



INDAOE

“Identificación Estelar para la Orientación de Satélites”

Por

Lic. Berenice Rodríguez Pedroza

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ELECTRÓNICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica
Óptica y Electrónica**

Febrero 2016
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:
Dr. Rogerio A. Enríquez Caldera
Dr. Eduardo Mendoza Torres

©INAOE 2016

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en
partes de esta tesis



Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción.....	1
1.1 Problemática.....	2
1.2 Objetivos	3
1.3 Organización de la Tesis	4
1.4 Contribuciones	4
2. Antecedentes de un Sensor de Estrellas.....	5
2.1 CubeSats en misiones espaciales.....	5
2.2 Sensores más comunes para la determinación de orientación.....	6
2.3 Propiedades de las Estrellas	10
2.3.1 Coordenadas Estelares.....	10
2.3.2 Magnitud Estelar	12
2.3.3 Banda Espectral.....	13
2.3.4 Distribución Estelar.....	14
2.4 Características técnicas de un Sensor de Estrellas	14
2.4.1 Conceptos Ópticos.....	15
2.4.2 Algoritmo de un Sensor de Estrellas	16
3. Contexto matemático en la orientación de satélites.....	18
3.1 Sistemas de coordenadas.....	18
3.2 Matriz de Orientación.....	19
3.3 Matriz de Dirección de Cosenos	21
3.3.1 Ángulos de Euler	22
3.4 Representación en Cuaternión.....	23
3.4.1 Desventajas y ventajas en el uso de cuaterniones.	24
4 Simulador del Campo de Visión de un Sensor de Estrellas (CITLALLI).....	25
4.1 Justificación.....	25
4.2 Descripción del Sistema	25
4.2.1 Conversión de las coordenadas astronómicas a cartesianas.	26
4.2.2 Ajuste de ventana	27
4.2.3 Traslación de la ventana de proyección en Ascensión Recta y Declinación Central... ..	29

4.2.4 Rotación de la ventana de proyección	32
4.2.5 Filtrado de las estrellas dentro de la ventana de proyección	32
4.2.6 Ventana de proyección del Sensor de Estrellas	33
4.2.7 Función Cuadrícula Ecuatorial	35
4.3 Funcionamiento del programa CITLALLI	35
5. Identificación del mapa celeste	38
5.1 Metodologías en la literatura	38
5.1.1 Método de identificación por triángulos planos	39
5.1.2 Método de identificación por Liebe	40
5.1.3 Método de identificación por votación	42
5.2 Método propuesto basado en la geometría de triángulos cuasi-equiláteros	43
5.2.1 Generación de un catálogo estelar cuasi-uniforme	43
5.2.2 Análisis estadístico entre magnitud, campo de visión y número de estrellas	52
5.2.3 Generación de una base de datos mediante triángulos cuasi-equiláteros	52
5.2.4 Algoritmo de identificación de estrellas dentro del campo de visión	53
6. Determinación de la orientación del satélite	59
6.1 Algoritmo de TRIAD	59
6.2 Problema de Wahba	61
6.3 Método de Davenport	62
6.4 Algoritmo de QUEST	63
7. Resultados	64
7.1 Resultados de la función centroide	64
7.2 Resultados de la identificación de estrellas	66
7.3 Resultados de la determinación de orientación.	68
8. Conclusiones y Trabajo a futuro	72
8.1 Conclusiones	72
8.2 Trabajo a futuro	73
Lista de Figuras	74
Lista de Tablas	76
Referencias	77

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Rogerio Enriquez Caldera y el Dr. Eduardo Mendoza Torres por su confianza, enseñanza y apoyo para desarrollar el presente trabajo.

A mis sinodales, el Dr. Juan Manuel Ramírez Cortés, Dr. José de Jesús Rangel Magdaleno y al Dr. Miguel Velázquez de la Rosa Becerra quienes dedicaron parte de su tiempo en la revisión de esta tesis.

Al Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE) por las atenciones que tuvo conmigo durante mis estudios de maestría. Así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado.

De la misma manera, externo un sincero agradecimiento al Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), especialmente al Laboratorio de Integración y Pruebas (LIT) y al departamento de Sensores por brindarme la oportunidad de realizar una estancia en sus instalaciones; llevándome una muy gratificante experiencia tanto profesional como personal.

A grandes personas que he tenido la dicha de conocer: Fernanda, Jesús, Erika, Juan Carlos, Gaby, Leo, Gerardo, Alejandro, Estela, Daniel y Lulú. Les doy gracias por sus palabras, su solidaridad y sobre todo su tiempo. Espero siempre poder corresponder su amistad tanto como ustedes lo merecen.

Finalizo dando un gran y sincero agradecimiento a mi familia que me ha apoyado constantemente; en especial a mi mamá y a mi hermano por su estar incondicional, la culminación de esta meta no sería sin ustedes. Abuelo Beto, infinitamente gracias por dejarme la enseñanza de sonreír a la vida, es así como siempre te recuerdo.

Resumen

Para apuntar diversos dispositivos a bordo de un satélite, ya sea cámaras, telescopios, antenas o celdas solares; se requiere determinar la orientación de satélites. Con dicho objetivo se usan los Sistemas de Determinación de Orientación (conocido por sus siglas en inglés como *ADS*).

Hay diferentes tipos de sensores con los cuales se determina la orientación de un satélite, tal es el caso de los sensores solares, sensores de horizonte, magnetómetros y sensores de estrellas. De ellos, los sensores de estrellas son los de mayor precisión y se aplican en una gran diversidad de misiones espaciales. Debido a eso, actualmente se están estudiando vigorosamente para conseguir mayor precisión y robustez.

En este trabajo se presenta un algoritmo de identificación de estrellas para la orientación de satélites. Con este objetivo se hicieron dos programas en MATLAB:

1. Un programa que simula mapas celestes como si fueran imágenes obtenidas por una cámara, al cual le llamamos CITLALLI y usa un catálogo de estrellas hasta magnitud 7.
2. Un programa que lee la imagen simulada y con dicha imagen realiza diversos cálculos para la determinación de las coordenadas de las estrellas del campo simulado.

En la presente tesis se emplea un nuevo método en el que se buscan triángulos cuasi-equiláteros formados por estrellas del campo observado. Primero, se calcula la media y la desviación estándar del mapa celeste para reducir el ruido de fondo. Posteriormente, se identifican los triángulos cuasi-equiláteros que serán comparados con un catálogo de estrellas. Para determinar la orientación del satélite se usan cuaterniones, con los cuales se evita tener puntos singulares lo cual ocurre con los ángulos de Euler. El método propuesto en esta tesis permite estimar las coordenadas de las estrellas del campo observado, con una precisión aproximada de 100 segundos de arco, el cual es del orden de otros métodos propuestos.

Abstract

To point different devices aboard of a satellite, like cameras, telescopes, antennas or solar panels; it is required to determine the attitude of satellites. For this reason, the Attitude Determination Systems (ADS) are used.

There are different types of sensors, which determine the attitude of satellite, such as the case of solar panels, horizon sensors, magnetometers and star sensors. Of these, the star sensors present greater accuracy and they are used in diverse space missions. Therefore, nowadays these sensors are strongly being studied to reach more robustness.

This work presents a star identification algorithm for the attitude of satellites. Whence, two programs are developed in MATLAB:

1. A program simulates sky maps as if they were the taken images by the camera, which we call: CITLALLI and this uses a star catalogue until star magnitude 7.
2. A program reads the simulated image and makes computations in order to determine the coordinates of star within simulated field of view.

This thesis employs a new method in which quasi-equilateral triangles are searched. These triangles are formed by the stars within field of view. First, the mean and the standard deviation of the sky map are computed in order to decrease the noise background. After that, the triangles which will be compared with a catalogue are identified. The quaternions are used to determine the attitude of a satellite, these avoid singular points as occurs with the Euler angles. The proposed method in this thesis allows to estimate the coordinates of the stars within field of view, with an accuracy of 100 arc seconds, which is the order of other proposed methods.

1. Introducción

Hoy en día, existen diversos campos de estudio que se desenvuelven en el espacio exterior como los son los sistemas de comunicación, estudios meteorológicos, astronómicos, etc. lo que involucra el uso de satélites, naves espaciales simples o múltiples según sea el requerimiento de estudio. Para obtener un buen apuntado de los instrumentos científicos de abordo - como puede ser una cámara, un telescopio, arreglos solares, una antena para la transmisión de datos a la base terrena etc.- es necesario tener mayor precisión en la orientación (usualmente referenciado en la literatura como *Attitude*) del vehículo u objeto espacial por lo que su estudio se ha convertido en uno de los temas centrales de la ingeniería espacial.

El incremento en la precisión de apuntado de los instrumentos científicos ha llevado paralelamente a optimizar el control de orientación durante la etapa de operación del vehículo espacial y por tanto, los nuevos sistemas de orientación (conocida por sus siglas en inglés como *ADS*) deben tener la capacidad de trabajar con mayor robustez y precisión.

Existen diversos sensores que pueden ser utilizados a bordo de un satélite para la determinación de la orientación, entre ellos se pueden enlistar los sensores solares, sensores de horizonte, magnetómetros, giroscopios y sensores estelares [13,18]. Los primero cuatro sensores han sido utilizados para misiones espaciales brindando menor precisión en la determinación de orientación a diferencia de los sensores estelares [18].

Un sensor estelar está compuesto de una cámara óptica, la cual se encarga de capturar las imágenes del mapa celeste para ser analizada posteriormente y a partir de ella, determinar la orientación del satélite. Este tipo de sensores depende completamente de las estrellas observadas. Las estrellas son el sistema de referencia óptico que brinda mayor precisión para la orientación de satélites o naves especiales [13]. Esto se debe a que las estrellas son cuerpos inerciales y al ser objetos que se encuentran lo suficientemente lejanos pueden ser vistos en cualquier parte del sistema solar.

La motivación de esta tesis surgió en el desarrollo de una nueva propuesta para la orientación de satélites con el objetivo de brindar un apuntado con mayor precisión para los instrumentos de medición a bordo (antena, arreglos solares, telescopio) e incluso corregir, por medio de sistemas de control, la posición del satélite.

1.1 Problemática

Un ‘agente’ espacial que determina su orientación a partir del reconocimiento de un campo de estrellas es conocido como un sensor de estrellas (conocido en inglés como Star Tracker), el cual es presentado en la Figura 1.1. Su funcionamiento consta de dos etapas fundamentales. La primera etapa consiste en la identificación, que es la etapa en la que se hace un reconocimiento en un mapa celeste de las estrellas que están en el campo de visión de la cámara de la nave espacial, por lo que es necesario realizar el reconocimiento de patrones de estrellas y así definir una primera predicción de la orientación del satélite. Una vez que las estrellas han sido identificadas, continúa con la etapa de seguimiento; la cual estima la orientación del vehículo espacial basándose en su velocidad angular y la posición de las estrellas identificadas en una secuencia de imágenes anteriores [1].

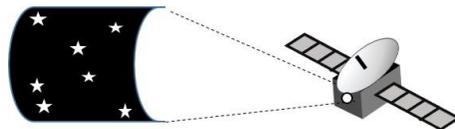


Figura 1.1 Representación de un satélite operando con un Sensor de Estrellas.

La mayor dificultad que se presenta en un sensor de estrellas es el compromiso entre la precisión en el proceso de identificación, la velocidad a la que el satélite se desplaza alrededor de la Tierra y su respectiva velocidad de rotación, de manera que se pueda obtener una respuesta adecuada de posicionamiento y orientación.

La metodología para la identificación de estrellas es bastante amplia, existiendo una diversidad de estudios propuestos en la literatura. Entre los métodos que se han utilizado para abordar dicha problemática, se encuentran:

- Método por triangulación [1]
- Método por votación [1]

El Método por triangulación, como su nombre lo indica consiste en encontrar la figura geométrica de triángulos utilizando como vértices las estrellas a partir de una imagen de un mapa celeste. Este método es actualmente el más empleado, sobre el cual se han desarrollado diversas variantes debido a su flexibilidad y velocidad en respuesta. Sin embargo, el margen de error resulta más alto que en el método de votación. [1]

El Método por votación define la distancia entre las estrellas que se encuentran en una imagen del mapa celeste y mediante estadística identifica la posición de las estrellas en una porción del mapa celeste. De esta manera se tiene mayor precisión, sin embargo, el tiempo de respuesta resulta más largo a comparación del método de triangulación. [1]

En este trabajo se propone un nuevo método a través de la identificación de triángulos cuasi-equiláteros y el uso de herramientas estadísticas.

1.2 Objetivos

Los objetivos que se requieren alcanzar a lo largo de la investigación son los siguientes:

Objetivo general

- Diseñar una metodología que permita el reconocimiento de las estrellas para la determinación de orientación de un satélite.

Objetivos particulares:

- Desarrollar un simulador de campo de visión de estrellas
- Desarrollar un algoritmo de identificación de estrellas
- Desarrollar un método de obtención de la orientación del satélite basado en el algoritmo de identificación de estrellas propuesto.

1.3 Organización de la Tesis

Este trabajo está dividido en cinco partes fundamentales: i) Conceptos generales de astronomía involucrados en el desarrollo de un sensor de estrellas, ii) las herramientas matemáticas para abordar este problema, iii) un simulador virtual de estrellas, iv) el algoritmo de identificación de estrellas y finalmente, v) el algoritmo de obtención de la orientación de un satélite. En el capítulo 2, se expone de manera cronológica el desarrollo de los satélites, brindándole al lector, un panorama general del proceso de evolución de la tecnología espacial hasta la fecha y a su vez, se presentan los conceptos generales para la comprensión del tema de estudio tanto astronómicos, como ópticos y técnicos que involucra un sensor de estrellas. En el capítulo 3 se exponen los dos contextos matemáticos más comunes para la orientación de satélites: ángulos de Euler y cuaterniones. En el capítulo 4 se presenta un algoritmo para la generación de un cielo virtual. Los capítulos 5 y 6 se complementan al describir, en conjunto, el algoritmo para el reconocimiento de estrellas y la metodología para la determinación de orientación. Finalmente, en el capítulo 7, se presentan los resultados derivados del trabajo aquí propuesto.

1.4 Contribuciones

En este trabajo se presentan tres contribuciones principales. La primera contribución se refiere a un algoritmo que proyecta una porción del mapa celeste de acuerdo a las especificaciones técnicas de la cámara de un sensor de estrellas. La segunda contribución es una nueva geometría para la identificación de estrellas, utilizando el criterio de triángulos cuasi-equiláteros. Por último, la tercera contribución es la propuesta de un algoritmo que filtra las estrellas del catálogo Hipparcos para que la base de datos resultante se aproxime a un mapa celeste uniformemente distribuido.

2. Antecedentes de un Sensor de Estrellas.

2.1 CubeSats en misiones espaciales

CubeSat es una nueva clase de satélites que ha tenido lugar en la ingeniería espacial en los últimos años ya que este brinda la posibilidad de abordar misiones satelitales con un bajo costo. Este proyecto comenzó en la Universidad Estatal Politécnica de California. Actualmente, docenas de CubeSats han sido desarrollados por diversos grupos tales como: *NRO, the U.S Air Force, the National Science Foundation* en los Estados Unidos [19], *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais* en Brasil, entre otros.

Los CubeSats presentan la forma de un prisma rectangular. Existen tres medidas estándares más utilizadas: “1U”, “3U” ó “6U”. Un CubeSat tipo 1U tiene dimensiones de 10 cm por cada lado, pesando aproximadamente 1.3 kilogramos [1]. Mientras que las medidas de un CubeSat 3-U son 10x10x30 cm con un peso aproximado de 4 kilogramos [19]. La ventaja que presenta un CubeSat es que puede ser enviado al espacio dentro de una plataforma estándar de lanzamiento, la cual se ajusta a una de las tres medidas estándares del CubeSat. Esto reduce el riesgo de volar un CubeSat como una carga secundaria o terciaria. Basándose en un estudio estadístico de los lanzamientos de satélites a largo de 1990 a 2010 [19], se determinó que el 14.4% de los satélites que fueron lanzados durante los años de 1900 a 2001 correspondían a un peso menor a 100 kg, donde el 28% tenían un peso promedio de 10kg. A partir del 2002, el porcentaje de satélites de peso menor a 10kg ha ido en incremento hasta alcanzar el 57 %. Esto se debe principalmente al desarrollo de la microelectrónica, lo que ha permitido reducir el tamaño de los sistemas de a bordo [1].

En Junio del 2003, el satélite tipo Cubesat 1U, CanX-1, desarrollado por la Universidad de Toronto, fue lanzado desde Plesetsk, Russia. CanX-1 contenía un sensor de estrellas experimental y un sensor de horizonte para la determinación de orientación del CubeSat. Sin embargo, la conexión de radio nunca logró estabilizarse. Posteriormente, se construyó CanX-2, el cual fue lanzado en India, en Abril 28 del 2008. Este satélite equipado con una cámara CMOS, cuyas imágenes capturadas tenían la opción de realizar seguimiento estelar

de tipo experimental [35]. El sistema de orientación es uno de los principales campos de investigación hasta la fecha. [1]

En los últimos años, la determinación de orientación de CubeSat ha dependido de sensores solares, magnetómetros y mediciones inerciales. Los sensores solares brindan una gran precisión en las mediciones, sin embargo sólo pueden operar con la luz solar. Un satélite de órbita baja (LEO) debe funcionar 30% en la oscuridad. Para el caso de los magnetómetros, a pesar de ser una tecnología bastante pequeña, su limitación radica en el conocimiento del campo magnético e interferencia electromagnética dentro de la plataforma del mismo CubeSat. Finalmente, los sistemas inerciales, como los giroscopios actualmente están basados en sistemas microelectromecánicos (MEMS) y son lo suficiente pequeños para ser integrados a un *Smartphone* y evidentemente a un CubeSat. Sin embargo, los sistemas inerciales no tienen gran capacidad para mantener la estimación de orientación durante el período de eclipse de un satélite LEO [1]. De esta manera, la orientación de los CubeSats debe ser vista como un nicho de investigación que conlleve a desarrollar sistemas ADS con mayor precisión. Actualmente, el sensor de estrellas es el sistema de orientación que brinda un compromiso balanceado entre costo, tamaño, viabilidad y robustez [13][18].

