



**I
N
A
O
E**

MEDICIÓN DE INCERTIDUMBRES Y FASE DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN UNA CAVIDAD

Por

M. en C. Gustavo Trinidad Rubín Linares

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en la especialidad de Óptica

En el

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Supervisada por

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa

INAOE

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

©INAOE

tonantzintla, Pue.

Mayo de 2009

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir
y distribuir copias en su totalidad o en partes de esta tesis.



**MEDICION DE INCERTIDUMBRES Y
FASE DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO
EN UNA CAVIDAD**

Por

M. en C. Gustavo Trinidad Rubín Linares

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en la especialidad de Óptica

en el

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica.

supervisada por:

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa

INAOE

Abril de 2009

Dedicatoria

A Manuel, Ana y Catalina.

A mis padres y mis hermanos.

Agradecimientos

Al **Dr. Héctor Manuel Moya Cessa**, por su dirección, apoyo, enseñanzas y su infinita paciencia en la realización de esta tesis.

A los doctores **Luis Raúl Berriel Valdós**, **Gabriel Martínez Niconoff**, **Arturo Olivares Pérez**, **Julio César Ramírez San Juan** y **Raúl Juárez Amaro** por sus revisiones y sugerencias para mejorar este trabajo.

Al **Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica** y al **CONACyT** por todo su apoyo material y económico para la realización de éste trabajo.

Resumen

La reconstrucción de un estado cuántico es un problema de gran importancia en Óptica Cuántica y campos relacionados. Diversas técnicas se han desarrollado para éste fin, muchas de ellas basadas en Tomografía Cuántica mediante la cual experimentalmente se reconstruye el estado cuántico de la luz desde un conjunto completo de mediciones.

También se ha propuesto medir campos electromagnéticos dentro de cavidades lo que permite reconstruir funciones de distribución de cuasi-probabilidad, como la función de Wigner que constituye una representación alterna de un estado cuántico del campo Electromagnético.

Recientemente se ha propuesto un método para medir la función de Wigner de un Campo Electromagnético cuantizado dentro de una cavidad usando la Transformada de Fresnel de la inversión de población de átomos cruzando la cavidad. Medir la función de Wigner es una tarea difícil, sin embargo, puede ser que sea suficiente tener información de algunas características del campo, como propiedades de compresión y de fase.

Proponemos un esquema sencillo para medir propiedades de fase y compresión de un oscilador armónico. Tratamos el caso de un Campo Electromagnético en una cavidad, pero este esquema puede ser fácilmente realizado en trampas de iones, como la trampa de Paul. El método consiste en realizar transformaciones integrales de propiedades atómicas mensurables, obtenidas al mandar un átomo a través de una cavidad conteniendo el campo bajo estudio, después se aplica una rotación apropiada a la salida de la cavidad y se mide su energía. De esta forma midiendo las polarizaciones atómicas es posible, después de un proceso de integración, medir las fluctuaciones del Campo Electromagnético así como sus propiedades de fase.

Después aplicamos esta metodología a una trampa Paul con frecuencia dependiente del tiempo donde con ayuda del invariante de Lewis le quitamos la dependencia temporal al hamiltoniano para aplicarle nuestra metodología.

Índice general

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTOS

RESUMEN

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCIÓN.	1
1.1. Referencias	4

CAPÍTULO 2.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECÁNICA CUÁNTICA

2.1. Introducción	5
2.2. Descripción cuántica de un sistema	6
2.3. El espacio de las funciones de onda	7
2.4. Notación de Dirac.	10
2.4.1. Estados de número	11
2.4.2. Operadores lineales.	12
2.5. Referencias	17

CAPÍTULO 3

ESTADOS DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

3.1. Introducción.	18
3.2. Cuantización del campo	19
3.3. Estados de Fock	22
3.4. Estados coherentes	24
3.5. Estados comprimidos	26
3.6. Referencias	31

CAPÍTULO 4

MIDIENDO COMPRESIÓN Y FASE DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

4.1. Introducción.	32
4.2. Principio de incertidumbre de Heisenberg	33
4.3. Espectroscopia inversa	34
4.4. Midiendo compresión	35
4.5. Midiendo propiedades de fase.	39
4.6. Referencias	42

CAPÍTULO 5

TRAMPA DE PAUL

5.1. Introducción.	43
5.2. Fundamentos de atrapamiento de iones	43
5.3. Referencias	52

CAPÍTULO 6

TRAMPA DE PAUL CON FRECUENCIA DEPENDIENTE DEL TIEMPO

6.1. Introducción.	53
6.2. Invariante de Lewis.	53
6.3. Transformaciones unitarias.	55
6.4. Medición	62
6.5. Referencias	64

CONCLUSIONES.	65
--------------------------------	-----------

CAPÍTULO 1

Introducción.

Desde el siglo pasado ha tenido lugar un profundo cambio en las opiniones que los científicos tenían sobre los principios matemáticos de la física. Anteriormente se suponía que la mecánica de Newton constituía la base para la descripción de todos los fenómenos físicos, y que por tanto, todo físico teórico debía contribuir al desarrollo y aplicación de éstos principios. El reconocimiento de que no existe razón lógica alguna para que los principios newtonianos y de otros clásicos tengan que ser válidos fuera del campo en que han sido comprobados experimentalmente, trajo consigo las primeras experiencias que pusieron de manifiesto la absoluta necesidad de apartarse de éstos principios. Los intentos de superar las divergencias se concretaron en la introducción de nuevos formalismos matemáticos, de nuevos sistemas de axiomas y reglas en los métodos de la física teórica. La mecánica cuántica es un buen ejemplo de las nuevas ideas. En ella se exige que los estados de un sistema dinámico estén relacionados con las variables dinámicas de una nueva forma, ininteligible desde el punto de vista clásico[1.1, 1.2].

Como todos los procesos están interconectados lo ideal es separarlos y estudiarlos individualmente. La posibilidad de observar partículas individuales atrapadas abrió la

posibilidad de una nueva dimensión en mediciones atómicas. Hasta hace unos años todas las mediciones fueron llevadas a cabo sobre un ensamble de partículas. Por lo tanto, el valor medido era un valor promediado sobre muchas partículas.

Muchos experimentos modernos de óptica cuántica examinan la interacción de uno o algunos átomos con un modo de un resonador cuantizado de una cavidad de muy alta calidad. Estos experimentos permiten estudiar el acoplamiento de la radiación y la materia en gran detalle [1.3, 1.4, 1.5]. Los resultados de éstos experimentos incluyen la demostración de la naturaleza cuántica de la luz, la modificación de la razón de emisión espontánea por una cavidad resonante, etc.

La posibilidad de llevar a cabo experimentos de éste tipo se propicio por el atrapamiento de nubes de partículas o incluso átomos o iones individuales en pequeñas regiones del espacio fue abierta con la invención de trampas electromagnéticas.

Varias trampas han sido desarrolladas para mantener aislados átomos por largos periodos de tiempo, como las de Kingdom [1.6], Penning [1.7] y Paul [1.8] quien recibió el premio nóbel por la invención de la trampa electrodinámica. En ésta trampa la idea es mantener la partícula cargada confinada mediante campos electromagnéticos oscilando a radiofrecuencias.

Se han hecho grandes esfuerzos enfocados en las fluctuaciones en las amplitudes en cuadratura del campo electromagnético para producir estados comprimidos. Esto es una componente en cuadratura del campo tiene menor ruido que un estado coherente, y un exceso de ruido en la componente en cuadratura conjugada de manera tal que el producto de las varianzas de estas componentes debe satisfacer la relación de incertidumbre. En este sentido se han realizado estudios debido a sus aplicaciones en redes de comunicación ópticas [1.9], en técnicas interferométricas [1.10], además, la generación de estados comprimidos ha sido observado en muchos procesos ópticos [1.11, 1.12].

De esta forma, la investigación de las propiedades de compresión del campo de radiación es un tópico central en óptica cuántica.

A fin de comprender la importancia de las propiedades mencionadas del campo electromagnético en la cavidad y resolver el problema que nos hemos propuesto, empezaremos revisando en el Capítulo 2 los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica ya que es en éste escenario donde el sistema propuesto se encuentra. En el Capítulo 3 discutiremos la Cuantización del Campo Electromagnético, así como las distintas bases para expresar estados del Campo Electromagnético como los estados de Fock, Coherentes y Comprimidos que son un ingrediente esencial para nuestro problema. En el Capítulo 4 plantearemos el principio de incertidumbre de Heisenberg el cual nos permite ver el problema de una manera más clara en términos del camino que debemos seguir para lograr nuestro objetivo, donde finalmente lo resolvemos, mostrando la relación entre la información medible u observable y su relación con el Campo Electromagnético en la cavidad. Una vez resuelto nuestro problema aplicar nuestra metodología en el caso de una trampa de Paul para iones para lo cual en el Capítulo 5 revisamos la teoría necesaria para comprender el funcionamiento de una trampa de Paul en términos de los campos involucrados y del ion, para finalmente en el Capítulo 6 aplicar nuestro resultado a una situación novedosa que consiste en una trampa de Paul pero con frecuencia dependiente del tiempo. En éste capítulo partimos de un hamiltoniano dependiente del tiempo y posteriormente mediante transformaciones le quitamos la dependencia temporal y finalmente extraemos información del Campo Electromagnético, como queríamos.

1.1. Referencias.

- [1.1] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press, 1958.
- [1.2] Albert Messiah, Quantum Mechanics, Dover Publications, Inc., 1999.
- [1.3] D. Meschede and H. Walther and G. Müller. Oneatom maser. Phys. Rev. Lett., 54:551, 1985.
- [1.4] M. Brune, J.M. Raimond, P. Goy, L. Davidovich, and S. Haroche. Realization of a two-photon maser oscillator. Phys. Rev. Lett., 59:1899, 1987.
- [1.5] H. Walther., Laser Spectroscopy and Quantum Optics. Reviews of Modern Physics, 71(2), 1999.
- [1.6] Kingdom, H. H. (1923), Phys.Rev. **21**, 408-418.
- [1.7] Penning, F. M., (1937). Physica **4**, 71-75.
- [1.8] Paul, W. (1990) Rev. Mod. Phys. **62**, 531-540.
- [1.9] H. P. Yuen and J. H. Shapiro: IEEE Trans. Inform. Theory **IT24** (1978) 657; *ibid.* **IT26** (1980) 78; J. H. Shapiro, H. P. Yuen and M. J. A. Machado: IEEE Trans. Inform. Theory **IT25** (1979) 179.
- [1.10] C. M. Caves and B. L. Schumaker: Phys. Rev. A **31** (1985) 3068; B. L. Schumaker and C. M. Caves: Phys. Rev. A **31** (1985) 3093.
- [1.11] R. Loudon and P. L. Knight (eds.): Special Issue on Squeezed Light, J. Mod. Opt. **34** (1987).
- [1.12] P. Meystre and D. F. Walls (eds.): Nonclassical Effects in Quantum Optics, New York, AIP, 1991.

CAPÍTULO 2

Conceptos fundamentales.

2.1. Introducción.

La mecánica clásica desde los tiempos de Newton se ha ido desarrollando progresivamente y se ha aplicado a un conjunto de sistemas dinámicos cada vez más amplio, del que forma parte el campo electromagnético en su interacción con la materia [2.1]. Las ideas fundamentales y las leyes que rigen su aplicación constituyen un esquema tan sencillo y elegante, que parecía imposible modificarlo seriamente sin destruir todas sus atractivas características. Sin embargo, se ha conseguido construir un nuevo esquema, llamado mecánica cuántica, más adecuado para la descripción de los fenómenos de escala atómica, y que es en ciertos aspectos más elegante y satisfactorio que el esquema clásico. Esto ha sido posible gracias a que los cambios introducidos por la nueva teoría son de carácter muy profundo y no simples modificaciones que destruirían las características de la teoría clásica que le confieren su armonía, y así ha resultado que todas estas características han podido ser incorporadas al nuevo esquema.

La física Cuántica constituye en la actualidad la base del conocimiento del mundo que nos rodea. A escala atómica y subatómica cualquier fenómeno precisa para su explicación de ésta teoría, incluso fenómenos catalogables como macroscópicos requieren de argumentos cuánticos para su correcta asimilación.

