



INAOE

Modelo del Ojo Humano Basado en Matrices ABCD

por

Gerardo Díaz González

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Agosto 2008

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. M. David Iturbe Castillo, INAOE

©INAOE 2008

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en
partes de esta tesis



Modelo del Ojo Humano Basado en Matrices ABCD

por

Gerardo Díaz González

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en la Especialidad de Óptica

en el

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica

Supervisada por

Dr. M. David Iturbe Castillo

Tonantzintla, Puebla

Agosto 2008

*A mis padres, **Gerardo Díaz y Guadalupe González;***

*mis hermanas, **Sonia y Cinthya;***

*y mi sobrino, **César***

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al Dr. David Iturbe Castillo por sus valiosas enseñanzas, su asesoramiento, y por el gran apoyo que me brindó a través de mi estancia en el INAOE y durante la realización de éste trabajo.

Quiero agradecer a mis sinodales, los Doctores Rufino Díaz y Fermín Granados, por sus comentarios y sugerencias en la revisión de éste trabajo.

Doy las gracias especialmente al Dr. Sabino Chávez por brindarme el espacio físico para trabajar, por el tiempo que me concedió y por sus memorables consejos.

Estoy muy agradecido con mis compañeros: Juan Carlos Juárez, Armando, Daniel, Benito, Enrique, Juan Carlos Valdiviezo, Pedro, Raúl Ochoa, Eber, Iván y Anmi, por su compañía, apoyo, y por todos los momentos divertidos.

Agradezco infinitamente a Lety Jiménez por su amistad, afecto, apoyo incondicional, y por todo el tiempo que me ha concedido.

Mi agradecimiento también para Ale Sampedro por ser una gran amiga y por brindarme su valiosa amistad.

Es un placer agradecer al personal del INAOE que me brindó su amabilidad: Paty, Eisela y Aurora de la Coordinación de Óptica, Liliana Perea en la biblioteca, y la Lic. Carmen Meza y Edith Palacios de la Dirección de Investigación y Postgrado.

Mi especial agradecimiento a Maria Luisa Tecuatl por su cariño y por todos los momentos que hemos compartido.

Agradezco al pueblo de México y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado a través de la beca No. 199234 para realizar mis estudios de Maestría, y por el apoyo económico a través de la concesión SEP-2005-C01-51146-F para la conclusión de este trabajo de tesis.

Índice

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| Capítulo 1 | Introducción..... | 1 |
| Capítulo 2 | Descripción de los elementos ópticos del ojo humano..... | 4 |
| 2.1 | Introducción..... | 4 |
| 2.2 | Elementos ópticos del ojo humano..... | 5 |
| 2.2.1 | La córnea..... | 6 |
| 2.2.2 | Pupila..... | 7 |
| 2.2.3 | Humor acuoso..... | 7 |
| 2.2.4 | Cristalino..... | 8 |
| 2.2.5 | Humor vítreo..... | 9 |
| 2.2.6 | La retina..... | 9 |
| 2.3 | Errores de refracción en la visión..... | 10 |
| 2.3.1 | Miopía..... | 11 |
| 2.3.2 | Hipermetropía..... | 12 |
| 2.3.3 | Astigmatismo del ojo..... | 13 |
| Capítulo 3 | Fundamentos teóricos..... | 15 |
| 3.1 | Introducción..... | 15 |
| 3.2 | Conceptos básicos..... | 16 |
| 3.2.1 | Definición de rayo e luz..... | 16 |

| | | |
|-------|---|----|
| 3.2.2 | Las ecuaciones de rayos paraxiales..... | 16 |
| 3.2.3 | Matriz de propagación en espacio libre..... | 19 |
| 3.2.4 | Matriz para una interfase plana entre dos medios de índice de refracción diferente..... | 20 |
| 3.2.5 | Matriz ABCD para un sistema óptico en general..... | 22 |
| 3.3 | Deducción de las matrices ABCD utilizadas en el modelo del ojo humano..... | 24 |
| 3.3.1 | Matriz de refracción en una superficie esférica entre dos medios de índice de refracción diferente..... | 24 |
| 3.3.2 | Matriz para una lente esférica de espesor d | 27 |
| 3.3.3 | Matriz de propagación en un medio de índice gradiente..... | 29 |
| 3.4 | Ecuaciones de dispersión cromática de los medios oculares..... | 33 |

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| Capítulo 4 | Simulación del modelo del ojo humano bajo distintas consideraciones..... | 37 |
| 4.1 | Introducción..... | 37 |
| 4.2 | Método de programación del modelo del ojo humano..... | 38 |
| 4.3 | Índices de refracción de los medios oculares para distintas longitudes de onda..... | 42 |
| 4.4 | Simulación de la potencia refractiva considerando variaciones en las superficies y medios ópticos..... | 43 |
| 4.4.1 | Simulación de la potencia refractiva variando los espesores de los medios oculares..... | 44 |
| 4.4.2 | Simulación de la potencia refractiva variando los radios de curvatura de los elementos ópticos del ojo..... | 51 |
| 4.5 | Simulación de la propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo..... | 57 |

| | | |
|-------------------|--|-----------|
| 4.6 | Otros resultados que pueden obtenerse con el modelo del ojo propuesto..... | 66 |
| Capítulo 5 | Conclusiones..... | 70 |
| 5.1 | Trabajo a futuro..... | 73 |
| Apéndice. | | |
| | Programa desarrollado en Matlab para la simulación del modelo del ojo humano con matrices ABCD..... | 75 |
| | Índice de figuras..... | 83 |
| | Índice de tablas..... | 86 |
| | Referencias..... | 87 |

Capítulo 1

Introducción

Los primeros estudios del ojo humano fueron hechos por Helmholtz en el siglo XIX, y continuaron con los estudios de Gullstrand [1], que le valieron el premio Nóbel en Fisiología y Medicina en 1911. Posteriormente se desarrollaron modelos del ojo que hasta la fecha se siguen utilizando como referencia para las investigaciones en óptica visual. Entre los modelos más conocidos y utilizados están los modelos esquemáticos simples como los de Listing [2] y Emsley [3], a los que les siguen otros más complejos como los de Le Grand y Hage [4], Kooijman [5] y Navarro *et al.* [6].

También se han desarrollado modelos que consideran al cristalino como un medio de índice de refracción gradiente, tales como los modelos de Atchison y Smith [7,8], Liou y Brennan [9], Popioleck y Kasprzak [10], M. V. Pérez *et al.* [11], y Siedlecki *et al.* [12]. Sin embargo, este tipo de modelos han recibido poca atención en optometría y ciencias de la visión, a pesar de que consideran de qué manera puede cambiar el índice de refracción y la potencia refractiva con la acomodación, y en la mayoría de estos trabajos sólo se ha modelado al cristalino de índice gradiente como un elemento individual.

Los oftalmólogos y los optometristas corrigen las ametropías por medio de diferentes tratamientos, que puede ser tan moderno como una cirugía refractiva o tradicional como el uso de anteojos o lentes de contacto. En ambos campos es muy importante conocer cuáles son los parámetros correctos del ojo, y si se presentan anormalidades, saber el tipo y el grado de corrección que se va a realizar. Además, existe poca información en cuanto a cómo influyen cada uno de los parámetros del ojo en la corrección de los problemas visuales. De modo que el tipo y grado de corrección que se realizan en el paciente algunas veces no son los correctos. Por tal motivo, es necesario contar con un modelo del ojo humano simple y efectivo, que pueda ser entendido por profesionales en óptica, optometría y oftalmología.

En este trabajo se presenta un modelo del ojo humano, el cual utiliza la propagación de rayos de luz, matrices ABCD y los parámetros correspondientes a cada una de las interfaces y medios asociados a cada elemento óptico del ojo. Tomaremos en cuenta la dispersión de los medios oculares y variaciones en los espesores y radios de curvatura dentro un intervalo que consideramos pueden presentar algunos individuos. También consideraremos al cristalino como un medio de índice de refracción fijo y como un medio con índice de refracción de tipo gradiente. El objetivo es determinar cuales son los parámetros que más influyen para que cambie la potencia refractiva o equivalentemente la distancia focal efectiva del ojo.

El desarrollo de este trabajo de tesis está organizado de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se da una introducción sobre aspectos generales del ojo humano y los elementos ópticos que lo componen. Se habla sobre los defectos de refracción más comunes, tales como la miopía, hipermetropía y el astigmatismo, que son debidos a las deformaciones que se pueden presentar en el ojo. Posteriormente, en el Capítulo 3 se exponen los

fundamentos teóricos y la deducción de las matrices ABCD utilizadas para desarrollar el modelo del ojo humano.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de simulaciones de nuestro modelo, asumiendo que el objeto es puntual y está colocado a una cierta distancia del ojo. Por medio de gráficas se ilustra la dependencia de la potencia refractiva total del ojo con respecto a variaciones en longitud de onda, radios de curvatura y espesores de la córnea y cristalino, así como variaciones en el espesor de las cámaras que contienen al humor acuoso y al vítreo. Además se hace una comparación de los resultados obtenidos considerando al cristalino como un medio de índice de refracción gradiente y no gradiente.

Por último, en el Capítulo 5 se dan las conclusiones de este trabajo y se mencionan algunos trabajos consecuentes o complementarios a desarrollar en un futuro.

Capítulo 2

Descripción de los elementos ópticos del ojo humano

2.1 Introducción

El ojo es el principal órgano para el sensado de luz en humanos, y su diseño es óptimo para capturar la luz y formar una imagen. El ojo es, en muchos aspectos, como una cámara fotográfica. La cámara proyecta, a través de un sistema ajustable de lentes, la imagen invertida de un objeto sobre una película, mientras un diafragma se ocupa de la regulación de la cantidad de luz. Después del revelado y la reversión al efectuar la ampliación, se obtiene finalmente una imagen visible, bidimensional, del objeto. Del mismo modo, el sistema óptico del ojo proyecta una imagen invertida sobre el fondo ocular a través de una lente deformable, conocida como cristalino. El iris funciona como el diafragma y la retina toma la función de la película. En la retina se forma la imagen y ocurre un proceso mediante el cual la luz se convierte en estímulos nerviosos, que son enviados al cerebro a través del nervio óptico, para que allí finalmente puedan ser interpretados como imágenes y hacerse conscientes en una determinada zona, la corteza visual.

Un esquema del ojo humano se muestra en la figura 2.1, donde podemos observar los elementos ópticos de los que está compuesto: córnea, humor acuoso, cristalino y humor vítreo, así como el cuerpo ciliar y las capas que cubren al globo ocular.

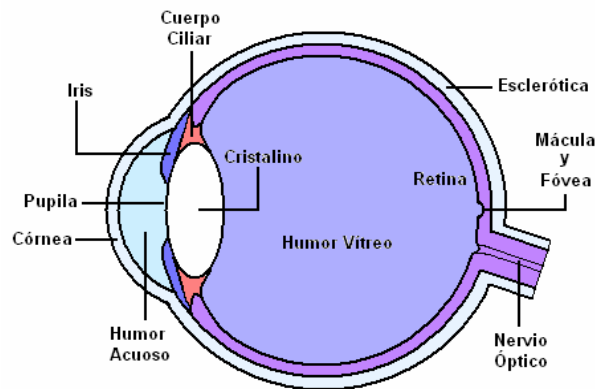


Figura 2.1 Esquema del ojo humano derecho como una sección horizontal.

En la medida en que el sistema óptico del ojo funcione correctamente, la imagen proyectada en la retina es fiel al objeto, si esto no sucede entonces se requiere de un elemento corrector, por ejemplo lentes. Por otra parte, cuando el ojo necesita enfocar a diferentes distancias ocurre un cambio en la configuración del cristalino, proceso conocido como acomodación, el cual implica alteraciones en su curvatura y espesor.

2.2 Elementos ópticos del ojo humano

De manera esquemática se puede describir el globo ocular de un humano adulto como una esfera de 12 mm de radio, compuesta por tres capas, que son [13]:

- *Retina*, que es la capa mas interna.

- *Úvea*, que es la capa media vascular, constituida por tres partes, que son: coroides, cuerpo ciliar e iris.
- *Esclerótica*, que es la capa externa que cubre el bulbo del ojo, completado en su parte anterior por una pequeña zona de tejido de transición denominada limbo esclerocorneal, que une a otro casquete de esfera transparente de menor curvatura, denominada córnea, que es una capa fibrosa transparente y avascular.

Para que el ojo como sistema óptico pueda desempeñar sus funciones satisfactoriamente, es necesario que sus medios ópticos sean transparentes, para que la intensidad de la luz se transmita con pocas pérdidas hacia la retina.

La óptica fisiológica es la que se encarga de estudiar las funciones y características físicas del ojo y cómo influyen éstas en el tratamiento de los defectos visuales de un individuo. Para comprenderla necesitamos estudiar cada una de las estructuras implicadas en el proceso de formación de imágenes.

2.2.1 La córnea

La córnea se puede comparar con un segmento de esfera en su región central, de menor radio de curvatura que el globo ocular, y en promedio representa 1/6 de la superficie total del ojo.

Características ópticas de la córnea:

La córnea se puede considerar como una lente con las siguientes características [13]:

Espesor: Se encuentra comprendido entre 0.40 a 0.67 mm y varía del centro a la periferia, cuyo valor promedio es de 0.5 mm.

Diámetro: En el adulto presenta un diámetro horizontal de 11.6 mm y un vertical de 10.6 mm.

Índice de refracción: 1.376

Radios de curvatura en la región central: En promedio, el radio de la cara anterior es de 7.8 mm en un adulto, y el de la cara posterior es de 6.7 mm.

2.2.2 Pupila

La pupila es la abertura circular en el centro del iris. El iris es el que da el color a los ojos y recibe su nombre del hecho de que tiene una gran variación en color de una persona a otra. La función de la pupila es controlar la cantidad de luz que llega a la retina, por lo que disminuye su diámetro a medida que se aumenta la intensidad luminosa.

En ojos jóvenes y con baja iluminación el diámetro de la pupila es de alrededor de 8 mm, y cuando la iluminación es muy intensa se cierra hasta un diámetro cercano a 2 mm. A niveles medios de iluminación, el diámetro de la pupila es de 3.5 a 4 mm [14]. Con la edad, la pupila va disminuyendo su diámetro gradualmente.

2.2.3 Humor acuoso

La cámara que contiene al humor acuoso se encuentra comprendida entre la cara posterior de la córnea y la cara anterior del cristalino, pasando por la pupila. El humor acuoso es un líquido transparente con un índice de refracción de 1.336 [15]. Su espesor es de 3 a 4.5 mm [13], el cual disminuye ligeramente con la edad. Su producción es constante siendo un aporte importante de nutrientes y oxígeno para la córnea. También tiene la función

de mantener la presión constante y ayudar a conservar la convexidad original de la córnea.

2.2.4 Cristalino

El cristalino es una lente biconvexa dinámica, completamente transparente. Se encuentra suspendido detrás del iris por la zónula que lo une con el cuerpo ciliar. Sus parámetros ópticos varían de acuerdo con la edad.

Una de las propiedades del cristalino es la acomodación, que consiste en enfocar los objetos que se encuentran lejos hasta los que se encuentran cerca, que normalmente es una distancia de 25 cm [14]. Por tanto, el radio de curvatura es mayor cuando se observan objetos lejanos y es menor cuando se observan objetos cercanos.

Características ópticas del cristalino [13]:

Espesor: En la región central varía de 3.92 a 4.84 mm durante la acomodación, y sin acomodación es de 4 mm.

Diámetro: El valor de su diámetro frontal es de aproximadamente 8.5 a 10 mm en un adulto.

Índice de refracción: El valor típico considerado por los optometristas es de 1.43 en el centro (índice de refracción alto), y de 1.39 en los extremos (índice de refracción bajo). Sin embargo en nuestro estudio utilizaremos los valores seguidos por Atchison y Smith [16].

Radios de curvatura: Sin acomodación, el radio de la superficie anterior es de 10 mm, y el de la posterior de -6 mm.

2.2.5 Humor Vítreo

El humor vítreo llena el espacio comprendido entre el cristalino y la retina. Es avascular, transparente y representa las 2/3 partes del volumen y peso del ojo. Tiene un índice de refracción de 1.336, y su espesor es de 16.6 mm [5]. El humor vítreo al igual que el humor acuoso proveen los elementos necesarios para el metabolismo de los tejidos avasculares como la córnea y cristalino, y también tiene la función de mantener la presión para ayudar a conservar la forma esférica del globo ocular.

2.2.6 La retina

La retina es el elemento fotosensible del ojo en el cual se forma la imagen. En la retina se transforma la energía luminosa en estímulos nerviosos. La capa más interna de la retina, es decir, la más cercana al vítreo, está compuesta de células y fibras nerviosas, mientras que la parte externa, la más sensible a la luz, está cubierta por las células llamadas conos y bastones, además de un pigmento protector.

Los conos son sensibles a niveles de iluminación altos, y son los responsables de la percepción del color. Los bastones son sensibles a intensidades luminosas muy bajas, y se encargan de la percepción del blanco y negro. La visión con conos se llama fotópica, y la visión con bastones escotópica. A niveles medios de iluminación intervienen tanto los bastones como los conos en la llamada visión mesópica [14].

En la observación oftalmoscópica de la retina se distinguen:

El nervio óptico (o disco óptico), de 1.5 mm de diámetro, localizado hacia la parte nasal, en el que faltan células sensoriales fotosensibles [13].

La *mácula*, que es una pequeña región de 2.5 a 3 mm de diámetro, también conocida como la mancha amarilla y situada en el centro de la retina [17].

En el centro de la mácula se halla una pequeña depresión llamada *fóvea centralis*, que mide cerca de 0.3 mm [13,15] y está situada cerca del eje óptico. La fóvea contiene solamente conos, mucho más densamente empacados que en el resto de la retina, por lo que la fóvea es sensible al color y nos permite ver detalles muy finos. En cambio los bastones están distribuidos en casi toda la retina con excepción de la fóvea.

2.3 Errores de refracción en la visión

Un ojo emétrope es aquél que no tiene defectos de refracción, y amétrope el que si los tiene. Si el ojo es amétrope, se requiere de un elemento corrector de la visión, por ejemplo, lentes de contacto colocados sobre la córnea, o anteojos colocados en armazones especiales, de tal manera que la superficie posterior de la lente esté a 14 mm de distancia de la córnea [14].

Un ojo emétrope sin acomodación enfoca claramente objetos lejanos, como se esquematiza en la figura 2.2. En estas condiciones decimos que el ojo está relajado.

La miopía, la hipermetropía y el astigmatismo son ejemplos de errores de refracción de la visión, y a continuación se explica en qué consiste cada uno de ellos.

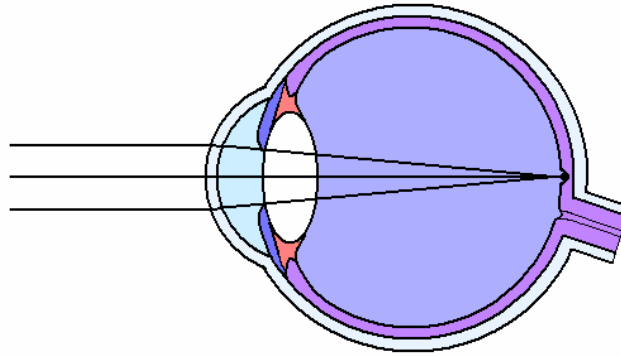


Figura 2.2 Ojo emétreo enfocando un objeto puntual lejano.

2.3.1 Miopía

Si el ojo relajado enfoca objetos lejanos antes de la retina como se esquematiza en la figura 2.3, decimos que el ojo tiene miopía. Por tanto, un ojo miope no puede ver con claridad los objetos lejanos, pero sí los objetos cercanos sin necesidad de acomodación. Mientras más grande sea la miopía, más corta será la distancia a la que los objetos aparezcan bien definidos. La miopía se corrige usando una lente negativa apropiada frente al ojo, como se muestra en el esquema de la figura 2.4.

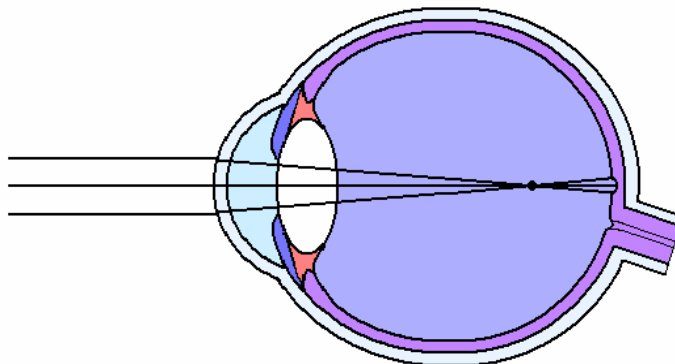


Figura 2.3 Rayos de luz producidos por un objeto puntual lejano entrando a un ojo miope.

