación y el manejo de instrumentos de medición; además, desarrollaron su inteligencia espacial, la percepción geométrica, habilidades visuales y el pensamiento geométrico (Rodríguez-López *et al.*, 2023)

En la tercera fase del proyecto, cada equipo logró desarrollar y establecer su propio lenguaje algebraico a partir de la asociación entre representaciones longitudinales de las figuras geométricas y sus respectivas expresiones algebraicas. Este proceso fomentó la verbalización del lenguaje algebraico, otorgándole significado para los estudiantes, lo cual facilitó su posterior aplicación en la solución de operaciones algebraicas.

Asimismo, al trabajar con la proporcionalidad entre longitudes, los equipos lograron comprender el significado del coeficiente en un término algebraico, identificándolo como un factor multiplicativo que determina la magnitud de una variable. En cuanto a los términos algebraicos negativos, comprendieron que el signo negativo que acompaña a un término representa, en el cálculo de perímetros, la longitud de una figura que se retira o elimina del teselado; o bien, en el caso de áreas y volúmenes, la ausencia de una figura. Esta relación con la operación de sustracción les ayudó a resolver restas algebraicas con mayor facilidad. A lo largo de este proceso, se comprendió el significado del lenguaje algebraico. Inicialmen-

te, los estudiantes manifestaban confusión al trabajar y realizar operaciones empleando letras, ya que no lograban darle significado; empero, cuando construyeron sus propios términos algebraicos para especificar longitudes de una figura geométrica, le encontraron el sentido. Además, los equipos tuvieron mayor confianza al emplear el lenguaje algebraico, ya que posteriormente construyeron expresiones que representaban los perímetros como una adición de términos, las áreas y volúmenes como una multiplicación algebraica, ambas expresiones se aplicaron tanto en figuras regulares como irregulares.

Lo anterior demuestra que en esta investigación, se logró que los alumnos dieran significado al lenguaje matemático, ya que la vinculación entre el álgebra y la geometría favoreció su comprensión, redujo las dificultades en su manejo y contribuyó a la construcción de un aprendizaje significativo.

Con respecto a las operaciones algebraicas, los equipos aprendieron a resolver la suma, también a reducir términos semejantes en las expresiones construidas sobre perímetros. En este escenario, los equipos identificaron el coeficiente como un factor numérico asociado a cada término, lo que les permitió operar correctamente con él durante el proceso de adición. Para realizar la operación resta se utilizó el Teselado fabricado en 3D, lo que facilitó a los equipos el aprendizaje de la sustracción algebraica. Empleando las expresiones algebraicas obtenidas en el cálculo de perímetros, los equipos representaron con el signo negativo a los términos algebraicos que correspondían a las piezas que se retiraban. En consecuencia, asociaron aquellas longitudes que eran iguales y que habían sido eliminadas; mediante ese procedimiento infirieron que los términos que habían sido sustraídos, se adicionaban con aquellos que eran semejantes; de esta manera, los equipos concluyeron que cuando los términos algebraicos semejantes eran negativos se sumaban a los negativos.

Asimismo, los equipos lograron entender que en la suma y resta de términos algebraicos con diferentes signos, se sustraen los coeficientes y predomina el signo de aquel que tenga mayor valor absoluto; estos descubrimientos permitieron que los equipos realizaran la reducción de expresiones algebraicas con términos positivos y negativos.

Mediante la asociación entre figuras que se retiraban y su representación matemática, los estudiantes lograron comprender que en las restas no aplica la multiplicación de los signos; además, entendieron el procedimiento para sumar y restar términos algebraicos positivos y

negativos.

A través del cálculo de áreas y volúmenes, más la sustitución de términos algebraicos en vez de longitudes, los equipos aprendieron a resolver multiplicaciones algebraicas. Adicionalmente, comprendieron la aplicación de las leyes de los exponentes, pues dedujeron que, el resultado representado con una sola letra, se trataba de multiplicación de longitudes iguales, en las cuales se modificaba el exponente como indicador del número de veces que la longitud se multiplicaba por sí misma; además, relacionaron que el producto de dos o tres longitudes se expresaba con dos o tres letras diferentes.

Tras relacionar las operaciones algebraicas con el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, los equipos diferenciaron los cambios asociados a la adición y multiplicación en las expresiones algebraicas. Específicamente, comprendieron que en la suma, únicamente se modifica el coeficiente de aquellos términos que eran semejantes, empleando para ello polinomios con términos algebraicos de primer, segundo y tercer grado, propuestos por ellos; mientras que en la multiplicación algebraica se ven modificados tanto el exponente como el coeficiente de la expresión algebraica.

Finalmente, al comparar los resultados de las exploraciones diagnóstica y final (*cf.* Gráfica 5), se observa una mejoría del 52.10 % en el aprendizaje del lenguaje algebraico, mientras que en la solución de operaciones algebraicas incrementó un 32.7 %.

Asimismo, los resultados del análisis estadístico, obtenido mediante el cálculo de la media y la desviación estándar (*cf.* Tabla 3.1), muestran una mejora en el tema de lenguaje algebraico; específicamente, la media pasó de 3.34 en la evaluación inicial a 8.52 en la evaluación final, lo que representa un incremento de 5.18 puntos en el desempeño promedio de los estudiantes.

Lenguaje algebraico		
	Inicial	Final
Media	3.34	8.52
Desviación estándar	1.96	2.54
Máximo	6.7	10

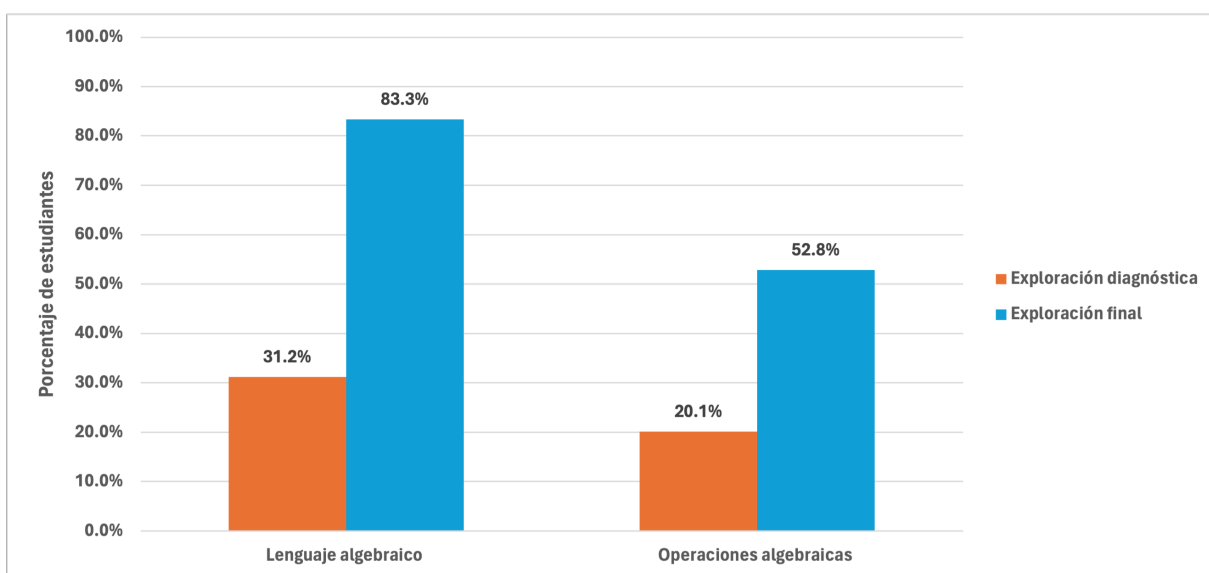
Tabla 3.1 Estadística descriptiva de los resultados obtenidos en lenguaje algebraico