2.2 Sensores más comunes para la determinación de orientación

La orientación de un vehículo espacial o satélite consiste en definir los ángulos de rotación en tres dimensiones en torno al centro de la masa del vehículo espacial o satélite. Una información más amplia sobre sistemas de navegación y orientación puede consultarse en [6],[7] y [8].

En la figura 2.1 se muestran los ángulos conocidos como: “pitch”, “roll” y “yaw”.

- **Pitch** es el ángulo que se forma al rotar sobre el eje Y.
- **Roll** es el ángulo que describe la rotación en torno al eje X.
- **Yaw** es el ángulo que gira el satélite sobre el eje Z.

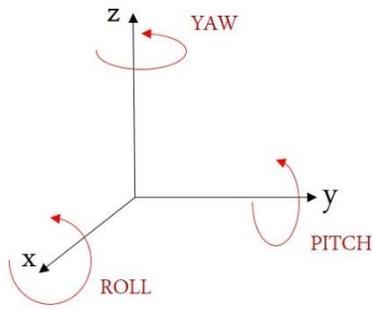


Figura 2.1. Representación gráfica de los ángulos de rotación. Los ángulos están etiquetados con los nombres usados para la orientación de vehículos espaciales

Un sistema de orientación tradicional consiste en un sensor de referencia de orientación absoluta y un sensor inercial (o de referencia relativa). El sensor de referencia de orientación absoluta determina la dirección de apuntado (*Pointing Direction*, o *PD* por sus siglas en inglés) del satélite en intervalos regulares. La medida de *PD* se utiliza para calibrar el sensor inercial, siendo que este último mide los cambios en la orientación entre las calibraciones absolutas. [18]

En seguida se enlistan los sensores de referencia de orientación absoluta más utilizados y sus características [18].

Magnetómetros. Estos sensores miden la intensidad y orientación del campo magnético. Para ello, es necesario un profundo conocimiento del comportamiento del campo magnético. La precisión de estos sensores se encuentra en el orden de un minuto de arco.

Arreglos en radiofrecuencia. Estos pueden ser usados como una referencia de apuntado. Sin embargo, si se requiere una precisión muy alta, es necesario el uso de una antena direccional. La precisión al utilizar señales de radiofrecuencia como referencia de orientación absoluta se encuentra también en el orden de un minuto de arco.

Sensores de horizonte. Detecta la luz emitida por el “borde” de la atmósfera de la Tierra, típicamente utilizando detectores en infrarrojo. La precisión de los sensores de horizontes está alrededor de los 5 minutos de arcos, dependiendo de la órbita.

Sensores solares. Como su nombre lo indica, estos sensores utilizan el Sol que es la fuente más brillante en el firmamento como referencia. Su construcción puede variar para detectar los rayos solares que inciden en el sensor, los cuales son los encargados de determinar la orientación, obteniendo una precisión mejor a un minuto de arco. En este tipo de sensores cómo sólo utilizan el Sol como objeto de referencia, sólo pueden determinar la dirección de apuntado cuando observan dicho objeto celeste [13].

Paneles solares. También pueden ser considerados como sensores solares. La única diferencia consiste en que la luz que incide en los paneles solares genera una corriente que es monitoreada para determinar la orientación. Su precisión se encuentra en el orden de 1° . Al igual que los sensores solares, su dirección de apuntado sólo puede determinarse en la zona en la que el Sol es visible para este instrumento.

Sensor de estrellas o Rastreador Estelar (*Star Tracker*). Hasta ahora, es considerada la tecnología que ofrece mayor precisión para determinar la dirección de apuntado. Un sensor de estrellas utiliza las estrellas como objetos de referencia. De forma muy general, este sensor captura una imagen para ser procesada con ciertas características geométricas las cuales posteriormente serán comparadas con un catálogo de estrellas, previamente almacenado, para proceder con su identificación y su seguimiento. Este tipo de instrumento puede alcanzar una precisión de 1 a 10 segundos de arco y más aún, al realizar el seguimiento de más de una estrella, es posible determinar la orientación del satélite en los tres ejes: roll, pitch y yaw [13].

A continuación se presentan las tres tecnologías que han sido utilizadas como sensores inerciales:

Giroskopios mecánicos son sensores que monitorean la rotación de un cuerpo en un espacio tridimensional. Este dispositivo consta de un rotor suspendido. Si la orientación se ve modificada, el rotor aplicará un torque, el cual será proporcional a la velocidad angular del

giroscopio. El costo de estos sensores se eleva conforme mayor precisión se requiera. Otra desventaja que presentan los giroscopios es el desgaste mecánico.

Los giroscopios ópticos tienen la ventaja de no depender de partes mecánicas, están formados por una bobina de doble fibra óptica. La diferencia en la propagación de la luz en cada dirección de la fibra óptica es proporcional a la velocidad angular.

Modelos orbitales. Como su nombre lo indica únicamente consiste en el modelado matemático del movimiento de la nave espacial o satélite. Es decir, se simula el movimiento de la nave espacial, permitiendo extrapolar la orientación para un tiempo dado. La mayor desventaja es que su extrapolación depende de un modelado matemático predefinido, ignorando la presencia de perturbaciones.

En la Tabla 2.1 se presenta una tabla de comparación de los sensores de referencia absoluta, en donde se pone en evaluación su precisión, sus grados de libertad en orientación y si se requiere de una orientación inicial.

Tipo	Orientación Inicial	Grados de libertad en orientación	Precisión
Magnetómetro	Sí	3	1 minuto de arco
Arreglos en RF	Sí	2	1 minuto de arco
Sensor de Horizonte	Sí	2	5 minuto de arcos
Sensor solar	Sí	2	1 minuto de arco
Panel solar	Sí	2	1° grado
Sensor de estrellas	No	3	1 segundo de arco

Tabla 2.1. Características generales de Sensores de Referencia Absoluta [18]

2.3 Propiedades de las Estrellas

Para diseñar el algoritmo de identificación estelar, es necesario conocer principios astronómicos generales, es decir, interpretar la posición de las estrellas respecto a sus coordenadas estelares, diferenciar el brillo de las estrellas acorde a su magnitud estelar y también, saber cómo se distribuyen las estrellas dentro de la Esfera Celeste.

2.3.1 Coordenadas Estelares

Para entender como las estrellas son utilizadas en la determinación de la orientación de un satélite, es necesario estudiar su sistema de referencia. Todas las estrellas fuera del sistema solar se encuentran en un sistema de referencia inercial en el espacio. Para ello, se parte del Sistema coordinado Inercial con centro en la Tierra, ECI (Earth Centered Inertial), el cual se define de la siguiente manera [13]:

x_I , definido en la dirección del equinoccio vernal referenciado a una época en particular, regularmente el año 2000.

z_I , es el eje de rotación de la Tierra, y

y_I , completa el sistema de referencia usando la regla de la mano derecha.

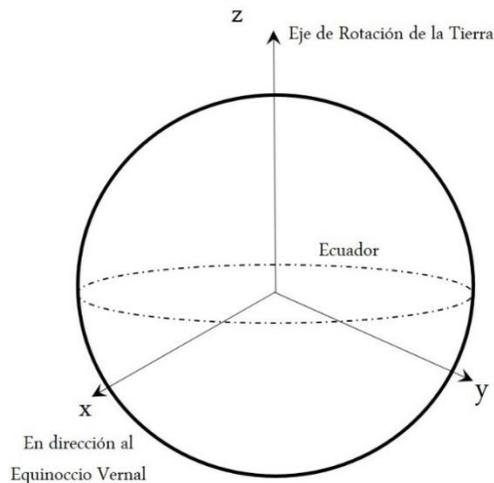


Figura 2.2 Sistema de Referencia ECI.

Si bien la lenta precesión del eje en dirección al equinoccio vernal provoca una variación en la localización de las estrellas respecto al sistema de referencia dada una época, la desviación de la posición de las estrellas es pequeña. Sin embargo, es necesario tomar

este efecto en consideración [13]. Dicho cambio se calcula de manera sistemática en los observatorios astronómicos y hay rutinas de alta precisión para dicho cálculo.

Para determinar la localización de una estrella en el mapa celeste se utilizan dos ángulos:

- ascensión recta (α). Tomando el centro de la Tierra, es el ángulo que se forma a lo largo del plano ecuatorial y el eje en dirección al equinoccio vernal.
- El ángulo de declinación (δ). Este ángulo se encuentra en el rango de $+90^\circ$ a -90° . Nuevamente al tomar el centro de la Tierra, es el ángulo que se forma a lo largo del equinoccio vernal y el plano ecuatorial. Los grados positivos indican la dirección al norte.

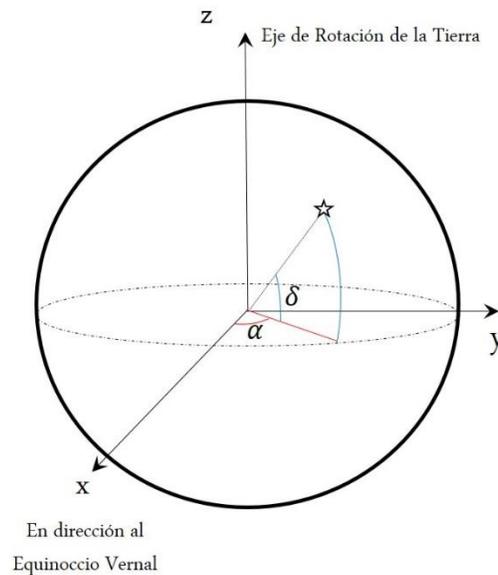


Figura 2.3 Ascensión Recta y ángulo de Declinación.

Estos ángulos también son llamados ángulos de longitud y latitud del mapa celeste. La longitud divide al mapa celeste en 24 horas donde una hora es dividida a su vez en minutos ($'$) y segundo ($''$). Si se tiene en cuenta que la Tierra gira 360° en 24 horas solares, se puede llegar fácilmente a la conclusión de que una hora equivaldría a 15° .

Por otra parte, las coordenadas de una estrella en ascensión recta y declinación pueden ser visualizadas dentro de un sistema de coordenadas esféricas [12]. Esta visualización permite utilizar las ecuaciones 2.1 a 2.3 para la transformación de los ángulos α y δ a un sistema de coordenadas rectangulares:

$$x = \cos(\alpha) \cos(\delta) \quad (2.1)$$

$$y = \sin(\alpha) \cos(\delta) \quad (2.2)$$

$$z = \sin(\delta) \quad (2.3)$$

Con estas definiciones, tanto los mapas celestes como los catálogos estelares se han desarrollado para diferentes épocas del equinoccio vernal. Entre los catálogos más utilizados se encuentran: *The Catalog of Bright Stars (Hoffleit 1964)*, *The Smithsonian Astrophysical Observatory Catalog (1971)*, *Burnham's Celestial Handbook (Burnham 1979)*, *Sky Catalogue 2000.0 (Hirshfeld and Sinnott 1990)*, *Hipparcos Catalogue (1991)* [13].

Cuando se utiliza un catálogo de estrellas, es importante diferenciar entre estrellas dobles, múltiples y variables. Estos conceptos serán más detallados en la sección 2.3.4.

2.3.2 Magnitud Estelar

Una característica importante en las estrellas es su brillo visto desde la Tierra. El brillo depende de la cantidad de luz emitida por la estrella y también en la distancia que la luz debe viajar para llegar a la Tierra [13]. El flujo de luz es la energía de luz por unidad de área. Por lo tanto la magnitud de una estrella depende del flujo y la distancia a la estrella. La magnitud aparente se define como la intensidad de luz que se tendría fuera de la atmósfera de la Tierra, y es asignada con la letra m . La comparación entre las magnitudes y el flujo de dos estrellas no es linealmente proporcional a la magnitud de las estrellas sino más bien es logarítmica. Si los flujos y las magnitudes de dos estrellas son, respectivamente, S_2 , S_1 y m_2 , m_1 entonces:

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \quad (2.4)$$

Por ejemplo, si el flujo de luz S_1 de una estrella es más alto por un factor de 10^4 que el flujo de otra estrella, entonces $m_2 - m_1 = -2.5 \log_{10}(10^4)$, lo cual quiere decir que la magnitud de la segunda estrella es 10 veces más grande que la primera. Es importante notar que el resultado es negativo, esto indica que si la intensidad de flujo es más grande, la magnitud dará como resultado un valor más negativo. La ecuación 2.4 asigna diferencias entre magnitudes pero no en magnitudes absolutas. Este conflicto puede ser solucionado al elegir una estrella de referencia. A primera instancia, en el siglo XIX se decidió escoger la estrella Polaris con $m = 2$ como estrella de referencia. Desafortunadamente, la magnitud de Polaris varía periódicamente entre $m = 1.95$ y 2.05 . Hoy en día, Vega se considera la estrella de referencia con $m = 0$ [13]; de esta manera, la ecuación 2.4 se simplifica a:

$$m_0 = -2.5 \log_{10}(S_0) \quad (2.5)$$

2.3.3 Banda Espectral

En la práctica es común ver las estrellas en tres bandas espectrales: ultravioleta, visible y azul, por convención, m_v se refiere a la magnitud en la banda espectral visible [13]. Dependiendo del estudio a realizar o las características de la óptica, se define en qué banda espectral de magnitud se tomarán las mediciones.

Las estrellas tienen diferentes emisiones espectrales y por tanto, esto es un punto que debe ser considerado al escoger o diseñar el sensor de estrellas, ya que cada detector trabaja en diferentes rangos espectrales. Existen siete principales categorías espectrales de estrellas, las cuales son: O,B,A, F,G,K, y M. Estas categorías a su vez se dividen en 10 subcategorías tomando valores entre 0 y 9. El espectro de una estrella depende de su temperatura en su superficie. Esta información se encuentra más detallada en [28]. Las estrellas pueden ser clasificadas por su magnitud visual m_v y su tipo espectral.

En este trabajo, no se abordarán las características espectrales como variable para el algoritmo de reconocimiento y orientación, pues para ello sería necesario definir, en hardware, el tipo de sensor de estrellas que será utilizado.

2.3.4 Distribución Estelar

Al utilizar las estrellas para la determinación de orientación es importante que sólo dependa de la estrellas con alta probabilidad de detección y las cuales resulten útiles para el algoritmo de reconocimiento. Para ello es conveniente seleccionar las estrellas cuyo brillo se encuentre dentro del intervalo dinámico del mismo sensor.

Por otra parte, existen conjuntos de estrellas que al ser observadas a simple vista aparentan ser solamente un objeto puntual. Es el caso de los sistemas dobles (dos estrellas), triples (tres estrellas) o múltiples (cuando tienen más de tres componentes). En los sistemas dobles y múltiples, sus estrellas orbitan entre si alrededor de un centro de masas común o baricentro. Sin embargo, en el caso de los sistemas dobles existen dos subcategorías:

- **Dobles ópticas.** Son dos estrellas que tienen una gran distancia entre sí. Sin embargo, debido a que la proyección de una porción del mapa celeste hacia un lente o una cámara resulta en dos dimensiones, da la perspectiva de que están muy próximas la una a la otra.
- **Dobles físicas o binarias.** Son dos estrellas que tienen una fuerza gravitatoria entre ellas, siguiendo las leyes de Kepler y Newton.

Para solucionar este tipo de perturbaciones en el algoritmo de identificación y por ende en la determinación de orientación, es necesario aplicar una metodología que permita que el catálogo de estrellas presente una distribución cuasi – uniforme. Dicha metodología será presentada en la sección 5.2.1

2.4 Características técnicas de un Sensor de Estrellas

Un sensor de estrellas está compuesto por una cámara encargada de tomar imágenes del mapa celeste y un algoritmo que analiza dichas imágenes para identificar las estrellas dentro del campo observado. Para ello es necesario conocer los conceptos ópticos relacionados con la cámara del sensor de estrellas, tales como la aberración, paralaje y el campo de visión.

Estas tres características, a su vez, influyen en el algoritmo de identificación de estrellas y por ende, en la determinación de la orientación del satélite.

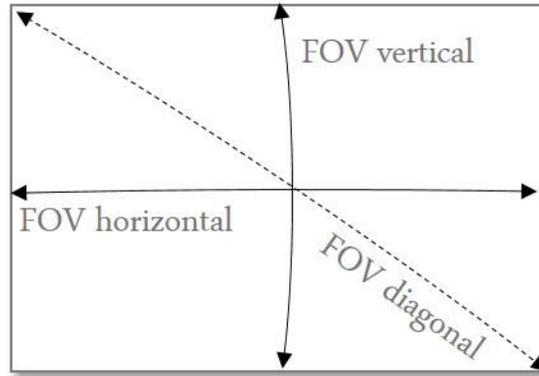
2.4.1 Conceptos Ópticos

En esta sección se abordarán los conceptos de aberración, paralaje y campo de visión. En el caso del campo de visión o también conocido como FOV (por sus siglas en inglés, *Field of View*) la matemática será ampliada más adelante en el Capítulo 4.

Aberración se refiere al movimiento aparente de los objetos celestes. En el caso de las estrellas se podría definir entre la diferencia de la posición observada de la estrella y su posición real. Esto se debe a la velocidad del sistema solar, a la velocidad de la Tierra, y a la velocidad del propio satélite en relación a su órbita. Sin embargo, la aberración de las estrellas resulta en el orden de segundos de arcos [15].