2.2. Descripción cuántica de un sistema.

Para poder entender someramente la diferencia entre la descripción clásica y cuántica de un sistema físico comenzaremos por el estudio de un caso muy sencillo; el sistema elemental formado por una sola partícula.

Desde el punto de vista clásico, la dinámica de este sistema viene dada por el conocimiento de su posición, $\vec{r}(t)$ y su velocidad, $\vec{v}(t)$; y con éste conjunto de parámetros se determina el estado de la partícula del cual se conoce su evolución temporal aplicando la mecánica newtoniana a un estado inicial. Por lo tanto el estado es determinista; esto es, descrito con incertidumbre nula.

Sin embargo en el caso cuántico el estado viene dado por el conocimiento de un campo escalar, denominado función de onda, $\psi(\vec{r}, t)$, en todos los puntos del espacio. Es decir, ahora el estado, para cada instante de tiempo t , viene dado por un número infinito de parámetros, en lugar de los seis del caso clásico. Además la evolución del estado del sistema está determinado por la ecuación de Schrödinger para la función de onda:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

donde H es el operador hamiltoniano del sistema que representa la energía total, similar al utilizado en mecánica clásica. Así pues, conocida $\psi(\vec{r}, 0)$, es posible, resolviendo la ecuación 2.1, determinar $\psi(\vec{r}, t)$ para cualquier instante posterior.

Ya que la descripción del estado del sistema en el caso cuántico es probabilística. La probabilidad de encontrar a nuestra partícula en el instante t en el intervalo de volumen

diferencial $d^3r = dx dy dz$ alrededor del punto del espacio \vec{r} viene dada por $\psi(\vec{r}, t)^2 d^3r$. Por tanto, la función de onda actúa en la teoría como una función de densidad de probabilidad, y, como tal, ha de verificar en todo el espacio la relación siguiente:

$$\int \psi(\vec{r}, t)^2 d^3r = 1. \quad 2.2$$

2.3. El espacio de las funciones de onda.

El espacio de funciones de onda que verifican la relación 2.2, se debe restringir a funciones que sean de modulo al cuadrado integrable, este espacio se denomina espacio L^2 . Pero debido a que estas funciones de onda satisfacen ciertos criterios de regularidad (están acotadas, están definidas para cualquier \vec{r} , y son continuas e infinitamente diferenciables), se supondrá que constituyen un subespacio de L^2 al que se denomina F y es posible demostrar que es un espacio de Hilbert, es decir es un espacio vectorial lineal, en cual esta definido un producto escalar, y es completo. Este espacio tiene definido el producto con las propiedades ya conocidas de simetría, linealidad, ortogonalidad, autoproducción escalar, norma y desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sobre las funciones de onda pueden actuar operadores lineales, que son entidades matemáticas que al aplicarse sobre una función de onda $\psi(\vec{r}) \in F$, la transforma mediante una correspondencia lineal, en otra $\psi(\vec{r}')$ no necesariamente perteneciente a F :

$$\psi(\vec{r}') = A\psi(\vec{r}). \quad 2.3$$

Así mismo se puede definir el producto de dos operadores lineales A y B , el cual en general no es conmutativo; es decir $AB\psi(\vec{r}) \neq BA\psi(\vec{r})$ y en donde se obtiene una relación llamada el conmutador, que se define como $[A, B] = AB - BA$.

Ya que el espacio F tiene la estructura de un espacio de Hilbert; se trata entonces de un espacio vectorial de dimensión infinita, el cual puede ser expandido de forma única por ciertos conjuntos de funciones (no necesariamente pertenecientes a F), cada uno de los

cuales recibe el nombre de *base del espacio F*. Con base en lo anterior, podemos decir que un conjunto ortonormal de funciones se dice base de F si cualquier función de onda de F , $\psi(\vec{r})$, puede expresarse de forma unívoca como una combinación lineal de las funciones que constituyen el conjunto:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_i c_i u_i(\vec{r}), \quad 2.4$$

donde $c_i = (u_i, \psi)$ es el producto escalar de u_i con ψ [2.2]. De ésta forma el conjunto de números complejos c_i representará a $\psi(\vec{r})$ en la base $\{u_i(\vec{r})\}_i$.

Una vez establecida una base, se puede expresar de manera muy sencilla el producto escalar de dos funciones de onda en función de sus componentes en dicha base. Es decir, dada $\{u_i(\vec{r})\}_i$ base de F , y $\psi(\vec{r}), \phi(\vec{r}) \in F$ tales que

$$\psi(\vec{r}) = \sum_i a_i u_i(\vec{r}), \quad 2.5$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_j b_j u_j(\vec{r}), \quad 2.6$$

se tiene que

$$(\psi, \phi) = \sum_i a_i^* b_i. \quad 2.7$$

Y además la condición para que el conjunto $\{u_i(\vec{r})\}_i$ sea una base se puede expresar como:

$$\sum_i u_i^*(\vec{r}') u_i(\vec{r}) = \delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad 2.8$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. Este tipo de relación se denomina de clausura.

Ahora sea el conjunto de funciones $\{u_\alpha(\vec{r})\}_\alpha$ donde α es un parámetro de enumeración real. Este conjunto se dice ortonormal si se satisface la siguiente relación:

$$\int \omega_{\alpha}^*(\vec{r}) \omega_{\alpha'}(\vec{r}) d^3r = \delta(\alpha - \alpha'). \quad 2.9$$

El conjunto es una base si es posible una descomposición lineal unívoca de cualquier función de onda:

$$\psi(\vec{r}) = \int c_{\alpha} \omega_{\alpha}(\vec{r}) d\alpha, \quad 2.10$$

$$\text{con } c_{\alpha} = \int \omega_{\alpha}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r.$$

Al igual que en el caso de bases pertenecientes a F , dadas dos funciones de onda $\psi(\vec{r})$, $\phi(\vec{r}) \in F$ cuyos componentes en una base concreta $\{\omega_{\alpha}(\vec{r})\}_{\alpha}$ son conocidos,

$$\psi(\vec{r}) = \int a_{\alpha} \omega_{\alpha}(\vec{r}) d\alpha, \quad 2.11$$

$$\phi(\vec{r}) = \int b_{\alpha} \omega_{\alpha}(\vec{r}) d\alpha', \quad 2.12$$

su producto escalar se puede calcular como

$$(\psi, \phi) = \int a_{\alpha}^* b_{\alpha} d\alpha. \quad 2.13$$

De forma similar se define también una relación de clausura

$$\int \omega_{\alpha}^*(\vec{r}') \omega_{\alpha}(\vec{r}) d\alpha = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad 2.14$$

De lo expuesto anteriormente podría decirse que todas las bases de F han de ser conjuntos ortonormales de funciones, y esto no es así. No existe razón por la cual un conjunto no ortogonal, pero completo, no pueda ser una base; basta con que verifique la relación de clausura adecuada.

2.4. Notación de Dirac.

Ya que las entidades fundamentales en mecánica cuántica son los estados de sistemas y los operadores. El formalismo de Dirac es conciso y conveniente para analizar estas expresiones mecánico-cuánticas. En la notación de Dirac, un sistema mecánico-cuántico puede ser descrito completamente por su vector de estado el cual puede ser expresado por *bras* y *kets*. Estas dos representaciones contienen la misma información y son adjuntos entre si en un espacio de Hilbert H . El *ket* se escribe como $|\psi\rangle$, donde ψ especifica el estado, y el vector asociado a este estado se denomina *bra* y se escribe como $\langle\psi|$.

Un estado puede ser expandido en una superposición de estados ϕ_n :

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle, \quad 2.15$$

donde c_n es un numero complejo.

El producto escalar de dos estados se expresa en la siguiente forma

$$\langle\psi|, |\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle, \quad 2.16$$

donde el vector asociado $\langle\psi|$ es el conjugado hermitiano del *ket* correspondiente [2.3]. La conjugación hermitiana se identifica con “+” y es una operación lineal. Cuando un producto simple escalar ya sea de operadores y/o de estados se conjuga, los factores se conjuga y su orden se invierte

$$\langle\phi|\psi\rangle^+ = \langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*, \quad 2.17$$

donde el producto escalar es un número complejo. Similarmente se puede aplicar a productos de más de dos factores, repitiendo la regla:

$$(\phi \hat{A} \psi) = \psi (\phi \hat{A}) = \psi \hat{A}^+ \phi . \quad 2.18$$

Ya que ψ y $c\psi$, representan el mismo estado, por convención (y para simplificar la interpretación probabilística del vector de estado) se utilizan vectores de estado normalizados

$$\psi \psi = 1. \quad 2.19$$

Entonces a cada estado le corresponde un vector de estado único (excepto por un factor de fase) y la probabilidad de encontrar el objeto descrito por ψ en el estado ϕ_n esta dada por:

$$0 \leq \psi \phi_n^2 \leq 1. \quad 2.20$$

Dos estados son ortogonales si satisfacen la siguiente relación:

$$\psi \phi_j = 0, \quad 2.21$$

y son idénticos si se verifica que

$$\psi \phi = 1. \quad 2.22$$

2.4.1. Estados de número.

Ya que la energía es un observable, entonces se asocia con un operador Hermitiano y con un conjunto completo de estados, donde la energía de cualquiera de estos puede ser escrita como $\hbar\nu(n+1/2)$, donde $n= 1, 2, 3, \dots$ es el número de cuantos de energía electromagnética en el modo, y los eigenestados de energía se representan como $\{n\}$ y son llamados estados

de número o de Fock [2.4]. El estado $|0\rangle$ es el estado base del campo electromagnético y también es conocido como el estado vacío.

Ya que los eigenvalores no son degenerados, entonces los estados de número son ortogonales. Además, los estados se encuentran normalizados, es decir:

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn}. \quad 2.23$$

La base de los estados de número es una base completa y además muy conveniente para expandir estados del campo electromagnético.

2.4.2. Operadores lineales.

Todas las dinámicas y las mediciones de sistemas en mecánica cuántica son descritas por la acción de operadores lineales. Frecuentemente, pero no siempre los operadores son denotados por \hat{A} . En general, cuando un operador actúa sobre un estado, el estado resultante es un estado diferente:

$$\hat{A}\psi = \psi'. \quad 2.24$$

Es importante notar el orden entre el operador y el estado, y entre diferentes operadores, ya que el álgebra de operadores no es conmutativa. Los operadores actúan a la derecha sobre *kets* y a la izquierda para *bras*.

Otro producto de interés es el externo de dos operadores ψ y ϕ que se define como:

$$\psi \phi, \quad 2.25$$

y que es una matriz.

Un operador muy especial es el operador identidad \hat{I} definido por

$$\hat{I}\psi = \psi \quad , \forall \psi \in H . \quad 2.26$$

El operador identidad se puede escribir de manera más explícita en términos del conjunto de estados $\{\phi_n\}$ de una base ortonormal completa, donde el operador identidad queda como:

$$\hat{I} \equiv \sum_n \phi_n \phi_n . \quad 2.27$$

Esta relación es de gran utilidad en el álgebra de operadores. Sin embargo, ya que el efecto de cualquier operador se conoce completamente si es conocida la forma de operar de este sobre cada uno de los estados base elegidos, entonces cualquier operador se puede expresar como una suma de productos externos; es decir si el operador cumple la siguiente relación:

$$\hat{A}\phi_n \equiv \sum_m a_{mn} \phi_m , \quad 2.28$$

entonces dicho operador se puede expresar como:

$$\hat{A} \equiv \sum_{m,n} a_{mn} \phi_m \phi_n . \quad 2.29$$

Un operador lineal satisface la siguiente relación:

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2 , \quad 2.30$$

y también para la suma

$$(\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi . \quad 2.31$$

Y el inverso de un operador se define como:

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}, \quad 2.32$$

aunque no siempre existe.

