



**I
N
A
O
E**

“Análisis y Uso de Funciones de Base Radial como Filtros Interpoladores”

Por

Ing. Juan Carlos Aguilar López

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ELECTRÓNICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Febrero 2009

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Rogerio A. Enríquez Caldera

©INAOE 2009

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en
partes de esta tesis



Contenido

Agradecimientos	1
Resumen	2
Abstract	3
1. Introducción	4
1.1 Tomografía Computarizada de Rayos Paralelos.....	4
1.1.1 Proyecciones e integrales de líneas	5
1.1.2 Teorema de la Proyección	6
1.1.3 Reconstrucción por medio de Retroproyecciones filtradas.....	8
1.2 Objetivo de la tesis.....	11
1.3 Organización de la tesis.....	11
2. Marco Teórico	12
2.1. Interpolación basada en convolución	12
2.1.1 Esquema cardinal de interpolación basado en convolución.....	12
2.1.2 Esquema general de interpolación basada en convolución.....	14
2.1.3 Aproximación del filtro pasabajos ideal con kernels de convolución	18
2.1.4 Splines	21
2.1.5 Estimado del Error de interpolación con kernels de convolución.	24
2.1.6 Orden de aproximación.....	30
2.1.6.1 Condiciones de Strang-Fix	31
2.2 Obtención básica de nuevas muestras de una secuencia discreta con kernels de convolución, filtros digitales y la función Sinc discreto.	32
2.2.1 Obtención de nuevas muestras mediante una convolución discreta.....	32
2.2.2 Sobremuestreo por un factor L entero de secuencias discretas	33
2.3 Interpolación con Funciones de Base Radial.....	39
2.3.1 Funciones Positivas definidas.....	40
2.3.3 Funciones de soporte compacto	41
2.3.4 Las FBR como kernels de convolución	44
3. Implementación	46
3.1 Interpolación con la función Sinc Discreto.....	46
3.1.1 Interpolación mediante inserción de ceros	46

3.2 Interpolación con B-splines y FBR en modo convolución	50
3.2.1 Obtención de los coeficientes ck de B-splines mediante filtrado digital.....	50
3.2.2 Obtención de los coeficientes ck de FBR mediante filtrado digital	54
3.2.3 Métodos para la obtención eficiente de nuevas muestras.....	54
3.2.3.1 Descomposición polifásica	54
3.2.3.2 Estructura Farrow para interpoladores basados en polinomios.....	56
3.2.4 Desplazamientos fraccionarios	58
3.3 Rotación de imágenes por medio de traslaciones	58
3.4 Computo del Kernel de error	60
3.5 Algoritmo de reconstrucción para Tomografía Computarizada de Rayos Paralelos	61
4. Resultados.....	66
4.1. Análisis de Kernels de error en interpolación de algunas FBR	66
4.2 Aplicaciones.....	79
4.2.1 Zoom en imágenes	79
4.3.1 Rotación de imágenes	86
4.2.3 Recuperación de una imagen en Tomografía Computarizada de Rayos Paralelos.....	91
5. Conclusiones y trabajo futuro	96
5.1 Conclusiones.....	96
5.2 Trabajo futuro	99
Lista de Figuras.....	100
Lista de Tablas	103
Bibliografía.....	104

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Rogério Enríquez Caldera y al Dr. Jorge Martínez Carballido por su apoyo y enseñanza; a los sinodales Dr. José Alejandro Díaz Méndez, Dr. Esteban Tlelo Cuautle y al Dr. Juan Manuel Ramírez Cortés por su revisiones; al CONACYT y al INAOE por el apoyo económico recibido; a mi familia por su apoyo y estar siempre conmigo; a la sra. Josefina Zapata Medel e hijos por ser como mi segunda familia.

Resumen

Las funciones de Base radial (FBR) son herramientas para aproximación que permiten asociar una función continua a un conjunto de datos discretos, en donde el argumento es la norma euclidiana tomada como la distancia entre el punto a evaluar y un punto denominado centro. La popularidad de las FBR es debido a que se puede obtener un único interpolante sin una gran restricción en la localización de sus centros.

Existen diversos trabajos que muestran sus usos y analizan su exactitud considerando un análisis matricial y otros considerando un número infinito de datos igualmente espaciados. En este trabajo consideramos este último, y obtenemos una propiedad llamada filtro de interpolación que nos proporcionara importante información acerca de sus propiedades de interpolación.

En este contexto se utilizan las RBF de soporte compacto, la función Gaussiana y el formado por la segunda razón de diferencias de la función Multicuádrica (QIM) y se comparan en 1 dimensión mediante un método gráfico llamado kernel de error en el dominio de la frecuencia, el cual nos indicara la calidad de aproximación que se puede obtener mediante estas funciones.

Mediante el kernel de error se observa que las funciones de Wendland y la Gaussiana (bajo un soporte dado y un factor de escalamiento constante respectivamente) el error se mantendrá constante, aunque el número de muestras aumente, es decir no habrá convergencia hacia una función que se desee aproximar. Esto implicara que éstas funciones no pueden reproducir funciones constantes y se entenderá el problema haciendo una comparación con los B-splines de orden entero, los cuales si tienen la capacidad de reproducir polinomios de acuerdo a su grado.

En el resultado de esta comparación se observa que las funciones de Wendland al igual que otras funciones de soporte compacto, presentan una cierta convergencia de sus kernels de error al de los B-splines conforme se aumenta su soporte, es decir sus filtros Interpoladores tienden a ser iguales implicando que la calidad de interpolación será similar. Para la función Gaussiana y el QIM se mostrara una convergencia de sus kernels de error al de la función Sinc.

En la parte final del trabajo se presentan usos de estas funciones en problemas comunes de interpolación y se realiza una prueba basado en rotación de imágenes en donde se verifica la similitud de los filtros interpoladores entre las funciones de Wendlands y B-splines.

Abstract

The radial basis functions are tools for approximation that can be linked with a set of discrete data, where the argument is the Norm Euclidian between any point and other called center. The RBF are popular because an unique interpolant is guaranteed under weak conditions on the location of the centers.

There are a lot of works that shows its uses and study its accurateness regarding either an matricial anylisis or assuming we have data laying at the vertices on an infinite regular grid. In this work we consider the latter but in 1 dimension and we get a property called " Interpolation filter" that provide us valuable information about its approximation characteristics.

Under this context we use the supported compactly radial basis funcions, Gaussian function and the second divided different of the Multicquadric function(QIM) and we compare them by means of method called Error Kernel into the frecuency domain.

By means of error kernel we find that using the Wendland functions and Gaussian function as interpolators -under a given support and scaling factor- the error holds even if we up the number samples, in other words, there won't converge to the function that we wish aproximate. This will imply that this functions cannot reproduce constans functions and this can be understood doing a comparison with the B-splines of integer degree, wich ones can reproduce polynomial according of degree.

The comparation turns out that the error kernels of Wendland functions show a converge to the error kernels of the B-splines when the support is increased which implies that theirs interpolating filters approach to be equals as well as their interpolation quality. The Gaussian function and QIM show converge to the Sinc function.

In the end this work we show uses of those functions in usual interpolation problems and make a experiment consisting of succesive image rotations in where we verify the similarities between the Wendland functions and B-splines in their interpolating filters.

1. Introducción

El proceso de interpolación es requerido en muchas áreas como en meteorología o gráficos en computadora en donde es frecuente obtener mediciones sobre un fenómeno u objeto en forma dispersa mediante un dispositivo de muestreo, y en donde surge la necesidad de obtener más detalle sobre el fenómeno sin tener que modificar ese dispositivo. También el clásico problema de tener una función en la que es difícil realizar operaciones tales como integración y se prefiere aproximarla por una función que sea más fácil de evaluar. Para este tipo de problemas con datos dispersos es bastante utilizada la interpolación con FBR presentando excelentes resultados, por ejemplo para el caso de gráficos en computadora tal como se presenta en [30] y [31]. La ventaja de las FBR es que un problema de varias dimensiones lo convierte en 1 dimensión.

En el caso en que las muestras son obtenidas con igual espaciamiento, existen técnicas tales como interpolación basada en polinomios como los de Lagrange o Splines. Los Splines son populares debido a que permite asociar un modelo continuo a las muestras y con el cual ya se pueden hacer transformaciones geométricas tales como rotación y Zoom. Debe notarse que en esas transformaciones es necesaria la obtención de nuevas muestras que normalmente se logran por interpolación.

La forma de realizar la interpolación en este trabajo es llamada "interpolación basada en convolución" y básicamente la idea es de considerar al proceso de interpolación como un sistema, en donde le aplicamos una señal que tiene una naturaleza discreta y el sistema nos devuelve una señal que es continua. Por ejemplo un sistema de CD, la música que proviene de un disco se considera como una señal de voltaje discreto y ésta es procesada por el reproductor de CD el cual tiene la función de volver una señal de voltaje continuo para así aplicarlo a una bocina.

La motivación principal de esta tesis surgió del área Médica donde existen muchos procesos en donde se requiere un proceso de interpolación [33]. De los más importantes es el de "tomografía computarizada" donde el principal objetivo es obtener una sección transversal de un objeto sin tener que realizar un corte o invadirlo. Existen diversos problemas para llevar a cabo este proceso [13], desde los problemas del sistema de muestreo hasta los problemas del algoritmo de reconstrucción a partir de las muestras obtenidas. En el caso del algoritmo de reconstrucción, fundamentalmente se tiene que obtener una imagen donde sus muestras van a estar distribuidas en un plano cartesiano, pero esto a partir de un conjunto finito de datos discretos los cuales estarán distribuidos en una geometría diferente. Este problema se puede resolver mediante interpolación y se describe a continuación con más detalle.

1.1 Tomografía Computarizada de Rayos Paralelos

En el área de medicina una de las herramientas más útiles es la tomografía debido a que es un método no invasivo, es decir se puede examinar la estructura del cuerpo sin la necesidad de cortarlo. En general para entendimiento común se le conoce como tomografía, sin embargo la palabra técnica utilizada en estos días es tomografía computarizada; se le hace esta distinción

debido a que en los primeros intentos de implementar el concepto de tomografía, la imagen era obtenida con principios basados en radiografía, y se visualizaba en una película sensible a los rayos X como comúnmente se hace en radiografías. Pero debido a la forma en que son aplicadas estas técnicas, dan como resultado imágenes borrosas generadas por la interferencia de las otras estructuras que no se deseaban ver además de tener la limitación natural de que no se podían procesar las imágenes una vez obtenidas pues estaban ya impresas en la película de rayos X. Actualmente la tomografía se apoya mediante la computadora basada en un modelo matemático del problema y resolviéndolo mediante algoritmos especializados. Para utilizar un modelo matemático se considera que la tomografía entra en un campo más general de problemas llamados problemas de reconstrucción, en la que se requiere saber alguna propiedad de la estructura interna de un objeto sin cortarlo o simplemente sin dañar macroscópicamente el objeto. Este tipo de problemas pueden ser estudiados matemáticamente mediante la “transformada Radon” desarrollada por el matemático austriaco Johann Radon cuyo principio se ilustra con la siguiente correspondencia:

$$\{Distribucion\ interna\} \rightarrow \text{sujeto a una prueba} \rightarrow \{perfil\}$$

$$\{f\} \rightarrow \text{sujeto a la transformada Radon} \rightarrow \{P_{\theta}\}$$

La distribución interna corresponde a alguna propiedad del objeto - tal vez densidad o algo cercanamente a la densidad- y esta es afectada por alguna prueba que genera lo que se conoce como un perfil o distribución proyectada [32].

La fuente que sirve para probar la distribución puede ser rayos gamma, luz visible, microondas, ondas de sonido, entre otros. Esta prueba tiene su analogía considerando al objeto como una función f , la prueba como su transformada Radon Rf que finalmente nos da un perfil P_{θ} . Es natural esperar que también se pueda obtener la transformada inversa. Por ejemplo, la prueba puede ser los rayos X penetrando un objeto sobre un lado y midiendo las intensidades que resultan del lado opuesto para formar un perfil.

En el caso de tomografía los datos obtenidos de un scanner de Rayos X, se consideran como muestras de una transformada Radon sobre una sección transversal del objeto, así, cada perfil obtenido es identificado como una parte de la transformada Radon. La distribución interna que se pone a prueba o la imagen obtenida en un equipo comercial son los coeficientes de atenuación, es decir cada vez que pasa un haz de alguna onda electromagnética a través del objeto este es atenuado y su atenuación dependerá de esa distribución. En tomografía computarizada existen tres geometrías básicas de las cuales solo trataremos el caso de rayos paralelos que, aunque es el menos utilizado, es la base del entendimiento del proceso de tomografía.

1.1.1 Proyecciones e integrales de líneas

Una integral de línea, como su nombre dice, representa la integral de un objeto a lo largo de una línea, en una forma física, el valor numérico de la integral es generado pasando un rayo X sobre el objeto y la medición de su atenuación del rayo X servirá para determinar muestras de su valor.

Para describir las proyecciones e integrales de línea, introduciremos el sistema de coordenadas de la figura 1.1. En la grafica se presenta un objeto o función $f(x, y)$ que está en dos dimensiones y los parámetros (θ, t) describen las integrales de línea.

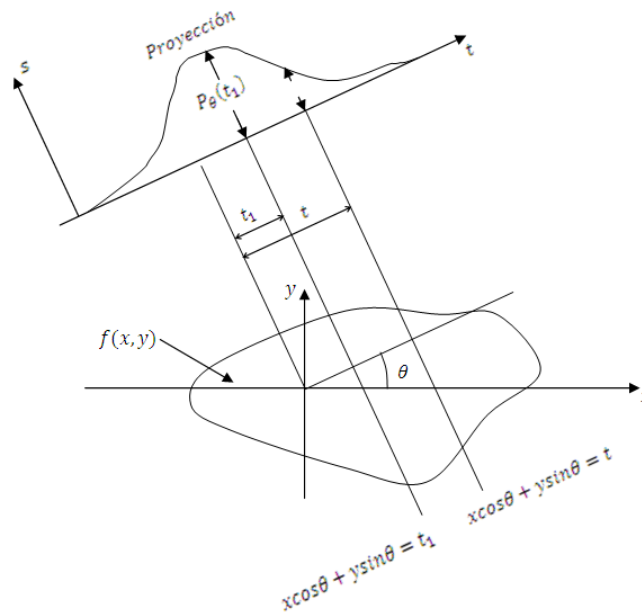


Figura 1.1. Proyección de $P_\theta(t)$ de un objeto $f(x, y)$.

La ecuación de una de las líneas rectas en la figura 1.1 esta dado por:

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t \quad (1.1)$$

Y usaremos la siguiente relación para definir la integral de línea $P_\theta(t)$ como:

$$P_\theta(t) = \int_{(\theta, t) \text{ línea}} f(x, y) ds \quad (1.2)$$

El conjunto de valores $P_\theta(t)$ forma la transformada Radon de la función $f(x, y)$. Como se observa en la figura 1.2, una proyección es una función que está formada por el conjunto de valores de integrales de línea bajo un mismo ángulo θ . Esa proyección puede ser obtenida moviendo una fuente de rayos X y un detector a lo largo de líneas paralelas sobre lados opuesto del objeto.

1.1.2 Teorema de la Proyección

En esta sección se describe la relación que existe entre la transformada de Fourier en 2D de $f(x, y)$ con la transformada de Fourier en 1D de sus proyecciones $P_\theta(t)$.

La transformada de Fourier de una proyección es:

$$S_\theta(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j2\pi\Omega t} dt \quad (1.3)$$

Para el caso de tener una proyección con $\theta = 0$ tenemos:

$$P_{\theta=0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (1.4)$$

Ahora considerando la transformada de Fourier de $f(x, y)$ solo en el eje u tenemos:

$$F(u, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] e^{-j2\pi ux} dx \quad (1.5)$$

Podemos observar que el término en corchetes es $P_{\theta=0}(t)$ y que $F(u, 0)$ es su transformada de Fourier. Este resultado es básicamente la forma más simple del Teorema de proyecciones el cual es enunciado a continuación:

- La transformada de Fourier de una Proyección paralela $S(\Omega, \theta)$ de una función $f(x, y)$ tomada en un ángulo θ , da una línea de la transformada de Fourier 2D $F(u, v)$ que está a un ángulo θ del eje u .

Gráficamente, esto se muestra en la figura 1.2 en donde para facilitar su observación de este teorema, hacemos una rotación por θ de tal manera que el sistema de coordenadas (x, y) cambie al de la proyección (t, s) , entonces también hacemos una rotación a su transformada de Fourier de tal manera que se preserve la relación que se da en las ecuaciones (1.4) y (1.5).

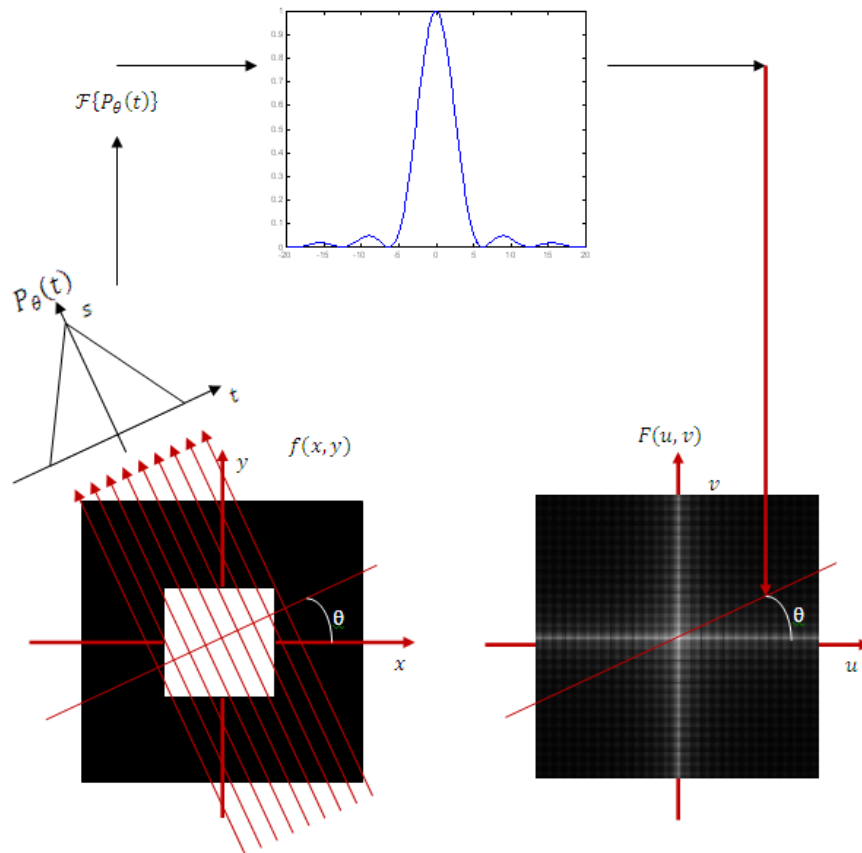


Figura 1.2. Teorema de la Proyección.

1.1.3 Reconstrucción por medio de Retroproyecciones filtradas.

Se introduce el método de retroproyección filtrada el cual servirá para reconstruir $f(x, y)$ a partir de sus proyecciones, es decir se invierte la transformada Radon. Para esto, se inicia con la transformada inversa de Fourier en 2D, en donde se cambia el sistema de coordenadas en el dominio de la frecuencia a una forma polar con:

$$u = \Omega \cos \theta, v = \Omega \sin \theta, dudv = \Omega d\Omega d\theta \quad (1.6)$$

Y utilizando el teorema de proyecciones con $S_\theta(\Omega) = S(\Omega, \theta)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty F(\Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta) e^{j2\pi\Omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \Omega d\Omega \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty S(\Omega, \theta) e^{j2\pi\Omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \Omega d\Omega \\ &\quad + \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty S(\Omega, \theta + \pi) e^{-j2\pi\Omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \Omega d\Omega \end{aligned} \quad (1.7)$$

Utilizando la siguiente propiedad natural de la geometría paralela de proyecciones:

$$P(t, \theta + \pi) = P(-t, \theta) \quad (1.8)$$

Se tiene:

$$S(\Omega, \theta + \pi) = S(-\Omega, \theta) \quad (1.9)$$

Utilizando la relación anterior en la ecuación (1.8) se tiene:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^\infty S(\Omega, \theta) |\Omega| e^{j2\pi\Omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\Omega \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^\infty S(\Omega, \theta) |\Omega| e^{j2\pi\Omega t} d\Omega = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde:

$$g(t, \theta) = g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) = \int_{-\infty}^\infty S(\Omega, \theta) |\Omega| e^{j2\pi\Omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\Omega \quad (1.11)$$

Básicamente lo que indica las ecuaciones (1.10) y (1.11) es que con θ fija, para los valores de (x, y) que cumplan $x \cos \theta + y \sin \theta = t_1$, $f(x, y)$ tomara el valor de $g(t_1, \theta)$. Este proceso es conocido como retroproyección y solo se repite para $0 \leq \theta < \pi$ debido a la propiedad indicada en la ecuación (1.8), indicando que no habrá nueva información en la proyecciones para ángulos mayores a π . También se observa de la ecuación (1.11) que lo que se retroproyecta es una versión filtrada de $S(\Omega, \theta)$ por el filtro $|\Omega|$ el cual es conocido como filtro Rampa y, por eso, al proceso total se le conoce como reconstrucción mediante retroproyecciones filtradas. Esta operación de

filtrado es fundamental debido a que si solo se retroproyecta a $P(t, \theta)$, se genera una imagen que presentara Blurring tal como se indica en la siguiente figura:

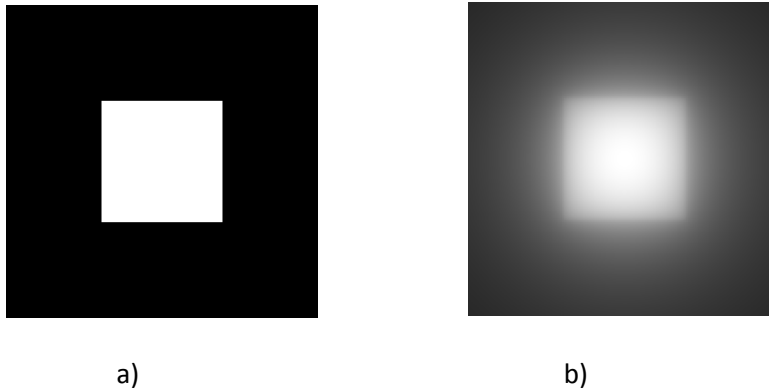


Figura 1.3. Reconstrucción de una Sección transversal de un cubo. a) Sección transversal. b) Reconstrucción a partir de sus proyecciones sin filtrar.

En una situación práctica se tiene un conjunto de muestras de cada proyección y después del filtrado con el filtro Rampa, son retroproyectadas al plano de la imagen tal como se ilustra en la figura 1.4.a.

Se observa que para algunos puntos (x, y) no se le podrán asignar algún valor de las muestras de $g(t, \theta)$ debido a que no se podrá cumplir $x \cos \theta + y \sin \theta = t$. Entonces para solucionar este problema se realiza una interpolación para encontrar nuevas muestras de $g(t, \theta)$ que tengan correspondencia con los puntos (x, y) en donde queremos que existan los valores de la imagen resultante.

Otro acercamiento es mediante la transformada discreta de Fourier en 2D en donde se presenta el problema de interpolación ilustrado en la figura 1.4.b. En la grafica se observa que el problema es encontrar nuevas muestras en puntos cartesianos a partir de las muestras de las proyecciones distribuidas radialmente.

Es claro entonces, que la calidad de la imagen de la sección transversal recuperada será fuertemente dependiente del método de interpolación usado. En [34] y [35] se realiza la reconstrucción con Splines, en donde se aplican en modo de convolución, con un conjunto de proyecciones tomadas en ángulos igualmente espaciados al igual que sus muestras. Por otro lado, en los trabajos [36] y [37], las FBR se aplican en una situación con un número limitado de proyecciones. En [36] se considera que el sistema de muestreo está en una ubicación que no le permite tomar las proyecciones en ángulos igualmente espaciados y muestran un ejemplo en el que por medio de una red neuronal, pueden obtener la sección transversal utilizando solo 2 proyecciones. En [37] suponen que si la distribución que desean obtener, tiene una simetría radial o cercana a ésta, entonces con FBR, consideran que pueden obtenerla con una sola proyección y con un número limitado de muestras, mediante la solución de un sistema de ecuaciones. Sin embargo pese a que se aplican en situaciones diferentes, tienen la misma idea de representar a la sección transversal o distribución en términos de funciones base.

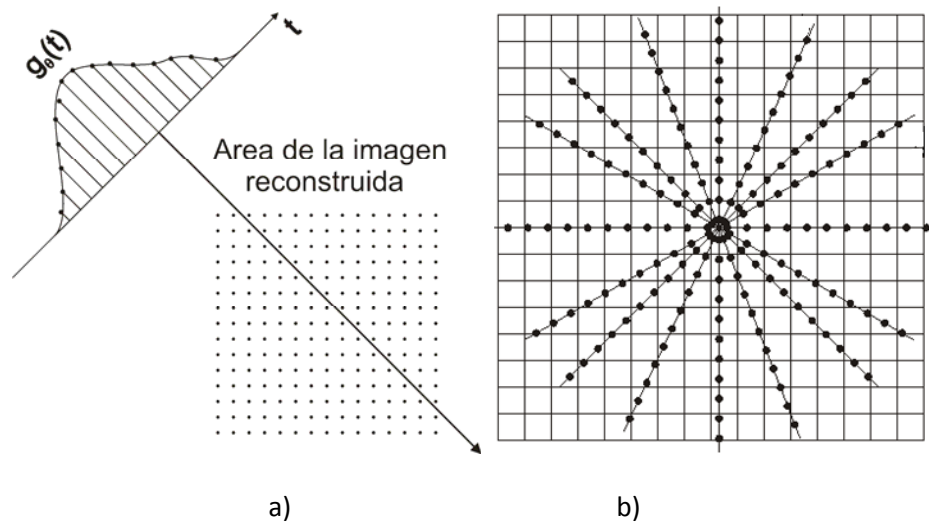


Figura 1.4. Dos diferentes problemas de interpolación en tomografía computarizada a) Retroproyección de muestras de $g(t, \theta)$. b) Distribución de las muestras radiales de $P(t, \theta)$ en el plano cartesiano.

La idea de la interpolación con polinomios de Lagrange y Splines es que se busca acoplar un conjunto de muestras a una función que tenga una estructura polinómica. Mientras que en los polinomios de Lagrange se acopla un solo polinomio a las muestras, el Spline es una función que está hecha de tramos de polinomios de tal manera que entre las muestras existirá un polinomio de grado a lo mas M , entonces se puede decir que en los splines se acopla un conjunto de polinomios a las muestras. Con los polinomios de Lagrange se obtiene una representación que interpola todo el conjunto de muestras en términos de funciones base. Un Spline también puede ser representado por funciones base denominadas B-splines [3],[27]. Este tipo de representación con funciones base es la que permite realizar el proceso de interpolación en forma de convolución. De la función base se determina la respuesta al impulso del sistema que representa el proceso de interpolación, al igual que la calidad de interpolación y a su respuesta en el dominio de la frecuencia se le conoce como “filtro interpolador”.

El problema de interpolar con FBR es el de acoplar un conjunto de muestras a una función formada por las FBR, entonces las FBR actúan como funciones base y esto permite una similitud en su estructura con el de la interpolación basada en convolución.

En base a lo comentado, podemos hacer las siguientes preguntas:

¿Cuales serian los resultados con FBR en una situación ideal, es decir, si tuviéramos un número considerable de proyecciones las cuales tendrán muestras igualmente espaciadas?

¿Se podrá hacer una comparación directa entre Splines u otro método que sea basado en convolución con FBR?

El cual implica formularnos la siguiente pregunta: ¿Se podrá aplicar las FBR en modo convolución?

En base a estas preguntas se presenta el objetivo de la tesis.

1.2 Objetivo de la tesis

La única diferencia entre estas estructuras de interpolación con FBR y en modo convolución es en el argumento de las funciones base, sin embargo si no consideramos la norma euclidiana en el argumento de las FBR, entonces se puede utilizar en un esquema de interpolación basado en convolución.

Bajo esta restricción, se va analizar las FBR aplicadas en modo de convolución, es decir, como filtros interpoladores. Este análisis estará restringido a 1D y se podrá hacer la extensión a 2D bajo un esquema de la función base en producto de tensores.

Además se va a mostrar las técnicas que se pueden usar para poder implementar a las FBR con operaciones de convolución y los resultados de algunas aplicaciones usuales que requieren interpolación incluyendo el caso de Tomografía computarizada con Rayos paralelos.

1.3 Organización de la tesis

En el capítulo 2 se muestra la teoría sobre la interpolación basado de convolución y se hará una breve descripción de las FBR que serán útiles para implementarlos en este esquema y finalmente se mostrara el método de comparación o error utilizado basado en el error cuadrático medio.

En el capítulo 3 se mostraran las técnicas para implementar la interpolación basado en convolución los cuales nos servirán para la implementación de las FBR. En el capítulo 4 se mostraran los resultados con sus comentarios respectivos del uso del error descrito en el capítulo 2 y de algunas aplicaciones incluyendo la reconstrucción de imágenes en tomografía computarizada con rayos paralelos. En el capítulo 5 se mostraran las conclusiones así como el trabajo a futuro que se pueda desarrollar.

2. Marco Teórico

En este capítulo se mostrarán los fundamentos de la interpolación basada en convolución, así como un método que nos ayudara a determinar su calidad. Se mostrará la teoría básica para la interpolación con FBR así como las similitudes que existen con la basada en convolución.

2.1. Interpolación basada en convolución

Constantemente surge el problema de obtener más detalle sobre algún fenómeno físico o de alguna señal, pero solo tenemos como información un conjunto de sus muestras. Por ejemplo, en el caso imágenes, en donde tenemos un conjunto finito de muestras, y queremos realizar una amplificación de una zona en particular, tenemos que obtener más pixeles; una forma de obtenerlos es acoplando una función $g(x)$ a la imagen, para que después esta sea evaluada en los puntos extras que necesitamos para realizar la amplificación.

Un método para encontrar tal función $g(x)$ es con interpolación, en donde la función que se obtenga debe pasar por los valores de las muestras que sí se tienen, un ejemplo es la interpolación con polinomios de Lagrange. Otro método es por aproximación de mínimos cuadrados, en donde la función resultante no necesariamente pasara sobre las muestras porque para este tipo de aproximación, para un conjunto de muestras (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, N$ con distintas $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, se minimiza el error cuadrático medio $\sum_{j=1}^N [g(x_j) - y_j]^2$.

Si deseamos interpolar datos que estén igualmente espaciados, se pueden acoplar las muestras a una función que es expresada como una sumatoria de versiones desplazadas de una función base φ , en intervalos del paso de muestreo. A φ se le conoce como kernel de convolución y una característica importante es que ésta representación con funciones base se puede modelar como un sistema lineal con una respuesta al impulso dada. A este tipo de interpolación se le llama “interpolación basada en convolución” y se pueden obtener dos representaciones.

2.1.1 Esquema cardinal de interpolación basado en convolución

Se considera la siguiente ecuación de interpolación:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^q} f_{\mathbf{k}} \varphi_{int}(\mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s \quad (2.1)$$

En donde $f_{\mathbf{k}}$ es un conjunto de muestras disponibles que están en las posiciones $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbf{Z}^s$ y $\varphi_{int}(\mathbf{x})$ es el kernel de convolución.. Además, $\varphi_{int}(\mathbf{x})$, tiene la siguiente propiedad llamada “restricción de interpolación” [2]:

$$\varphi_{int}(\mathbf{m} - \mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{para } \mathbf{k} = \mathbf{m} \\ 0, & \text{para cualquier otro valor de } \mathbf{k} \end{cases} \quad (2.2)$$

Entonces al evaluar la ecuación (2.2) en $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^s$ resulta equivalente a:

$$g(\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{Z}^q} f_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{m} - \mathbf{k}) \quad (2.3)$$

Desde el punto de vista de sistemas lineales, la ecuación (2.3) se puede representar mediante una convolución considerando a $f_{\mathbf{k}}$ como los pesos que afectan a un tren de impulsos, es decir se tiene una señal dada por $\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{Z}^q} f_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{k})$, el cual es obtenida de un muestreo ideal a una función $f(\mathbf{x})$, y que al ser aplicado a un sistema con respuesta al impulso φ_{int} , se genera una señal continua $g(\mathbf{x})$ como se ilustra en la siguiente figura para el caso de 1D:

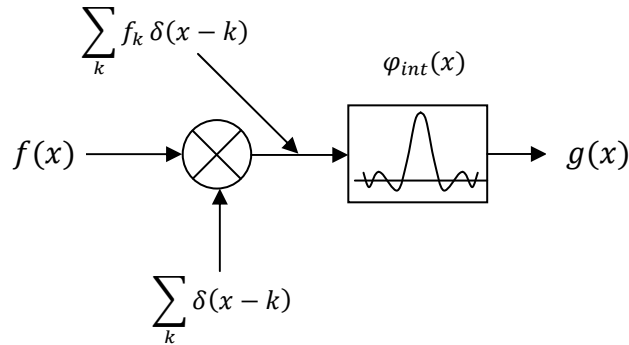


Figura 2.1. Esquema cardinal de interpolación basado en convolución.

De los kernel más utilizados es el dado por la ecuación:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \quad (2.4)$$

en donde la interpolación con este kernel es igual a realizar una interpolación lineal. Se ilustra una función $g(x)$ formada por el kernel lineal en la figura 2.2:

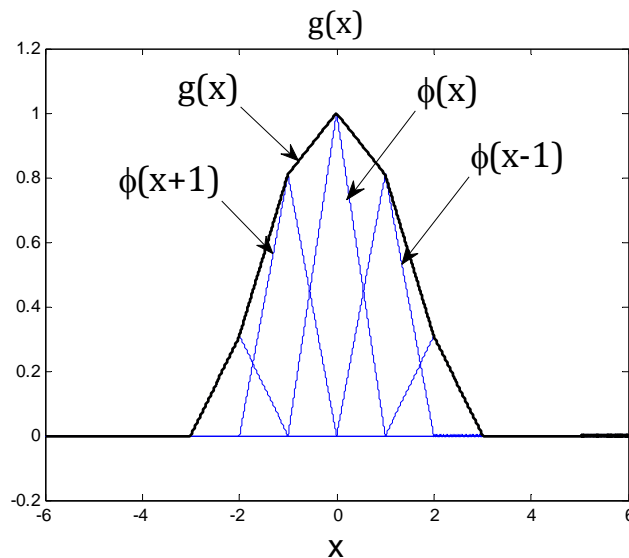


Figura 2.2. Ejemplo de una función $g(x)$ formada por kernels lineales.

Cabe destacar que la construcción de este esquema es simple, ya que lo único que se tiene que hacer es sustituir en f_k , los valores de las muestras y obtenemos nuestra función $g(x)$.

Es digno hacer notar que se puede formular la interpolación de Lagrange en la forma dada por la ecuación (2.1) tal y como se puede ver en [19]y [20].

2.1.2 Esquema general de interpolación basada en convolución

Se considerara otro esquema de interpolación basada en convolución de la siguiente manera:

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} c_k \varphi(x - k), \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s, \quad (2.5)$$

En donde c_k son coeficientes que están centrados en $k = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s$ y se identifica una vez mas a $\varphi(x)$ como un kernel de convolución. La diferencia fundamental entre las ecuaciones (2.1) y (2.5) es que los coeficientes c_k son diferentes a f_k , esto es debido a que φ no se restringe a cumplir la condición (2.2), entonces es necesario calcularlos lo cual puede hacerse mediante un sistema lineal de ecuaciones. Los coeficientes c_k se calculan en base a f_k tomando en cuenta que al evaluar la ecuación (2.5) en $m \in \mathbb{Z}^s$, se debe cumplir:

$$g(m) = f(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} c_k \varphi(m - k) \quad (2.6)$$

Así pues, la ecuación (2.5) también se puede interpretar como una convolución y por lo tanto, se puede hacer una representación de la misma, como un sistema lineal.

Para ejemplificar esta representación de una manera práctica, se mostrara en 1D. La ecuación (2.5) en 1D es:

$$g(x) = \sum_k c_k \varphi(x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

la cual se desea como una aproximación a otra función $f(x)$. La única información que tenemos de $f(x)$ es un conjunto de sus muestras las cuales se consideran que fueron tomadas en $x = n, \forall n \in \mathbb{Z}$, es decir, en un paso de muestreo de $T = 1$. Así que la ecuación (2.7) principalmente debe cumplir la siguiente restricción:

$$f(n) = f_n = \sum_k c_k \varphi(n - k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (2.8)$$

para un numero finito de datos $0 \leq n \leq N - 1$. De esa forma, afrontamos al problema de resolver un sistema de N ecuaciones para encontrar los coeficientes c_k [27], [29]. Pero si consideramos a los coeficientes c_k , como una función de k , es decir es una secuencia discreta $c(k)$, entonces otra forma de encontrarlos es considerar la ecuación (2.8) como una convolución discreta entre $c(k)$ y $\varphi(n)$, es decir,

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)\varphi(n-k) = c(0)\varphi(n-0) + c(1)\varphi(n-1) + \dots + c(N-1)\varphi(n-N+1) \quad (2.9)$$

La sumatoria en la ecuación (2.9) es lo mismo que aplicar una secuencia discreta $c(n)$ a un sistema con respuesta al impulso $\varphi(n)$.

Entonces al ser una convolución la ecuación (2.8), ésta se puede representar en términos de su transformada Z de la siguiente manera:

$$F(z) = C(z)\Phi_s(z) \quad (2.10)$$

en donde $F(z)$, $C(z)$ y $\Phi_s(z)$ son las transformadas Z de $f(n)$, $c(k)$ y $\varphi(n)$ respectivamente. Entonces, $C(z)$ se puede calcular de la siguiente forma:

$$C(z) = F(z)/\Phi_s(z) = F(z)\Phi_s^{-1}(z) \quad (2.11)$$

Así que debemos calcular $\Phi_s(z)$ para tener $C(z)$ y para lo cual se obtienen muestras de $\varphi(x)$ en $T = 1$ que nos dará la secuencia $\varphi(n)$. Nótese que para que exista $\Phi_s^{-1}(\omega)$ se debe tener que $\Phi_s(\omega) > 0$.

Otra forma de representar la ecuación (2.11) es por medio de esta ecuación:

$$c_k = (f * \varphi^{-1})_k \quad (2.12)$$

en donde φ_k^{-1} es la transformada inversa de $\Phi_s^{-1}(z)$ y cumple que $\varphi^{-1}(k) * \varphi(k) = \delta(n)$.