El paralaje es el ángulo que se forma debido a la posición aparente en el cielo de un objeto al ser observado desde de dos puntos distintos, suficientemente alejados entre sí y no alineados con el objeto observado. Debido a que las estrellas se encuentran muy distantes, el ángulo de paralaje es pequeño, efecto que tan solo ocurre para las estrellas que se encuentran muy próximas al Sistema Solar, con un máximo de paralaje de 0.85 segundos de arco, lo que provoca que no afecte de forma significativa el resultado [15].

El campo de visión o FOV de un sensor de estrellas, particularmente al hablar de su cámara, es el área que es posible observar de todo el mapa celeste. El campo de visión se mide en grados. Existen tres direcciones básicas: horizontal, vertical y diagonal (Véase Figure 2.4). Entre más reducido el campo de visión menor cantidad de estrellas serán observadas.



Ventana de proyección

Figura 2.4 Campo de visión horizontal, vertical y diagonal.

El campo de visión de interés, junto con el tamaño T correspondiente de la imagen en píxeles, permite determinar la resolución específica de la misma cámara del sensor de estrellas, es decir, a cuántos segundos de arco equivaldría un píxel de la imagen.

$$R = \frac{FOV}{T} \tag{2.6}$$

Como ejemplo consideremos un campo de visión de $5^\circ \times 5^\circ$ y una imagen de 500×500 píxeles. La resolución, tanto horizontal como vertical, estaría dada de la siguiente forma:

$$R = \frac{5}{500} = 0.01 \text{ }^\circ/\text{pixel} = 36''/\text{pixel}$$

En términos muy generales, el sistema óptico debe seleccionarse conforme los requerimientos de campo de visión, resolución y el rango de longitud de onda en la que se desea trabajar.

2.4.2 Algoritmo de un Sensor de Estrellas

Los sensores de estrellas determinan la orientación del satélite en el espacio primeramente, al tomar una imagen del mapa celeste con un determinado FOV, posteriormente identifican patrones geométricos para ser comparados con estrellas previamente catalogadas y finalmente, ya se puede definir la orientación. Por consiguiente, el software de un sensor

de estrellas, de manera general, debe contar con las siguientes dos etapas: algoritmo de identificación de estrellas y determinación de orientación.

El algoritmo de identificación de estrellas se clasifica a su vez en dos sub-etapas dependiendo de su situación en el espacio. La primera sub-etapa se refiere al momento en que el satélite ha sido recientemente lanzado y por consiguiente no tiene información a priori de la orientación. Esta sub-etapa es conocida como modo perdido en el espacio o LIS (Lost in Space, por sus siglas en inglés). Este proceso es el que requiere de mayor memoria como de mayor tiempo para identificar las estrellas del campo de visión. La siguiente sub-etapa es cuando la orientación del satélite ha sido determinada, logrando hacer una suposición o *guess* del próximo movimiento de las estrellas dentro del mismo campo de visión. A esta sub-etapa se le llama: modo de seguimiento (conocido en inglés como *tracking mode*).

3. Contexto matemático en la orientación de satélites

En esta apartado se describirán los dos modelos matemáticos más comunes involucrados en la orientación de satélites. Esta sección se realizó con la finalidad de que el lector tenga un panorama general de los tipos de modelos, la interpretación física de cada uno de ellos, así como sus ventajas y desventajas. Una parte importante del material que sigue se basa en [5].

3.1 Sistemas de coordenadas

La orientación de un cuerpo rígido puede describirse como la rotación que tiene dicho cuerpo en el espacio respecto a un sistema de referencia fijo. De esta manera, es necesario comenzar por describir dos conceptos fundamentales:

- El sistema de coordenadas global (*World Coordinate System*), es el sistema de referencia inercial respecto al cual será definida la orientación del cuerpo rígido. El origen de este sistema de coordenadas será denotado con x_M . Al hablar de un satélite o un cuerpo en el espacio, el sistema de coordenadas global sería el sistema de Coordenadas Inercial de la Tierra (ECI)
- Sistema de coordenadas del cuerpo rígido, como su nombre lo indica, es el sistema de referencia del cuerpo rígido del cual se desea determinar su orientación. Es importante notar que si el objeto rota, su respectivo sistema de coordenadas también rotará con él. El origen de este sistema de coordenadas será denotado con x_c . Para este trabajo en particular, el sistema de coordenadas del cuerpo rígido se referirá a la cámara del sensor de estrellas, el cual al estar a bordo del mismo satélite permite determinar su orientación.

Por convención, v' es el vector que señala a un punto P en el espacio desde el sistema de coordenadas del cuerpo rígido, mientras que v se dirige al mismo punto P respecto al sistema de coordenadas global (Véase Figura 3.1).

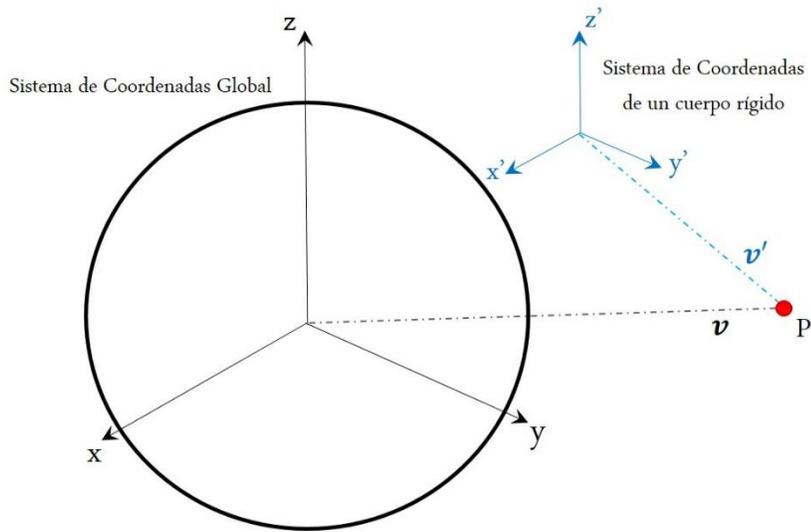


Figura 3.1. Representación gráfica de un punto P en el espacio visto desde el Sistema de Coordenada Global y el Sistema de Coordenadas de un cuerpo rígido.

Por otra parte, es importante mencionar que para fines prácticos el movimiento de rotación de la Tierra es considerado lo suficientemente lento, lo que haría válido utilizar el Sistema ECI como sistema de coordenadas global. [5]

3.2 Matriz de Orientación

Dado un punto en el espacio que puede ser representado en un sistema de referencia A como el vector v_A y en un sistema de referencia B, como el vector v_B . Mientras que la matriz de orientación o rotación R_{BA} al ser multiplicada con el vector v_A define la rotación que requiere dicho vector para ser representado en el sistema de referencia B. En términos generales, una matriz de orientación se describe como la matriz que indica la rotación de un vector dentro de un sistema de referencia dado, manteniendo su dimensión [5].

De esta manera, la siguiente relación se mantiene:

$$v' = R v \tag{3.3}$$

$$v = R^T v' \tag{3.4}$$

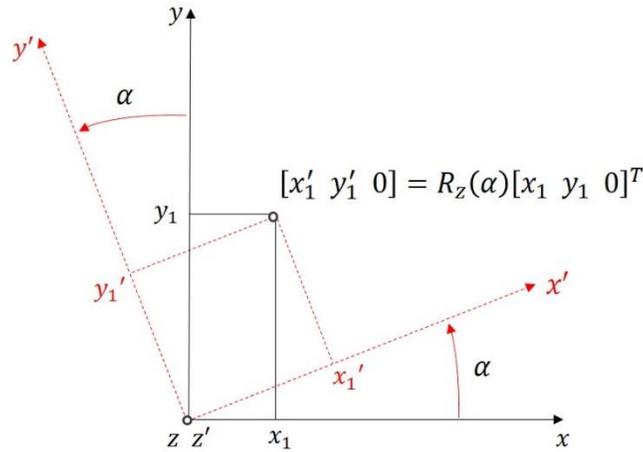


Figura 3.2. Sistema de coordenadas original (x,y,z) . El eje z apunta perpendicularmente hacia afuera de la hoja. Sistema de coordenadas rotado un ángulo α en torno a eje z (x',y',z') .

El grupo de todas las matrices 3×3 de rotaciones ortogonales especiales se denota por $SO(3)$ [5]. Por lo tanto, si $R \in SO(3)$ entonces:

$$\det R = \pm 1 \quad y \quad R^{-1} = R^T \quad (3.1)$$

Las matrices de rotación que tienen $\det R = 1$ son llamadas propias mientras que las matrices con $\det R = -1$ son conocidas como impropias, estas últimas no tienen aplicación física en la rotación de un objeto rígido. Por lo cual, en el presente trabajo sólo serán de interés las matrices propias. La matriz de rotación R se describe como:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Hay dos posibles convenciones para determinar la orientación de un cuerpo rígido. Algunos autores prefieren utilizar la matriz que define un vector del sistema de coordenadas del cuerpo rígido al sistema de coordenadas global, mientras que otros prefieren la matriz que mapea un vector del sistema de coordenadas global al sistema de coordenadas del cuerpo rígido. Ambas convenciones son válidas, sólo es recomendable que la convención a utilizar siempre sea congruente en todo el trabajo para evitar posibles resultados ambiguos.

3.3 Matriz de Dirección de Cosenos

Los elementos de una matriz de rotación también pueden ser expresados en cosenos de los ángulos entre el sistema del cuerpo rígido y el sistema global. Al denotar los ejes globales por (x, y, z) y los ejes del cuerpo rígido por (x', y', z') , entonces se podría definir $\theta_{x'y}$ como el ángulo entre el eje x' y y . Por lo tanto, en términos generales la matriz de rotación se puede expresar como:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x'x}) & \cos(\theta_{x'y}) & \cos(\theta_{x'z}) \\ \cos(\theta_{y'x}) & \cos(\theta_{y'y}) & \cos(\theta_{y'z}) \\ \cos(\theta_{z'x}) & \cos(\theta_{z'y}) & \cos(\theta_{z'z}) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Como ejemplo, considérese una rotación sobre el eje z , tal como se muestra en la Figura 3.2. De esta manera, el ángulo que se forma entre los ejes x' y x es el mismo que se forma entre los ejes y' y y , es decir, $\theta_{x'x} = \theta_{y'y} = \alpha$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\theta_{x'y}) & \cos(\theta_{x'z}) \\ \cos(\theta_{y'x}) & \cos(\alpha) & \cos(\theta_{y'z}) \\ \cos(\theta_{z'x}) & \cos(\theta_{z'y}) & \cos(\theta_{z'z}) \end{bmatrix} \quad (3.6.1)$$

por consiguiente, $\theta_{x'y} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\theta_{y'x} = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\theta_{z'z} = 0$.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & \cos(\theta_{x'z}) \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) & \cos(\alpha) & \cos(\theta_{y'z}) \\ \cos(\theta_{z'x}) & \cos(\theta_{z'y}) & \cos(\theta_{z'z}) \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

Finalmente, el eje z continúa perpendicular al eje x y y por lo que $\theta_{z'(x,y)} = \theta_{(x',y')z} = \frac{\pi}{2}$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6.3)$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

De manera analógica, se pueden determinar las matrices de rotación para los ejes x y y :

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ 0 & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Estas tres matrices también son llamadas rotaciones o transformación de coordenadas.

3.3.1 Ángulos de Euler

Tres matrices de rotación de coordenada multiplicadas secuencialmente definen cualquier rotación de un cuerpo en los tres ejes.

$$R_{ijk}(\varnothing, \theta, \varphi) = R_i(\varnothing)R_j(\theta)R_k(\varphi) \quad (3.9)$$

donde \varnothing es el ángulo de rotación sobre i , θ es el ángulo de rotación sobre j , y φ es el ángulo de rotación sobre k .

Al sustituir la ecuación 3.9 en 3.3 y 3.4, se obtiene la ecuación general para la rotación de un vector utilizando ángulos de Euler:

$$v' = R_{ijk}(\varnothing, \theta, \varphi) v \quad (3.10)$$

$$v = R_{ijk}(\varnothing, \theta, \varphi) v' \quad (3.11)$$

El orden y la combinación en que las matrices de rotación son multiplicadas dan lugar a 12 diferentes secuencias o convenciones. A continuación se enlistan las tres convenciones más utilizadas. En las referencias [5] y [9], se puede encontrar información más detallada.

- Secuencia de Ángulo de Euler (1,2,3)
- Secuencia de Ángulo de Euler (3,1,3)
- Secuencia de Ángulo de Euler (3,2,3)

3.4 Representación en Cuaternión

Otro método que permite representar un vector del sistema del cuerpo rígido en el sistema global es la representación con un cuaternión. [37]. Un cuaternión es una matriz de 4 x 1, la cual está compuesto por el vector de rotación $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]^T$ y el ángulo φ que será rotado un vector \mathbf{v} . Así la representación matemática de un cuaternión se describe como:

$$q(\mathbf{e}, \varphi) = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \mathbf{e}_2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \mathbf{e}_3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Donde su matriz de orientación representa la matriz de rotación en términos del cuaternión y se expresa como:

$$A(\mathbf{q}) = (q_4^2 - \|\mathbf{q}_{1:3}\|^2)\mathbf{I} - 2q_4[\mathbf{q}_{1:3} \times] + 2\mathbf{q}_{1:3}\mathbf{q}_{1:3}^T$$

$$= \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_2q_1 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_3q_1 + q_2q_4) & 2(q_3q_2 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Así, la ecuación 3.13 se convierte en la matriz de rotación en términos del cuaternión. Por consiguiente, haciendo una analogía con las ecuaciones (3.3) y (3.4) se deduce que:

$$\mathbf{v}' = A(\mathbf{q}) \mathbf{v} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{v} = A(\mathbf{q})^T \mathbf{v}' \quad (3.15)$$

En la Figura 3.3 se ilustra la rotación de un vector \mathbf{v} en tres dimensiones utilizando el cuaternión y su respectiva matriz de orientación $A(\mathbf{q})$.

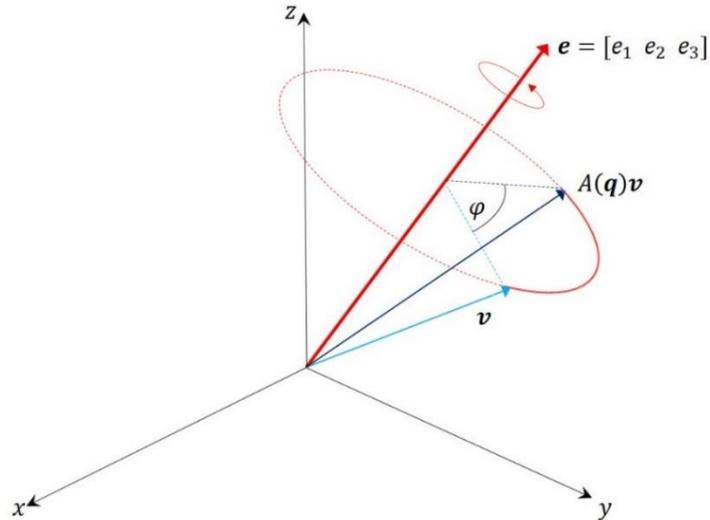


Figura 3.3. Rotación de un vector v utilizando la matriz de orientación $A(q)$.

Los ángulos de Euler son muy utilizados en la convención de los ángulos *roll*, *pitch* and *yaw* como es el caso de la aviación. Sin embargo, los ángulos de Euler tiene una principal desventaja: presenta puntos singulares, es decir, si al rotar el cuerpo rígido, uno de los ejes de su sistema de referencia coincide con algún eje del sistema de referencia global (x_M), se indefine.

3.4.1 Desventajas y ventajas en el uso de cuaterniones.

Las desventajas descritas anteriormente han conducido al uso de los cuaterniones para la determinación en orientación de un cuerpo rígido, ya que los cuaterniones presentan la ventaja de que sus funciones principales no presentan singularidades. Por otra parte, las desventajas de usar cuaterniones se deben principalmente a que el cuarto parámetro no tiene una representación física intuitiva y que los cuaterniones forzosamente deben ser normalizados previamente antes de aplicar una rotación [5]. Esta última desventaja, conlleva que al momento de determinar el módulo del cuaternión se utilizan funciones cuadráticas y por consiguiente dificulta el proceso y recursos computacionales en los algoritmos destinados a la determinación de orientación.

4 Simulador del Campo de Visión de un Sensor de Estrellas (CITLALLI)

4.1 Justificación

Para verificar el algoritmo de identificación de estrellas es necesario tener como entrada una imagen del mapa celeste [12] [26], para ello se propuso la construcción de un simulador que genere el campo de visión de estrellas dada una posición en coordenadas celestes. En este capítulo se describe cada una de las funciones que involucra al simulador del campo de visión para un sensor de estrellas. A este simulador lo hemos llamado CITLALLI.

4.2 Descripción del Sistema

CITLALLI es un simulador de campo de visión de un sensor de estrellas. Este simulador fue construido en la plataforma MATLAB 2013, su objetivo es generar una imagen de las estrellas que serían vistas por la cámara del sensor de estrellas a partir de nueve características técnicas que el usuario debe indicar a priori y que pueden apreciarse gráficamente en la figura 4.1:

1. Ascensión Recta Central (α_c). Este parámetro se refiere al ángulo de ascensión recta que se desea tener en el centro de la imagen a simular.
2. Declinación Central (δ_c). Es el parámetro que indica el ángulo de declinación que se desea tener en el centro de la imagen a simular
3. Largo de la Imagen (L_{pix}). Es el largo de la imagen en pixeles que el sensor de estrellas tendría como resolución.
4. Ancho de la Imagen (A_{pix}). Es el ancho de la imagen en pixeles que el sensor de estrellas identificaría.
5. FOV Vertical (fov_v). Es el campo de visión vertical de la cámara del sensor de estrellas.
6. FOV Horizontal (fov_h). Es el campo de visión horizontal del sensor de estrellas.
7. Gamma (γ). Este parámetro se utiliza para ajustar el brillo de la estrella dependiendo de su magnitud
8. Constante de tamaño (d_{est}). Este parámetro permite modificar el tamaño de la estrella siempre acorde a su magnitud.