De la relación anterior se desprenden las características para el operador unitario \hat{U} :

$$\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1} \quad \text{o también} \quad \hat{U}\hat{U}^+ = \hat{U}^+\hat{U} = \hat{I}. \quad 2.33$$

También se define el conmutador de dos operadores \hat{A} y \hat{B} como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad 2.34$$

De la relación anterior se observa que el conmutador es cero si los operadores conmutan, pero si no conmutan es posible encontrar estados muy particulares para los cuales el conmutador sea cero. Esta álgebra no-conmutativa es uno de los ingredientes que hace a la mecánica cuántica más rica en fenómenos que la mecánica clásica, pero frecuentemente más difícil de realizar los cálculos. Además los operadores observables que no conmutan conducen al concepto de complementaridad y de incertidumbre en mecánica cuántica.

El eigenestado E_n y el eigenvalor λ_n de un operador \hat{A} satisfacen

$$\hat{A} E_n = \lambda_n E_n, \quad 2.35$$

donde los eigenvalores λ_n son en general complejos.

Ya que todas las entidades medibles u observables corresponden a operadores \hat{O} , los cuales son operadores hermitianos, que son definidos como:

$$\hat{O}^+ = \hat{O}. \quad 2.36$$

De la última relación se concluye que los eigenvalores de los operadores hermitianos son reales. Además los eigenestados para \hat{O} con diferentes eigenvalores son ortogonales. Si

todos los eigenvalores son diferentes, entonces el conjunto de eigenestados (normalizados) $\{E_n\}$ define una base ortonormal completa.

Cuando uno realiza una medición de una observable correspondiendo al operador hermitiano \hat{O} , la medida producirá uno de los eigenvalores del operador. La probabilidad de obtener una medida específica λ_n cuando se mide el estado ψ esta dada por:

$$P_n = |E_n \psi|^2. \quad 2.37$$

Ya que a priori la medida resultante de un estado específico es en general indeterminista, entonces, si la medición produce λ_n como resultado, el estado colapsa en el estado E_n . Este notable resultado es el postulado de proyección de von Neumann.

Ya que la mecánica cuántica no es determinista sino mas bien estadística, el valor esperado de un operador, tomando como vector de estado ψ , puede expresarse como:

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \psi \hat{A} \psi = \sum_n P_n \lambda_n = \sum_n |E_n \psi|^2 \lambda_n = \sum_n c_n^2 \lambda_n, \quad 2.38$$

donde $c_n \equiv |E_n \psi|$ es el coeficiente de expansión del vector de estado en la base $\{E_n\}$.

Otro operador importante es el operador de densidad $\hat{\rho}$. Para un estado puro es simplemente $\hat{\rho} \equiv \psi \psi$, cuya forma simétrica de operar resulta muy conveniente en el álgebra de operadores. El valor esperado de un operador puede escribirse como:

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr \{ \psi \psi \hat{A} \}, \quad 2.39$$

donde se utiliza Tr para expresar la traza y se calcula por expandir el estado ψ en cualquier base ortonormal completa y sumar los elementos de la diagonal, esto es:

$$\text{Tr}\{\psi^\dagger \psi \hat{A}\} = \sum_n \langle E_n | \psi^\dagger \psi \hat{A} | E_n \rangle = \sum_n c_n^2 \lambda_n, \quad 2.40$$

lo que conduce a un caso simple:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = 1. \quad 2.41$$

2.5. Referencias.

[2.1] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press, 1958.

[2.2] Albert Messiah, Quantum Mechanics, Dover Publications, Inc., 1999.

[2.3] Richard L. Liboff, Introductory Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1980.

[2.4] D: F. Walls and Gerard J. Milburn, Quantum Optics, Springer-Verlag, 1994.

[2.5] Louisell W. H., Quantum Statistical Properties of Radiation, New York: Wiley, 1973.

CAPÍTULO 3

Cuantización del Campo Electromagnético.

3.1. Introducción.

Para estudiar las características cuánticas de la luz es necesario llevar a cabo la cuantización del campo electromagnético por medio del modelo del oscilador armónico.

El oscilador armónico juega un papel muy importante en la física, y en particular en física cuántica, ya que este se utiliza para modelar de manera aproximada sistemas que involucran oscilaciones cuantizadas, como en Electrodinámica Cuántica ó en la teoría de vibraciones cristalinas y moleculares [3.1], además se puede resolver exactamente. En capítulos posteriores se utilizará en la descripción del campo electromagnético, así como en sistemas de enfriamiento láser de iones en trampas de Paul.

En este capítulo describiremos los estados cuánticos de un oscilador harmónico simple descrito por el siguiente hamiltoniano

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2} M\Omega^2 \hat{x}^2, \quad (3.1)$$

donde M es la masa de el oscilador y Ω es su eigenfrecuencia. Los operadores \hat{x} y \hat{p} describen su posición y momento, respectivamente.

Estudiaremos tres conjuntos posibles de estados base: los estados de Fock o de número, los estados coherentes y los estados comprimidos.

3.2. Cuantización del campo.

Un punto de partida para la cuantización del campo electromagnético son las ecuaciones clásicas de Maxwell para el campo electromagnético libre [3.2, 3.3, 3.4]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot D &= 0 \\ \nabla \times B &= \frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $B = \mu_0 H$, $D = \epsilon_0 E$, μ_0 y ϵ_0 son la permeabilidad y permitividad del espacio libre, y $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$. Las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante cambios de escala o condiciones adicionales cuando no hay fuentes.

Una elección conveniente para analizar problemas en óptica cuántica es la condición de contraste de Coulomb, en el cual tanto B como E pueden ser determinados de un vector de potencial $A(r, t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ E &= -\frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

utilizando la condición de contraste de Coulomb definida como:

$$\nabla \cdot A = 0, \quad (3.4)$$

con estas expresiones podemos encontrar que $A(r, t)$ satisface la ecuación de onda, dada por:

$$\nabla^2 A(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A(r, t)}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

Estudiaremos tres conjuntos posibles de estados base: los estados de Fock o de número, los estados coherentes y los estados comprimidos.

3.2. Cuantización del campo.

Un punto de partida para la cuantización del campo electromagnético son las ecuaciones clásicas de Maxwell para el campo electromagnético libre [3.2, 3.3, 3.4]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot D &= 0 \\ \nabla \times B &= \frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $B = \mu_0 H$, $D = \epsilon_0 E$, μ_0 y $\epsilon_0 E$ son la permeabilidad y permitividad del espacio libre, y $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$. Las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante cambios de escala o condiciones adicionales cuando no hay fuentes.

Una elección conveniente para analizar problemas en óptica cuántica es la condición de contraste de Coulomb, en el cual tanto B como E pueden ser determinados de un vector de potencial $A(r, t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ E &= -\frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

utilizando la condición de contraste de Coulomb definida como:

$$\nabla \cdot A = 0, \quad (3.4)$$

con estas expresiones podemos encontrar que $A(r, t)$ satisface la ecuación de onda, dada por:

$$\nabla^2 A(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A(r, t)}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

la cual podemos separar en dos términos complejos

$$A(r,t) = A^{(+)}(r,t) + A^{(-)}(r,t) \quad (3.6)$$

Donde $A^{(+)}(r,t)$ contiene todas las amplitudes que varían como $e^{-i\omega t}$ para $\omega > 0$ y $A^{(-)}(r,t)$ las que varían como $e^{+i\omega t}$ y las amplitudes satisfacen $A^{(+)} = (A^{(-)})^*$.

Ya que es más sencillo manejar un conjunto discreto de variables que uno continuo, entonces describimos el campo en una región restringida a cierto volumen del espacio y expandimos el vector de potencial en términos de un conjunto discreto de funciones de modo ortogonales, esto es:

$$A^{(+)}(r,t) = \sum_k c_k u_k(r) e^{i\omega_k t}, \quad (3.7)$$

donde los coeficientes de Fourier c_k son constantes para el campo libre. El conjunto de funciones de los vectores de modos $u_k(r)$ correspondiendo a las frecuencias ω_k satisfacen la siguiente relación:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) u_k(r) = 0, \quad (3.8)$$

también, las funciones de modo son requeridas para satisfacer la condición de transversalidad:

$$\nabla \cdot u_k(r) = 0, \quad (3.9)$$

donde las funciones de modo constituyen un conjunto normal completo, es decir:

$$\int u_k^*(r) u_{k'}(r) dr = \delta_{kk'}, \quad (3.10)$$

además, dichas funciones dependen de las condiciones de frontera del volumen en consideración, es decir, condiciones de frontera periódica correspondiendo a modos de ondas viajeras o condiciones apropiadas para reflexión en las paredes las cuales conducen a ondas estacionarias. Para el caso de un volumen cúbico de lado L , tenemos;

$$u_k(r) = L^{-3/2} \hat{e}^{(\lambda)} \exp(ik \cdot r), \quad (3.11)$$

donde $\hat{e}^{(\lambda)}$ es un vector unitario de polarización. Los índices de modo k describen diversas variables discretas, el índice de polarización ($\lambda=1, 2$) y las tres componentes cartesianas de el vector de propagación k . Cada una de las componentes de el vector de onda k toma los valores siguientes:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.12)$$

debido a la condición de transversalidad, es necesario que el vector de polarización $\hat{e}^{(\lambda)}$ sea perpendicular a k . Tomando en cuenta esto, el vector de potencial se puede escribir de la siguiente forma:

$$A(r, t) = \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k u_k(r) e^{-i\omega_k t} + a_k^+ u_k^*(r) e^{i\omega_k t}]. \quad (3.12)$$

Lo que nos da una forma para el campo eléctrico:

$$E(r, t) = i \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k u_k(r) e^{-i\omega_k t} - a_k^+ u_k^*(r) e^{i\omega_k t}], \quad (3.13)$$

donde en la última ecuación los factores de normalización se han seleccionado para que a_k y a_k^* no tengan dimensiones.

En la Teoría Electromagnética Clásica, éstas amplitudes de Fourier son números complejos.

Finalmente la cuantización del campo electromagnético se logra eligiéndolos operadores a_k y a_k^* mutuamente adjuntos, y tomando en cuenta que los fotones son bosones, estos satisfacen las relaciones de conmutación siguientes:

$$[a_k, a_k] = [a_k^*, a_k^*] = 0, \quad [a_k, a_k^*] = \delta_{kk}. \quad (3.14)$$

El comportamiento dinámico del campo electromagnético puede ser descrito por un conjunto de osciladores armónicos independientes los cuales obedecen las relaciones de conmutación anteriores. Los estados cuánticos de cada modo pueden ser descritos por un vector de estado ψ_k del espacio de Hilbert apropiado para cada modo.

El hamiltoniano para el campo electromagnético esta dado por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dr \\ &= \sum_k \hbar \omega_k (a_k^+ a_k + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Este último resultado representa la suma del operador de número de fotones en cada modo, multiplicado por la energía de un fotón en ése modo, mas $\frac{1}{2} \hbar \omega_k$ que representa la energía de las fluctuaciones en el vacío de cada modo. En lo que sigue consideraremos tres posibles representaciones del campo electromagnético: los estados de número a Fock, los estados coherentes y los estados comprimidos.

3.3. Estados de Fock.

El hamiltoniano de la ecuación 3.15 tiene los eigenvalores $\hbar \omega_k (n_k + \frac{1}{2})$ donde n_k es un entero ($n_k = 0, 1, 2, \dots, \infty$). Los eigenestados se escriben como $|n_k\rangle$ y son conocidos como estados de número o de Fock, estos estados son eigenestados del operador de número $N_k = a_k^+ a_k$, es decir:

$$a_k^+ a_k n_k = n_k n_k, \quad (3.16)$$

donde además el estado base del oscilador (o el estado vacío del modo del campo) está definido por:

$$a_k 0 = 0, \quad (3.17)$$

lo que da lugar a que la energía del estado base se exprese como:

$$0 H 0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k, \quad (3.18)$$

también, la aplicación de los operadores de creación y aniquilación a los estados de número, produce las siguientes relaciones:

$$a_k n_k = n_k^{1/2} n_k - 1, \quad a_k^+ n_k = (n_k + 1)^{1/2} n_k + 1, \quad (3.19)$$

de lo anterior se puede encontrar que los vectores de estado para los estados de excitación más altos se pueden obtener por la aplicación sucesiva del operador de creación al estado vacío, esto es:

$$n_k = \frac{(a_k^+)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} 0, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

además los estados de número un conjunto de estados ortogonales y completos, es decir, satisfacen las relaciones siguientes:

$$n_k m_k = \delta_{mn}, \quad \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k n_k = 1, \quad (3.21)$$

ya que la norma de estos eigenvectores es finita, entonces forman un conjunto completo de vectores base para un espacio de Hilbert.