La ecuación (2.7) se puede considerar como la convolución entre un tren de impulsos $c(x)$ y $\varphi(x)$ en donde:

$$c(x) = \sum_k c_k \delta(x-k) \quad (2.13)$$

También, $c(x)$ se puede considerar como la convolución entre 2 trenes de impulsos en función de x en vez de dos secuencias discretas:

$$c(x) = \sum_k f_k \delta(x-k) * \sum_k \varphi^{-1} \delta(x-k) \quad (2.14)$$

Por lo tanto se puede deducir la siguiente igualdad:

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k) = \sum_k f_k \varphi_{int}(x-k) \quad (2.15)$$

donde ahora se puede identificar

$$\varphi_{int}(x) = (\varphi^{-1} * \varphi)(x-k) = \sum_k \varphi^{-1}_k \varphi(x-k) \quad (2.16)$$

Lo que nos indican las ecuaciones (2.15) y (2.16) es que se puede formar un esquema cardinal de interpolación a partir de la ecuación (2.7) y esto se ilustra en la figura 2.3, en donde se muestra el proceso de interpolación como un filtrado de una señal $\sum_k f_k \delta(x - k)$ (que es obtenida de un muestreo ideal a una función $f(x)$, con los sistemas φ_k^{-1} y $\varphi(x - k)$ (con las que se puede obtener un solo sistema $\varphi_{int}(x)$). El filtro así obtenido, es la respuesta al impulso de la ecuación (2.7) y cumple con la restricción de interpolación.

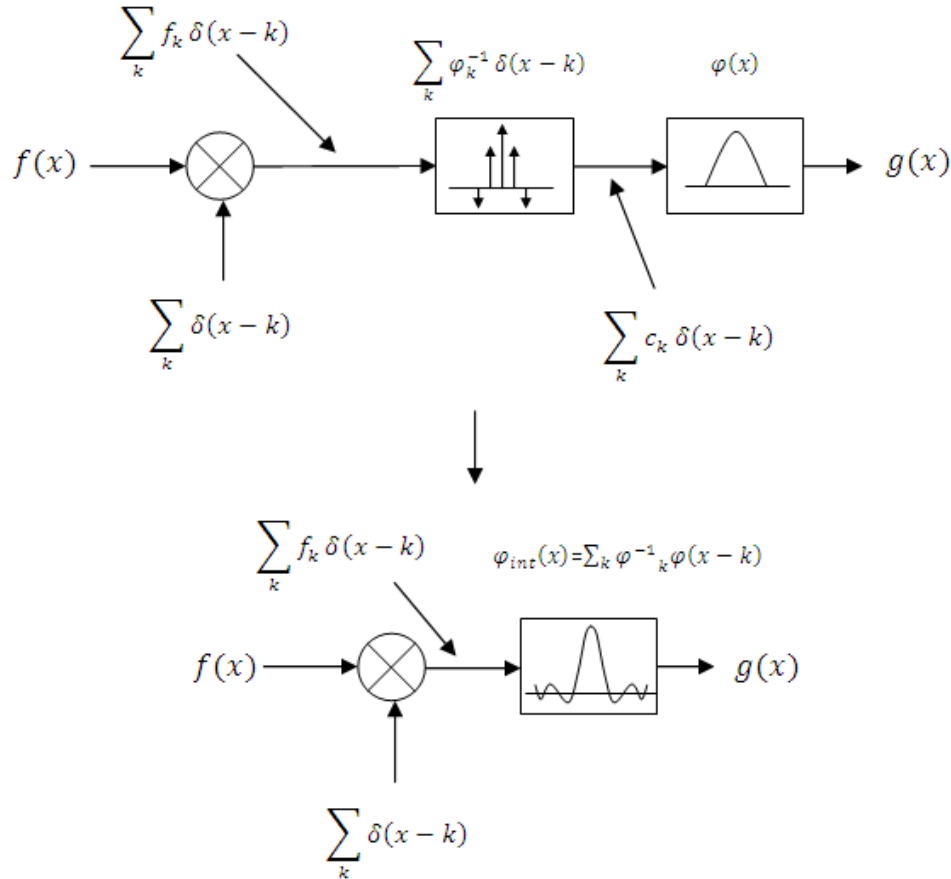


Figura 2.3. Esquema general de interpolación basada en convolución y su versión cardinal.

Para el caso de un paso de muestreo T diferente a 1, ahora tenemos una secuencia de muestras f_n que están espaciadas en intervalos de T , entonces para aplicar un esquema general de interpolación basado en convolución, se le aplica un escalamiento a la ecuación (2.15) de la siguiente manera:

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right) = \sum_k f_k \varphi_{int}\left(\frac{x}{T} - k\right) \quad (2.17)$$

con:

$$\varphi_{int}(x) = \sum_k \varphi_k^{-1} \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right) \quad (2.18)$$

Se debe tener cuidado en el momento de la implementación de un kernel de convolución de que si el kernel cumple con la restricción de interpolación entonces se puede implementar directamente como $\varphi_{int}(x)$ en $\sum_k f_k \varphi_{int}(x - k)$. Si no es el caso, entonces se tiene que implementar como $\varphi(x)$ y se tienen que calcular los coeficientes c_k .

Ahora, si φ o φ_{int} es de soporte compacto, la sumatoria involucrara solo unas cuantas funciones $\varphi(x - k)$ para calcular una nueva muestra x_0 , en donde los valores de k serán los más cercanos a x_0 . En la figura 2.4 se ilustra una función $g(x)$ que esté formado por funciones que tienen un soporte compacto de 4.

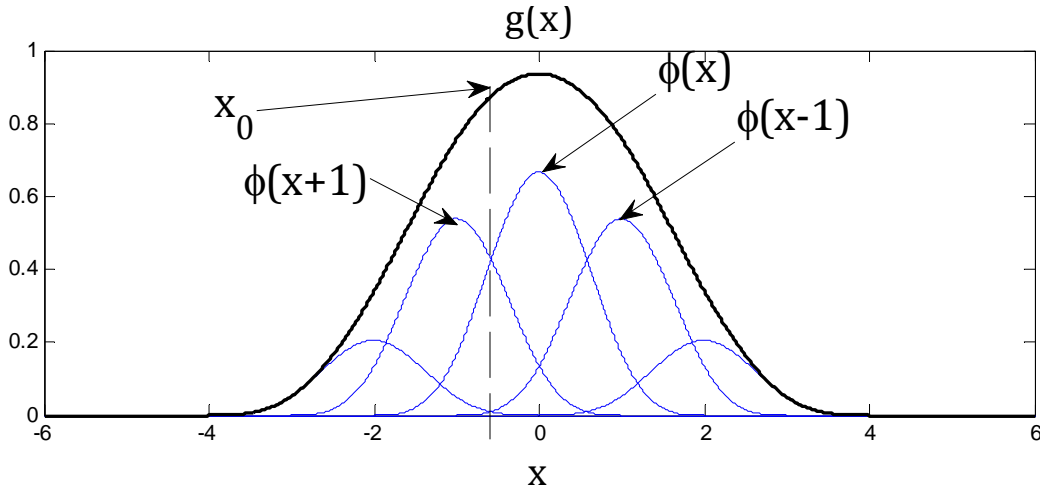


Figura 2.4. Función $g(x)$ formado por funciones φ de soporte compacto de 4.

De la figura 2.4 se puede deducir que conforme φ tenga un soporte más grande, más funciones $\varphi(x - k)$ se tomarán en cuenta para obtener $g(x_0)$, el cual implica más costo computacional debido a que se tendrá que realizar más evaluaciones $c_k \varphi(x_0 - k)$.

Para mayores dimensiones que 1D, φ se puede descomponer en producto de tensores, ya que esto permite que el análisis en 1D sea extendido para otras dimensiones [1], [2]. Bajo este procedimiento, y para el caso 2D, las propiedades de interpolación que se tengan en el plano (x, y) en 1D serán las mismas para el plano (x, z) y (y, z) .

Hasta este punto se ha representado al esquema general de la interpolación basado en convolución como sistemas lineales, sin embargo, una característica importante de cualquier sistema es su respuesta en frecuencia. La respuesta en frecuencia $\Phi_{int}(\Omega)$ correspondiente a $\varphi_{int}(x)$ con $T = 1$ está dada por la siguiente ecuación:

$$\Phi_{int}(\Omega) = \frac{\Phi(\Omega)}{\Phi_s(\Omega)} \quad (2.19)$$

en donde $\Phi_s(\Omega) = \Phi_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-jk\Omega}$.

Se hace la observación de que $\Phi_s(\Omega) = \Phi_s(\omega)$, ya que $\Phi_s(\Omega)$ es igual a la transformada de Fourier de la secuencia discreta φ_k . Para cualquier otro valor de T se tiene:

$$\Phi_{int}(\Omega) = T\Phi(T\Omega)/\Phi_s(T\Omega) = T\Phi(T\Omega) / \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-jkT\Omega} \quad (2.20)$$

Con la respuesta en frecuencia $\Phi_{int}(\Omega)$, se puede determinar la calidad de interpolación de un kernel de convolución. Esto se puede entender analizando, en el dominio de la frecuencia, el efecto de muestrear en el tiempo a una función $f(x)$.

2.1.3 Aproximación del filtro pasabajos ideal con kernels de convolución

Cuando se muestrea a una función $f(x)$ con espectro $X(\Omega)$ con un bloque de tren de impulsos con periodo T , se genera una señal dado por $\sum_k f_k \delta(x - kT)$ y el espectro de esta señal es $\dot{X}(\Omega) = 1/T \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - 2\pi k/T)$, entonces si queremos recuperar $f(x)$ a partir de sus muestras debemos aplicar a $\dot{X}(\Omega)$ un filtro pasabajos ideal con amplitud de T que elimine las replicas centradas en $2\pi k/T, k \in \mathbb{Z}_*$ y solo mantenga a $X(\Omega)$. Sin embargo tal filtro no se puede realizar como un sistema en forma física ya que su respuesta al impulso es la función Sinc y además no es eficiente implementarlo en computadora así que se prefiere una aproximación a tal filtro pero con la diferencia de que nos dará una aproximación $g(x)$ de $f(x)$.

La idea básica es que el tren de impulsos $\sum_k f_k \delta(x - k)$, sea aplicado a un sistema, con respuesta al impulso $h(x)$, que tenga una respuesta en frecuencia que aproxime al filtro pasabajos ideal, el cual su salida sea una función continua en el tiempo. Este se puede representar con la siguiente figura:

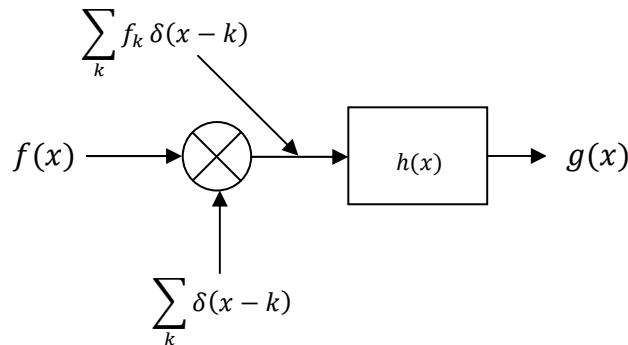


Figura 2.5. Esquema de una recuperación aproximada de $f(x)$ a partir de sus muestras.

Debe notarse que, si se implementa un filtro Butterworth de segundo orden directamente como $h(x)$, la función resultante no interpolará a las muestras de $f(x)$, debido a que su respuesta al impulso $h_B(x) = \sqrt{2}\Omega_c e^{\frac{-\Omega_c}{\sqrt{2}}} \sin(\Omega_c x / \sqrt{2}) u(x)$, en donde Ω_c es la frecuencia de corte del filtro Butterworth, no cumple la restricción de interpolación ya que $h_B(0) = 0$. Entonces, es necesario aplicarlo en un esquema general, es decir, $h_B = \varphi$ en la ecuación (2.7), y obtener los coeficientes

c_k . Si no se realiza de esa forma, entonces aunque se pueda obtener una función continua, esta función no interpolará a las muestras de $f(x)$.

Por otro lado, se puede obtener una aproximación del filtro pasabajos ideal con un kernel de convolución φ_{int} , ya que la estructura de la figura 2.5 es la misma que la presentada en las figuras 2.1 y 2.3 con $\varphi_{int} = h$. Al filtro que se obtenga con el procedimiento anterior se le llama “filtro interpolador” debido a que la función $g(x)$ resultante pasara por las muestras de $f(x)$.

A continuación, se muestran algunos kernels de convolución comunes para interpolación

Rectangular. El kernel asociado a este tipo de interpolación es el más simple, su soporte es unitario y está dado por:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1/2 \\ 1, & -1/2 \leq x < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq x \end{cases} \quad (2.21)$$

A continuación es Representado junto con su función de transferencia $\Phi_{int}(\Omega) = Sinc(\Omega/2)$:

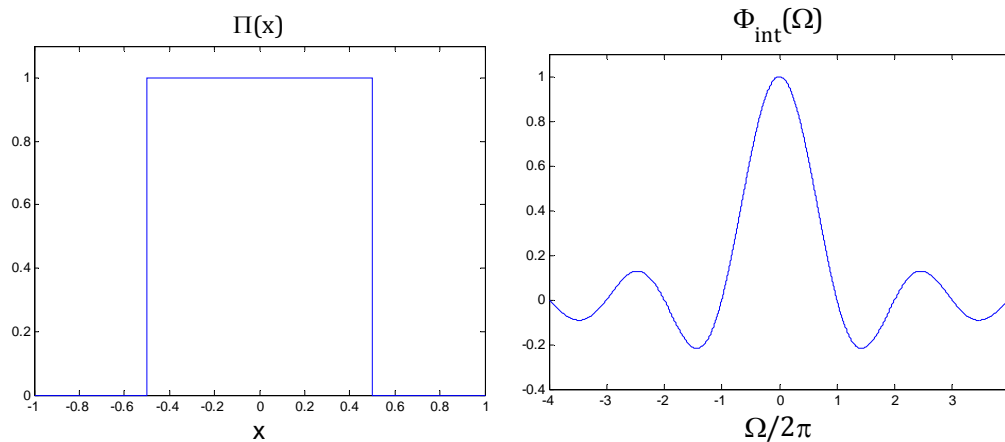


Figura 2.6. Kernel rectangular y su filtro interpolador.

Este kernel cumple con la restricción de interpolación y lo que hace es tomar el valor que este más cercano y asignarlo a la nueva muestra. Puede reproducir funciones constantes, es decir polinomios de orden cero y aunque el cómputo es muy eficiente se sacrifica la calidad de la señal interpolada ya que su filtro interpolado $\Phi_{int}(\Omega)$ atenúa frecuencias importantes en el espectro de la señal y no atenúan suficientemente las replicas existentes debido al muestreo.

Lineal. Su kernel es la función triangular dado por la ecuación (2.4), también tiene la característica de poder reproducir de manera exacta constantes y funciones lineales. Este kernel es también popular debido a que el costo computacional es bajo, sin embargo, la forma de su filtro interpolador $\Phi_{int}(\Omega) = (Sinc(\Omega/2))^2$ puede atenuar frecuencias importantes en la señal, pero

atenúa mas las replicas producidas por el muestreo que el filtro rectangular. A continuación, se ilustra su grafica y su filtro interpolador:

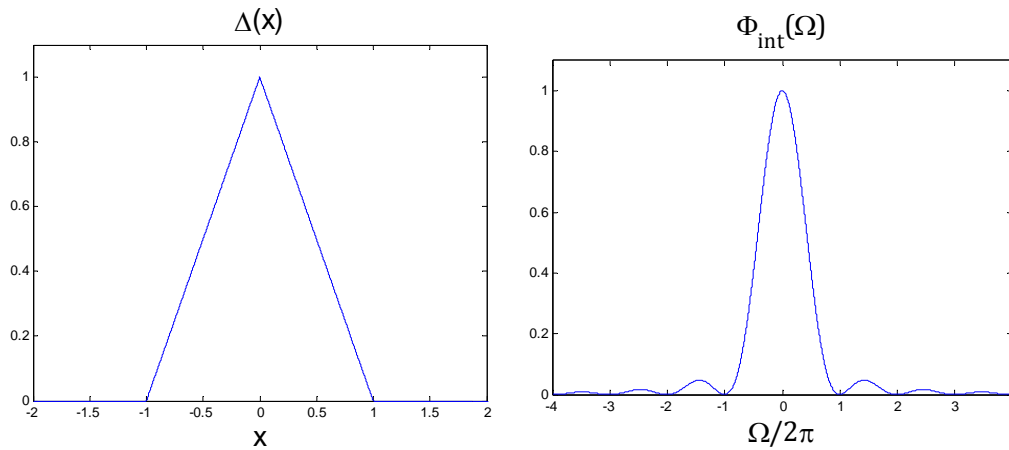


Figura 2.7. Kernel lineal y su filtro interpolador.

Cúbico. El kernel cúbico es de los más usados en interpolación en imágenes [1], [1] debido a que ofrece una calidad aceptable de interpolación con un pequeño soporte (el cual es de 4). Este kernel cumple con la restricción de interpolación y es una función similar al Sinc pero está formado por partes de polinomios cúbicos y es de la siguiente forma:

$$v(x) = \begin{cases} (\alpha + 2)|x|^3 - (\alpha + 3)|x|^2 + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ \alpha|x|^3 - 5\alpha|x|^2 + 8\alpha|x| - 4\alpha, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (2.22)$$

En donde α es un parámetro libre que controla la continuidad en sus derivadas. Las graficas de este filtro interpolador se presentan a continuación para $\alpha = -1/2$:

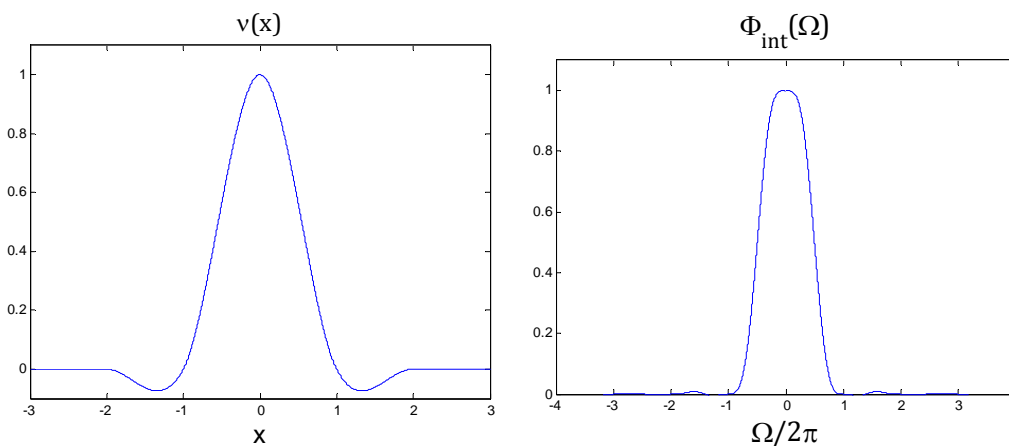


Figura 2.8. Kernel cubico y su filtro interpolador.

Con $\alpha = -1/2$ se tiene $f(x) - g(x) = \mathcal{O}(T^3)$ para toda x . Esto indica que el error de interpolación se aproxima a cero a una razón de T^3 , es decir tiene tercer orden de aproximación.

Para otros valores de α , el orden de aproximación es 1 [2],[7]. Además con $\alpha = -1/2$, se tiene continuidad de C^1 y una reproducción de polinomios de hasta grado 2.

Como podemos observar de la respuesta en frecuencia, este filtro atenúa mejor las replicas de la señal muestreada que en el caso lineal y rectangular y no decae tan rápido en las frecuencias donde estará el espectro de la señal que queremos recuperar. Por lo tanto la interpolación obtenida será superior.

Hasta este punto se han mostrado kernels de convolución que no tienen la restricción de interpolación y en [2] se pueden consultar otros kernels.

Existe un conjunto de funciones de soporte compacto llamados B-splines los cuales pueden ser utilizados como kernels de convolución, el cual incluye kernels que no cumplen la restricción de interpolación. Estas funciones tienen un amplio uso en el área de procesamiento de imágenes debido a que se puede obtener una buena calidad de interpolación con un soporte moderado [3]. El más representativo es el B-spline cubico el cual está hecho de polinomios cúbicos tal como el kernel cubico, con el mismo soporte, pero con un orden de aproximación de 4. Los B-splines nos servirán para propósitos de comparación ya que tienen la propiedad de que al aumentar su soporte aumenta su orden de aproximación, es decir, se mejora la calidad de interpolación y como se verá después, implica un filtro interpolador que se va aproximando al filtro pasabajos ideal.

2.1.4 Splines

En la interpolación polinómica, (polinomios de Lagrange), se considera un solo polinomio que interpola todos los datos existentes, uno de los inconvenientes de este tipo de interpolación, es que cuando se tiene un conjunto de datos demasiado grande, el polinomio resulta con una tendencia oscilatoria. Por otro lado, se puede realizar la interpolación con polinomios pero esta vez acoplado un polinomio entre muestras adyacentes $[y_j, y_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, N$ para un conjunto de $N + 1$ muestras. Básicamente lo que se requiere es que, para un intervalo $[a, b]$ en donde estén incluidas las posiciones x_j de los datos y_j , encontrar una función $p(x)$ que interpole todas las muestras y que esté formada por un conjunto de polinomios $p_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$, con la condición de que cada $p_j(x)$ estará solamente definida entre $[x_j, x_{j+1})$. A $p(x)$ se le conoce como un polinomio por tramos y podemos construirlo de tal manera que tenga un número suficiente de derivadas que sean continuas.

Para este propósito surge la llamada función Spline la cual consiste de tramos de polinomios de grado M o menos sobre subintervalos unidos y con ciertas condiciones de continuidad. Supongamos que se especifican $N + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_N y estos cumplen $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ los cuales se les llamarán nodos. Además se especifica una constante $M \geq 0$, entonces una función Spline de grado M que tiene nodos en x_0, x_1, \dots, x_N es una función S tal que:

1. En cada intervalo $[x_j, x_{j+1})$, es un polinomio de grado $\leq M$.
2. S tiene $M - 1$ derivadas continuas.

2.1.4.1 B-splines

Cualquier Spline puede ser representado por funciones base denominadas B-splines, para el caso en que los nodos estén igualmente espaciados en pasos enteros se tiene la siguiente suma [3]:

$$S^M(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \beta^M(x - k) \quad (2.23)$$

en donde S^M es el Spline de grado M , β^M es el B-splines de grado M y c_k son coeficientes que definen la amplitud de los B-splines centrados en k . Es decir cualquier Spline de grado M con nodos igualmente espaciados puede ser representado por desplazamientos enteros de una función base conocida como B-spline la cual está formada en tramos por polinomios de grado M , tiene un soporte compacto de $N = M + 1$ y es también $M - 1$ diferenciable. Los B-splines son definidos de la siguiente manera:

$$\beta^M(x) = \sum_{i=0}^{M+1} \frac{(-1)^j}{M!} \binom{M+1}{i} \left(x + \frac{M+1}{2} - i\right)_+^M \quad (2.24)$$

en donde x_+^n es la función potencia truncada $\max(0, x)^n$. Las funciones B-splines pueden ser obtenidas recursivamente de la siguiente manera:

$$\beta^M = \beta^0 * \beta^{M-1} \quad (2.25)$$

donde β^0 esta dado por la siguiente ecuación:

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2} > |x| \end{cases} \quad (2.26)$$

De la ecuación (2.25) se observa que conforme se aumente el grado del B-spline, se aumenta el soporte.

La transformada de Fourier de un B-spline es de la siguiente forma:

$$B^M(\Omega) = \left(\frac{\sin(\Omega/2)}{\Omega/2}\right)^{M+1} \quad (2.27)$$

El B-spline de grado 0 es similar al kernel rectangular, solo difieren en los valores de sus discontinuidades, el B-spline de grado 1 es igual al kernel lineal, para los B-splines de grado 3(cubico) y 5 se ilustra sus graficas en la figura 2.9.

Se puede observar de la ecuación (2.23) que β^M actúa como un kernel de convolución. Entonces al utilizar un B-spline de grado M como un kernel de convolución, básicamente estamos acoplado un conjunto de muestras a un Spline de grado M y a partir de la ecuación (2.43), podemos obtener su filtro interpolador asociado el cual está dado por la siguiente ecuación:

$$\Phi_{int}(\Omega) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}} \right)^{M+1} / \sum_k \left(\frac{\sin\left[\frac{\Omega + 2\pi k}{2}\right]}{\left[\frac{\Omega + 2\pi k}{2}\right]} \right)^{M+1} \quad (2.28)$$

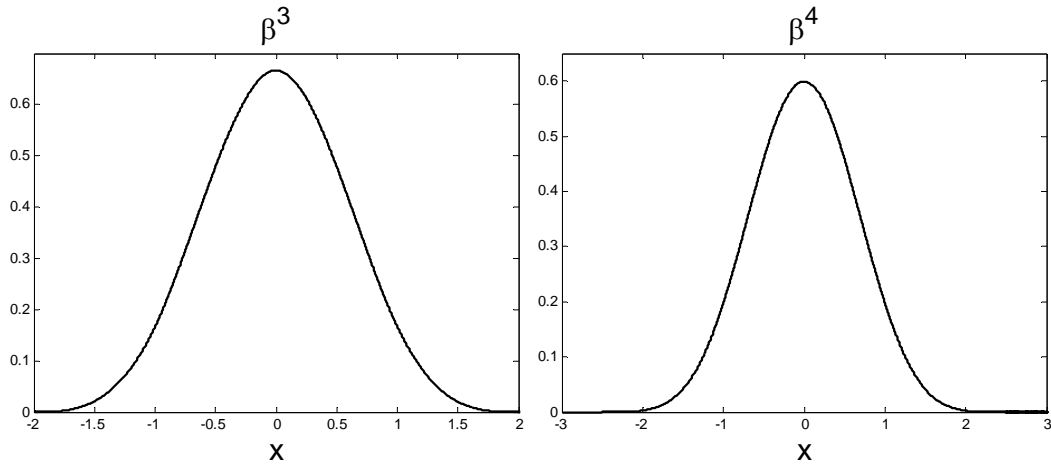


Figura 2.9. B-splines de grado $M = 3$ y 4 .

En la figura 2.10 se presenta se presenta los filtros interpoladores correspondientes a los B-splines de grado $3, 5, 7$ y 30 .

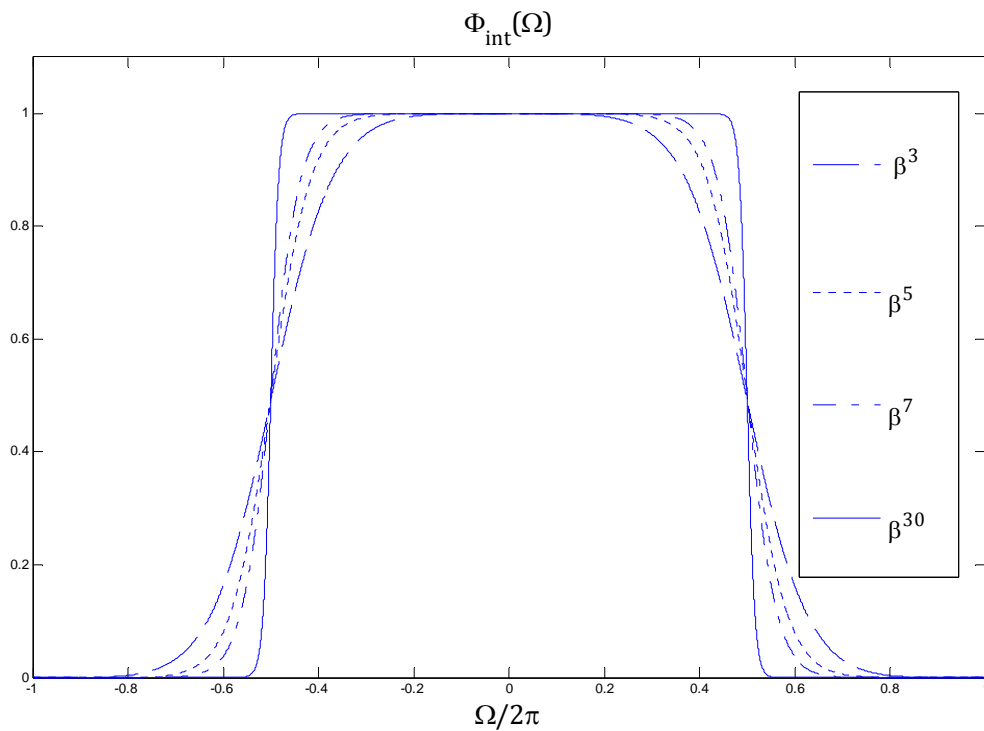


Figura 2.10. Filtros interpoladores correspondientes a los B-splines de grado $M = 3, 5, 7$ y 30 .

En donde podemos observar que conforme se aumenta el grado del B-spline, su correspondiente filtro interpolador converge al filtro pasabajos ideal. Esto implica que φ_{int} se va aproximando a la función $Sinc(\pi x)$ [1],[3].

2.1.5 Estimado del Error de interpolación con kernels de convolución.

Existen dos fuentes de error debido a la no idealidad del filtro, primero lo no constante de la magnitud de su espectro en la banda de paso, y segundo, no se logra la suficiente supresión de las replicas de $X(\Omega)$ surgidas en el muestreo. Entonces se desea tener una medida de estos errores con el fin de optimizar y comparar filtros interpoladores. Para esto nos basaremos en un error propuesto en el trabajo de Park y Showengert llamado "Sampling and Reconstruction Blur" [4].

Para estimar el error de reconstrucción, iniciamos con el proceso de muestreo de una función $f(x)$ por medio de la multiplicación con un tren de impulsos $\sum_k f_k \delta(x - k)$ el cual resulta en un conjunto de muestras $f(n)$. Ahora supongamos que la función $f(x)$ fue desplazada por un factor $0 \leq u \leq T$ y por consiguiente al ser muestreada se obtiene un conjunto diferente de muestras $f(n - u)$. Este proceso se ilustra en la siguiente figura:

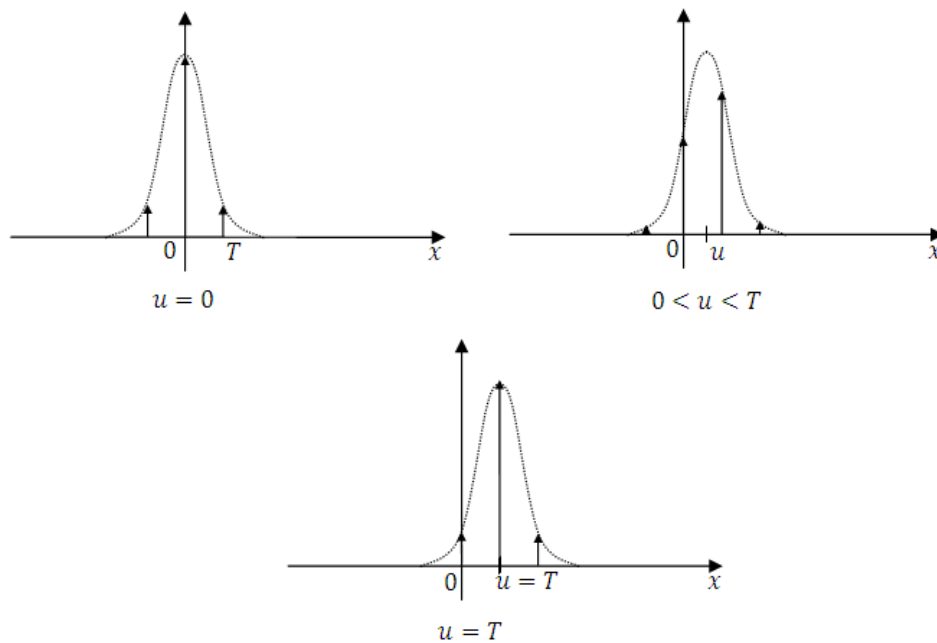


Figura 2.11. Señal $f(x - u)$ muestreada a un paso T .

Se puede observar que las muestras son iguales con $u = 0$ y $u = T$, entonces se puede deducir que para alguna $u = d$, el conjunto de muestras resultante será el mismo para $u = d + kT, k \in \mathbb{Z}$. Ahora procederemos a recuperar la función $f(x)$ mediante sus muestras $f(n - u)$ de acuerdo al esquema cardinal de interpolación basado en convolución:

$$g(x, u) = \sum_k f(k - u) \varphi_{int} \left(\frac{x}{T} - k \right) \quad (2.29)$$

Es de notar que la ecuación (2.29) es dependiente de la fase u y esto se acentúa más cuando el paso de muestreo no es pequeño y aplicamos el interpolador lineal a la función muestreada $f(x - u)$ lo cual se ilustra en la siguiente figura:

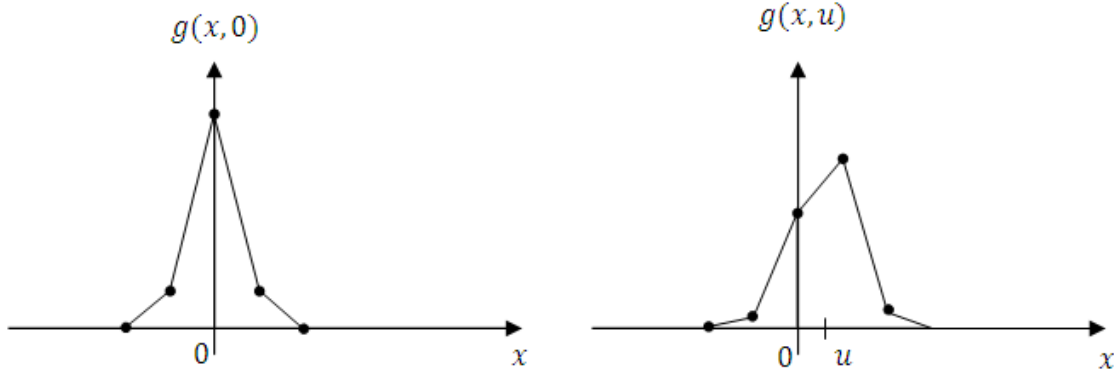


Figura 2.12. Efecto de la fase de muestreo en las versiones reconstruidas de $f(x - u)$ de la figura 2.11 con interpolación lineal.

Se nota la diferencia entre las dos representaciones y por lo tanto el valor del error que se utilice será diferente. Entonces la energía del error entre $g(x, u)$ y $f(x - u)$ se puede expresar como una función de u de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{SR}^2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x - u) - g(x, u))^2 dx \quad (2.30)$$

el cual es llamado "Sampling and reconstruction Blur" [4], y ya que las muestras obtenidas en $u = d$, serán las mismas para $u = d + kT$, entonces el error también se repetirá, es decir, $\varepsilon_{SR}^2(u)$ es una función periódica de u con periodo T . Por lo tanto $\varepsilon_{SR}^2(u)$ se puede representar en series de Fourier:

$$\varepsilon_{SR}^2(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_m e^{j\frac{2\pi m}{T}u} \quad (2.31)$$

donde a_m son los coeficientes de Fourier y el coeficiente a_0 es el valor promedio de $\varepsilon_{SR}^2(u)$ que indica características muy importantes de la reconstrucción ofrecida del filtro interpolador.

Otra forma de interpretar a a_0 es considerando a u como una variable aleatoria uniformemente distribuida y $\varepsilon_{SR}^2(u)$ como una transformación [4], así que a_0 es el valor esperado de la variable aleatoria $\varepsilon_{SR}^2(u)$. Para calcular este valor consideramos el equivalente de $\varepsilon_{SR}^2(u)$ en el dominio de la frecuencia mediante la igualdad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) X^*(\Omega) d\Omega \quad (2.32)$$

$$\mathcal{F}\{f(x-u) - g(x,u)\} = X(\Omega)e^{-j\Omega u} - \Phi_{int}(\Omega) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) e^{-j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)u}$$

De donde puede obtenerse [4]:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{|X(\Omega)|^2}{T^2} |T - \Phi_{int}(\Omega)|^2 + \frac{|X(\Omega)|^2}{T^2} \sum_{m \neq 0} \left| \Phi_{int}\left(\Omega - \frac{2\pi m}{T}\right) \right|^2 \right\} d\Omega \quad (2.33)$$

Entonces el valor del valor promedio de $\varepsilon_{SR}^2(u)$ toma la siguiente forma reducida:

$$E\{\varepsilon_{SR}^2\} = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(T\Omega) |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (2.34)$$

en donde:

$$\eta^2(T\Omega) = \frac{1}{T^2} \left[|T - \Phi_{int}(\Omega)|^2 + \sum_{m \neq 0} \left| \Phi_{int}\left(\Omega - \frac{2\pi m}{T}\right) \right|^2 \right] \quad (2.35)$$

Por tanto, $\eta^2(T\Omega)$ cuantifica la cantidad de error introducido por un interpolador no ideal.

Para analizar el error con más detalle, se puede calcular la representación completa de $\varepsilon_{SR}^2(u)$ [4]:

$$\varepsilon_{SR}^2(u) = \varepsilon_R^2 + \varepsilon_S^2 + v(u) \quad (2.36)$$

En donde:

$$\varepsilon_R^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T - \Phi_{int}(\Omega)|^2 \frac{|X(\Omega)|^2}{T^2} d\Omega \quad (2.37)$$

$$\varepsilon_S^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m \neq 0} \left| \Phi_{int}\left(\Omega - \frac{2\pi m}{T}\right) \right|^2 \frac{|X(\Omega)|^2}{T^2} d\Omega \quad (2.38)$$

$$v(u) = \sum_{k \neq 0} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}u} \quad (2.39)$$

y ahora

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[X(\Omega) - \frac{\Phi_{int}(\Omega)}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - \frac{2\pi m}{T}\right) e^{j\frac{2\pi m}{T}u} \right] \times \left[X^*(\Omega) - \frac{\Phi_{int}(\Omega)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^*\left(\Omega - \frac{2\pi n}{T}\right) e^{j\frac{-2\pi n}{T}u} \right] e^{j\frac{-2\pi k}{T}u} dud\Omega \quad (2.40)$$

Ahora analizaremos bajo qué condiciones $\varepsilon_{SR}^2(u)$ será cero. Supongamos que tenemos una función $f(x)$ de banda limitada que es muestreada a $T = 1$ y no existe aliasing. Para que ε_R^2 sea cero, es necesario que Φ_{int} sea contante con magnitud 1 en la región que está contenida entre

$|\Omega_c| \leq \Omega$ mientras que para $|\Omega_c| < \Omega < |\Omega_c/2|$, Φ_{int} puede tener una banda de transición, pero para una frecuencia mayor que $|\Omega_c/2| > \Omega$, Φ_{int} sí tiene que ser cero.

En el caso de ε_S^2 , para que sea cero, Φ_{int} debe ser cero para frecuencias $|\Omega_c/2| > \Omega$ que coincide con el requerimiento anterior para que ε_R^2 sea cero.