9. Ángulo de rotación (σ). El ángulo de rotación permite simular la imagen que la cámara del Star Tracker capturaría si se encontrará rotada respecto al sistema de referencia ECI.

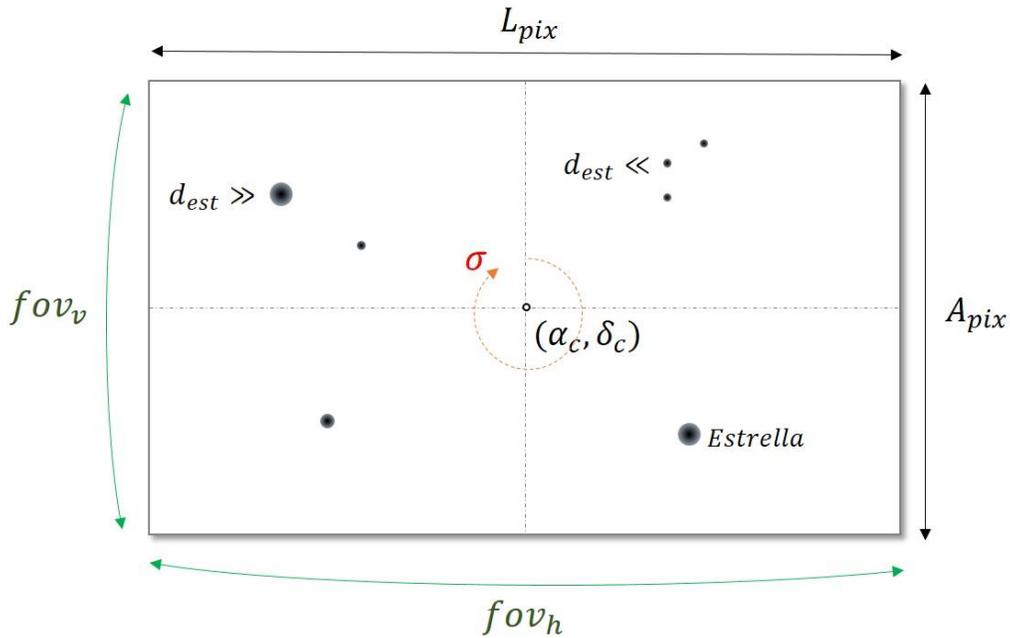


Figura 4.1 Descripción de los parámetros de la ventana de proyección dentro del simulador CITLALLI.

4.2.1 Conversión de las coordenadas astronómicas a cartesianas.

En internet se encuentran disponibles algunos catálogos de estrellas y cuyos objetos estelares han sido caracterizados en cuanto a su ángulo de ascensión recta, declinación y su magnitud aparente. El catálogo Hipparcos EP=1991.25 disponible en [34] contiene 120,404 estrellas. En este trabajo se construyó una base de datos a partir del catálogo Hipparcos, considerando un umbral estelar de 8 en magnitud, dando un total de 37,594 estrellas disponibles.

Esta base de datos con 37,594 estrellas se almacenó en un fichero llamado *StarCaralogue.dat*, el cual está conformado por tres columnas: ángulo en ascensión recta, ángulo en declinación y magnitud aparente de la estrella. Tanto el ángulo en ascensión recta como en declinación se encuentran en grados.

La función de lectura del programa CITLALLI consiste en cargar las coordenadas astronómicas de todas las estrellas que conforman *StarCatalogue.dat* y aplicar las ecuaciones 2.1 a 2.3 para convertir cada vector de estrella $\mathbf{v}_{est}(i)$ en coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares:

$$v_{x_{est}}(i) = \cos(\alpha(i)) \cos(\delta(i)) \quad (4.1a)$$

$$v_{y_{est}}(i) = \sin(\alpha(i)) \cos(\delta(i)) \quad (4.1b)$$

$$v_{z_{est}}(i) = \sin(\delta(i)) \quad (4.1c)$$

donde $i = 1,2,3 \dots 37,594$.

4.2.2 Ajuste de ventana

Tal como se presentó en el capítulo 2, el ángulo de ascensión recta y declinación proyectan las estrellas en una esfera celeste normalizada, es decir que su radio equivale a 1. De acuerdo al campo de visión de la cámara del sensor de estrellas sólo es posible capturar una porción del mapa celeste con una determinada apertura horizontal y vertical. Es por ello que el programa CITLALLI solicita al usuario el FOV horizontal y el FOV.

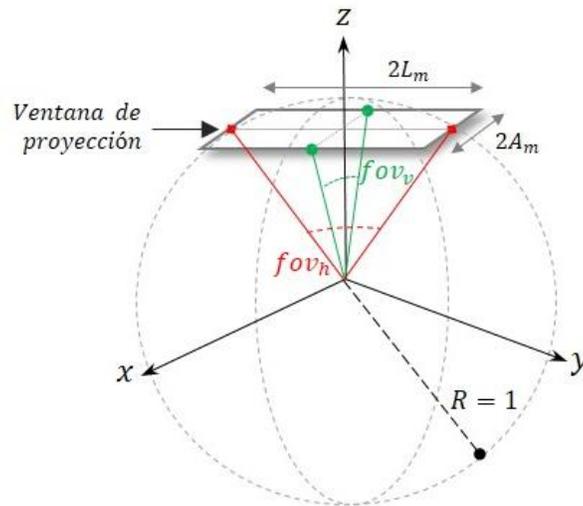


Figura 4.2 Geometría del Campo de Visión en el plano xy. L_m es la mitad del largo de la ventana de proyección, A_m es la mitad del ancho de la ventana de proyección; mientras que R es el radio normalizado de la esfera celeste.

De esta manera, el campo de visión horizontal y vertical permiten definir, respectivamente, la mitad del largo (L_m) y la mitad del ancho (A_m) de la ventana de proyección que recibirá la cámara del sensor de estrellas en coordenadas rectangulares (Véase Figura 4.2). Los parámetros L_m y A_m pueden ser determinados al utilizar propiedades trigonométricas:

$$L_m = \sin\left(\frac{fov_h}{2}\right) \quad (4.2)$$

$$A_m = \sin\left(\frac{fov_v}{2}\right) \quad (4.3)$$

Los parámetros L_m y A_m son utilizados como umbral para definir qué estrellas se encuentran dentro de la ventana de proyección en el plano xy , es decir, qué estrellas deben ser graficadas en la imagen que se desea simular del mapa celeste. Por consiguiente, las coordenadas rectangulares (x, y) de las estrellas que se encuentren fuera de la ventana de proyección son descartadas y no son graficadas.

Posteriormente, se puede determinar la mitad de la diagonal de la ventana de proyección (d_m) como:

$$d_m = \begin{cases} \sqrt{2 L_m^2} & L_m > A_m \\ \sqrt{2 A_m^2} & L_m < A_m \end{cases} \quad (4.4)$$

Al conocer la mitad de la diagonal de la ventana de proyección (d_m) y el radio de la esfera celeste (R), se determina el umbral de profundidad de la imagen, el cual corresponde a la componente z (Véase Figura 4.3).

$$P_z = \sqrt{1 - d_m^2} \quad (4.5)$$

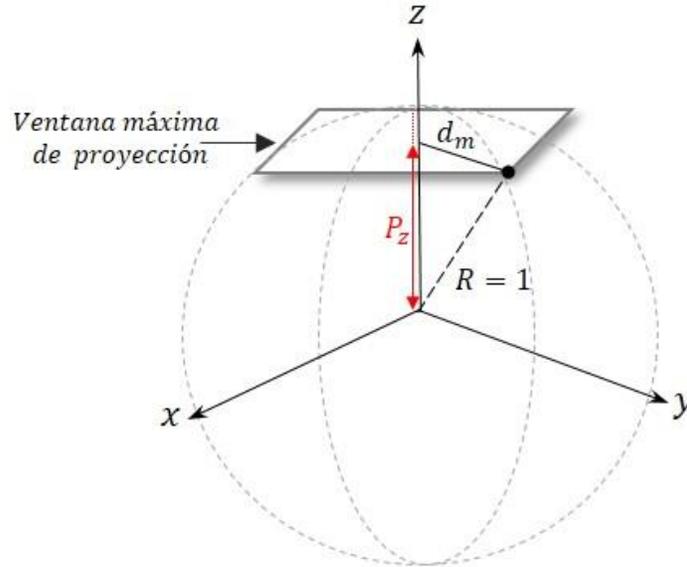


Figura 4.3 Representación gráfica del umbral para el eje z. Donde d_m es la mitad de la diagonal de la ventana de proyección y P_z es el umbral de profundidad, el cual define que estrellas se encuentran dentro de la ventana de proyección respecto a su componente en z.

4.2.3 Traslación de la ventana de proyección en Ascensión Recta y Declinación Central

Para comenzar, es importante que se tenga presente que la trayectoria que haría un sensor de estrellas a lo largo de la esfera celeste inercial es equivalente a proponer un sensor de estrellas con apuntado fijo y siendo la esfera celeste la que rota. Por lo anterior, el programa CITLALLI ofrece al usuario la flexibilidad de elegir el ángulo de rotación (σ) de la imagen celeste previamente definida por una ascensión recta y una declinación. Para ello, se propuso utilizar las matrices de rotación en términos del cuaternión.

La matemática del cuaternión, tal como se describió en el capítulo 3, permite representar el cambio de posición de un vector mediante un ángulo θ y un eje de rotación (\mathbf{e}). El cuaternión junto con su matriz de orientación simularía la rotación de los vectores estelares que conforman la esfera celeste mientras que la cámara del sensor de estrellas tendría un vector de apuntado fijo (\mathbf{r}_{ST}) representado en la Figura 4.4. y en donde se considera que cada estrella tiene su representación vectorial respecto al centro de la esfera celeste.

De esta manera, el ángulo de ascensión recta y declinación central que el usuario ingresa es transformado en coordenadas rectangulares, lo que da paso a su representación vectorial \mathbf{r}_C .

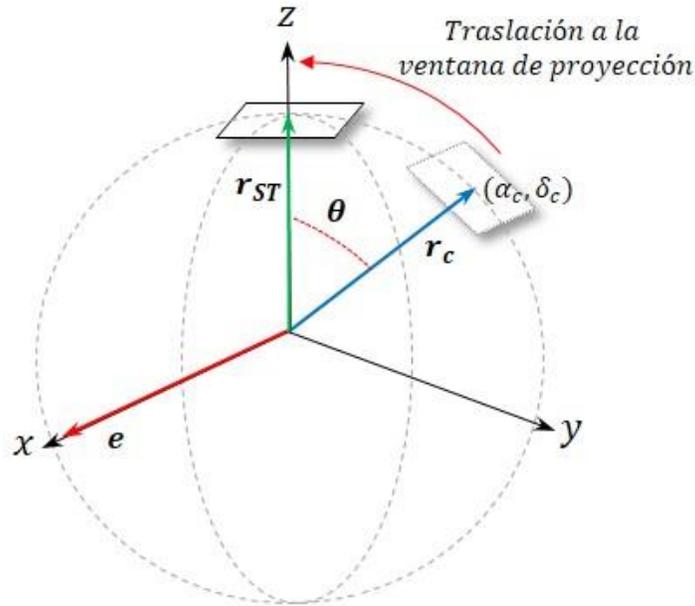


Figura 4.4 Relación geométrica entre el eje de rotación (e), el vector de apuntado fijo del Star Tracker (r_{ST}) y el vector que apunta al centro de la ventana de proyección (r_C). Donde θ es el ángulo de rotación del vector r_C en torno al eje e .

En la Figura 4.4 se representa el vector fijo \mathbf{r}_{ST} paralelo al eje z positivo, mientras que el vector \mathbf{r}_C puede apuntar a cualquier posición del cascarón de la esfera celeste. Por consiguiente, al aplicar el producto cruz vectorial entre el vector \mathbf{r}_{ST} y \mathbf{r}_C da como resultado el eje de rotación e .

$$\mathbf{r}_{ST} \times \mathbf{r}_C = \mathbf{e} \quad (4.6)$$

Sin embargo, existe un caso particular en el que el vector \mathbf{r}_C es igual a $\pm \mathbf{r}_{ST}$. Para seleccionar el valor adecuado, se propuso generalizar la función que determina el eje de rotación e a través de la siguiente condición:

$$\mathbf{e} = \begin{cases} [0 \ 1 \ 0]^T & \mathbf{r}_C = |\mathbf{r}_{ST}| \\ \mathbf{r}_{ST} \times \mathbf{r}_C & \mathbf{r}_C \neq |\mathbf{r}_{ST}| \end{cases} \quad (4.7)$$

Por otra parte, basándose en la representación geométrica de la Figura 4.4, resulta evidente que el ángulo de rotación θ es equivalente a

$$\theta = 90^\circ - \delta_c \quad (4.8)$$

A continuación se evalúa el correspondiente eje de rotación \mathbf{e} y el ángulo de rotación θ en la ecuación del cuaternión (3.12), esta a su vez en su matriz de orientación (3.13) y por último se sustituye cada vector estrella $\mathbf{v}_{est}(i)$ en la ecuación (3.14). De esta manera se obtiene un nuevo vector $\mathbf{v}_r(i)$ que representa la estrella i rotada un ángulo θ sobre el eje de rotación \mathbf{e} .

$$\mathbf{q}(\mathbf{e}, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{v}_r(i) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_2q_1 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_3q_1 + q_2q_4) & 2(q_3q_2 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{est} \quad (4.10)$$

Esto permite que toda la esfera celeste (dentro del archivo *StarCaralogue.dat*) rote un ángulo θ con la finalidad de que el vector \mathbf{r}_c se alinee con el vector \mathbf{r}_{ST} . En otras palabras, el punto de intersección entre la ascensión recta central y declinación central deseada coincidirá con el centro de la ventana de proyección del sensor de estrellas y de esta manera se podrán graficar sólo las estrellas dentro del campo de visión del apuntado deseado.

4.2.4 Rotación de la ventana de proyección

Una vez que se ha rotado la esfera celeste para poder proyectar el ángulo de ascensión recta y declinación central deseados en la imagen que generará el programa CITLALLI, se procede a analizar si el ángulo de rotación σ es diferente de cero. De ser así, estaría indicando que el sensor de estrellas rotó un ángulo σ sobre su mismo eje de apuntado \mathbf{r}_{ST} .

Para este caso, se considera que el eje de rotación \mathbf{e} equivale al vector normalizado \mathbf{r}_{ST} y el ángulo θ sería igual a σ , representando el ángulo de rotación que se forma sobre el plano xy de la ventana de proyección. Análogamente, se utilizarían las ecuaciones (3.12) y (3.13) con la finalidad de posicionar las estrellas correspondientes dentro de la ventana de proyección del sensor de estrellas.

4.2.5 Filtrado de las estrellas dentro de la ventana de proyección

Hasta ahora se ha realizado la rotación de la esfera celeste, es decir cada una de las estrellas que conforman el catálogo *StarCaralogue.dat* han sido rotadas un ángulo θ y σ conforme los procedimientos descritos en la secciones 4.2.3 y 4.2.4. A continuación, el algoritmo CITLALLI debe comparar los componentes rectangulares de cada vector estrella rotada $[v_{x_r}(i), v_{y_r}(i), v_{z_r}(i)]$ con los umbrales L_m , A_m y P_z respectivamente.

En la Figura 4.5 se presenta un diagrama de flujo que describe el filtrado de las estrellas dentro de la ventana de proyección.

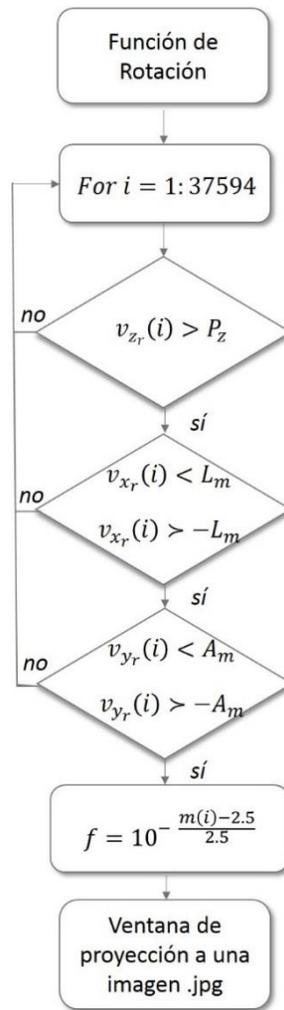


Figura 4.5 Diagrama de Flujo para filtrar las estrellas dentro de la ventana.

Posteriormente para las estrellas que se encuentran dentro de la ventana de proyección se calcula su flujo de luz ($f(i)$) al despejar dicha variable en la ecuación 2.4, considerando la correspondiente magnitud aparente $m(i)$ y una magnitud aparente de referencia de 2.5.

4.2.6 Ventana de proyección del Sensor de Estrellas

En las secciones anteriores se han descrito las funciones que permiten ubicar y filtrar las estrellas que se encuentran dentro de la ventana de proyección del sensor de estrellas considerando un campo de visión horizontal, vertical, un ángulo de ascensión recta central, un ángulo de declinación central y un ángulo de rotación σ . Hasta este momento todos los cálculos han sido definidos en un sistema de referencia rectangular. Ahora bien, es necesario

representar las coordenadas rectangulares de las estrellas (Figura 4.6a) que se encuentran dentro de la ventana de proyección en el sistema de coordenadas de una imagen, es decir, en un plano xy dado en pixeles (Figura 4.6b).