Los estados de número son una forma muy útil para la representación de fotones de alta energía, pero solo para el caso en que el número de fotones sea pequeño; ya que para campos ópticos en los que el número total de fotones es grande, esta representación no resulta ser muy adecuada. Una base más apropiada para muchos campos ópticos son los estados coherentes.

3.4. Estados coherentes.

Los estados coherentes tienen un número de fotones indefinido, lo que permite expresar la fase con mayor precisión que en los estados de número donde la fase es completamente aleatoria. El producto de las incertidumbres en la amplitud y la fase para un estado coherente, es el valor mínimo permitido por el principio de incertidumbre. Lo que hace que sean los estados mecánico-cuánticos más cercanos a la descripción clásica del campo. Estos estados se pueden generar fácilmente utilizando el operador unitario de desplazamiento de Glauber [3.5]:

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \quad (3.22)$$

donde α es un número complejo arbitrario.

Ahora vamos a describir esta última relación con ayuda del teorema de Baker-Hausdorff:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}, \quad (3.23)$$

lo que nos da como resultado para el operador de desplazamiento:

$$D(\alpha) = e^{-\alpha^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}, \quad (3.24)$$

este operador de desplazamiento satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 D^+(\alpha) &= D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha), & D^+(\alpha)aD(\alpha) &= a + \alpha, \\
 D^+(\alpha)a^+D(\alpha) &= a^+ + \alpha^*
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Con el operador de desplazamiento, los estados coherentes se generan al aplicarlo sobre el estado vacío, es decir:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \tag{3.26}$$

Los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación a , y también se pueden obtener a partir de una superposición de estados de número, como se muestra en la siguiente relación:

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \tag{3.27}$$

También podemos determinar la distribución de probabilidad de fotones en un estado coherente, la cual toma la forma de una distribución de Poisson:

$$P(n) = \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle = \frac{\alpha^{2n} e^{-\alpha^2}}{n!}, \tag{3.28}$$

donde α^2 es el número medio de fotones ($\bar{n} = \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle = \alpha^2$).

Para dos estados coherentes cualesquiera $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ se satisface la siguiente relación:

$$D(\alpha + \beta) = D(\alpha)D(\beta) \exp(-i \operatorname{Im}\{\alpha\beta^*\}), \tag{3.29}$$

con el producto escalar para estos estados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \langle \beta | \alpha \rangle &= \langle 0 | D^+(\beta) D(\alpha) | 0 \rangle \\
 &= \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta^*\right]
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

de ésta última relación tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \beta e^{-\alpha - \beta^2} d\alpha d\beta = 1. \quad (3.31)$$

La ecuación anterior expresa que los estados coherentes no son ortogonales, pero pueden aproximarse a la ortogonalidad. Los estados coherentes forman un conjunto sobrecompleto, de acuerdo a:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \alpha d^2\alpha = 1. \quad (3.32)$$

Finalmente, para ilustrar el significado físico de los estados coherentes; podemos decir que, el campo generado por un láser altamente estabilizado operando por arriba de su nivel umbral, es un estado coherente[3.6]. Estos estados constituyen una base muy útil para expandir el campo óptico a problemas relacionados con física de láseres y óptica no lineal.

3.5. Estados comprimidos.

Estos estados constituyen otra clase de estados de mínima incertidumbre, los cuales pueden tener menos ruido que un estado coherente en una de sus dos componentes en cuadratura, en tanto que el ruido en la otra componente en cuadratura es mayor que aquella para el estado coherente; logrando de esta forma mantener un estado de mínima incertidumbre. De lo anterior podemos dilucidar que los estados coherentes son una clase especial de un conjunto más general de estados de mínima incertidumbre, es decir en los estados coherentes las dos componentes en cuadratura presentan igual cantidad de ruido.

Para analizar esta familia de estados de mínima incertidumbre, comenzaremos citando los operadores de posición y de momento para el oscilador armónico:

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a - a^\dagger), \quad (3.33)$$

calculando la varianza, tenemos para un estado coherente, tenemos las siguientes relaciones de incertidumbre:

$$(\Delta q)_{coh}^2 = \frac{\hbar}{2\omega}, \quad (\Delta p)_{coh}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (3.34)$$

y el producto de estas incertidumbres, nos da un valor mínimo, como sigue:

$$(\Delta q \Delta p)_{coh} = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.35)$$

Consideremos ahora las propiedades de un solo modo del campo. Para este caso podemos escribir el operador de aniquilación a como una combinación lineal de dos operadores hermitianos

$$a = \frac{X_1 + iX_2}{2}, \quad (3.36)$$

donde X_1 y X_2 , son las partes real e imaginaria de la amplitud compleja, para amplitudes sin dimensiones en las dos cuadraturas del modo. Estos operadores obedecen la relación de conmutación

$$[X_1, X_2] = 2i, \quad (3.37)$$

con lo que obtenemos para el principio de incertidumbre:

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 1, \quad (3.38)$$

si tomamos en esta última relación el signo de igualdad, tenemos los estados de mínima incertidumbre, donde un caso particular son los estados coherentes en donde tenemos:

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1. \quad (3.39)$$

Gráficamente un estado coherente puede ser representado por un círculo de error en un plano de complejo con ejes X_1 y X_2 y centro en $\frac{1}{2} X_1 + iX_2 = \alpha$ y radio $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1$ como se muestra en la figura 3.1:

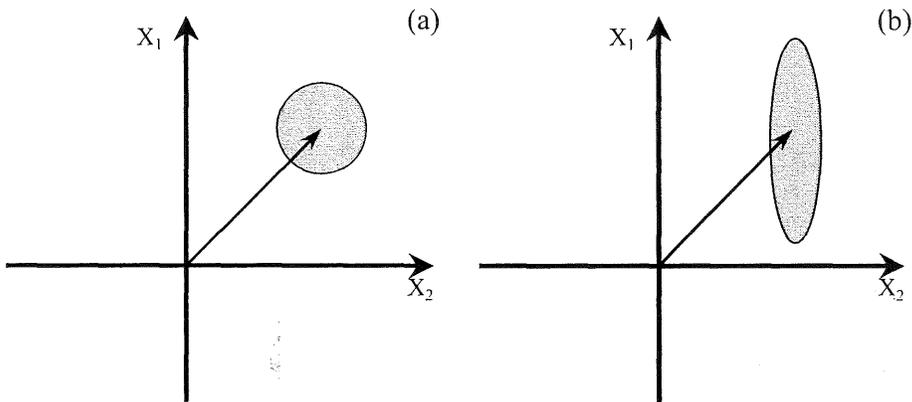


Fig. 3.1. Gráfico en el espacio fase ilustrando la incertidumbre en:
a) un estado coherente α , y b) un estado comprimido α, r

Como ya hemos mencionado existe una familia de estados de mínima incertidumbre definida por la ecuación 3.39. Si graficamos ΔX_1 contra ΔX_2 los estados de mínima incertidumbre se encuentran sobre la parábola de la figura 3.2. y solamente tienen sentido físico aquellos que se encuentran a la derecha de esta curva. El estado coherente con $\Delta X_1 = \Delta X_2$ es un caso especial y aparece como el punto en la grafica, mientras que los estados que se encuentran en la región sombreada en esta misma figura se denominan estados comprimidos. Estos estados comprimidos se pueden generar por medio de un operador unitario de compresión, definido en términos de $\epsilon = re^{2i\theta}$ como sigue:

$$S(\epsilon) = \exp\left(\frac{1}{2}(\epsilon^* a^2 - \epsilon a^{+2})\right). \quad (3.40)$$

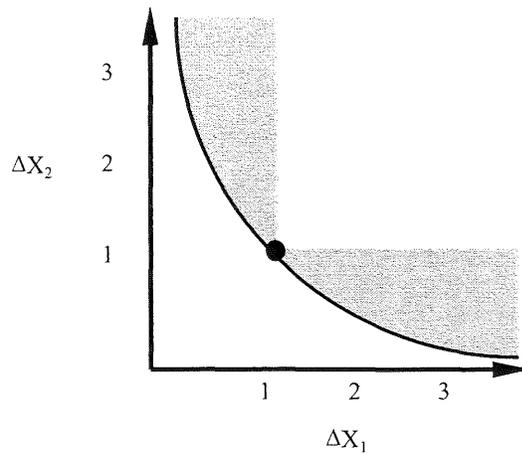


Fig. 3.2. Gráfica de ΔX_1 contra ΔX_2 para estados de mínima incertidumbre.
El punto corresponde a un estado coherente y la región sombreada a estados comprimidos

Este operador de compresión obedece las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 S^+(\varepsilon) &= S^{-1}(\varepsilon) = S(-\varepsilon) \\
 S^+(\varepsilon)aS(\varepsilon) &= a \cosh r - a^+ e^{-2i\phi} \operatorname{senhr} \\
 S^+(\varepsilon)a^+S(\varepsilon) &= a^+ \cosh r - a^+ e^{2i\phi} \operatorname{senhr} \\
 S^+(\varepsilon)(Y_1 + iY_2)S(\varepsilon) &= Y_1 e^{-r} + iY_2 e^r
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{-i\phi}, \tag{3.42}$$

es una amplitud compleja con una rotación. De aquí se puede observar que el operador de compresión atenúa una componente de la amplitud compleja y amplifica la otra, con el factor de compresión $r = |\varepsilon|$. Entonces, el estado comprimido α, ε se obtiene aplicando una compresión al vacío y posteriormente desplazarlo, esto es:

$$\alpha, \varepsilon = D(\alpha)S(\varepsilon)0 . \quad (3.43)$$

Finalmente, podemos calcular los valores esperados y varianzas para un estado comprimido, lo que resulta en:

$$\begin{aligned} X_1 + iX_2 &= Y_1 + iY_2 e^{i\phi} = 2\alpha \\ \Delta Y_1 &= e^{-r}, \quad \Delta Y_2 = e^r \\ N &= \alpha^2 + \sinh^2 r \\ (\Delta N)^2 &= \alpha \cosh r - \alpha^* e^{2i\phi} \sinh^2 r + 2 \cosh^2 r \sinh^2 r \end{aligned} \quad (3.44)$$

En esta última relación se muestra como el estado comprimido tiene diferentes incertidumbres para Y_1 y Y_2 , como se había graficado en la elipse de la figura 3.1b, donde sus ejes principales permanecen a lo largo de los ejes Y_1 y Y_2 .

3.6. Referencias.

- [3.1] Albert Messiah, Quantum Mechanics, Dover Publications, Inc., 1999.
- [3.2] D. F. Walls and Gerard J. Milburn, Quantum Optics, Springer-Verlag, 1994.
- [3.3] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy, Quantum Optics
- [3.4] P. Meystre and M. Sargent III, Elements of Quantum Optics, Springer Verlag, 1990.
- [3.5] R.J. Glauber, Phys. Rev. (1963), A 131, 2766.
- [3.6] Ver referencia [3.2].

CAPÍTULO 4

Midiendo compresión y fase del campo electromagnético.

4.1. Introducción.

Es una característica esencial de la Segunda Ley de Newton que dadas las coordenadas iniciales y velocidad de una partícula y conociendo todas las fuerzas que actúan sobre ella, la órbita queda determinada unívocamente; y lo mismo es cierto para un sistema de partículas. Esta es la esencia del *determinismo* [4.1]. Sin embargo, en la Física Cuántica existe una limitación sobre la certeza con la que se pueden medir dos o más magnitudes no compatibles simultáneamente. Este hecho fue formulado por el científico alemán Werner Heisenberg en 1925, quien demostró que la incertidumbre en el conocimiento de la posición de una partícula, multiplicada por la incertidumbre en su cantidad de movimiento, nunca puede ser más pequeña que una cierta cantidad, la constante de Planck. Además éste límite es una propiedad fundamental e ineludible, que no depende de la forma en que se realicen las medidas, ni del tipo de partícula.