Por otra parte, el análisis estadístico realizado para evaluar el aprendizaje de las operaciones algebraicas (*cf.* Tabla 3.2) muestra un incremento de 3.5 puntos en la media del grupo, al pasar de la evaluación inicial a la final. Este resultado muestra mejora en el desempeño de los estudiantes en relación con el manejo de las operaciones algebraicas, lo que refleja el impacto positivo de la estrategia didáctica aplicada.

Operaciones algebraicas		
	Inicial	Final
Media	2.01	5.51
Desviación estándar	1.31	3.17
Máximo	5	10

Tabla 3.2 Estadística descriptiva de los resultados obtenidos en operaciones algebraicas

Estos resultados evidencian la efectividad de la estrategia didáctica, pues el vínculo establecido entre la geometría y el álgebra favoreció la comprensión del lenguaje algebraico, así como la aplicación correcta de los procedimientos necesarios para resolver operaciones algebraicas.



Gráfica 5: Comparativo de resultados entre exploraciones de álgebra

Capítulo 4

Discusión de los resultados

A partir de la implementación del Teselado como estrategia didáctica para aprender álgebra aplicada a las relaciones de perímetros, áreas y volúmenes, y considerando los resultados obtenidos durante su aplicación, en el presente capítulo se discutirá en qué medida la aplicación de esta estrategia contribuyó a mejorar el aprendizaje del álgebra en los estudiantes del grupo 1°3, así como el alcance de los objetivos planteados en la presente investigación. Como se expuso en capítulos anteriores, durante la implementación de esta estrategia fue fundamental que los estudiantes contaran con conocimientos previos de geometría, a saber, la identificación de figuras geométricas, los conceptos de perímetro, área y volumen, así como la aplicación de fórmulas para realizar los cálculos correspondientes. Además, era indispensable el manejo de instrumentos de medición, como la regla graduada, y el reconocimiento de las unidades de medida lineales, cuadráticas y cúbicas; sin embargo, los resultados obtenidos en la exploración diagnóstica revelaron que los estudiantes tenían carencias significativas en el dominio de estos conocimientos.

Ante esta situación, se consideró pertinente realizar una nivelación de contenidos de geometría antes de poner en marcha la estrategia; esta decisión resultó ser un componente clave para el adecuado desarrollo del este proyecto, ya que los estudiantes pudieron aclarar la confusión preexistente entre los conceptos de perímetro, área y volumen; además, resolvieron cálculos relacionados a estos conceptos, empleando correctamente las relaciones correspondientes. La ejecución de este repaso fue fundamental, pues permitió que esos conocimientos se aplicaran de manera efectiva en el aprendizaje del álgebra, ya que, de

no haberse clarificado previamente estos conceptos, los estudiantes habrían arrastrado dichas dificultades a lo largo de toda la implementación de la estrategia. Lo anterior coincide con lo señalado por Arraiga (2015), quien sostiene que el docente debe considerar la información obtenida a través del diagnóstico pedagógico para seleccionar estrategias metodológicas acordes con las necesidades educativas de los estudiantes.

Además del diagnóstico inicial de geometría, la aplicación de la exploración diagnóstica de álgebra permitió a la docente reconocer aquellos saberes previos que tenían los estudiantes; por ejemplo, se identificó que más de la mitad del grupo asociaba el álgebra con el uso de números y letras, dichos conocimientos fueron los subsensores en la adquisición de nuevos aprendizajes, ya que permitieron establecer conexiones significativas entre los saberes previos y los contenidos por abordar. En este sentido, se parte de lo señalado por Ausubel (2000), quien sostiene que el aprendizaje significativo ocurre cuando el estudiante cuenta con ideas previas en su estructura cognitiva que pueden servir de anclaje para integrar el nuevo conocimiento.

Al analizar los resultados de ambas exploraciones, se esperaría un panorama más favorable, dado que los contenidos evaluados fueron abordados en niveles educativos previos, los de geometría, en la primaria; los de álgebra, en la secundaria; sin embargo, se identificó que los estudiantes presentaban lagunas en su conocimiento, las cuales se han acentuado a medida que avanzan en su formación académica, y que posteriormente, repercutirán negativamente en el aprendizaje de sus cursos posteriores de matemáticas. En este sentido, la estrategia implementada permitió solucionar dichas deficiencias, ya que a través de la nivelación de geometría y su aplicación como base para el aprendizaje del álgebra, se logró que los estudiantes clarificaran conceptos y los aplicaran de forma práctica.

Durante el proceso de construcción del Teselado, los estudiantes aplicaron los conocimientos de geometría que habían repasado previamente, pues como se observa en el capítulo 2, se realizaron once Teselados diferentes, atendiendo a las características constructivas identificadas por ellos, a saber: uso de figuras geométricas, no dejar espacios entre ellas y no superponerlas. Aunque existen diversos tipos de Teselados (Podestá, 2022), no se les impuso emplear uno en específico, lo que permitió a los estudiantes explorar libremente su creatividad. En sus diseños incorporaron tanto figuras regulares como irregulares, colo-

cadadas en diversas disposiciones, lo que enriqueció el proceso de aprendizaje del álgebra, favoreciendo una experiencia más significativa y variada.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la exploración final, aplicada una vez finalizada la estrategia, se observa una mejoría de 52 puntos porcentuales en las preguntas relacionadas con el manejo y traducción del lenguaje común al algebraico. Este avance evidencia que la asociación de las longitudes de las figuras geométricas del Teselado con una representación semiótica facilitó que los estudiantes transitarán de manera natural, desde un lenguaje común para ellos, como lo es la representación de las medidas de los lados de las figuras geométricas, hacía un lenguaje algebraico. Asimismo, se destaca el empleo de una representación semiótica adicional incorporada por el equipo 5: el uso de “ π ” una constante empleada en los cálculos relacionados al círculo. Este proceso implicó un cambio de significados, tal como lo plantean Palarea y Socas (1999).