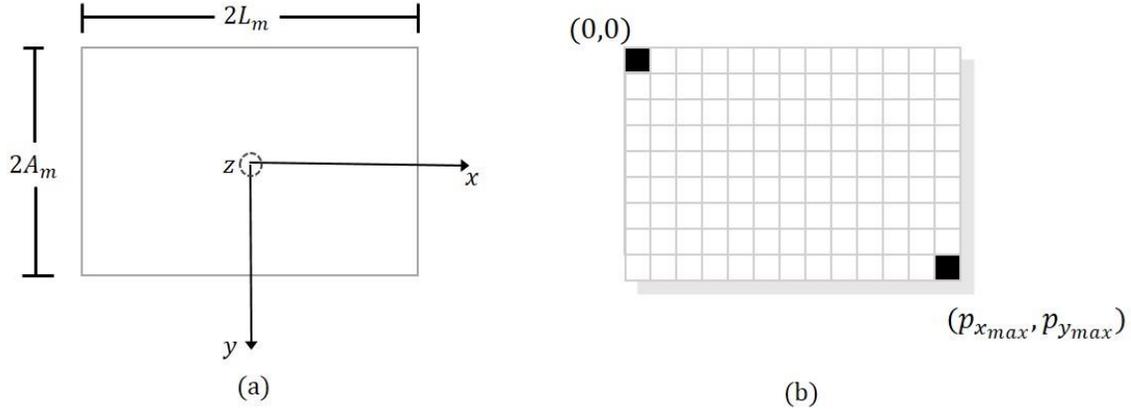


Figura 4.6. Ventana de proyección del Sensor de Estrellas. (a) Representa la ventana de proyección en sistema de coordenadas rectangulares normalizadas, donde el eje z apunta perpendicularmente adentro de la hoja mientras que (b) representa la ventana de proyección en el plano xy de una imagen.

De esta forma se puede deducir las ecuaciones que permiten la conversión de las coordenadas rectangulares dentro de la ventana de proyección a las coordenadas en pixeles:

$$x_{pix} = \frac{L_{pix} v_{xr}}{2 L_m} + \frac{L_{pix}}{2} + 1 \quad (4.11)$$

$$y_{pix} = \frac{A_{pix} v_{yr}}{2 A_m} + \frac{A_{pix}}{2} + 1 \quad (4.12)$$

Debido a que se busca la mayor precisión posible en el centroide de la estrella y al mismo tiempo, brindar una representación lo más realista de la magnitud aparente; la estrella no puede ser graficada en un único pixel, por el contrario debe ser dispersado en una mancha de pixeles alrededor de un posible centroide de la estrella. Dicha mancha tendría un radio R que estaría en función del flujo de luz de la estrella:

$$R = (f(i))^{\frac{1}{\gamma}} d_{est} + 0.5 \quad (4.13)$$

Además, la intensidad de brillo del pixel tiene un rango de 0 a 255 en escala de grises; siendo el valor cero para el color negro y el valor 255 representa el color blanco. De esta manera se ajusta una distribución normal gaussiana en 2D [16] a dicha escala:

$$P = 255 (f) e^{\left(-0.5 \left(\frac{m-xpix}{R} \right)^2 + \left(\frac{n-ypix}{R} \right)^2 \right)} \quad (4.14)$$

donde $m = -R, R + 1, \dots, R$
 $n = -R, R + 1, \dots, R$

4.2.7 Función Cuadrícula Ecuatorial

Esta función permite graficar la cuadrícula ecuatorial como una proyección 2D dentro de la imagen en pixeles. Si el usuario desea activar esta función debe activar la bandera *grid_on* dentro del código de CITLALLI.

La función cuadrícula ecuatorial es externa al programa CITLALLI, la cual por medio de un paso en ascensión recta y en declinación, ambos pasos en grados, hace un barrido en toda la esfera celeste y mediante las ecuaciones 2.1 a 2.3 realiza un muestreo en coordenadas rectangulares para definir la cuadrícula ecuatorial que el usuario requiere. Después, la misma metodología descrita de la sección 4.2.3 a la 4.2.5 se utiliza análogamente para rotar cada uno de los puntos de la cuadrícula ecuatorial y definir cuáles se encuentran dentro de la ventana de proyección.

4.3 Funcionamiento del programa CITLALLI

En esta sección se presentan imágenes del mapa celeste generado por el programa CITLALLI y se realiza una comparación con el programa Stellarium [36].

<p>Datos de entrada</p> $\alpha_c = 0$ $\delta_c = 90$ $L_{pix} = 500$ $A_{pix} = 500$ $fov_v = 10$ $fov_h = 10$ $\gamma = 0^\circ$ $d_{est} = 1.2$ $\sigma = 2.7$	<p>Programa CITLALI</p> 	<p>Programa Stellarium</p> 
<p>Datos de entrada</p> $\alpha_c = 90$ $\delta_c = 0$ $L_{pix} = 500$ $A_{pix} = 500$ $fov_v = 15$ $fov_h = 15$ $\gamma = 0^\circ$ $d_{est} = 1.1$ $\sigma = 2.4$	<p>Programa CITLALI</p> 	<p>Programa Stellarium</p> 
<p>Datos de entrada</p> $\alpha_c = 180$ $\delta_c = -30$ $L_{pix} = 500$ $A_{pix} = 500$ $fov_v = 15$ $fov_h = 15$ $\gamma = 20^\circ$ $d_{est} = 1.2$ $\sigma = 2.7$ $grid_on = false$	<p>Programa CITLALI</p> 	<p>Programa Stellarium</p> 

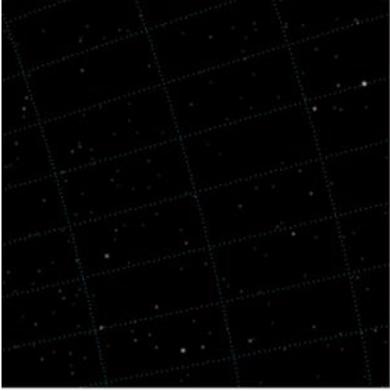
$\alpha_c = 180$ $\delta_c = -30$ $L_{pix} = 500$ $A_{pix} = 500$ $fov_v = 15$ $fov_h = 15$ $\gamma = 15^\circ$ $d_{est} = 1.2$ $\sigma = 2.7$ $grid_on = true$		
---	---	--

Tabla 4.1 Comparación entre el programa CITLALI y el programa Stellarium.

En resumen, el simulador CITLALI permite graficar un mapa celeste a partir de las características generales de un sensor de estrellas y además, ofrece la ventaja de devolver como salida un vector cuaternión, el cual indica la orientación que tendría el satélite si estuviera observando dicha ventana de proyección. Este vector cuaternión es de vital importancia para verificar el funcionamiento de un algoritmo de identificación de estrellas y calcular con qué precisión obtendría la orientación de un satélite.

5. Identificación del mapa celeste

Este capítulo está conformado por una revisión general de los métodos de identificación de estrellas más usada en la literatura y posteriormente se presenta el método propuesto, el cual está basado en la geometría de triángulos cuasi-equiláteros.

5.1 Metodologías en la literatura

Un algoritmo de un sensor de estrellas está compuesto por cuatro funciones principales: función offset, centroide, reconocimiento de patrón y búsqueda en el catálogo de estrellas. En la Figura 5.1 se observa el diagrama a bloques para un sensor de estrellas, por lo cual, la forma en que las funciones se enlistan a continuación es el orden en que son ejecutadas:

- 1) Función offset. Esta función elimina el ruido de fondo de la imagen tomada por el sensor de estrellas.
- 2) Función centroide. Esta función es encargada de identificar las coordenadas de cada una de las estrellas presentes en el campo observado.
- 3) Reconocimiento de patrón. Analiza las estrellas mediante un patrón y define las características que permitirán identificar las estrellas al compararlas con una base de datos.
- 4) Búsqueda en el Catálogo de Estrellas. Compara las características de la función anterior con la base de datos y así definir las coordenadas de las estrellas dentro del campo observado.

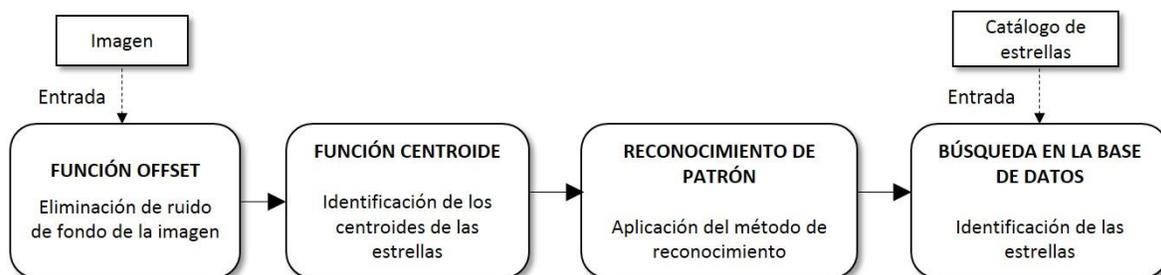


Figura 5.1 Diagrama a bloques de un algoritmo de identificación estelar.

En la literatura existen diversas propuestas de patrones para la identificación de estrellas, los cuales van desde la comparación de distancias angulares entre estrellas [10],[18], el reconocimiento de patrones de triángulos con sus respectivas variantes: triángulo plano [1],[2],[10], pirámide [1],[10], polígonos [4],[17]); análisis por cuadrícula [1],[32] hasta el uso de herramientas de probabilidad y estadística [1], [25], [30], entre otras [15],[16],[21],[24],[29].

En las siguientes secciones se describen tres de las metodologías de identificación que han tenido gran influencia en otros métodos propuestos.

5.1.1 Método de identificación por triángulos planos

El primer método de identificación de estrellas es propuso en el año 1978 por Gottlieb, el cual consistía en comparar el ángulo de separación entre dos estrellas dentro de un campo de visión [1]. Esta metodología abrió un nuevo nicho de investigación, ya que al utilizar un reconocimiento basado en ángulos, el proceso de identificación era independiente de la rotación y posición que pudiera tener un sensor de estrellas. Sin embargo, existía la posibilidad de que más de un par de estrellas tuviera el mismo ángulo de separación, por lo cual el algoritmo difícilmente podía definir una única respuesta para cada estrella. Este método conllevaba a una precisión baja [10].

Debido a ello, Groth propuso en 1986 un algoritmo de identificación mediante el reconocimiento de triángulos planos[10]. Este método toma tres estrellas como vértices de un triángulo (Figura 5.1) y define el área entre ellas:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (5.2)$$

donde

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) \quad (5.1a)$$

$$a = \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| \quad (5.1b)$$

$$b = \|\mathbf{u}_q - \mathbf{u}_r\| \quad (5.1c)$$

$$c = \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_r\| \quad (5.1d)$$

Luego, calcula su momento polar como:

$$J = \frac{A(a^2+b^2+c^2)}{36} \quad (5.3)$$

Para finalmente, comparar dichas características con su respectiva base de datos.

Como la metodología está basada en triángulos es necesario, al menos, tres estrellas dentro del campo de visión. La ventaja de este algoritmo se debe a que la cantidad de triángulos que comparten misma área y momento polar resultan ser pocos, lo que aumenta la precisión de identificación [10].

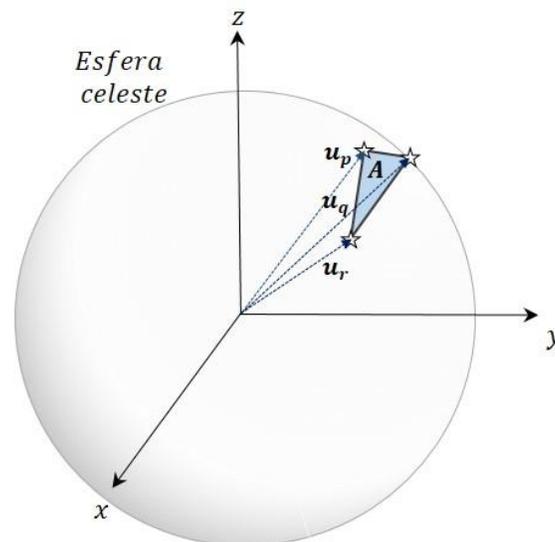


Figura 5.2 Método de identificación por triángulos planos.

5.1.2 Método de identificación por Liebe

En el año 1995, Liebe publicó un método de identificación de estrellas basado en distancias angulares y un ángulo interno, requiriendo como mínimo tres estrellas dentro del campo de visión. En la Figura 5.3 se muestra la interpretación gráfica del método de identificación de Liebe.

Los pasos principales de su algoritmo son los siguientes [18]:

1. Cada una de las estrellas detectadas dentro del campo de visión se toma como una estrella de referencia e_r .
2. Se calcula las distancias angulares, d_{r2} y d_{r1} entre la estrella de referencia y sus dos estrellas vecinas más cercanas, e_1 y e_2 .
3. Se calcula el ángulo interno θ_{12} entre las dos estrellas vecinas.
4. Finalmente, se busca el ángulo interno en la base de datos y se comparan las distancias angulares para así identificar las estrellas dentro del campo de visión.

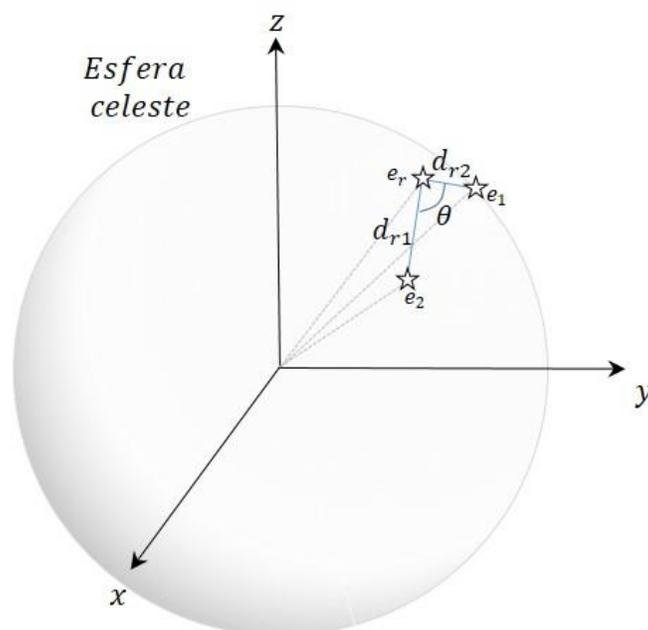


Figura 5.3 Método de identificación de Liebe.

La simplicidad de esta metodología de identificación fue el gran aporte de Liebe. Sin embargo el algoritmo depende de un umbral de magnitud aparente (Véase Capítulo 2) por lo que las estrellas con intensidad de brillo cercano al umbral pueden no ser detectadas. Para evitar este problema, Liebe propuso considerar todas las posibles estrellas dependiendo del campo de visión del sensor de estrellas, es decir, a menor campo de visión mayor será el umbral de magnitud aparente, lo que aumenta el tamaño del catálogo de estrellas y la base de datos que contiene las características de reconocimiento [18].

5.1.3 Método de identificación por votación

El método de identificación por votación, de manera similar al caso del algoritmo propuesto por Liebe, se basa en las distancias angulares entre cada una de las estrellas con la característica adicional de utilizar estadística para el proceso de identificación, lo que lo convierte en uno de los más precisos métodos en identificación de estrellas. Sin embargo su principal desventaja se debe a que su tiempo de ejecución suele ser mayor que los métodos descritos anteriormente [1].

Primero todas las estrellas del catálogo $\{e\}$ referenciadas bajo el sistema inercial celeste (ICRF) deben tener un número de identificación (ID). A partir de esto, se genera la base de datos cuyos parámetros son la distancia angular entre cada par de estrellas del catálogo, como cada estrella tiene asociado su ID y su respectivo vector visto desde el sistema de referencia del sensor de estrellas, se tiene entonces el denominado vector par de estrella $\{u_i, u_j\}$, con el cual se calcula la correspondiente distancia angular d_{ij} :

$$d_{ij} = u_i \cdot u_j \quad (5.4)$$

Asociándole a dicha distancia angular d_{ij} una cierta tolerancia ϵ , se tiene un margen inferior y un margen superior en el que se encuentra una distancia angular d_{pq} perteneciente a la base de datos:

$$d_{ij} - \epsilon \leq d_{pq} \leq d_{ij} + \epsilon \quad (5.5)$$

A continuación se enlistan como los vectores de estrellas candidatas $\{e_p, e_q\}$, con sus respectivos IDs [1].

Una vez que todos los pares de estrellas han sido analizados, se somete a votación (o conteo) cada ID de estrella candidata. Siendo así que, para cada par de estrella dentro del campo de visión, se selecciona las dos estrellas candidatas $\{v_i, v_j\}$, las cuales recibieron más votos. Finalmente como proceso de verificación, se toma cada vector par de estrellas candidatas seleccionadas $\{v_i, v_j\}$ y se calcula su distancia angular (r_{ij}):

$$r_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \quad (5.6)$$

comprobando que efectivamente se cumple que

$$d_{ij} - \epsilon \leq r_{ij} \leq d_{ij} + \epsilon \quad (5.7)$$

La explicación más detallada sobre esta metodología se encuentra en [25].

5.2 Método propuesto basado en la geometría de triángulos cuasi-equiláteros

En la sección 5.1 se describieron tres metodologías que han destacado en la literatura. Como se observó, la metodología de Liebe brinda una gran simplicidad como patrón de reconocimiento lo que permite un bajo tiempo de ejecución; sin embargo el tamaño del catálogo aumentará conforme se disminuya el campo de visión. Por otra parte el método de identificación por triángulos planos, el cual utiliza su área y su momento polar como características de reconocimiento, permite que con un patrón de tres estrellas se realice el proceso de identificación; no obstante si el campo de visión es menor, aumentará la probabilidad de tener áreas y momentos polares muy semejantes dentro de la base de datos. Por último el método de votación brinda gran precisión para la identificación de estrellas respecto a los dos anteriores; sin embargo se aumenta el tiempo de ejecución. Al considerar las ventajas que presenta cada uno de estos tres métodos, se propone un nuevo reconocimiento de estrellas mediante triángulos cuasi-equiláteros y el uso de herramientas de probabilidad y estadística.