4.2. Principio de incertidumbre de Heisenberg.

La observable de un sistema medido lleva su propia incertidumbre, independientemente de cómo el aparato de medición es preparado y de cómo se efectúa la medición [4.2]. Para comprender mejor este principio fundamental, consideremos un ensemble de sistemas cuánticos idénticos preparados en el estado ψ , enseguida medimos una observable \hat{A} para la mitad del ensemble y otra observable \hat{B} para la mitad restante además, cada mitad contiene prácticamente un número infinito de sistemas idénticos. Suponiendo que la medición es perfecta, es decir, que el error medido es cero, entonces, la medición de \hat{A} dará "a", uno de los eigenvalores de \hat{A} con una probabilidad $a|\psi|^2$. Similarmente, la medición de \hat{B} dará uno de sus eigenvalores "b" con una probabilidad de $b|\psi|^2$.

Los valores promedio del ensemble son:

$$\bar{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad \bar{B} = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle, \quad 4.1$$

y la desviación cuadrática media de cada medición se define como:

$$\Delta A^2 = \bar{A^2} - \bar{A}^2 \quad \Delta B^2 = \bar{B^2} - \bar{B}^2. \quad 4.2$$

El principio de incertidumbre se puede ahora enunciar de la siguiente forma: dadas dos observables \hat{A} y \hat{B} , tales que su conmutador es $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, donde \hat{C} es un número o una observable, para cualquier estado ψ del sistema físico sobre el que se realice la medida simultánea de ambos, se verifica la relación:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \bar{C}^2. \quad 4.3$$

Como un caso especial tomemos los operadores $\hat{A} = \hat{q}$ (posición) y $\hat{B} = \hat{p}$ (momento), de una partícula libre. Entonces se llega a la siguiente relación de incertidumbre:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \Delta q^2 \cdot \Delta p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad 4.4$$

Ya que hemos visto que una representación conveniente del operador de posición es en términos de los operadores de creación y aniquilación, entonces necesitamos para determinar las desviaciones cuadráticas que nos darán una medida de la compresión medir cantidades como:

$$\begin{aligned} \hat{q} &\approx \hat{a} + \hat{a}^{+2} \\ \hat{q}^2 &\approx \hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + 2\hat{n} + 1 \end{aligned} \quad 4.5$$

donde \hat{a}^+ y \hat{a} son los operadores de creación y aniquilación del campo electromagnético, respectivamente. Es decir, medir cantidades como $\langle \hat{a}^k \rangle$ con $k=0, 1, 2$.

4.3. Espectroscopia inversa.

En la espectroscopia tradicional algún tipo de radiación incide sobre una muestra y posteriormente se colecta nuevamente la radiación ya sea transmitida o reflejada la cual contiene información de las características atómicas del material.

En nuestro caso tomaremos una alternativa diferente, en la cual utilizaremos un átomo como instrumento de medición para analizar el campo electromagnético, y es en este sentido que podríamos denominarlo *espectroscopia inversa*.

4.4. Midiendo compresión.

Empezaremos por escribir el hamiltoniano de interacción para un átomo de dos niveles en resonancia con el campo electromagnético y en la aproximación de la onda rotante:

$$\hat{H} = \lambda (\hat{a}^+ \sigma_- + \sigma_+ \hat{a}) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad 4.6$$

donde σ_+ y σ_- son los operadores atómicos de subida y bajada, respectivamente, los cuales obedecen la relación de conmutación $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$.

Podemos escribir el hamiltoniano de la ecuación 4.6 de otra forma haciendo uso de los operadores de Susskind-Glogower [4.3], obteniendo:

$$\hat{H} = \lambda \hat{T} \begin{pmatrix} 0 & \hat{n} + 1 \\ \hat{n} + 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{T}^+ \quad 4.7$$

donde

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{V}^+ \end{pmatrix} \quad 4.8$$

para el operador de número $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$ y $\hat{V} = \frac{1}{\hat{n} + 1} \hat{a}$. Debido a las relaciones $\hat{T}^+ \hat{T} = 1$ y

$\hat{T} \hat{T}^+ \neq 1$ es claro que los operadores implicados son anticonmutativos lo que nos permite expresar el operador de evolución, como:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t \sqrt{\hat{n} + 1}) & -i \frac{\text{sen}(\lambda t \sqrt{\hat{n} + 1})}{\sqrt{\hat{n} + 1}} \hat{a} \\ -i \hat{a}^+ \frac{\text{sen}(\lambda t \sqrt{\hat{n} + 1})}{\sqrt{\hat{n} + 1}} & \cos(\lambda t \sqrt{\hat{n}}) \end{pmatrix}. \quad 4.9$$

Ahora supongamos que el campo electromagnético se encuentra en un estado desconocido y el átomo en estado excitado, en éste caso el estado inicial del sistema es $\psi(0) = e^{-i\hat{H}_F(0)}$, el cual utilizamos para calcular el promedio del operador $\hat{\sigma}_+$, esto es:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+ &= -i\psi_F(0) \cos(\lambda t \cdot \hat{n}+1) \hat{V}^+ \text{sen}(\lambda t \cdot \hat{n}+1) \psi_F(0) \\ &= -\frac{i}{2} \psi_F(0) \hat{V}^+ \left(\text{sen}[\lambda t \hat{\Delta}_+(\hat{n})] - \text{sen}[\lambda t \hat{\Delta}_-(\hat{n})] \right) \psi_F(0)\end{aligned}\quad 4.10$$

donde

$$\hat{\Delta}_+(\hat{n}) = \hat{n} + 2 + \hat{n} + 1, \quad \hat{\Delta}_-(\hat{n}) = \hat{n} + 2 - \hat{n} + 1. \quad 4.11$$

Se puede identificar la forma de la ecuación 4.10 como una de las integrales de Fresnel [4.4], como se ve enseguida.

$$\int_0^{\infty} dTT \text{sen}(T^2/A) \text{sen}(BT) = \frac{AB}{4} \frac{\pi A}{2} \left(\cos \frac{AB^2}{4} + \text{sen} \frac{AB^2}{4} \right), \quad 4.12$$

si hacemos $\lambda t = T$, podemos utilizar esta integral para calcular el valor promedio anterior:

$$\int_0^{\infty} dTT \text{sen}(T^2/A) \hat{\sigma}_+ = -\frac{i}{2} \psi_F(0) \hat{V}^+ (\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2) \psi_F(0) \quad 4.13$$

con

$$\hat{\gamma}_{\pm} = \frac{\hat{\Delta}_{\pm}(\hat{n})}{4a} \frac{\pi}{2a} \left(\cos \left\{ \frac{\hat{\Delta}_{\pm}^2(\hat{n})}{4a} \right\} + \text{sen} \left\{ \frac{\hat{\Delta}_{\pm}^2(\hat{n})}{4a} \right\} \right). \quad 4.14$$

Considerando el hecho de que el número de fotones del campo electromagnético es muy grande [4.5], entonces podemos hacer la siguiente aproximación $(\hat{n}+2)(\hat{n}+1) \approx \hat{n}+3/2$,

y entonces podemos también escribir $\hat{\Delta}_+^2(\hat{n}) \approx 4\hat{n}+6$ y $\hat{\Delta}_-^2(\hat{n}) \approx 0$. Tomando ahora $1/A = 4\pi$, tenemos:

$$\hat{\gamma}_1^{(1)} \approx (\hat{n}+2 + \hat{n}+1)\pi \cos[(4\hat{n}+6)\pi] = 2\pi^2 \hat{\Delta}_+(\hat{n}), \quad 4.15$$

y también

$$\hat{\gamma}_2^{(1)} \approx 2\pi^2 \hat{\Delta}_-(\hat{n}). \quad 4.16$$

Finalmente, tomando las simplificaciones anteriores la transformada integral que teníamos previamente toma la forma [4.6]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dT T \text{sen}(T^2/A) \sigma_+ &= -i \cdot 2\pi^2 \hat{\psi}_F(0) \hat{V}^+ (\hat{n}+1) \hat{\psi}_F(0) \\ &= -i \cdot 2\pi^2 \hat{\psi}_F(0) \hat{a}^+ \hat{\psi}_F(0) \end{aligned} \quad 4.17$$

En esta última relación notamos que el valor promedio del operador de subida se obtiene a partir del operador de creación.

Ahora lo que necesitamos es encontrar una manera de medir la cantidad $\hat{\psi}_F(0) [\hat{a}^+]^2 \hat{\psi}_F(0)$, para la cual necesitamos una transición de dos fotones, en cuyo caso tenemos:

$$\hat{H} = \lambda^{(2)} \hat{T}^2 \begin{pmatrix} 0 & (\hat{n}+1)(\hat{n}+2) \\ (\hat{n}+1)(\hat{n}+2) & 0 \end{pmatrix} [\hat{T}^+]^2, \quad 4.18$$

donde $\lambda^{(2)}$ es una constante de interacción en el caso de dos fotones. Análogamente al caso de un fotón se puede encontrar una expresión para el operador de evolución haciendo algunos cambios de variable como: $(\hat{n}+1) \rightarrow (\hat{n}+2)(\hat{n}+1)$, $\hat{V} \rightarrow \hat{V}^2$ y $\hat{V}^+ \rightarrow [\hat{V}^+]^2$.

De ésta forma es sencillo calcular el promedio del operador $\sigma_+^{(2)}$, el cual se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\sigma_+^{(2)} &= -i \psi_F(0) \cos \left[\lambda^{(2)} t \sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)} \right] [\hat{V}^+]^2 \text{sen} \left[\lambda^{(2)} t \sqrt{(\hat{n}+1)(\hat{n}+2)} \right] \psi_F(0) \\ &= -\frac{i}{2} \psi_F(0) [\hat{V}^+]^2 \left(\text{sen}[\lambda t \delta_+(\hat{n})] - \text{sen}[\lambda t \delta_-(\hat{n})] \right) \psi_F(0)\end{aligned}\quad 4.19$$

donde

$$\delta_+(\hat{n}) = \sqrt{(\hat{n}+4)(\hat{n}+3)} + \sqrt{(\hat{n}+2)(\hat{n}+1)} \approx 2\hat{n}+5, \quad 4.20$$

y lo mismo para:

$$\delta_-(\hat{n}) = \sqrt{(\hat{n}+4)(\hat{n}+3)} - \sqrt{(\hat{n}+2)(\hat{n}+1)} \approx 2. \quad 4.21$$

Observando la forma que toma la ecuación 4.19 en términos de la función seno, utilizamos nuevamente la transformada integral de Fresnel de la ecuación 4.12, lo que nos da:

$$\int_0^\infty dT T \text{sen}(T^2 / A) \sigma_+^{(2)} = -i 4\pi^2 \psi_F(0) [\hat{V}^+]^2 (\hat{\gamma}_1^{(2)} - \hat{\gamma}_2^{(2)}) \psi_F(0) \quad 4.22$$

con:

$$\hat{\gamma}_1^{(2)} = \frac{A \delta_+(\hat{n})}{4} \frac{\pi A}{2} \left(\cos \left[\frac{A \delta_+^2(\hat{n})}{4} \right] + \text{sen} \left[\frac{A \delta_+^2(\hat{n})}{4} \right] \right) \quad 4.23$$

y

$$\hat{\gamma}_2^{(2)} = \frac{A \delta_-(\hat{n})}{4} \frac{\pi A}{2} \left(\cos \left[\frac{A \delta_-^2(\hat{n})}{4} \right] + \text{sen} \left[\frac{A \delta_-^2(\hat{n})}{4} \right] \right), \quad 4.24$$

si ahora utilizamos $A=8\pi$, tenemos que la ecuación 4.22. queda [4.6]:

$$\int_0^{\infty} dT T \text{sen}(T^2/8\pi) \sigma_+^{(2)} = -i8\pi^4 \psi_F(0) [\hat{V}^+]^2 (\hat{n}+1)(\hat{n}+1) \psi_F(0) \\ = -i8\pi^4 [\hat{a}^+]^2 \quad 4.25$$

Y nuevamente nos queda el promedio del cuadrado del operador de subida en términos del cuadrado del operador de creación.