Por último, al realizar algunas manipulaciones matemáticas en $v(u)$, se demuestra que ésta será cero independientemente de las características del filtro, siempre y cuando $X(\Omega)$ sea de banda limitada y no exista aliasing tal como se indico al principio. Entonces resumimos las condiciones mínimas para una recuperación perfecta de $f(x - u)$ con un paso de muestreo T en base a un filtro $\Phi_{int}(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \begin{cases} X(\Omega), & \Omega < |\Omega_c/2| \\ 0, & \Omega \geq |\Omega_c/2| \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\Phi_{int} = \begin{cases} 1 & |\Omega_c| \leq \Omega \\ \text{banda de transición} & |\Omega_c| < \Omega \leq |\Omega_c/2| \\ 0 & |\Omega_c/2| > \Omega \end{cases} \quad (2.42)$$

Por tanto, Φ_{int} es un caso de la interpolación producida por la función Sinc, con la única diferencia de que no existe la banda de transición.

Por otro lado, en el caso de que $f(x - u)$ no fuera suficiente muestreada o no tenga un espectro limitado en banda, entonces aunque Φ_{int} sea el filtro ideal, existirá error por parte de los tres términos que forman $\varepsilon_{SR}^2(u)$ debido al aliasing.

Principalmente, del análisis anterior del kernel de error $\eta^2(\Omega)$ se puede notar que, si se realizó un muestreo de tal forma que los efectos de aliasing sean mínimos, entonces el error será en gran parte debido a la no idealidad del filtro, pudiéndose resumir como sigue: el término ε_R^2 proporciona principalmente el error debido a la no idealidad en la banda de paso del filtro, mientras que ε_S^2 es causado por la no idealidad de la banda de rechazo. Por otro lado, si existe aliasing por un muestreo deficiente, entonces tanto ε_R^2 y ε_S^2 contribuyen al error final. Y la última conclusión es que el término $v(u)$ es el error dependiente del desfase de la señal el cual siempre será cero si la señal es esencialmente de banda limitada y suficientemente muestreada.

Para finalizar esta discusión, es conveniente generalizar el kernel de error al introducir el espectro del filtro interpolador dado por la ecuación (2.20) en la ecuación (2.33) y por tanto quedando de la siguiente manera:

$$E\{\varepsilon_{SR}^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{\left| 1 - \frac{\Phi(T\Omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-jkT\Omega}} \right|^2 + \sum_{m \neq 0} \left| \frac{\Phi(T\Omega - 2\pi m)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-jkT\Omega}} \right|^2}_{\eta^2(T\Omega)} \right] |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (2.43)$$

Podemos observar que el kernel de error es una función escalada por T y por lo tanto será suficiente analizar el comportamiento del kernel de error para $T = 1$. Además como $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-jk\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(\Omega - 2\pi n)$, el kernel de error $\eta^2(\Omega)$ se convierte en:

$$\eta^2(\Omega) = \frac{(P(\Omega))^2 - 2P(\Omega) \cdot \Phi(\Omega) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(\Omega - 2\pi k))^2}{(P(\Omega))^2} \quad (2.44)$$

donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(\Omega - 2\pi n) = P(\Omega)$.

Entonces podemos medir la calidad de un kernel de convolución al calcular:

$$E\{\varepsilon_{SR}^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(\Omega) |F(\Omega)|^2 d\Omega \quad (2.45)$$

En las figuras 2.13 y 2.14 se ilustran los kernels de error para la función Sinc, B-splines de grado 1,3 5, y para la función cúbica.

Es importante notar que el B-spline cúbico aporta menos al error en frecuencias menores de $|\Omega| < \pi$ que el interpolador cúbico. También, se puede observar que entre menor error existe en frecuencias $|\Omega| < \pi$ existe mas error en frecuencias $\pi < |\Omega|$. El caso de la función Sinc se tiene cero error en frecuencias $|\Omega| < \pi$ pero es el que presenta más error en frecuencias $|\Omega| < \pi$.

Otro detalle a observar es que los kernels de error mostrados cumplen $\eta^2(0) = 0$, además presentan una región plana alrededor del origen con valor prácticamente igual a cero, el cual el más plano de todos es de la función Sinc, con un valor de cero.

Entonces podemos deducir que entre más grande es la región plana alrededor del origen, menor será el error (porque el producto $\eta^2(\Omega) \cdot X(\Omega)$ será aproximadamente cero en una región mayor) y por lo tanto mejor será el interpolador. En el caso de los B-splines entre mayor sea el orden, más grande será su región plana y convergerá al kernel de error de la función Sinc [1]. Sin embargo podemos controlar la región plana alrededor del origen aumentando la frecuencia de muestreo $f_m = 1/T$, en donde T es menor que 1, entonces escalamos el kernel de error $\eta^2(T\Omega) = \eta^2(\Omega/f_m)$, de tal manera que se aumenta la región plana y por lo tanto se disminuye el error. Esto se ilustra en el caso del B-spline cubico en la figura 2.15 para $\eta^2(T\Omega)$ con $T = 1$, $T = 1/2$ y $T = 1/3$. En la misma figura se presenta el espectro $X(\Omega) = e^{-(0.5\Omega)^2}$ para visualizar mejor el efecto en el error producido por el escalamiento.

Se observa que el escalamiento por T del kernel de error del B-spline cubico, resulta en menor error de acuerdo a la ecuación (2.35), tal como se espera cuando se aumenta la frecuencia de muestreo.

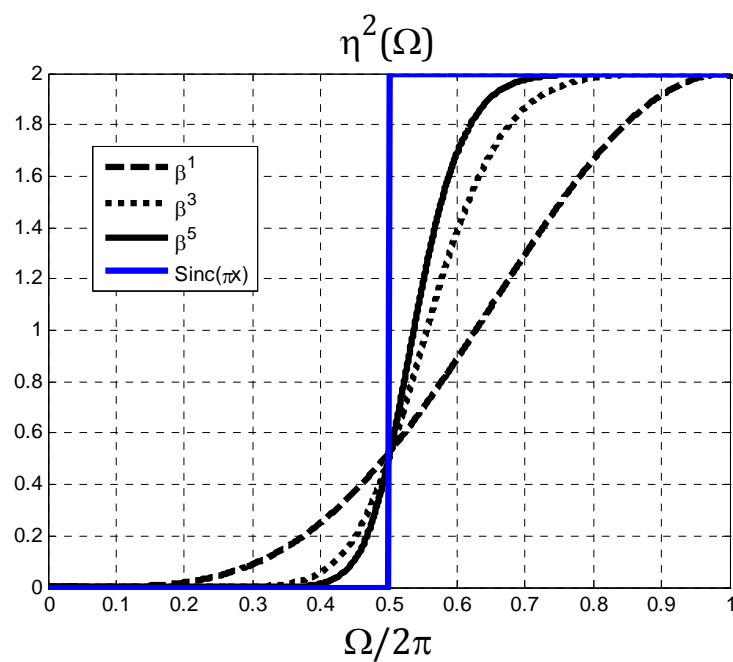


Figura 2.13. Kernel de error de la función Sinc y algunos B-splines.

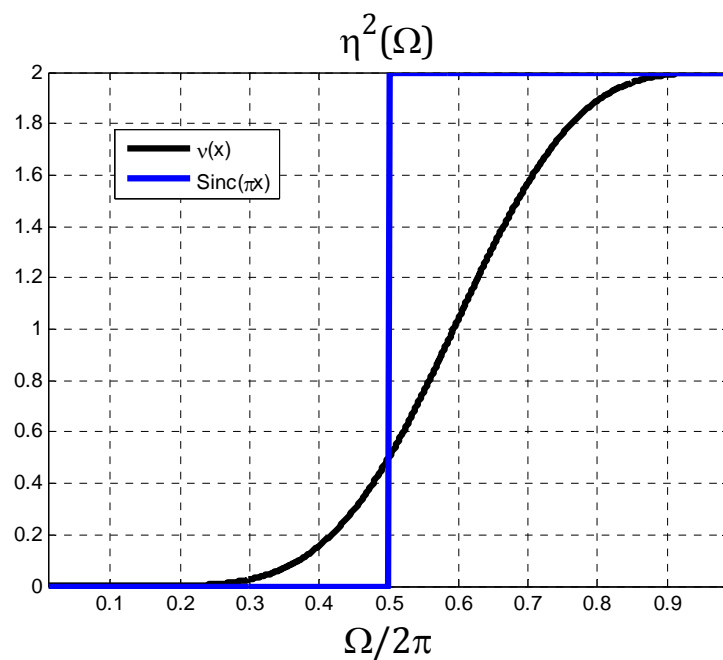


Figura 2.14. Kernel de error de la función Sinc y el interpolador cubico.

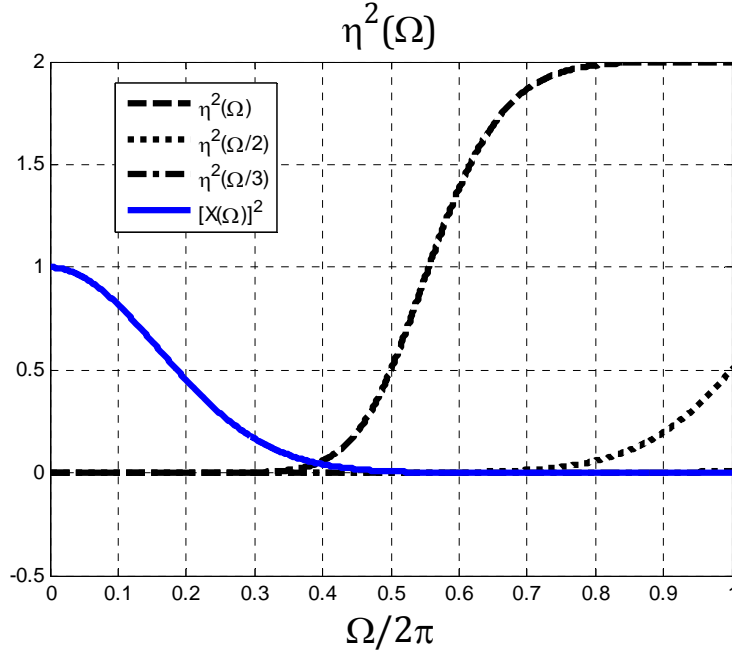


Figura 2.15. Variación del kernel de error del B-spline cubico en relación a T y comparación con $X(\Omega) = e^{-(0.5\Omega)^2}$.

2.1.6 Orden de aproximación

De los kernels de error anteriores todos presentan $\eta^2(0) = 0$ y conforme se incrementa la frecuencia, la contribución del error es mayor. Además que los mejores kernels de convolución son los que tienen una región más plana cerca de la frecuencia cero. También se puede observar que el kernel de error del B-spline cubico convergerá más rápido a cero que en el caso del lineal dentro de las frecuencias $0 \leq \Omega \leq 2\pi$ conforme se disminuye T . Por lo tanto se puede deducir que existe un orden de convergencia del B-spline cúbico mayor que el del lineal. Para observar este orden de convergencia o aproximación, se desarrolla el kernel de error en sus series de Maclaurin alrededor del origen:

$$\eta^2(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta^2(0))^{(2n)}}{2n!} \Omega^{2n} \quad (2.46)$$

En donde $(\eta^2(0))^{(2n)}$ es la 2nth derivada del kernel de error. Por definición, el orden de diferenciación L más bajo para el cual se logra $(\eta^2(0))^{(2L)} \neq 0$, mientras $(\eta^2(0))^{(2n)} = 0$ para toda $0 \leq n \leq L - 1$, es llamado orden de aproximación. Entonces la serie queda de la siguiente manera:

$$\eta^2(\Omega) = (C_\varphi)^2 \Omega^{2L} + \sum_{n=L+1}^{\infty} \frac{(\eta^2(0))^{(2n)}}{2n!} \Omega^{2n} \quad (2.47)$$

donde la constante C_φ depende solamente de φ [5].

Si se tiene un paso de muestreo T lo suficientemente pequeño entonces se pueden despreciar los términos de alto orden de la expansión en (2.47) y se puede introducir el resultado en (2.34) el cual queda de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{SR}^2(u) \cong (C_\varphi)^2 T^{2L} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega^L X(\Omega)|^2 d\Omega \right) \quad T \rightarrow 0 \quad (2.48)$$

De la expresión en paréntesis podemos ver que es la norma L_2 de la L –ésima derivada de f .

Este resultado expresa que podemos asociar a cualquier φ un número L y una constante C_φ tal que el error de aproximación estimado por $\varepsilon_{SR}^2(u)$ decrece como T^L , cuando T es suficientemente pequeño. Entonces desde que $\varepsilon_{SR}^2(u)$ decrece como $O(T^L)$, el número L es llamado orden de aproximación de la función base φ . La ecuación (2.48) será válida siempre y cuando $f(x)$ sea L veces diferenciable.

2.1.6.1 Condiciones de Strang-Fix

Podemos evitar evaluar la derivada del kernel de error para obtener el orden de aproximación utilizando las llamadas “condiciones de Strang-Fix” las cuales se resumen a continuación [7]:

1. La función base φ tiene ceros de L –orden en el dominio de la transformada de Fourier, es decir:

$$\begin{cases} \Phi(0) \neq 0 \\ \Phi^{(n)}(2\pi k) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}_*, \quad n \in \{0, 1, \dots, L-1\}. \end{cases} \quad (2.49)$$

2. La función base φ es capaz de reproducir todo los monomios de grado $n \leq L-1$. Es decir, para cada $n \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ existe coeficientes $c_{k,n} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,n} \varphi(x-k) = x^n \quad (2.50)$$

3. Para una función f que al menos tiene L derivadas en L_2 , existe una contante, $C \in \mathbb{R}$ cual no depende de f y un conjunto de coeficientes $c_k \in \mathbb{R}$, tal que la norma L_2 de la diferencia entre f y su aproximación g es delimitado como:

$$\|f - g\|_{L_2} \leq C \cdot T^L \cdot \|f^{(L)}\|_{L_2} \quad T \rightarrow 0 \quad (2.51)$$

La primera condición implica la llamada “condición de partición de unidad” el cual indica que para que una función base al menos tenga un orden de aproximación de $L=1$, debe reproducir constantes, es decir:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x-k) = 1 \quad (2.52)$$

El cual tiene una representación en el dominio de la transformada de Fourier mediante la sumatoria de Poisson's de la siguiente manera:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(2\pi n) e^{j2\pi n x} = 1 \quad (2.53)$$

lo cual implica que:

$$\Phi(2\pi n) = \delta_n \quad (2.54)$$

tal como la primera condición exige para tener un orden de aproximación de $L = 1$.

Estas condiciones son validas para todas las funciones de soporte compacto, pero también se extienden a funciones que no lo sean pero que tengan un rápido decaimiento [7]. La función Sinc es un caso en donde no se cumple tal requerimiento.

En general, para que se observe que el error va a cero conforme $T \rightarrow 0$ a una razón $O(T^L)$, en vista de la ecuación (2.48), es necesario que la L -ésima derivada de $f(x)$ pertenezca a L_2 . De no ser así, al menos f debe tener una derivada en L_2 para poder tener un orden de aproximación de $L = 1$. En el caso de que la función f solo posea una sola derivada, entonces la única condición que resta es que la función base φ pueda reproducir constantes, el cual se puede observar en el kernel de error como $\eta^2(0) = 0$, para al menos tener un orden de aproximación de acuerdo al desarrollo de las series de MacLaurin mostrado anteriormente.

Los B-splines tienen un orden de aproximación L con un soporte de $L = n + 1$, por ejemplo el B-splines de grado 5 tiene un soporte y orden de aproximación de 6. Además tienen la propiedad de obtener un máximo orden de aproximación L dado un soporte de L [2], por ejemplo, el B-spline cubico tiene un orden de aproximación de $L = 4$ con un soporte de 4 a diferencia del interpolador cubico con $\alpha = -1/2$, el cual tiene un orden de aproximación de $L = 3$ con un soporte de 4.

2.2 Obtención básica de nuevas muestras de una secuencia discreta con kernels de convolución, filtros digitales y la función Sinc discreto.

Hasta este punto se ha mostrado como obtener una función $g(x)$ con kernels de convolución, que interpolan las muestras de $f(x)$ que están dadas como funciones impulso. La manera básica de encontrar las muestras es evaluando la sumatoria descrita en las ecuaciones (2.7) y (2.15), pero otra manera de representar a las muestras es por medio de una secuencia discreta $f(n)$ en el tiempo, en donde si queremos obtener nuevas muestras, lo haremos mediante una convolución discreta tal como se describe a continuación.

2.2.1 Obtención de nuevas muestras mediante una convolución discreta.

Si obtenemos nuevas muestras en $x = n/L$ con la ecuación (2.7) o (2.15), básicamente es lo mismo que realizar los escalamientos

$$g(x/L) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x/L - k) \quad , \quad g(x/L) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \varphi_{int}(x/L - k)$$

y después muestrear a $g(x/L)$ en pasos enteros. Esta operación de escalamiento y muestreo es igual que hacer una inserción de $L - 1$ ceros por ejemplo a $f(n)$ obteniéndose la secuencia $f_u(n)$ y después hacer la convolución discreta $f_u(n) * \varphi_{int}(n/L)$, $n \in \mathbb{Z}$. Esto se ilustra en la figura 2.16 con $L = 2$ para una interpolación lineal.

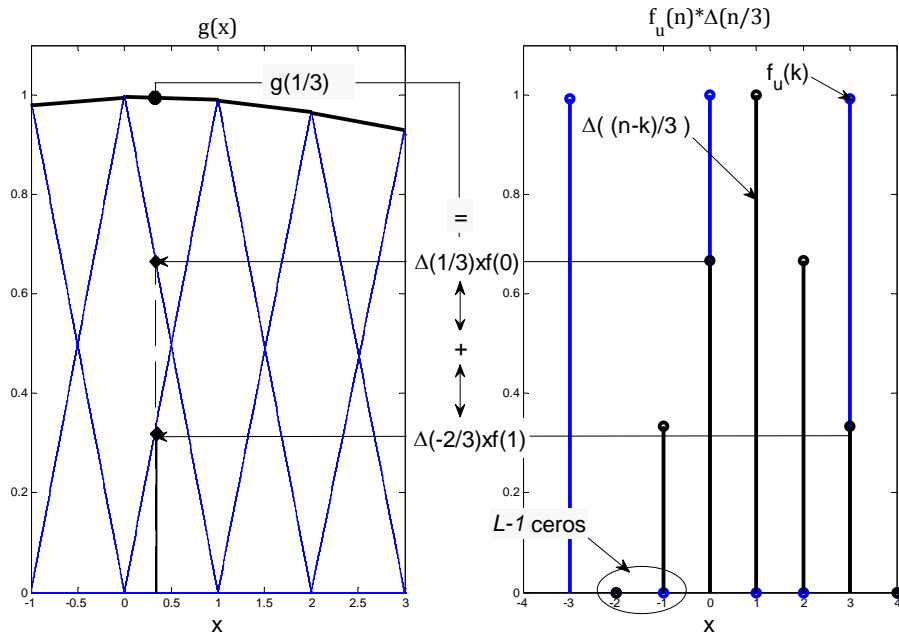


Figura 2.16. Proceso de obtención de nuevas muestras mediante una convolución discreta.

La operación de inserción de $L - 1$ ceros entre las muestras de una secuencia $f(n)$ es conocida como Upsampling el cual es expresado mediante la siguiente ecuación:

$$f_u(n) = \begin{cases} f(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.55)$$

En esos $L - 1$ ceros es donde se desea que aparezcan nuevas muestras.

2.2.2 Sobremuestreo por un factor L entero de secuencias discretas

La operación de Upsampling implica una modificación espectral de $f(n)$ el cual nos permite entender que debemos hacer para obtener más muestras en los ceros agregados a $f(n)$.

Para esto, primero obtenemos la transformada Z $X_u(z)$ de $f_u(n)$ el cual está dado de la siguiente forma:

$$X_u(z) = X(z^L), \quad (2.56)$$

en donde $X(z)$ es la transformada Z de $f(n)$.

Entonces el espectro de $f_u(n)$ es:

$$X_u(\omega) = X(L\omega), \quad (2.57)$$

esto indica que el espectro de $f_u(n)$ es una versión comprimida por un factor L del espectro de $f(n)$.

Debido a que la transformada de Fourier de una secuencia discreta $f(n)$ es:

$$X(\omega) = 1/T \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \left[\frac{(\Omega - 2\pi k)}{T} \right] \quad (2.58)$$

y las replicas estarán centradas en $2\pi k, k \in \mathbb{Z}_*$, entonces en $X(L\omega)$ cada réplica estará centrada en $2\pi k/L$ tal como se ilustra en las siguientes figuras:

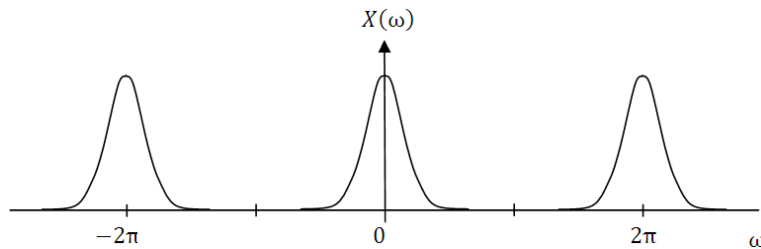


Figura 2.17. Espectro de $f(n)$.

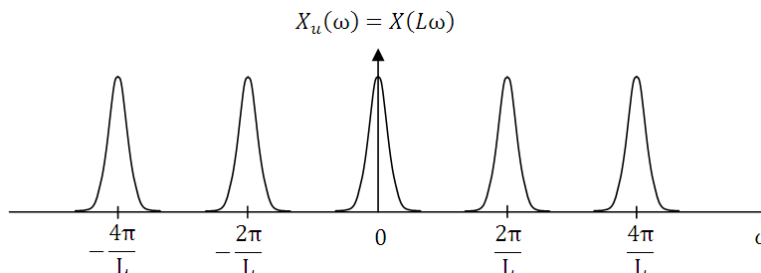


Figura 2.18. Espectro de $f_u(n)$.

lo cual indica que existirán $L - 1$ replicas entre $[0, 2\pi]$. Entonces la manera de obtener nuevas muestras en los $L - 1$ ceros que existen entre las muestras iniciales, es con la aplicación de un filtro $H(\omega)$ que elimine esas $L - 1$ replicas en $X_u(\omega)$. Sus especificaciones son similares a los de un análogo [11],[24], si $X(\omega)$ es de banda limitada y por tanto, su espectro comprimido debe de estar entre $[-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]$ en $X(L\omega)$, entonces el filtro debe tener una frecuencia Ω_s (frecuencia de rechazo) en $\frac{\pi}{L}$ y una frecuencia Ω_p (frecuencia de paso) en donde consideremos que dejan de existir frecuencias útiles, además el filtro debe ser multiplicado por L , debido a que este proceso de obtención de nuevas muestras es lo mismo que si se incrementa la frecuencia de muestreo L veces, entonces debe ser modificada la ecuación (2.58) multiplicandola por L , lo que es realizado por el filtro.

Sin embargo, la aplicación del filtro puede alterar las muestras iniciales de $f_u(n)$ provenientes de $f(n)$. Por ejemplo, se considera la secuencia $f(n) = e^{-(0.2n)^2}$, $-100 \leq n \leq 100$, el cual se le aplica un upsampling de 3 y tratamos de eliminar las replicas con un filtro $H(\omega)$ con respuesta al impulso $h(n) = 0.75 \text{sinc}(\pi[n - 30]/4)$, $0 \leq n \leq 60$ (figura 2.19.a) el cual resulta en el filtrado ilustrado en la figura 2.19.b:

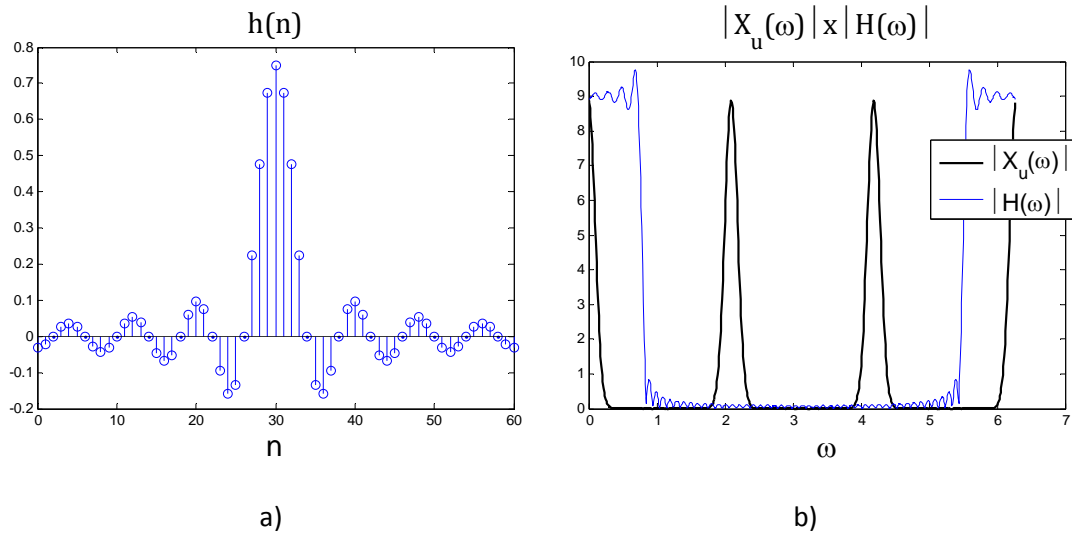


Figura 2.19. Supresión de replicas por medio de $H(\omega)$. a) Espectro generado después de un Upsampling de 3 a $f(n)$. b) Respuesta al impulso $h(n) = 0.75 \text{sinc}(\pi[n - 30]/4)$.

Entonces, si por ejemplo calculamos el valor de $g(n) = f_u(n) * h(n)$ en una posición en la que esta una muestra de $f(n)$, observaremos que ese valor de $f(n)$ será modificado tal como se ilustra en la figura 2.20 para el caso de $f_u(12) = f(4)$.

Pero si aplicamos el filtro $h(n) = \text{sinc}(\pi[n - 30]/3)$, $0 \leq n \leq 60$, al realizar la convolución $y(n) = f_u(n) * h(n)$, ninguna de las muestras provenientes de $f(n)$ serán alteradas tal como se ilustra en la figura 2.21 para el caso de $f_u(12) = f(4)$, esto es debido a que $\text{sinc}(\pi n/3)$ tiene ceros en $n = Lk$, $k, n \in \mathbb{Z}$ y $\text{sinc}(0) = 1$.

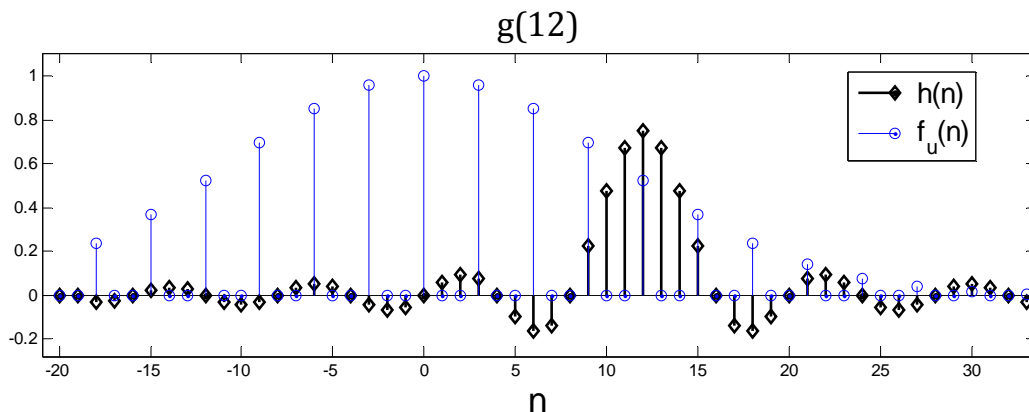


Figura 2.20. Ejemplo de modificación de las muestras iniciales de $f(n)$.

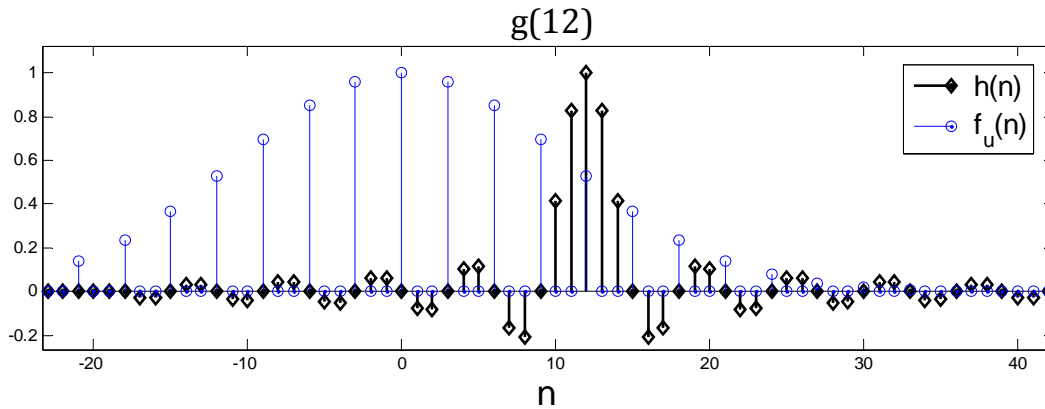


Figura 2.21. Ejemplo de preservación de las muestras iniciales de $f(n)$.

La preservación de las muestras de $f(n)$ es algo que también se logra con kernels de convolución, sin embargo, no sucede lo mismo para su espectro discreto $X(k)$. En la figura 2.22 se ilustra la operación de filtrado entre $h(n) = \text{sinc}(\pi[n - 30]/3)$, $0 \leq n \leq 60$ y $f_u(n)$, en el dominio de la transformada discreta de Fourier, en donde se observa que la recuperación de las muestras del espectro discreto $X(k)$ de $f(n)$ y la atenuación de las replicas en $X_u(k)$, no se logra en forma ideal.

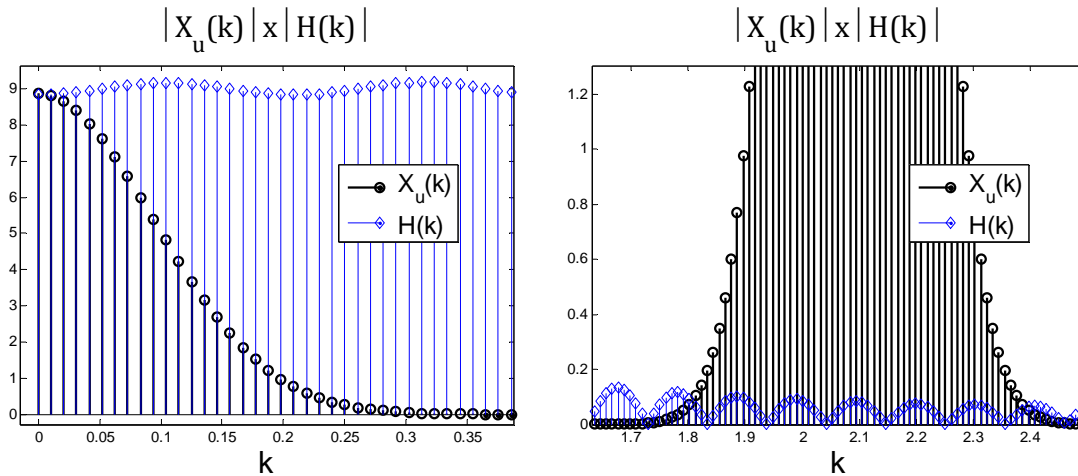


Figura 2.22. Filtrado de $f_u(n)$ con $h(n) = \text{sinc}(\pi[n - 30]/3)$ en el dominio de la transformada discreta de Fourier.

Sin embargo, se pueden lograr las tres cosas, preservar las muestras de $f(n)$, preservar las muestras de su espectro discreto $X(k)$ y eliminar las muestras de las replicas con el método llamado interpolación con la función Sinc discreto.

En general, para el caso de que el número de muestras N de $f(n)$ sea impar, la forma de eliminar las $L - 1$ replicas es por medio un filtro $H(k)$ que tenga la siguiente forma:

$$H(k) = L[1 - R(k)] \quad (2.59)$$

donde

$$R(k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ 1 & \frac{N-1}{2} + 1 \leq k < LN - 1 - \frac{N-1}{2} \\ 0 & LN - \frac{N-1}{2} \leq k \leq LN - 1 \end{cases} \quad (2.60)$$

Y por tanto el filtro tiene la siguiente respuesta al impulso:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{LN}\right)} & 1 \leq n \leq LN - 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Al realizar la convolución (convolución circular) de $f_u(n)$ con la ecuación (2.61), debido a las características de $H(k)$ (dado en las ecuaciones (2.59) y (2.60)), se preservan las muestras de $X(k)$ y se eliminan las muestras de las replicas en $X_u(k)$, además $h(n)$ (ecuación 2.61) presenta que $h(n) = 0, n = Lk, 1 \leq k \leq N - 1$ y $h(0) = 1$, lo cual significa que, durante el proceso de filtrado, no se modificaran las muestras de $f(n)$ en $f_u(n)$

La respuesta al impulso $h(n)$ es una versión escalada por $1/L$ y muestreada en pasos enteros de la función llamada "Sinc Discreto" dada por la siguiente ecuación:

$$\text{SincD}(N, x) = \frac{\sin(\pi x)}{N \sin(\pi x/N)} \quad (2.62)$$

Entonces básicamente la operación de filtrado con la ecuación (2.61) es lo mismo que hacer un muestreo en $x = n/L$ a una función $g(x)$ que pasa por las muestras de $f(n)$, en donde $g(x)$ esta dado de la siguiente manera:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \text{SincD}(N, x - k) \quad (2.63)$$

La ecuación anterior está en un esquema cardinal de interpolación en donde $\text{SincD}(N, x)$ es el kernel de convolución. Sin embargo, la función Sinc Discreto es periódica para N impar, esto resulta en que la función $g(x)$ será también periódica. Por ejemplo si tuviéramos un conjunto de 51 muestras entonces estaría asociada a una función continua $\text{SincD}(51; x)$ el cual tiene la grafica ilustrada en la figura 2.23, en donde observamos que el periodo es de 51. Un ejemplo de una función $g(x)$ dador por la ecuación (2.63) se ilustra en la figura 2.24.

En el caso de N par, surgen dificultades para lograr la preservación de las muestras de su espectro discreto $X(k)$ ya que básicamente no se logra que $H(N - k) = H^*(k)$ el cual es una condición necesaria para que $H(k)$ su respuesta al impulso sea real. Sin embargo existen maneras de resolver este problema pero implica una modificación espectral de $X(k)$ [6].

La principal ventaja de utilizar este esquema de interpolación es la preservación de las muestras de la secuencia $f(n)$ tanto como las muestras de su espectro. Lo anterior es algo que no se produce en otros kernels de convolución, ya que su filtro asociado no elimina adecuadamente las muestras de las replicas debido al Upsamplig y atenúa frecuencias que pueden definir características importantes. Para una mayor referencia sobre la interpolación con la función Sinc Discreto se puede consultar a [6].

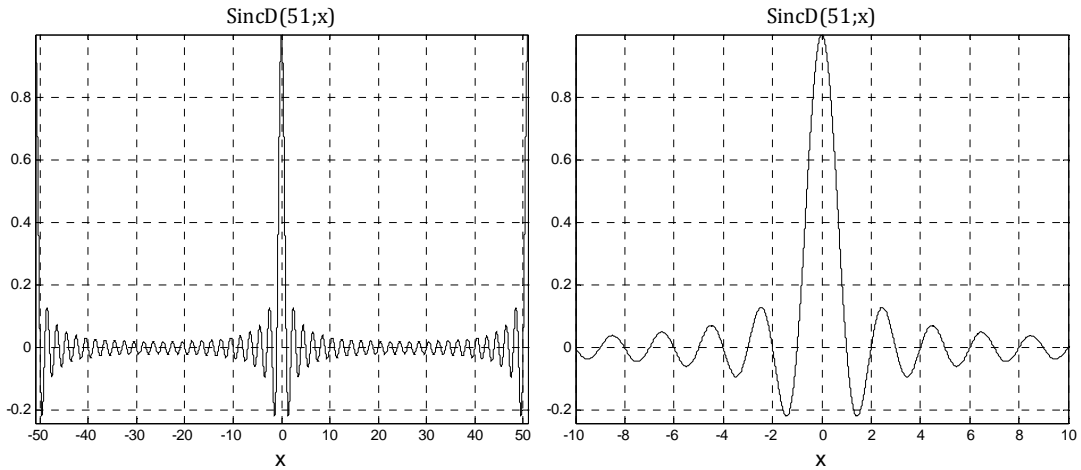


Figura 2.23. Función Sinc Discreto para $N = 51$.

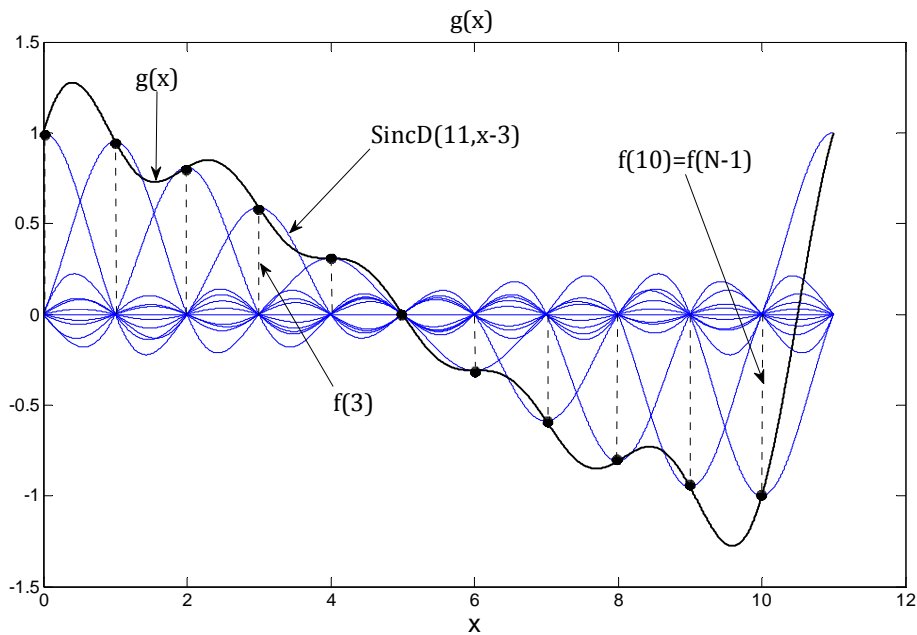


Figura 2.24. Función $g(x)$ formada a partir de 11 muestras con la función Sinc Discreto para $N = 11$.