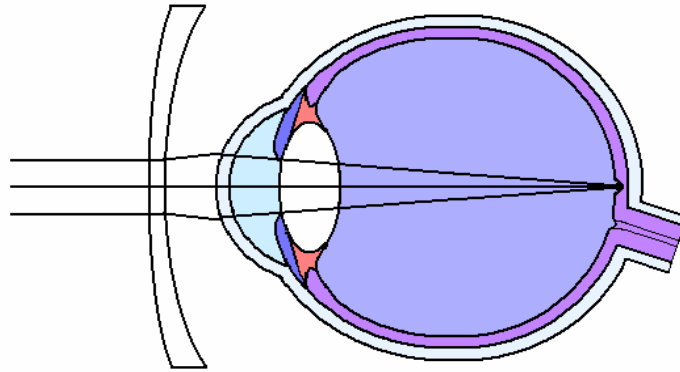


Figura 2.4 Ojo miope corregido con una lente divergente.

2.3.2 Hipermetropía

Si el ojo relajado enfoca objetos lejanos detrás de la retina, como se esquematiza en la figura 2.5, decimos que el ojo tiene hipermetropía. Un ojo hipermétrope podría ver con claridad los objetos distantes aumentando su potencia mediante la acomodación, pero entonces el ojo nunca estará relajado []. Para corregir la hipermetropía es necesario el uso de lentes positivas, como se muestra en el esquema de la figura 2.6.

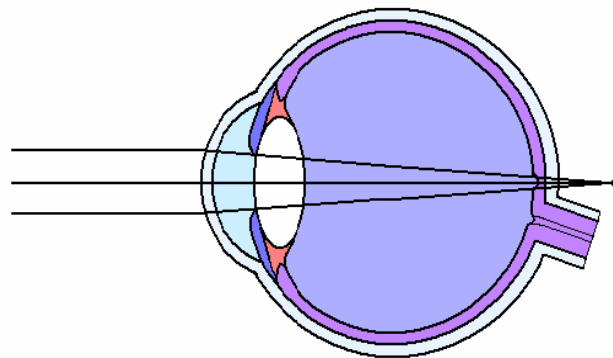


Figura 2.5 Rayos de luz producidos por un objeto puntual lejano entrando a un ojo hipermétrope.

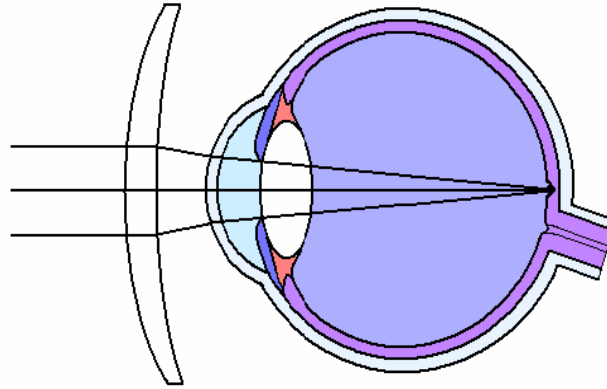


Figura 2.6 Ojo hipermetrope corregido con una lente convergente.

2.3.3 Astigmatismo del ojo

El astigmatismo del ojo es causado por una o más de sus superficies refractantes, usualmente la córnea, que es más curvada en un plano que en otro. La superficie refractante que es normalmente con simetría de revolución adquiere una pequeña componente cilíndrica, esto es, se hace tórica.

Bajo estas condiciones, en el astigmatismo los rayos en el plano paralelo al eje del toroide tienen diferente foco que los rayos en el plano perpendicular, como se esquematiza en la figura 2.7. A la región cercana a los focos se le designa con frecuencia con el nombre de conoide de Sturm [14].

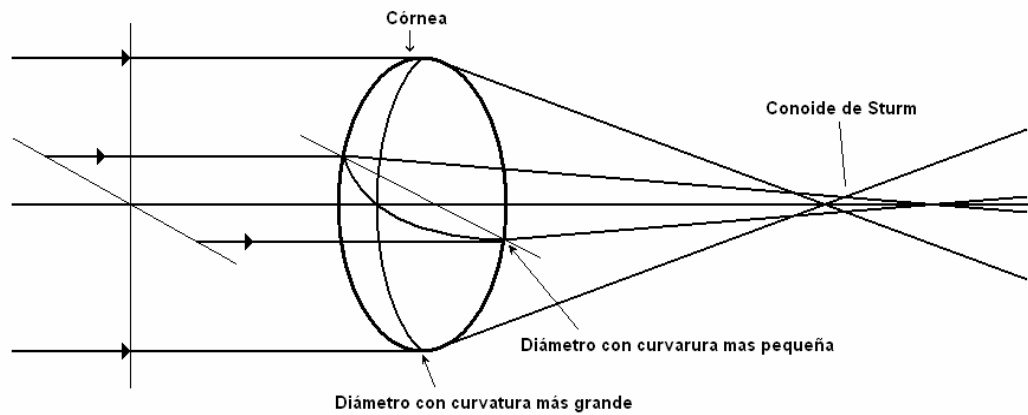


Figura 2.7 Forma de la córnea y refracción de los rayos en un ojo con astigmatismo.

Los problemas de visión que hemos mencionado son los más comunes, y pueden ser causa de distintos factores, tales como:

- Curvaturas mayores o menores a lo normal en la córnea o cristalino [13,14].
- Alteraciones en las posiciones y espesores de los medios oculares y posición de la retina.
- Variaciones en el índice de refracción de alguno de los medios.

Capítulo 3

Fundamentos teóricos

3.1 Introducción

Las matrices ABCD son una herramienta matemática utilizada en el análisis de sistemas ópticos, y entre sus aplicaciones está el análisis de estabilidad de cavidades ópticas [18]. Las matrices ABCD también se utilizan para calcular la altura a la que sale un rayo de un sistema óptico y su pendiente. En este capítulo se darán los fundamentos teóricos necesarios para desarrollar un modelo del ojo humano con matrices ABCD, de tal forma que podamos obtener información acerca de la potencia refractiva y por consiguiente de la distancia focal efectiva del ojo bajo distintas consideraciones. Como se mencionó en el Capítulo 2, dichos errores tienen que ver con variaciones en los radios de curvatura de la córnea o del cristalino, o bien con cambios en los espesores de los medios oculares.

El desarrollo del presente capítulo estará dado de la siguiente manera: en la sección 3.2 se exponen los conceptos básicos que marcarán el punto de partida y las limitaciones de nuestro trabajo. En la sección 3.3 se presenta la deducción de las matrices ABCD utilizadas para desarrollar el modelo del

ojo. Finalmente, en la sección 3.4 se hace una mención de las ecuaciones más comunes que han sido utilizadas para describir la dispersión de los medios oculares, para posteriormente elegir la más adecuada para nuestros propósitos.

3.2 Conceptos básicos

3.2.1 Definición de rayo de luz

Por definición, un rayo de luz representa la dirección en la que se propaga la energía de una onda de luz [14]. En un medio uniforme (homogéneo), los rayos siguen trayectorias rectas; mientras que en un medio de índice gradiente (no homogéneo) los rayos ópticos pueden seguir trayectorias curvas [15].

Los componentes ópticos son a menudo centrados con respecto a un eje óptico, el cual sirve como referencia para medir las alturas y ángulos a los que viajan los rayos. Se llaman rayos paraxiales a aquellos cuyo ángulo con respecto al eje óptico es muy pequeño, de modo que $\tan \theta_i \approx \theta_i$ [19]. De aquí en adelante asumiremos que el eje óptico es el eje z y que los rayos viajan de izquierda a derecha.

3.2.2 Las ecuaciones de rayos paraxiales

Para determinar las trayectorias de rayos de luz en un medio homogéneo o inhomogéneo con índice de refracción $n(\vec{r})$, usaremos el principio de Fermat, el cual enuncia que: “De todas las trayectorias para que la luz viaje de un punto P_1 a otro punto P_2 , solo son permitidas físicamente

aquellas que tienen un valor extremo (máximo, mínimo o estacionario) para el camino óptico” [14].

Usualmente se toma como valor extremo un mínimo, por lo que matemáticamente se puede expresar el principio de Fermat de la siguiente forma:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) ds = 0, \quad (3.1)$$

donde ds es una diferencial de longitud a lo largo de la trayectoria del rayo entre P_1 y P_2 . Si la trayectoria está descrita por las funciones $x(s)$, $y(s)$ y $z(s)$, donde s es la longitud de la trayectoria (ver figura 3.1). Entonces usando el cálculo de variaciones se puede demostrar que $x(s)$, $y(s)$ y $z(s)$ deben satisfacer las tres ecuaciones diferenciales parciales siguientes [20]:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (3.2)$$

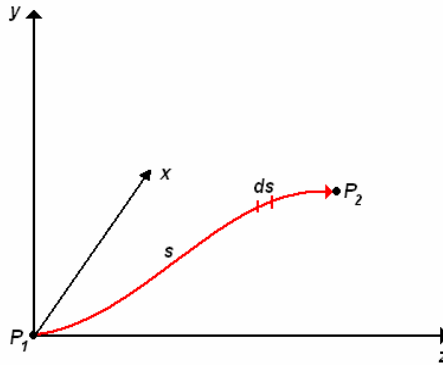


Figura 3.1 La trayectoria del rayo está descrita paramétricamente por tres funciones $x(s)$, $y(s)$, y $z(s)$.

Definiendo el vector $\vec{r}(s)$, cuyas componentes son $x(s)$, $y(s)$ y $z(s)$, la ecuación (3.2) se puede escribir en la forma vectorial compacta como:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (3.3)$$

donde ∇n , el gradiente de n , es un vector con componentes cartesianas $\partial n / \partial x$, $\partial n / \partial y$, y $\partial n / \partial z$. La ecuación (3.3) se conoce como la *ecuación de rayos*.

En la aproximación paraxial, la trayectoria es casi paralela al eje z , de modo que $ds \approx dz$. Las ecuaciones de rayos (3.2) entonces se simplifican a

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \left(n \frac{dy}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (3.4)$$

que son las *ecuaciones de rayos paraxiales*. Dado $n = n(x, y, z)$, estas dos ecuaciones diferenciales parciales pueden resolverse para la trayectoria $x(z)$ y $y(z)$.

En el caso límite de un medio homogéneo para el cual n es independiente de x , y , z , las ecuaciones (3.4) dan

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = 0, \quad (3.5)$$

a lo cual sigue que x y y son funciones lineales de z , de modo que las trayectorias son líneas rectas.

3.2.3 Matriz de propagación en espacio libre

El bloque mas simple de un sistema óptico es una distancia d de espacio libre (figura 3.2). Si conocemos donde está el rayo en el primer plano (1) y conocemos su inclinación con respecto al eje, entonces podremos saber donde emerge el rayo y hacia donde va en el plano de salida (2).

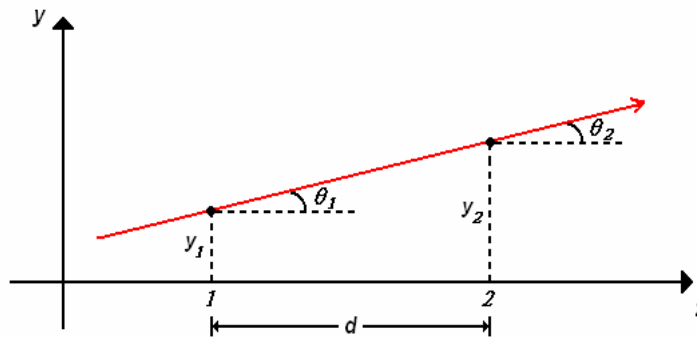


Figura 3.2 Propagación de un rayo en espacio libre una distancia d .

Dado que los rayos en espacio libre viajan a lo largo de líneas rectas, los parámetros de salida están relacionados con los parámetros de entrada por

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + d \cdot \theta_1, \quad (3.6)$$

$$\theta_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot \theta_1, \quad (3.7)$$

y podemos escribir éstas en forma matricial, de modo que

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Por tanto, la matriz M que describe la propagación de un rayo viajando una distancia d de espacio libre es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.2.4 Matriz para una interfase plana entre dos medios de índice de refracción diferente

Consideremos una superficie plana entre dos medios de índice de refracción diferente n_1 y n_2 . Un rayo incidiendo en dicha superficie se puede dividir en dos: un rayo reflejado y un rayo refractado (transmitido). El rayo refractado (ver figura 3.3) obedece la ley de refracción, también conocida como ley de Snell, la cual establece que el ángulo de refracción θ_2 se relaciona con el ángulo de incidencia θ_1 por [15,19]:

$$n_1 \text{sen} \theta_1 = n_2 \text{sen} \theta_2. \quad (3.10)$$

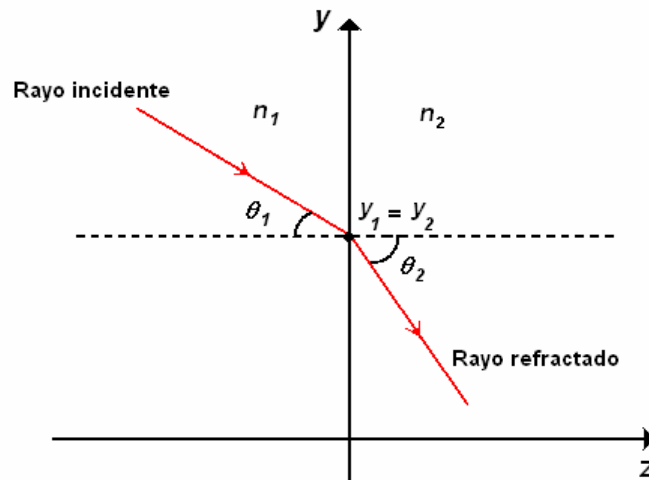


Figura 3.3 Refracción de un rayo a través de una superficie plana entre dos medios de índice de refracción diferente.

En la aproximación paraxial, la ecuación (3.10) se reduce a

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2. \quad (3.11)$$

Haciendo uso de la ecuación (3.11), y puesto que el rayo entra y sale en un mismo punto de la superficie plana, podemos relacionar las alturas y ángulos de salida con los de entrada por:

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot \theta_1 \quad (3.12)$$

y

$$\theta_2 = 0 \cdot y_1 + \frac{n_1}{n_2} \cdot \theta_1 \quad (3.13)$$

Escribiendo las ecuaciones (3.12) y (3.13) en forma matricial tenemos que

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Por tanto, la matriz que describe la desviación de un rayo después de pasar por una interfase plana entre dos medios de índice de refracción n_1 y n_2 es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.2.5 Matriz ABCD para un sistema óptico en general

Para describir la propagación de un rayo de luz a través de un sistema óptico que consiste de lentes, distancias de espacio libre, interfaces entre diferentes medios dieléctricos, espejos, etcétera, basta con conocer: a) donde está el rayo con respecto a algún eje elegido arbitrariamente y, b) en que dirección está dirigido. Ambos parámetros se pueden obtener fácilmente haciendo uso de las matrices correspondientes a cada uno de los elementos ópticos [18].

Un sistema óptico es una serie de componentes ópticos colocados entre dos planos transversales en z_1 y z_2 , referidos como los planos de entrada y de salida respectivamente. El sistema es caracterizado completamente por su efecto sobre un rayo entrante de posición y dirección arbitrarios (y_1, θ_1) . Como se esquematiza en la figura 3.4, el sistema óptico dirigirá al rayo de modo que tenga una nueva posición y dirección (y_2, θ_2) en el plano de salida.

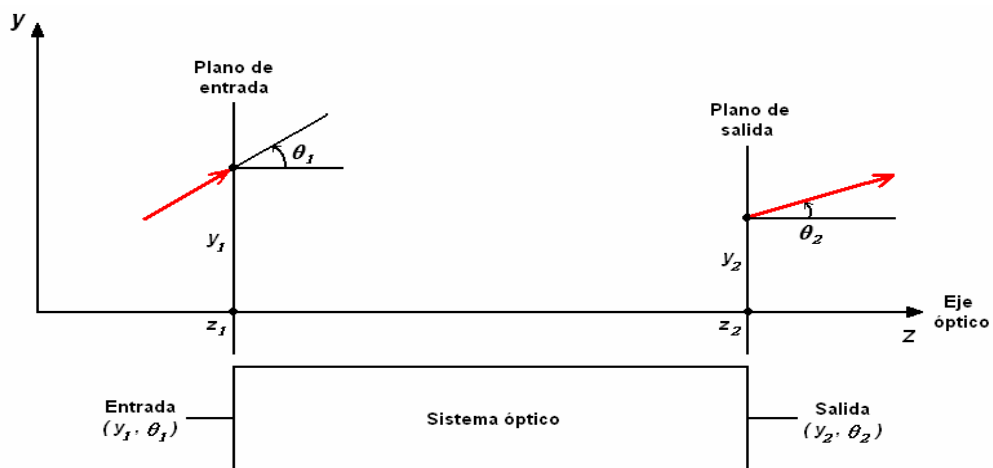


Figura 3.4 Un rayo que entra al sistema óptico a una altura y_1 y ángulo θ_1 y sale a una altura y_2 y ángulo θ_2 .

Como vimos en las secciones 3.2.3 y 3.2.4, la relación entre (y_2, θ_2) y (y_1, θ_1) en la aproximación paraxial, es lineal, de la forma

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1, \quad (3.16)$$

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1, \quad (3.17)$$

donde A , B , C y D son números reales. Las ecuaciones (3.16) y (3.17) pueden escribirse convenientemente en forma de matrices como

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La matriz M cuyos elementos son A , B , C y D , caracteriza al sistema óptico completamente, dado que ésta permite que (y_2, θ_2) sea determinado para cualquier (y_1, θ_1) . Dicha matriz se conoce como la matriz ABCD [20,21].

El concepto de matriz ABCD para elementos individuales puede aplicarse para un sistema óptico que contenga varios elementos, obteniendo algo correspondiente a una matriz equivalente.

Una serie de componentes ópticos cuyas matrices ABCD son M_1 , M_2, \dots, M_N (figura 3.5), es equivalente a un solo componente óptico cuya matriz de transferencia de rayos es

$$M = M_N \cdots M_2 M_1. \quad (3.19)$$

El orden de la multiplicación de matrices se debe a que la matriz del sistema que es atravesado por el primer rayo está colocada a la derecha, de modo que ésta opera sobre la matriz columna del primer rayo incidente.

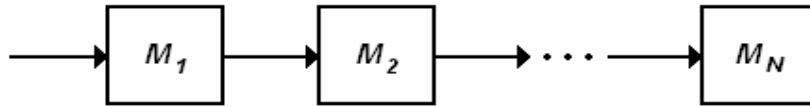


Figura 3.5 A una serie de componentes ópticos en cascada le corresponde una matriz equivalente M .

3.3 Deducción de las matrices ABCD utilizadas en el modelo del ojo humano

3.3.1 Matriz de refracción en una superficie esférica entre dos medios de índice de refracción diferente

Consideremos una superficie esférica de radio R entre dos medios de índice de refracción diferente n_1 y n_2 . Por convención, R es positivo si el centro de curvatura está situado a la derecha del vértice de la superficie esférica, y negativo si está a la izquierda [14].

Un rayo incidiendo en dicha superficie a una altura y_1 entra y sale en un mismo punto, lo que significa que su altura no se altera (ver figura 3.6). Por lo que tendremos la siguiente relación:

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot \theta_1. \quad (3.20)$$

El rayo que incide en la superficie esférica forma un ángulo θ_1 con el eje óptico y se refracta cambiando su dirección, de modo que el rayo refractado forma un ángulo θ_2 con el eje óptico.