4.5. Midiendo propiedades de fase.

Ahora analizaremos las propiedades de fase del campo electromagnético. El procedimiento es similar al de las componentes en cuadratura del campo, solo cambia en las transformadas integrales que utilizaremos. Calcularemos el promedio de σ_+ para la transición de un fotón en el sistema conformado por el átomo en el estado base y un campo arbitrario $\psi_F(0)$,

$$\sigma_+ = i \psi_F(0) \hat{V}^+ \text{sen}(\lambda t \cdot \hat{n}+1) \hat{V}^+ \cos(\lambda t \cdot \hat{n}+1) \hat{V} \psi_F(0) \quad 4.26$$

tomando la aproximación para un número grande de fotones, tenemos:

$$\sigma_+ = i \psi_F(0) \hat{V}^+ \text{sen}(\lambda t \cdot \hat{n}+1) \cos(\lambda t \cdot \hat{n})(1-0/0) \psi_F(0) \\ = i \psi_F(0) \hat{V}^+ \text{sen}(\lambda t \cdot \hat{n}+1) \cos(\lambda t \cdot \hat{n}) \psi_F(0) \quad 4.27$$

ahora utilizamos la siguiente transformada integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(AT) \cos(BT)}{T} dT = \pi/2, \quad A > B > 0 \quad 4.28$$

que en nuestro caso queda:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma_+}{\lambda t} d(\lambda t) = \frac{i\pi}{2} \psi_F(0) \hat{V}^+ \psi_F(0) \quad 4.29$$

para medir $[\hat{V}^+]^2$, necesitamos nuevamente un proceso para dos fotones. Así el valor promedio de σ_+^2 para el átomo en el estado base, es :

$$\begin{aligned} \sigma_+^2 &= i \psi_F(0) [\hat{V}^+]^2 \text{sen}(\lambda^{(2)} t \cdot (\hat{n}+1)(\hat{n}+2)) [\hat{V}^+]^2 \text{cos}(\lambda^{(2)} t \cdot (\hat{n}+1)(\hat{n}+2)) \hat{V}^2 \psi_F(0) \\ &= i \psi_F(0) [\hat{V}^+]^4 \text{sen}(\lambda^{(2)} t \cdot (\hat{n}+3)(\hat{n}+4)) \text{cos}(\lambda^{(2)} t \cdot (\hat{n}+1)(\hat{n}+2)) \hat{V}^2 \psi_F(0) \end{aligned} \quad 4.30$$

y nuevamente con la transformada integral anterior, tenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma_+^{(2)}}{T} dT = \frac{i\pi}{2} \psi_F(0) [\hat{V}^+]^4 \hat{V}^2 \psi_F(0) \quad 4.31$$

la cual para un número grande de fotones queda:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma_+^{(2)}}{T} dT = \frac{i\pi}{2} \psi_F(0) [\hat{V}^+]^2 \psi_F(0) \quad 4.32$$

Ahora bien, para determinar el valor promedio de σ_+ , este se puede determinar a partir de los valores promedio de las variables observables σ_x y σ_y , de acuerdo con la relación $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y$. Donde utilizamos la traza, de la siguiente forma: $\sigma_x = \text{Tr}[\sigma_x \hat{\rho}] = \text{Tr}[\hat{R} \sigma_z \hat{R}^+ \hat{\rho}] = \text{Tr}[\sigma_z \hat{R}^+ \hat{\rho} \hat{R}] = \text{Tr}[\sigma_z \hat{\rho}_R]$, es decir, el valor esperado de σ_z (la inversión de población o la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado menos la probabilidad de encontrarlo en el estado base) para una matriz de densidad con una rotación (en la base atómica) $\hat{R} = \exp[(\sigma_- - \sigma_+) \pi / 4]$. Lo mismo se lleva a cabo para σ_y . Experimentalmente debemos mandar un átomo a través de la cavidad que

contiene el campo a estudiar, posteriormente rotamos este cuando sale de la cavidad y medimos su energía.

4.6. Referencias.

- [4.1] Richard L. Liboff, *Introductory Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1980.
- [4.2] Y. Yamamoto and A. Imamoglu, *Mesoscopic Quantum Optics*, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [4.3] L. Susskind and J. Glogower, *Physics* (1964), 1, 49.
- [4.4] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, Inc., London 1980.
- [4.5] H. Moya Cessa, S. Chávez Cerda and W. Vogel, *J. Mod. Optics* (1998), 66.
- [4.6] G. T. Rubín Linares and H. Moya Cessa, *J. Mod. Optics* **52**, 1751-1756 (2005).

CAPÍTULO 5

Trampa de Paul.

5.1. Introducción.

El atrapamiento ó confinamiento de iones por grandes periodos de tiempo ha incrementado las aplicaciones de la espectroscopia láser. El hecho de confinar un solo ión nos lleva a un sistema con características únicas que permiten probar conceptos fundamentales de la mecánica cuántica. Por ejemplo, los saltos cuánticos han sido observados directamente y por ello son usados para monitorear la dinámica interna del ión.

También éste atrapamiento a llevado a la implementación de compuertas cuánticas, lo que marca una tendencia a desarrollar computadoras cuánticas.

En éste capítulo se revisan algunos conceptos básicos sobre la trampa de Paul y se analizan las relaciones que rigen el comportamiento de iones dentro de la trampa.

5.2. Fundamentos de atrapamiento de iones.

Debido a su carga los iones pueden ser manipulados por campos electromagnéticos, a diferencia de los átomos neutros, por ésta razón debemos controlar el campo

electromagnético que confinara al ión. Como una primera aproximación consideremos un arreglo sencillo que consiste, en un campo estático producido por un electrodo de anillo y dos extremos [5.1]. De tal forma que el movimiento de la partícula, resulta en un potencial denominado de silla de montar, para $f_0 = cte$; que básicamente se caracteriza por un movimiento estable en la dirección radial y uno inestable en la dirección normal:

$$\Phi(\vec{r}) \equiv f_0 \cdot (x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (5.1)$$

Aplicando la ecuación de Laplace al potencial Φ anterior [5.2], tenemos:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) \equiv f_0 \cdot (2 + 2 - 2 \cdot 2) = 0 \quad (5.2)$$

Existen dos técnicas para solucionar este problema con la silla de montar. La primera utiliza campos eléctricos y magnéticos estáticos, y se conoce como trampa de Penning [5.3]; y la segunda conocida como trampa de Paul [5.4], utiliza campos eléctricos dependientes del tiempo.

En la trampa de Paul, el voltaje de los electrodos se cambia de polaridad logrando con ello que las regiones de estabilidad se alternen y se vuelvan estables en esos instantes.

La situación anterior se puede modelar con la siguiente relación:

$$\Phi(\vec{r}, t) \equiv f(t)(x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (5.3)$$

donde ahora tenemos:

$$f(t) \equiv \frac{U + V \cos(\omega_{rf}t)}{r_0^2 + 2z_0^2} \quad (5.4)$$

y los términos U y V son las amplitudes de los voltajes directo y alterno (C.D. y C.A.), respectivamente, r_0 es el radio del electrodo de anillo, $2z_0$ es la distancia entre los extremos de los campos, y $\omega_{rf} = 2\pi/T$ es la frecuencia de C.A como se observa en la figura 2.1 y 2.2.

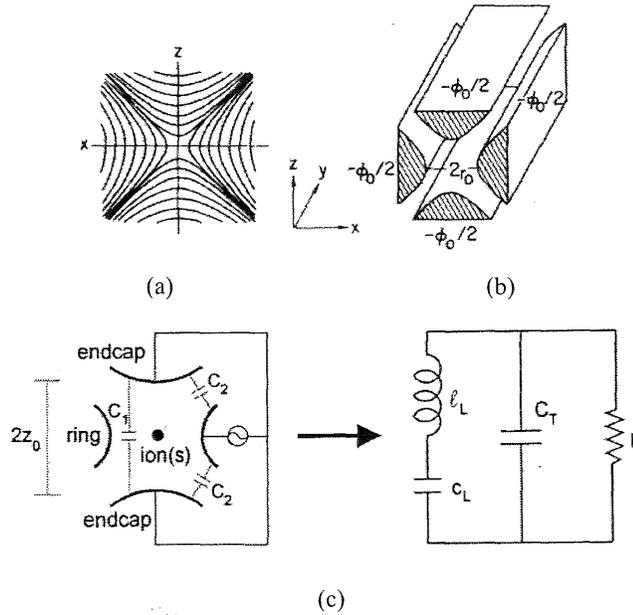


Figura 2.1: Trampa de Paul. (a) Curvas equipotenciales para el campo cuadrupolar. (b) Configuración de los electrodos. (c) A la izquierda se muestra un esquema de la trampa con electrodos hiperbólicos y a la derecha un modelo eléctrico del sistema donde r representa las pérdidas en los electrodos y los alambres, l_L y C_L la inductancia y capacitancia equivalente para el modo COM de oscilación en la dirección z , y C_T toma en cuenta los efectos combinados de las capacitancias del arreglo a la izquierda.

Con éstas relaciones, la ecuación clásica de movimiento del ión de masa M y carga e , en términos del potencial queda:

$$M\ddot{\vec{r}} + 2ef(t)(\vec{r} - 3z\hat{z}) = 0 \quad (5.5)$$

donde $\vec{z} = (0,0,z)^T$. Podemos notar que ésta última relación corresponde a la ecuación de Mathieu siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \{a + 2q \cos(2\tau)\}u = 0 \quad (5.6)$$

donde realizamos los siguientes cambios de variable:

$$\tau \equiv \frac{1}{2}\omega_{rf}t, \quad a \equiv \frac{8eU}{M\omega_{rf}^2(r_0^2 + 2z_0^2)}, \quad y \quad q \equiv \frac{4eU}{M\omega_{rf}^2(r_0^2 + 2z_0^2)}. \quad (5.7)$$

La ecuación de Mathieu es una ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos. Esta ecuación puede ser resuelta con el teorema de Floquet el cual asegura que la solución general de 5.6 es [5.5]:

$$u(\tau) = Ae^{i\beta\tau}\phi(\tau) + Be^{-i\beta\tau}\phi(-\tau) \quad (5.8)$$

A y B son constantes y

$$\phi(\tau) = \phi(\tau + \pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\tau} \quad (5.9)$$

es una función periódica.

Las ecuaciones de Mathieu tienen dos tipos de soluciones [5.6]:

1) Movimiento estable: Cuando el exponente característico β es puramente real la variable $u(\tau)$ es acotada y consecuentemente el movimiento es estable. Esto significa que las partículas oscilan con amplitudes limitadas y sin golpear los electrodos.

2) Movimiento inestable: Cuando β tiene una parte imaginaria la función $u(\tau)$ contiene una contribución exponencialmente creciente. Las amplitudes crecen exponencialmente y las partículas se pierden al chocar contra los electrodos.

Es decir, existen condiciones que permiten que el ión quede atrapado en el campo cuadrupolar.

Las fronteras de las regiones de estabilidad corresponden a valores enteros o cero de β y la primera región de estabilidad está rodeada por cuatro líneas con $\beta = 0$ y 1 y $\beta = 0$ y 1 , como se muestra en la figura 2.2 siguiente [5.7]:

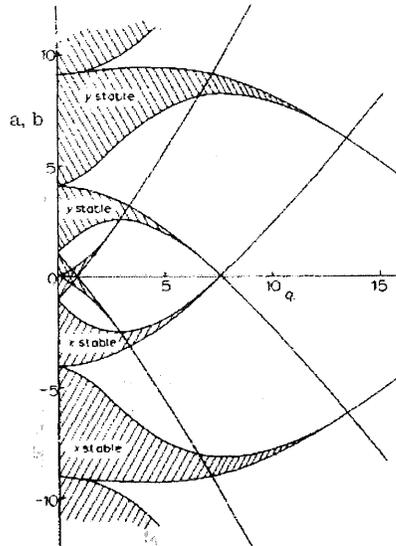


Figura 2.2: Región de estabilidad I y II de la trampa de Paul.

Ya que β está determinada por a y q , la ecuación de Mathieu tiene soluciones estables como una función de a y q . Regiones de estabilidad para la ecuación (5.8) corresponden a regiones en el espacio de los parámetros a - q en donde se traslapan las regiones de estabilidad en la dirección axial y radial.