2.3 Interpolación con Funciones de Base Radial

Las Funciones de Base Radial (FBR) son herramientas que sirven para resolver problemas en interpolación de datos dispersos. Básicamente el problema de interpolación con datos dispersos consiste en que para un conjunto dado de datos (\mathbf{x}_k, y_k) , $k = 1, \dots, N$ con distintas $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^s$, $y_k \in \mathbb{R}$, se quiere encontrar una función \mathcal{P}_f tal que $\mathcal{P}_f(\mathbf{x}_k) = y_k$, $k = 1, \dots, N$. Este problema de interpolación se resuelve con las funciones de base radial de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}_f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s \quad (2.64)$$

en donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana, $\varphi(r)$ con $r = \|\mathbf{x}\|$ es la función de base radial y \mathbf{x}_k son las posiciones de las muestras en \mathbb{R}^s en donde quedará centrada la función de base radial. Los coeficientes c_k son obtenidos con el fin de cumplir $\mathcal{P}_f(\mathbf{x}_k) = y_k$, $j = 1, \dots, N$ encontrando la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N\|) \\ \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_N\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}$$

En general una función será llamada radial siempre y cuando exista una función $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| \quad (2.65)$$

Dentro de las FBR más representativas se encuentra la Gaussiana que tiene la siguiente representación:

$$\varphi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2} \quad (2.66)$$

en donde ε es un parámetro de escalamiento. La figura 2.25 ilustra la gráfica de la función Gaussiana 2.25 para $\varepsilon = 1$.

Así que el problema de interpolación descrito por la ecuación (2.64) con la función Gaussiana queda:

$$\mathcal{P}_f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N c_k e^{-\varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2} \quad (2.67)$$

Ahora el problema fundamental es encontrar la solución al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

en donde la matriz \mathbf{A} tiene los elementos $\varphi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|)$, $j, k = 1, \dots, N$ y tendrá una única solución si la matriz es no singular. Para esto buscaremos que la matriz \mathbf{A} sea positiva definida.

2.3.1 Funciones Positivas definidas

Llamaremos a una matriz simétrica es decir $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ real positiva semi-definida si se cumple la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \mathbf{A}_{jk} \geq 0 \quad (2.68)$$

Es decir:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} \geq 0 \quad (2.69)$$

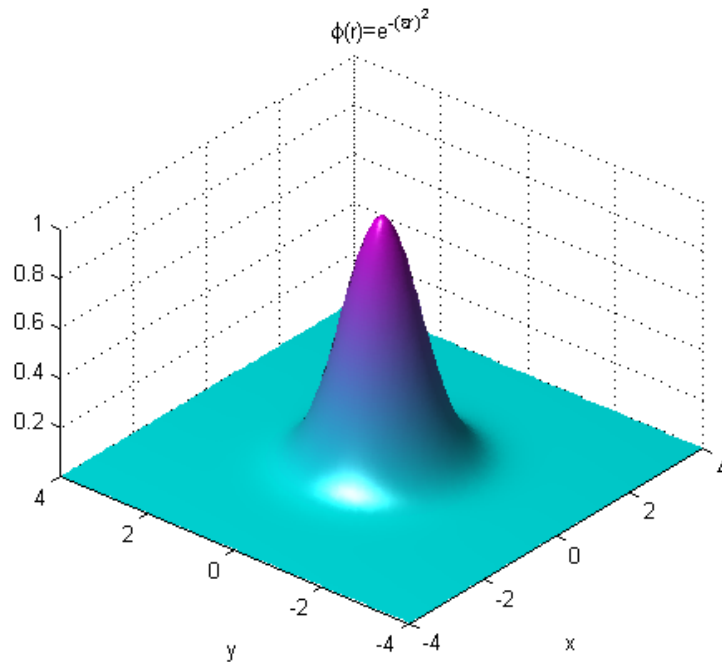


Figura 2.25. Función Gaussiana de base radial con $\varepsilon = 1$.

Para $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_N]^T$. Si (2.68) o (2.69) es cero únicamente para $\mathbf{c} \equiv 0$, entonces \mathbf{A} es llamado positiva definida.

Un criterio para ver si una función es estrictamente positiva definida [8] es si y solamente si Φ es delimitada y su transformada de Fourier es no negativa y no idénticamente igual a cero. Así que solo nos basta verificar que su transformada de Fourier $\hat{\Phi}$ exista y sea no negativa.

Para el caso de funciones de base radial [8], una función continua $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $r \mapsto r^{s-1}\varphi(r) \in L_1[0, \infty)$ es estrictamente positiva definida y radial sobre \mathbb{R}^s si y solamente si la s -dimensional transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}_s \varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^{s-2}}} \int_0^\infty \varphi(t) t^{\frac{s}{2}} J_{\frac{s-2}{2}}(rt) dt \quad (2.70)$$

es no-negativa y no idénticamente igual a cero, en donde $J_{\frac{s-2}{2}}$ es la función de Bessel de primera especie.

En el caso de las FBR que sean de soporte compacto no existen funciones de este tipo que puedan ser estrictamente positivas definidas y radiales sobre \mathbb{R}^s para toda s [8].

De las funciones de base radial estrictamente positivas más usuales son las siguientes:

- **Gaussiana.** Su ecuación es dado por:

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{-(\varepsilon)^2 \|\mathbf{x}\|^2}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.71)$$

y debido a que su transformada de Fourier es también una Gaussiana:

$$\hat{\Phi}(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{(\sqrt{2\varepsilon})^s} e^{-\frac{\|\boldsymbol{\Omega}\|^2}{4(\varepsilon)^2}}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.72)$$

se tiene que $\Phi(\boldsymbol{\Omega})$ es no negativa y por lo tanto la función Gaussiana es estrictamente positiva. Esta función también tiene la característica de ser infinitamente diferenciable.

- **Generalizada Inversa Multicuádrada.** Su ecuación es dado por:

$$\Phi(\mathbf{x}) = (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{-\beta}, \quad \beta > \frac{s}{2} \quad (2.73)$$

Es estrictamente positiva definida sobre \mathbb{R}^s para $s < 2\beta$, también es infinitamente diferenciable. Su transformada de Fourier es la siguiente:

$$\hat{\Phi}(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{K_{\beta-\frac{s}{2}}(\|\boldsymbol{\Omega}\|) \|\boldsymbol{\Omega}\|^{\beta-\frac{s}{2}}}{2^{\beta-1} \Gamma(\beta)}, \quad \beta > \frac{s}{2} \quad (2.74)$$

en donde K_ν es la modificada función de Bessel de segundo especie y Γ es la función gamma.

- **Funciones potencia truncadas.** Ahora se presenta un ejemplo de una familia de funciones estrictamente positivas definidas con soporte compacto. Estas tienen la siguiente ecuación:

$$\varphi_l(r) = (1 - r)_+^l \quad (2.75)$$

y será válido para $l \geq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor + 1$.

2.3.3 Funciones de soporte compacto

Como se indico anteriormente, las funciones de soporte compacto no pueden ser estrictamente positiva definidas para toda s y estas pueden ser construidas para una dimensión fija en diferentes

formas. Para esto existen dos operadores que permiten la construcción de funciones positivas definidas a partir de otras [8] las cuales se definen a continuación.

Sea una función φ tal que $t \mapsto t\varphi(t) \in L_1[0, \infty)$. Entonces, se define el operador integral \mathcal{J} via:

$$(\mathcal{J}\varphi)(r) = \int_r^\infty t\varphi(t)dt, \quad r \geq 0 \quad (2.76)$$

y el operador diferencial \mathcal{D} para alguna $\varphi \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ por medio de

$$(\mathcal{D}\varphi)(r) = -\frac{1}{r}\varphi'(r), \quad r \geq 0 \quad (2.77)$$

Los siguientes ejemplos muestran algunas familias de funciones de soporte compacto construidas a base de estos dos operadores:

- **Funciones de soporte compacto de Wendland.** Son tal vez las más populares y fueron construidas por Holger Wendland. Estas funciones son construidas en base a las funciones potencia truncadas $\varphi_l(r) = (1-r)_+^l$ (las cuales como se había indicado, son estrictamente positivas definidas sobre \mathbb{R}^s para $l \geq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$) mediante la siguiente ecuación:

$$\varphi_{s,k} = \mathcal{J}^k \varphi_{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + k + 1} \quad (2.78)$$

Otra manera de describirlas es de la siguiente manera:

$$\varphi_{s,k}(r) = \begin{cases} p_{s,k}(r), & r \in [0,1] \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (2.79)$$

donde $p_{s,k}(r)$ es un polinomio de grado $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 3k + 1$. Además $\varphi_{s,k} \in C^{2k}(\mathbb{R})$ y el grado del polinomio es el mínimo dado para una dimensión y continuidad $2k$ [8]. En la tabla 1.1 se muestran algunas funciones para $s = 1, 3$ y 5 .

- **Funciones de soporte compacto de Wu.** Estas funciones fueron desarrolladas por Zongmin Wu y su construcción inicia mediante la siguiente función:

$$\gamma(r) = (1-r^2)_+^l, \quad l \in \mathbb{N} \quad (2.80)$$

la cual no es estrictamente positiva definida, sin embargo mediante la convolución se puede construir una función que es estrictamente positiva definida y radial sobre \mathbb{R} de la siguiente manera:

$$\gamma_l(r) = (\gamma * \gamma)(2r)$$

Esta función es también un polinomio con un grado de $4l + 1$ y $\gamma_l \in C^{2l}(\mathbb{R})$. Ahora, una familia de funciones estrictamente positivas definidas se construye mediante el operador \mathcal{D} de la siguiente forma:

$$\gamma_{k,l} = \mathcal{D}^k \gamma_l \tag{2.81}$$

Las funciones $\gamma_{k,l}$ son estrictamente positivas, radiales en \mathbb{R}^s para $s \leq 2k + 1$ y también son polinomios de grado $4l - 2k + 1$ sobre su soporte y pertenecen a $C^{2(l-k)}$. En la tabla 1.2 se presenta algunas funciones para $\gamma_{k,3}$, en donde se puede observar que en comparación de las funciones de Wendland sus polinomios son de mayor grado para una continuidad dada.

$s = 1$	$(1 - r)_+$	C^0
	$(1 - r)_+^3(3r + 1)$	C^2
	$(1 - r)_+^5(8r^2 + 5r + 1)$	C^4
$s = 3$	$(1 - r)_+^2$	C^0
	$(1 - r)_+^4(4r + 1)$	C^2
	$(1 - r)_+^6(35r^2 + 18r + 1)$	C^4
$s = 5$	$(1 - r)_+^3$	C^0
	$(1 - r)_+^5(5r + 1)$	C^2
	$(1 - r)_+^7(16r^2 + 7r + 1)$	C^4

Tabla 1.1. Funciones de Wendland validas de 1,3 y 5 dimensiones.

s	k	$\gamma_{k,3}$	
1	0	$(1 - r)_+^7(5r^6 + 35r^5 + 101r^4 + 147r^3 + 101r^2 + 35r + 5)$	C^6
3	1	$(1 - r)_+^6(5r^5 + 30r^4 + 72r^3 + 82r^2 + 36r + 6)$	C^4
5	2	$(1 - r)_+^5(5r^4 + 25r^3 + 48r^2 + 40r + 8)$	C^6
7	3	$(1 - r)_+^4(5r^3 + 20r^2 + 29r + 16)$	C^0

Tabla 1.2. Funciones Wu validas de 1,3 ,5 y 7 dimensiones.

Existen una diversidad de funciones de base radial, sin embargo estas son las más usuales junto con las listadas a continuación:

$$\left. \begin{array}{ll} r & \textit{lineal} \\ r^3 & \textit{cubico} \\ r^2 \log(r) & \textit{Placa delgada} \\ \sqrt{r^2 + c^2} & \textit{Multicuádrlica} \end{array} \right\}$$

Estas funciones tienen la característica principal de que crecen indefinidamente pero en [9] se presenta la formación de una función que decae cúbicamente cuando $x \rightarrow \pm\infty$ a partir de la función Multicuádrlica en una dimensión, la cual está dada por la siguiente ecuación:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x-1) - \varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x+1), \quad \varphi(x) = \sqrt{x^2 + c^2} \quad (2.82)$$

A la ecuación (2.82) se le llama el Quasi-Intepolador formado por la segunda razón de diferencias de la función Multicuádrada (QIM) y su transformada de Fourier generalizada está dada por la siguiente ecuación:

$$\hat{\psi}(\Omega) = (\cos \Omega - 1) \left[-\left(\frac{2c}{\Omega}\right) K_1(c|\Omega|) \right] \quad (2.83)$$

donde K_1 es la función modificada de Bessel de primera especie. Esta transformada presenta una discontinuidad en el origen, sin embargo su valor en el origen tiende a 1, por lo tanto se considera a la siguiente expresión $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \hat{\psi}(\Omega)$ como el valor existente para cualquier aplicación.

Una propiedad importante del QIM es que puede reproducir funciones lineales de la siguiente forma [9]:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (a + bk)\psi(x - k) = a + bx, \quad x, a, b \in \mathbb{R} \quad (2.84)$$

2.3.4 Las FBR como kernels de convolución

Podemos observar las similitudes que existen entre la interpolación con FBR y con kernels de convolución con las siguientes ecuaciones:

<i>FBR</i>	<i>Kernels de convolución</i>	
$\sum_{k=1}^N c_k \varphi(\ x - x_k\)$	$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi(x - k)$	$\forall x \in \mathbb{R}^d$

Si consideramos que existen N muestras en 1D, en una distribución regular en $x = 1, 2, \dots, N$, entonces para los dos casos se tiene:

<i>FBR</i>	<i>Kernels de convolución</i>	
$\sum_{k=1}^N c_k \varphi(x - k)$	$\sum_{k=1}^N c_k \varphi(x - k)$	$\forall x \in \mathbb{R}$

Pero debido a que la FBR es también una función par en 1D, entonces finalmente las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

<i>FBR</i>	<i>Kernels de convolución</i>	
$\sum_{k=1}^N c_k \varphi(x - k)$	$\sum_{k=1}^N c_k \varphi(x - k)$	$\forall x \in \mathbb{R}$

Se puede observar que se tiene la misma estructura; por lo tanto, se puede hacer una comparación directa. Sin embargo, para dimensiones mayores que 1, la mayoría de los kernels de convolución se utilizan en un esquema de productos de tensores por razones de eficiencia computacional, mientras que en el caso de las funciones de base radial, la mayoría no se puede expresar de esta forma excepto con la función Gaussiana; por lo tanto, se tomara las funciones de base radial en 1 dimensión y para dimensiones mayores que 1, se va a expresar en producto de tensores, todo esto para propósitos de comparación.

Ahora desde el punto de vista de sistemas lineales, debido a que (2.7) es una convolución en donde se considera que $\varphi(x)$ es un sistema lineal, entonces para que exista estabilidad o la salida sea delimitada, se requiere que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty \quad (2.85)$$

Entonces cualquier función de base radial que cumpla la anterior propiedad, se podrá utilizar bajo un esquema de interpolación basada en convolución. Finalmente, se puede observar que las funciones de soporte compacto son adecuadas para este propósito al igual que la Gaussiana, el QIM y la Inversa Multicuádrada debido a su decaimiento.

3. Implementación

En este capítulo se muestran algunas técnicas para implementar la interpolación mediante kernels de convolución en 1D y 2D y con la función Sinc Discreto. Se mostrará como realizar algunas aplicaciones tales como Zooms, desplazamientos fraccionarios, rotación de imágenes y también el cálculo del kernel de convolución. Estos métodos serán los utilizados para implementar las FBR como filtros interpoladores, para lo cual, se hace énfasis en la interpolación con B-splines debido a que éstas son las bases para el caso de FBR. Finalmente, y dado que será la aplicación en donde usaremos las FBR, se mostrará la implementación del proceso de retro-proyección filtrada para tomografía computarizada de rayos paralelos.

3.1 Interpolación con la función Sinc Discreto

Como se había indicado en el marco teórico, el proceso de interpolación con la función Sinc Discreto es básicamente obtener una función continua $g(x)$ por medio de la convolución de $SincD(N, x)$ con la secuencia $f(n)$, y que básicamente está dada por la ecuación (2.63). Cuando queremos obtener muestras en $x = n/L$ con $n \in \mathbb{Z}$, a partir de la ecuación (2.63), es lo mismo que escalar por L a la ecuación y hacerle un muestreo en $n \in \mathbb{Z}$. Pero tal como sucede en los kernels de convolución, este proceso de escalamiento y muestreo es lo mismo que hacer un Upsampling de L a $f(n)$ y después filtrar con $SincD(N, n/L)$.

3.1.1 Interpolación mediante inserción de ceros

Al observar que el proceso de filtrado con $H(k)$ dado en las ecuaciones (2.59) y (2.60) es similar a que hagamos un relleno de $N(L - 1)$ ceros en el espectro discreto $X(k)$ en $\frac{N-1}{2} + 1 \leq k < LN - 1 - \frac{N-1}{2}$ vemos que es una manera más simple de obtener nuevas muestras. Sin embargo, en N se tiene el problema de que $H(k)$ sea complejo, pero en ese caso, se pueden seguir los pasos recomendados en [6] para evitar este problema.

Al realizar la interpolación con la función Sinc Discreto con un número reducido de muestras, se puede producir una predicción no satisfactoria de las nuevas muestras en la señal discreta $f(n)$ en el momento de la interpolación; para apreciar esto, considere la siguiente secuencia discreta:

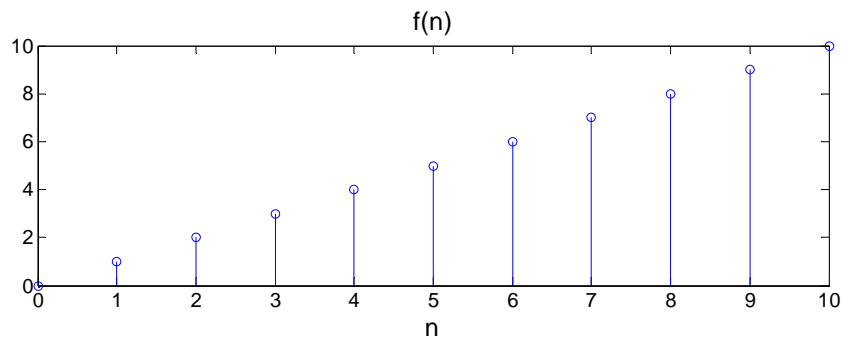


Figura 3.1. Secuencia con tendencia lineal.

al realizar una interpolación a esta secuencia lineal, se podría esperar que mantuviera esa tendencia pero, si por ejemplo, aumentamos por un múltiplo de 10 el número de muestras se obtiene la secuencia de la figura 3.2. Observamos que las nuevas muestras no siguen la tendencia lineal esperada. Esto es debido a la discontinuidad presente en la muestra $n = 10$ y a la longitud de la secuencia, ya que en el momento de aplicar el kernel de interpolación, y por efecto de la correspondiente convolución circular, éste no contribuye de manera adecuada en la generación de las nuevas muestras.

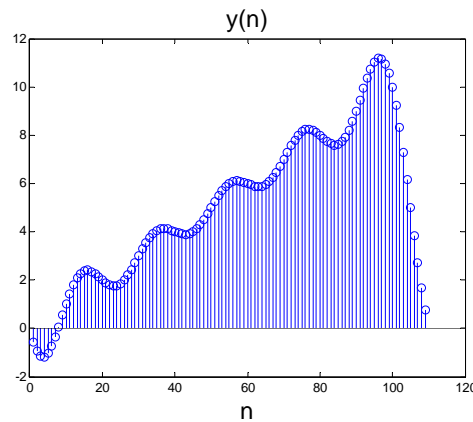


Figura 3.2. Interpolación de una secuencia Lineal de 11 muestras.

Por otro lado, una interpolación más adecuada también depende de la forma del filtro. Así, tenemos que para otros kernels, entre mejores propiedades de aproximación se desee, la calidad del kernel escogido se aproximará más a la que ofrece la función Sinc, implicando el aumento del soporte y también un decaimiento más lento produciéndose así, que se tomen más muestras en cuenta para generar la nuevas. Por lo tanto, si entre los extremos de una secuencia existen discontinuidades que no van de acuerdo a su forma real y es también de corta longitud, se generarán valores no adecuados durante la interpolación. Este efecto se reduce si aumentamos el número de muestras tal como se ilustra en la figura 3.3, en donde se tienen 101 muestras y se aumenta al doble. Esto es porque el kernel del filtro interpolador toma en cuenta más muestras de la verdadera forma de la señal.

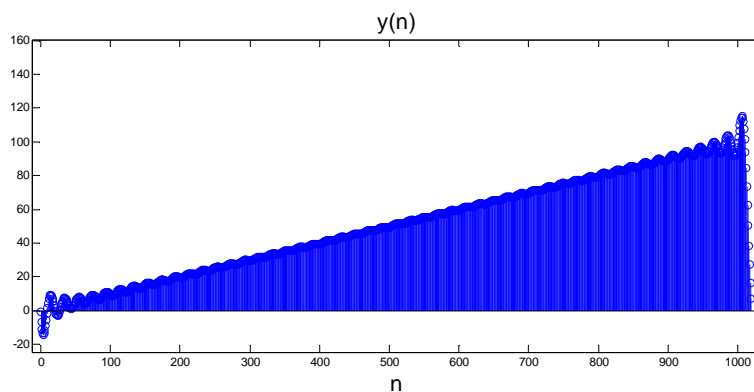


Figura 3.3. Interpolación con $L = 10$ de una secuencia lineal de 101 muestras.

Sin embargo observamos todavía una interpolación no adecuada y más en las fronteras de la señal. En el caso de N par, se puede optar por la tercera modificación espectral, ya que su kernel es el que tiene un decaimiento más rápido [12] resultando a su vez, una mejor interpolación debido a que se minimizan los efectos de frontera.

Una solución al problema anterior, es extendiendo la secuencia original con una parte invertida de la misma de tal manera que resembale una forma continua. En el caso de nuestro ejemplo, se tendría la secuencia extendida de la forma $\{x(n) \ x(-n)\}$ ilustrado en la siguiente figura:

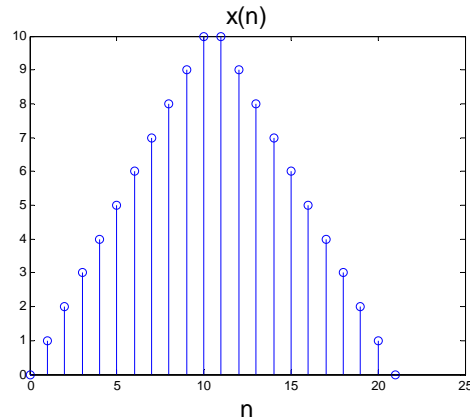


Figura 3.4. Extensión simétrica de una secuencia lineal de 11 muestras.

El cual al aumentar 10 veces el número de muestras se obtiene lo siguiente:

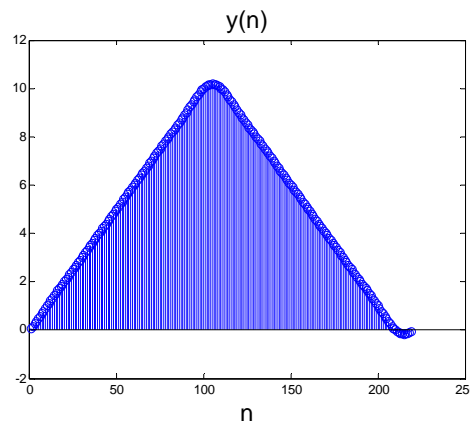


Figura 3.5. Interpolación de la extensión simétrica de una secuencia lineal de 11 muestras.

que es una mejor interpolación que la mostrada en la figura 3.2.

Por lo tanto, se considerará este método en el proceso de interpolación para disminuir los efectos de frontera. Sin embargo aunque se pueden minimizar efectos de frontera debido a las discontinuidades en el momento de realizar la interpolación, sí existiesen discontinuidades dentro de la secuencia, aparecerán oscilaciones tal como se muestran en la figura 3.6. Esto es entendible ya que se deben fundamentalmente a la naturaleza oscilatoria de la función Sinc discreto.

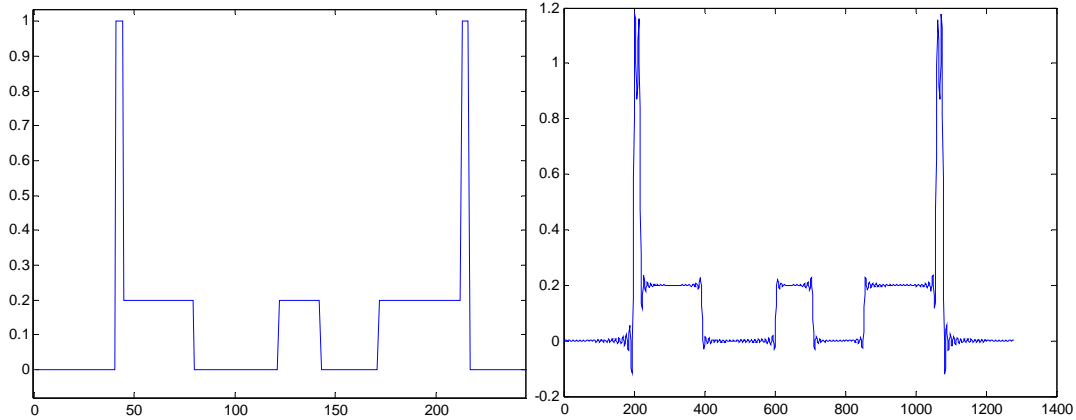


Figura 3.6. Interpolación de una secuencia con discontinuidades.

En el caso de que se desee un número de muestras arbitrario, es decir si se tiene un conjunto de N muestras y se quiere tener $N + \lceil N\sigma \rceil$ donde σ es un número positivo, en el espectro de la secuencia solo hay que agregar $\lceil N\sigma \rceil$ ceros entre $k = \frac{N-1}{2}$ y $k = \frac{N-1}{2} + 1$ para N impar [6].

De forma similar, para el caso de dos dimensiones, al realizar un Upsampling se dará origen a nuevas replicas debido al escalamiento. Para ilustrar el caso, se presenta la siguiente imagen con su respectivo espectro:

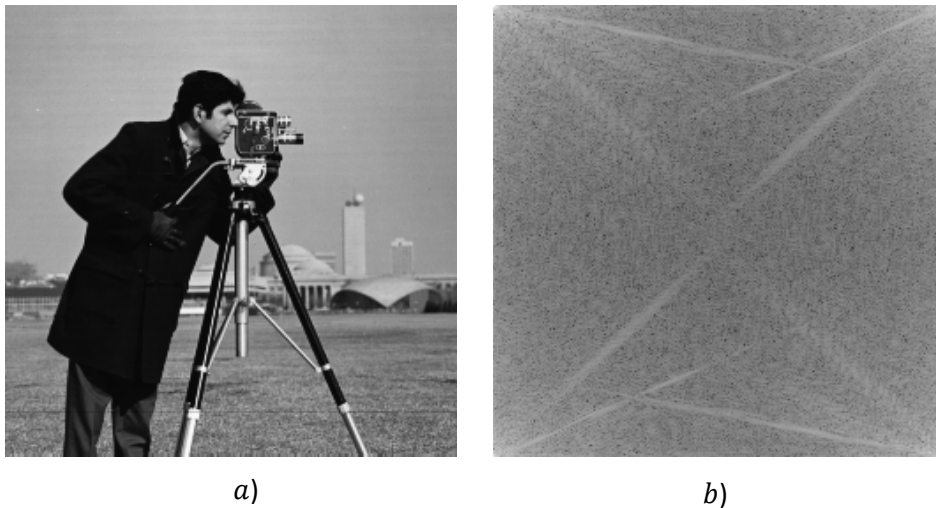


Figura 3.7. a) Imagen de escala a grises b) Magnitud de su respectivo espectro.

el cual, después de aplicarle un Upsampling de 2 se obtiene el espectro ilustrado en la figura 3.8.

En donde se puede observar que existen replicas y que deberán ser eliminadas con un filtro pasabajos (que es lo mismo que hacer una inserción de ceros al espectro original en las posiciones de las replicas). De igual manera, si se desea una zoom arbitrario en una imagen de tamaño $m \times n$ a $(m + \sigma m, n + \sigma n)$ donde σ es un número positivo entonces se insertan σm ceros en las columnas y σn ceros en las filas tal como el caso en 1D.

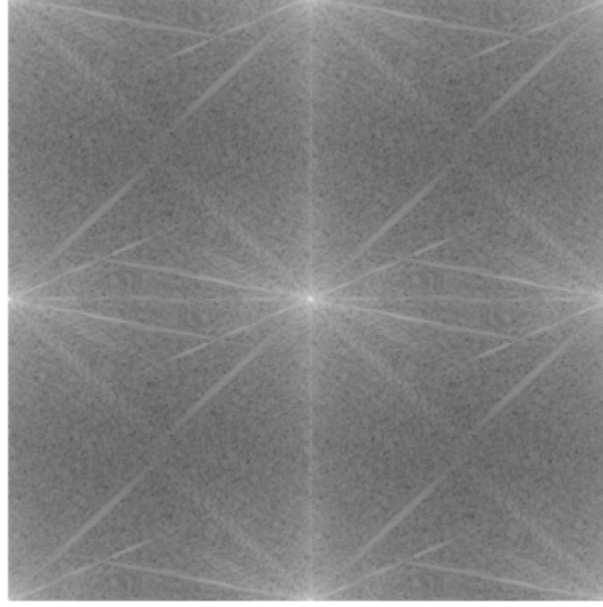


Figura 3.8. Espectro de la figura 3.7.a después de un Upsampling de 2.

3.2 Interpolación con B-splines y FBR en modo convolución

3.2.1 Obtención de los coeficientes c_k de B-splines mediante filtrado digital

El acercamiento vía filtrado digital para resolver un problema de interpolación con B-splines mediante la ecuación (2.7) fue propuesto por Unser en los trabajos [16] y [17]. Anteriormente se había indicado que el problema era encontrar los coeficientes $c(k)$ a partir de las muestras $f(n)$, de tal manera que se cumpliera la siguiente ecuación:

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\beta^m(n-k) \quad (3.1)$$

la cual es una convolución discreta; y cuya transformada Z es:

$$F(z) = C(z)B^m(z) \quad (3.2)$$

en donde $F(z)$, $C(z)$ y $B^m(z)$ son las transformadas Z de $f(n)$, $c(k)$ y $\beta^m(n)$ respectivamente. Entonces $C(z)$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$C(z) = \frac{F(z)}{B^m(z)} = F(z)(B^m(z))^{-1} \quad (3.3)$$

lo cual indica que el problema estará resuelto al filtrar $F(z)$ con $(B^m(z))^{-1}$.

Como β^m es una función par para cualquier $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $(B^m(z))^{-1} = (B^m(z^{-1}))^{-1}$ y por ende los polos del filtro son pares recíprocos por lo que el filtro puede factorizarse como:

$$(B^m(z))^{-1} = \gamma \prod_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} H(z; z_i) \quad (3.4)$$

donde $\gamma = 1/\beta^m(\lfloor m/2 \rfloor)$ y el término:

$$H(z; z_i) = \frac{-z_i}{(1 - z_i z^{-1})(1 - z_i z)} \quad (3.5)$$

es el factor correspondiente al par de polos $\{z_i, z_i^{-1}\}$, con $|z_i| < 1$.

Se puede observar que $H(z; z_i)$ puede descomponerse en dos etapas de filtrado si las denotamos como:

$$H^+(z; z_i) = \frac{1}{(1 - z_i z^{-1})}, \quad H^-(z; z_i) = \frac{-z_i}{(1 - z_i z)}. \quad (3.6)$$

Los dos filtros $H^+(z; z_i)$ y $H^-(z; z_i)$ se pueden implementar en forma de los filtros recursivos:

$$c^+(n) - z_1 c^+(n-1) = s(n) \quad (3.7)$$

$$c^-(n) - z_1 c^-(n+1) = -z_1 c^+(n) \quad (3.8)$$

En general, el cálculo de $c(n)$ implica diferentes etapas de filtrado de $H(z; z_i)$, en donde el número de etapas dependerá del soporte del B-spline.

En general, el cálculo de $c(n)$ implica diferentes etapas de filtrado de $H(z; z_i)$, en donde el número de etapas dependerá del soporte del B-spline que se utilice.

Ahora consideramos el caso de número de muestras finito, en donde tenemos una secuencia de N muestras: $f(n) = \{f(0), \dots, f(N-1)\}$. Se puede considerar que la señal solo existe durante un intervalo finito, sin embargo, con el fin de eliminar efectos de frontera se realiza una extensión de tal modo que la función quede par. Para esto consideramos que el conjunto de muestras f_k para $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, se le aplica una extensión con su imagen reflejada y que además cumpla la siguiente relación:

$$f_k = f_l \text{ para } (k+l) \bmod (2N-2) = 0 \quad (3.9)$$

con lo que f_k y su extensión se hacen periódicas con periodo $2N-2$. La ecuación (3.9) indica que el periodo debe estar formado con muestras en $k = \{0, 1, 2, \dots, N-2, N-1, N-2, \dots, 2, 1\}$ de f_k . De esta forma podemos establecer valores iniciales para $c^+(0)$ y $c^-(N-1)$ utilizando las respuestas al impulso de $H^+(z; z_i)$ y $H^-(z; z_i)$ respectivamente. Al hacerlo así, se puede demostrar [3] que se obtienen los siguientes valores:

$$c^+(0) = \frac{1}{1 - z_i^{2N-2}} \sum_{m=0}^{2N-3} z_i^m s_m \quad (3.10)$$

$$c^-(N-1) = \frac{-z_i}{1-z_i^2} (c^+(N-1) + z_i c^+(N-2)) \quad (3.11)$$

No es necesario calcular los valores de $c^-(N), \dots, c^-(2N-3)$ debido a que la respuesta al impulso de $H(z; z_i)$ así como f_k son simétricos resultando que $c^-(n)$ también sea simétrico.

Para el caso de 2D, se desea acoplar el siguiente modelo continuo formado por B-splines a un conjunto de muestras $f(n, m)$, con $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$g(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k, l) \beta^m(x-k) \beta^m(y-l) \quad (3.12)$$

Para esto necesitamos encontrar los coeficientes $c(k, l)$ de tal manera que cumplan la siguiente condición:

$$f(m, n) = g(m, n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k, l) \beta^m(m-k) \beta^m(n-l) \quad (3.13)$$

Por ejemplo en el caso del B-spline cúbico, tomando en cuenta que su soporte es de 4, básicamente para recuperar algún valor $f(m_0, n_0)$ tenemos que realizar los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} f(m_0, n_0) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k, l) \beta^3(m_0-k) \beta^3(n_0-l) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hbar(m_0, n_0+1) \beta^3(-1) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hbar(m_0, n_0) \beta^3(0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hbar(m_0, n_0-1) \beta^3(1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

de donde podemos observar que:

$$\hbar(m_0, l_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k, l_0) \beta^3(m_0-k) \quad (3.15)$$

La ecuación anterior es una convolución discreta entre los valores que hay en una cierta fila en $l = l_0$ de $c(k, l)$ con $\beta^3(k)$, la cual es después evaluada en m_0 . Además los valores de l que participan en la ecuación (3.13) son los valores l más cercanos a n_0 que produzcan un valor diferente de cero en $\beta^3(n_0-l)$. Así que, para recuperar $f(m_0, n_0)$ primero tenemos que ejecutar una convolución tal como indica la ecuación (3.15) en las filas de $c(k, l)$ más cercanas a $l = n_0$.

Una vez evaluada estas convoluciones en m_0 , observamos que $\hbar(m_0, l)$ ahora está en función de l , entonces haciendo un cambio de variables en la ecuación (3.14) se obtiene:

$$f(m_0, n_0) = \sum_{k=n_0-1}^{n_0+1} \hbar(m_0, k) \beta^3(n_0-k) \quad (3.16)$$

que es una convolución de $\tilde{h}(m_0, n)$ con $\beta^3(n)$ y evaluada en n_0 .

En resumen, el proceso de recuperar cualquier muestra $f(m_0, n_0)$ es primero hacer un filtrado en todas las filas de $c(k, l)$ y después en todas las columnas con $\beta^3(n)$. Esto también se puede realizar en forma inversa. Este proceso se ilustra en la siguiente figura:

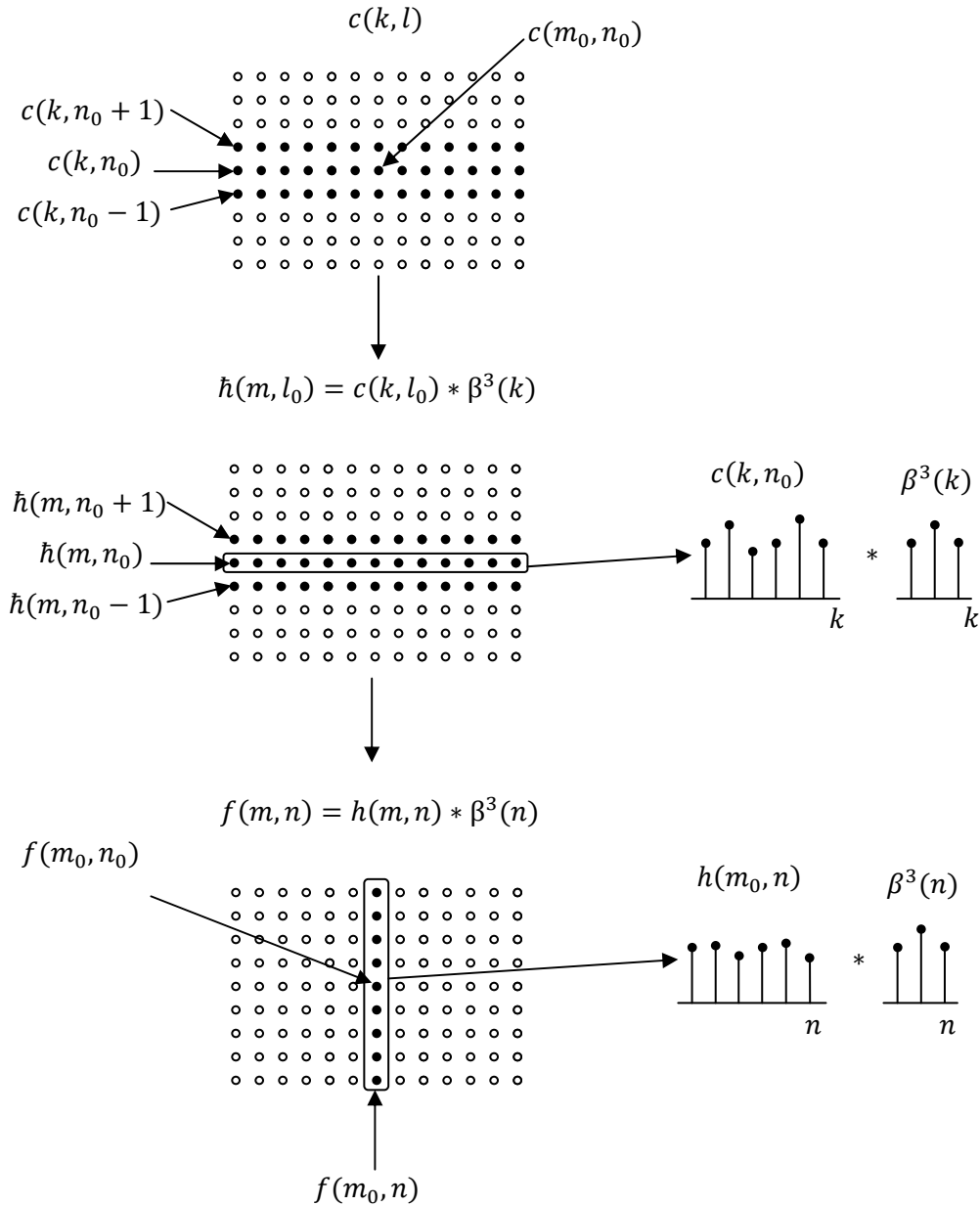


Figura 3.9. Recuperación de $f(m, n)$ via filtrado de las Columnas y filas de $c(k, l)$ con $\beta^3(n)$.