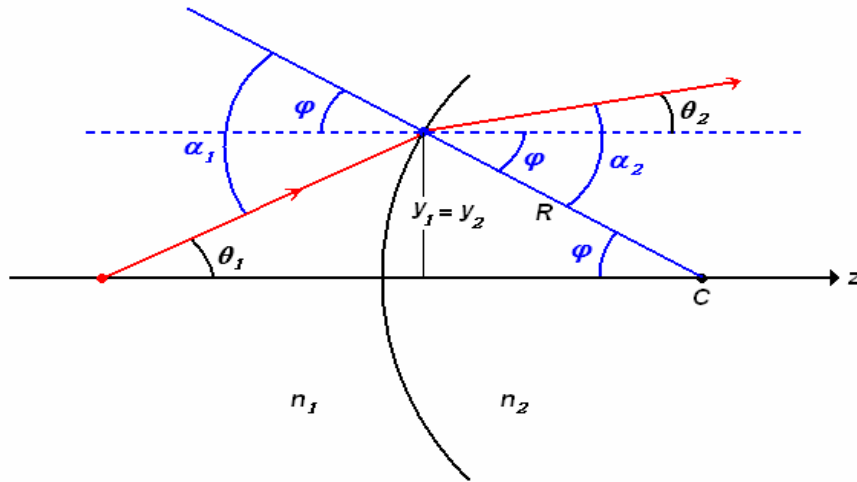


Figura 3.6 Propagación de un rayo a través de una superficie esférica.

Para encontrar la relación entre θ_1 y θ_2 consideremos los ángulos de referencia que se muestran en la figura 3.6. Con la ayuda esquemática de estos ángulos podemos obtener las siguientes tres ecuaciones:

$$\varphi = \frac{y_1}{R}, \quad (3.21)$$

$$\theta_1 = \alpha_1 - \varphi, \quad (3.22)$$

$$\theta_2 = \alpha_2 - \varphi. \quad (3.23)$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = \theta_1 + \frac{y_1}{R}, \quad (3.24)$$

y

$$\alpha_2 = \theta_2 + \frac{y_1}{R}. \quad (3.25)$$

Haciendo uso de la Ley de Snell y de la aproximación paraxial tenemos que

$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \alpha_1. \quad (3.26)$$

Combinando las ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.26):

$$\theta_2 + \frac{y_1}{R} = \frac{n_1}{n_2} \left(\theta_1 + \frac{y_1}{R} \right), \quad (3.27)$$

y haciendo un poco de álgebra se obtiene

$$\theta_2 = \left[\frac{-(n_2 - n_1)}{n_2 R} \right] \cdot y_1 + \frac{n_1}{n_2} \cdot \theta_1. \quad (3.28)$$

Escribiendo las ecuaciones (3.20) y (3.28) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

De esta forma, la matriz de refracción en una superficie esférica entre dos medios de índice de refracción diferente es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

3.3.2 Matriz para una lente esférica de espesor d

Una lente esférica está formada por dos superficies esféricas, de modo que se define completamente por los radios de curvatura R_1 y R_2 de sus dos superficies, su espesor d y el índice de refracción n del material. Consideremos que la lente se encuentra entre dos medios de índice de refracción diferente n_1 y n_2 , como se muestra en esquema de la figura 3.7.

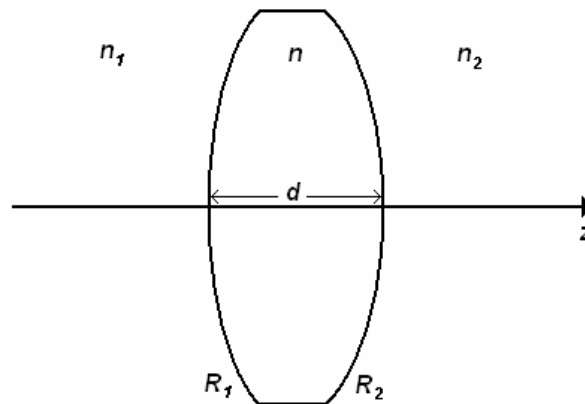


Figura 3.7 Lente esférica de espesor d entre dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 .

La matriz ABCD asociada a dicha lente puede deducirse fácilmente, puesto que ya conocemos las matrices para una superficie esférica y para un medio de espesor d . De esta forma y siguiendo el orden de la multiplicación de matrices dado en la sección 3.2.5, tenemos que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(n_2 - n)}{n_2 R_2} & \frac{n}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(n - n_1)}{n R_1} & \frac{n_1}{n} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Realizando la multiplicación de las matrices, se obtiene la matriz ABCD para una lente en general, la cual está dada como:

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d(n-n_1)}{nR_1} & \frac{dn_1}{n} \\ -\left(\frac{n_2-n}{n_2R_2} + \frac{n-n_1}{n_2R_1} - \frac{d(n-n_1)(n_2-n)}{n n_2R_1R_2}\right) & -\frac{dn_1(n_2-n)}{n n_2R_1} + \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

El término C de la matriz (3.32) está relacionado con la distancia focal f de la lente de la siguiente forma:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2-n}{n_2R_2} + \frac{n-n_1}{n_2R_1} - \frac{d(n-n_1)(n_2-n)}{n n_2R_1R_2}. \quad (3.33)$$

La cantidad $1/f$ se define como la *potencia* (P) de la lente. Si la distancia focal se mide en metros [m], la potencia queda expresada en dioptrías [D] [14,21].

Si la lente bajo consideración está en aire, entonces $n_1=n_2=1$, y la ecuación para calcular su potencia queda como

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{d(n-1)^2}{nR_1R_2}. \quad (3.34)$$

La ecuación (3.34) se conoce como la *ecuación del fabricante de lentes*, y aun más, si el espesor de la lente es muy pequeño, entonces $d \rightarrow 0$, y obtenemos la expresión para la potencia de lo que se conoce como una lente delgada, la cual está dada por

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.35)$$

Por tanto, y bajo estas consideraciones la matriz (3.32) se convierte a

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

la cual es la matriz ABCD asociada a una lente delgada localizada en aire.

3.3.3 Matriz de propagación en un medio de índice gradiente.

Como se mencionó en la sección 3.2.2, un medio no homogéneo o de índice gradiente tiene un índice de refracción que varía con la posición de acuerdo a una función continua $n(\vec{r})$. Con una elección apropiada de $n(\vec{r})$, una placa de material de índice gradiente puede tener el mismo efecto sobre rayos de luz que un componente óptico convencional como un prisma o una lente.

Para los propósitos de nuestro trabajo, asumiremos que el medio no está en función del eje axial z . Consideremos un bloque de material cuyo índice de refracción $n=n(y)$ es uniforme en las direcciones x y z , pero varía continuamente en la dirección y , como se muestra en la figura 3.8(a). En la figura 3.8(b) se muestra la dependencia del índice de refracción con respecto a la altura y [20].

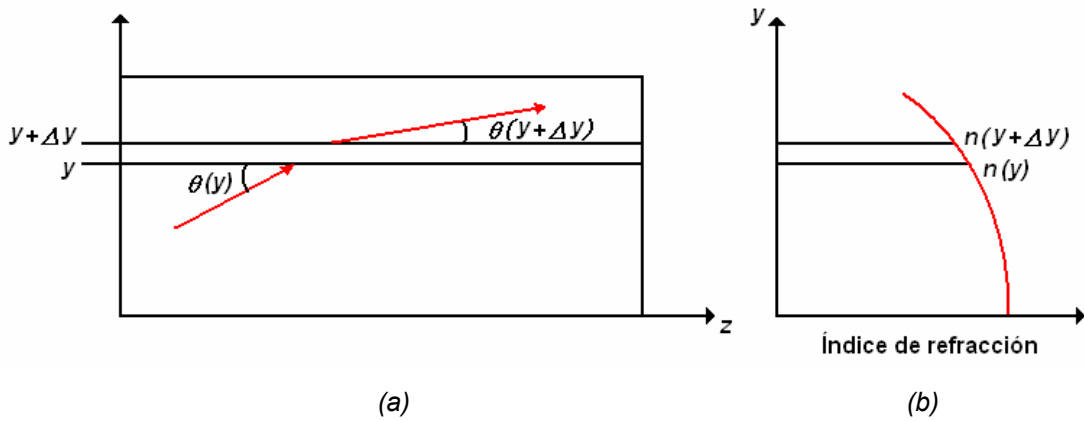


Figura 3.8 Refracción en un bloque de material de índice gradiente.

Las trayectorias de los rayos paraxiales en el plano y - z son descritas por la ecuación de rayos paraxiales vista en la sección 3.2.2:

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dy}{dz} \right) = \frac{dn}{dy}, \quad (3.37)$$

de la cual se obtiene que

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy}. \quad (3.38)$$

La ecuación diferencial (3.38) describe la propagación de un rayo en un medio cuyo índice de refracción gradiente varía solo con respecto a la altura y . Dado $n(y)$ y las condiciones iniciales (y y dy/dz en $z=0$), la ecuación (3.38) puede resolverse para la función $y(z)$, la cual describe la trayectoria del rayo.

Los medios de índice de refracción gradiente se caracterizan por que su índice de refracción varía de forma cuadrática conforme aumenta la

separación y con respecto al eje óptico. Una distribución particular para el índice de refracción gradiente es [18]:

$$n(y) = n_0 - \frac{n_0}{2L^2} y^2, \quad (3.39)$$

donde n_0 representa el valor del índice de refracción en el eje z ($y=0$) y L es un factor de razón de cambio, el cual indica qué tan rápido varía n con y .

Sustituyendo (3.39) en (3.38) obtenemos

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \left(-\frac{y}{L^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{y^2}{2L^2}} \right) \quad (3.40)$$

Asumiendo que el término $\frac{y^2}{2L^2}$ es mucho menor que 1 para todos los valores de y que nos conciernen, entonces la ecuación (3.40) queda como

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{y}{L^2}. \quad (3.41)$$

La solución general de la ecuación diferencial (3.41) es

$$y(z) = C_1 \left[\cos\left(\frac{z}{L}\right) \right] + C_2 \left[\text{sen}\left(\frac{z}{L}\right) \right], \quad (3.42)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Asumiendo que $z=0$ es el plano de entrada a este componente óptico, y que la altura (y_1) e inclinación (θ_1) del rayo en esta posición son conocidos, tendremos las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}y(0) &= y_1 \\ y'(0) &= \theta_1\end{aligned}$$

Con éstas condiciones obtenemos las constantes de la ecuación (3.42), las cuales son: $C_1 = y_1$ y $C_2 = L\theta_1$. De esta forma la solución de la ecuación diferencial (3.41) para las condiciones iniciales dadas queda como:

$$y(z) = y_1 \left[\cos\left(\frac{z}{L}\right) \right] + \theta_1 \left[L \operatorname{sen}\left(\frac{z}{L}\right) \right] \quad (3.43)$$

Derivando (3.43), obtenemos la inclinación a una posición z :

$$\theta(z) = y_1 \left[-\frac{1}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{L}\right) \right] + \theta_1 \left[\cos\left(\frac{z}{L}\right) \right]. \quad (3.44)$$

Por tanto, la matriz M para una longitud $z=d$ es:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{d}{L}\right) & L \operatorname{sen}\left(\frac{d}{L}\right) \\ -\frac{1}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{d}{L}\right) & \cos\left(\frac{d}{L}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

para

$$n(y) = n_0 \left(1 - \frac{y^2}{2L^2} \right). \quad (3.46)$$

Nótese que si $L \rightarrow \infty$, el medio es uniforme, y obteniendo los límites de los elementos de la matriz (3.45) se tiene que:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{d}{L}\right) = 1,$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left[L \operatorname{sen}\left(\frac{d}{L}\right) \right] = L \left(\frac{d}{L}\right) = d,$$

y

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{d}{L}\right) \right] = 0 \cdot \left(\frac{d}{L}\right) = 0.$$

de tal manera que obtenemos los términos ABCD de la matriz de rayos (3.9).

3.4 Ecuaciones de dispersión cromática de los medios oculares

En la literatura podemos encontrar varias ecuaciones que han sido utilizadas para describir la variación del índice de refracción $n(\lambda)$ de materiales ópticos con la longitud de onda.

Algunas ecuaciones de dispersión cromática se pueden obtener tomando valores apropiados en la siguiente ecuación generalizada:

$$n^{p_1}(\lambda) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 \lambda^q}{(\lambda^2 - \lambda_{01}^2)^{r_1}} + \frac{\alpha_2 \lambda^{q_1}}{(\lambda^2 - \lambda_{02}^2)^{r_2}} + \frac{\alpha_3 \lambda^{q_1}}{(\lambda^2 - \lambda_{03}^2)^{r_3}} \dots \quad (3.47)$$

Por ejemplo, la ecuación de Cauchy [22-24] se obtiene directamente de (3.47) haciendo $p_1=1$, $q=q_1=\lambda_{0i}=0$ y $r_i=i$. La ecuación de Herzberger [25] con $p_1=1$, $q=2$, $q_1=0$, $\lambda_{0i}=\lambda_0$, $r_i=i-1$. Y la ecuación de Sellmeier [24], tomando $\alpha_0=1$, $p_1=q=q_1=2$, $r_i=1$.

Otras ecuaciones de dispersión cromática pueden obtenerse tomando valores apropiados en la siguiente ecuación generalizada:

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{\beta_1}{(\lambda - \lambda_0)^{s_1}} + \frac{\beta_2}{(\lambda - \lambda_0)^{s_2}}. \quad (3.48)$$

Tal es el caso de la ecuación de Hartmann [22,23], la cual se obtiene haciendo $\beta_2=0$ y $s_1=1.2$ en (3.48). La ecuación de Cornu [26], con $s_1=1$ y $\beta_2=0$. O la ecuación de Conrady [27], tomando $\lambda_0=0$, $s_1=1$ y $s_2=3.5$.

Haciendo uso de las ecuaciones de dispersión que hemos derivado de (3.47) y (3.48), se han desarrollado algunos modelados de dispersión cromática del ojo. Por ejemplo, Le Grand basó sus ecuaciones en los datos de Polack [26] y cuantificó las dispersiones cromáticas de los medios oculares usando la ecuación de Cornu. Tucker [28] y Bennett y Tucker [29] crearon un ojo reducido cromático basado en la dispersión cromática del agua, utilizando una ecuación que podemos obtener con los primeros cuatro términos de (3.47), y tomando $p_1=2$, $\alpha_0=1.7642$, $\alpha_1=-1.38 \times 10^{-8}$, $\alpha_2=6.12 \times 10^3$, $\alpha_3=1.41 \times 10^8$, $q=2$, $q_1=\lambda_{0i}=0$, $r_i=i-1$.

Por otra parte, Navarro y colaboradores [6] utilizaron la siguiente ecuación para describir la dispersión de los diferentes medios oculares:

$$n(\lambda) = a_1(\lambda)n^{**} + a_2(\lambda)n_F + a_3(\lambda)n_C + a_4(\lambda)n^*, \quad (3.49)$$

donde las funciones $a_i(\lambda)$ están dadas por la siguiente ecuación:

$$a_i(\lambda) = A_0 + A_1\lambda^2 + \frac{P}{\lambda^2 - \lambda_0^2} + \frac{R}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2}, \quad (3.50)$$

la cual es de la forma de la ecuación de Herzberger. La longitud de onda está en micrómetros y $\lambda_0 = 0.1673 \mu\text{m}$. Los valores de las constantes en las ecuaciones (3.49) y (3.50) para cada función $a_i(\lambda)$ están publicadas en este mismo trabajo.

En el año 2005 se publicó un trabajo [16] en el cual se afirma que algunos datos dados por Navarro son incorrectos, y sus conclusiones no están totalmente explicadas. Se hace un análisis de las ecuaciones de dispersión cromática de los medios oculares ya mencionadas, concluyendo que la ecuación de Cauchy es la más sencilla y nos da la exactitud suficiente para modelar la dispersión cromática.

Por tal motivo, en nuestro trabajo utilizaremos la ecuación de Cauchy para la dispersión, tomando los coeficientes publicados en [16], los cuales son una combinación de los datos de Le Grand [26] y Navarro [6].

La ecuación de Cauchy establece que la dispersión de los medios oculares está dada como:

$$n(\lambda) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\lambda^2} + \frac{\alpha_2}{\lambda^4} + \frac{\alpha_3}{\lambda^6} \quad (3.51)$$

donde los coeficientes α_0 , α_1 , α_2 y α_3 para cada medio ocular se muestran en la tabla 3.1.

| | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|------------|------------|------------------------|-------------------------|---------------------------|
| Córnea | 1.361594 | 6.009687×10^3 | -6.760760×10^8 | 5.908450×10^{13} |
| Acuoso | 1.321631 | 6.070796×10^3 | -7.062305×10^8 | 6.147861×10^{13} |
| Cristalino | | | | |
| Alto | 1.389248 | 6.521218×10^3 | -6.110661×10^8 | 5.908191×10^{13} |
| Bajo | 1.369486 | 6.428455×10^3 | -6.023738×10^8 | 5.824149×10^{13} |
| Vítreo | 1.322357 | 5.560240×10^3 | -5.817391×10^8 | 5.036810×10^{13} |

Tabla 3.1 Coeficientes de la ecuación de dispersión de Cauchy para cada medio ocular.

Los índices de refracción que se obtienen haciendo uso de las ecuaciones de Navarro y de Cauchy muestran el mismo comportamiento, con la diferencia que la primera da índices de refracción un poco mayores. En la figura 3.9 se muestra en particular cómo es la variación del índice de refracción del humor acuoso con respecto a la longitud de onda utilizando ambas ecuaciones.

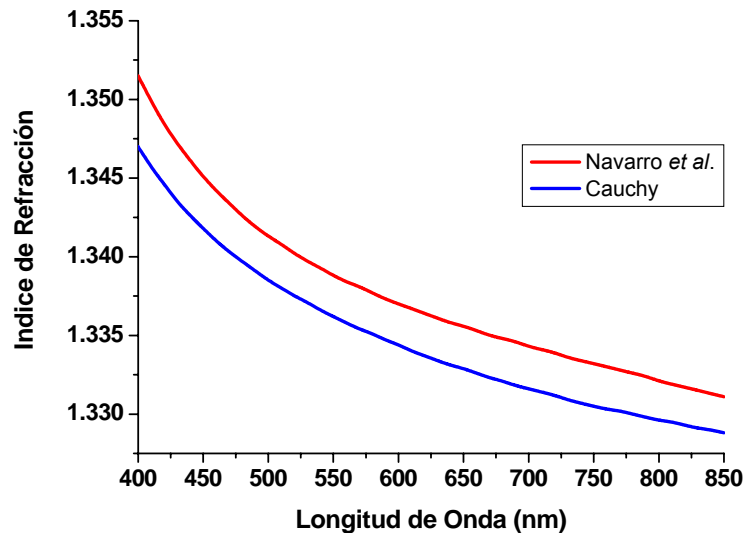


Figura 3.9 Variación del índice de refracción del humor acuoso con respecto a la longitud de onda, utilizando la ecuación de Navarro et al. y la ecuación de Cauchy para la dispersión.

Capítulo 4

Simulación del modelo del ojo humano bajo distintas consideraciones

4.1 Introducción

Los optometristas y oftalmólogos necesitan saber qué tanto cambia la potencia refractiva del ojo considerando los factores que pueden alterarla, tales como una córnea con un radio de curvatura distinto del típico, un globo ocular más grande o más pequeño de lo normal, y diversos factores que hacen que un ojo no sea emétrope. Por tal motivo es importante hacer un análisis de la potencia refractiva del ojo bajo diferentes estimaciones.

Existen algunos trabajos publicados donde se modelan una o más partes del ojo humano haciendo uso de las matrices ABCD [30-32], pero su objetivo no es describir el comportamiento del ojo bajo condiciones reales, tales como los factores que influyen para que un ojo tenga errores de refracción.

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos con la simulación en Matlab de nuestro modelo del ojo humano. El desarrollo del

capítulo se hará como sigue: en la sección 4.2 se dan las condiciones y el método para realizar un programa que pueda darnos información sobre el comportamiento del ojo bajo distintas consideraciones. En la sección 4.3 se presentan los índices de refracción de cada medio óptico obtenidos a distintas longitudes de onda haciendo uso de la ecuación (3.51) para la dispersión. Luego, en la sección 4.4 se muestran los resultados de la potencia refractiva obtenida considerando que alguna superficie o medio ocular varía dentro de un intervalo dado. Se obtienen resultados para el caso en que el cristalino es de índice no gradiente y de índice gradiente. Posteriormente, en la sección 4.5 presentamos esquemas obtenidos con la programación de la propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo para ambos casos estudiados, así como diagramas de manchas formados en el plano de la retina y en el plano del mejor foco. Finalmente, en la sección 4.6 mencionamos otro tipo de resultados que también se pueden obtener con nuestro modelo del ojo.

4.2 Método de programación del modelo del ojo humano

Para desarrollar el modelo del ojo humano con matrices ABCD, vamos a tomar en cuenta cada una de las superficies y medios que lo conforman, los cuales se muestran en el esquema del ojo de la figura 4.1.