Asimismo, a través de la formación de coeficientes de los términos algebraicos buscando la proporcionalidad entre longitudes enteras, los estudiantes comprendieron el significado de del coeficiente, identificándolo como un factor multiplicativo que actúa sobre la variable en una expresión algebraica; esto permitió que le dieran sentido a dicho concepto, aclarando la confusión recurrente entre el coeficiente y exponente; en consecuencia, se logró que construyeran un significado más sólido y funcional del lenguaje algebraico, al integrar progresivamente elementos matemáticos que antes resultaban abstractos o carentes de sentido.

Además, con la finalidad de comprobar la correcta asociación entre las unidades de longitud lineales, cuadradas y cúbicas, la docente realizó una verificación de los cálculos de perímetros y áreas de las figuras de los Teselados; en esta, encontró que los estudiantes lograron asociar correctamente las unidades de medida con sus representaciones algebraicas, lo cual más adelante les facilitará el análisis dimensional de distintas unidades de medida, como ocurre en asignaturas como física o química.

Se precisa mencionar que existen trabajos previos en los cuales se ha empleado el álgebra geométrica como un recurso para el aprendizaje del álgebra, tal es el caso de la investigación realizada por Barrios y Mejía (2008), en la que se presentan una secuencia de 6 actividades mediante las cuales los estudiantes desarrollan y dan significado al lenguaje algebraico;

sin embargo, en dicha investigación no se reportan resultados cuantitativos que permitan confirmar la eficacia de este enfoque; lo que limita la posibilidad de valorar objetivamente su impacto en el aprendizaje.

En lo concerniente a la solución de operaciones algebraicas, los resultados de la exploración final evidencian una mejoría del 32.7 % en comparación a la exploración inicial. Al respecto, se destaca que durante la fase de resolución de operaciones algebraicas, se observó que el empleo del concepto de perímetro y la sustitución de términos algebraicos en sus respectivas relaciones, contribuyeron a clarificar los procedimientos de suma algebraica. Las expresiones presentadas en el capítulo 2 evidencian que los estudiantes comprendieron el procedimiento, logrando discernir, a través de la asociación con longitudes, aquellos términos que eran semejantes.

Para aprender a multiplicar algebraicamente, los estudiantes aplicaron las relaciones de áreas y volúmenes, de esa manera lograron comprender los procedimientos, identificando que en esta operación debían multiplicar tanto el coeficiente como la parte literal. Durante estos procesos, cabe destacar la importancia de que los Teselados incluyeran figuras cuya obtención de áreas representara un desafío, como fue el caso de las figuras irregulares utilizadas por los equipos 1, 2, 3, 5, 6, 8 y 9; los trapecios regulares e irregulares, empleados por los equipos 2, 4, 7, 8, 9 y 10; así como los hexágonos y octágonos irregulares, trabajados por el equipo 11. Estas figuras exigieron que los estudiantes recurrieran a procesos de descomposición y posterior suma de áreas, lo cual les permitió poner en práctica tanto la multiplicación algebraica como la suma de expresiones, integrando así diversos conceptos matemáticos de manera significativa.

También, a través del trabajo con el producto algebraico, los estudiantes advirtieron que al multiplicar términos algebraicos cuya representación correspondía a una misma longitud, los exponentes se modificaban, específicamente, se sumaban. En este sentido, cabe destacar que un estudiante del equipo 11 infirió que cuando un término estaba elevado al cuadrado se trataba de la multiplicación de dos longitudes iguales, y dicha relación correspondía al área de un cuadrado. De esta manera, logró vincular los conceptos geométricos con las potencias. Al final, para reafirmar su comprensión, este mismo estudiante expresó a la docente que si se trataba de un cubo, entonces la potencia sería 3, ya que sus tres dimensiones eran iguales.

Este tipo de razonamiento evidencia un aprendizaje significativo y la construcción activa del conocimiento, ya que como afirman Serrano y Pons (2011, p.11) “el conocimiento no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino de un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente” .

Con respecto a la operación resta, la manipulación de figuras del Teselado en 3D, permitió que los estudiantes asociaran el signo menos que acompaña al término algebraico con la sustracción, facilitando que los estudiantes llegaran a la deducción de que para reducir términos algebraicos con términos negativos, no aplicaban la multiplicación de signos, sino que sumaban los términos algebraicos y conservaban su signo, rompiendo así con procedimientos erróneos arrastrados de niveles anteriores. Además, el uso de este material resultó atractivo para los estudiantes, ya que les permitió resolver diferentes restas mediante la exploración de la sustracción entre diferentes figuras. En este sentido, y de acuerdo con Hernández, Muñoz, Palarea, Ruano y Socas (2008), el empleo del material didáctico como medio simbólico ayuda a los estudiantes a pensar, comprender y aprender mejor matemáticas, ya que permiten conectar lo concreto con lo abstracto.

Así como existen investigaciones previas orientadas al desarrollo del lenguaje algebraico mediante asociaciones con elementos geométricos, también se han llevado a cabo estudios enfocados en la solución de operaciones algebraicas a partir de cálculos geométricos como perímetros, áreas y volúmenes. Un ejemplo de ello es el trabajo de Barreto (2023), en el cual se utilizó material didáctico conocido como “Bloques de Dienes”; no obstante, aunque a primera vista nuestra investigación pudiera parecer una aplicación similar, existen diferencias sustanciales que la enriquecen. En el estudio mencionado, los bloques utilizados son elementos preestablecidos, y es el docente quien asigna el significado matemático a cada uno, limitando la participación activa del estudiante en la construcción de dichas representaciones; además, se trabaja únicamente con términos cuyos coeficientes son unitarios. En contraste, en la presente investigación se promovió la creación original por parte de los estudiantes, quienes propusieron sus propias representaciones algebraicas. Asimismo, se empleó la proporcionalidad para generar términos con coeficientes distintos de uno, y se realizaron cálculos de perímetros, áreas y volúmenes tanto en figuras regulares como

irregulares, lo cual aportó mayor riqueza y profundidad al proceso de aprendizaje.