Por lo tanto si queremos obtener $c(k, l)$ simplemente primero tenemos que hacer un filtrado con el filtro inverso de $\beta^3(n)$ a las columnas de $f(m, n)$ y después a sus filas.

3.2.2 Obtención de los coeficientes c_k de FBR mediante filtrado digital

Como se había indicado anteriormente, el objetivo es usar algunas funciones de base radial RBF como filtros para datos igualmente espaciados, para esto se considera que tenemos un número infinito de muestras, en el caso de 2D se utilizara un esquema de producto de tensores tal como B-splines. Por lo tanto la forma de obtener los coeficientes c_k será de la misma forma que en caso de los B-splines. Como se indico en el marco teórico, las FBR que se pueden utilizar son las Gaussianas, QIM y las FBR de soporte compacto de Wendland o Wu. Sin embargo estas últimas difieren en su formación al de los B-splines ya que se utilizan el operador integral \mathcal{I} -ecuación (2.76)- y el operador diferencial \mathcal{D} - ecuación (2.77)-.

Esto se aprecia cuando se obtiene el filtro inverso, ya que puede resultar con términos complejos, a diferencia de los B-splines en donde sus polos son reales, por ejemplo, para el caso de la función de Wendland $\varphi_{3,1}$, para un soporte de 8, se obtiene el siguiente filtro:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$

con :

$$H_1(z) = \frac{0.1289}{(1+0.1289z^{-1})(1+0.1289z)}, \quad H_2(z) = \frac{z}{(z^2+3.3221z+4.2134)} \quad \text{y} \quad H_3(z) = \frac{z^{-1}}{(1+0.7885z^{-1}+0.2373z^{-2})}$$

Para $H_1(z)$, el filtrado se realiza de la misma forma que $H(z; z_i)$. Para $H_2(z)$, debido a que debe ser estable; esta expresado como un sistema anticausal. Con $H_3(z)$ se tiene un sistema causal; sin embargo, cuando el soporte es demasiado grande, el tiempo de cómputo será excesivo. Para evitar este problema, otra alternativa es hacer un muestreo del espectro $H(\omega)$ del filtro inverso y multiplicar las muestras resultantes con el espectro discreto de la secuencia de entrada.

3.2.3 Métodos para la obtención eficiente de nuevas muestras

3.2.3.1 Descomposición polifásica

Se puede deducir de las figuras 2.16 y 2.21 que durante la convolución entre $c(k)_{\uparrow L}$ y $\varphi(n/L)$ se producirán multiplicaciones entre muestras de φ y ceros de $c(k)_{\uparrow L}$ por lo tanto existen multiplicaciones que no contribuyen en la formación de alguna nueva muestra. Una forma de evitar estas multiplicaciones es por medio de una L descomposición polifásica del filtro $\varphi(n/L)$ y el uso de una propiedad llamada segunda identidad noble [25]. Esta propiedad permite intercambiar las posiciones del filtro interpolador y el Upsampler si descomponemos a $H(z)$ de la siguiente manera:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{L-1} z^{-i} P_i(z^L) \quad (3.17)$$

Donde:

$$P_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nL + i)z^{-n} \quad (3.18)$$

La ecuación (3.17) es llamado la L -descomposición polifásica y $P_i(z)$ son los componentes polifásicos de $H(z)$.

Cada subsecuencia

$$p_i(n) = h(nL + i), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (3.19)$$

es obtenida por medio de un Downsampling a una versión retrasada de la respuesta al impulso $h(n)$ original. Entonces, al desarrollar un filtro con estructura en L -descomposición polifásica, por ejemplo con $L = 3$, usamos la ecuación (3.18) para expresar la transformada Z de la salida del filtro como:

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= P_0(z^3)X(z) + z^{-1}P_1(z^3)X(z) + z^{-2}P_2(z^3)X(z) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$= P_0(z^3)X(z) + z^{-1}[P_1(z^3)X(z) + z^{-2}P_2(z^3)X(z)] \quad (3.21)$$

Ahora bien, la ecuación (3.20) nos lleva a la estructura polifásica de la figura 3.10.a, mientras que la ecuación (3.21) lleva a la estructura polifásica de la figura 3.10.b la cual es conocida como estructura polifásica transpuesta debido a que es similar a la realización en forma transpuesta de un filtro FIR.

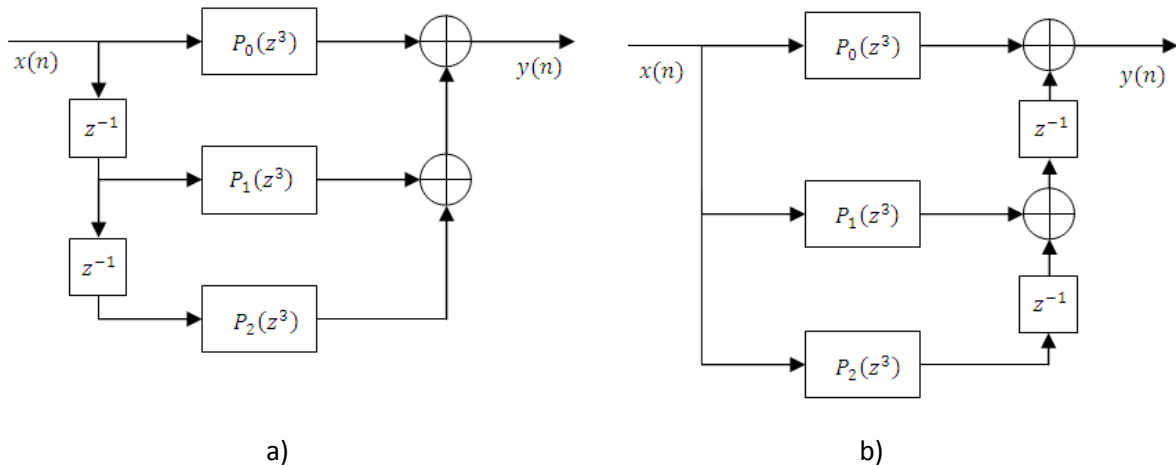


Figura 3.10. Estructura polifásica para $L = 3$. Estructura polifásica transpuesta para $L = 3$.

Por otro lado, la segunda identidad noble nos indica que los dos sistemas ilustrados en la figura 3.11 son equivalentes. Por lo tanto, al colocar el Upsampler a L junto con una L descomposición polifásica del filtro $H(z)$ obtenemos la estructura ilustrada en la figura 3.12 para el caso de $L = 3$.

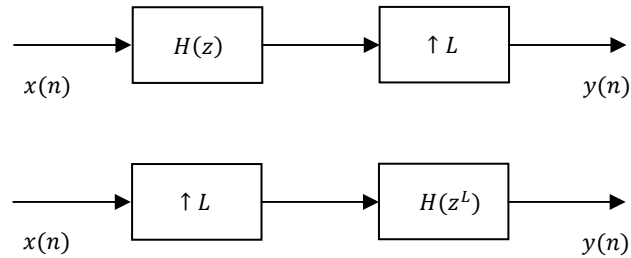


Figura 3.11. Dos sistemas equivalentes (segunda identidad noble).

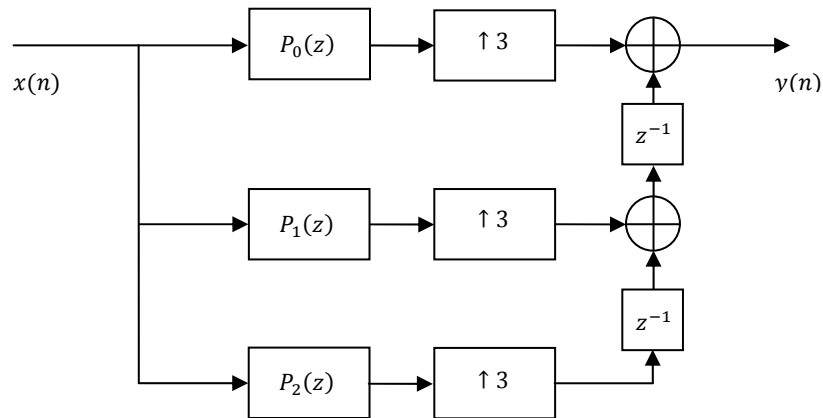


Figura 3.12. Sistema de interpolación usando una estructura polifásica y la segunda identidad noble.

El punto importante con la estructura anterior es que se asegura que no se producen multiplicaciones con ceros en el momento de producir una nueva muestra.

En el caso que se desee obtener un Zoom fraccionario, por ejemplo, 1.1 veces el tamaño de la señal o imagen, lo podríamos ahora pensar como un sistema Multirate aplicando primero un interpolador a L (formado por un Up-sampler a L y un filtro interpolador) y luego aplicar un Decimador a M (formado por filtro antialiasing seguido por un Down-sampler a M), es decir que se puede obtener un Zoom de L/M ; y por tanto, para el caso de un Zoom de 1.1, se requeriría hacer una interpolación a $L = 11$ seguido de una decimación a $M = 10$. Debe notarse sin embargo, que si aplicamos el método anterior a una imagen, el primer paso de elevar a $L = 11$ sería excesivo además de introducir más error debido al aliasing en la etapa de Decimación.

3.2.3.2 Estructura Farrow para interpoladores basados en polinomios

Una posibilidad para obtener un Zoom arbitrario es utilizar una estructura Farrow para el filtro interpolador. Para esto supongamos que queremos saber el valor para una cierta posición x , entonces obtenemos un entero n tal que $n = \lfloor x \rfloor$ y un intervalo fraccionario $\mu = x - n$ de tal manera que $x = n + \mu$ en donde $0 \leq \mu < 1$.

Para el caso $x = n + \mu$ en la fórmula de interpolación y poniendo el ejemplo de un B-spline en 1D, se obtiene:

$$y(n + \mu) = \sum_{k=-\lfloor \mu - \frac{m+1}{2} \rfloor}^{-\lfloor \mu - \frac{m+1}{2} \rfloor - m} c(n - k) \beta^m(\mu + k) \quad (3.22)$$

y en el caso del B-spline cúbico se tiene:

$$y(n) = y(n + \mu) = \sum_{k=-1}^2 c(n + k) \beta^3(\mu + k) \quad (3.23)$$

La cual se puede evaluar usando la expresión explícita del B-spline cúbico:

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |x|^2 + \frac{|x|^3}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{(2 - |x|)^3}{6} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (3.24)$$

dándonos la expresión:

$$\begin{aligned} y(n) = & \mu^3 \left(-\frac{1}{6}c(n-1) + \frac{1}{2}c(n) - \frac{1}{2}c(n+1) + \frac{1}{6}c(n+2) \right) + \\ & \mu^2 \left(\frac{1}{2}c(n-1) - c(n) + \frac{1}{2}c(n+1) \right) + \left(\frac{1}{6}c(n-1) + \frac{2}{3}c(n) + \frac{1}{6}c(n+1) \right) + \\ & \mu \left(-\frac{1}{2}c(n-1) + \frac{1}{2}c(n+1) \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

De la ecuación anterior se puede derivar una estructura Farrow de la siguiente forma:

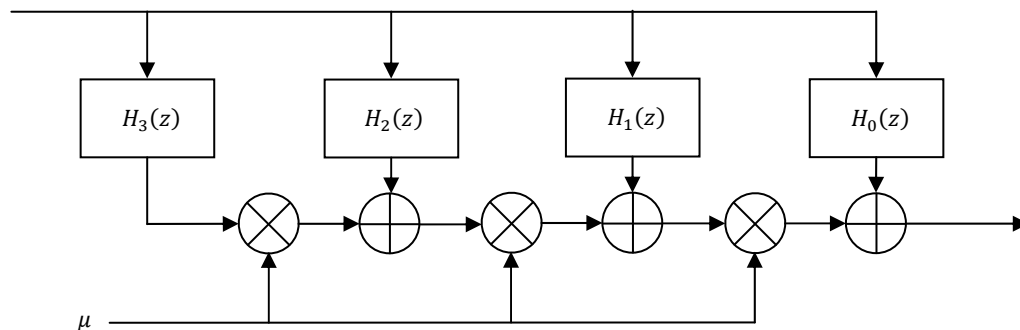


Figura 3.13. Estructura Farrow para el B-spline cúbico.

En donde:

$$H_0(z) = \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}z, \quad H_1(z) = -\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z, \quad H_2(z) = \frac{1}{2}z^{-1} - 1 + \frac{1}{2}z$$

$$H_3(z) = -\frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2$$

Esta estructura tiene la siguiente representación matricial:

$$y(n + \mu) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Entonces, al aplicar los filtros anteriores con la estructura descrita en la figura 3.13 se obtienen un valor de $g(x)$ en $x = n + \mu, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \mu < 1$.

3.2.4 Desplazamientos fraccionarios

Para lograr un desplazamiento fraccionario por Δx simplemente hay que desplazar el modelo continuo de la siguiente manera:

$$f(x - \Delta x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(x - \Delta x - k) \quad (3.27)$$

y después muestrear a esta ecuación en pasos enteros, el cual resulta en la siguiente ecuación:

$$f_{\Delta x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(n - \Delta x - k) \quad (3.28)$$

Que es básicamente una convolución discreta entre $c(n)$ y $\varphi(n - \Delta x)$. Entonces primero debemos muestrear en pasos enteros a una versión desplazada por Δx de $\varphi(x)$ y después hacer una convolución discreta con $c(n)$. Sin embargo también se puede obtener una versión desplazada por Δx mediante la estructura Farrow simplemente al sustituir μ por Δx y muestrear en $n + \Delta x$ con $n \in \mathbb{Z}$.

3.3 Rotación de imágenes por medio de traslaciones

La rotación de una imagen por un ángulo es una transformación geométrica de sus coordenadas que puede ser descrita como una multiplicación del vector de coordenadas (x, y) por una matriz de rotación ROT_{θ} y por tanto queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = ROT_{\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La matriz ROT_{θ} se puede descomponer en un producto de tres matrices y en donde cada matriz solo modifica una coordenada a la vez. Esta descomposición está dada de la siguiente forma:

$$ROT_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\theta/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\theta/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Esta implementación de una rotación es conocida como algoritmo de rotación de tres pasos [15]. Ahora, por cada transformación geométrica que se produce para cualquier matriz, sólo se produce traslaciones a lo largo de la coordenada modificada. Por ejemplo para la primera matriz se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\tan(\theta/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \cdot \tan(\theta/2) \\ y \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

es decir, para un pixel dado (x_0, y_0) este pixel tendría que aparecer en $(x_0 - y_0 \cdot \tan(\theta/2), y_0)$, por lo tanto en el modelo continuo se debe tener $x + y_0 \cdot \tan(\theta/2)$ para que resulte en esa misma posición. Así que la primera y tercera matriz de la ecuación (3.30) modifica el eje x mientras que la segunda matriz modifica el eje y . Estos pasos se ilustran en las figuras 3.14.

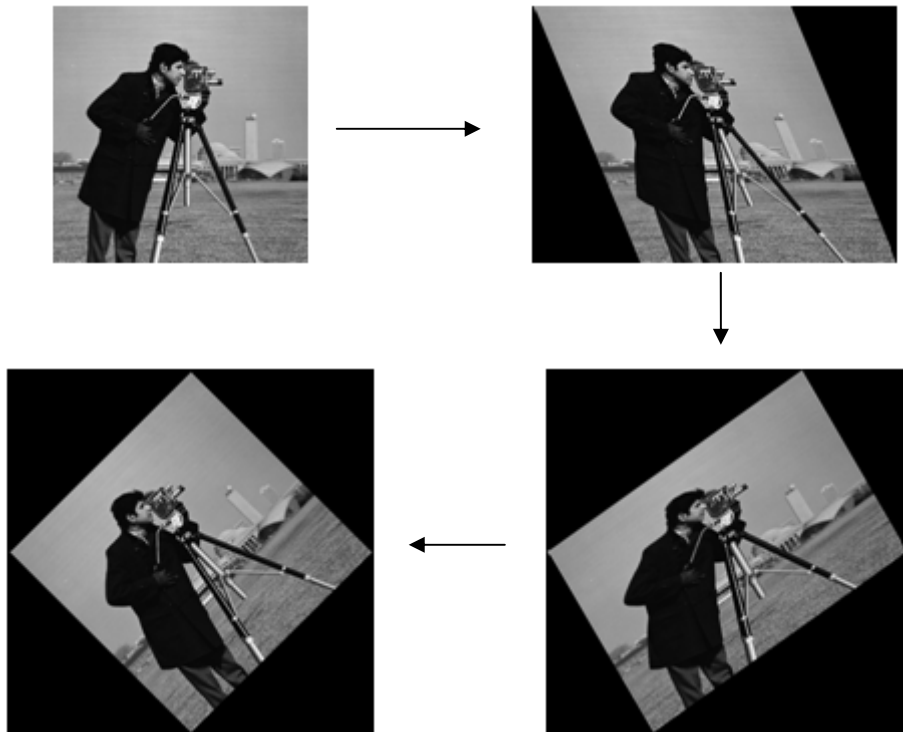


Figura 3.14. Proceso de rotación de una imagen en tres pasos.

Sin embargo, es obvio de la figura 3.14 que se debe tener un espacio de tamaño adecuado en donde la imagen estará contenida. De lo contrario, si por ejemplo, utilizamos convolución circular, se puede obtener una parte de la señal en una posición no deseada. Esto se puede ver por ejemplo en el paso1 en la figura 3.15.



Figura 3.15. Efectos de no suficiente espacio en el proceso de convolución circular.

Observamos, por ejemplo, en las primeras filas, la parte que inicialmente estaba colocada en el extremo izquierdo, aparece en el extremo derecho.

3.4 Computo del Kernel de error

Ahora presentamos la forma de calcular el kernel de error en interpolación. Tal como se indica en el marco teórico, el kernel está dado mediante la siguiente ecuación:

$$\eta^2(\Omega) = \frac{(P(\Omega))^2 - 2P(\Omega) \cdot \Phi(\Omega) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(\Omega - 2\pi k))^2}{(P(\Omega))^2} \quad (3.32)$$

en donde Φ es la transformada de Fourier del kernel de convolución y se tiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(\Omega - 2\pi n) = P(\Omega) \quad (3.33)$$

De esta última ecuación observamos que $P(\Omega)$ es la versión muestreada en pasos enteros del Kernel de interpolación $\varphi(x)$, por lo tanto si tenemos un kernel interpolador de soporte compacto simétrico que va de $[-N, N]$, podemos obtener $P(\Omega)$ de la siguiente manera:

$$P(\Omega) = \varphi(0) + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor N \rfloor} \varphi(k) \cos(\Omega) \quad (3.34)$$

También observamos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(\Omega - 2\pi k))^2$ es el espectro de la autocorrelación muestreada en pasos enteros de $\varphi(x)$, el cual tiene la siguiente expresión:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Phi(\Omega - 2\pi k))^2 = \varphi * \varphi(0) + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor 2N \rfloor} (\varphi * \varphi)(k) \cos(\Omega) \quad (3.35)$$

Es común que $\Phi(\Omega)$ sea de la siguiente forma:

$$\Phi(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{\Omega^n} \quad (3.36)$$

la cual tiene una discontinuidad en el origen debido a los términos Ω^n en el denominador. Esto puede producir problemas en la visualización de un cierto kernel de error en $\Omega = 0$ tal como se ilustran en la siguiente figura:

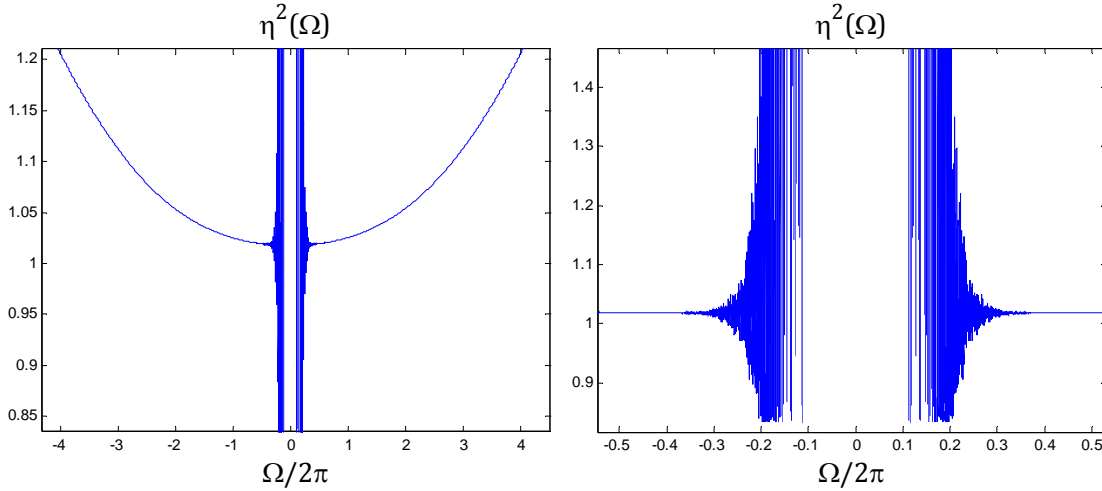


Figura 3.16. Efectos de la discontinuidad en el origen de la transformada de Fourier del kernel de interpolación.

Se observa que el valor del kernel de error converge conforme $\Omega \rightarrow 0$ y no representa ninguna dificultad en saber cual es ese valor. En la práctica, para conocer el valor al cual se converge, simplemente muestreamos la transformada de Fourier de $\varphi(x)$ en el origen y en otros valores cercanos, es decir:

$$\Phi(kh) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-jkhx} dx \quad (3.37)$$

con lo cual finalmente podemos calcular el error y finalmente comparar nuestros filtros.

3.5 Algoritmo de reconstrucción para Tomografía Computarizada de Rayos Paralelos

Como se explicó, en tomografía el problema fundamental es discretizar la siguiente ecuación:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta \quad (3.38)$$

donde $g(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) = g(t, \theta)$ con $t = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$

esto es, la función $g(t, \theta)$ es la transformada inversa de una proyección $P(t, \theta)$ que fue filtrada con $|\Omega|$ y por tanto tiene la siguiente ecuación:

$$g(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega, \theta) |\Omega| e^{j\Omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} d\Omega \quad (3.39)$$

en donde $S(\Omega, \theta)$ es la transformada de Fourier de $P(t, \theta)$.

Entonces básicamente para implementar una reconstrucción tomográfica en computadora, se necesita discretizar la ecuación (3.38). Para esto, primero consideramos la operación de filtrado de la proyección $p(t, \theta)$ dado por $P(\Omega, \theta)|\Omega|$. Para esto, observamos que el filtro $|\Omega|$ no tiene transformada inversa, esto se puede verificar si calculamos el valor para $t = 0$ el cual no existe, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |\Omega| e^{-j\Omega t} dx \Big|_{t=0} = \infty$, por lo tanto la etapa de filtrado con $|\Omega|$ no se puede implementar directamente. Sin embargo se puede asumir que la función $f(x, y)$ es de banda limitada, implicando que por el teorema de la proyección, el espectro de cualquier proyección también es banda limitada. Suponiendo que el espectro de $p(t, \theta)$ es limitado a π/T entonces modificamos el filtro rampa de la siguiente manera:

$$H_{ramp}(\Omega) = \begin{cases} 1 - |\Omega|, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases} \quad (3.40)$$

el cual origina la siguiente respuesta al impulso:

$$h_{ramp}(t) = \frac{1}{2T^2} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} - \frac{1}{4T^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\frac{\pi t}{2T}} \right)^2 \quad (3.41)$$

Por simplicidad consideraremos que $P(\Omega, \theta)$ esta limitado en banda en $|\Omega| < \pi$, implicando que con $T = 1$ se obtienen las muestras disponibles de $p(t, \theta)$. Ahora uniendo el proceso de muestreo, el acoplamiento de un modelo continuo al conjunto de muestras en una proyección y el filtrado con $H_{ramp}(\Omega)$ se puede formular un sistema de muestreo y reconstrucción.

De este sistema lo que deseamos es obtener muestras de la proyección filtrada $g(t, \theta)$, sin embargo una práctica común es realizar una discretización de la convolución $p(t, \theta) * h_{ramp}(t)$ de la siguiente forma [13], [26]:

$$\sum_k p(k, \theta) h_{ramp}(n - k) \quad (3.42)$$

El problema que surge es que se necesita ejecutar una sumatoria infinita debido al soporte infinito de h_{ramp} lo cual llevaría necesariamente a una truncación de h_{ramp} . Esto resultaría en un espectro que se desviaría de $H_{ramp}(\omega)$, por ejemplo para un conjunto de 560 muestras se tendría el par de espectros ilustrados en la figura 3.17.

De la gráfica b), observamos una desviación del valor cero deseado en la frecuencia cero. Otra forma es primero realizar la interpolación con la función base φ_2 , después se muestrea y se calcula el espectro discreto correspondiente a esas muestras para después multiplicarlas con muestras del espectro $H_{ramp}(\omega)$ de tal modo que el espectro discreto resultante será nuestra versión filtrada discreta de $g(t, \theta)$. De esta forma por lo menos se asegura que las muestras del espectro discreto de $p(n, \theta)$ serán filtradas adecuadamente.

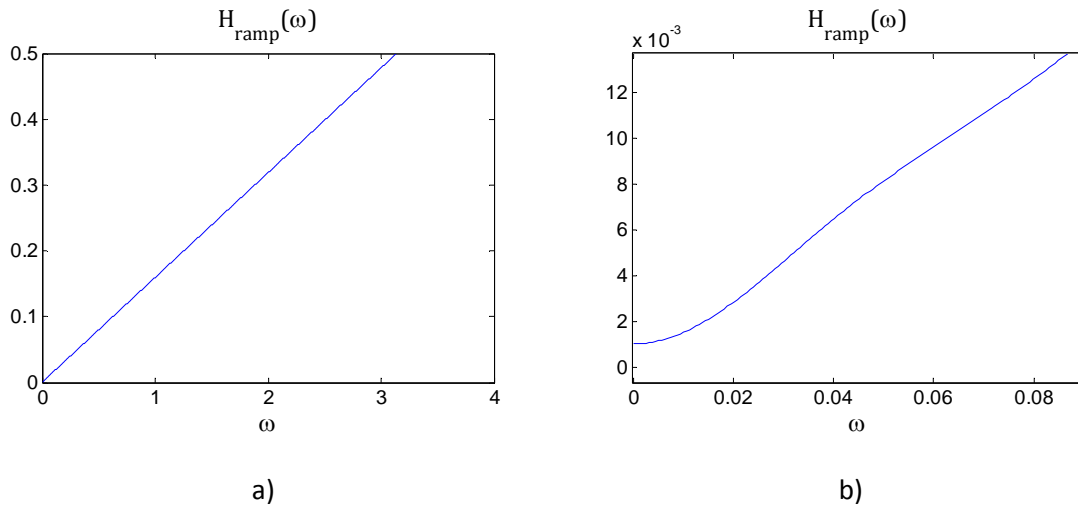


Figura 3.17. Efectos de la truncación del filtro h_{ramp} en su espectro.

Ahora el siguiente paso es discretizar la ecuación (3.38), el cual esencialmente es pasar un valor de la proyección que está en t , a las coordenadas (x, y) que cumplan $t = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$, sin embargo solo necesitamos los valores en coordenadas enteras de (x, y) para una representación digital. Este problema se ilustra en la siguiente figura:

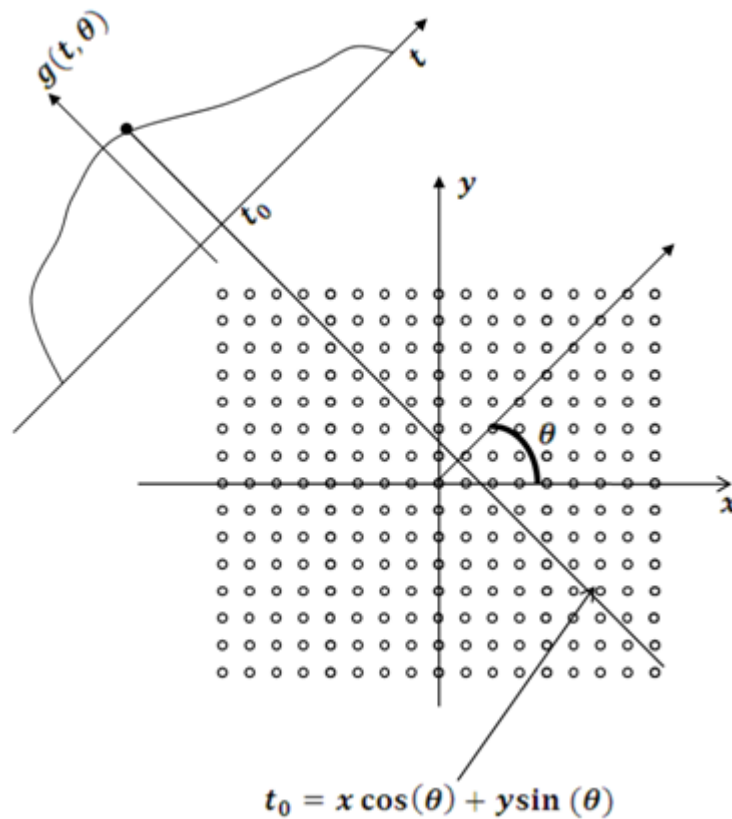


Figura 3.18. Problema de interpolación en el asignamiento de muestras de la proyección al sistema de coordenadas de la imagen reconstruida.

En donde se observa que si tenemos una muestra disponible en t_0 , entonces no va a coincidir exactamente con las posiciones en donde queremos obtener la muestra. Entonces realizamos una interpolación de tal manera que se obtengan muestras que coincidan con las posiciones enteras en el eje (x, y) . Para mayor facilidad se crea una malla de coordenadas y después se le aplica un proceso de rotación a esas coordenadas el cual gráficamente es ilustrado en la figura 3.19.

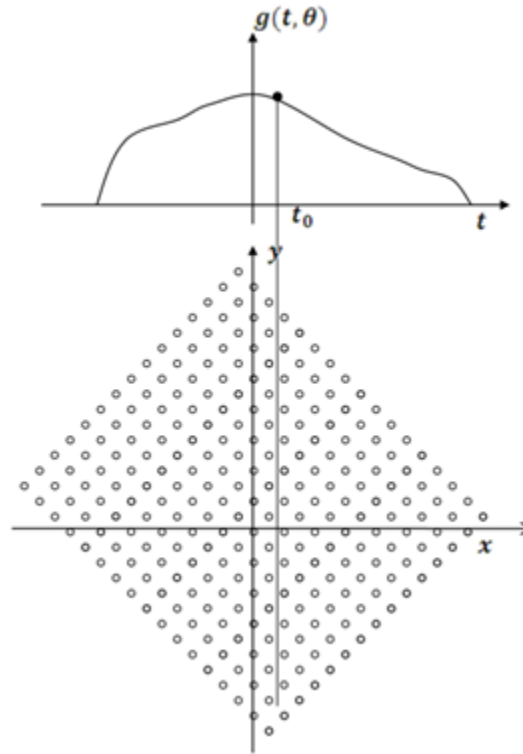


Figura 3.19. Problema de interpolación en el asignamiento de muestras de la proyección al sistema de coordenadas de la imagen reconstruida.

De esta forma si tenemos una coordenada rotada (x_0', y_0') tendremos que buscar el valor $t = x_0'$ en la proyección $g(t, \theta)$ y asignársela a esa posición. Ahora, el proceso descrito se repite para todas las proyecciones de tal manera que se ejecuta la siguiente suma:

$$f(x, y) = \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(x \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) + y \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) \quad (3.43)$$

Sin embargo para alguna θ el conjunto de coordenadas x_0' que se desean obtener, no tendrán una distribución regular, por lo tanto no se podrá ejecutar una convolución discreta para obtener esas muestras. Así que para evitar ese problema, se puede primero realizar una interpolación de tal manera que se obtenga una gran densidad de muestras, con una función base φ_2 que tenga un orden de aproximación razonable, tal como un B-spline cubico y después realizar una interpolación de bajo orden, por ejemplo, la lineal.

4. Resultados

En este capítulo se mostraran los resultados del uso de algunas FBR como filtros interpoladores, y su comparación con kernels de convolución comunes. Las funciones a evaluar son la Gaussiana, la función QMI y algunas funciones de soporte compacto debido a que tienen un rápido decaimiento y permiten una interpolación basada en convolución. También daremos el kernel de error para dichos filtros con los que se apreciará su calidad de interpolación. Después se mostraran algunas aplicaciones comunes donde se involucra algún proceso de interpolación.

4.1. Análisis de Kernels de error en interpolación de algunas FBR

Como se describió en el marco teórico, el kernel de error es una forma grafica de ver como es el rendimiento del filtro para interpolar. Básicamente obtenemos un valor promedio aproximado del error evaluando la siguiente integral:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\Omega)|^2 \eta^2(\Omega) d\Omega \quad (4.1)$$

Donde $\eta^2(\Omega) = |1 - H(\Omega)|^2 + \sum_{m \neq 0} |H(\Omega - 2\pi m)|^2$, es el kernel de error para el caso de un paso de muestreo $T = 1$, el cual depende del espectro del filtro interpolador dado por $H(\Omega)$. Entonces el valor de a_0 dependerá de las formas de $\eta^2(\Omega)$ y $F(\Omega)$.

Una característica importante para que exista convergencia es que se debe cumplir $\eta^2(0) = 0$. Esto es porque al depender $\eta^2(\Omega)$ de $H(\Omega)$, cuando se produzca un cambio de muestreo, se da un escalamiento de $H(\Omega)$ aumentando su tamaño. De tal manera que la región cercana al origen se va extendiendo el cual es casi cero y por lo tanto el valor de a_0 va disminuyendo. Entonces entre mas plano sea el kernel del error cerca del origen, el error decaerá más rápido conforme se disminuye el paso de muestreo. En el caso de los B-splines, sus características de interpolación y aproximación están bien descritas en forma grafica por el kernel de error, en donde al aumentar su orden se aumenta el tamaño de su región plana alrededor del origen con valor aproximadamente igual a cero y además este converge al kernel de error de la función Sinc.

En base a lo comentado anteriormente, se analizan los kernels de error de las FBR en donde se ilustran sus graficas y los valores de $\Omega = 0$ de los kernels de error de la función Gaussiana para $\varepsilon = \{2, 1, 0.5, 0.01\}$ (figura 4.1 y tabla 4.1) y de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soportes de 4, 40 y 200 (figura 4.2 y tabla 4.2).

Del kernel de la función Gaussiana y de función de Wendland $\varphi_{1,1}$ se observa en las tablas 4.1 y 4.2 que $\eta^2(0) \neq 0$, por lo tanto si la función es aproximadamente banda limitada a Ω_{\max} entonces el error promedio tendrá aproximadamente el siguiente valor:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} |F(\Omega)|^2 \eta^2(0) d\Omega \quad (4.2)$$

Es decir que si calculamos el error cuadrático medio, aunque aumentemos el número de muestras, siempre se obtendrá un error constante el cual significa que no se tiene un orden de aproximación. Sin embargo observamos en las graficas de sus kernels, que conforme se aumenta el soporte se disminuye $\eta^2(0)$, esto es porque de acuerdo a la al kernel de error dado en la ecuación (2.44), para $\Omega = 0$ se tiene:

$$\eta^2(0) = \frac{|\sum_{n \neq 0} \Phi(2\pi n)|^2 + \sum_{k \neq 0} |\Phi(2\pi k)|^2}{|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(2\pi n)|^2}$$

Entonces si queremos que $\eta^2(0) = 0$, se debe cumplir:

$$\left| \sum_{n \neq 0} \Phi(2\pi n) \right|^2 + \sum_{k \neq 0} |\Phi(2\pi k)|^2 = 0 \quad (4.3)$$

Esta ecuación no se cumple para la función Gaussiana y la función de Wendland $\varphi_{1,1}$, pero al aumentar el soporte en el caso de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$, o disminuir ε en el caso de la función Gaussiana, se produce un escalamiento inverso de sus espectros haciendo que aproximadamente se cumpla la ecuación (4.3) debido al rápido decaimiento de sus espectros. La propiedad de que $\eta^2(0) \neq 0$ se cumple también para las funciones de Wendland $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$.