Si nos fijamos en el ojo como un sistema óptico, tenemos que la córnea está formada por dos superficies esféricas de radios de curvatura positivos con un medio de índice de refracción constante entre ellas. El cristalino es una lente convergente formada por dos superficies esféricas, una con radio de curvatura positivo y la otra con radio negativo, y con un medio de índice gradiente entre ellas. Entre la córnea y el cristalino se encuentra un medio con un cierto espesor e índice de refracción constante, y

entre el cristalino y el plano de la retina se encuentra otro medio con características similares.

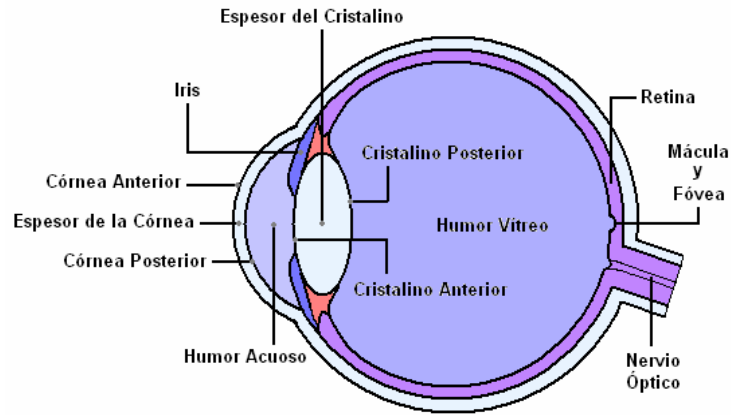


Figura 4.1 Esquema del ojo humano donde se muestra cada una de las superficies y medios a tomar en cuenta para el desarrollo del modelo con matrices ABCD.

Por tanto, a cada uno de los elementos ópticos que constituyen el ojo es posible asociarle una matriz ABCD. Para ello nos fijaremos en el sistema óptico del ojo mostrado en la figura 4.2, donde también se presentan los símbolos de los parámetros que utilizaremos en la simulación.

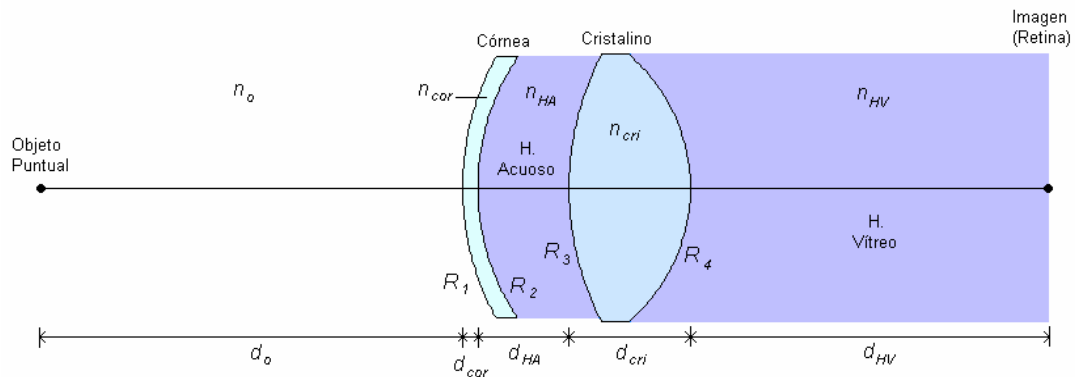


Figura 4.2 Sistema óptico del ojo humano indicando los nombres de los parámetros para cada elemento óptico que utilizaremos en la programación.

Vamos a considerar que los rayos viajan de izquierda a derecha y que son emitidos por una fuente puntual colocada a una distancia de 6 m desde la primera superficie del ojo, ya que a esta distancia se estima que un ojo está relajado.

Puesto que el diámetro de la pupila puede variar de 2 a 8 mm, asumiremos que el conjunto de rayos emitidos por la fuente puntual inciden en la córnea a una altura no mayor de 4 mm del eje óptico, y están separados 0.5 mm uno del otro, aunque es posible hacer el análisis con un mayor número de rayos. De esta forma, podemos calcular fácilmente la pendiente de cada uno de los rayos de entrada al sistema óptico, ya que conocemos las alturas a las que inciden sobre la córnea y la distancia a la cual está situado el objeto. Con tales consideraciones tendremos simetría radial de los rayos incidiendo a la primera superficie del ojo.

Con las consideraciones anteriores y de acuerdo a lo visto en la sección 3.2.5, la matriz ABCD que describe al sistema óptico es una matriz equivalente que se obtiene multiplicando las matrices de cada uno de los elementos ópticos, iniciando por la matriz correspondiente al medio donde se forma la imagen, y finalizando con la matriz que corresponde a la primera superficie. El término C de la matriz equivalente es el que nos dará información sobre la potencia refractiva del ojo.

Por medio de un programa desarrollado en Matlab calcularemos la multiplicación de matrices, así como la propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo. En el programa consideraremos el cambio en los índices de refracción de los medios oculares para distintas longitudes de onda siguiendo la ecuación (3.51).

Como resultado podemos obtener la potencia refractiva total del ojo en dioptrías, y por tanto también conocer su longitud focal efectiva. Los valores de radios de curvatura y espesores del ojo que utilizamos en la programación, son los típicos que se conocen para un ojo relajado, y se muestran en la tabla 4.1.

Posteriormente realizaremos variaciones de algunos parámetros tales como espesores y radios de curvatura de los elementos oculares, con el fin de analizar los cambios en la potencia refractiva.

En nuestro análisis y simulación también tomaremos en cuenta dos casos: considerando al cristalino como un medio de índice de refracción fijo, y como un medio con índice gradiente, para poder deducir las diferencias que existen entre ambas situaciones.

| Descripción | Símbolo | Valor típico |
|--|-----------|--------------|
| Distancia del objeto a la primera superficie | d_0 | 6 m |
| Espesor de la córnea | d_{cor} | 0.5 mm [13] |
| Espesor del humor acuoso | d_{HA} | 3 mm [13] |
| Espesor del cristalino | d_{cri} | 4 mm [15] |
| Espesor del humor vítreo | d_{HV} | 16.6 mm [5] |
| Radio de curvatura de la córnea anterior | R_1 | 7.8 mm [5] |
| Radio de curvatura de la córnea posterior | R_2 | 6.7 mm [13] |
| Radio de curvatura del cristalino anterior | R_3 | 10 mm [13] |
| Radio de curvatura del cristalino posterior | R_4 | - 6 mm [5] |

Tabla 4.1 Simbología y valores que utilizamos para los radios de curvatura y espesores de los distintos elementos ópticos del ojo.

4.3 Índices de refracción de los medios oculares para distintas longitudes de onda

Los índices de refracción de los medios oculares que comúnmente se reportan en la literatura se obtienen en el punto medio del espectro electromagnético visible, es decir, a 555 nm. Nosotros tomamos como intervalo del espectro visible de 400 a 700 nm, con un punto medio de 550 nm. A este intervalo le añadimos una longitud de onda más de 850 nm con la finalidad de observar el comportamiento de la potencia refractiva.

Con el programa desarrollado y haciendo uso de la ecuación de Cauchy (3.51) para la dispersión, podemos calcular los índices de refracción de los medios oculares para cualquier longitud de onda que se desee. En particular, calculamos los índices de refracción a longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm, y se presentan en la tabla 4.2. Por otro lado, en la figura 4.3 se muestran las gráficas de los índices de refracción para cada medio ocular con respecto a la longitud de onda.

| Longitud de Onda | Índices de Refracción | | | | |
|------------------|-----------------------|---------------------|------------------------|------------------------|---------------------|
| | <i>Córnea</i> | <i>Humor Acuoso</i> | <i>Cristalino Alto</i> | <i>Cristalino Bajo</i> | <i>Humor Vítreo</i> |
| 400 nm | 1.3872 | 1.3470 | 1.4206 | 1.4004 | 1.3467 |
| 550 nm | 1.3762 | 1.3362 | 1.4063 | 1.3863 | 1.3362 |
| 700 nm | 1.3715 | 1.3316 | 1.4005 | 1.3806 | 1.3317 |
| 850 nm | 1.3688 | 1.3288 | 1.3973 | 1.3774 | 1.3291 |

Tabla 4.2 Índices de refracción de los medios oculares a cuatro longitudes de onda distintas.

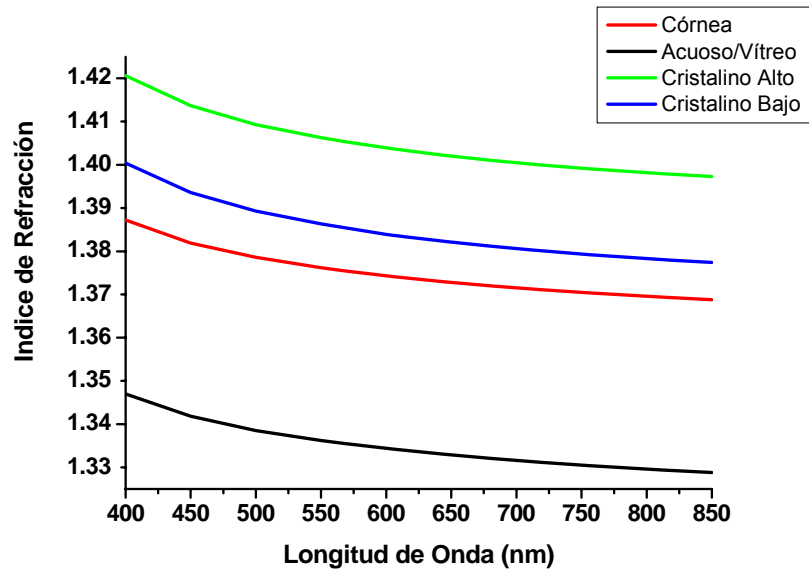


Figura 4.3 Variación del Índice de refracción con respecto a la longitud de onda de los siguientes medios oculares: — Cristalino Alto, — Cristalino Bajo, — Córnea, — Humor Acuoso y Humor Vítreo.

4.4 Simulación de la potencia refractiva considerando variaciones en las superficies y medios ópticos

Inicialmente variamos los espesores de los medios oculares, con el fin de observar su influencia sobre la potencia refractiva total del ojo, y posteriormente variamos los radios de curvatura de las superficies. Todos los resultados siguientes se obtienen considerando dos casos: (a) para el caso en que el cristalino es de índice no gradiente y (b) de índice gradiente.

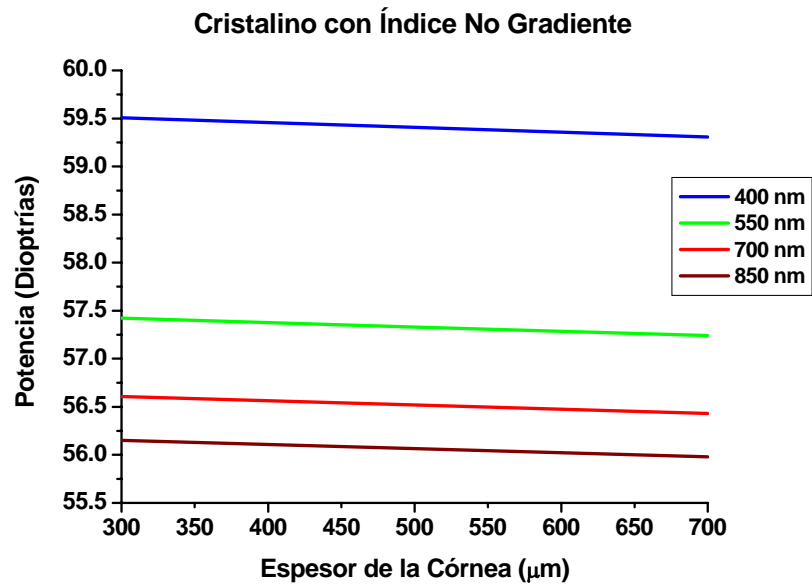
Algunos resultados que mencionaremos a continuación están promediados, y son aquellos cuyos valores tienen una diferencia mínima con respecto a los demás en el conjunto de gráficas a discutir.

4.4.1 Simulación de la potencia refractiva variando los espesores de los medios oculares

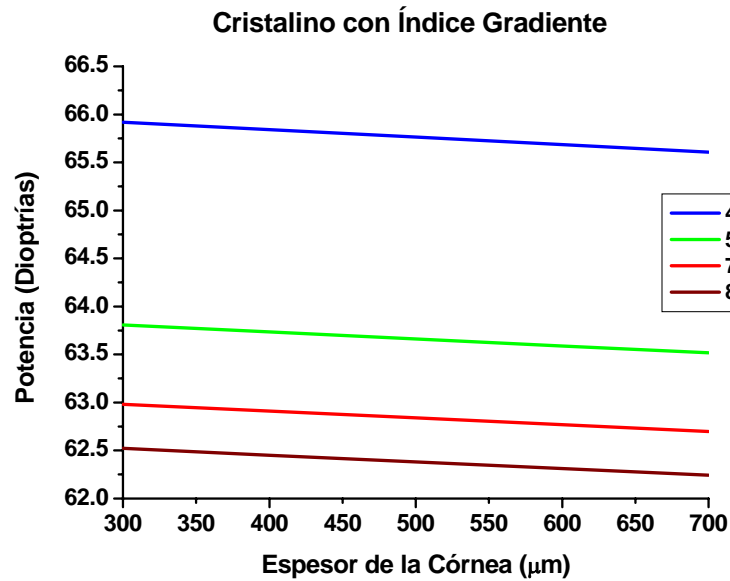
En la figura 4.4 mostramos los resultados obtenidos al variar el espesor de la córnea, en un intervalo de 300 a 700 μm , donde el promedio es 500 μm , el cual es el valor del espesor típico de la córnea. Este intervalo se escogió puesto que en el Capítulo 2 mencionamos que el espesor de la córnea se encuentra comprendido entre 400 y 670 μm .

En todo el intervalo dado de variación del espesor de la córnea, la razón de cambio en potencia total es pequeña, con un valor promedio de 0.18 dioptrías para el caso no gradiente (a), y 0.29 dioptrías para el caso gradiente (b).

Con respecto a longitud de onda, en el intervalo de 400 a 550 nm la razón de cambio en potencia en éste y todos los casos discutidos a continuación es casi el mismo, teniendo en promedio 2 dioptrías de cambio. De 550 a 700 nm la razón de cambio en potencia también es semejante para todos los casos, con un promedio de 0.84 dioptrías. De la misma forma, en el intervalo de 700 a 850 nm la potencia tiene una razón de cambio de 0.47 dioptrías en promedio para todos los casos.



(a)



(b)

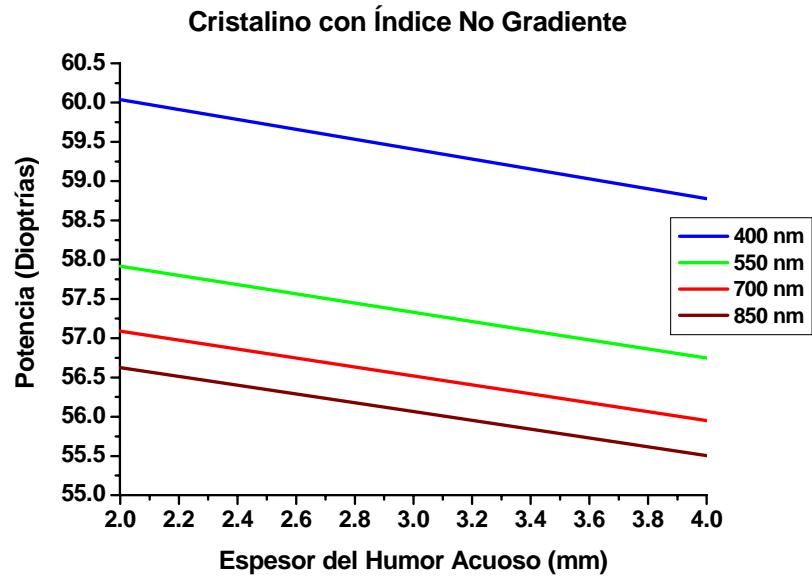
Figura 4.4 Potencia total del ojo como función del espesor de la córnea para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.

En la figura 4.5 se presentan los resultados obtenidos al variar el espesor del humor acuoso, en un intervalo de 2 a 4 mm. No sabemos con exactitud un intervalo dentro del cual varíe el espesor del humor acuoso en distintos individuos, pero proponemos este intervalo por el simple hecho de que el promedio es el valor típico de 3 mm, y con la finalidad de observar los resultados que trae consigo la variación de éste parámetro.

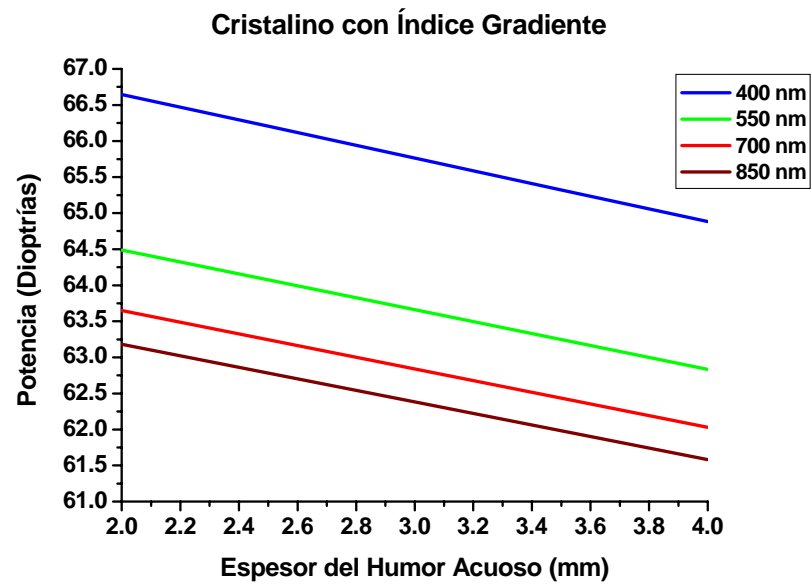
En todo el intervalo propuesto de variación del espesor del humor acuoso, la razón de cambio promedio en potencia es de 1.19 dioptrías para el caso no gradiente y de 1.68 dioptrías para el caso gradiente, por lo que la inclinación de las líneas graficadas es mayor que las de la figura 4.4.

En la figura 4.6 se muestran los resultados obtenidos al variar el espesor del cristalino en un intervalo de 3 a 5 mm. Se propone este intervalo puesto que son valores dentro de los que varía el espesor del cristalino durante la acomodación [13], y el promedio en dicho intervalo es el valor típico de 4 mm.

En todo el intervalo de variación del espesor del cristalino propuesto, la razón de cambio promedio en potencia es de 0.8 dioptrías para el caso no gradiente y de 2 dioptrías para el caso gradiente. A diferencia de las figuras 4.4 y 4.5, en la figura 4.6 podemos notar que la inclinación de las líneas graficadas es diferente para el caso gradiente, puesto que ahora van de menor a mayor valor.

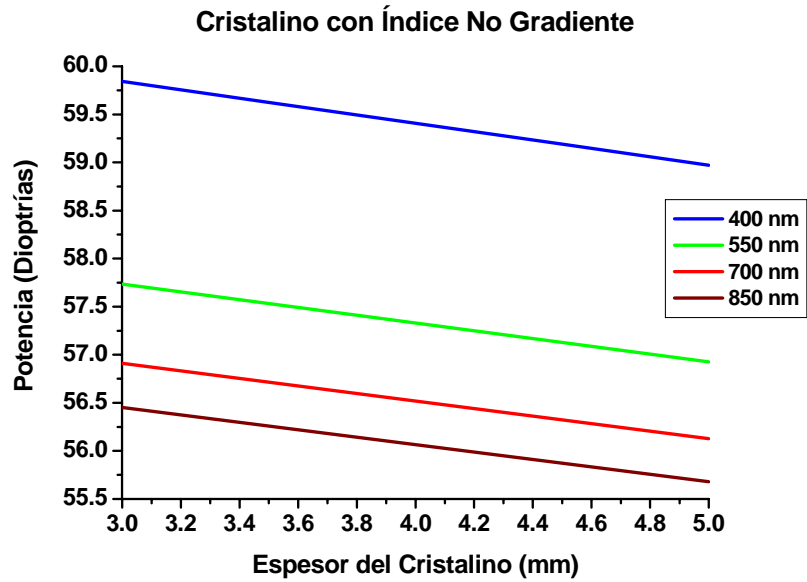


(a)

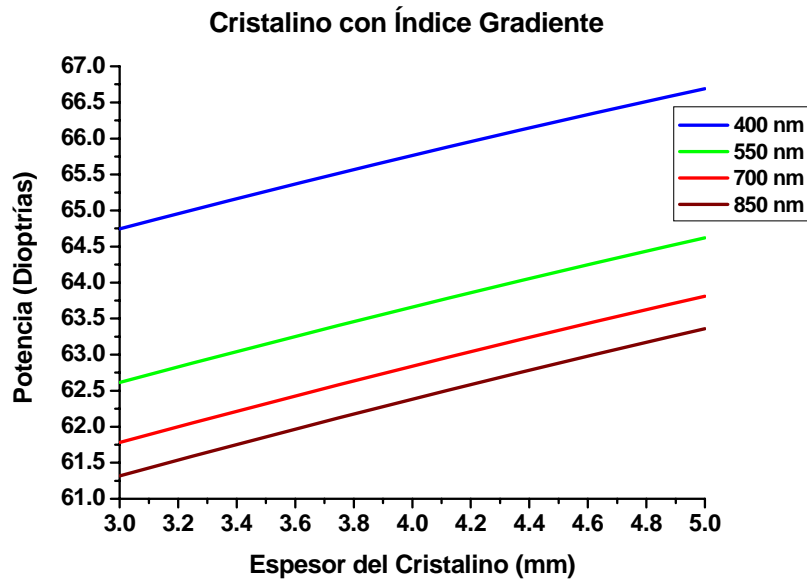


(b)

Figura 4.5 Potencia total del ojo como función del espesor del humor acuoso para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.