Con relación a los resultados obtenidos, después de haber aplicado la exploración final, en el capítulo anterior se mostró que el 83.3 % de los estudiantes aprendieron y comprendieron el uso del lenguaje algebraico; sin embargo, no se alcanzó el 100 % debido a múltiples factores que se discutirán a continuación. El grupo en el que se aplicó esta investigación estuvo conformado por 55 estudiantes; por ello, fue necesario formar 11 equipos, los cuales fueron guiados por la docente en sesiones de 80 minutos. Este factor fue determinante, pues al ser un grupo tan numeroso, no se les podía dar la atención requerida a cada equipo. En este sentido, Escribano (1995, citado por Sobrados, 2016, p. 783) advierte que el incremento en la cantidad de estudiantes representa una barrera en el fortalecimiento de las prácticas docentes. Por otro lado, en los equipos había integrantes con alto nivel de ausentismo, lo que impactó negativamente en el desarrollo de actividades; ya que sus roles y responsabilidades tenían que ser asumidos por otro integrante del equipo; además, al no desarrollar todas las actividades inherentes al proyecto, se generaban lagunas en el conocimiento que impedían un mejor desempeño. Agregado a lo anterior, como se menciona en el planteamiento del problema de este trabajo, los estudiantes de este plantel tienen problemas con las adicciones, lo cual resta interés en su formación académica. En este caso particular, precisa mencionar que en una clase, tres de los estudiantes del grupo llegaron en estado de ebriedad; por este motivo tuvieron que ser retirados del aula de clase, generando en sus equipos descontrol y desconcierto, afectando con ello, la dinámica grupal. En relación con este hecho, Navalón & Ruíz (2017, p.51) argumentan que el rendimiento académico puede verse negativamente influenciado por el consumo de sustancias psicoactivas, incluyendo el alcohol.

Por si esto fuera poco, es importante considerar el diagnóstico realizado por el orientador, el cual indica que todos los estudiantes se encuentran en la etapa de adolescencia media. Esta etapa se caracteriza por una fuerte necesidad de pertenencia al grupo de pares, lo que conlleva a que los adolescentes tiendan a imitar conductas, códigos y valores. En este contexto, el mismo diagnóstico señala que el grupo se comporta de manera inquieta y desordenada, lo cual puede explicarse por la constante imitación de comportamientos entre compañeros. Esta dinámica grupal cobra especial relevancia si se considera que, como lo plantea Gaete (2025, p. 441), la presión de los pares puede influir tanto de forma positiva

como negativa en el desarrollo de los adolescentes; por ejemplo, se distraían constantemente y se hacían travesuras entre ellos, como esconder los materiales, incluso los Teselados más acabados.

En cuanto a las operaciones algebraicas, los resultados de la exploración final mostraron que, si bien hubo un incremento en el aprendizaje, no se alcanzó el 100 %. Cabe mencionar que en la exploración final, a diferencia de la diagnóstica, se incluyeron más preguntas de tipo abierto y únicamente una de opción múltiple. Esta decisión tuvo como objetivo permitir que la docente pudiera observar y analizar con mayor profundidad los procedimientos empleados por los estudiantes al resolver operaciones algebraicas.

En particular, se precisa señalar que el ejercicio 4 representó una dificultad para varios estudiantes, ya que en este se solicitaba calcular el perímetro y el área de un trapecio. Aunque todos lograron obtener correctamente el perímetro, algunos presentaron problemas al calcular el área, debido a que este procedimiento requería la eliminación de paréntesis. En especial, se observó confusión al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. En este sentido, la aplicación de la exploración final resultó útil no solo para reconocer el nivel de rendimiento académico alcanzado por los estudiantes, sino también para identificar sus principales falencias (Espinoza, 2022, p.127) .

Otro factor que conviene destacar es que durante la solución de restas algebraicas, el tiempo limitado de las sesiones resultó determinante. Para emplear el Teselado 3D en esta operación, los estudiantes primero debían identificar las piezas, realizar su armado y, posteriormente, experimentar mediante el retiro de piezas. Aunque el método utilizado fue exitoso, en algunos equipos el nivel de complejidad de su Teselado dificultó el avance, y el tiempo disponible no fue suficiente para ejercitar con mayor profundidad dicha operación. Respecto a estos resultados en el análisis estadístico presentado en el capítulo anterior (Tabla 3.1 y Tabla 3.2), se observa que en el caso del lenguaje algebraico la media de calificaciones obtenidas incrementó así como la desviación estándar, pasando de 1.96 a 2.54, lo cual implica una mayor dispersión en los resultados finales; es decir, aunque el rendimiento general mejoró, hubo cierta variabilidad entre los estudiantes, ya que como se observa la calificación máxima incremento. La misma situación se muestra en el caso del lenguaje algebraico, donde la desviación estándar incrementó de 1.31 a 3.17, lo cuál

también es indicador de una variabilidad.

Con relación al trabajo colaborativo, al inicio de esta investigación se observó que los estudiantes tenían dificultades para organizarse en equipo; presentaban problemas de comunicación al expresar sus opiniones y no asumían los roles asignados; sin embargo, al enfrentarse a actividades que requerían la colaboración de todos los miembros del equipo, se impulsó a los estudiantes para adaptarse mejor a la dinámica de sus equipos, asumiendo sus roles y mejorando las habilidades de comunicación. Esto coincide con lo señalado por León, Santos y Alonso (2023, p.1431) quienes afirman que “los trabajos colaborativos, incluyen la coordinación y cooperación entre los miembros del grupo, promoviendo la interacción social basada en el diálogo o la escucha mutua, para lograr unos objetivos proyectados”. Finalmente, es preciso señalar que conforme a lo planteado en las orientaciones pedagógicas de la Nueva Escuela Mexicana, durante la implementación de esta investigación la docente asumió el rol de apoyo y guía de los equipos cuando así se lo solicitaron. Esta intervención se realizó sin interferencias ni juicios que pudieran obstaculizar el desarrollo de las actividades, permitiendo que fueran los propios estudiantes quienes construyeran activamente su conocimiento.

Capítulo 5

Conclusiones

El propósito de la presente investigación, fue mejorar el aprendizaje significativo de los estudiantes de bachillerato tecnológico en torno a la solución de operaciones algebraicas, mediante el uso del Teselado, aplicado a perímetros, áreas y volúmenes. Al inicio de la puesta en marcha de esta estrategia, se presentaron diferentes desafíos, como la carencia de conocimientos fundamentales de geometría, actitud de miedo hacia las matemáticas, la dependencia de la docente para resolver problemas, así como la dificultad para adaptarse al trabajo en equipos colaborativos.

Ante este panorama, resultó fundamental realizar la nivelación de conocimientos, lo cual permitió que durante el desarrollo del proyecto, los estudiantes los emplearan sin dificultad para aprender álgebra. En cuanto al trabajo en equipo, se observó una evolución progresiva, pues los estudiantes comenzaron a asumir responsabilidades dentro del grupo mediante la asignación de roles; además, las demandas propias del proyecto, requirieron de la participación activa de todos los integrantes.