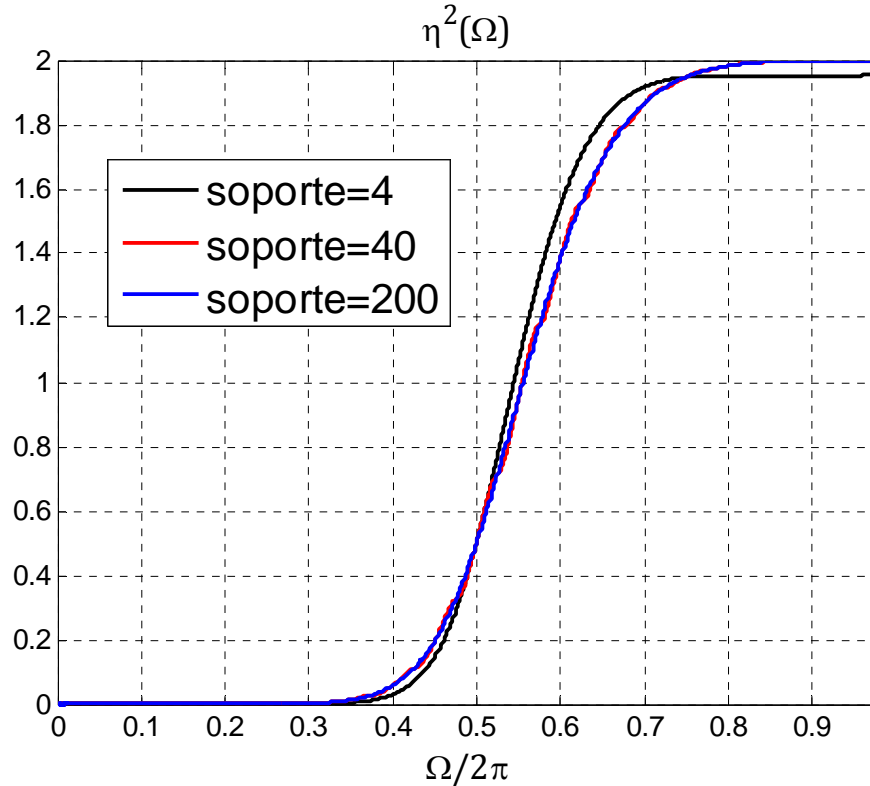


Figura 4.1. Kernels de error de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ para soportes de 4, 40 y 400.

soporte	$\eta^2(0)$
4	3.381234150466169e-04
40	3.487643710662356e-12
200	1.421085464414773e-16

Tabla 4.1. Valores en $\Omega = 0$ de los Kernels de error de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ para soportes de 4, 40 y 400.

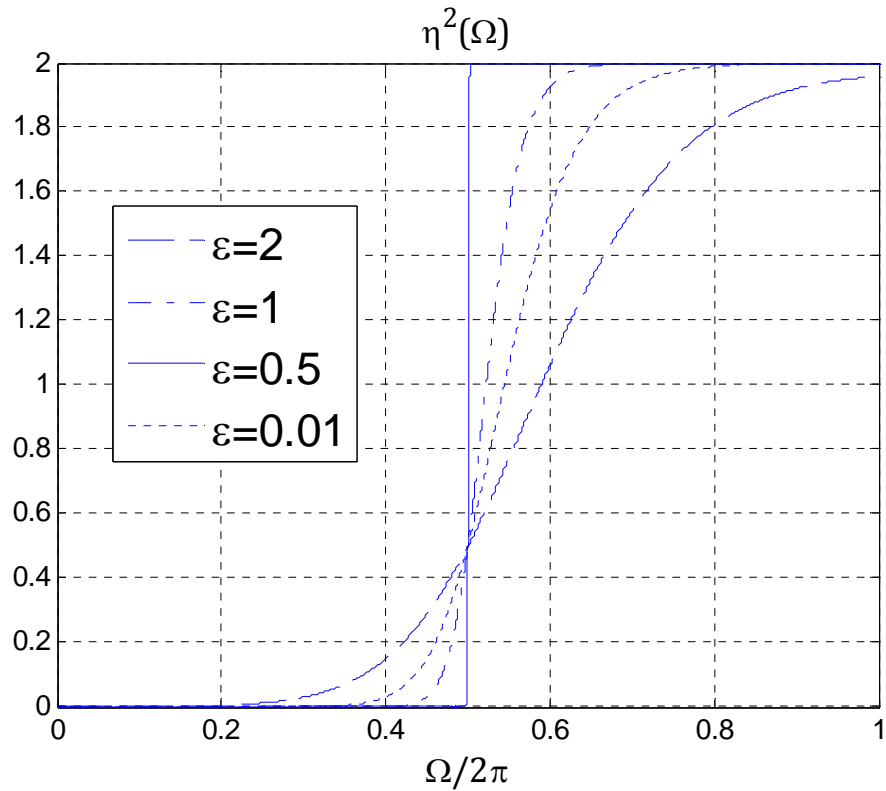


Figura 4.2. Kernels de error de la función Gaussiana para $\varepsilon = \{2, 1, 0.5, 0.01\}$.

ε	$\eta^2(0)$
2	3.016005645812361e-04
1	1.604840750050546e-08
0.5	1.413579843301297e-16
0.01	0

Tabla 4.2. Valores en $\Omega = 0$ de los Kernels de error de la función Gaussiana para $\varepsilon = \{2, 1, 0.5, 0.01\}$.

Para el caso del QIM, se muestran las graficas de los kernels de error para $c = \{1, 10, 50, 100\}$ en la grafica 4.3 en donde para todas estos kernels se obtuvo $\eta^2(0) = 0$. Esto es debido a que está presente en su espectro el del B-spline de orden 1 el cual proporciona que $\hat{\psi}(2\pi k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_*$ y

precisamente hace que se cumpla la ecuación (4.3). Lo anterior se observa al modificar su espectro con $\hat{\phi}(|\Omega|) = \frac{-2c}{\Omega} K_1(c|\Omega|)$ donde K_1 es la función modificada de Bessel:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\Omega) &= (\cos(\Omega) - 1)\hat{\phi}(|\Omega|) = -(1 - \cos(\Omega))\hat{\phi}(|\Omega|) = -2 \left(\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right)^2 \hat{\phi}(|\Omega|) \\ &= \frac{\left(\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right)^2}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \left[\frac{4\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 c}{\Omega} K_1(c|\Omega|) \right] = c \frac{\left(\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right)^2}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \Omega K_1(c|\Omega|) \end{aligned} \quad (4.4)$$

En la ecuación anterior, se identifica que $\left(\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right)^2 / \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2$ es el espectro correspondiente al B-spline de orden 1.

Esto último significa que, desde el punto de vista de teoría de aproximación [2], el QIM tiene la capacidad de reproducir perfectamente polinomios de un máximo grado de 1 y por lo menos tener un orden de aproximación de 2 tal como se indica en [9]. Por lo tanto podemos esperar que conforme se disminuya el paso de muestreo exista una disminución del error. Sin embargo debe notarse, que su correspondiente función en el dominio del tiempo es de soporte global, y por tanto, para poder implementarlo se hace necesaria una truncación del QIM.

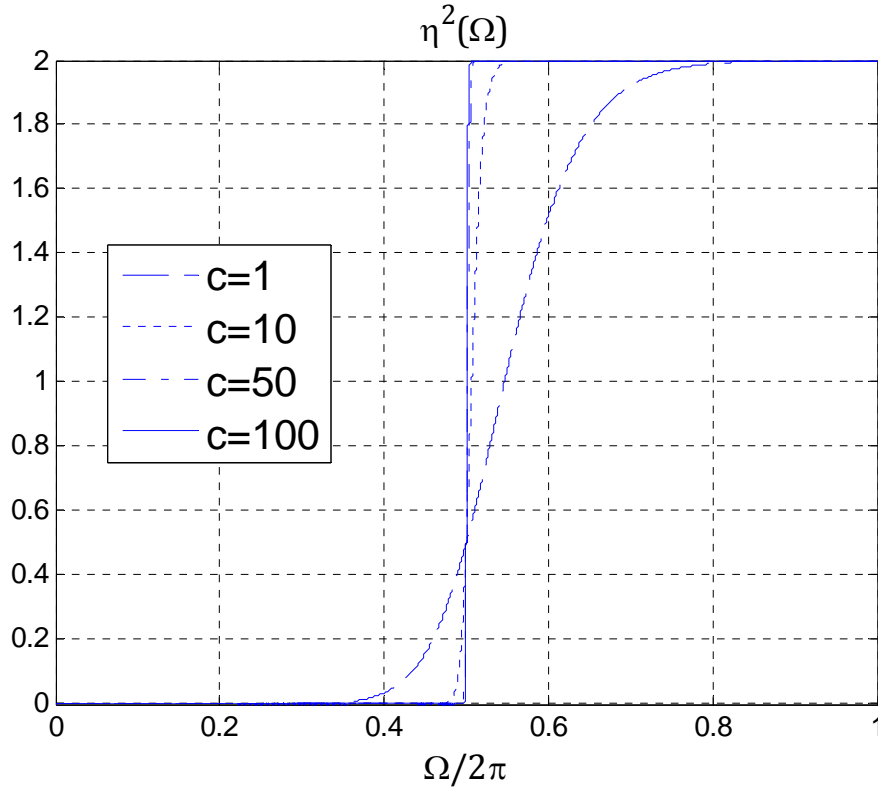


Figura 4.3. Kernels de error del QIM para $c = \{1, 10, 50, 100\}$.

Pero debido a que el proceso de truncación en el dominio del tiempo se convierte en una multiplicación entre la función de interés y una ventana, entonces tenemos una convolución en el dominio de la frecuencia de $\hat{\psi}(\Omega)$ con el espectro de la ventana de truncación y por tanto, esto hace que el QIM pierda sus características de aproximación pues esto producirá valores diferentes de cero en $\hat{\psi}(2\pi k)$ necesarios para que se cumpla la ecuación (4.3). Para minimizar dicho efecto, entonces es necesario tener una ventana grande como era de esperarse.

La truncación también se aplica con la función Gaussiana debido a que tiene un soporte global. Si ya tenemos un factor de escalamiento ε , en el que los valores $\Phi(2\pi n)$, aproximadamente cumplan la ecuación (4.3), entonces también debemos tener una ventana grande para que no exista una significativa desviación de estos valores y afecte la satisfactoria aproximación que se tenga de la ecuación (4.3).

Para ver el efecto de $\eta^2(0) \neq 0$ durante el proceso de interpolación se considera el caso en la aproximación de una función constante por ser la más simple de interpolar. Para esto, considérense las siguientes figuras:

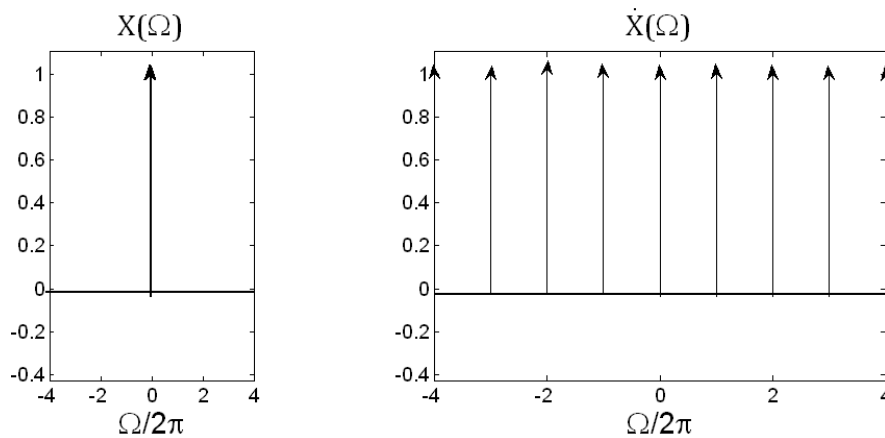


Figura 4.4. Transformada de Fourier de una constante y su versión muestreada a $T = 1$.

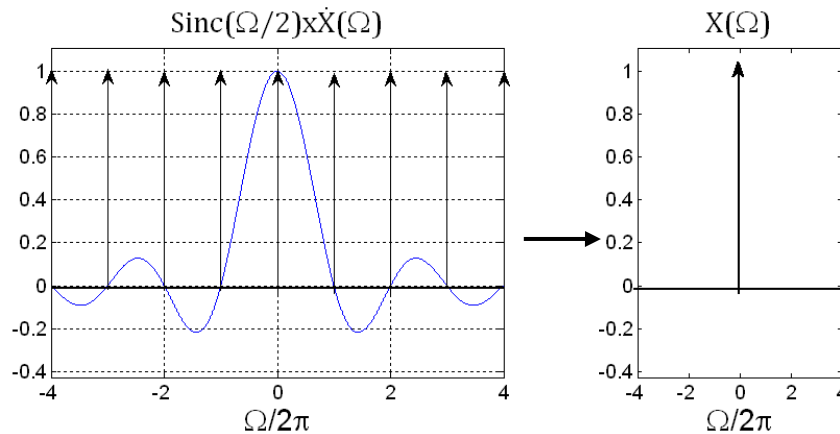


Figura 4.5. Proceso de interpolación mediante $\dot{X}(\Omega) \times Sinc(\Omega/2)$.

En donde se muestran el proceso de muestreo y recuperación de una constante por medio de la Función Rectangular que también es la más simple como kernel interpolador.

Como es sabido, el espectro $X(\Omega)$ de una función constante es la función impulso y el espectro $\check{X}(\Omega)$ de su versión muestreada, está formada por $X(\Omega)$ mas sus replicas centradas en $\Omega = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}_*$ tal como se indica en la figura 4.4. Al aplicar el filtro interpolador, las replicas se multiplican con los cruces por cero del espectro del kernel interpolador en las posiciones $\Omega = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}_*$, tal como se muestra en la figura 4.5 y por lo tanto, estos impulsos desaparecerán después de la multiplicación quedando solo el impulso del origen y recuperándose perfectamente la contante a partir de sus muestras.

Ahora para el caso de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4 y cuyo espectro interpolador se ilustra en la siguiente figura:

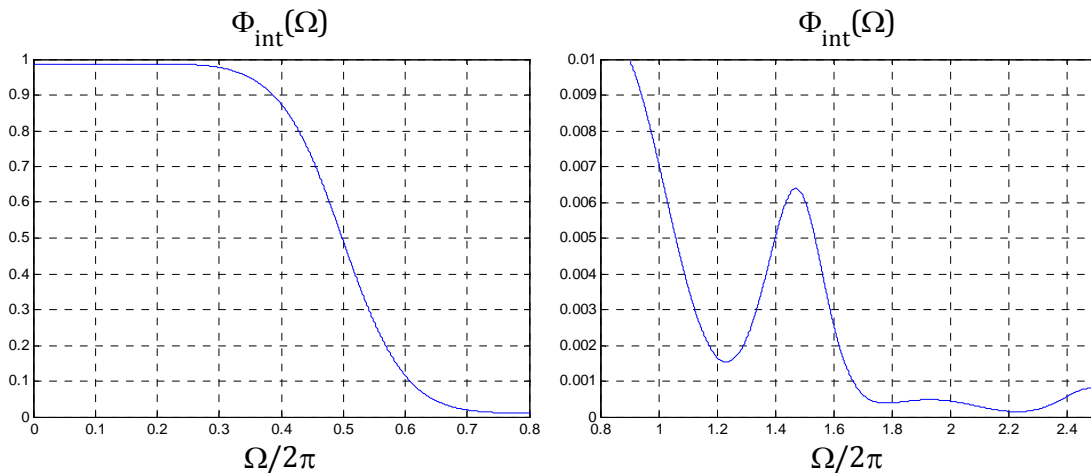


Figura 4.6. Filtro interpolador de la función Wendland $\varphi_{1,1}$ con un soporte de 4.

al multiplicarlo con el de $\check{X}(\Omega)$, no se eliminaran los impulsos centrados en $\Omega = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}_*$, ya que los valores del filtro interpolador son diferentes de cero en esas posiciones tal como se observa en su grafica. Entonces cada impulso centrado en $\Omega = 2\pi k$ y su reflejo en $\Omega = -2\pi k$ contribuirán con una función coseno de frecuencia $2\pi k$. Además, observamos que el valor del filtro en el origen es diferente de 1, por lo tanto el valor promedio de la función resultante con los términos cosenos incluidos después de la interpolación será diferente de 1 tal como se ilustran en las figuras 4.7 y 4.8.

Para el caso de otro tipo de funciones básicas tales como la Gaussiana con $\varepsilon = 1$ y la función Seno con $\omega_0 = 2\pi$, se puede observar oscilaciones similares tal como se ilustra en las figuras 4.9 y 4.10. En estos ejemplos se consideraron muestras tomadas a un paso de muestreo de 0.01 y con una ventana de truncación de $[-30,30]$ para la función Gaussiana y seno respectivamente. Para el caso de la función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ se mide el error cuadrático medio conforme se disminuye el paso de muestreo y con una ventana lo suficientemente grande para que se minimicen efectos de truncación. Los resultados son mostrados en la tabla 4.3.

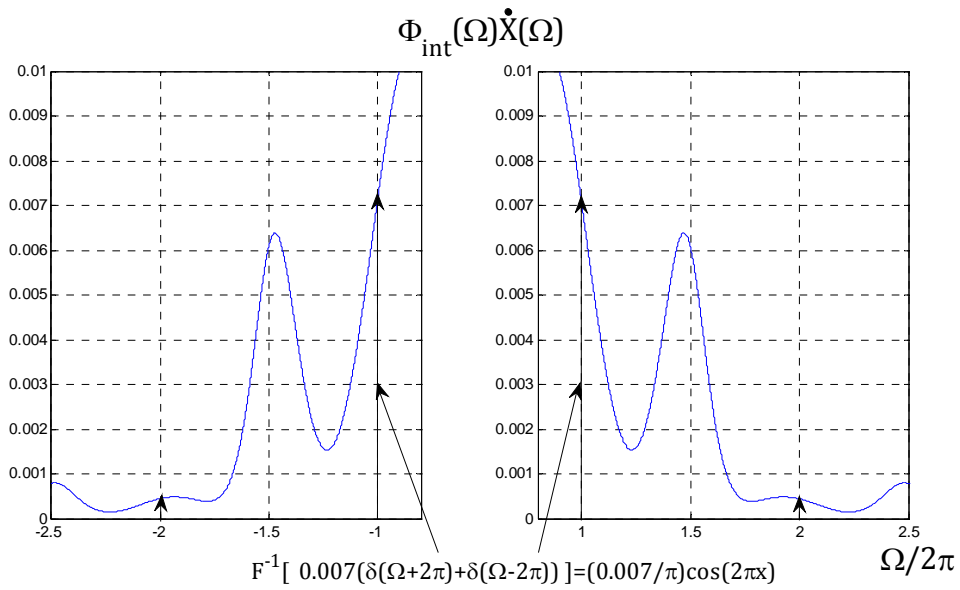


Figura 4.7. Replicas del espectro de la función constante no eliminadas por el filtro interpolador de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4.

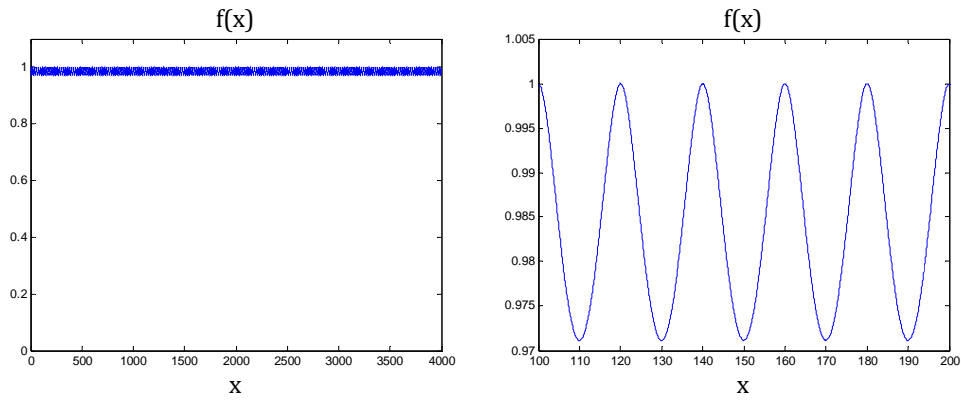


Figura 4.8. Reproducción de una función constante con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4.

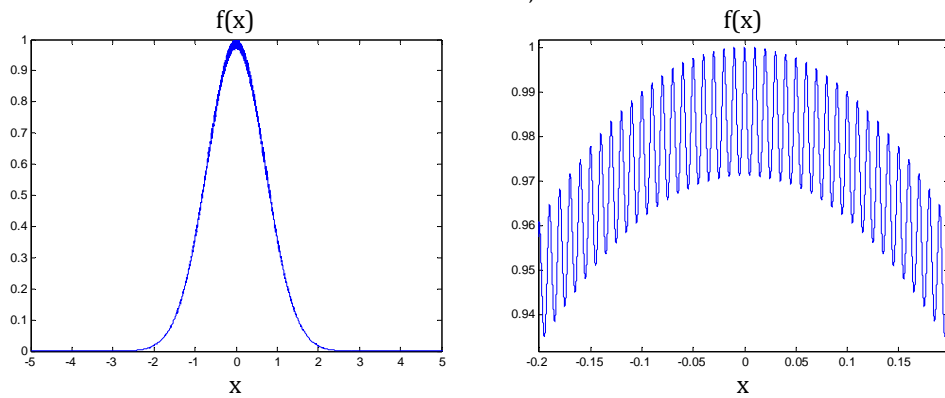


Figura 4.9. Reproducción de la función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4.

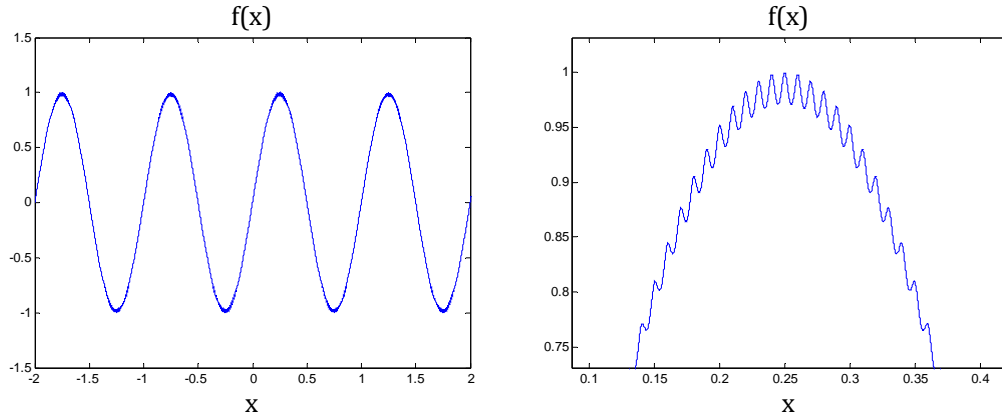


Figura 4.10. Reproducción de la función seno con $\omega_0 = 2\pi$ con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4.

T	EQM
0.2	4.229917650316489e-04
0.1	4.236228912063077e-04
0.02	4.237748019021450e-04
0.01	4.237748019021450e-04
0.002	4.237748019021450e-04
0.001	4.237748019021450e-04

Tabla 4.3. Valores del error cuadrático medio resultantes de la interpolación con la función Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4 a una función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ y una ventana de $[-30,30]$ a diferentes pasos de muestreo.

Se observa que el valor del error cuadrático medio tiende a un valor fijo tal como predice la ecuación (4.2), con un valor calculado de $4.237748562333169e-04$, que es al que converge en la simulación al ir disminuyendo el paso de muestreo. Ahora al realizar la interpolación con un kernel similar tal como B-spline cubico se obtiene el siguiente resultado:

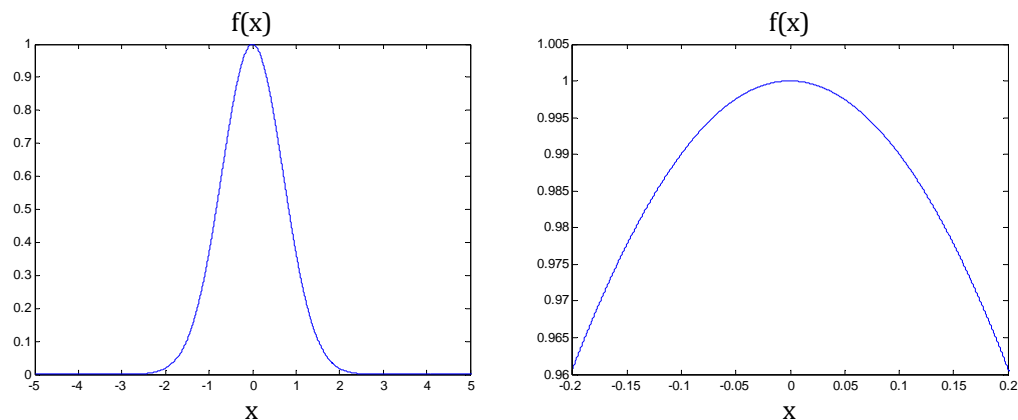


Figura 4.11. Reproducción de la función Gaussiana a $\varepsilon = 1$ con el B-spline cubico.

Se aprecia que existe una mejor interpolación que con la obtenida anteriormente. Las diferencias en la recuperación o aproximación se pueden entender comparando los espectros del B-spline cubico (figura 4.12) con la función Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4, en donde se tiene la misma diferencia presentada con la función rectangular porque el B-spline cubico tiene ceros en $\Omega = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}_*$.

En general todos los B-splines de orden n entero presentan esos ceros dándoles por lo menos un orden de aproximación de 1 [2].

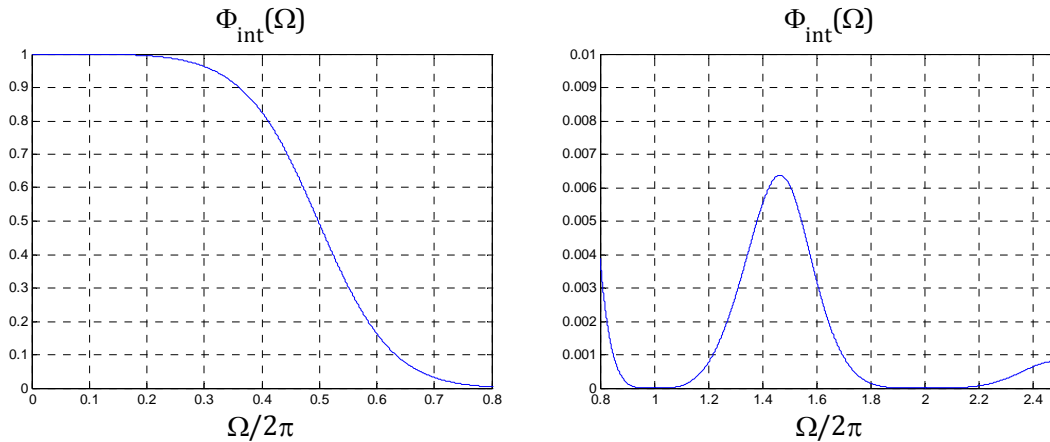


Figura 4.12. Espectro del filtro interpolador del B-spline cubico.

Sin embargo conforme aumenta el soporte de $\varphi_{1,1}$, se observa que en el kernel de error se disminuye el valor de $\eta^2(0)$, por lo tanto se espera menos error y mejor calidad de la interpolación tal como se verifica en las siguiente grafica para un soporte de 40.

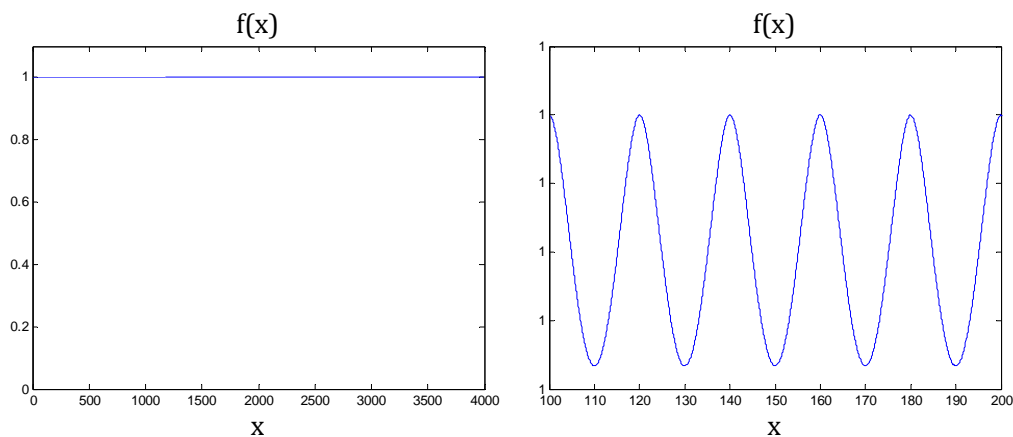


Figura 4.13. Aproximación de la función constante por medio de la función Wendland $\varphi_{1,1}$ con un soporte de 40.

Se observa que la disminución del valor pico de las oscilaciones. Esto se aprecia con la siguiente tabla con los valores mínimos de la aproximación $g(x)$ de la función constante para diferentes soportes.

Soporte	Valor mínimo
4	0.971153846153846
8	0.998170731707317
100	0.999999924998163
200	0.999999995295055

Tabla 4.4. Valores mínimos de la función constante reproducida con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$.

Además se puede observar que el kernel de error de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ va convergiendo al del B-spline cubico en donde las diferencias observadas son de la siguiente forma:

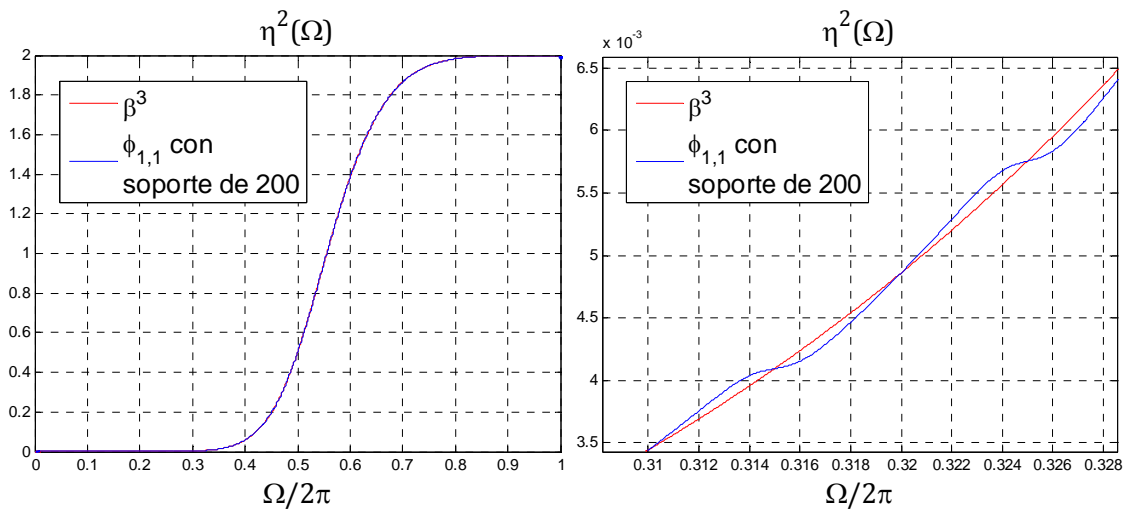


Figura 4.14. Kernels de error de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 200 y del B-spline cubico.

Debido a que el kernel de error está en función del filtro interpolador $\Phi_{int}(\Omega)$, entonces también se espera que el filtro interpolador de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ converga al del B-spline cubico conforme se aumenta el soporte. También el kernel de error de la función de Wendland $\varphi_{1,2}$ converge al del B-spline de orden 5, así como el kernel de error de la función de Wendland $\varphi_{1,3}$ al del B-spline de orden 7. De igual manera esta convergencia sucede con sus filtros interpoladores y esto se ilustra en las figuras 4.15, 4.16 y 4.17. Entonces, al exhibir este tipo de convergencia se puede esperar similar calidad en la interpolación a los B-splines. La relación que existe entre las funciones de Wendland con los B-splines se resume en la tabla 4.5.

Por último conforme se disminuye el paso de muestreo, se observara que las oscilaciones aumentan de frecuencia tal como se ilustra en la figura 4.18 para una función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ y una ventana de $[-30,30]$. Esto es debido a que cuando se disminuye el paso de muestreo, se separan mas las replicas del espectro de la señal muestreada, por lo tanto los valores promedios que deja pasar el filtro interpolador de la función Wendland, estarán posicionados en mas altas frecuencias.

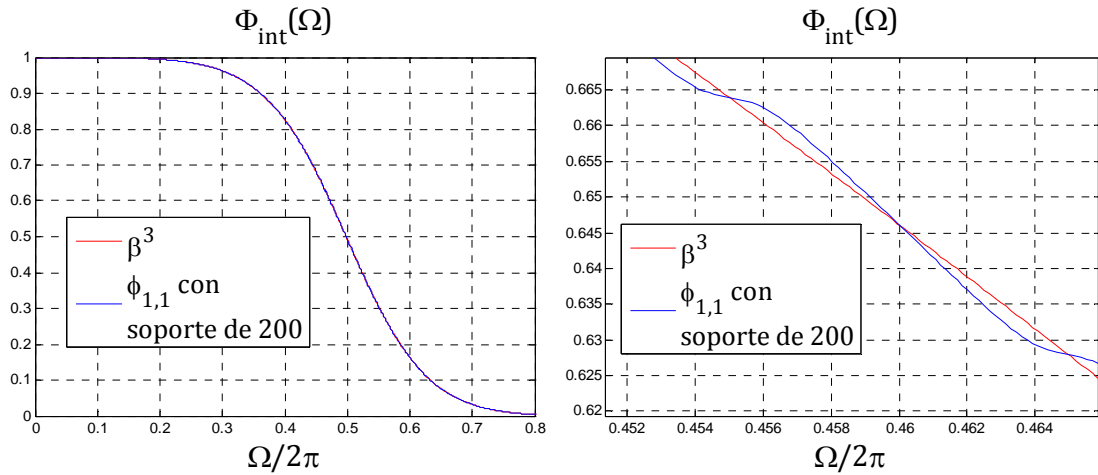


Figura 4.15. Filtros de la función de Wendland $\phi_{1,1}$ con soporte de 200 y del B-spline cubico.

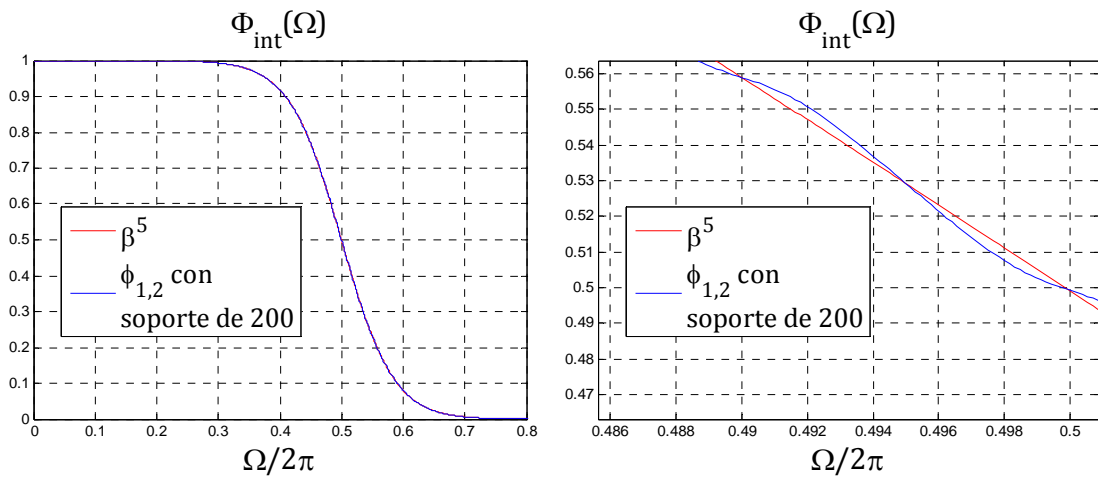


Figura 4.16. Filtros de la función de Wendland $\phi_{1,2}$ con soporte de 200 y del B-spline de orden 5.

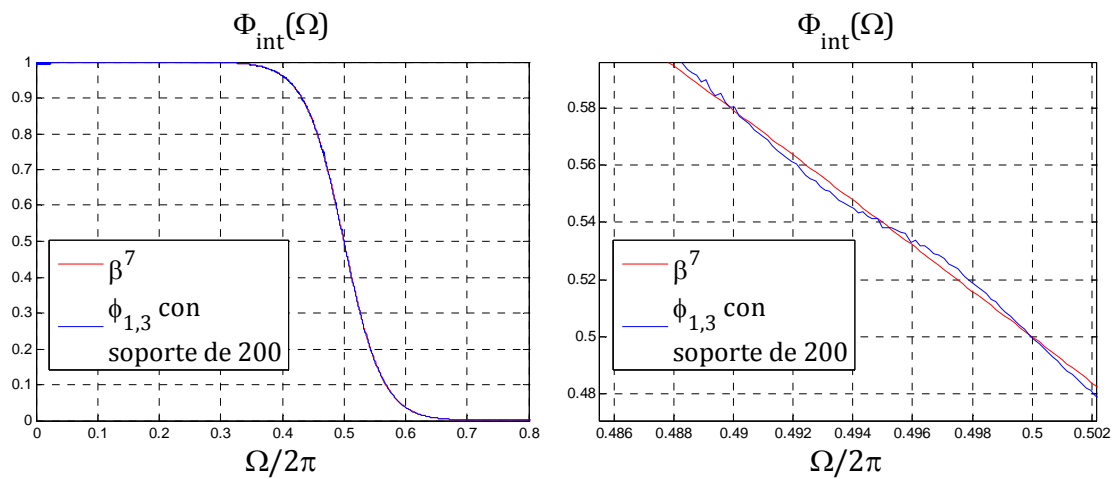


Figura 4.17. Filtros de la función de Wendland $\phi_{1,3}$ con soporte de 200 y del B-spline de orden 7.

$\varphi_{1,1}$	β^3
$\varphi_{1,2}$	β^5
$\varphi_{1,3}$	β^7
$\varphi_{3,1}$	β^3
$\varphi_{3,2}$	β^5
$\varphi_{3,3}$	β^7
$\varphi_{5,1}$	β^3
$\varphi_{5,2}$	β^5
$\varphi_{5,3}$	β^7

Tabla 4.5. Lista de funciones de Wendland junto con los respectivos B-splines los cuales su filtro interpolador presenta convergencia.