5.2.1 Generación de un catálogo estelar cuasi-uniforme

La imagen celeste capturada por un sensor de estrellas se encuentra en dos dimensiones, lo que pueda llevar a que dos o más estrellas den la perspectiva de estar muy cercanas entre sí (Véase estrellas binarias en la Sección 2.3). Este efecto óptico influye de gran manera en el algoritmo de identificación, particularmente en la función encargada de identificar los centroides de las estrellas; ya que dos o más estrellas que aparentan estar muy cercanas entre sí pueden ser interpretadas por el algoritmo como un solo centroide.

Para evitar dicho efecto óptico, existen métodos que permiten aproximar el catálogo de estrellas a una distribución uniforme. En las referencias [14] y [40] se describen métodos para segmentar circularmente el mapa celeste. En esta tesis se presentará un nuevo método basado en un análisis de segmentación en tres dimensiones. Esto dará lugar a un nuevo catálogo con una distribución estelar cuasi-uniforme, el cual llamaremos: *StarCatalogueUniform.dat*.

Es importante retomar que dentro de la representación tridimensional de la esfera celeste, las estrellas se encuentran únicamente dispersas sobre el cascarón. Es así que respecto al origen del sistema inercial celeste (ECI) y un par de estrellas $\{i, j\}$ se puede formar un ángulo de separación φ_{ij} , tal como se presenta en la Figura 5.4.

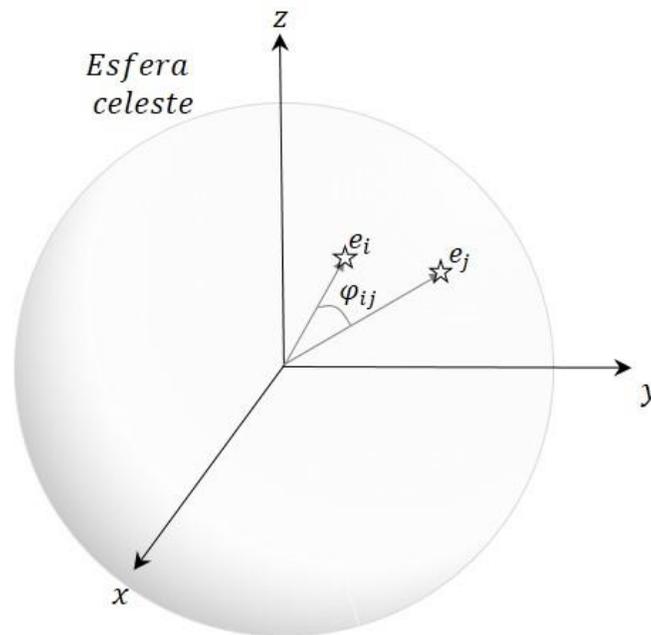


Figura 5.4. Ángulo de separación φ_{ij} entre un par de estrellas $\{i, j\}$.

Resulta evidente que el ángulo de separación φ_{ij} brinda información de la cercanía que existe entre un par de estrellas $\{i, j\}$. Por consiguiente para generar un nuevo catálogo con una distribución estelar cuasi-uniforme (*StarCatalogueUniform.dat*) es necesario definir

cuál será el ángulo mínimo de separación φ_{min} permitido entre dos estrellas. En el presente trabajo se propone heurísticamente un ángulo φ_{min} igual a 1° .

Debido a que se invertiría un gran tiempo de ejecución en calcular y comparar cada ángulo de separación φ que existe entre todas las combinaciones posibles de pares de estrellas del catálogo *StarCatalogue.dat*; se propone realizar un análisis por segmentación del mapa celeste en tres dimensiones.

La segmentación del mapa celeste en tres dimensiones consiste en ir tomando una estrella de referencia e_r y a partir de sus coordenadas astronómicas (α_r, δ_r) , definir la región sobre la cual será posible encontrar las estrellas vecinas con las que forme ángulos de separación menor a φ_{min} (Véase Figura 5.5). De esta manera, el análisis de ángulos de separación se limita únicamente a las estrellas que se encuentran dentro de cada región.

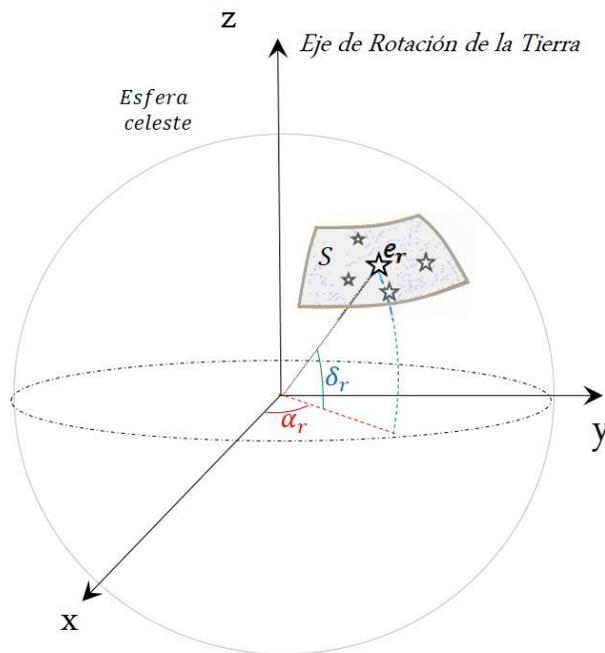


Figura 5.5. Estrella de referencia e_r con coordenadas astronómicas (α_r, δ_r) . La región sombreada representa el conjunto S en el cual se encuentran las estrellas que junto con la estrella e_r forman ángulos de separación menores a φ_{min} .

Los límites inferiores y superiores de cada región deben ser definidos en ascensión recta y en declinación. Para ello, al realizar un análisis entre las Figuras 5.4 y 5.5, se observa que tanto el ángulo de separación φ como el ángulo de declinación δ_r parten del centro del plano xy y se dirigen a un punto de la esfera celeste, lo que permite calcular de manera directa el límite inferior (δ_{inf}) y superior (δ_{sup}) en Declinación de acuerdo a:

$$\delta_{inf} = \delta_r - \varphi_{min} \quad (5.8)$$

$$\delta_{sup} = \delta_r + \varphi_{min} \quad (5.9)$$

Para el caso de los límites en ascensión recta $[\alpha_{inf}, \alpha_{sup}]$ se debe realizar un análisis más a fondo. En primer lugar al observar la Figura 5.5 se muestra que el ángulo α_r parte del eje x y se dirige al punto que proyecta la ubicación de la estrella de referencia e_r sobre el plano xy . Por consiguiente, se puede decir que para cada ángulo de declinación δ_r existe un círculo C_r paralelo al plano xy sobre el cual se forma un ángulo de ascensión recta α_r , tal como se muestra en la Figura 5.6a. Así cada círculo C_r presenta un respectivo radio r_d . De esta manera se puede representar geoméricamente, a través de la Figura 5.6b, una relación entre el ángulo de apertura de la región en términos de ascensión recta (α_{ap}) y el ángulo φ_{min} .

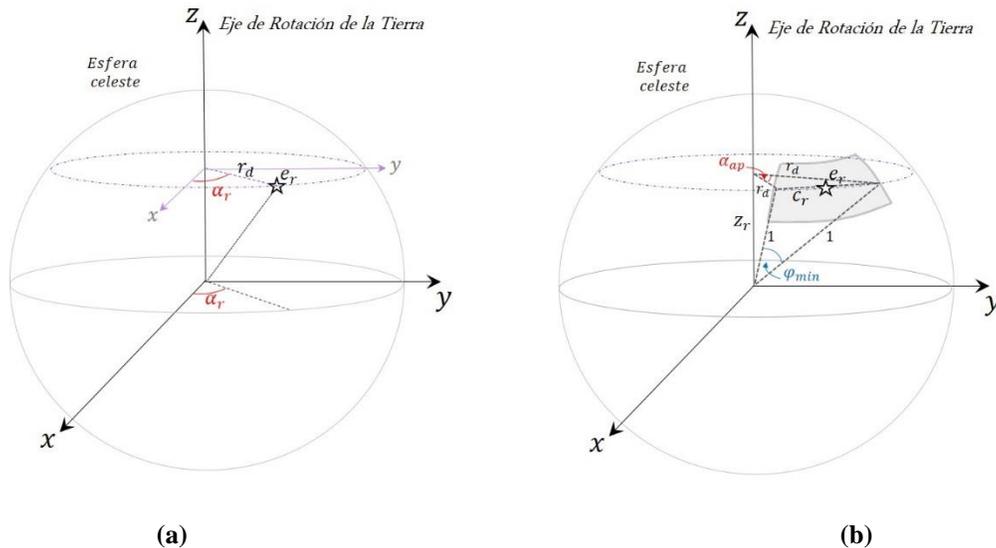


Figura 5.6. Geometría de ángulos en la Esfera Celeste. (a) Dada una estrella de referencia e_r se muestra su respectivo ángulo de ascensión recta α_r proyectado sobre un círculo C_r , paralelo al plano xy . (b) Relación entre el ángulo de apertura de la región en términos de ascensión recta (α_{ap}) y el ángulo φ_{min} .

Antes de definir el ángulo α_{ap} es necesario conocer los correspondientes parámetros r_d y la componente z_r . Para el caso de la componente z_r se utiliza la ecuación 2.3 mientras que para el radio r_d se emplea el teorema de Pitágoras:

$$z_r = \text{sen}(\delta_r) \quad (5.10)$$

$$r_d = \sqrt{1 - z_r^2} \quad (5.11)$$

Sin embargo, en la Figura 5.7 se puede notar que cuando el ángulo de Declinación δ_r se encuentre en el hemisferio norte ($\delta_r > 0^\circ$), el ángulo de apertura máximo α_{ap_max} dependerá del límite superior en declinación (δ_{sup}). En cambio si la declinación δ_r esté en el hemisferio sur ($\delta_r < 0^\circ$), el ángulo de apertura máximo va depender del límite inferior en declinación (δ_{inf}). Por consiguiente, se amplía el análisis para calcular el límite inferior y superior de la componente z , $[z_{inf}, z_{sup}]$ y sus respectivos radios $\{r_{d_inf}, r_{d_sup}\}$ como:

$$z_{inf} = \text{sen}(\delta_{inf}) \quad (5.12)$$

$$z_{max} = \text{sen}(\delta_{max}) \quad (5.13)$$

$$r_{d_inf} = \sqrt{1 - z_{inf}^2} \quad (5.14)$$

$$r_{d_sup} = \sqrt{1 - z_{sup}^2} \quad (5.15)$$

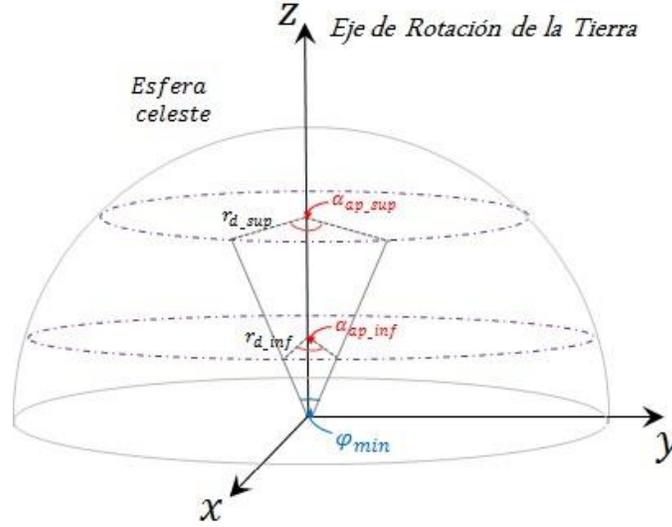


Figura 5.7. Relación entre el ángulo de Declinación $\delta_r > 0$ y ángulo de apertura máximo α_{ap_max} .

Ahora bien, al definir el ángulo mínimo de separación φ_{min} y tener presente que el radio de la esfera celeste R es unitario, se utiliza la ley de cosenos para hallar la longitud de la cuerda c_r que une el límite inferior y superior en ascensión recta:

$$c_r = \sqrt{R + R - 2(R)(R)\cos(\varphi_{min})} = \sqrt{2 - 2\cos(\varphi_{min})} \quad (5.16)$$

En base a la longitud de la cuerda c_r , los límites de la componente z $[z_{inf}, z_{sup}]$, y sus correspondientes radios $\{r_{d_inf}, r_{d_sup}\}$, se define sus respectivos ángulos de apertura $\{\alpha_{ap_inf}, \alpha_{ap_sup}\}$ empleando nuevamente de la ley de cosenos se tiene:

$$\alpha_{ap_inf} = \cos^{-1} \left(\frac{-c_r^2 + r_{d_min}^2 + r_{d_min}^2}{2 r_{d_min}^2} \right) \quad (5.17)$$

$$\alpha_{ap_sup} = \cos^{-1} \left(\frac{-c_r^2 + r_{d_max}^2 + r_{d_max}^2}{2 r_{d_max}^2} \right) \quad (5.18)$$

Así, mediante una comparación entre los ángulos de apertura α_{ap_inf} y α_{ap_sup} . Se define el máximo ángulo de apertura de la región en términos de ascensión recta:

$$\alpha_{ap_max} = \begin{cases} \alpha_{ap_inf} & \alpha_{ap_inf} > \alpha_{ap_max} \\ \alpha_{ap_sup} & \alpha_{ap_inf} < \alpha_{ap_sup} \end{cases} \quad (5.19)$$

Por otra parte, el intervalo que existe entre los límites en ascensión recta $[\alpha_{inf}, \alpha_{sup}]$ disminuye conforme el ángulo δ_r de la estrella de referencia se acerca a 0° mientras que aumenta conforme δ_r se aproxima a los 90° . Por lo tanto, se debe añadir un caso particular para $\delta_{sup} = \pm 90^\circ$ o $\delta_{inf} = \pm 90^\circ$ (Véase Figura 5.8), de manera que se considere todo el intervalo de ascensión recta que incluye a $\alpha_{ap_inf} = 0$ y $\alpha_{ap_sup} = 360^\circ$.

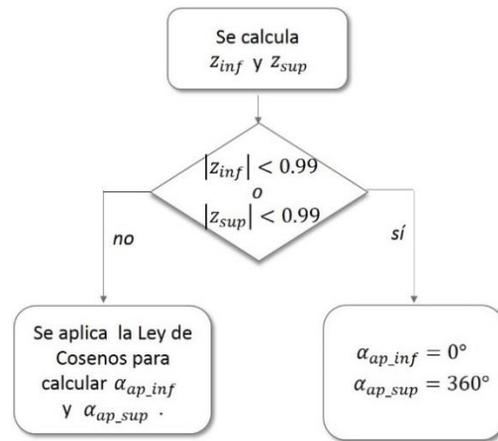


Figura 5.8. Condicional para el caso en el que $\delta_{sup} = \pm 90^\circ$ o $\delta_{inf} = \pm 90^\circ$.

En base al análisis anterior, se generaliza el método de segmentación tridimensional para las N estrellas que conforman el fichero *StarCatalogue.dat*. Se comienza por tomar cada estrella del archivo *StarCatalogue.dat* como una estrella de referencia e_i (donde $i = 1, 2, 3 \dots N$) y así calcular los ángulos de separación φ_{ij} entre ella y sus estrellas vecinas dentro de la región definida. Las estrellas vecinas que se encuentren por debajo del ángulo φ_{min} forman el conjunto S_i . Después de calcular todos los ángulos de separación φ dentro de la región definida, se analiza las estrellas del conjunto S_i en términos de magnitud (o brillo) y se registra únicamente la estrella más brillante en el nuevo catálogo *StarCatalogueUniform.dat*. Posteriormente las estrellas restantes del conjunto S_i pasan a formar parte del conjunto de estrellas rechazadas (R_T). Para el siguiente ciclo, si la estrella de referencia e_{i+1} se encuentra dentro de las estrellas que ya han sido rechazadas previamente, es decir pertenece al conjunto R_T , se omite y se continúa el análisis para la siguiente estrella: e_{i+2} . En caso contrario, si para la estrella de referencia e_{i+1} existe un

conjunto S_{i+1} , el cual tiene estrellas que intersectan con el conjunto R_T , dichas estrellas son eliminadas del conjunto S_{i+1} , con ello se optimiza recursos y tiempo de ejecución. Este proceso se repite hasta llegar a $i = N$.

$$S_{i+1} = \overline{S_{i+1} \cap R_T} \quad (5.20)$$

Finalmente, para verificar que el fichero *StarCatalogueUniform.dat* realmente se aproxima una distribución uniforme se utiliza el número de estrellas N_U que conforman al *StarCatalogueUniform.dat* y la matriz \mathbf{E} que contiene los vectores unitarios de N_U estrellas, se calcula la matriz de correlación \mathbf{C} [14].

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N_U} \mathbf{E}\mathbf{E}^T \quad (5.21)$$

Luego, se calculan los eigenvalores de la Matriz de Correlación:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C}) = 0 \quad (5.22)$$

los cuales deben ser reales, no negativos y la suma de ellos debe ser igual a la unidad. Si los eigenvalores λ son iguales a un tercio implica una perfecta distribución uniforme de las N_U estrellas [14].