Al mostrar a los estudiantes las fotografías de Teselados árabes y plantear el proyecto que desarrollarían, estos se mostraron intrigados, ya que relacionaban dichas construcciones con los vitrales de las iglesias, y no comprendían como a partir de esos elementos podrían aprender álgebra; sin embargo, una vez iniciada la construcción del Teselado, su interés por aprender aumentó; asimismo, se generó entusiasmo cuando los equipos recibieron la impresión de su Teselado en 3D, ya que al utilizar réplicas de su propia creación como un “rompecabezas” para aprender la resta algebraica les resultó significativo.

En este sentido, en el desarrollo de la presente investigación, el uso de materiales manipulativos como el Teselado en cartulina y su versión en 3D, así como la incorporación de elementos presentes en su contexto, crearon condiciones favorables para que los estudiantes construyeran su conocimiento, contribuyendo al aprendizaje significativo y dejando atrás los métodos de enseñanza tradicionales.

En cuanto a la fase del desarrollo del lenguaje algebraico, se puede afirmar que la implementación del Teselado como estrategia didáctica favoreció la transición de lo concreto a lo abstracto, mediante la asociación entre una representación geométrica y una expresión algebraica, este vínculo fomentó la verbalización del lenguaje algebraico y, al emplearse en una situación concreta, permitió a los estudiantes asociar que un término algebraico puede representar la longitud de una figura geométrica, o bien, un polinomio puede expresar un perímetro, suma de áreas o volúmenes.

Posteriormente, en la fase de resolución de operaciones algebraicas, los estudiantes aplicaron los conceptos de perímetro, área y volumen a las figuras del Teselado. Para las operaciones de suma y resta, establecieron diferenciaciones concretas entre los términos algebraicos: los de primer grado se asociaron con el perímetro, los de segundo con el área, y los de tercero con el volumen. Esta asociación les permitió comprender que no era posible sumar términos algebraicos que representaban distintas magnitudes geométricas, reforzando así la comprensión de los procedimientos de suma y resta algebraica. En cuanto a la multiplicación, los estudiantes identificaron dos relaciones clave: cuando los factores estaban representados con diferentes letras, se trataba de longitudes distintas; por tanto, el resultado debía expresarse empleando todas las variables involucradas; en cambio, cuando ambos factores compartían la misma letra, representaban longitudes iguales, y el producto se expresaba conservando la misma literal, modificando solo el exponente.

En este contexto, precisa mencionar la importancia que tuvo la aplicación de una exploración final, con el propósito de medir la eficacia de la estrategia a través de datos cuantitativos. Si bien durante el desarrollo se llevó a cabo una evaluación continua del progreso de los estudiantes, mediante la revisión de libretas y el uso de diversos instrumentos de evaluación, resultó primordial conocer el nivel de conocimientos adquiridos, con el fin de valorar el aprendizaje alcanzado.

Finalmente, con base en lo anteriormente expuesto, se puede afirmar que en la presente investigación se cumplió con el objetivo general, ya que mediante el uso del Teselado como estrategia didáctica, los estudiantes lograron comprender el lenguaje algebraico y aprender a resolver operaciones algebraicas simples de manera significativa. Del mismo modo, se alcanzaron los objetivos específicos al construir el Teselado; además aprendieron a verbalizar el lenguaje algebraico y plantear y resolver operaciones algebraicas. Por lo tanto, esta investigación permitió confirmar la hipótesis planteada y respondió de manera favorable a la pregunta de investigación.

Capítulo 6

Trabajo futuro

Con base a la experiencia derivada de esta investigación, se prefiguran diversas líneas de trabajo que pudieran ser desarrolladas en futuras investigaciones. En primer lugar, se planea la elaboración de un artículo que recopile los hallazgos más relevantes de este estudio, con el objetivo de someterlo a evaluación para su publicación en una revista. Asimismo, se propone ampliar esta estrategia didáctica para incorporar el aprendizaje de la operación de división algebraica, lo cual permitiría evaluar su efectividad en procesos de mayor complejidad.

Bibliografía

- [1] Arriaga, M. (2015). *El diagnóstico educativo, una importante herramienta para elevar la calidad de la educación en manos de los docentes*. Atenas, 3(31):63–74.
- [2] Barreto García, J. C. (2023). *Los bloques lógicos de Dienes como estrategia didáctica para afianzar las operaciones matemáticas*. UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 19(68).
- [3] Barrios, N. and Mejia, G. (2008). *El álgebra geométrica como recurso didáctico en la enseñanza aprendizaje del álgebra escolar*.
- [4] Cadena González, I., Vergel Ortega, M., and Delgado Rojas, J. (2018). *Patrones en mosaicos Y Teselados desde Composiciones Geométricas*. Revista Logos, Ciencia & Tecnología, 10(2):193–197.
- [5] Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar*. In Estepa, A., Contreras, A., Deulofeu, J., Penalva, M. C., García, F. J., and Ordóñez, L., editors, *Investigación en Educación Matemática XVI*, pages 75–94. SEIEM, Jaén.
- [6] Díaz Barriga Arceo, F. and Hernández Rojas, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. McGraw-Hill Interamericana, 3 edition.
- [7] Espinoza Freire, E. E. (2022). *La evaluación de los aprendizajes*. Revista Conrado, 18(85):120–127.
- [8] Gaete, V. (2015). *Desarrollo psicosocial del adolescente*. Revista chilena de pediatría, 86(6):436–443.

- [9] Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F., and Roa, R. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- [10] González, P. (2004). *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. *Revista SUMA*, pages 17–28.
- [11] Hernández, J., Muñoz, M., Palarea, M. M., Ruano, R., and Socas, M. M. (2008). *Materiales manipulativos para la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la educación obligatoria*.
- [12] Ibarra, L. (2007). *Aprende Mejor con Gimnasia Cerebral*. Garnik Ediciones.
- [13] INEE (2017). *Directrices para mejorar la permanencia escolar en la Educación Media Superior*.
- [14] Leyva, N. V. and Espinoza Freire, E. E. (2021). *Características de la evaluación educativa en el proceso de aprendizaje*. *Revista Universidad y Sociedad*, 13(6):363–370.
- [15] León, K., Santos, A., and Alonzo, L. (2023). *El trabajo colaborativo en la educación*. *Horizontes. Revista De Investigación En Ciencias De La Educación*, 7(29):1423–1437.
- [16] Martínez, F. (2021). *Aprendizaje, enseñanza, conocimiento, tres acepciones del constructivismo. Implicaciones para la docencia*. *Perfiles educativos*, 43(174):170–185.
- [17] Mejía, G. and Barrios, N. (2008). *El álgebra geométrica como recurso didáctico en la enseñanza aprendizaje del álgebra escolar*.
- [18] Mejías, C. and Alsina, A. (2021). *Desarrollo histórico-epistemológico del álgebra: evolución hacia distintos significados*. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 21(2):1–14.
- [19] Márquez, M. (2019). *¿Por qué importa aprender álgebra elemental?*
- [20] Navalón Mira, A. and Ruiz-Callado, R. (2017). *Consumo de sustancias psicoactivas y rendimiento académico. Una investigación en estudiantes de educación secundaria obligatoria*. *Salud y drogas*, 17(1):45–52.