(a)



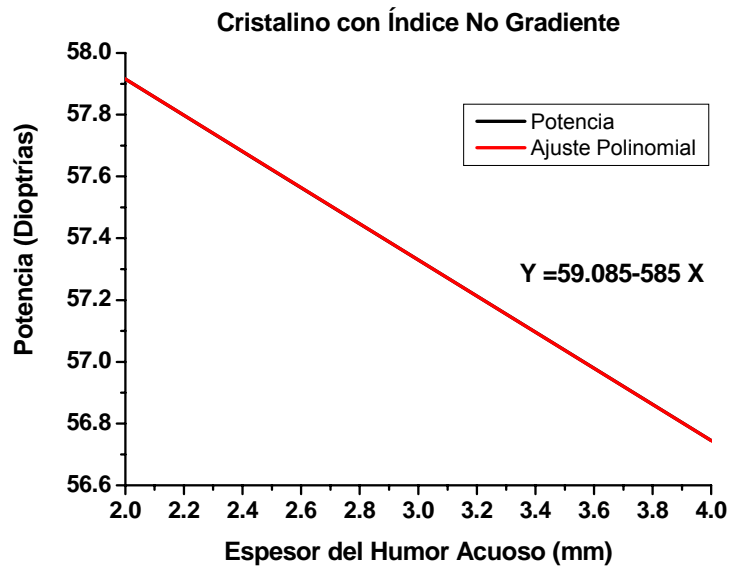
(b)

Figura 4.6 Potencia total del ojo como función del espesor del cristalino para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.

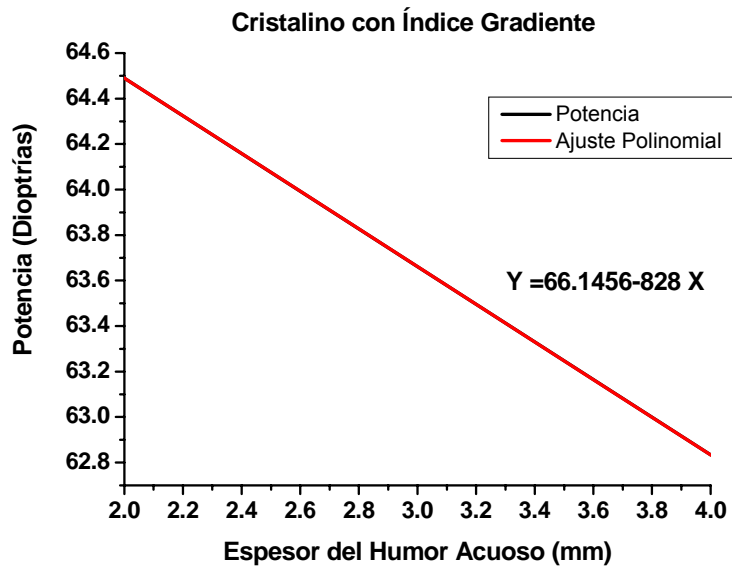
De acuerdo a las figuras 4.4 a 4.6, podemos notar que la potencia depende linealmente con respecto a variaciones de los espesores, es decir, de la forma $P_L = U_1x + V_1$. Como caso particular, en la tabla 4.3 presentamos los valores de U_1 y V_1 correspondientes a las rectas graficadas de potencia que se obtuvieron a 550 nm. En la figura 4.7 se muestran las gráficas del ajuste polinomial para variaciones del espesor del humor acuoso.

| | | Espesor variado | | |
|------------------------------------|--------------------|-----------------|------------|----------------|
| | | de la córnea | del acuoso | del cristalino |
| Cristalino No Gradiente | U_1 [m^{-2}] | -453 | -585 | -403.36 |
| | V_1 [m^{-1}] | 57.55 | 59.08 | 58.94 |
| Cristalino Gradiente | U_1 [m^{-2}] | -727.53 | -828 | 1004.41 |
| | V_1 [m^{-1}] | 64.02 | 66.14 | 59.62 |

Tabla 4.3 Valores de U_1 y V_1 para las rectas graficadas de potencia de la forma $P_L=U_1x+V_1$ obtenidas con la simulación de nuestro modelo, para cada espesor variado a una longitud de onda de 550 nm.



(a)



(b)

Figura 4.7 Gráficas de ajuste polinomial donde se muestra la dependencia lineal de la potencia con respecto a variaciones en el espesor del humor acuoso. Los datos se tomaron a una longitud de onda de 550 nm, con cristalino de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.

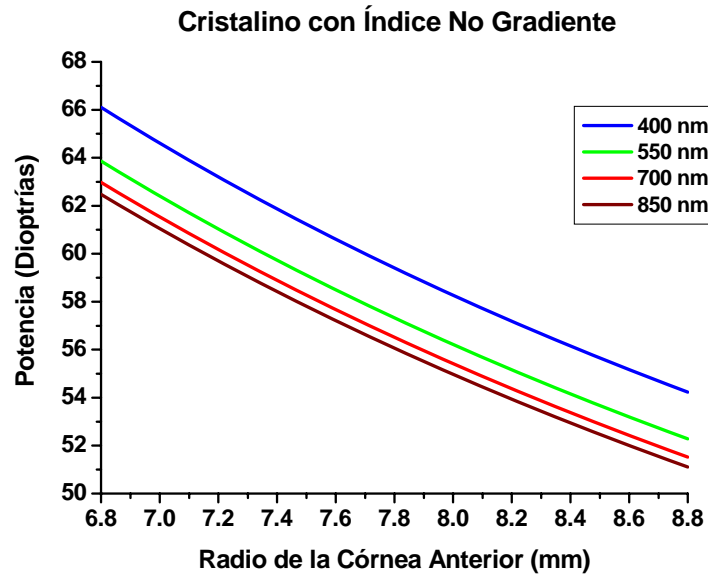
4.4.2 Simulación de la potencia refractiva variando los radios de curvatura de los elementos ópticos del ojo

Otros parámetros que variamos fueron los radios de curvatura de algunas superficies, por ejemplo, la córnea anterior, que es la superficie refractora más importante del ojo; así como los radios de curvatura del cristalino anterior y posterior, puesto que cambian debido a la acomodación.

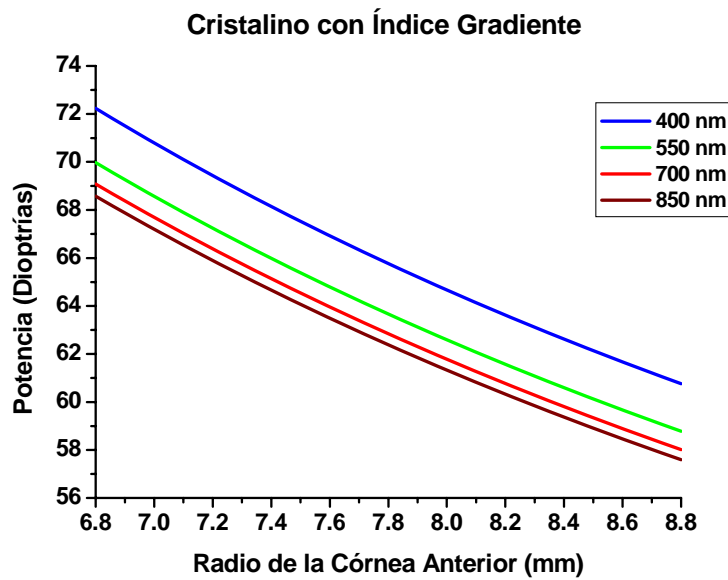
En la figura 4.8 mostramos los resultados obtenidos al variar el radio de curvatura de la superficie anterior de la córnea, en un intervalo de 6.8 a 8.8 mm. Tomamos este intervalo puesto que los ojos que presentan alguna ametropía comúnmente tienen una córnea con un radio de curvatura menor o mayor del valor típico de 7.8 mm, y dicha diferencia puede ser de alrededor de ± 1 mm.

A lo largo del intervalo de variación del radio de curvatura de la córnea anterior, la razón de cambio en potencia es grande, y para cada longitud de onda es casi la misma, teniendo un valor promedio de 11.61 dioptrías para el caso no gradiente y de 11.22 dioptrías para el caso gradiente.

Posteriormente, en la figura 4.9 presentamos los resultados obtenidos al variar el radio de curvatura del cristalino anterior, en un intervalo de 9 a 11 mm. Proponemos este intervalo porque el promedio es el valor típico de 10 mm, el cual tomamos como referencia y hacemos una variación de ± 1 mm con la finalidad de observar los resultados que trae consigo la variación de éste parámetro. A través de éste intervalo de variación, la razón de cambio en potencia es de 1.2 dioptrías en promedio para ambos casos.

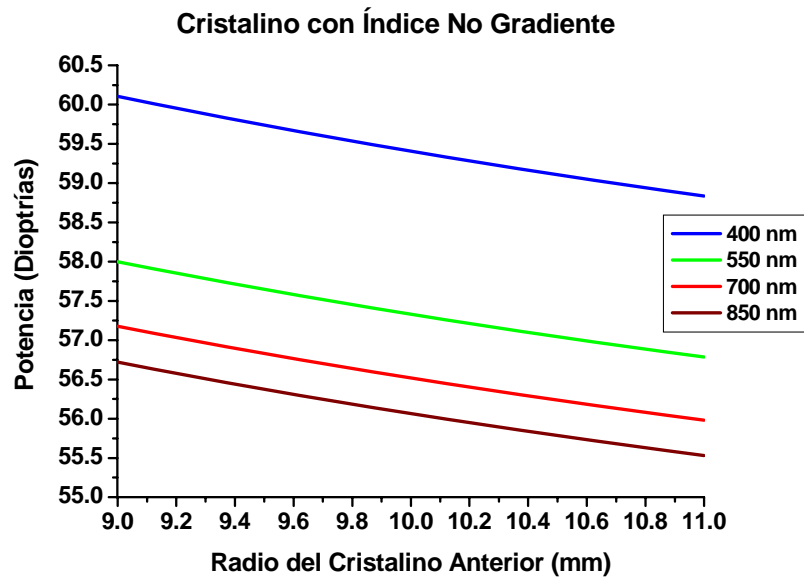


(a)

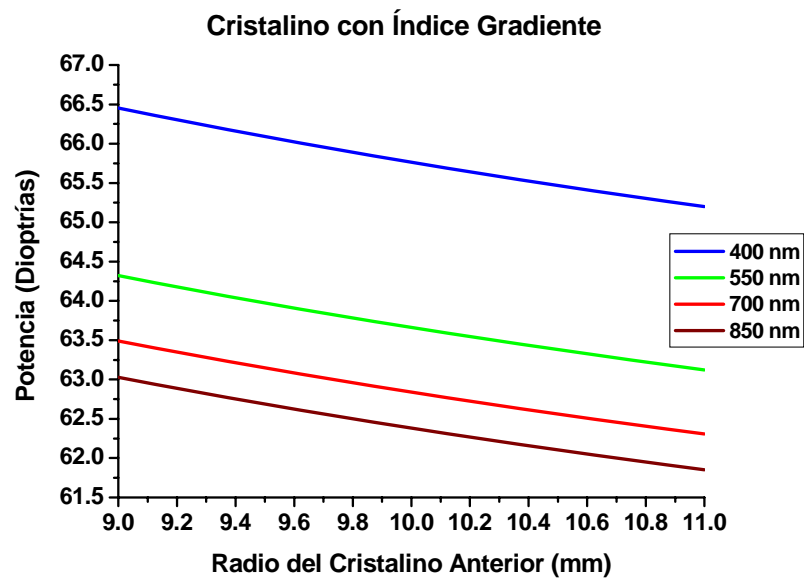


(b)

Figura 4.8 Potencia total del ojo como función del radio de curvatura de la superficie anterior de la córnea para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.



(a)



(b)

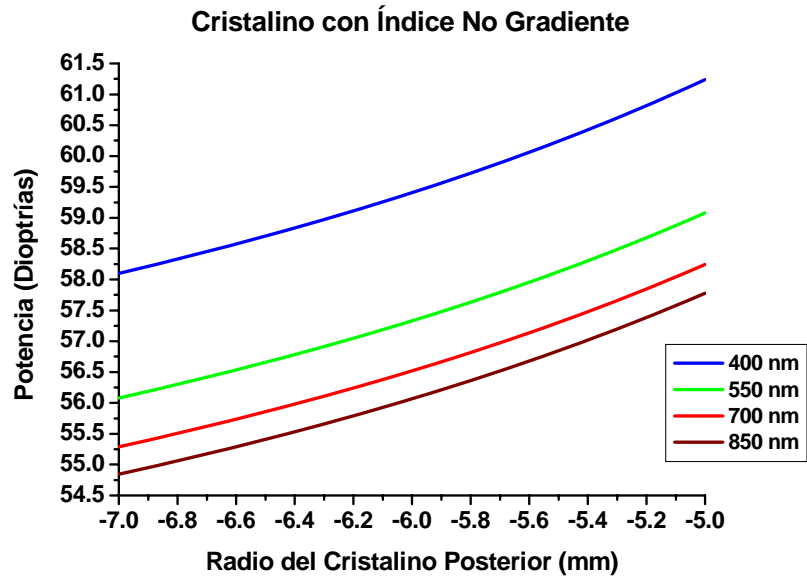
Figura 4.9 Potencia total del ojo como función del radio de curvatura de la superficie anterior del cristalino para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.

En la figura 4.10 se muestran los resultados obtenidos al variar el radio de curvatura de la superficie posterior del cristalino, en un intervalo de -7 a -5 mm. En todo este intervalo de variación, la razón de cambio promedio en potencia es de 3 dioptrías para ambos casos. También podemos notar que la inclinación de las curvas es diferente, puesto que ahora van de menor a mayor valor debido a que el radio de curvatura es negativo.

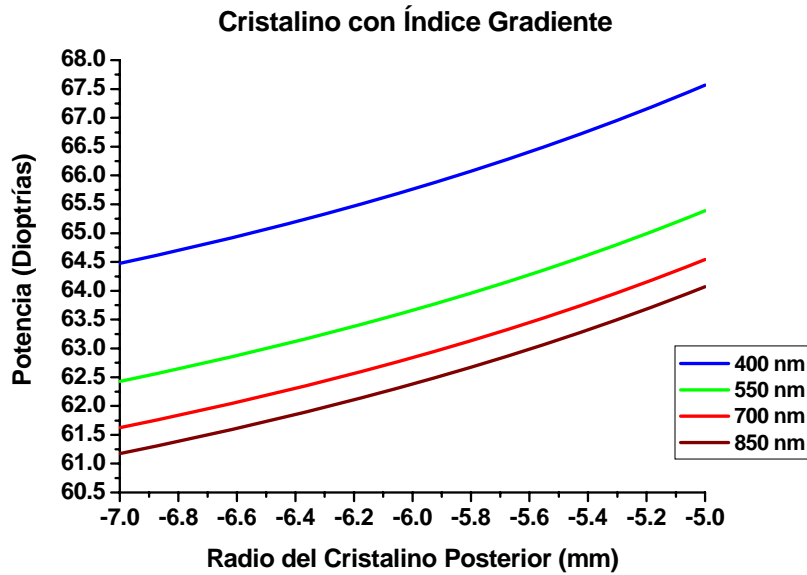
De acuerdo a las figuras 4.8 a 4.10, observamos que la dependencia de la potencia con respecto a variaciones de los radios de curvatura es de tipo cuadrática, o sea que $P_C = U_2x^2 + V_2x + W$. En particular presentamos los valores de U_2 , V_2 y W correspondientes a las curvas de potencia a 550 nm, y se dan en la tabla 4.4. En la figura 4.11 se muestran las gráficas del ajuste polinomial para variaciones del radio de curvatura anterior de la córnea.

| | | Radio variado | | |
|--------------------------------|--------------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| | | de la córnea anterior | del cristalino anterior | del cristalino posterior |
| Cristalino No Gradiente | U_2 [m ⁻³] | 742.25X10 ³ | 60.60X10 ³ | 250.17X10 ³ |
| | V_2 [m ⁻²] | -173.4X10 ² | -18.17X10 ² | 44.9X10 ² |
| | W [m ⁻¹] | 147.4 | 69.44 | 75.25 |
| Cristalino Gradiente | U_2 [m ⁻³] | 716.9X10 ³ | 59.97X10 ³ | 246.7X10 ³ |
| | V_2 [m ⁻²] | -167.5X10 ² | -17.97X10 ² | 44.3X10 ² |
| | W [m ⁻¹] | 150.69 | 75.64 | 81.35 |

Tabla 4.4 Valores de U_2 , V_2 y W para las curvas de potencia de la forma $P_C=U_2x^2+V_2x+W$ obtenidas con la simulación de nuestro modelo, para cada radio de curvatura variado a una longitud de onda de 550 nm.

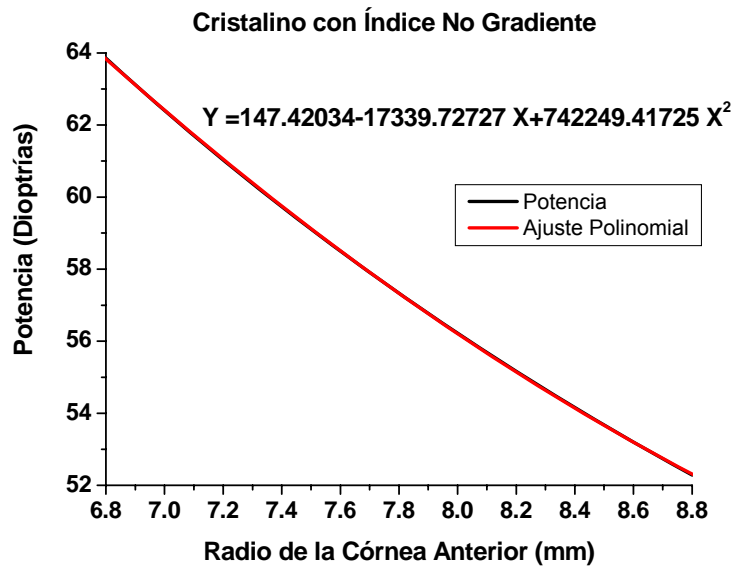


(a)

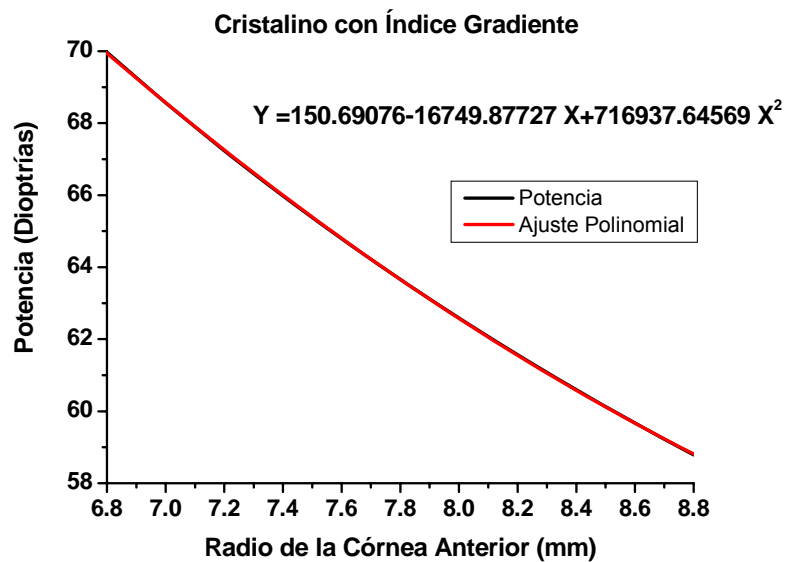


(b)

Figura 4.10 Potencia total del ojo como función del radio de curvatura de la superficie posterior del cristalino para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.