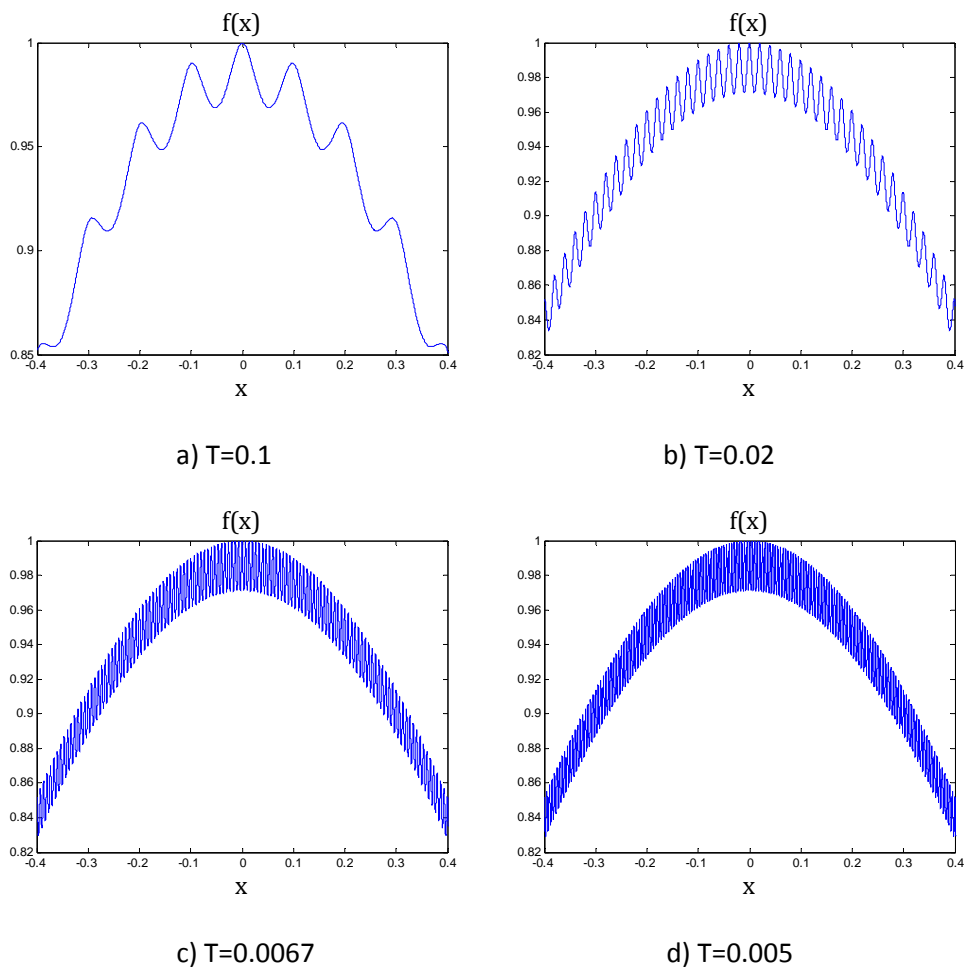


Figura 4.18. Reproducción de la función Gaussiana a $\varepsilon = 1$ con la función Wendland $\varphi_{1,1}$ de muestras obtenidas a diferentes pasos de muestreo.

Con las funciones Gaussiana y el QIM como se había comentado es necesario truncar su espectro debido a su soporte global. Con la función Gaussiana se incrementa el error mientras que con el

QIM pierde su orden de aproximación. Esto puede llevar a resultados similares al de las funciones de Wendland con oscilaciones, sin embargo con una ventana lo suficientemente grande y un parámetro de escalamiento ε de valor pequeño y c grande respectivamente se puede obtener una interpolación adecuada. Ahora tal como indica el kernel de error, su convergencia es diferente ya que estos tienden a la función Sinc y por consiguiente sus filtros interpoladores también presentan esa convergencia. Por ejemplo, en el caso de la función Gaussiana con $\varepsilon = 0.09$ se ilustra su correspondiente filtro interpolador en la figura 4.19. Para el QIM con $c = 100$ se ilustra en la figura 4.20.

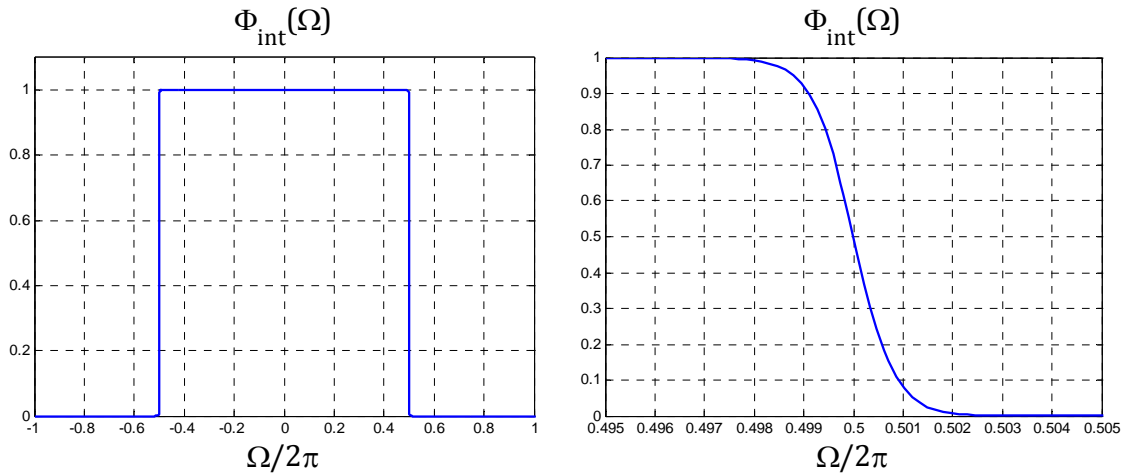


Figura 4.19. Espectro del filtro interpolador de la función Gaussiana con $\varepsilon = 0.09$.

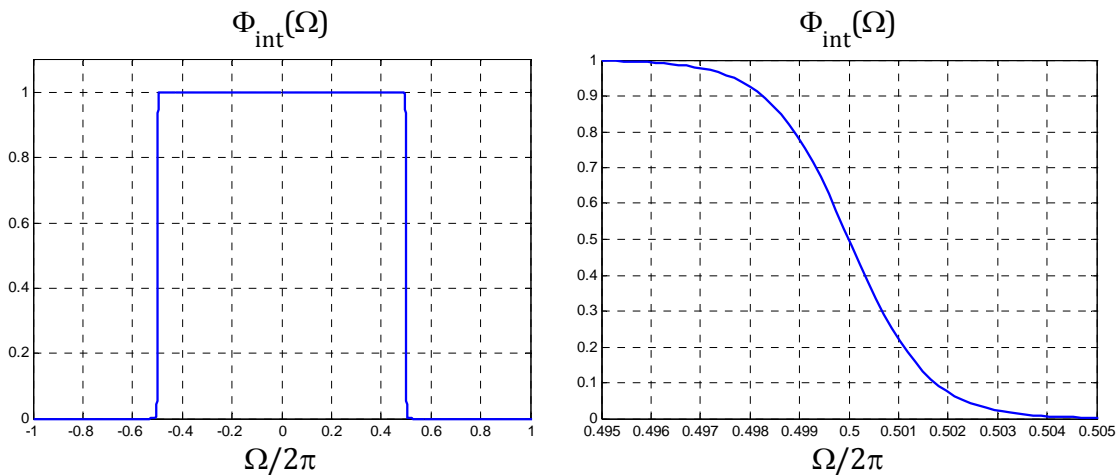


Figura 4.20. Espectro del filtro interpolador del QIM con $c = 100$.

Con respecto a otras funciones de soporte compacto de estructura polinómica, se presentan los mismos resultados de convergencia. Por ejemplo, con la función de Wu $\gamma_{2,3}$, su filtro interpolador presenta convergencia al del B-spline cúbico.

4.2 Aplicaciones

4.2.1 Zoom en imágenes

En esta sección se muestran los resultados de tres aplicaciones del uso de las FBR como filtros interpoladores, las cuales son: Zooms en imágenes, rotación en imágenes el cual involucra desplazamientos fraccionarios y Tomografía Computarizada de rayos paralelos.

Como imágenes de prueba se utiliza “Barbara” (figura 4.21) y “cameraman” (figura 4.22) ya que tienen un espectro de alta y baja frecuencia respectivamente.



Figura 4.21. Imagen de Barbara de 512X512 pixeles.



a)



b)

Figura 4.22. Imagen de prueba Cameraman a) 256X256 pixeles b) 64X64 pixeles.

Se utilizara una porción de la imagen cameraman ilustrado en la figura 4.22.b) para pruebas de zoom en imágenes y como interpoladores de comparación se utiliza los B-splines cubico, de orden 5, orden 7 y la función Sinc Discreto; los resultados se presentan a continuación:

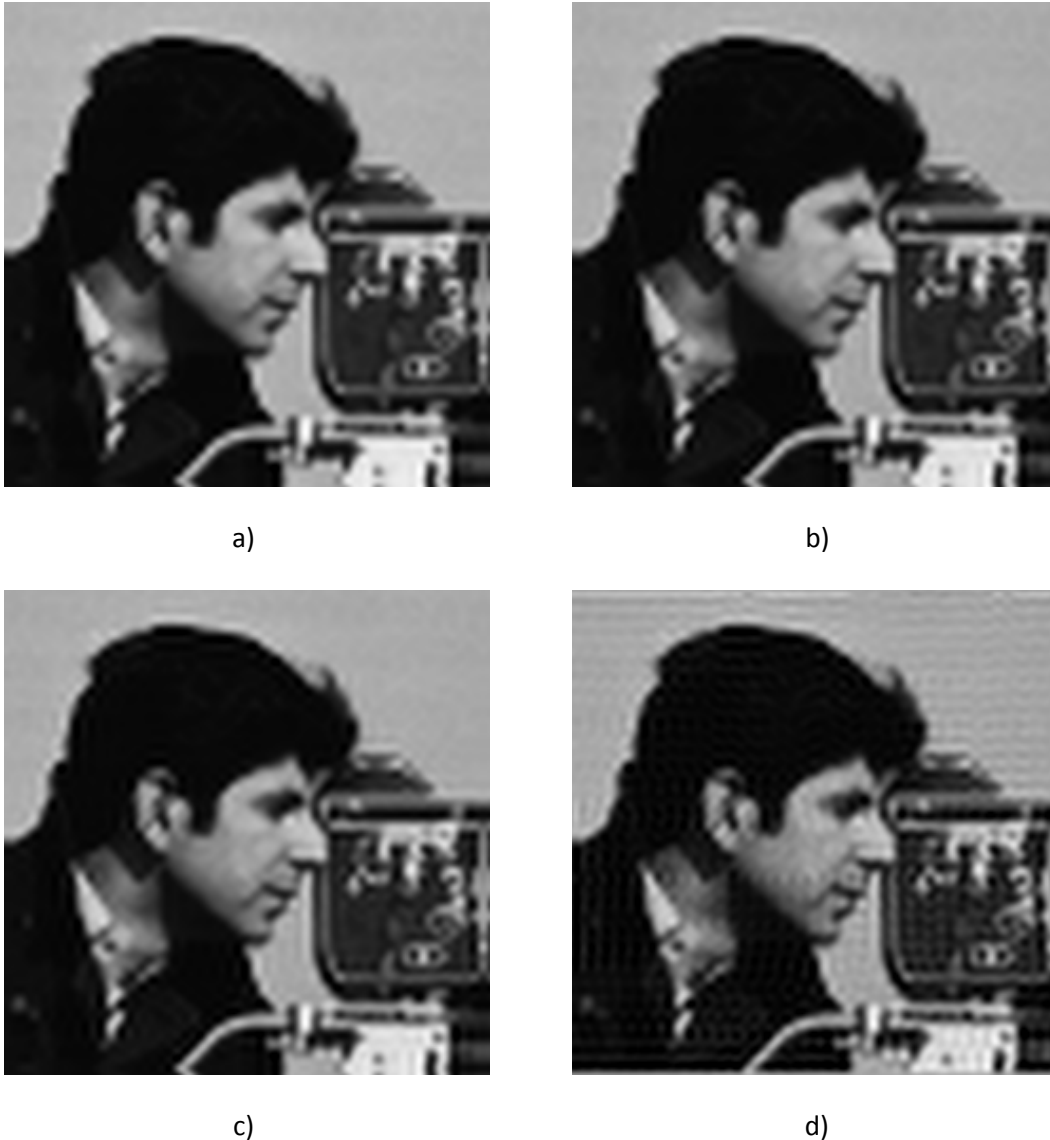


Figura 4.23. Zoom con diferentes kernels. a) B-spline cubico. b) B-spline de 5 orden.
c) B-spline de 7 orden d) Sinc Discreto.

Se puede observar que la calidad en la interpolación es muy similar excepto con las franjas que se hacen más presentes con la función Sinc Discreto y el B-spline de grado 7. Esto es debido al Ringing presente en las discontinuidades de la imagen, sin embargo, estas franjas no se pueden considerar un artificio de interpolación ya que cuando estas se hacen visibles, significa que se tiene mayor preservación de las muestras del espectro discreto [5], [6]. Pero esta preservación espectral no es lo mejor visualmente, así que también es importante determinar la calidad de interpolación mediante una examinación visual en vez de calcular un valor de algún tipo de error.

Ahora se muestra los resultados de interpolación con las funciones de Wendland usadas en este capítulo conforme se aumenta el soporte.

Primero se realiza la prueba con la función Wendland $\varphi_{1,1}$ con un Zoom de 4, los resultados para un soporte de 2, 4, 8 y 16 se muestran en la siguiente figura.



a)



b)



c)



d)

Figura 4.24. Zoom con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ para diferentes soportes. a) 2. b) 4. c) 8. d) 16.

Observamos que para un soporte de 2 la interpolación no es adecuada, esto es debido a lo no ideal de la banda de paso (el valor promedio es atenuado) el cual hace que la imagen resultante se vea oscura, por otro lado, al no contener los ceros en $\Omega = 2\pi k$ en la región de atenuación del filtro interpolador, se produce una malla en la imagen. Con un soporte de 4 se mejoran las características en la banda de paso y básicamente lo que se nota es el efecto de la ausencia de ceros $\Omega = 2\pi k$ del filtro interpolador. Para un soporte de 8 se minimizan estos dos efectos de tal

modo que ya no se logra observarlos. Con soporte de 16 la imagen resultante es de igual calidad a la de soporte 8, por lo tanto, se puede concluir que un soporte de 8 es adecuado.

Los resultados obtenidos con las funciones de Wendland $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$ se ilustran en las figuras 4.25 y 4.26 respectivamente, los cuales son similares a los de la función Wendland $\varphi_{1,1}$. Con un soporte de 8 se obtiene una interpolación adecuada mientras que con un soporte de 2 se obtienen los peores resultados. En la tabla 4.6 se resume las características típicas presentes en una imagen después de aplicarle un Zoom con un kernel de convolución.

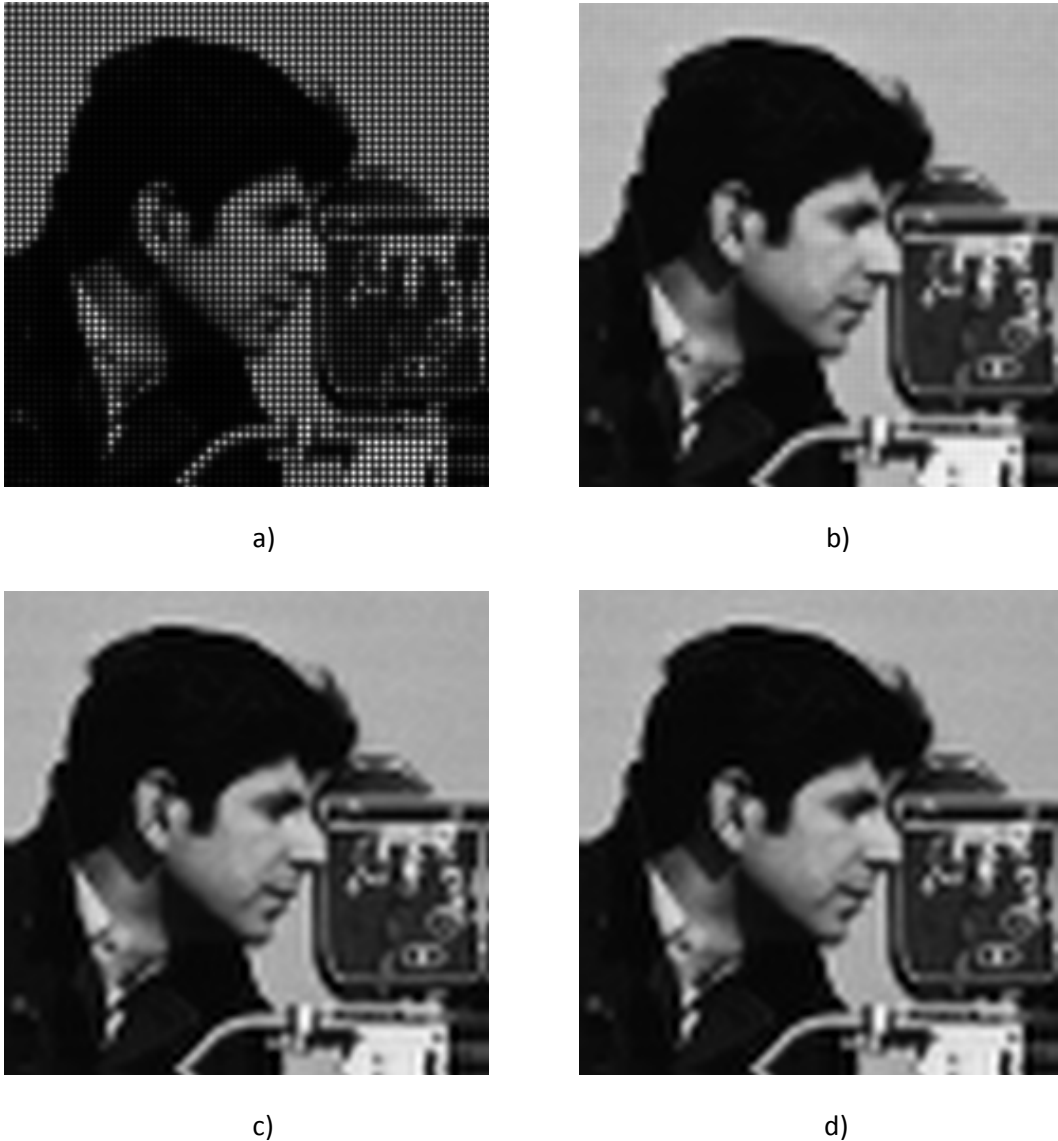


Figura 4.25. Zoom con la función de Wendland $\varphi_{1,2}$ para diferentes soportes. a) 2. b) 4. c) 8. d) 16.

Para un soporte de 8, los resultados con FBR son similares a los presentados con los B-splines, sin embargo, es difícil apreciar la correspondencia con las funciones de Wendland. Pero para apreciar esa correspondencia, se puede hacer una prueba con rotaciones sucesivas en una imagen de tal

manera que se compare la calidad de interpolación entre los B-splines y las funciones de Wendland; ésto se presentará en la siguiente sección sobre rotación de imágenes



a)



b)



c)



d)

Figura 4.26. Zoom con la función de Wendland $\varphi_{1,3}$ para diferentes soportes. a) 2. b) 4. c) 8. d) 16.

Para la función Gaussiana se presentan los resultados en la figura 4.27. Cuando $\varepsilon = 4$, se observan los mismos efectos presentados en las funciones de Wendland con soporte de 2, sin embargo, entre menor es su factor de escalamiento ε , se tendrá una interpolación de mejor calidad tal como lo indica el kernel de error. Sin embargo, a pesar de esa calidad, no es lo deseable debido al Ringing, tal como se observa para $\varepsilon = 0.5$ en la figura 4.27.b), por lo tanto se prefiere $\varepsilon = 1$ ya que su filtro interpolador tiene una región pasabanda aceptable - en el sentido que no atenúa las frecuencias en esa región de manera significativa- aparte de que para evitar un tiempo largo de computo durante en el proceso de interpolación se le puede aplicar una ventana de tamaño aceptable (tal como de $[-5,5]$).



Figura 4.27. Zoom con la función Gaussiana con una ventana de $[-10, 10]$. a) $\varepsilon = 4$. b) $\varepsilon = 0.5$.

Similarmente, para el QIM se elige una c de valor adecuado que tenga una banda de paso aceptable en su filtro interpolador y se aplique una ventana de procesamiento.

En la figura 4.28, se presentan los resultados para $c = 0.1$ y $c = 1$ con una ventana de $[-10, 10]$. Podemos apreciar una mejor calidad con $c = 1$ ya que con $c = 0.1$ se tiene mas Blurring ya que, conforme se disminuye c , el QIM se aproxima al kernel de la interpolación lineal que tiene como característica el Blurring [2].



Figura 4.28. Zoom con el QIM a una ventana de $[-10, 10]$. a) $c = 0.1$. b) $c = 1$.

En cuanto al Zoom, debido a que con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ se obtiene un buen resultado para un soporte de 8, por tanto, se puede desarrollar una estructura Farrow para realizar un Zoom

fraccionario. El filtro interpolador con estructura Farrow se puede desarrollar mediante la siguiente ecuación:

$$y(n + \mu) = \begin{bmatrix} \frac{-3\mu^4}{256} & \frac{\mu^3}{8} & \frac{\mu^2}{8} & \frac{\mu}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{15}{16} & \frac{3}{4} & -\frac{9}{16} & -3 & -\frac{9}{16} & \frac{3}{4} & \frac{15}{16} & 0 \\ \frac{9}{16} & -3 & -\frac{27}{8} & 0 & \frac{27}{8} & 3 & \frac{9}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -3 & -\frac{27}{8} & 0 & \frac{27}{8} & 3 & \frac{9}{8} & 0 \\ \frac{13}{256} & \frac{5}{16} & \frac{189}{256} & 1 & \frac{189}{256} & \frac{5}{16} & \frac{13}{256} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ c_{n+3} \\ c_{n+4} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Por ejemplo con un Zoom de 4.37 se obtiene el resultado ilustrado en la figura 4.29.a). Otra manera de realizar un zoom fraccionario es primero realizar un Zoom con el factor entero y después realizar el zoom fraccionario mediante la función Sinc Discreto. Por ejemplo para el caso de un zoom de 4.37 se descompone en $4 * 1.0925$, entonces se puede realizar primero el zoom de 4 con una función de base radial y después se realiza un zoom fraccionario de 1.0925 con la función Sinc Discreto. Por ejemplo para el caso de la función Gaussiana con $\varepsilon = 0.5$ y una ventana de $[-10,10]$, el resultado se ilustra en la figura 4.29.b).



Figura 4.29. Zoom fraccionario a 4.37 a) Función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 8 b) Función Gaussiana con $\varepsilon = 0.5$ y la función Sinc Discreto.

En la siguiente tabla se presenta los resultados que visualmente se presentan durante el proceso de Zoom en imágenes:

Gaussiana	Ringig	Blurring	Ausencia de ceros en $\Omega = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}_*$
$\varepsilon = 2$	No visible	Predominante	Predominante
$\varepsilon = 1$	visible	No visible	No visible
$\varepsilon = 0.5$	Predominante	No visible	No visible

QIM	Ringig	Blurring	Ausencia de ceros en $\Omega = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}_*$
$c = 0.1$	No visible	Predominante	No visible
$c = 1$	visible	No visible	No visible

Wendland $\varphi_{1,1}$	Ringig	Blurring	Ausencia de ceros en $\Omega = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}_*$
2	No visible	Predominante	Predominante
4	No visible	No visible	Moderado
8	visible	No visible	No visible
16	visible	No visible	No visible

Wendland $\varphi_{1,2}$	Ringig	Blurring	Ausencia de ceros en $\Omega = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}_*$
2	No visible	Predominante	Predominante
4	No visible	No visible	Moderado
8	visible	No visible	No visible
16	visible	No visible	No visible

Wendland $\varphi_{1,3}$	Ringig	Blurring	Ausencia de ceros en $\Omega = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}_*$
2	No visible	Predominante	Predominante
4	No visible	No visible	Moderado
8	Moderado	No visible	No visible
16	Moderado	No visible	No visible

Tabla 4.6. Características de interpolación resultantes después del Zoom.

4.3.1 Rotación de imágenes

Para obtener una imagen rotada se utiliza el algoritmo de tres pasos descrito en el capítulo 3 en donde el problema de interpolación es encontrar versiones desplazadas de sus filas y columnas durante los tres pasos en la rotación. Para una rotación de prueba de 45° , en la figura 4.30, se muestra el resultado para la función de Wendland $\varphi_{1,1}$. La figura 4.31 muestra los resultados para la función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ y una ventana de $[-10, 10]$ y el QIM con $c = 1$ y una ventana de $[-10, 10]$.



Figura 4.30. Rotación de $\theta = 45^\circ$ con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con un soporte de 8.



a)

b)

Figura 4.31. Rotación de $\theta = 45^\circ$ a) Función Gaussiana a $\varepsilon = 1$ con una ventana de $[-10, 10]$.
b) QIM a $c = 1$ y una ventana de $[-10, 10]$.

Observamos que en general todos ofrecen el mismo resultado visual de interpolación en la rotación de la imagen de prueba el cual es de buena calidad; también se obtiene resultados similares para las funciones de Wendland $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{2,2}$. Entonces podemos concluir que todas estas funciones son adecuadas para rotación de imágenes, simplemente se tiene que elegir adecuadamente el soporte o la ventana de truncación. Sin embargo podemos realizar un experimento haciendo rotaciones sucesivas a la imagen de tal manera que se verifique las diferencias en calidad de interpolación. Cada vez que se realiza una rotación, se le aplica un modelo continuo y se rota ese modelo continuo. Este proceso va atenuando altas frecuencias que definen ciertas características de la imagen debido a que la banda de paso del filtro interpolador

no es idealmente plana y además existe una región de transición, entonces después de varias rotaciones, estas características se irán perdiendo.

El siguiente experimento consiste en hacer 90 rotaciones sucesivas de 1° sobre la imagen "cameraman". Para apreciar fácilmente el resultado, la imagen es repositcionada.

De los interpoladores más usados es el Bicúbico, ya que ofrece visualmente un buen resultado con un costo computacional aceptable (no requiere el cálculo de los coeficientes c_k y su soporte es de 4). El resultado se ilustra en la siguiente figura:



Figura 4.32. Experimento de las rotaciones sucesivas con el interpolador Bicubico.

Claramente se observa el error acumulado en la imagen, pero si ese experimento lo realizamos con el B-spline cubico y con la función Sinc Discreto obtenemos los resultados ilustrados en la figura 4.33, los cuales presentan mejores resultados que el interpolador Bicubico.



a)

b)

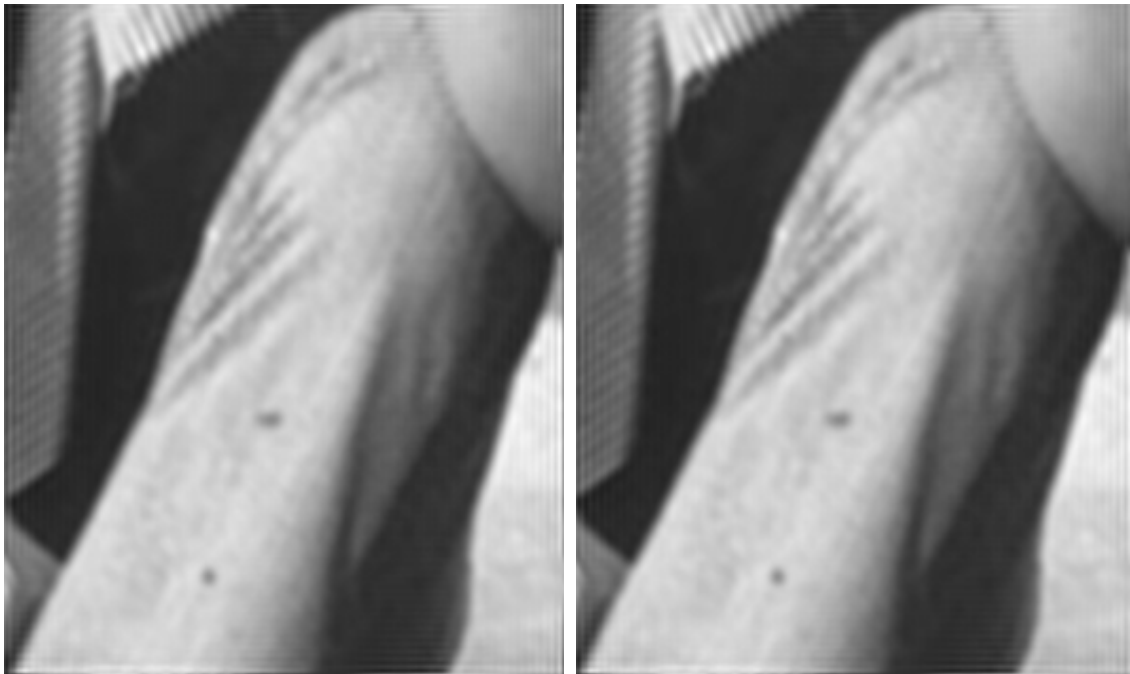
Figura 4. 33. Experimento de las rotaciones sucesivas.

a) B-spline cubico. b) La función Sinc Discreto.

Para ver en forma significativa las similitudes en la calidad de interpolación entre las funciones de Wendland y B-splines se utiliza como prueba la imagen de Barbara debido a que las rayas presentes en la imagen representan altas frecuencias que pueden ser perdidas significativamente durante el experimento de la rotación.

Se presentan los resultados a un Zoom de 2 de una sección de la imagen "Barbara". En la figura 4.34 para el B-spline cubico y la función de Wendland $\varphi_{1,1}$. En la figura 4.35 para el B-spline de orden 5 y la función de Wendland $\varphi_{1,2}$. En la figura 4.36 para el B-spline de orden 7 y la función de Wendland $\varphi_{1,3}$. Todas las funciones de Wendland fueron utilizadas con un soporte de 40.

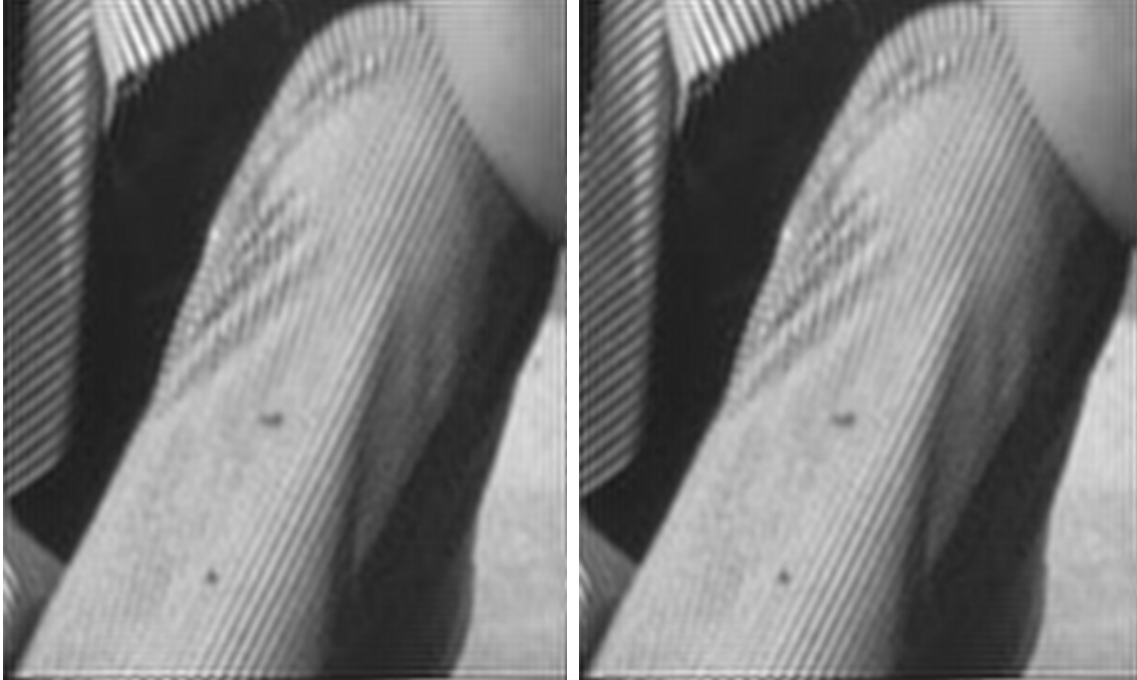
Se observa la igualdad en calidad visual de las funciones de Wendland con sus correspondientes B-splines tal como lo indica la tabla 4.6. Entonces podemos decir que entre mayor es el valor de k en $\varphi_{1,k}$, obtendremos una calidad de interpolación superior tal como sucede en los B-splines.



a)

b)

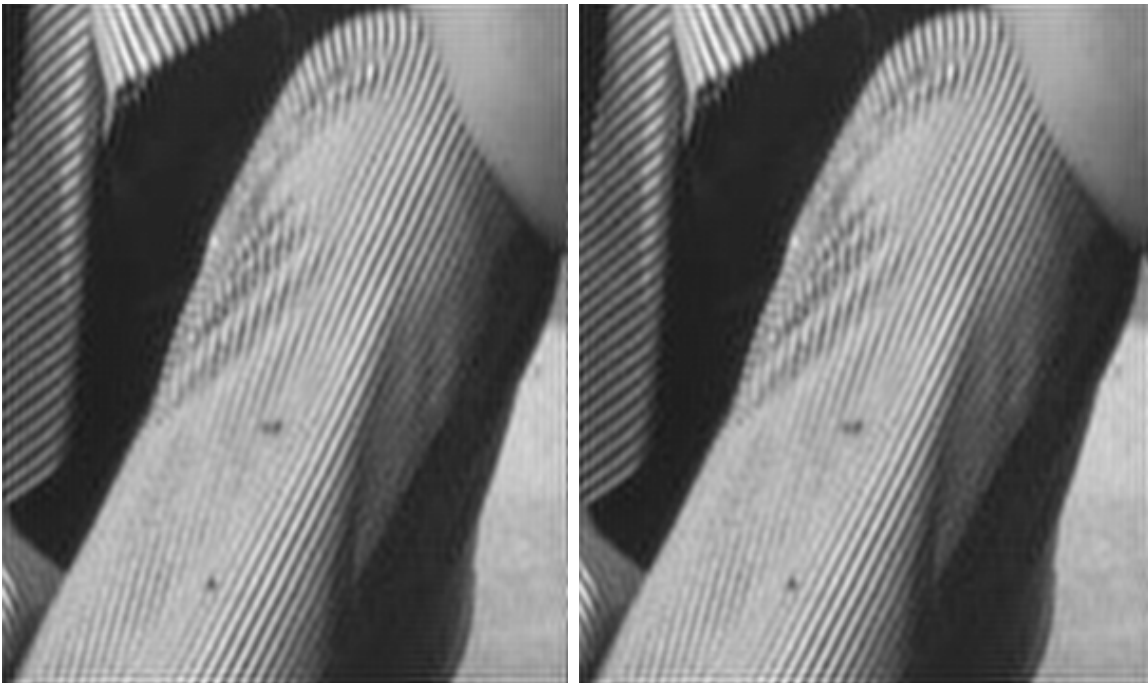
Figura 4.34. Experimento de las rotaciones sucesivas. a) B-spline cubico.
b) Función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 40.



a)

b)

Figura 4.35. Experimento de las rotaciones sucesivas. a) B-spline de orden 5.
b) Función de Wendland $\varphi_{1,2}$ con soporte de 40.



a)

b)

Figura 4.36. Experimento de las rotaciones sucesivas. a) B-spline de orden 7.
b) Función de Wendland $\varphi_{1,3}$ con soporte de 40.

4.2.3 Recuperación de una imagen en Tomografía Computarizada de Rayos Paralelos

Como se vió en la introducción, la reconstrucción depende fuertemente de la calidad del interpolador, así que también ésta, la reconstrucción, es una buena prueba para determinar la calidad de la aproximación. En la pruebas se utilizaron 180 proyecciones consecutivas espaciadas en 2° y la imagen de prueba que se utiliza es ilustrada en la figura 4.37. Esta imagen es conocida como la “head phantom” de Shepp y Logan y simula la sección transversal del cerebro. Esta es una imagen para ver la habilidad del algoritmo para reconstruir secciones transversales de la cabeza con tomografía de rayos paralelos.



Figura 4.37. Imagen de prueba “head phantom” de Shepp y Logan.

Como se indico en el capítulo de implementación, si utilizamos una versión truncada del filtro Rampa, se tiene que su espectro difiere del requerido haciéndose más obvia esta desviación en el origen del espectro afectando el nivel promedio de la imagen. Además al realizar la convolución discreta entre las muestras de una proyección y una versión discreta truncada del filtro Rampa, esta operación no es una representación exacta de contraparte continua [12]. Así que tal como se indicó en el capítulo de implementación, se opta con obtener una versión discreta del espectro del filtro rampa muestreándolo y después multiplicándolo con el espectro discreto de la proyección. Así por lo menos se tiene que las muestras del espectro de la proyección están adecuadamente filtradas. Sin embargo el espectro continuo asociado con esta versión discreta del espectro del filtro Rampa, puede diferir entre sus muestras del ideal, es decir, en las posiciones de las muestras corresponde al filtro rampa adecuado pero entre sus muestras puede existir desviaciones. Por lo tanto para minimizar este efecto se realiza una inserción de ceros en la proyección, después se realiza la interpolación y finalmente se realiza el filtrado con nuestra versión discreta del filtro Rampa, de tal manera que al tener una gran cantidad de muestras, la desviación del filtro Rampa continuo sea mínimo entre sus muestras. Los resultados en el caso de la funciones de Wendland son similares a los de zoom en imágenes en el que para un soporte de 2 se presentan los peores

resultados y para un soporte de 32 se obtiene una buena recuperación de la imagen de prueba. Se muestran los resultados para la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ (figura 4.38), la función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ y una ventana de $[-10, 10]$ (figura 4.39) y el QIM con $c = 1$ y una ventana de $[-10, 10]$ (figura 4.40).

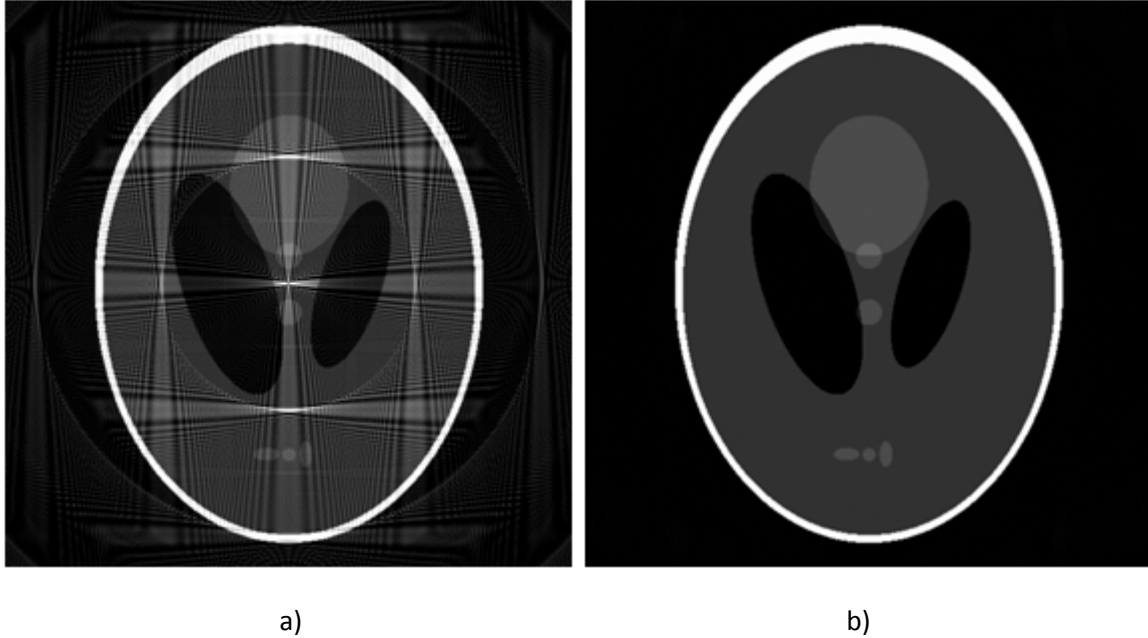


Figura 4.38. Reconstrucción con 360 proyecciones entre 0 a 179.5° en pasos de 0.5° con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soportes de a) 4 y b) 32.