- [21] Palarea, M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. Revista didáctica de las matemáticas*, 40:3–28.
- [22] Palarea, M. and Socas, M. (1999a). *La adquisición del lenguaje algebraico. Elementos organizadores de una investigación. In Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, pages 145–171.
- [23] Palarea, M. and Socas, M. (1999b). *Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. El Guiniguada*, (8-9):319–316.
- [24] Papini, M. (2003). *Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1):41–71.
- [25] Piñeiro, G. (2000). *Construcción de polígonos regulares en teselados regulares. Revista de Educación Matemática (RevEM)*, 15(3).
- [26] Podestá, R. A. (2022). *Teselando el plano con polígonos convexos. Revista de Educación Matemática (RevEM)*, 37(1):31–60.
- [27] Rodríguez, M. (2011). *La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. IN. Revista Electrónica d’Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, 3(1):29–50.
- [28] Rodríguez-López, A. M., Hernández-Molina, A. E., and Merchán-Merchán, M. A. (2023). *Estrategia didáctica de diseño artístico para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial. I+D Revista de Investigaciones*, 18(1):55–70.
- [29] SEP (2019). *La nueva escuela mexicana: principios y orientaciones pedagógicas*.
- [30] SEP (2022). *Fundamentos del marco curricular común de la educación media superior*, 2022.
- [31] SEP (2023). *El currículum laboral en la educación media superior*.
- [32] SEP (2024). *Programas de estudio de la carrera técnica de mecatrónica*.

- [33] Serrano, J. M. and Pons, R. M. (2011). *El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 13(1). Consultado el 10 de abril de 2025.
- [34] Serres, V. Y. (2011). *niciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 12(1):122–142.
- [35] Sobrados León, M. (2016). *El trabajo docente en grupos numerosos. Experiencias en el uso del portafolio. Opción*, 32(10):773–788.

Anexo A

Listas de cotejo

Instrumentos de evaluación empleados durante la implementación de la estrategia.



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

Lista de cotejo

***Unidad de Aprendizaje Curricular: Pensamiento Matemático
Fase 2: Construcción del Teselado***

Número de equipo: _____ Fecha: _____

Criterios	Cumple	No cumple
1. Realizaron los ejercicios de Gimnasia Cerebral		
2. Construyeron el Teselado atendiendo a los requerimientos: 1) Uso de figuras geométricas 2) No dejaron espacios entre las figuras 3) Las figuras no estén encimadas		
3. Utilizaron diversidad de colores		
4. En la construcción emplearon instrumentos de medición (regla graduada)		
5. Trabajaron colaborativamente, respetando sus roles asignados		

Observaciones: _____

Figura A.1 Lista de cotejo para la fase de construcción del Teselado



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

Lista de cotejo

Unidad de Aprendizaje Curricular: Pensamiento Matemático

Fase 3: Desarrollo e implementación del lenguaje algebraico

Número de equipo: _____ Fecha: _____

Criterios	Cumple	No cumple
1. <i>Midieron todas las longitudes de las figuras geométricas del Teselado</i>		
2. <i>Asignaron letras a cada una de las longitudes de las figuras geométricas</i>		
3. <i>Buscaron proporcionalidades entre las longitudes las figuras geométricas</i>		
4. <i>Establecieron términos algebraicos con coeficientes unitarios y diferentes de uno</i>		
5. <i>Trabajaron colaborativamente, respetando sus roles asignados</i>		

Observaciones: _____

Figura A.2 Lista de cotejo para la fase de desarrollo e implementación del lenguaje algebraico



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

Lista de cotejo

Unidad de Aprendizaje Curricular: Pensamiento Matemático

Fase 3: Solución de operaciones algebraicas

Número de equipo: _____ Fecha: _____

Criterios	Cumple	No cumple
1. <i>Expresaron el perímetro total del Teselado como una suma de términos algebraicos y los redujeron</i>		
2. <i>Expresaron áreas y volúmenes como una multiplicación algebraica</i>		
3. <i>Multiplicaron algebraicamente, empleando las leyes de los exponentes</i>		
4. <i>Retiraron piezas del Teselado, expresaron los términos algebraicos sustraídos con el signo menos y los redujeron correctamente</i>		
5. <i>Trabajaron colaborativamente, respetando sus roles asignados</i>		

Observaciones: _____

Figura A.3 Lista de cotejo para la fase de solución de operaciones algebraicas

Anexo B

Diagnóstico de orientación

Diagnóstico pedagógico proporcionado por el orientador del grupo 1°3, turno vespertino.

CBT NO 2 BICENTENARIO HUEHUETOCA

DIAGNOSTICO GRUPAL 1º3 TÉCNICOS EN MECATRONICA

TURNO VESPERTINO

1. **Datos e identificación de la escuela.**

El CBT no. 2 Bicentenario Huehuetoca, con CCT 15ECT0164S, Turno vespertino; ubicado en el Centro de Huehuetoca en un horario de 14:00 a 19:50 hrs. Atendiendo a un total de 405 alumnos de los cuales, 55 alumnos corresponden al 1º3, siendo 43 hombres y 12 mujeres. La localidad en general es semiurbana.

2. **Infraestructura**

El CBT en relación al uso de los alumnos de Técnicos en mecatrónica, cuenta con un aula, con pupitres suficientes para todos los alumnos; una sala de mecatrónica, que también es empleada como sala de cómputo, sanitarios separados por género (hombres y mujeres). También con una tienda escolar con venta de alimentos y papelería. Se cuenta con docentes completos y personal manual para la limpieza.

Los alumnos cuentan con profesores capacitados y responsables para impartir sus clases. En relación al ambiente escolar, los alumnos suelen ser impulsivos y han demostrado la capacidad de adaptarse a diferentes trabajos en equipo con diferentes integrantes cada vez. El grupo cuenta con orientadores y se lleva el registro de los aspectos académicos, sociales, vocacionales y conductuales de los alumnos y mantiene una estrecha comunicación con padres, alumnos, profesores y directivos.

3. **Contexto familiar**

Los alumnos de 1º3, manifiestan ser dependientes de sus padres. El 95% de los alumnos que viven con sus padres, se desempeñan como obreros, empleados, choferes etc. El nivel académico de las madres es en su mayoría, con 41% de secundaria. El 80% vive en familias nucleares, el 10% viven en familias monoparentales. El 83% de los alumnos manifiestan tener una excelente comunicación familiar, mientras que el 14% como buena y el 3% regular.