(a)



(b)

Figura 4.11 Gráficas de ajuste polinomial donde se muestra la dependencia cuadrática de la potencia con respecto a variaciones en el radio de curvatura anterior de la córnea. Los datos se tomaron a una longitud de onda de 550 nm, con cristalino de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.

De forma general, las gráficas de las figuras 4.4 a 4.11 muestran que la potencia es mayor para el caso en que el cristalino es de índice gradiente, con un promedio de 6.3 dioptrías más que en el caso no gradiente, a excepción de cuando variamos el espesor del cristalino (figura 4.6), donde la potencia es 4.8 dioptrías mayor en el caso gradiente.

El hecho de que la potencia sea mayor, conlleva a una distancia focal menor. Por ejemplo, para los casos con cristalino de índice no gradiente, las gráficas a 550 nm tienen un punto medio común en 57.3 dioptrías, lo que indica que la distancia focal del sistema es de 17.4 mm. Y para los casos de cristalino gradiente a 550 nm, el punto medio común es de 63.6 dioptrías, lo que conduce a obtener una distancia focal del sistema de 15.7 mm.

4.5 Simulación de la propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo

Además de las gráficas de potencia refractiva presentadas en la sección anterior, con nuestro programa también obtuvimos una visualización de la propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo.

En la figura 4.12 se muestra el esquema de la propagación de rayos en un ojo con cristalino de índice no gradiente, utilizando los parámetros dados en la tabla 4.1, a una longitud de onda de 550 nm. Podemos observar que los rayos se enfocan a una distancia de 25 mm, lo cual significa que la distancia desde la superficie posterior del cristalino a la retina sería de 17.5 mm, que es un valor de distancia focal muy parecido al dado en la sección 4.4 para el caso cristalino de índice no gradiente a 550 nm. En la figura 4.13 presentamos una ampliación de la figura 4.12 con la finalidad de mostrar que se define un foco.

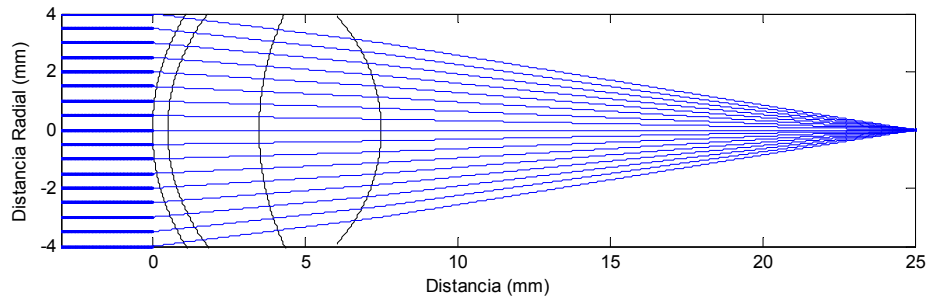


Figura 4.12 Propagación de rayos en un ojo con cristalino de índice de refracción fijo a una longitud de onda de 550 nm.

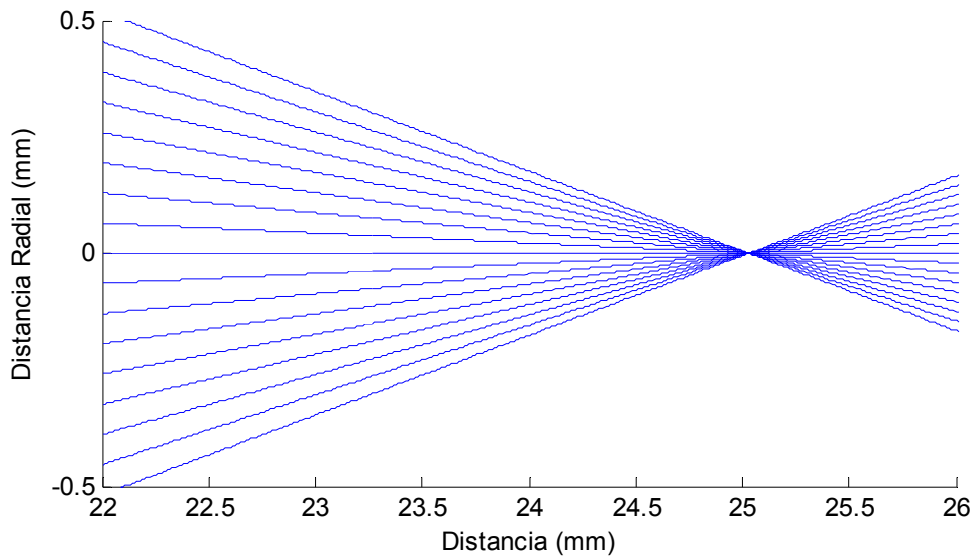


Figura 4.13 Detalle de la figura 4.12 en la región donde se enfocan los rayos.

En la figura 4.14 se esquematiza la propagación de rayos en un ojo con cristalino de índice gradiente, también utilizando los parámetros dados en la tabla 4.1, a una longitud de onda de 550 nm. Podemos observar que los rayos se enfocan aproximadamente a una distancia de 23.5 mm, lo cual significa que la distancia desde la superficie posterior del cristalino a la retina sería de 16 mm, que es un valor de distancia focal muy parecido al dado en la sección 4.4 para el caso cristalino de índice gradiente a 550 nm. En la

figura 4.15 presentamos una ampliación de la figura 4.14 en la región donde los rayos tienden a enfocarse.

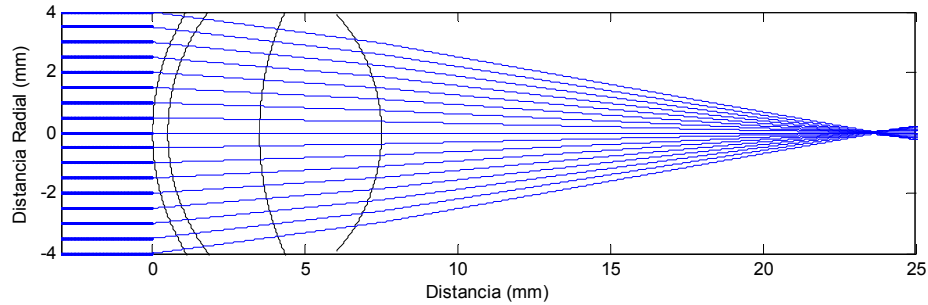


Figura 4.14 Propagación de rayos en un ojo con cristalino de índice gradiente, a una longitud de onda de 550 nm.

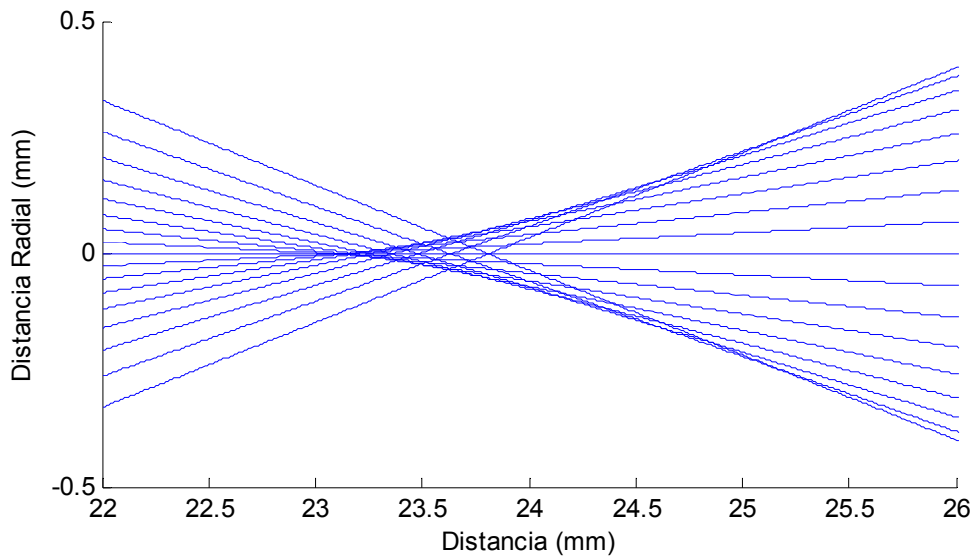


Figura 4.15 Detalle de la figura 4.14 en la región donde los rayos tienden a enfocarse.

En la figura 4.13 podemos notar que todos los rayos se enfocan en un punto, mientras que en la figura 4.15 no sucede esto y en la región donde los rayos tienden a formar un foco mínimo se observa una cáustica por el hecho de tener cristalino de índice gradiente.

En las figuras 4.16 y 4.17 se muestran los rayos pasando a través de las regiones focales para el caso cristalino no gradiente y cristalino gradiente respectivamente, pero ahora incluyendo tres longitudes de onda distintas: 400, 550 y 700 nm. La longitud de onda de 850 nm no se incluye puesto que el foco se asemeja al formado en 700 nm.

Para el caso con cristalino de índice no gradiente la aberración cromática es de 0.89 en el intervalo de 400 a 700 nm, y en el caso gradiente es de 0.74. Estos valores se midieron desde la posición donde se forma un ancho mínimo para cada longitud de onda.

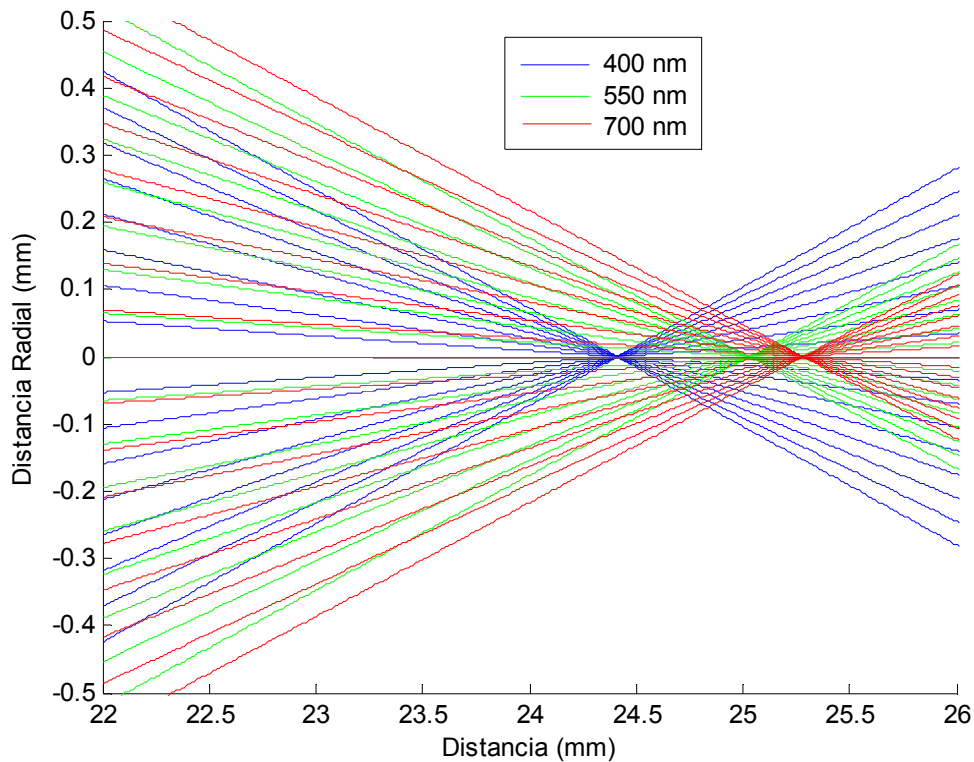


Figura 4.16 Rayos pasando a través de la región focal del ojo con cristalino de índice de refracción fijo para tres longitudes de onda: 400, 550 y 700 nm.

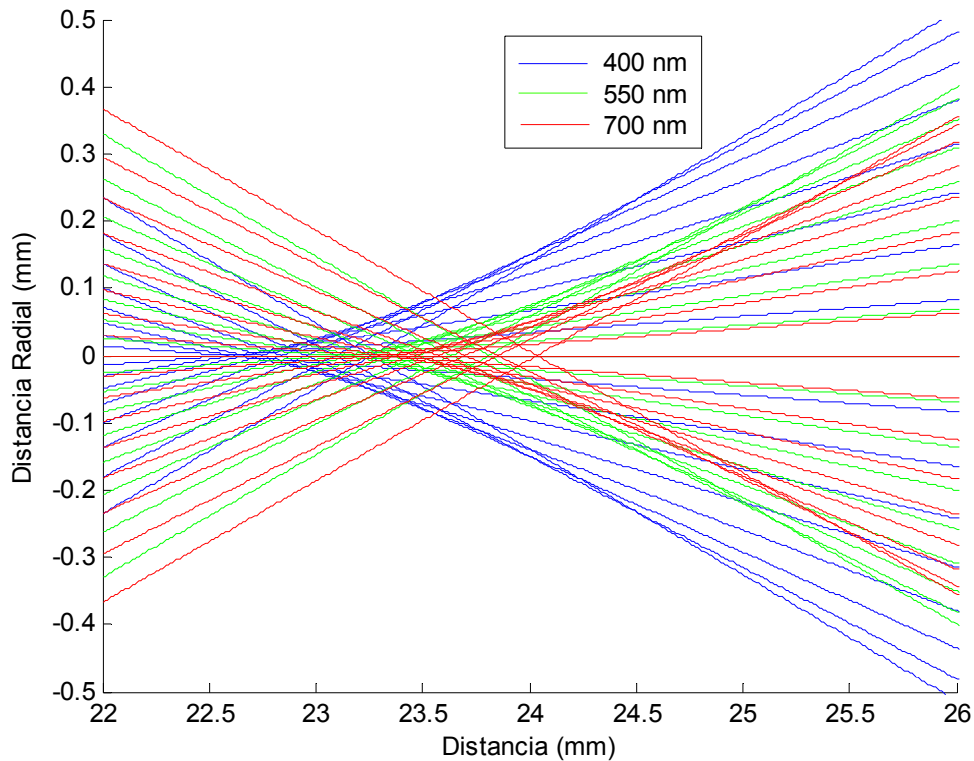
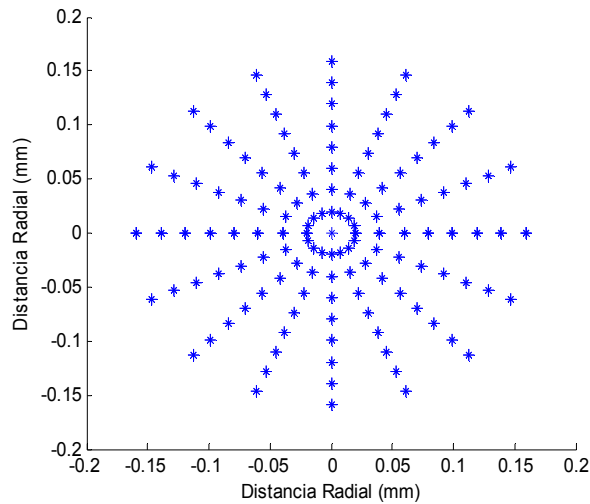


Figura 4.17 Rayos pasando a través de la región focal del ojo con cristalino de índice gradiente para tres longitudes de onda: 400, 550 y 700 nm.

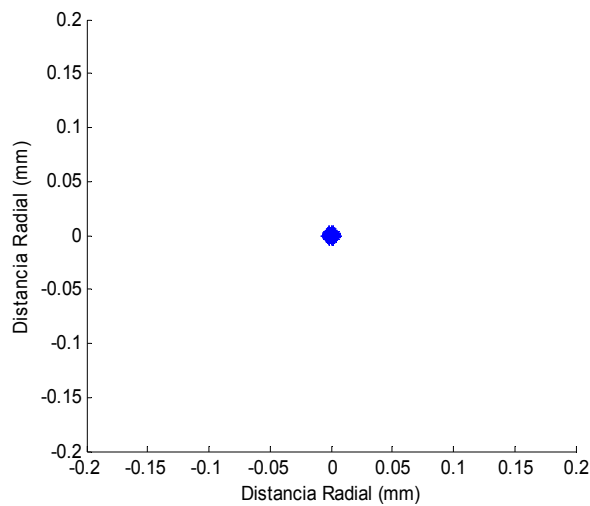
Otros resultados que también podemos obtener como consecuencia de la simulación del modelo, son los llamados diagramas de manchas (spot diagrams) que se forman a lo largo del sistema óptico del ojo. En particular nos interesan los diagramas de manchas en el plano de la retina y en el plano donde hay una mayor densidad de rayos, al que llamaremos plano donde se forma el mejor foco.

En la figura 4.18 se muestran los diagramas de manchas para el caso cristalino de índice no gradiente. De acuerdo a los parámetros dados a una longitud de onda de 550 nm, el plano retinal está a una distancia de 16.6 mm desde la superficie posterior del cristalino, y el plano del mejor foco a 17.55 mm. En el plano de la retina el tamaño de la mancha es de casi 0.32 mm de

diámetro, y en la figura 4.19 mostramos una ampliación de la figura 4.18 (b), donde podemos observar que la mayor cantidad de luz se concentra en un área de casi 0.008 mm de diámetro. De acuerdo a la figura 4.18 (b), en el plano del mejor foco se forma una mancha casi puntual, dependiendo de la escala que estemos manejando.



(a)



(b)

Figura 4.18 Diagramas de manchas para el caso cristalino no gradiente a 550 nm a) en el plano retinal y b) en el plano donde se forma el mejor foco.

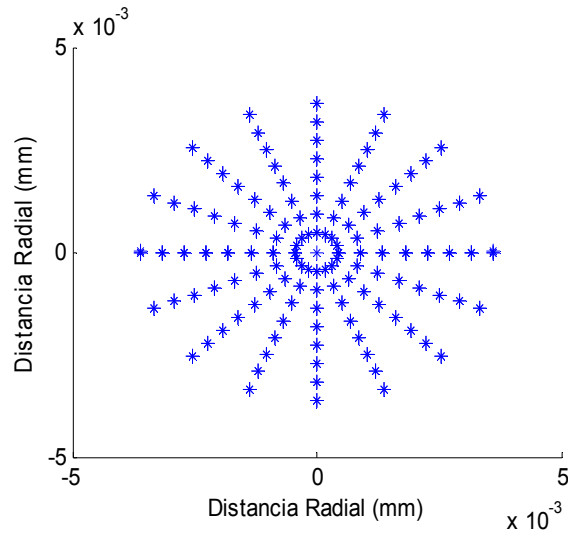
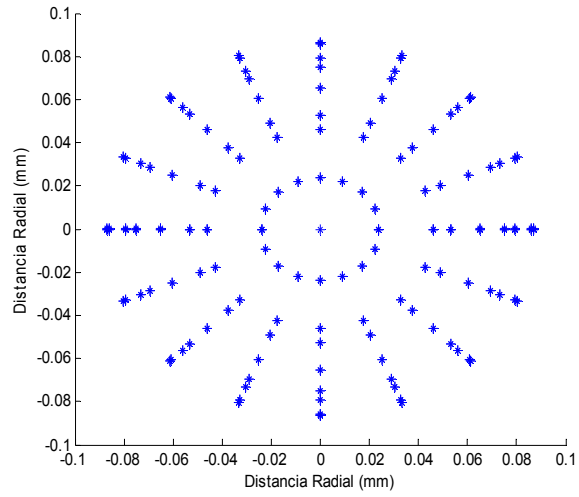
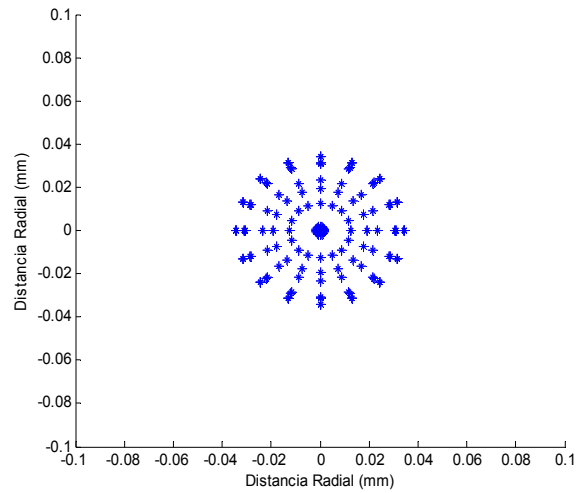


Figura 4.19 Ampliación de la figura 4.18 (b), donde podemos apreciar el tamaño de la mancha en el plano donde se forma el mejor foco.