En la literatura no es posible encontrar soluciones analíticas para la ecuación (5.8), pero para la mayoría de las aplicaciones una especificación de la carta de estabilidad de sus soluciones es suficiente y no es necesaria una dependencia funcional detallada. Pero se puede dar una solución aproximada en la región de estabilidad que es de interés.

Con este fin podemos describir la ecuación (5.8) como:

$$u_i(\tau) = A_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}^i \cos(2n + \beta_i)\tau + B_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}^i c \sin(2n + \beta_i)\tau, \quad (5.10)$$

Donde A_i y B_i están determinadas por la posición inicial $u_i(0)$ y la velocidad $\dot{u}_i(0)$ del ion, también como de la fase inicial del campo rf . El subíndice $i=r, z$ corresponde a las cantidades asociadas con el movimiento axial y radial del ion., respectivamente.

Los coeficientes C_{2n}^i están dados por una relación de recurrencia

$$C_{2n+2}^i - D_{2n}^i C_{2n}^i + C_{2n-2}^i = 0, \quad (5.11)$$

con

$$D_{2n}^i = [a_i - (2n + \beta_i)^2] / q_i. \quad (5.12)$$

Dados a_i y q_i , entonces se pueden calcular C_{2n}^i y β_i .

Si definimos

$$G_{2n}^i = \frac{C_{2n}^i}{C_0^i}, \quad A_i' = A_i C_0^i \quad \text{y} \quad B_i' = B_i C_0^i, \quad (5.13)$$

y haciendo

$$u_i(t) = u_i^s(t) + u_i^m(t), \quad (5.14)$$

Se obtiene de la ecuación (5.10)

$$u_i^s(\tau) = A_i' \cos \omega_i t + B_i' \text{sen} \omega_i t, \quad (5.15)$$

$$u_i^m(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_i' \cos \omega_i t + B_i' \text{sen} \omega_i t)(G_{2n}^i + G_{-2n}^i) \cos n\Omega t] \\ + (B_i' \cos \omega_i t - A_i' \text{sen} \omega_i t)(G_{2n}^i - G_{-2n}^i) \sin n\Omega t. \quad (5.16)$$

Con $\omega_i = \frac{\beta_i \Omega}{2}$. Puede verse de las ecuaciones (5.15) y (5.16) que el movimiento del ion para la dos regiones consiste de dos componentes: el movimiento $u_i^s(t)$ en la forma de una oscilación armónica con una frecuencia ω_i y el movimiento $u_i^m(t)$ compuesto de la superposición de varias subcomponentes con frecuencia fundamental Ω y sus múltiplos $n\Omega$ ($n=2, 3, \dots$) y con amplitudes moduladas con la frecuencia ω_i . Sin embargo, la proporción de las dos componentes, los valores de ω_i , el número de subcomponentes que contribuyen apreciablemente y sus pesos depende fuertemente de los valores a_i y q_i , de tal forma que ellos variarán con la región. Todo esto se determina cuando los valores de β_i y G_{2n}^i están dados.

Varios valores de β_i y G_{2n}^i correspondientes a algunos valores típicos de a_i y q_i aparecen listados se pueden encontrar en la literatura, de cuya información se puede apreciarse que para $a \ll q \ll 1$ en la primera región uno puede asumir que $G_{2n}^i \cong G_{-2n}^i$ y se pueden ignorar el resto de los coeficientes $G_{\pm 2n}^i$ ($n > 1$); entonces las ecuaciones (5.15) y (5.16) pueden ser rescritas como

$$u_i^s(\tau) = u_{i0} \cos(\omega_i t + \delta_i), \quad (5.17)$$

$$u_i^m(\tau) = C u_{i0} \cos \Omega t \cos(\omega_i t + \delta_i), \quad (5.18)$$

Es decir

$$u_i(t) = u_{i0} \cos(\omega_i t + \delta_i) (1 + C \cos \Omega t) \quad (5.19)$$

donde

$$u_{i0}^2 = A_i^2 + B_i^2, \quad \delta = \cos^{-1} \left(A_i / \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \right) \text{ y } C \text{ una constante.}$$

Generalmente se desprecia el micromovimiento, aunque es posible su reducción mediante el uso de electrodos adicionales [5.8]. Entonces el movimiento del ion está gobernado por la ecuación (5.17) y se comporta como si estuviera confinado en un potencial armónico, que para la parte radial, tiene la forma

$$q\psi_{2D} = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \quad (5.20)$$

En la figura 2.3 se muestra una gráfica de la ecuación (5.20).

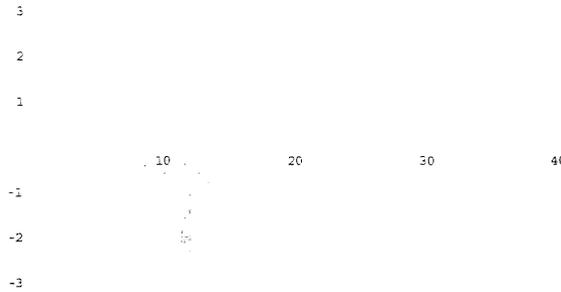


Figura 2.3: Muestra el micromovimiento y el movimiento secular de un ion atrapado. Las oscilaciones a mayor frecuencia son el micromovimiento y las de menor frecuencia el movimiento secular.

Típicamente, $U_0 = 0$ V y de aquí $a=0$ (además de que se está trabajando en la región para la que $a=0$); así que la frecuencia radial ω_x y ω_y son degeneradas. La ecuación (5.20) se reduce a:

$$q\psi_{2D} = \frac{m\omega_r^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (5.21)$$

Donde la frecuencia radial de la trampa ω_r está dada por

$$\omega_r = \frac{\Omega b}{2^{3/2}} = \frac{qV_0}{mr_0^2 \Omega^{1/2}} \quad (5.22)$$

La conclusión importante aquí es que podemos utilizar el modelo del oscilador armónico para modelar el movimiento de un ion atrapado en una trampa de Paul.

5.3. Referencias.

- [5.1] Wolfgang P. Schleich, Quantum Optics in Phase Space, Wiley VCH, 2001.
- [5.2] John D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, Inc., 1962.
- [5.3] Penning, F. M., (1937), *Physica* **4**, 71-75.
- [5.4] Wolfgang Paul, *Reviews of Modern Physics*, **62**, 530, (1990).
- [5.5] P.J. Bardroff, C. Leichtle, G. Scharde, and W.P. Schleich, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2198 (1996).
- [5.6] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, (1972).
- [5.7] Bate, D., J., Dholakia, K., Thompson, R. C., and Wilson, D. C., *J. Mod. Opt.* **9**, 411, (1992).
- [5.8] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano and D. J. Wineland, *J. Appl. Phys.* **83**, 5025, (1998).

CAPÍTULO 6

Trampa de Paul con frecuencia dependiente del tiempo.

6.1. Introducción.

El esquema propuesto en el capítulo 4 mediante transformaciones integrales para extraer información del campo electromagnético a partir de medir propiedades de los átomos saliendo de la cavidad se puede extender a trampas de iones. En éste capítulo analizamos el problema de un ión atrapado en una trampa de Paul dependiente del tiempo interactuando con un campo láser. Mediante un conjunto de transformaciones unitarias se muestra que este sistema es equivalente a la interacción entre un campo cuantizado y un sistema de dos niveles con parámetros dependientes del tiempo. Usando transformaciones unitarias dependientes del tiempo se linealiza el problema.

6.2. Invariante de lewis.

En 1967 Lewis [6.1] consideró hamiltonianos paramétricos con la siguiente forma estándar:

$$\hat{H} = (1/2\varepsilon) (\hat{p}^2 + \omega^2(t)\hat{q}^2) \tag{6.1}$$

Donde \hat{q} es una coordenada canónica, \hat{p} es su momento conjugado y $\omega(t)$ es una función continua de t arbitraria. La motivación original para considerar tales sistemas fue el deseo de investigar la naturaleza de las series del momento magnético para una partícula cargada moviéndose en un campo electromagnético relativamente simple para el cual el potencial escalar es cero y el vector potencial es:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} h(t) \vec{B}(t) \times \vec{r}, \quad (6.2)$$

La ecuación de movimiento para tal sistema corresponde al Hamiltoniano (6.1), en cuyo caso $\omega(t)$ es $1/2\vec{B}(t)$, y ε es la razón carga-masa. Lewis aplicó la teoría de Kruskal [6.2] a este sistema y como una consecuencia derivó el siguiente invariante exacto

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\hat{q}}{\rho} \right)^2 + \left(\rho \hat{p} - \dot{\rho} \hat{q} \right)^2 \right] \quad (6.3)$$

Con ρ una función de t satisfaciendo la llamada ecuación de Ermakov [6.3, 6.4]

$$\ddot{\rho} + \omega(t)\rho = \frac{1}{\rho^3} \quad (6.4)$$

Este invariante exacto resulta ser una constante de movimiento del sistema descrito por el Hamiltoniano (6.1) en el sentido de que

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad (6.5)$$

Si se considera a un sistema cuántico cuyo Hamiltoniano esté dado por la ecuación (6.1) donde \hat{q} y \hat{p} son ahora operadores que satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (6.6)$$

usando la relación de conmutación dada arriba y la ecuación para ρ se puede demostrar que la cantidad I el cual es un invariante del sistema clásico es también un invariante del sistema cuántico. Esto es, satisface,

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{I}, \hat{H}] = 0 \quad (6.7)$$

6.3. Transformaciones unitarias

Recientemente Moya y Guasti [6.5] presentaron una forma alternativa de obtener el invariante I . Utilizando transformaciones unitarias que involucran la función auxiliar del sistema cuántico (6.1) como se muestra a continuación:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = \hat{H} \xi(t) \quad (6.8)$$

con la siguiente transformación $\phi = \hat{T}(t) \xi$, donde:

$$\hat{T} = \exp\left(\frac{i \ln \rho(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t) \hat{q}^2}{2\rho(t)}\right) \quad (6.9)$$

agrupa las transformaciones siguientes:

$$\hat{D} = \exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t) x^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \quad (6.10)$$

$$\hat{S} = \exp\left(i \frac{\ln \rho}{2\hbar} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})\right) \quad (6.11)$$

Estas transformaciones pueden ser obtenidas a partir del invariante de Lewis considerando a los términos $\frac{\hat{q}}{\rho}$ y $\rho\hat{p}$ en el invariante como una compresión en las variables \hat{q} y \hat{p} , y al término $-\dot{\rho}\hat{q}$ como un desplazamiento en la variable \hat{p} .

Aplicando esta transformación obtenemos la ecuación para $|\phi\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = \hat{H} \phi(t) \quad (6.12)$$

expresada en términos del hamiltoniano transformado.

El Hamiltoniano para el sistema con el ion atrapado con frecuencia dependiente del tiempo en interacción con un láser es

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{p} + v^2(t) \hat{x}^2 \right) + \frac{\hbar}{2} \omega_{21} \sigma_z + \hbar \lambda(t) \left[E^{(-)}(\hat{x}, t) \sigma_- + H.c. \right] \quad (6.13)$$

El Hamiltoniano se construye igual que en el caso independiente del tiempo pero ahora la frecuencia de la trampa no es constante sino que se considera una función del tiempo. La ecuación de Schrödinger para este hamiltoniano lo escribimos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\xi(t)\rangle = \hat{H} |\xi(t)\rangle \quad (6.14)$$

En el análisis del problema primero hacemos la transformación

$$|\phi(t)\rangle = \hat{T}(t) |\xi(t)\rangle \quad (6.15)$$

con

$$\hat{T} = \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)\hat{x}^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \quad (6.16)$$

y con la ecuación de Ermakov.

Al igual que en las transformaciones que hemos utilizado anteriormente debemos calcular la expresión

$$H_T = \left(i\hbar \frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} \hat{T}^+ + \hat{T}(t) H T^+(t) \right) \quad (6.17)$$

para encontrar el Hamiltoniano transformado.