4. **Contexto sociocultural**

En relación con la forma de ver el estudio 22 alumnos dicen que les parece interesante, 20 que les resulta útil, a 5 fácil y a 8 difícil.

El 63% atribuye su dificultad ante el estudio, a la falta de organización, el 33% reconoce que es porque se distrae con facilidad, el 14% piensa que es por falta de constancia y el 5% a falta de interés. El 19% menciona que destinaba dos horas para trabajar extra, al horario escolar, el 44% menciona que una hora, el 12% media hora y el 25% no estudia.

El 90% tiene como meta concluir su preparatoria, el 49% piensa en ir a la universidad.

El 20% viven en casa rentadas, el resto en propia. El 84% practica algún deporte, predominando el fútbol.

Figura B.1 Diagnóstico de orientación. Página 1

5. Desarrollo Cognitivo

De acuerdo al desarrollo cognitivo los alumnos de los alumnos en esta edad se deberían encontrar en una adolescencia media con las siguientes características: Tiene algo de experiencia en utilizar procesos de pensamientos más complejos.

- Expande su pensamiento para incluir inquietudes más filosóficas y futurísticas.
- Suele cuestionar de manera más extensiva.
- Con frecuencia analiza de manera más completa.
- Piensa acerca de y comienza a formar su propio código de ética (por ejemplo, *¿Qué me parece que es lo correcto?*).
- Piensa acerca de las diferentes posibilidades y comienza a desarrollar su propia identidad (por ejemplo, *¿Quién soy yo?*).
- Piensa acerca de y comienza a considerar sistemáticamente posibles metas futuras (por ejemplo, *¿Qué es lo que quiero?*).
- Piensa acerca de y comienza a hacer sus propios planes.
- Comienza a pensar a largo plazo.
- Utiliza el pensamiento sistemático para influenciar sus relaciones con los demás.

6. Hábitos de estudio

Con relación a los hábitos de estudio el 40% menciona sí tener un lugar específico para su estudio. El 45% menciona tener distractores que no puede eliminar. El 41% dice que le gusta tener sus materiales ordenados. El 80% dice que no puede continuar con el estudio si se siente cansado o aburrido. El 85% manifiesta que no duerme sus 8 horas diarias. Sólo un alumno manifiesta no presentar interés por los estudios de bachillerato. 11 alumnos dicen tener dificultad para salir de la frustración al no realizar lo planeado. El 80% manifiestan que les faltan hábitos de estudio, para estudiar o repasar.

7. Estilos de aprendizaje

En relación a los estilos de aprendizaje, los resultados del cuestionario evidencian que el 70% de ellos son visuales, 25% auditivos y el 5% kinestésicos

CBT NO 2 BICENTENARIO HUEHUETOCA

8. Aspectos socioemocionales.

Su percepción de alago hacia ellos es que les reconozcan un trato muy agradable. La mitad del grupo reconoce que aprende más rápido si lo relaciona con algo divertido. Más de la mitad preferiría asistir a una exposición de arte, antes que a una reunión social o a una conferencia. Consideran conformarse una opinión a través de la sinceridad de la voz, antes que de estrechar la mano o el aspecto.

Más de la mitad del grupo se considera atlético y sociable, les gustan las películas de acción y prefieren la comunicación a través del teléfono. Les gusta la apariencia, conversar y relacionan con imágenes para recordar las cosas.

Los deportes, la naturaleza, los ambientes agradables predominan entre las elecciones de los alumnos.

Con relación a lo conductual, se perciben como chicos inquietos, hablan mucho, requieren de disciplina. Se muestran muy desordenados con los profesores que no les colocan límites y requieren trabajar la responsabilidad de entregar en tiempo y forma sus actividades.

METAS

De acuerdo con los indicadores reportados y al Plan de Mejora Continua en relación al aprovechamiento se plantea alcanzar un promedio grupal de 8.5 en éste primer semestre 2024-1. Y con relación a la deserción se esperamos no rebasar el 15%

ELABORO:**IBARRA RAMOS RICARDO****ORIENTADOR DEL GRUPO 1°3 VESPETINO**

Figura B.3 Diagnóstico de orientación. Página 3

Anexo C

Exploración diagnóstica de geometría

Evaluación diagnóstica escrita de geometría, aplicada a los estudiantes del grupo 1°3, con el objetivo de identificar conocimientos previos al inicio del semestre.



CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO

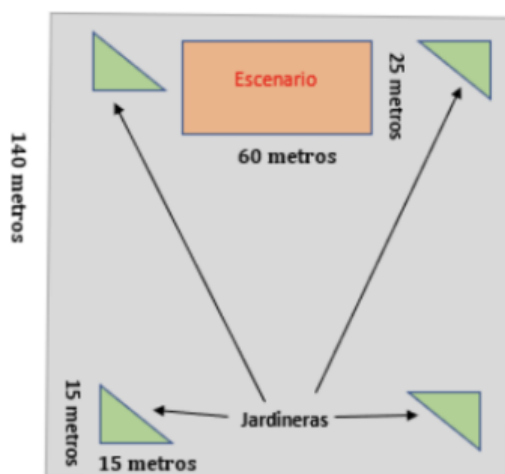
Exploración diagnóstica de geometría
UAC: Pensamiento Matemático

Nombre del estudiante: _____

Grupo: _____ Especialidad: _____

Indicaciones: Lee cuidadosamente cada uno de los enunciados y responde según sea el caso, redactando o seleccionando la opción correcta, presentar operaciones matemáticas en dónde sea necesario.

1. Observa la imagen de la plaza de conciertos y responde lo que se te pide en cada caso:



Calcular:

- a) El área total de la plaza de conciertos.
 - b) El área que corresponde al espacio del escenario.
 - c) El área de las jardineras.
 - d) El área disponible para el público espectador.
2. ¿Cuál es el área de un rombo cuyas diagonales son de 20 y 8 centímetros?. Dibuje el rombo
 3. Calcula el perímetro de un salón rectangular de dimensiones 6.4 m de largo y 3.5 m de ancho.
 4. Dibuja un hexágono regular cuyo lado tenga una longitud $l = 4$ cm. Su apotema es de aproximadamente 3.5 cm. Calcula su área.



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

5. El siguiente cuadrado tiene un longitud de lado “L”, ¿Cuál es la fórmula que utilizarías para calcular su perímetro?



- a) $P = L \times L$
- b) $P = L + L$
- c) $P = 4L$

6. Se necesita cercar con alambre un campo de fútbol que tiene forma rectangular, las medidas que tiene son de 170 m de base y 28 m de altura. Para saber cuantos metros de alambre necesito comprar ¿Qué cálculo requiero realizar?