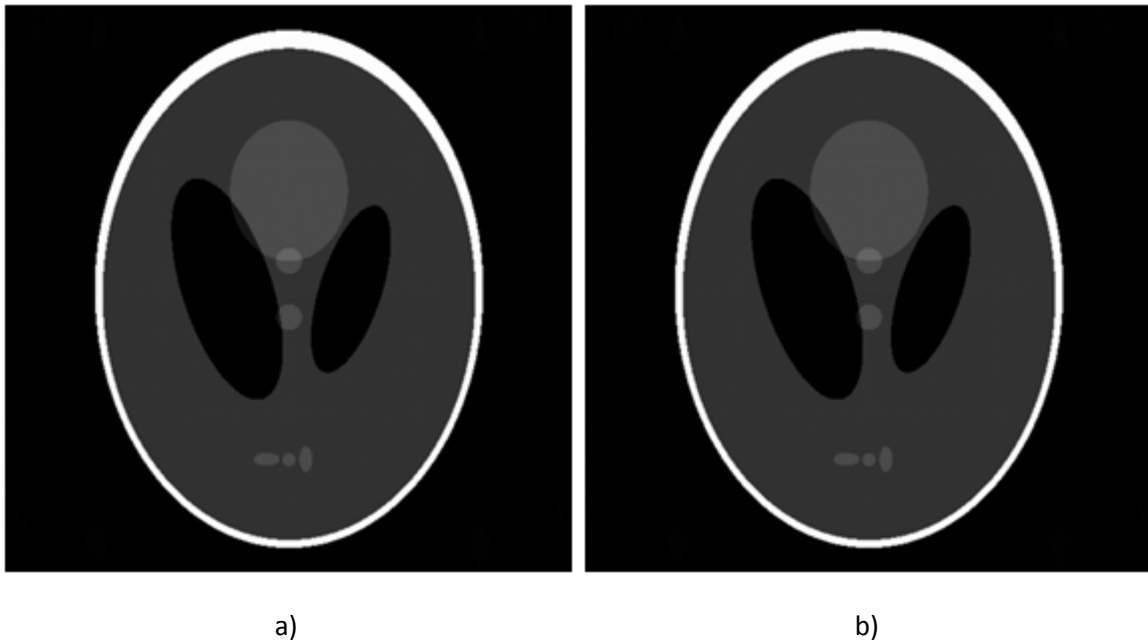


Figura 4.39. Reconstrucción con 360 proyecciones entre 0° a 179.5° en pasos de 0.5° con la función Gaussiana. a) $\varepsilon = 1$ y una ventana de $[-5, 5]$. b) $\varepsilon = 0.5$ y una ventana de $[-10, 10]$.

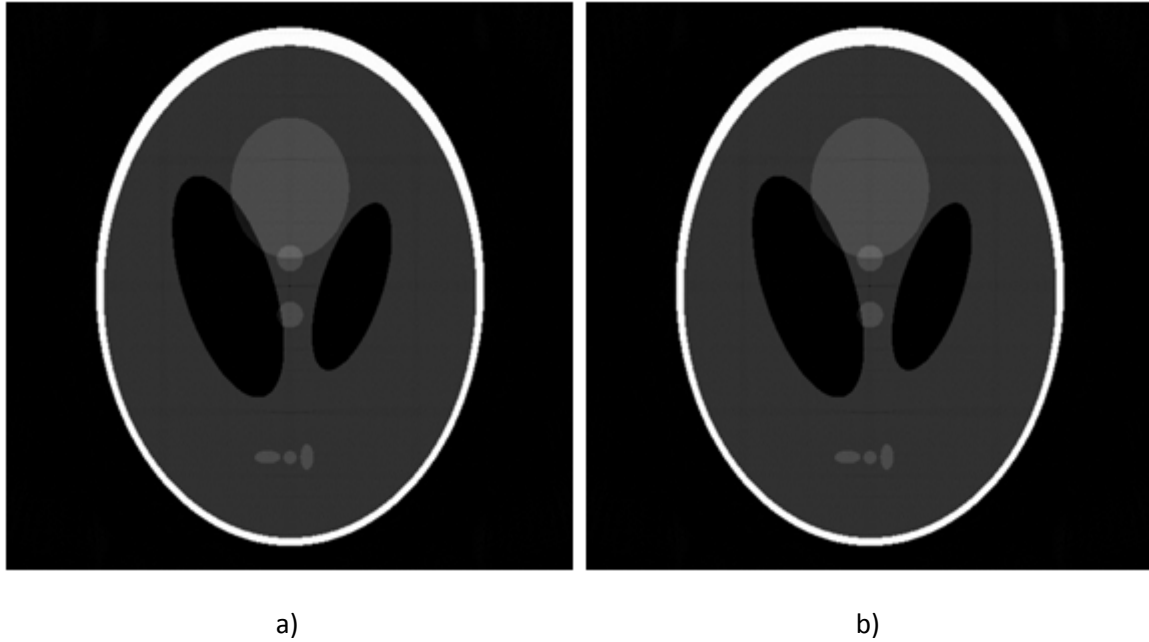


Figura 4.40. Reconstrucción con 360 proyecciones entre 0° a 179.5° en pasos de 0.5° con el QIM a $c = 1$. a) Ventana de $[-10,10]$. b) Ventana de $[-20,20]$.

Algo importante a observar es que para las aplicaciones de Zoom con las funciones de Wendland con soporte 4, la que presenta mejores resultados es la función $\varphi_{1,2}$. Esto se puede entender al observar diferentes filtros interpoladores presentados en las graficas 4.41 y 4.42, en donde se observa que el filtro interpolador correspondiente a la función de Wendland $\varphi_{1,2}$, es quien presenta mejores características.

Otro punto a observar en el caso de tomografía computarizada, es que se puede obtener una buena calidad de interpolación con $\varepsilon = 0.5$ para la función Gaussiana y con $c = 1$ para el QIM. Sin embargo la diferencia es que para el QIM se necesita una ventana mayor de truncación, $[-20,20]$, a comparación de la Gaussiana, $[-10,10]$ para no observar los efectos de truncación tal como se ilustra en la figuras 4.39.b y 4.40.b.

Pero además de necesitar una mayor ventana, se obtiene una menor calidad de interpolación con el QIM en comparación con la Gaussiana tal como se observa en las graficas de sus kernels de error en la figura 4.43.

Entonces, aunque se puedan obtener filtros interpoladores de diferente calidad al variar el parámetro de escalamiento, quien necesita un menor tamaño de ventana es la función Gaussiana y por lo tanto es más accesible en términos computacionales para implementarlo.

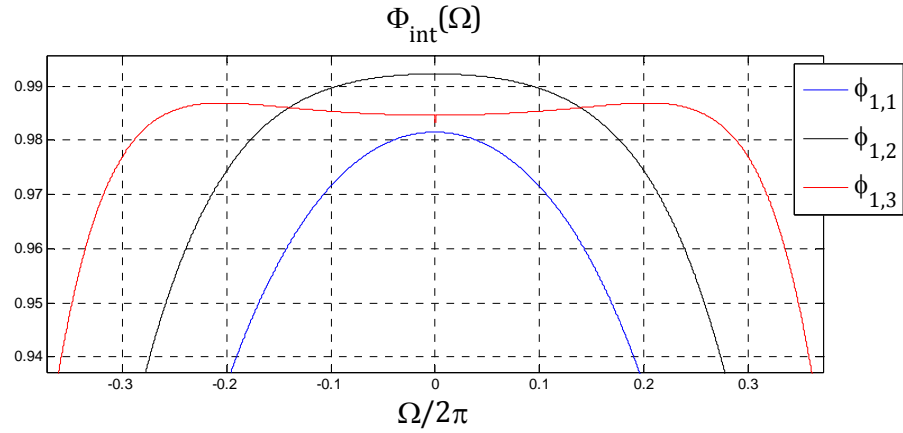


Figura 4.41. Espectros de las funciones de Wendland $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$ con un soporte de 4 en el rango $[-0.4, 0.4]$ de la frecuencia normalizada.

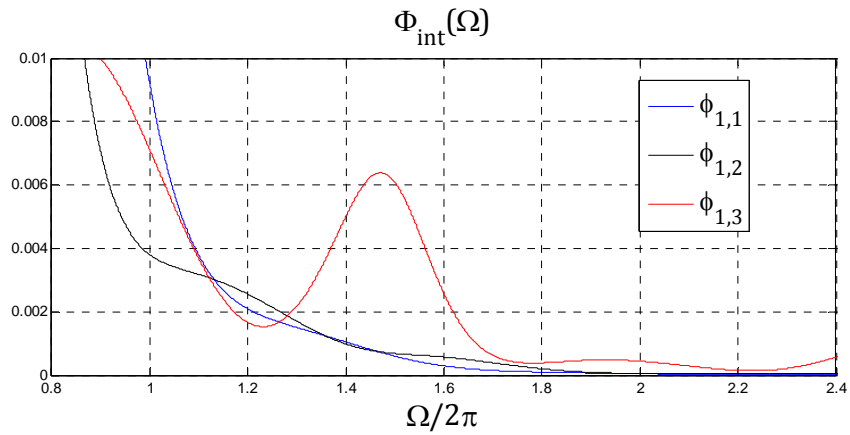


Figura 4.42. Espectros de las funciones de Wendland $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$ con un soporte de 4 en el rango $[0.8, 2.5]$ de la frecuencia normalizada.

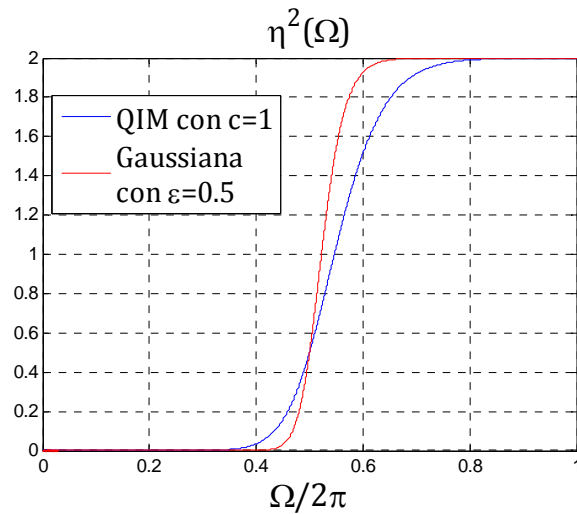


Figura 4.43. Kernels de error de las funciones Gaussiana con $\varepsilon = 0.5$ y QIM con $c = 1$

5. Conclusiones y trabajo futuro

5.1 Conclusiones

Durante el presente trabajo se usaron a las FBR como filtros interpoladores en 1 dimensión, se mostro que la estructura la interpolación con FBR en 1 dimensión es la misma que la dada por interpolación basado en convolución, en el caso de 2 dimensiones se utilizo la FBR en una dimensión y se aplico en un esquema de producto de tensores. Debido a que existen otros métodos de interpolación, se utilizo un método de comparación basado en el error cuadrático medio pero tomando en cuenta la fase de la señal durante el muestro. Con la adición de la fase se obtiene una función en el dominio de la frecuencia llamada kernel de error $\eta^2(\Omega)$ el cual determina el valor del error cuadrático medio.

El kernel de error describe apropiadamente, en una forma grafica, las características de aproximación de los B-splines y de la función Sinc. Se observó además que el kernel de error muestra la convergencia hacia la función Sinc que tienen los B-splines conforme se aumenta su orden. Se concluyó que este método de comparación es el adecuado para analizar las FBR usadas en este trabajo como filtros interpoladores.

Para el caso de las funciones de Wendland de soporte compacto, las funciones usadas para un soporte pequeño presentaron que $\eta^2(0) \neq 0$ a diferencia de los B-splines. Esta característica implica que aunque el muestreo se aumente, el error cuadrático medio no disminuirá manteniéndose constante. Por lo tanto se concluye que estas funciones no poseen un orden de aproximación como kernels de convolución para un soporte fijo. En el marco teórico se presenta que para que un kernel de convolución tenga mínimo un orden de aproximación de 1, debe por lo menos reproducir funciones constantes. Esta característica hace que el kernel de error en $\Omega = 0$ sea cero, por lo tanto las funciones de Wendland no pueden reproducir funciones constantes pese a que están formados por polinomios o mas generalmente no pueden reproducir el valor promedio de alguna señal.

Esto se verifica al realizar la interpolación de un conjunto de muestras de una función constante y Gaussiana, en donde en los resultados se observa oscilaciones y este efecto se aprecia directamente de la forma de su filtro interpolador. Como es sabido, durante el proceso de muestreo de una señal, se originan replicas de sus espectros posicionadas en múltiplos de la frecuencia de muestreo. En el caso de los B-splines, si nosotros queremos aplicar su filtro interpolador correspondiente, por lo menos no existirá error debido al valor promedio de la señal, esto porque cualquier B-spline contiene ceros en su espectro en $\Omega = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}_*$, y por consiguiente también su filtro interpolador, entonces durante la aplicación de su filtro para eliminar las replicas, por lo menos eliminara el "valor promedio" de las replicas y esto no causara interferencia con la señal recuperada.

Sin embargo en el caso de las funciones de Wendland, su espectro no posee tales ceros y se ve, por ejemplo en la recuperación de una función constante, oscilaciones debido a funciones cosenos

originados por los valores promedios de las replicas que no fueron eliminados correctamente por el filtro interpolador. Por lo tanto se concluye que las funciones de Wendland no puede recuperar constantes en forma adecuada debido a que no posee ceros en su espectro en $\Omega = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}_*$. Estos ceros precisamente hacen que $\eta^2(0) = 0$.

A pesar de lo anterior, conforme se aumenta el soporte de las funciones de Wendland, el valor de $\eta^2(0)$ tiende a disminuir, además se observa que $\eta^2(\Omega)$ tiende a una forma fija. Más exactamente se observa que el kernel de error de una función Wendland $\varphi_{s,k}$ tiende al kernel de error de un B-spline β^{2k+1} . Pero debido a que $\eta^2(\Omega)$ está en función del espectro del filtro interpolador, entonces lo que se observa es una convergencia de los filtros interpoladores de las funciones de Wendland y B-splines, todo esto en 1 dimensión. Por lo tanto se concluye que la calidad de interpolación de una función Wendland $\varphi_{s,k}$ será prácticamente igual al de un B-spline β^{2k+1} para un soporte grande. Para el caso de $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$ con un factor de escalamiento de 20 se obtuvo esa similitud de sus filtros interpoladores con el de los B-splines.

En el caso de la función Gaussiana también presenta $\eta^2(0) \neq 0$ para valores de ε grandes y por lo tanto no presenta un orden de convergencia. Sin embargo también conforme se disminuye ε , el valor de $\eta^2(0)$ disminuye, además el kernel de error tiende al de la función Sinc. La característica importante es que para $\varepsilon \leq 1$, el valor de $\eta^2(0)$ es muy pequeño y en el momento de realizar una interpolación, su efecto es despreciable pero también suponiendo que se tiene una ventana lo suficientemente grande de truncación. Por lo tanto para propósitos prácticos, se concluye que para valores $\varepsilon \leq 1$, se puede asumir que $\eta^2(0) = 0$ para una ventana de truncación lo suficientemente grande y se pueden obtener diferentes filtros interpoladores con una calidad de interpolación que se va mejorando y que tiende al de la función Sinc conforme se disminuye ε .

Con el QIM se observó que $\eta^2(0) = 0$, esto es porque tiene la capacidad de reproducir funciones lineales y por lo tanto funciones constantes. Esto también se puede entender ya que su espectro contiene el espectro del B-spline de orden 1, por lo tanto el espectro del QIM tiene ceros en $\Omega = 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}_*$. Además conforme se aumenta el valor de c , su kernel de error presenta convergencia al kernel de la función Sinc al igual que la Gaussiana, por lo tanto también se obtienen diferentes filtros interpoladores con calidad que va aumentando y convergiendo al de la función Sinc conforme se aumenta el valor de c .

Además como se indico en el marco teórico, el B-spline de orden 1 tiene un orden de aproximación de 2 y por lo tanto este es el mínimo orden de aproximación que se puede tener. Sin embargo la principal dificultad es su soporte global, implicando que cuando se quiera implementar, se debe realizar una truncación. Esta truncación es una convolución en el dominio de la frecuencia entre el espectro de la ventana y el espectro del QIM, por lo tanto el espectro resultante tendrá un valor diferente de cero en $\Omega = 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}_*$ perdiendo así sus propiedades de aproximación. Entonces se concluye que aunque teóricamente el QIM presenta buenas características de aproximación, debido a la truncación necesaria para poder implementarlo, perderá sus propiedades de aproximación implicando que presentara los mismos

problemas que las funciones de Wendland y la Gaussiana. Sin embargo se puede minimizar siempre y cuando se tenga una ventana lo suficientemente grande.

Con respecto a la implementación, las funciones de Wendland debido a su forma polinómica, deja una forma natural para implementarlo en forma de un filtro digital con la estructura Farrow, de esta forma se pueden tener Zooms fraccionarios al igual que desplazamientos fraccionarios con facilidad. En el caso de un Zoom fraccionario con la función Gaussiana y el QIM primero se puede realizar un Zoom correspondiente al valor entero mediante un filtro digital con estructura polifásica y después se puede utilizar la función Sinc Discreto para realizar el Zoom con la parte fraccionaria.

En las aplicaciones, en el caso del Zoom en imágenes, se aprecian claramente los efectos de que el espectro del filtro interpolador no tenga ceros en múltiplos de 2π para las funciones de Wendland con un soporte de 2 y 4. Sin embargo con un soporte de 8 aunque estas oscilaciones persisten, ya no son visibles. Para las función Gaussiana, aparte de que se tiene una buena calidad de interpolación para $\varepsilon = 1$, conforme ε disminuye no se observa un gran cambio en la calidad pero si se observa mas Ringing. Lo mismo ocurre para el QIM.

Con rotación de imágenes se obtuvo buenos resultados con un soporte de 8 para las funciones de Wendland que se usaron en esta tesis. Al igual con $\varepsilon = 1$ con la función Gaussiana y $c = 1$ con el QIM.

Con el propósito de verificar las calidades de interpolación estimadas de las funciones de Wendland usadas y compararlas con los B-splines, se realizó un experimento en donde se aplicaron rotaciones sucesivas a la imagen de prueba Barbara, que contiene altas frecuencias espectrales, para ver su comportamiento en el espectro. Las imágenes resultantes aplicando las funciones de Wendland resultaron idénticas a las obtenidas con los B-splines reafirmando lo indicado sobre la similitud entre estas funciones.

En tomografía con rayos paralelos, se considera que un soporte de 8 es adecuado para el caso de las funciones $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$ de Wendland para una buena recuperación de la imagen. Pero con $\varphi_{1,1}$ es necesario un soporte de 16 debido a que se aprecian los efectos de la ausencia de ceros en su filtro interpolador con un soporte de 8.

Para la función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ y 0,5 y ventanas de $[-5,5]$ y $[-10,10]$ respectivamente se obtuvieron buenos resultados. El QIM con $c = 1$ resulto adecuado con una ventana de $[-20,20]$ ya que con valores menores se observa efectos de la truncación del QIM. El punto a denotar es que con la función Gaussiana se puede obtener una mejor calidad de interpolación con una ventana menor a comparación del QIM y esto se puede verificar comparando sus kernels de error y con los resultados. Por lo tanto se puede concluir, que a pesar de que se pueden obtener filtros interpoladores de calidad variable con la función Gaussiana y el QIM, es la función Gaussiana la que necesita menor ventana para una calidad similar de interpolación, por lo tanto exige menos costo computacional y es más apropiada para implementarla.

En general, las funciones de Wendland usadas como filtros interpoladores no representan alguna ventaja debido a que presentan la misma calidad de interpolación que los B-splines, además esto es con un soporte grande, por lo tanto con mayor costo computacional el cual los hace ineficientes. En forma similar es con la función Gaussiana o con el QIM, aunque se pueda obtener filtros con alta calidad, esto se puede dar con una ventana de truncación demasiado grande. Por lo tanto si se desea una alta preservación espectral, la mejor opción es con la función Sinc Discreto.

5.2 Trabajo futuro

En lo que respecta a futuros trabajos, debido a que se utilizó un método gráfico de análisis, es de interés verificar estos resultados en forma matemática tal como se ha realizado con la función Gaussiana en la demostración de la convergencia de la calidad de interpolación hacia el de la función Sinc en los trabajos [22] y [23].

También es de interés encontrar un kernel que sea válido como función de base radial de soporte compacto como las funciones de Wendland pero que puedan reproducir polinomios en 1 dimensión de acuerdo al grado del polinomio que tengan y de esa manera puedan tener algún orden de aproximación tal como el caso de los B-splines; todo esto mediante algún método de construcción tal como fue indicado en el marco teórico u otro más general [8], el cual incluiría pruebas en problemas con datos dispersos para su validación. Esto con un soporte que sea moderado ya que si es muy grande al utilizarse como kernel de convolución va a requerir mucho tiempo de cómputo, de igual manera si se resuelve el problema en forma matricial con el problema adicional de hacerse singular la matriz [8].

Lista de Figuras

Figura 1.1. Proyección de $P_\theta(t)$ de un objeto $f(x, y)$	6
Figura 1.2. Teorema de la Proyección.....	7
Figura 1.3. Reconstrucción de una Sección transversal de un cubo	9
Figura 1.4. Dos diferentes problemas de interpolación en tomografía computarizada a) Retroproyección de muestras de $g(t, \theta)$. b) Distribución de las muestras radiales de $P(t, \theta)$ en el plano cartesiano.....	10
Figura 2.1. Esquema cardinal de interpolación basado en convolución.....	13
Figura 2.2. Ejemplo de una función $g(x)$ formada por kernels lineales.....	13
Figura 2.3. Esquema general de interpolación basada en convolución y su versión cardinal.	16
Figura 2.4. Función $g(x)$ formado por funciones φ de soporte compacto de 4.	17
Figura 2.5. Esquema de una recuperación aproximada de $f(x)$ a partir de sus muestras.	18
Figura 2.6. Kernel rectangular y su filtro interpolador.....	19
Figura 2.7. Kernel lineal y su filtro interpolador.....	20
Figura 2.8. Kernel cubico y su filtro interpolador.....	20
Figura 2.9. B-splines de grado $M = 3$ y 4.	23
Figura 2.10. Filtros interpoladores correspondientes a los B-splines de grado $M = 3, 5, 7$ y 30.....	23
Figura 2.11. Señal $f(x - u)$ muestreada a un paso T	24
Figura 2.12. Efecto de la fase de muestreo en las versiones	25
Figura 2.13. Kernel de error de la función Sinc y algunos B-splines.	29
Figura 2.14. Kernel de error de la función Sinc y el interpolador cubico.....	29
Figura 2.15. Variación del kernel de error del B-spline cubico en relación a T	30
Figura 2.16. Proceso de obtención de nuevas muestras mediante una convolución discreta.....	33
Figura 2.17. Espectro de $f(n)$	34
Figura 2.18. Espectro de $f_u(n)$	34
Figura 2.19. Supresión de replicas por medio de $H(\omega)$	35
Figura 2.20. Ejemplo de modificación de las muestras iniciales de $f(n)$	35
Figura 2.21. Ejemplo de preservación de las muestras iniciales de $f(n)$	36
Figura 2.22. Filtrado de $f_u(n)$ con $h(n) = \text{sinc}(\pi[n - 30]/3)$ en el dominio de la transformada discreta de Fourier	36
Figura 2.23. Función Sinc Discreto para $N = 51$	38
Figura 2.24. Función $g(x)$ formada a partir de 11 muestras con.....	38
Figura 2.25. Función Gaussiana de base radial con $\varepsilon = 1$	40
Figura 3.1. Secuencia con tendencia lineal.	46
Figura 3.2. Interpolación de una secuencia Lineal de 11 muestras.	47
Figura 3.3. Interpolación con $L = 10$ de una secuencia lineal de 101 muestras.....	47
Figura 3.4. Extensión simétrica de una secuencia Lineal de 11 muestras.	48
Figura 3.5. Interpolación de la extensión simétrica de una secuencia Lineal de 11 muestras.	48
Figura 3.6. Interpolación de una secuencia con discontinuidades.	49
Figura 3.7. a) Imagen de escala a grises b) Magnitud de su respectivo espectro.....	49
Figura 3.8. Espectro de la figura 3.7.a después de un Upsampling de 2.....	50

Figura 3.9. Recuperación de $f(m, n)$ via filtrado de las Columnas y filas de $c(k, l)$ con $\beta^3(n)$	53
Figura 3.10. Estructura polifásica para $L = 3$.Estructura polifásica traspuesta para $L = 3$	55
Figura 3.11. Dos sistemas equivalentes (segunda identidad noble).....	56
Figura 3.12. Sistema de interpolación usando una estructura polifásica	56
Figura 3.13. Estructura Farrow para el B-spline cubico.	57
Figura 3.14. Proceso de rotación de una imagen en tres pasos.	59
Figura 3.15. Efectos de no suficiente espacio en el proceso de convolución circular.	60
Figura 3.16. Efectos de la discontinuidad en el origen de la transformada de Fourier	61
Figura 3.17. Efectos de la truncación del filtro h_{ramp} en su espectro.....	63
Figura 3.18. Problema de interpolación en el asignamiento de muestras de	63
Figura 3.19. Problema de interpolación en el asignamiento de muestras	64
Figura 4.1. Kernels de error de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ para soportes de 4, 40 y 400.	67
Figura 4.2. Kernels de error de la función Gaussiana para $\varepsilon = \{2, 1, 0.5, 0.01\}$	68
Figura 4.3. Kernels de error del QIM para $c = \{1, 10, 50, 100\}$	69
Figura 4.4. Transformada de Fourier de una constante y su versión muestreada a $T = 1$	70
Figura 4.5. Proceso de interpolación mediante $X(\Omega) \times Sinc(\Omega/2)$	70
Figura 4.6. Filtro interpolador de la función Wendland $\varphi_{1,1}$ con un soporte de 4.....	71
Figura 4. 7. Replicas del espectro de la función constante no eliminadas por el	72
Figura 4.8. Reproducción de una función constante con.....	72
Figura 4.9. Reproducción de la función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ con	72
Figura 4.10. Reproducción de la función seno con $\omega_0 = 2\pi$ con la	73
Figura 4.11. Reproducción de la función Gaussiana a $\varepsilon = 1$ con el B-spline cubico.	73
Figura 4.12. Espectro del filtro interpolador del B-spline cubico.....	74
Figura 4.13. Aproximación de la función constante por medio	74
Figura 4.14. Kernels de error de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con.....	75
Figura 4.15. Filtros de la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 200 y del B-spline cubico.....	76
Figura 4.16. Filtros de la función de Wendland $\varphi_{1,2}$ con soporte de 200 y del B-spline de orden 5.....	76
Figura 4.17. Filtros de la función de Wendland $\varphi_{1,3}$ con soporte de 200 y del B-spline de orden 7.....	76
Figura 4.18. Reproducción de la función Gaussiana a $\varepsilon = 1$ con la función Wendland $\varphi_{1,1}$	77
Figura 4.19. Espectro del filtro interpolador de la función Gaussiana con $\varepsilon = 0.09$	78
Figura 4.20. Espectro del filtro interpolador del QIM con $c = 100$	78
Figura 4.21. Imagen de Barbara de 512X512 pixeles.	79
Figura 4.22. Imagen de prueba Cameraman a) 256X256 pixeles b) 64X64 pixeles.	79
Figura 4.23. Zoom con diferentes kernels. a) B-spline cubico. b) B-spline de 5 orden.....	80
Figura 4.24. Zoom con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ para diferentes soportes. a) 2. b) 4. c) 8. d) 16.....	81
Figura 4.25. Zoom con la función de Wendland $\varphi_{1,2}$ para diferentes soportes. a) 2. b) 4. c) 8. d) 16.....	82

Figura 4.26. Zoom con la función de Wendland $\varphi_{1,3}$ para diferentes soportes. a) 2. b) 4. c) 8. d) 16.....	83
Figura 4.27. Zoom con la función Gaussiana con una ventana de $[-10, 10]$. a) $\varepsilon = 4$. b) $\varepsilon = 0.5$	84
Figura 4.28. Zoom con el QIM a una ventana de $[-10,10]$. a) $c = 0.1$. b) $c = 1$	84
Figura 4.29. Zoom fraccionario a 4.37 a) Función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 8 b) Función Gaussiana con $\varepsilon = 0.5$ y la función Sinc Discreto.....	85
Figura 4.30. Rotación de $\theta = 45^\circ$ con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con un soporte de 8.....	87
Figura 4.31. Rotación de $\theta = 45^\circ$ a) Función Gaussiana a $\varepsilon = 1$ con una ventana de $[-10, 10]$. b) QIM a $c=1$ y una ventana de $[-10,10]$	87
Figura 4.32. Experimento de las rotaciones sucesivas con el interpolador Bicubico.....	88
Figura 4. 33. Experimento de las rotaciones sucesivas a) B-spline cubico. b) La función Sinc Discreto.....	88
Figura 4.34. Experimento de las rotaciones sucesivas. a) B-spline cubico. b) Función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 40.....	89
Figura 4.35. Experimento de las rotaciones sucesivas. a) B-spline de orden 5. b) Función de Wendland $\varphi_{1,2}$ con soporte de 40.....	90
Figura 4.36. Experimento de las rotaciones sucesivas. a) B-spline de orden 7. b) Función de Wendland $\varphi_{1,3}$ con soporte de 40.....	90
Figura 4.37. Imagen de prueba "head phantom" de Shepp y Logan.....	91
Figura 4.38. Reconstrucción con 360 proyecciones entre 0 a 179.5° en pasos de 0.5° con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$ con soportes de a) 4 y b) 32.....	92
Figura 4.39. Reconstrucción con 360 proyecciones entre 0° a 179.5° en pasos de 0.5° con la función Gaussiana. a) $\varepsilon = 1$ y una ventana de $[-5,5]$. b) $\varepsilon = 0.5$ y una ventana de $[-10,10]$	92
Figura 4.40. Reconstrucción con 360 proyecciones entre 0° a 179.5° en pasos de 0.5° con el QIM a $c = 1$. a) Ventana de $[-10,10]$. b) Ventana de $[-20,20]$	93
Figura 4.41. Espectros de las funciones de Wendland $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$ con un soporte de 4.....	94
Figura 4.42. Espectros de las funciones de Wendland $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$ y $\varphi_{1,3}$ con un soporte de 4.....	94
Figura 4.43. Kernels de error de las funciones Gaussiana con $\varepsilon = 0.5$ y QIM con $c = 1$	94

Lista de Tablas

Tabla 1.1. Funciones de Wendland validas de 1,3 y 5 dimensiones.	43
Tabla 1.2. Funciones Wu validas de 1,3 ,5 y 7 dimensiones.	43
Tabla 4.1.Valores en $\Omega = 0$ de los Kernels de error de la.....	68
Tabla 4.2.Valores en $\Omega = 0$ de los Kernels de error de la.....	68
Tabla 4.3. Valores del error cuadrático medio resultantes de la interpolación con la función Wendland $\varphi_{1,1}$ con soporte de 4 a una función Gaussiana con $\varepsilon = 1$ y una ventana de $[-30,30]$ a diferentes pasos de muestreo.	73
Tabla 4.4. Valores mínimos de la función constante reproducida con la función de Wendland $\varphi_{1,1}$	75
Tabla 4.5. Lista de funciones de Wendland junto con los respectivos.....	77
Tabla 4.6. Características de interpolación resultantes después del Zoom.....	86

Bibliografía

- [1] M. Unser, "Sampling-50 Years after Shannon", Proceedings of the IEEE, Vol. 88, no. 4, pp. 569-587, April 2000.
- [2] P. Thevenaz, T. Blu y M. Unser, "Image Interpolation and resampling" en Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis, I. N. Bankman, Ed., pp. 393-420, Academic Press, San Diego Calif., USA, 2000.
- [3] M. Unser "Splines: a perfect fit for signal an image processing", Signal Processing Magazine, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.
- [4] S. K. Park y R. A. Showengerdt, "Image Sampling, Reconstruction, and the Effect of Sample-Scene Phasing", Applied Optics, vol. 21, no. 17, pp. 3142-3151, 1982.
- [5] A. Gotchev, Karen Egiazarian y T. Saramäki "Image interpolation by optimized spline-based kernels" en Advances in Signal Transforms, Theory and Applications, EURASIP book series on Signal processing and Communications, Volume 7, J. Astola y L. Yaroslavsky, Ed., pp. 285-332, Hindawi Publishing, New York, USA, 2007.
- [6] L. Yaroslavsky "Fast discrete sinc-interpolation: a gold standard for image resampling" en Advances in Signal Transforms, Theory and Applications, EURASIP book series on Signal processing and Communications, Volume 7, J. Astola y L. Yaroslavsky, Ed., pp. 337-407, Hindawi Publishing, New York, USA, 2007.
- [7] E. H. W. Meijering "A Chronology of Interpolation From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing", Proceedings of the IEEE, vol. 90, no. 3, pp. 319-342, March 2002.
- [8] G. E. Fasshauer "Meshfree Approximations Methods with Matlab", Interdisciplinary Mathematical Sciencies-Vol. 6, World Scientific, USA, 2007.
- [9] M. D. Buhmann "Radial Basis Functions: Theory and Implementations", Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics" Cambridge University Press", USA, 2003.
- [10] B. P. Lathi "Linear Systems and Signals", Second Edition, Oxford University Press, USA, 2005.
- [11] Li Tan "Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications" Elsevier, USA, 2008.
- [12] L. Yaroslavsky "Digital Holography and Digital Image Processing: Principles, Methods, Algorithms", Kluwer Academic Publishers Optics, USA, 2004.
- [13] Jiang Hsieh "Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts and Recent Advances", Spie Press, USA, 2003.
- [14] Alasdair McAndrew "Introduction to Digital Image Processing with Matlab", Thomson Course Technology, USA, 2004.

-
- [15] M. Unser, P. Thevenaz y L. Yaroslavsky "Convolution based Interpolation for Fast, High Quality Rotation of Images" IEEE Transactions on Image Processing, vol. 4, no. 10, pp. 1371-1381, October 1995.
- [16] M. Unser, A. Aldroubi, y M. Eden. "B-Spline Signal Processing: Part I-Theory" IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 2, pp. 821-832, February 1993.
- [17] M. Unser, A. Aldroubi, y M. Eden. "B-Spline Signal Processing: Part II-Theory" IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 2, pp. 834-848, February 1993.
- [18] E. H. W. Meijering, W. J. Niessen y M. A. Viergever "Quantitative Evaluation of Convolution-Based Methods for Medical Image Interpolation", Medical Image Analysis, vol. 5, no. 2, pp. 111-126, June 2001.
- [19] R. W. Shafer y L. R. Rabinerr "A Digital Signal Approach to Interpolation", Proceedings of the IEEE, Vol. 61, no. 6, pp. 692-702, June 1973.
- [20] E. H. W. Meijering, W. J. Niessen y M. A. Viergever "The Sinc-Approximating kernels of Classical Polynomial Interpolation", IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'99), IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA ,vol. 3, pp. 652-656, June 1999.
- [21] B. Boulet "Fundamentals of Singals and Systems", Da Vinci Engineering series, Charles River Media 2006, USA, 2004.
- [22] S. D. Riemenschneider y N. Sivakumar, "Gaussian Radial Basis Functions: cardinal interpolation of L_p and power-growth data" Advances in Computational Mathematics, vol. 11, pp. 229-251. 1999.
- [23] B. J. C. Baxter y N. Sivakumar "On shifted cardinal interpolation by Gaussians and Multiquadrics". East Journal on Approximations, vol. 7, pp. 485-514. 2001.
- [24] S. K. Mitra "Digital Signal Processing" A Computer-Based Approach , Third Edition, Mc Graw Hill, USA, 2006.
- [25] J. G. Proakis "Digital Signal Processing" Principles, Algorithms, and Applications , Four Edition, Prentice Hall, USA, 2007
- [26] A. C. Kak y M. Slaney "Principles of Computerized Tomographic Imaging" Classics in Applied Mathematics, SIAM, USA, 2001.
- [27] D. Kincad y W. Cheney ""Numerical Analysis" Books/Cole Publishing Company, USA, 1991.
- [28] R. L. Allen y D. W. Mills "Signal Analysis " Time, Frecuency, Scale and Structure, John Wiley δ Sons, Inc, Publication, USA, 2004.
- [29] R. H. Bartels, J. C. Beatty y B. A. Barsky "An introduction to Splines for use in Computer Graphics δ Geometric Modeling ". Morgan Kaufmann Publishers, USA, 1987.

- [30] J. C. Carr, R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. MacClum y T. R. Evans "Reconstruction and Representation of 3D objects with Radial Basis Functions" en Computer Graphics (SIGGRAPH 2001 proceedings), pp. 67-76, August 2001.
- [31] B. Morse, T. S. Yoo, P. Rheingans, D. T. Chen, R. Subramanian "Interpolating Implicit Surfaces From Scattered Surface Data Using Compactly Supported Radial Basis Functions", Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI '01), pp. 89-98, IEEE, 2001.
- [32] S. R. Deans "The Radon Transform and some of its applications", Dover Publications, USA, 2007.
- [33] M. Unser "Splines: a perfect fit for medical imaging" Proceedings of Spie, Vol. 4684, p.p 225, 2003.
- [34] S. Holbert, M. Liebling ,M. Unser," Discretization of the Radon Transform and of its Inverse by Spline Convolutions", IEEE tansactions on medical imaging, vol. 21, no. 4, pp. 366-376, april, 2002.
- [35] S. Horbelt, M. Liebling, M. Unser, "Filter Design for Filtered Back-Projection Guided by the Interpolation Model," Proceedings of the SPIE International Symposium on Medical Imaging: Image Processing (MI'02), San Diego CA, USA, vol. 4684, Part II, pp. 806-813, February 24-28, 2002.
- [36] Y.J. Roh y H.S. Cho, "Image Reconstruction in X-ray Tomography Using a Radial Basis Function(RBF) Neural Network" Proc. SPIE , vol. 4564, pp. 35-46, 2001.
- [37] Enrique De La Rosa Miranda, "Reconstrucción Tomográfica Algebraica No Iterativa de Objetos de Fase Suave Con Funciones de Base Radial no Locales", Tesis Doctoral, INAOE, Marzo,2006