En la figura 4.20 se muestran los diagramas de manchas para el caso cristalino de índice gradiente en el plano de la retina (16.6 mm), y en el plano donde se forma el mejor foco (16.121 mm), a una longitud de onda de 550 nm. En el plano de la retina el tamaño de la mancha es de casi 0.18 mm de diámetro, y donde se forma el mejor foco la mancha tiene un diámetro de casi 0.08 mm, lo cual es mas evidente en la ampliación que hacemos a la figura 4.20 (b), y que se muestra en la figura 4.21. También podemos observar que la separación entre los rayos no es constante, a diferencia del caso cristalino no gradiente.



(a)



(b)

Figura 4.20 Diagramas de manchas para el caso cristalino gradiente a 550 nm
a) en el plano retinal y b) en el plano donde se forma el mejor foco.

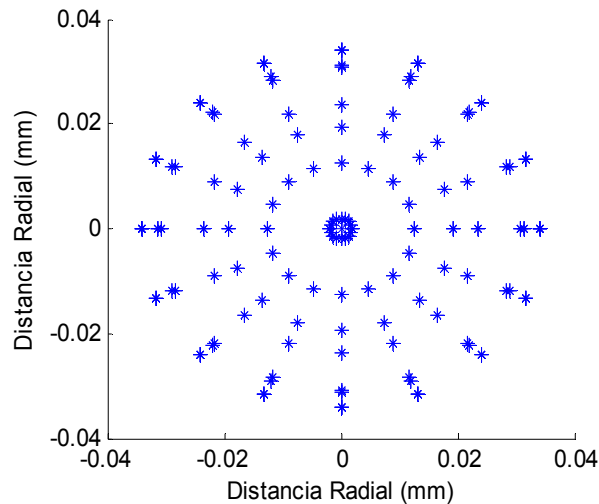


Figura 4.21 Ampliación de la figura 4.20 (b), donde podemos apreciar el tamaño de la mancha en el plano donde se forma el mejor foco.

Siedlecki, Kasprzak y Pierscionek publicaron un trabajo [12] en el cual proponen un modelo del ojo con cristalino de índice gradiente de distribución de tipo exponencial. Realizan una simulación de su modelo y de cinco modelos existentes: Emsley, Gullstrand No. 1 y No. 2, Le Grand y Hage, y Kooijman. En sus resultados presentan diagramas de manchas en el plano de la retina y en el plano donde se forma el mejor foco, obteniendo con su modelo una mancha de menor diámetro que los demás, con sólo 0.0076 mm de diámetro en el plano del mejor foco y 0.024 mm en el plano de la retina. Con éstos resultados concluyen que su modelo mejora la calidad de la imagen, y puede servir como un modelo para implantes intraoculares.

Si comparamos nuestros resultados con los de Siedlecki *et al.* en el plano del mejor foco -puesto que la posición del plano de la retina reportada en la literatura no siempre es la misma y en la mayoría de este tipo de estudios del ojo es mas importante saber dónde se enfocan los rayos-, nuestro modelo con cristalino de índice de refracción fijo da el mismo valor

que ellos reportan. Sin embargo, nuestro modelo con cristalino de índice gradiente da un tamaño de mancha mayor, lo cual puede deberse a que el tipo de distribución que ellos proponen es diferente a la nuestra, pero el tamaño de la mancha que obtenemos está muy cerca de las que presentan en [12] para los demás modelos que simulan.

4.6 Otros resultados que pueden obtenerse con el modelo del ojo propuesto

Además de los resultados presentados en las secciones anteriores, con el modelo del ojo desarrollado también podemos obtener la potencia refractiva de los elementos oculares individuales. Presentamos estos resultados debido a que algunas veces es importante conocer la potencia refractiva de los elementos oculares de forma individual para realizar correcciones en la visión.

De esta forma, si deseamos conocer la potencia refractiva de la córnea individualmente (como si estuviera en aire), solo basta con multiplicar tres matrices ABCD: la correspondiente a la superficie posterior, al espesor y a la superficie anterior de la córnea, en ese orden. Del mismo modo podemos conocer la potencia para la córnea unida al humor acuoso solamente modificando la primera matriz. También podemos saber la potencia para el cristalino individual (en aire), y el cristalino entre el humor acuoso y el humor vítreo

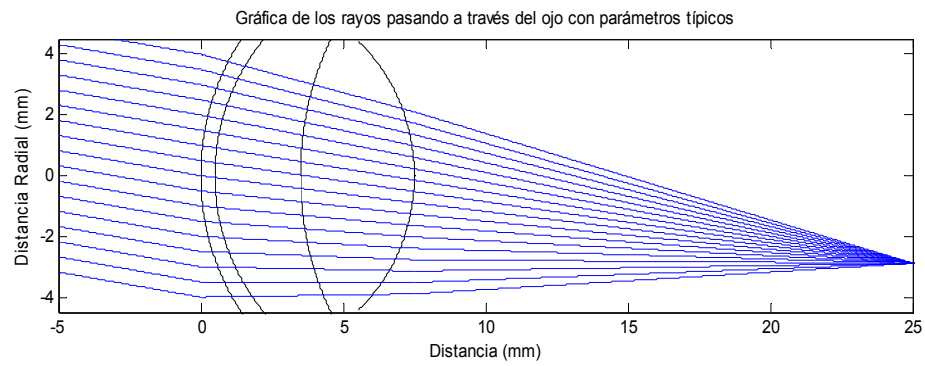
A una longitud de onda de 550 nm, se obtiene una potencia de -6.93 dioptrías para la córnea en aire, 42.36 dioptrías para la córnea unida al humor acuoso, y 18.45 dioptrías para el cristalino entre el humor acuoso y el vítreo.

Como se mencionó en el Capítulo 2, para corregir algunas ametropías es necesario el uso de elementos ópticos externos o internos al ojo, tales como lentes positivas o negativas o lentes intraoculares. Tales elementos pueden ser introducidos fácilmente en nuestro modelo, puesto que sólo se agregarían tres o cuatro matrices más para obtener una nueva matriz equivalente del sistema, con la finalidad de conocer la influencia de elementos ópticos adicionales sobre la potencia refractiva.

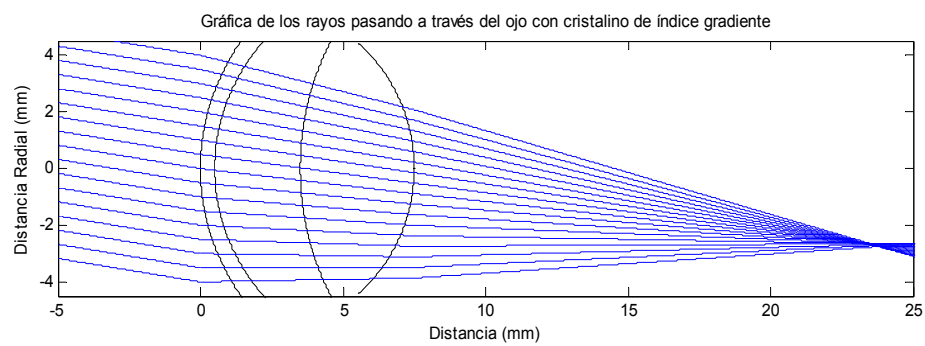
También es posible hacer la simulación del modelo con un objeto fuera de eje, siempre y cuando la altura del objeto sea tal que nos permita seguir en el régimen paraxial. En este trabajo nos limitaremos a presentar solamente los esquemas de la propagación de rayos teniendo un objeto fuera de eje.

En la figura 4.22 se muestra el esquema de la propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo con un objeto fuera de eje para los casos a) cristalino de índice no gradiente y b) cristalino de índice gradiente, a una longitud de onda de 550 nm. La altura del objeto es de 1 m, y está colocado a 6 m de distancia del ojo. Posteriormente, en la figura 4.23 mostramos una ampliación de las figuras 4.22 (a) y (b) en la región donde se enfocan los rayos, donde podemos observar que en dicha región los rayos se desvían una distancia de casi -2.9 mm del eje óptico para el caso no gradiente, y aproximadamente -2.7 mm para el caso gradiente.

Un estudio más a fondo de la potencia refractiva y la propagación de rayos a distintas longitudes de onda, los diagramas de manchas y las alturas y ángulos a considerarse para un objeto fuera de eje, se dejan para un trabajo a futuro.

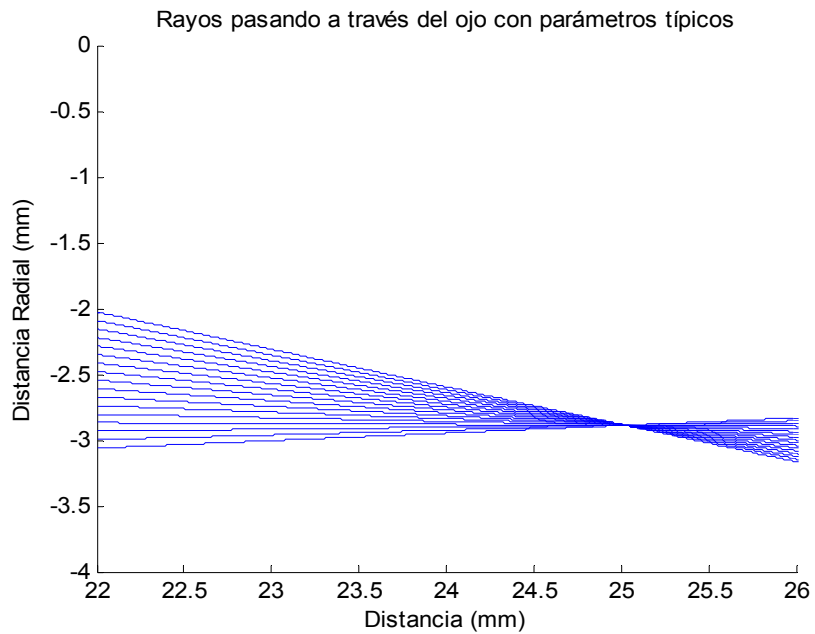


(a)

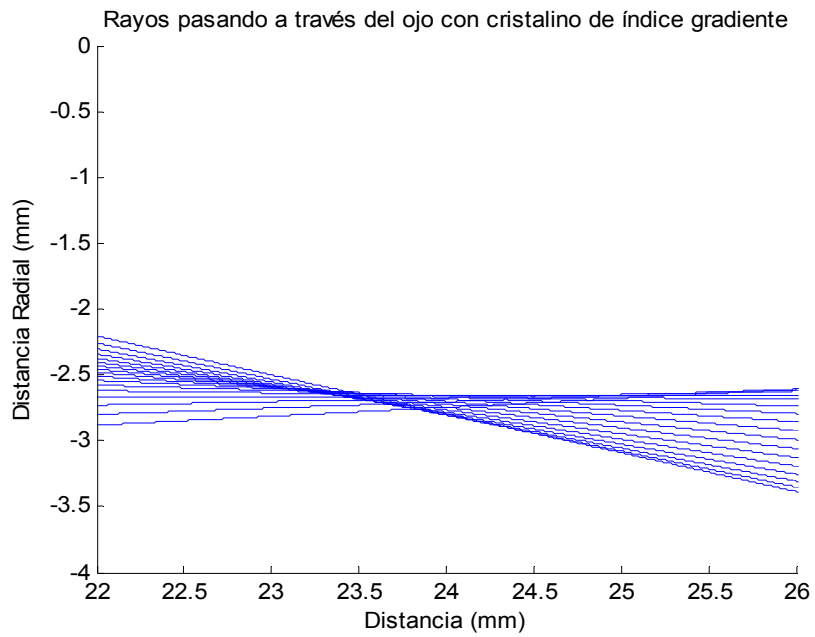


(b)

Figura 4.22 Propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo considerando un objeto de 1 m de altura colocado a 6 m de distancia del ojo con cristalino de índice a) no gradiente y b) gradiente, a una longitud de onda de 550 nm.



(a)



(b)

Figura 4.23 Ampliación de la figura 4.22 en la región donde se enfocan los rayos.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo del ojo humano basado en la propagación de rayos de luz, matrices ABCD y los parámetros correspondientes a cada una de las interfaces y medios asociados a cada elemento óptico del ojo, tales como espesores, radios de curvatura e índices de refracción.

Se realizó una serie de cálculos utilizando los parámetros típicos conocidos para un ojo relajado y la matriz ABCD asociada a todo el sistema óptico en conjunto del ojo, con el fin de conocer la influencia de algunos parámetros sobre la potencia refractiva del ojo. Se consideró al cristalino como un medio con índice de refracción fijo y como un medio con índice gradiente.

Se presentaron gráficas de la potencia refractiva del ojo con respecto a variaciones de longitud de onda y de parámetros tales como los espesores de la córnea, humor acuoso y cristalino, así como de los radios de curvatura de las superficies de la cornea anterior, cristalino anterior y cristalino posterior. Con las gráficas obtenidas se pudo analizar la potencia refractiva en función de los diferentes parámetros que variamos.

Con respecto a longitud de onda, en el intervalo de 400 a 550 nm la razón de cambio en potencia fue 2.5 veces mayor que de 550 a 700 nm, a pesar de ser intervalos iguales, y conforme aumenta la longitud de onda, este cambio se va haciendo cada vez menor.

Por otra parte la potencia disminuye cuando los espesores aumentan, a excepción de cuando variamos el espesor del cristalino en el caso gradiente, donde ocurrió lo contrario. La razón de cambio en potencia fue mayor para variaciones del espesor del humor acuoso y menor para variaciones del espesor de la córnea anterior.

La potencia también disminuye cuando los radios de curvatura de la córnea y el cristalino anterior aumentan, contrario a cuando aumenta el radio del cristalino posterior. La razón de cambio en potencia fue mayor para variaciones del radio de la córnea anterior, con casi 6 dioptrías en un intervalo de tan solo un milímetro, y menor para variaciones del radio del cristalino anterior con tan solo 1.2 dioptrías en un intervalo de 2 mm.

El valor de la potencia fue menor para el caso cristalino de índice no gradiente, y mayor para el caso cristalino gradiente. Por lo que la distancia focal efectiva fue mayor en el primer caso y menor en el segundo. Fuera de esto, en ambos casos el comportamiento de la potencia fue prácticamente el mismo para las variaciones de los parámetros considerados.

Se obtuvo también una representación esquemática de la propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo, además de diagramas de manchas formados en el plano retinal y en la región donde se forma el mejor foco, con lo que se pudo revisar en qué posición tiende a enfocar el sistema óptico.

Se expuso que con nuestro modelo es posible obtener la potencia de elementos individuales del ojo, y por consiguiente, de lentes internas o externas del ojo. Además de que podemos extender el modelo a un objeto fuera de eje cuya altura propuesta nos permita estar aún en el régimen paraxial.

Los resultados expuestos en este trabajo indican que el modelo del ojo con cristalino de índice no gradiente ofrece resultados más fáciles de analizar para fines prácticos en optometría, apegándonos al hecho de que no induce aberración esférica, forma un foco puntual y utiliza relaciones matemáticas básicas. Aunque este modelo no es una representación completa de ojos *in vivo*, para fines oftalmológicos el modelo con cristalino de índice gradiente puede ser de mayor utilidad, ya que podría servir como un modelo para analizar las propiedades de implantes intraoculares.

Con este modelo se demostró que la potencia refractiva del ojo humano depende en gran medida de parámetros como la longitud de onda, radios de curvatura y espesores de los medios ópticos. Los cambios de mayor magnitud se presentaron para variaciones del radio de curvatura de la superficie anterior de la córnea, lo cual era de esperarse, ya que este elemento es el más considerado para las correcciones visuales. Los resultados obtenidos pueden ser de gran utilidad para conocer el tipo y grado de corrección que se realizará en un ojo que presente ametropías.

Asimismo cabe mencionar que antes de realizar las simulaciones que presentamos en este trabajo, realizamos algunas otras utilizando la ecuación de Navarro para la dispersión en vez de la de Cauchy, las cuales están reportadas en [33]. Las gráficas que se obtuvieron mostraron el mismo comportamiento que las presentadas en las figuras 4.4 a 4.11 de este trabajo, con la excepción de que la potencia refractiva tuvo un valor mayor.

En particular, a una longitud de onda de 550 nm y con los parámetros típicos de un ojo relajado, la potencia fue de 60.5 dioptrías para el caso no gradiente y 78.6 dioptrías para el caso gradiente. Dicha variación fue debido a que los índices de refracción de los medios oculares que se obtienen con la ecuación de Navarro difieren un poco de los que utilizamos en este trabajo. Por tal motivo, algo importante que debemos mencionar es que los parámetros del ojo humano que se reportan en la literatura no siempre son los mismos, ya sea potencia refractiva, índices de refracción, espesores o radios de curvatura de los medios oculares. Un hecho notable es que con la simulación de nuestro modelo del ojo podemos analizar y obtener resultados tomando en cuenta cualquier valor que se proponga de dichos parámetros.

5.1 Trabajo a futuro

En este trabajo nos basamos en el hecho de que la fuente puntual emite rayos paraxiales que llegan al ojo a ciertas alturas y direcciones alrededor del eje óptico de forma simétrica. Como continuación de este trabajo está el desarrollar el modelo para el objeto fuera de eje, para el cual dicha suposición ya no es válida, puesto que ahora tendrían que considerarse tanto los rayos tangenciales como los sagitales, para posteriormente obtener el mismo tipo de resultados que obtuvimos en este trabajo.

Con nuestro modelo también es posible hacer la simulación de lentes externas colocadas a una cierta distancia del ojo, lentes de contacto, o bien, simular lentes intraoculares. Por lo que otro trabajo a futuro es el de modelar lentes oftálmicas con parámetros reales, y unirlas al sistema óptico del ojo humano.

También se propone un estudio más a fondo del modelo del ojo con cristalino de índice gradiente, ya que este modelo contiene los parámetros que se apegan más al comportamiento de un ojo real. Además, este tipo de modelos han tenido poca atención en optometría y oftalmología, y en la mayoría solo se ha modelado al cristalino gradiente de forma individual.