Para obtener $\frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} \hat{T}^+(t)$ calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} \hat{T}^+(t) &= \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})}{2\hbar}\right) \frac{i\hbar}{2\hbar} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)\hat{x}^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \exp\left(\frac{i\dot{\rho}(t)\hat{x}^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{-i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})}{2\hbar}\right) + \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)\hat{x}^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \\ &\times \left(-\frac{i}{2\hbar} \hat{x}^2 \frac{\ddot{\rho}(t)\rho(t) - \dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)} \right) \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)\hat{x}^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \exp\left(\frac{-i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})}{2\hbar}\right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} \hat{T}^\dagger(t) = \frac{i\hbar}{2\hbar} \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}) + \left(-\frac{i}{2\hbar} \frac{\ddot{\rho}(t)\rho(t) - \dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)} \right) \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\} (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x})}{2\hbar} \right) \hat{x}^2$$

$$\times \exp\left(\frac{-i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\} (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x})}{2\hbar} \right) \quad (6.19)$$

Para calcular lo anterior necesitamos en el segundo término la expresión siguiente

$$\exp\left(\alpha (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}) \right) \hat{x}^2 \exp\left(-\alpha (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}) \right) = \hat{x}^2 + \alpha \left[\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}, \hat{x}^2 \right] + \frac{\alpha^2}{2!} \left[\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}, \left[\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}, \hat{x}^2 \right] \right] + \dots$$

(6.20)

por comodidad definimos

$$\alpha = \frac{i \ln(\rho(t)\sqrt{v_0})}{2\hbar} \quad (6.21)$$

El conmutador

$$\left[\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}, \hat{x}^2 \right] = -4i\hbar x^2 \quad (6.22)$$

Se puede obtener usando la propiedad

$$\left[p, x^l \right] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x^l ; \quad (6.23)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \exp\left(\alpha(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\right)^{\wedge^2} \exp\left(-\alpha(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\right) &= \hat{x}^2 + \alpha(-4i\hbar)x^2 + \frac{\alpha^2}{2!}(-4i\hbar)^2 x^2 + \dots \\ &= x^2 e^{-4i\hbar\alpha} = x^2 \rho^2 v_0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Sustituyendo en (6.20) y utilizando la ecuación de Ermakov (6.4) se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} \hat{T}^{-1}(t) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} (\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}) + \frac{1}{2} \left(\ddot{\rho}(t)\rho(t) - \dot{\rho}^2(t) \right) \hat{x}^2 v_0 \quad (6.25)$$

Para calcular $\hat{T}(t)\hat{H}\hat{T}^+(t)$ necesitamos en primer lugar

$$\hat{T}(t) \left(\frac{1}{2} \hat{p}^2 + v^2(t) \hat{x}^2 \right) \hat{T}^+(t). \quad (6.26)$$

En esta tarea se encuentra uno en la necesidad de obtener

$$\exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)\hat{x}^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \hat{p} \exp\left(\frac{i\dot{\rho}(t)\hat{x}^2}{2\hbar\rho(t)}\right) = \hat{p} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \hat{x}, \quad (6.27)$$

$$e^{\alpha(xp+px)} x e^{-\alpha(xp+px)} = \rho \sqrt{v_0} \hat{x} \quad (6.28)$$

$$y \quad \exp\left(\alpha(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\right) \left(\hat{p} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \hat{x} \right) \exp\left(-\alpha(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\right) = \hat{p} \left(\frac{1}{\rho\sqrt{v_0}} \right). \quad (6.29)$$

Con las expresiones anteriores se puede obtener

$$T p^2 T^+ = \left(\frac{1}{\rho^2 v_0} \right)^2 \hat{p}^2 + \rho^2 v_0 \hat{x}^2 + \frac{\dot{\rho}}{\rho} (xp + px), \quad (6.30)$$

y

$$Tx^2T^+ = \rho^2 v_0 \hat{x}^2 \quad (6.31)$$

Para finalmente obtener:

$$\hat{T}(t) \left(\frac{1}{2} \hat{p} + v^2(t) \hat{x} \right) \hat{T}^+(t) + i\hbar \frac{\partial \hat{T}(t)}{\partial t} \hat{T}^+(t) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\rho^2 v_0} \right) p^2 + \frac{v_0}{\rho^2} \hat{x}^2 \right) \quad (6.32)$$

debido a que también se requiere

$$Te^{-ikx}T^+ = \exp\left(\alpha(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\right) e^{-ikx} \exp\left(-\alpha(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\right) = \quad (6.33)$$

Desarrollando en serie de Taylor la exponencial, nos queda (6.33) como:

$$Te^{-i(kx - \omega t)}T^+ = e^{-i(k\rho\sqrt{v_0}x - \omega t)} \quad (6.34)$$

Con éstos resultados el Hamiltoniano transformado resulta ser

$$H_T = \frac{1}{2\rho^2 v_0} \left(p^2 + v_0^2 \hat{x}^2 \right) + \frac{\hbar}{2} \omega_{21} \sigma_z + \hbar \Omega(t) \left[e^{-i(k\rho\sqrt{v_0}x - \omega t)} \sigma_- + h.c. \right] \quad (6.35)$$

identificando la frecuencia de Rabi siguiente:

$$\Omega(t) = \lambda E_0 \quad (6.36)$$

Como podemos ver en el Hamiltoniano (6.35), hemos podido factorizar la dependencia temporal de la trampa, en esta dependencia está implícita ρ . Esto representa una ventaja cuando se requiere resolver la ecuación de Schrödinger para este sistema.

Ahora transformamos a un marco rotante de frecuencia ω usando la transformación

$$T_{\omega} = e^{i\omega t \sigma_z} \quad (6.37)$$

La transformación T_{ω} conmuta con p y q porque estos se refieren al movimiento vibracional y σ_z a los estados internos. También conmuta con $\frac{\hbar}{2}\omega_{21}\sigma_z$ por ser función del mismo operador.

De aquí que el hamiltoniano se pueda escribir como:

$$H_{\omega} = \frac{\hbar\tilde{\omega}(t)}{\nu_0} (n + 1/2) + \hbar\delta\sigma_z + \hbar\Omega(t) \left[e^{-i(a+a^*)\eta(t)} \sigma_{-} + h.c. \right] \quad (6.38)$$

donde hemos considerado $\delta = (\omega_{21} - \omega)$ como la desintonía entre el láser y el ion, y

$\tilde{\omega}(t) = \frac{1}{\rho^2}$ es la frecuencia característica del oscilador armónico dependiente del tiempo.

El parámetro de Lamb-Dicke dependiente del tiempo se puede expresar como:

$$\eta(t) = \eta_0 \rho(t) \sqrt{\nu_0}, \quad (6.39)$$

con $\eta_0 = k \sqrt{\frac{\hbar}{2\nu_0}}$ y k la magnitud del vector de onda del láser que ilumina al ion.

El hamiltoniano (6.38) es equivalente al de la interacción entre un campo cuantizado y un sistema de dos niveles con parámetros dependientes del tiempo.

6.4. Medición.

Analizando ahora el sistema como se realizo en el capitulo 4, consideramos un estado de movimiento vibracional desconocido, y el estado interno de el ión se considera excitado, tal que el estado inicial de el sistema es $\psi(0) = e \psi_v(0)$, el promedio del operador σ_+ es dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_+ &= -i \psi_v(0) \cos(\mu_{i_0}^{(1)} t \cdot \hat{n} + 1) \hat{V}^+ \text{sen}(\mu_{i_0}^{(1)} t \cdot \hat{n} + 1) \psi_v(0) \\ &= -\frac{i}{2} \psi_v(0) \hat{V}^+ \left(\text{sen}[\mu_{i_0}^{(1)} t \hat{\Delta}_+(\hat{n})] - \text{sen}[\mu_{i_0}^{(1)} t \hat{\Delta}_-(\hat{n})] \right) \psi_v(0)\end{aligned}\quad (6.40)$$

donde

$$\hat{\Delta}_{\pm}(\hat{n}) = \hat{n} + 2 \pm \hat{n} + 1 \quad (6.41)$$

Utilizando la integral de Fresnel (ec. 4.12) y $\mu_{i_0}^{(1)} t = \tau$ tenemos

$$\int_0^{\infty} d\tau \tau \text{sen}(\tau^2 / A) \sigma_+ = -\frac{i}{2} \psi_v(0) \hat{V}^+ \left(\hat{\gamma}_+^{(1)} - \hat{\gamma}_-^{(1)} \right) \psi_v(0) \quad (6.42)$$

con

$$\hat{\gamma}_{\pm}^{(1)} = \frac{A \hat{\Delta}_{\pm}(\hat{n})}{4} \frac{\pi A}{2} \left(\cos \left[\frac{A \hat{\Delta}_{\pm}^2(\hat{n})}{4} \right] + \text{sen} \left[\frac{A \hat{\Delta}_{\pm}^2(\hat{n})}{4} \right] \right) \quad (6.43)$$

Ahora usamos la aproximación $(\hat{n} + 2)(\hat{n} + 1) \approx \hat{n} + 3/2$ que es válida para numeros de excitación grandes. Podemos entonces escribir $\hat{\Delta}_+^2(\hat{n}) \approx 4\hat{n} + 6$ y $\hat{\Delta}_-^2(\hat{n}) \approx 0$. Asignando $A=4\pi$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_+^{(1)} &\approx (\hat{n} + 2 + \hat{n} + 1)\pi \cos[(4\hat{n} + 6)\pi] = 2\pi^2 \hat{\Delta}_+(\hat{n}) \\ \hat{\gamma}_-^{(1)} &\approx 2\pi^2 \hat{\Delta}_-(\hat{n})\end{aligned}\tag{6.44}$$

tal que la transformada integral queda

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\tau \tau \text{sen}(\tau^2 / A) \hat{\sigma}_+ &= -i 2\pi^2 \psi_v(0) \hat{V}^+ (\hat{n} + 1) \psi_v(0) \\ &= -i 2\pi^2 \psi_v(0) \hat{b}^+ \psi_v(0)\end{aligned}\tag{6.45}$$

para medir $\psi_v(0) [\hat{b}^+] \psi_v(0)$ es necesaria una transición de dos fotones, es decir calcular el promedio de $(\hat{\sigma}^+)^2$, lo que nos conduce después de hacer las aproximaciones necesarias a:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\tau \tau \text{sen}(\tau^2 / 8\pi) \hat{\sigma}_+^{(2)} &= -i 8\pi^4 \psi_v(0) [\hat{V}^+]^2 (\hat{n} + 1)(\hat{n} + 1) \psi_v(0) \\ &= -i 8\pi^4 [\hat{b}^+]^2\end{aligned}\tag{6.46}$$

6.5. Referencias.

[6.1] H. R. Lewis Jr., 1967, Phys. Rev. Letters, **18**, 510 (1967).

[6.2] M. Kruskal, J. Math. Phys., **3**, 806 (1962).

[6.3] V. Ermakov, Univ. Izu. Kiev, Series III**9**, (1880).

[6.4] H. R. Lewis Jr., 1967, Journal of Mathematical Physics, **9**, (1967).

[6.5] H. Moya Cessa and M. Fernández Guasti, J. Phys. A: Math. Gen., **36**, (2003).

CONCLUSIONES.

En este trabajo estudiamos una parte fundamental en física que corresponde al principio de incertidumbre de Heisenberg, y como consecuencia la generación de estados coherentes y comprimidos del campo electromagnético. Para lograr nuestro objetivo estudiamos la cuantización del campo electromagnético, así como la formulación hamiltoniana para la interacción de un átomo con el campo en la aproximación de la onda rotante.

Una vez obtenido el hamiltoniano, lo expresamos en términos de los operadores de creación y aniquilación y se identifica una relación que corresponde a una transformación integral de Fresnel, con lo cual se identifica la forma de medir las propiedades de compresión y de fase del campo electromagnético en la cavidad a partir de la información del estado de los átomos que abandonan la cavidad.

Revisamos el funcionamiento de la trampa de Paul a fin de aplicar los resultados obtenidos en la medición de las propiedades de compresión a trampas de iones.

Mostramos la aplicación de éste método en iones, después de realizar un conjunto de manipulaciones para describir el sistema en una trampa de Paul con frecuencia dependiente del tiempo.