- a) Perímetro
- b) Área
- c) Volumen

7. Un terreno para sembrar zacate, tiene la forma y las dimensiones que aparecen en la figura ¿Cuál es el área que se tiene para sembrar el zacate?



8. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad, para saber la cantidad de agua que necesitas para llenarla ¿Qué cálculo tendrías que hacer?. Justifica tu respuesta

Anexo D

Exploración diagnóstica de álgebra

Evaluación diagnóstica escrita sobre contenidos de álgebra, aplicada a los estudiantes del grupo 1°3, con el objetivo de identificar conocimientos previos antes de la comenzar con la implementación de la estrategia.



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

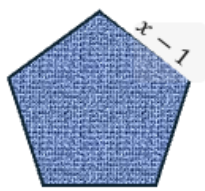
**Exploración diagnóstica
Unidad de Aprendizaje Curricular: Pensamiento Matemático**

Nombre del estudiante: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

Indicaciones: Responda sus datos con tinta azul y el resto del cuestionario con lápiz. Lea cuidadosamente cada pregunta; en las de opción múltiple, subraye la respuesta que considere correcta; en los ejercicios que requieren un procedimiento, escriba todo el procedimiento que utilizó para llegar a la solución. Dispone de 40 minutos para contestar .

- Rama de las matemáticas en la que las operaciones son representadas mediante letras, números y signos.
 - Geometría
 - Aritmética
 - Álgebra
 - Estadística
- Al resolver la multiplicación $2x(x + 5)$, nos da como resultado: $2x^2 + 10x$.
 - Falso
 - Verdadero
- Asocie o traduzca el enunciado a la operación matemática: El doble de un número más tres.
 - $\frac{1}{2}m + 3$
 - $2m + 3$
 - $m^2 + 3$
 - $2(m + 3)$
- El resultado de reducir el polinomio $2x + 3y - 2x^2 + z - (-3y) + 5x - 3x^2 + 2$ es:
 - $5x^2 + 7x + z + 2$
 - $-5x^2 + 7x + 6y + z + 2$
 - $5x^2 + 7x - 6y + z - 2$
 - $-5x^2 + 7x + z + 2$
- Observe la siguiente figura y conteste ¿Qué expresión corresponde al perímetro?



 - $5x - 5$
 - $5x + 5$
 - $5x^2 - 5$
 - $5x^2 + 5$



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

6. Resuelva la siguiente operación $(5s + 3p + 8) - (3s - 9p + 1)$.
7. Seleccione la expresión algebraica que representa el enunciado: corresponde al perímetro de un cuadrado de lado "s".
- a) $P = (s)(s)(s)(s)$
 - b) $P = 4 + s$
 - c) $P = 4s$
 - d) $P = 4s^2$
8. Resuelva las siguientes operaciones $(-8x^2)(-5a^6)(a)$.
9. Se compró una alfombra cuadrada para cubrir el piso rectangular de una habitación; al colocarla, se observa que falta cubrir parte del piso, tal como se muestra en la figura ¿Qué expresión algebraica representa el área total del piso de la habitación?
- a) $x^2 - 6 + x$
 - b) $x^2 + 3x + 2$
 - c) $x^2 - 3x + 2$
 - d) $x^2 + 6 - x$



Figura D.2 Exploración diagnóstica de álgebra. Página 2



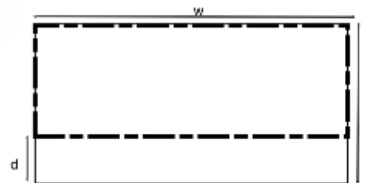
**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

10. Reduzca la siguiente expresión.

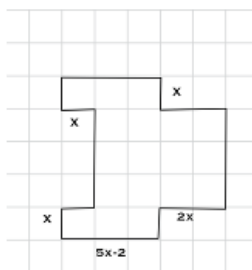
$$(3x^2 + 2x + 13x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 4x + 3x^2 - 4x + 3x^2 - 4x + 3)$$

11. Un granjero está construyendo un corral para sus animales, dejando una franja sin cercar, como se observa en la figura. De las siguientes expresiones algebraicas ¿Cuál es la que representa el área total del corral que no será cercada?

- a) $A = WL$
- b) $A = Wd$
- c) $A = W(L + d)$
- d) $A = W(L - d)$



12. Observe la siguiente figura y coloque las medidas faltantes en los lados.



Anexo E

Exploración final de álgebra

Evaluación final escrita de álgebra, aplicada a los estudiantes del grupo 1°3, con el objetivo de medir la efectividad al concluir la estrategia.



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

Exploración final

Unidad de Aprendizaje Curricular: Pensamiento Matemático

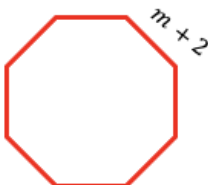
Nombre del estudiante: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

Indicaciones: Responda sus datos con tinta azul y el resto del cuestionario con lápiz. Lea cuidadosamente cada pregunta; en las de opción múltiple, subraye la respuesta que considere correcta; en los ejercicios que requieren un procedimiento, escriba todo el procedimiento que utilizó para llegar a la solución. Dispone de 60 minutos para contestar.

1. Para el enunciado "El ancho de un rectángulo, es el triple de su largo aumentado en 5 unidades", escriba la expresión algebraica que represente el largo y ancho del rectángulo, y dibuje la figura con sus medidas algebraicas.

2. Observe la siguiente figura y escriba la expresión algebraica que representa el perímetro



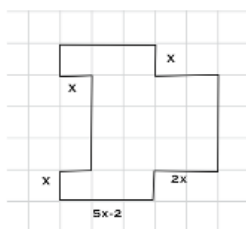
3. El resultado de la operación de $9x - 3y + 5 - (-5x + 4y - 9)$ es:
 - a) $14x - 7y - 5$
 - b) $4x + y - 4$
 - c) $14x - 7y + 14$
 - d) $-4x + y - 4$



**CBT. No.2 BICENTENARIO HUEHUETOCA
TURNO VESPERTINO**

4. Un albañil construirá la barda de un terreno con forma de un trapecoide isósceles, cuyas medidas son: base mayor $5y + 4$, base menor $3y - 2$, lados oblicuos $4y - 3$ y altura $y + 1$. Dibuje la figura con sus medidas y escriba la expresión algebraica que corresponde al cálculo del perímetro y área

5. Observe la siguiente figura, complete las medidas y escriba la expresión algebraica que corresponde al perímetro y área



6. Para la siembra de alcátraces, se tiene un jardín de forma triangular, cuya base mide $x^2 + 8$ y de altura $x^4 - 1$. Dibuje el jardín con sus dimensiones, y exprese el área total que se tiene para plantar las flores.