Apéndice

Programa desarrollado en Matlab para la simulación del modelo del ojo humano con matrices ABCD

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear
disp('SIMULACIÓN DEL MODELO DEL OJO HUMANO')
fprintf('\n\n 1. Cristalino con índice de refracción fijo \n\n 2. Cristalino con índice de refracción
gradiente \n\n\n');
Z=input('Introduzca el numero que corresponde al tipo de cristalino: ');

%PARÁMETROS DE ENTRADA
lamb=input('Introduzca Longitud de Onda (en nm): ');
dhv=input('Introduzca Distancia Cristalino-Retina (en mm): ');
%Parámetros Típicos del ojo (en milímetros):
do=6000; %Distancia Objeto
no=1; %Índice de refracción entre objeto y primera superficie
R1=7.8; %Radio de curvatura de la cornea anterior
R2=6.7; %Radio de curvatura de la córnea posterior
dco=0.5; %Espesor de la córnea
dha=3; %Profundidad de la cámara anterior (humor acuoso)
R3=10; %Radio de curvatura del cristalino anterior
R4=-6; %Radio de curvatura del cristalino posterior
dcrc=4; %Espesor del cristalino

%INDICES DE REFRACCIÓN OBTENIDOS CON LA ECUACIÓN DE CAUCHY PARA LA
DISPERSIÓN
%Córnea
A1=1.361594;
B1=6.009687e3;
```

```

C1=-6.760760e8;
D1=5.908450e13;
n_cornea=A1+(B1./lamb.^2)+(C1./lamb.^4)+(D1./lamb.^6);
%Acuoso
A2=1.321631;
B2=6.070796e3;
C2=-7.062305e8;
D2=6.147861e13;
n_acuoso=A2+(B2./lamb.^2)+(C2./lamb.^4)+(D2./lamb.^6);
%Cristalino Alto
A3h=1.389248;
B3h=6.521218e3;
C3h=-6.110661e8;
D3h=5.908191e13;
nlens_high=A3h+(B3h./lamb.^2)+(C3h./lamb.^4)+(D3h./lamb.^6);
%Cristalino Bajo
A3l=1.369486;
B3l=6.428455e3;
C3l=-6.0237381e8;
D3l=5.824149e13;
nlens_low=A3l+(B3l./lamb.^2)+(C3l./lamb.^4)+(D3l./lamb.^6);
%Vitreo
A4=1.322357;
B4=5.560240e3;
C4=-5.817391e8;
D4=5.036810e13;
n_vitreo=A4+(B4./lamb.^2)+(C4./lamb.^4)+(D4./lamb.^6);

%ALTURAS Y PENDIENTES DE ENTRADA (EN mm)
Y1=-4:0.5:4;
Teta1=Y1/do;

%Matrices para cada elemento optico del sistema
MB=[1 0; -(n_cornea-no)/(n_cornea*R1) no/n_cornea];
MC=[1 dco; 0 1];
MD=[1 0; -(n_acuoso-n_cornea)/(n_acuoso*R2) n_cornea/n_acuoso];

```

```

ME=[1 dha; 0 1];
MF=[1 0; -(nlens_high-n_acuoso)/(nlens_high*R3) n_acuoso/nlens_high];
MG=[1 dcric; 0 1];
MH=[1 0; -(n_vitreo-nlens_high)/(n_vitreo*R4) nlens_high/n_vitreo];
MI=[1 dhv; 0 1];

%////////////////////////////////////

switch Z

    %RESULTADOS CON CRISTALINO DE ÍNDICE DE REFRACCIÓN FIJO

    case 1

        %Potencia de la Córnea unida a humor acuoso
        MCO=MD*MC*MB;
        Potencia_Cornea=-MCO(2,1)*n_acuoso;
        FCO=1/Potencia_Cornea;
        %Potencia del Cristalino
        MCRI=MH*MG*MF;
        Potencia_Cristalino=-MCRI(2,1)*n_vitreo;
        FCRI=1/Potencia_Cristalino;
        %Potencia de Cornea-Acuoso-Cristalino
        MCAC=MH*MG*MF*ME*MD*MC*MB;
        Pot_CoAcCri=-MCAC(2,1)*n_vitreo;
        FCoAcCri=1/Pot_CoAcCri;

        %Multiplicación de las matrices (Ojo total)
        MEQ=MI*MH*MG*MF*ME*MD*MC*MB;
        PT=-MEQ(2,1)*n_vitreo;
        Potencia_Total=PT*1e3
        F_Total=1/Potencia_Total;

        M_cri_ant=ME*MD*MC*MB;
        y_cri_ant = (M_cri_ant(1,1)*Y1)+(M_cri_ant(1,2)*Teta1);
        teta_cri_ant = (M_cri_ant(2,1)*Y1)+(M_cri_ant(2,2)*Teta1);

```

```

M_cri_pos=MG*MF*ME*MD*MC*MB;
y_cri_pos = (M_cri_pos(1,1)*Y1)+(M_cri_pos(1,2)*Teta1);
teta_cri_pos = (M_cri_pos(2,1)*Y1)+(M_cri_pos(2,2)*Teta1);

%ALTURAS Y PENDIENTES DE SALIDA
Y2=(MEQ(1,1)*Y1)+(MEQ(1,2)*Teta1)
Teta2=(MEQ(2,1)*Y1)+(MEQ(2,2)*Teta1)

%GRÁFICA DE LOS RAYOS PASANDO A TRAVES DEL OJO

%Superficies
x=-dhv:.01:30;
x1=0:.001:1.5;
rca=7.8;
rcp=6.7;
rqa=10;
rqp=-6;
dcr=dhv+7.5;
figure(1)
cora=sqrt(rca.^2-(x1-7.8).^2);
plot(x1,cora,'k'); axis([-3 7.5+dhv -4 4]); hold on
plot(x1,-cora,'k');
corp=sqrt(rcp.^2-(x1-6.7).^2);
plot(x1+.5,corp,'k');
plot(x1+.5,-corp,'k');
cria=sqrt(rqa.^2-(x1-10).^2);
plot(x1+3.5,cria,'k');
plot(x1+3.5,-cria,'k');
crip=sqrt(rqp.^2-(x1+4.501).^2);
plot(x1+6,crip,'k');
plot(x1+6,-crip,'k');

%Rayos
for j=1:17

plot(x+dcr,Y2(1,j)+Teta2(1,j).*x,'b');

```

```

x2=0:.001:7.5;
plot(x2,Y1(1,j)+((y_cri_pos(1,j)-Y1(1,j))/7.5).*x2,'b');

x3=-3:0.01:0;
plot(x3,Y1(1,j),'b')

xlabel('Distancia (mm)')
ylabel('Distancia Radial (mm)')
hold on;

end

%DIAGRAMAS DE MANCHAS EN EL PLANO FOCAL Ó RETINAL
for j=1:17
    fi=-pi:pi/8:pi;
    %axis([-0.5 0.5 -0.5 0.5]); %hold on
    radio=Y2(1,j);
    xr=radio.*cos(fi);
    yr=radio.*sin(fi);

    figure(2)
    plot(xr,yr,'*b');
    axis([-0.5 0.5 -0.5 0.5]);
    axis square
    hold on;
    xlabel('Distancia Radial (mm)')
    ylabel('Distancia Radial (mm)')
end

%-----

%RESULTADOS CON CRISTALINO DE ÍNDICE DE REFRACCIÓN GRADIENTE

case 2

```

%Alturas y pendientes de los rayos incidiendo sobre la primera superficie del cristalino

```
M_Cri_Ant = ME*MD*MC*MB;
Y_Cri_Ant = (M_Cri_Ant(1,1)*Y1)+(M_Cri_Ant(1,2)*Teta1);
Teta_Cri_Ant = (M_Cri_Ant(2,1)*Y1)+(M_Cri_Ant(2,2)*Teta1);
```

%Parámetro L

```
Lden=2*(1-(nlens_low/nlens_high));
L=sqrt(4.5^2./Lden);
```

%Matriz gradiente para el Cristalino

```
MGA=cos(dcri/L);
MGB=L*(sin(dcri/L));
MGC=(-1/L)*(sin(dcri/L));
MGD=cos(dcri/L);
MGRAD=[MGA MGB; MGC MGD];
```

%Indice Gradiente para el Cristalino

```
r=Y_Cri_Ant;
n_r = nlens_high*(1-(r.^2/(2*L^2)));
```

for i=1:17

```
ig(i)=n_r(1,i);
```

```
MF1=[1 0; -(ig(i)-n_acuoso)./(ig(i)*R3) n_acuoso./ig(i)];
MH1=[1 0; -(n_vitreo-ig(i))./(n_vitreo*R4) ig(i)./n_vitreo];
```

```
M_cri_pos=MGRAD*MF1*ME*MD*MC*MB;
y_cri_pos(i) = (M_cri_pos(1,1)*Y1(1,i)+(M_cri_pos(1,2)*Teta1(1,i));
teta_cri_pos(i) = (M_cri_pos(2,1)*Y1(1,i)+(M_cri_pos(2,2)*Teta1(1,i));
```

```
MEQ_GRAD=MI*MH1*MGRAD*MF1*ME*MD*MC*MB;
PTG(i)=-MEQ_GRAD(2,1).*n_vitreo;
Potencia_Total_GRAD=PTG*1e3;
F_Total_GRAD(i)=1./Potencia_Total_GRAD(i);
```

```

%ALTURAS Y PENDIENTES DE SALIDA
Y2(i)=(MEQ_GRAD(1,1)*Y1(1,i)+(MEQ_GRAD(1,2)*Teta1(1,i));
Teta2(i)=(MEQ_GRAD(2,1)*Y1(1,i)+(MEQ_GRAD(2,2)*Teta1(1,i));
end
%PARÁMETROS DE SALIDA
Potencia_Total_GRAD
Y2
Teta2

%GRÁFICA DE LOS RAYOS PASANDO A TRAVES DEL OJO

%Superficies
x=-dhv:.01:30;
x1=0:.001:1.5;
rca=7.8;
rcp=6.7;
rqa=10;
rqp=-6;
dcr=dhv+7.5;
figure(1)
cora=sqrt(rca.^2-(x1-7.8).^2);
plot(x1,cora,'k'); axis([-3 7.5+dhv -4 4]); hold on
plot(x1,-cora,'k');
corp=sqrt(rcp.^2-(x1-6.7).^2);
plot(x1+.5,corp,'k');
plot(x1+.5,-corp,'k');
cria=sqrt(rqa.^2-(x1-10).^2);
plot(x1+3.5,cria,'k');
plot(x1+3.5,-cria,'k');
crip=sqrt(rqp.^2-(x1+4.501).^2);
plot(x1+6,crip,'k');
plot(x1+6,-crip,'k');

%Rayos
for j=1:17

```



```

plot(x+dcr,Y2(1,j)+Teta2(1,j).*x,'b');

x2=0:.001:7.5;
plot(x2,Y1(1,j)+((y_cri_pos(1,j)-Y1(1,j))/7.5).*x2,'b');

x3=-3:0.01:0;
plot(x3,Y1(1,j),'b')

xlabel('Distancia (mm)')
ylabel('Distancia Radial (mm)')
hold on;

end

%DIAGRAMAS DE MANCHAS EN EL PLANO FOCAL Ó RETINAL
for j=1:17
    fi=-pi:pi/8:pi;
    radio=Y2(1,j);
    xr=radio.*cos(fi);
    yr=radio.*sin(fi);

    figure(2)
    plot(xr,yr,'*b');
    axis([-0.5 0.5 -0.5 0.5]);
    axis square
    grid
    hold on;
    xlabel('Distancia Radial (mm)')
    ylabel('Distancia Radial (mm)')
end

end

```

Índice de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Esquema del ojo humano derecho como una sección horizontal..... | 5 |
| 2.2 | Ojo emétrope enfocando un objeto puntual lejano..... | 11 |
| 2.3 | Rayos de luz producidos por un objeto puntual lejano entrando a un ojo miope..... | 11 |
| 2.4 | Ojo miope corregido con una lente divergente..... | 12 |
| 2.5 | Rayos de luz producidos por un objeto puntual lejano entrando a un ojo hipermétrope..... | 12 |
| 2.6 | Ojo hipermétrope corregido con una lente convergente..... | 13 |
| 2.7 | Forma de la córnea y refracción de los rayos en un ojo con astigmatismo..... | 14 |
| 3.1 | La trayectoria del rayo está descrita paramétricamente por tres funciones $x(s)$, $y(s)$, y $z(s)$ | 17 |
| 3.2 | Propagación de un rayo en espacio libre una distancia d | 19 |
| 3.3 | Refracción de un rayo a través de una superficie plana entre dos medios de índice de refracción diferente | 20 |
| 3.4 | Un rayo que entra al sistema óptico a una altura y_1 y ángulo θ_1 y sale a una altura y_2 y ángulo θ_2 | 22 |
| 3.5 | A una serie de componentes ópticos en cascada le corresponde una matriz equivalente M | 24 |
| 3.6 | Propagación de un rayo a través de una superficie esférica..... | 25 |
| 3.7 | Lente esférica de espesor d entre dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 | 27 |
| 3.8 | Refracción en un bloque de material de índice gradiente..... | 30 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.9 | Variación del índice de refracción del humor acuoso con respecto a la longitud de onda, utilizando la ecuación de Navarro <i>et al.</i> y la ecuación de Cauchy para la dispersión..... | 36 |
| 4.1 | Esquema del ojo humano donde se muestra cada una de las superficies y medios a tomar en cuenta para el desarrollo del modelo con matrices ABCD..... | 39 |
| 4.2 | Sistema óptico del ojo humano indicando los nombres de los parámetros para cada elemento óptico que utilizaremos en la programación..... | 39 |
| 4.3 | Índice de refracción con respecto a longitud de onda de los siguientes medios oculares: — Cristalino Alto, — Cristalino Bajo, — Córnea, — Humor Acuoso y Humor Vítreo..... | 43 |
| 4.4 | Potencia total del ojo como función del espesor de la córnea para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente..... | 45 |
| 4.5 | Potencia total del ojo como función del espesor del humor acuoso para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente..... | 47 |
| 4.6 | Potencia total del ojo como función del espesor del cristalino para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente..... | 48 |
| 4.7 | Graficas de ajuste polinomial donde se muestra la dependencia lineal de la potencia con respecto a variaciones en el espesor del humor acuoso. Los datos se tomaron a una longitud de onda de 550 nm, con cristalino de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente.... | 50 |
| 4.8 | Potencia total del ojo como función del radio de curvatura de la superficie de la córnea anterior para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente..... | 52 |
| 4.9 | Potencia total del ojo como función del radio de curvatura de la superficie del cristalino anterior para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente..... | 53 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.10 | Potencia total del ojo como función del radio de curvatura de la superficie del cristalino posterior para longitudes de onda de 400, 550, 700 y 850 nm. El cristalino se ha considerado como un medio de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente..... | 55 |
| 4.11 | Graficas de ajuste polinomial donde se muestra la dependencia cuadrática de la potencia con respecto a variaciones en el radio de curvatura de la córnea anterior. Los datos se tomaron a una longitud de onda de 550 nm, con cristalino de índice de refracción (a) No Gradiente y (b) Gradiente..... | 56 |
| 4.12 | Propagación de rayos en un ojo con cristalino de índice de refracción fijo a una longitud de onda de 550 nm..... | 58 |
| 4.13 | Detalle de la figura 4.12 en la región donde se enfocan los rayos..... | 58 |
| 4.14 | Propagación de rayos en un ojo con cristalino de índice gradiente, a una longitud de onda de 550 nm..... | 59 |
| 4.15 | Detalle de la figura 4.14 en la región donde los rayos tienden a enfocarse..... | 59 |
| 4.16 | Rayos pasando a través de la región focal del ojo con cristalino de índice de refracción fijo para tres longitudes de onda: 400, 550 y 700 nm..... | 60 |
| 4.17 | Rayos pasando a través de la región focal del ojo con cristalino de índice gradiente para tres longitudes de onda: 400, 550 y 700 nm... | 61 |
| 4.18 | Diagramas de manchas para el caso cristalino no gradiente a 550 nm a) en el plano retinal y b) en el plano donde se forma el mejor foco.. | 62 |
| 4.19 | Ampliación de la figura 4.18 (b), donde podemos apreciar el tamaño de la mancha en el plano donde se forma el mejor foco..... | 63 |
| 4.20 | Diagramas de manchas para el caso cristalino gradiente a 550 nm a) en el plano retinal y b) en el plano donde se forma el mejor foco..... | 64 |
| 4.21 | Ampliación de la figura 4.20 (b), donde podemos apreciar el tamaño de la mancha en el plano donde se forma el mejor foco..... | 65 |
| 4.22 | Propagación de rayos a través del sistema óptico del ojo considerando un objeto de 1 m de altura colocado a 6 m de distancia del ojo con cristalino de índice a) no gradiente y b) gradiente, a una longitud de onda de 550 nm..... | 68 |

4.23 Detalle de la figura 4.22 en la región donde se enfocan los rayos.
..... 69

Índice de Tablas

3.1 Coeficientes de la ecuación de dispersión de Cauchy para cada medio ocular..... 36

4.1 Simbología y valores que utilizamos para los radios de curvatura y espesores de los distintos elementos ópticos del ojo..... 41

4.2 Índices de refracción de los medios oculares a cuatro longitudes de onda distintas..... 42

4.3 Valores de U_1 y V_1 para las rectas graficadas de potencia de la forma $P_L=U_1X+V_1$ obtenidas con la simulación de nuestro modelo, para cada espesor variado a una longitud de onda de 550 nm.. 49

4.4 Valores de U_2 , V_2 y W para las curvas de potencia de la forma $P_C=U_2X^2+V_2X+W$ obtenidas con la simulación de nuestro modelo, para cada radio de curvatura variado a una longitud de onda de 550 nm..... 54

Referencias

- [1] A. Gullstrand, Appendix II in H. Von Helmholtz's *Handbuch der Physiologischen Optik*, Vol.1, 3rd ed. 1909. English translation edited by J. P. Southall (Optical Society of America, Washington, D. C., 1924).

- [2] G. Smith and D. A. Atchison, *The Eye and Visual Optical Instruments*. (Cambridge U. Press, Cambridge, England, 1997).

- [3] H. H. Emsley, *Visual Optics*. (Butterworth, London, 1952), Vol. 1.

- [4] Y. Le Grand and S. G. Hage, *Physiological Optics*. (Springer-Berlag, Berlin, 1981).

- [5] A. C. Kooijman, "Light distribution on the retina of a wide-angle theoretical eye", *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 1544-1550 (1983).

- [6] R. Navarro, J. Santamaría and J. Bescós, "Accommodation-dependent model of the human eye with aspherics", *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, 1273-1281 (1985).

- [7] D. A. Atchison and G. Smith, "Continuous gradient index and shell models of the human lens", *Vision Res.* **35**, 2529-2538 (1995).

- [8] G. Smith and D. A. Atchison, "The gradient index and spherical aberration of the lens of the human eye", *Ophthalmic Physiol. Opt.* **4**, 317-326 (2001).

- [9] H.-L. Liou and N. A. Brennan, "Anatomically accurate, finite model eye for optical modeling", J. Opt. Soc. Am. A **14**, 1684-1695 (1997).
- [10] A. Popiolek-Masajada and H. Kasprzak, "Model of the optical system of the human eye during accommodation", Ophthalmic Physiol. Opt. **22**, 201-208 (2002).
- [11] M. V. Pérez, C. Bao, M. T. Flores-Arias, M. A. Rama and C. Gómez-Reino, "Gradient parameter and axial and field rays in the gradient-index crystalline lens model", J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **5**, S293-S297 (2003).
- [12] D. Siedlecki, H. Kasprzak and B. K. Pierscionek, "Schematic eye with a gradient-index lens and aspheric surfaces", Opt. Lett. **29**, 1197-1199 (2004).
- [13] M. E. Díaz Enciso; *Óptica Aplicada Programada*. (Instituto Politécnico Nacional, México, 1999).
- [14] D. Malacara, *Óptica Básica*, 2a ed. (Fondo de Cultura Económica, México, 2004).
- [15] E. Hecht, *Óptica*, 3ra ed. (Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2000).
- [16] D. A. Atchison and G. Smith, "Chromatic dispersions of the ocular media of human eyes", J. Opt. Soc. Am. A **22**, 29-37 (2005).
- [17] J. E. Greivenkamp, *Optical Design and Instrumentation, Class Notes*. (College of Optical Sciences, University of Arizona, 2007), p. 220, 222.

- [18] J. T. Verdeyen, *Laser Electronics*. (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1981).
- [19] M. V. Klein and T. E. Furtak, *Optics*, 2nd ed. (John Wiley & Sons, Inc., 1986).
- [20] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*. (John Wiley & Sons, Inc., 1991).
- [21] R. Guenther, *Modern Optics*. (John Wiley & Sons, Inc., 1990).
- [22] R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics*, 3rd ed. (Longman, London, 1973), p. 500.
- [23] W. J. Smith, *Modern Optical Engineering*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1990), p. 164.
- [24] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th (corrected) ed. (Pergamon, Oxford, UK, 1989), p. 97.
- [25] M. Herzberger, "Colour correction in optical systems and a new dispersion formula", *Opt. Acta* **6**, 197-215 (1959).
- [26] Y. Le Grand, *Form and Space Vision*, rev. ed., translated by M. Millodot and G. Heath (Indiana University Press, Bloomington, Ind., 1967).
- [27] A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design Part 2*, R. Kingslake, ed. (Dover, New York, 1960), p. 659.

- [28] J. Tucker, "The chromatic aberration of the eye between wavelengths 200 nm and 2000 nm: some theoretical considerations", *Br. J. Physiol. Opt.* **29**, 118-125 (1974).
- [29] A. G. Bennett and J. Tucker, "Correspondence: chromatic aberration of the eye between 200 and 2000 nm", *Br. J. Physiol. Opt.* **30**, 132-135 (1975).
- [30] F. Manns, A. Ho and J. M. Parel, "Calculation of the primary spherical aberration of an eye model using paraxial ray-tracing with matrix optics", *Proc. SPIE* **4245**, 57-65 (2001).
- [31] M. V. Pérez, C. Bao, M. T. Flores-Arias, M. A. Rama and C. Gómez-Reino, "Description of gradient-index crystalline lens by a first-order optical system", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **7**, 103-110 (2005).
- [32] M. T. Flores-Arias, M. V. Pérez, C. Bao, A. Castelo and C. Gómez-Reino, "Gradient-index human lens as a quadratic phase transformer", *J. Mod. Opt.* **53**, 495-506 (2006).
- [33] G. Díaz González and M. D. Iturbe Castillo, "Model of the human eye based on ABCD matrix". *RIAO/OPTILAS 2007, AIP Conference Proceedings* **992**, 108-113 (2008).