Al definir un ángulo mínimo de separación $\varphi_{min} = 1^\circ$ y empleando la técnica de segmentación tridimensional del mapa celeste, se obtuvieron los siguientes eigenvalores:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.3127 \\ 0.3406 \\ 0.3468 \end{bmatrix}$$

Así se puede concluir que el fichero *StarCatalogueUniform.dat* presenta una aproximación cuasi-uniforme del mapa celeste. La comparación de la distribución estelar antes y después de la técnica se muestra en la Figura 5.9.

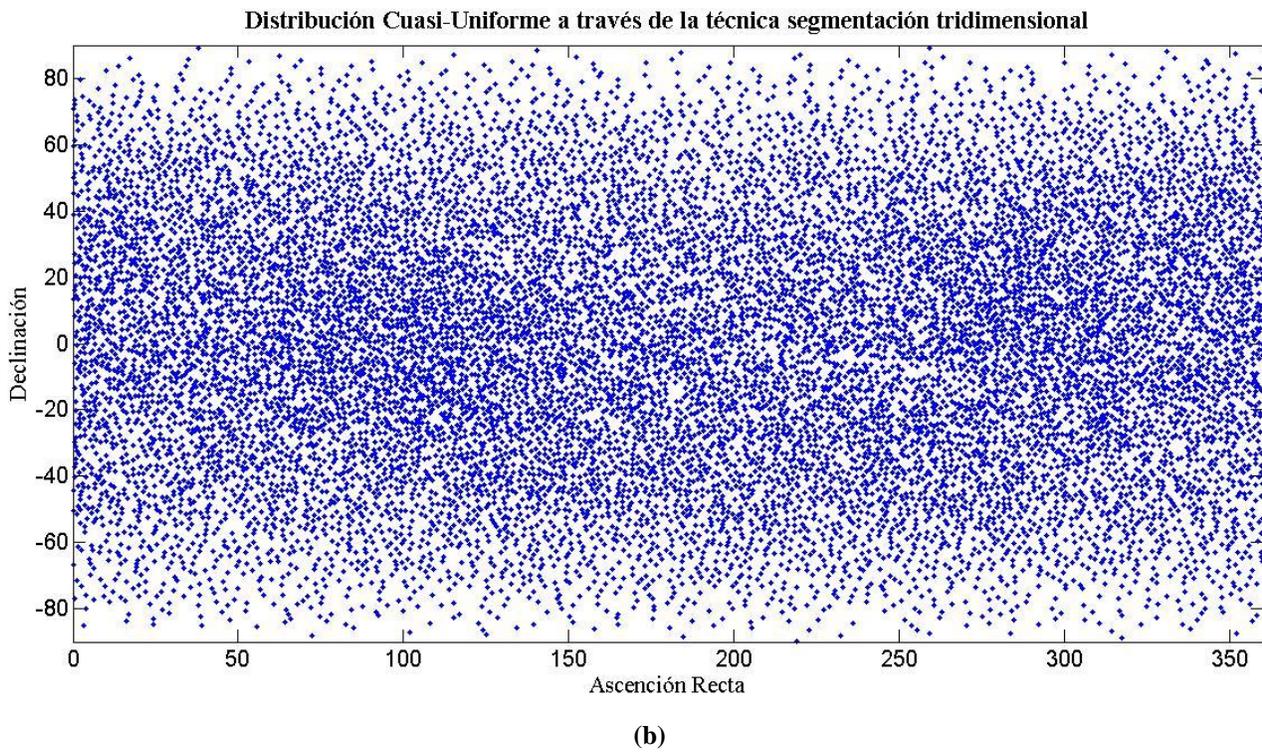
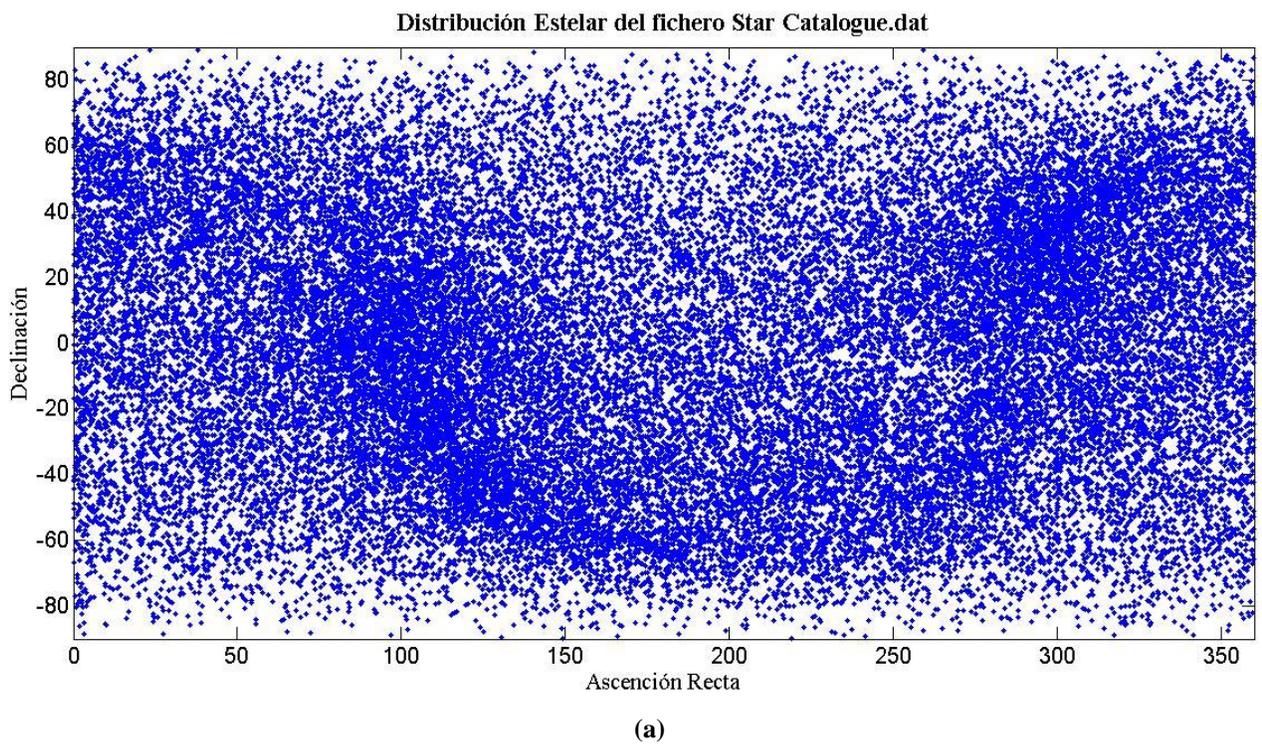


Figura 5.9. (a) Distribución estelar de *StarCatalogue.dat*. (b) Distribución cuasi-uniforme del mapa celeste a través de la técnica de segmentación tridimensional del mapa celeste.

5.2.2 Análisis estadístico entre magnitud, campo de visión y número de estrellas

Para caracterizar el método de identificación de estrellas con base al catálogo Hipparcos [34], es necesario conocer el promedio de número de estrellas y sus respectivas magnitudes que se encuentran en un cierto campo de visión. Para ello, en Matlab se realizó un barrido del mapa celeste mediante un ángulo de paso tanto en ascensión recta como en declinación. De esta manera contabilizar y obtener el promedio del número de estrellas en relación a su magnitud respecto a tres diferentes campo de visión: $10^\circ \times 10^\circ$, $15^\circ \times 15^\circ$ y $20^\circ \times 20^\circ$.

5.2.3 Generación de una base de datos mediante triángulos cuasi-equiláteros

Tal como se explicó en la sección 5.1, es necesario construir una base de datos con los parámetros que permitan identificar las estrellas presentes en el campo de visión de un sensor de estrellas. A esta base de datos se le llamará: *DataBase_Pattern.dat*. Para ello, se retoma la técnica de segmentación tridimensional del mapa celeste descrito en la sección 5.2.1 y se aplican tres principales modificaciones:

- 1) Se añade un umbral de magnitud m_u . Se calculan los ángulos de separación solamente para las estrellas que se encuentren por debajo de dicho umbral de magnitud m_u .
- 2) El ángulo de separación mínima φ_{min} se sustituye por el *FOV*. De manera que el conjunto S esté conformado por los pares de estrellas que puedan aparecer dentro del campo de visión del sensor de estrellas.
- 3) No se construye un conjunto R_T . Por el contrario de la aplicación de distribución cuasi-uniforme, se debe considerar todas las combinaciones posibles entre pares de estrellas que estén dentro de un ángulo de separación menor o igual al *FOV*, ya que estas estrellas serán las que permitan definir los parámetros de identificación estelar.

De esta manera, se obtienen todos los ángulos de separación φ de todos los posibles pares de estrellas que pueden observarse dentro del campo de visión de un sensor de estrellas. A

partir de dichas estrellas se construyen todos los posibles triángulos cuasi-equiláteros, cuyos ángulos de separación se encuentren dentro de una diferencia del $\pm 50\%$ y menor al 95% .

Por cada triángulo cuasi-equilátero obtenido se tiene siete columnas: las tres primeras contienen los ID de las estrellas que forman el triángulo cuasi-equilátero mientras que las cuatro columnas restantes se refieren a los parámetros de reconocimiento.

ID de e_1	ID de e_2	ID de e_3	φ_m	φ_p	$\Delta\varphi_{mc}$	$\Delta\varphi_{mg}$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	--	--

Tabla 5.1. Columnas de la base de datos *DataBase_Pattern.dat*.

A continuación se describen los elementos que conforman la Tabla 5.1:

- 1) **ID de e_i** se refiere al identificador de la estrella i .
 - 1.1) e_1 es la estrella que se encuentra entre el ángulo de separación medio (φ_m) y el ángulo de separación mayor (φ_g)
 - 1.2) e_2 es la estrella que se encuentra entre el ángulo de separación medio (φ_m) y el ángulo de separación menor (φ_c)
 - 1.3) e_3 es la estrella que se encuentra entre el ángulo de separación menor (φ_c) y el ángulo de separación mayor (φ_g)
- 2) φ_m representa el ángulo de separación medio de los tres ángulos que forman el triángulo cuasi-equilátero.
- 3) φ_p es el promedio de los ángulos de separación.
- 4) $\Delta\varphi_{mc}$ representa la diferencia en porcentaje entre el ángulo φ_m y φ_c .
- 5) $\Delta\varphi_{mg}$ representa la diferencia en porcentaje entre el ángulo φ_m y φ_g .

5.2.4 Algoritmo de identificación de estrellas dentro del campo de visión.

Una vez realizado el análisis estadístico y una base de datos con los parámetros de reconocimiento *DataBase_Pattern.dat*. Se diseña un algoritmo independiente con las funciones descritas en la sección 5.1, las cuales permitirán identificar las estrellas observadas por un sensor de estrellas dentro de un respectivo campo de visión.

5.2.4.1 Función offset

La imagen celeste que es detectada por un sensor de estrellas es interpretada por el algoritmo como una matriz I de $n \times n$ píxeles. Esta matriz I contiene un ruido de fondo [27], lo cual puede causar perturbación al momento de definir los centroides de cada estrella. Para eliminar el fondo de ruido, se propone obtener el promedio [33] en escala de grises de los N_p píxeles que conforman la imagen:

$$\bar{v} = E(v_k) = \frac{1}{N_p} \sum_{k=0}^{255} v_k r_k \quad (5.23)$$

donde: v_k es el valor de brillo i en escala de grises

r_k es el número de repeticiones del valor i en escala de grises

$k = 0, 1, 2 \dots 255$.

Posteriormente, se obtiene la varianza [33] en escala de grises de la imagen celeste.

$$\sigma_{BN}^2 = E\left(\left(v_k - E(v_k)\right)^2\right) = \frac{1}{N_p} \sum_{k=0}^{255} (v_k - \bar{v})^2 r_k \quad (5.24)$$

Al conocer la varianza, se puede definir la desviación estándar [33]:

$$\sigma_{BN} = \sqrt{\sigma_{BN}^2} \quad (5.25)$$

De esta manera, se propone eliminar el fondo de ruido a través de la ecuación (5.26). Por otro la imagen celeste contiene un gran número de píxeles en color negro (Véase la Tabla 4.1), es decir, equivaldría a un valor en escala de grises muy próximo al cero, lo que causaría que la ecuación (5.26) diera valores negativos. Por consiguiente se realiza un ajuste de máximos con la ecuación 5.27 de manera que el mínimo valor posible para la imagen sin fondo de ruido sea cero.

$$I(i, j) = I(i, j) - 3\sigma_{BN} \quad (5.26)$$

$$I_n(i, j) = \max(I(i, j) - 3\sigma_{RGB}, 0) \quad (5.27)$$

donde: i representa la coordenada x en pixeles de la imagen celeste.

j representa la coordenada y en pixeles de la imagen celeste.

5.2.4.2 Función Centroide

Como se ha visto anteriormente una estrella no es representada por un único pixel, por el contrario se observa como una mancha de pixeles. Por consiguiente, se propone una función centroide [31] encargada en trazar una ventana que encierre la mancha de pixeles de la estrella y después calcular el centroide mediante el centro de masas.

En primer lugar se requiere definir un umbral en escala de grises (I_u) [22], de manera que los valores en escala de grises de los pixeles que se encuentren por arriba del umbral I_u presentan una probabilidad alta de pertenecer a la mancha de pixeles de una estrella.

La función centroide propuesta en esta tesis realiza un barrido sobre la matriz I , de manera que el pixel que se encuentre por arriba del umbral I_u es encerrado por una ventana W de $w \times w$ pixeles, con un valor inicial de $w = 6$ (Véase Figura 5.10a). Dentro de la ventana W se encuentra el pixel con el máximo valor en escala de grises y su respectiva coordenada (i_{max}, j_{max}) . A partir de la coordenada (i_{max}, j_{max}) se realiza una verificación del tamaño de la ventana, es decir, en el caso de que se requiera una ventana mayor a 6×6 , se ajusta el tamaño de W hasta encontrar que los bordes de la ventana se encuentren por debajo del umbral de magnitud I_u .

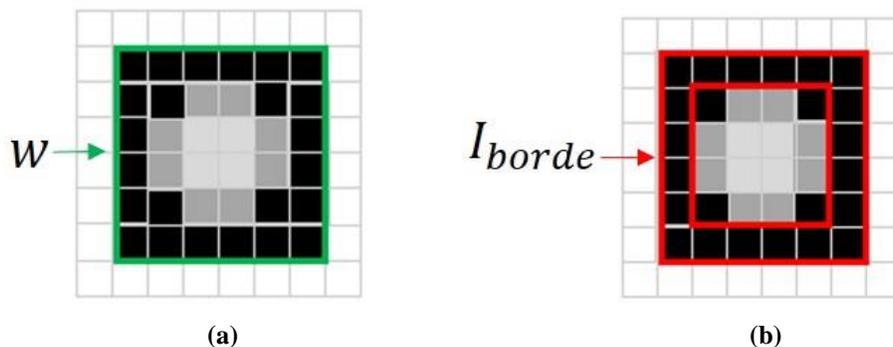


Figura 5.10. (a) Ventana W que encierra una mancha de pixeles de una estrella. (b) Borde I_{borde} de la ventana W en pixeles.

Para conocer el centroide de una estrella se calcula el centro de masa, el cual es un método ampliamente utilizado en sensores de estrellas [1], [3], [20], [23]. Primero, se encuentra el promedio de valoren escala de grises de los pixeles que conforman el borde de la ventana (I_{borde}).

$$I_{inf} = \sum_{i=2}^{x_{final}-1} I(i, y_{inicio}) \quad (5.28)$$

$$I_{sup} = \sum_{i=2}^{x_{final}-1} I(i, y_{fin}) \quad (5.29)$$

$$I_{izq} = \sum_{j=1}^{y_{final}} I(x_{inicio}, j) \quad (5.30)$$

$$I_{der} = \sum_{j=1}^{y_{final}} I(x_{final}, j) \quad (5.31)$$

$$I_{borde} = \frac{(I_{inf}+I_{sup}+I_{izq}+I_{der})}{4(d-1)} \quad (5.32)$$

A continuación se resta I_{borde} (Véase Figura 5.10b) a cada uno de los pixeles que se encuentran dentro de la ventana \mathbf{W} .

$$\tilde{I}(i, j) = I(i, j) - I_{borde} \quad (5.33)$$

Después se obtiene la suma total en escala de grises de los pixeles que conforman la ventana \mathbf{W} a través de la ecuación (5.34) y mediante las ecuaciones (5.35) y (5.36) se calcula el centroide (i_c, j_c) para cada estrella.

$$I_{total} = \sum_{i=x_{inicio}+1}^{x_{final}-1} \sum_{j=y_{inicio}+1}^{y_{fin}-1} \tilde{I}(i, j) \quad (5.34)$$

$$i_c = \sum_{i=x_{inicio}+1}^{x_{final}-1} \sum_{j=y_{inicio}+1}^{y_{fin}-1} \frac{i \times \tilde{I}(i, j)}{I_{total}} \quad (5.35)$$

$$j_c = \sum_{i=x_{inicio}+1}^{x_{final}-1} \sum_{j=y_{inicio}+1}^{y_{fin}-1} \frac{j \times \tilde{I}(i, j)}{I_{total}} \quad (5.36)$$

5.2.4.3 Transformación de vector de imagen a vector del Sistema de Referencia de Sensor de Estrellas

Hasta el momento, los centroides de cada estrella están dados sobre el plano de una imagen. La tarea siguiente consiste en relacionar cada centroide (i_c, j_c) en pixeles con su respectivo vector \mathbf{b}_c dentro del sistema de referencia del sensor de estrellas visto en tres dimensiones. En base a la Figura 4.6 se infiere que para realizar dicha transformación se debe aplicar la conversión inversa entre las coordenadas en pixeles y las coordenadas cartesianas de la imagen.

Cada centroide (i_c, j_c) se encuentra dentro del plano de la imagen xy cuyo origen parte del vértice superior izquierdo de la imagen. Para fines prácticos, se requiere transformar las coordenadas de cada centroide (i_c, j_c) de manera que el origen de su plano xy esté justo en el centro de la imagen.

$$\tilde{i}_c = -\frac{n}{2} + i_c \quad (5.37)$$

$$\tilde{j}_c = \frac{n}{2} + j_c \quad (5.38)$$

Por otra parte, se emplean nuevamente las ecuaciones (4.2) y (4.3) para definir los parámetros A_m y L_m respectivamente. Al definir dichos parámetros y tener la transformación $(\tilde{i}_c, \tilde{j}_c)$ para cada centroide (i_c, j_c) se puede hallar las respectivas coordenadas cartesianas mediante:

$$x_c = \frac{(2A_m * \tilde{i}_c)}{n} \quad (5.39)$$

$$y_c = \frac{-(2L_m \cdot \tilde{J}_c)}{n} \quad (5.40)$$

Debido a que las estrellas siempre serán proyectadas sobre el plano xy del sensor de estrellas (Véase Figura 4.6), se puede partir de las coordenadas (x_c, y_c) para determinar la respectiva componente z_c ; considerando que el vector $\mathbf{b} = [x_c, y_c, z_c]^T$ siempre debe ser un vector unitario. Por consiguiente:

$$z_c = \sqrt{1 - x_c^2 - y_c^2} \quad (5.41)$$

Una vez definido cada vector \mathbf{b} de cada estrella observada por el sensor de estrellas, se realiza nuevamente un análisis en ángulos de separación. De manera que si existen dos o más estrellas que presentan un ángulo de separación menor al ángulo φ_{min} , así como en el caso de la técnica por segmentación tridimensional del mapa celeste, se considera únicamente el vector \mathbf{b} de la estrella más brillante.

5.2.4.4 Comparación de triángulos cuasi-equiláteros con la base de datos.

Se emplea el método descrito en la sección 5.2.3 para generar los parámetros φ_m , φ_p , $\Delta\varphi_{mc}$ y $\Delta\varphi_{mg}$, los cuales se buscarán en la base de datos *Database_Pattern.dat*. Los identificadores de estrellas que coincidan para cada vector \mathbf{b} serán sometidos a un método similar a la técnica de votación, el cual fue explicado en la sección 5.1.3.

6. Determinación de la orientación del satélite

En los siguientes apartados se presentan cuatro de las metodologías más utilizadas para la determinación de orientación. Primero se describirá el algoritmo de TRIAD, el cual depende de los vectores \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 en el sistema de referencia del sensor de estrellas y los vectores unitarios \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 en el sistema de referencia de la esfera celeste. A continuación se describe el Problema de Wahba, el cual relaciona los vectores unitarios \mathbf{b}_i y \mathbf{r}_i para determinar la aproximación de la matriz de orientación A . Por último, se muestran los métodos de Davenport y QUEST, los cuales aplican una sustitución en el método de Wahba para realizar la determinación de orientación por medio de cuaterniones. Gran parte de la información descrita en este capítulo se basa en [37], [38],[39] y [41].

6.1 Algoritmo de TRIAD

El algoritmo de TRIAD (Del acrónimo en inglés: *TRI*axial *A*ttitude *D*etermiation) determina la orientación a partir de la medición de dos vectores. Este algoritmo ha sido utilizado tanto en Tierra como en satélites.

Considérese que se conoce dos vectores unitarios \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 en el sistema de referencia de un cuerpo rígido, en nuestro caso el sensor de estrellas; y los vectores unitarios \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 en el sistema de referencia global, el cual en nuestro caso es el sistema de referencia ECI.

Con base al capítulo 2, la matriz de orientación A es la matriz que permite rotar los vectores desde el sistema de referencia global al sistema de referencia del cuerpo rígido.

$$A\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i \quad , \text{para } i = 1,2. \quad (6.1)$$

La ecuación (5.1) implica que entre los vectores \mathbf{b}_1 y \mathbf{r}_1 existe un ángulo de separación φ_1 igual al ángulo de separación φ_2 entre los vectores \mathbf{b}_2 y \mathbf{r}_2 , esto es:

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_2 = (A\mathbf{r}_1) \cdot (A\mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1^T A^T A \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad (6.2)$$

Sin embargo la ecuación (5.1) y (5.2) no son casos generales, ya que no cumplen la igualdad en presencia de errores. El algoritmo clásico de TRIAD considera que existe un vector \mathbf{b}_1 en el sistema de referencia del sensor de estrellas con una medición más precisa; lo que brinda una estimación exacta para $A\mathbf{r}_1 = \mathbf{b}_1$ mientras que para un vector \mathbf{b}_2 con menor precisión debido a la presencia de errores en la medición, se obtendrá una estimación aproximada $A\mathbf{r}_2 \approx \mathbf{b}_2$.

Considérese una triada de vectores ortogonales en el sistema de referencia de la esfera celeste $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y en el sistema de referencia del sensor de estrellas $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, al emplear la ecuación (5.1) se define la matriz de orientación de la siguiente manera:

$$A = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3][\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]^T = \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T \quad (6.3)$$

O bien, puede verse como:

$$A\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i, \text{ para } i = 1,2,3 \quad (6.4)$$

De esta manera se pueden construir los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 a partir de la triada $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y los vectores \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 con base a la triada $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_\times \equiv \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|}, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_\times \quad (6.5)$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_\times \equiv \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_\times \quad (6.6)$$

Al sustituir las ecuaciones (5.5a) y (5.5b) en la ecuación (5.3) se obtiene:

$$\hat{A}_{TRIAD} = \mathbf{b}_1 \mathbf{r}_1^T + (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_\times)(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_\times)^T + \mathbf{b}_\times \mathbf{b}_\times^T \quad (6.7)$$

6.2 Problema de Wahba

El problema de Wahba propone utilizar una serie de constantes de pesos a_i para minimizar una función de costo, de esta manera se consigue una mejor estimación de la matriz de orientación. Para ello, se define la función costo en términos de la matriz de orientación cuya determinante es +1 (Véase Capítulo 3).

$$L(A) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \|b_i - Ar_i\|^2 \quad (6.8)$$

donde N es el número de vectores b_i observables en el sistema de referencia del cuerpo rígido con su equivalente de vectores r_i vistos desde el sistema de referencia global.

$$\|b_i - Ar_i\|^2 = \|b_i\|^2 + \|Ar_i\|^2 - 2b_i \cdot (Ar_i) = 2 - 2tr(Ar_i b_i^T) \quad (6.9)$$

La anterior expresión se puede reducir al utilizar :

$$L(A) = \lambda_0 - tr(AB^T) \quad (6.10)$$

donde

$$\lambda_0 \equiv \sum_{i=1}^N a_i \quad (6.11)$$

Por consiguiente, partiendo de las ecuaciones (6.8), (6.10) y (6.11) se puede decir que:

$$B \equiv \sum_{i=1}^N a_i b_i r_i^T \quad (6.12)$$

6.3 Método de Davenport

El método de Davenport propone utilizar la función de costo L en términos de cuaterniones.

Si se considera que $tr(AB^T) = \mathbf{q}^T K(B)$,

$$L(A(q)) = \lambda_0 - \mathbf{q}^T K(B) \quad (6.13)$$

Donde la matriz $K(B)$ es:

$$K(B) = \begin{bmatrix} B + B^T - (trB)I_3 & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^T & trB \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Mientras que la matriz \mathbf{z} se define como:

$$\mathbf{z} \equiv \begin{bmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{12} - B_{21} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N a_i (b_i \times r_i) \quad (6.15)$$

El problema se reduce a encontrar los eigenvalores λ_i y eigenvectores q_i que satisfagan la siguiente igualdad:

$$K(B) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i q_i q_i^T \quad (6.16)$$

Si se considera que $\lambda_1 = \lambda_{max}$, el máximo eigenvalor, cuyo eigenvector corresponde al cuaternión estimado.

$$(\lambda_1 I - K(B))\mathbf{v}_1 = 0 \quad (6.17)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_1 \quad (6.18)$$

6.4 Algoritmo de QUEST

Algoritmo de QUEST (Por su abreviación en inglés *Quaternion Estimator*) ha sido el método más empleado para abordar el problema de Wahba.

Partiendo de la ecuación (6.17)

$$\mathbf{0}_4 = H(\lambda_1)\hat{\mathbf{q}} \quad (6.19)$$

con

$$H(\lambda_1) = \lambda_1 I - K(B) = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \text{tr}B)I_3 - S & -\mathbf{z} \\ -\mathbf{z}^T & \lambda_1 - \text{tr}B \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$$S \equiv B + B^T \quad (6.21)$$

A partir de las ecuaciones (6.19), (6.20) y (6.21) se puede deducir que:

$$(\rho I_3 - S)\hat{\mathbf{q}}_{1:3} = \hat{\mathbf{q}}_4 \mathbf{z} \quad (6.22)$$

$$(\lambda_1 - \text{tr}B)\hat{\mathbf{q}}_4 - \mathbf{z}^T \hat{\mathbf{q}}_{1:3} = 0 \quad (6.23)$$

donde

$$\rho = \lambda_1 + \text{tr}B \quad (6.24)$$

y por consiguiente, si se conoce λ_1 , se puede hallar el cuaternión óptimo a través de la ecuación (6.22a):

$$\hat{\mathbf{q}} = \alpha \begin{bmatrix} (\rho I_3 - S)\mathbf{z} \\ (\rho I_3 - S) \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

donde α se determina a través de la normalización de $\hat{\mathbf{q}}$, es decir, $\alpha = 1/|\hat{\mathbf{q}}|$.

7. Resultados

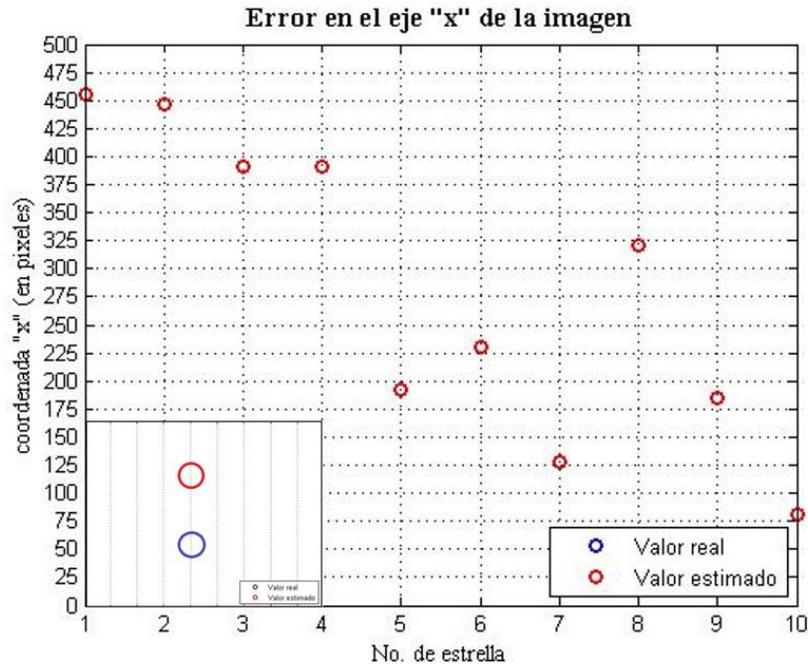
7.1 Resultados de la función centroide

Primero, se presenta en la Figura 7.1 la identificación de las estrellas a partir de una imagen celeste generada por el simulador CITLALLI. Se observa que al aplicar zoom sobre una estrella, esta está conformada por una mancha de píxeles, la cual es identificada y encerrada en una ventana W_i . Lo mismo sucede para las demás estrellas dentro del campo de visión.

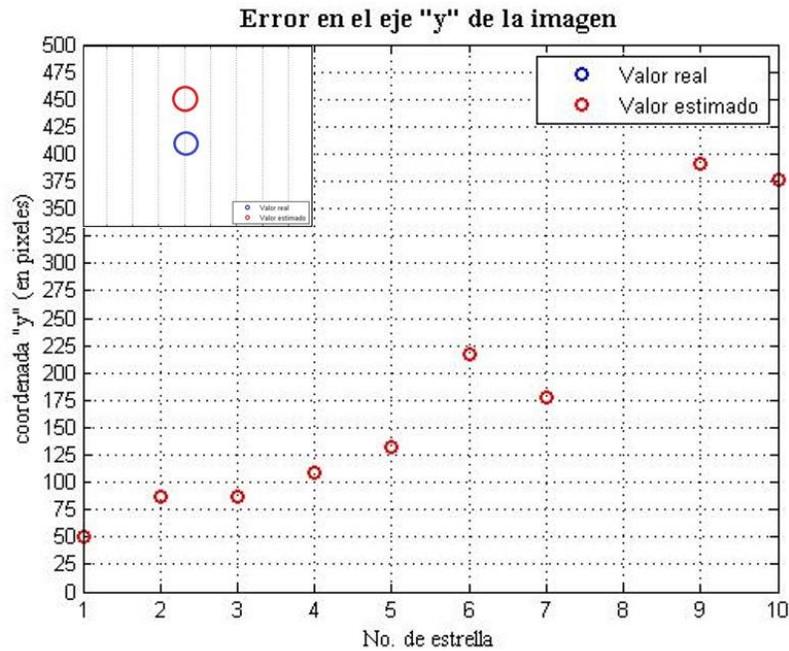


Figura 7.1 Identificación de las estrellas a través del ajuste de una ventana cuadrada W_i

El simulador CITLALLI proporciona los valores reales de los centroides de las estrellas en escala de píxeles. Mientras que el algoritmo de identificación estelar calcula los centroides de las estrellas a partir de la imagen celeste simulada por CITLALLI, es decir, realiza una estimación de los centroides mediante la ponderación de pesos del brillo de las estrellas. Por consiguiente se calcula el error que existe entre el valor real (tomando como referencia a CITLALLI) y el valor estimado (obtenido por el algoritmo de identificación estelar).



(a)



(b)

Figura 7.2 Error en la función centroide. a) Error entre el valor real y el valor estimado en el eje x de la imagen. b) Error en entre el valor real y el valor estimado en el eje y de la imagen.

El error cuadrático presente en el eje x y y respectivamente es:

Eje	Error cuadrático (en pixeles)
x	3.88×10^{-3}
y	2.11×10^{-3}

Tabla 7.1. Error cuadrático en el eje x y y en pixeles

7.2 Resultados de la identificación de estrellas

En la Figura 7.3 se muestra el reconocimiento de las estrellas a través del algoritmo de identificación estelar basado en una distribución cuasi-uniforme del mapa celeste y el método de geometría de triángulos cuasí-equiláteros. En la figura se observa que las estrellas encerradas en rojo no son consideradas debido a su proximidad y menor brillo estelar; mientras que las estrellas encerradas en azul son tomadas por el algoritmo de identificación estelar para determinar sus coordenadas estelares. Para ello se utiliza el principio del método de votación y se relacionan los ID de las estrellas observadas con los ID de las estrellas de la base de datos a través de un análisis estadístico.

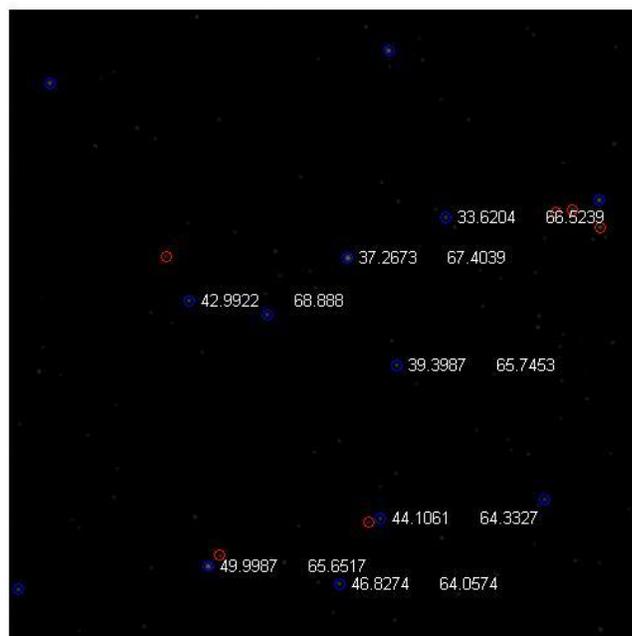
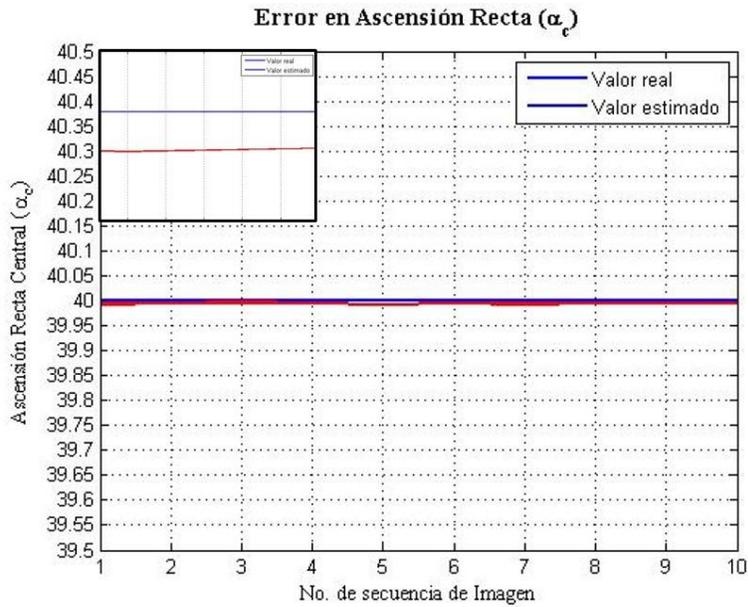
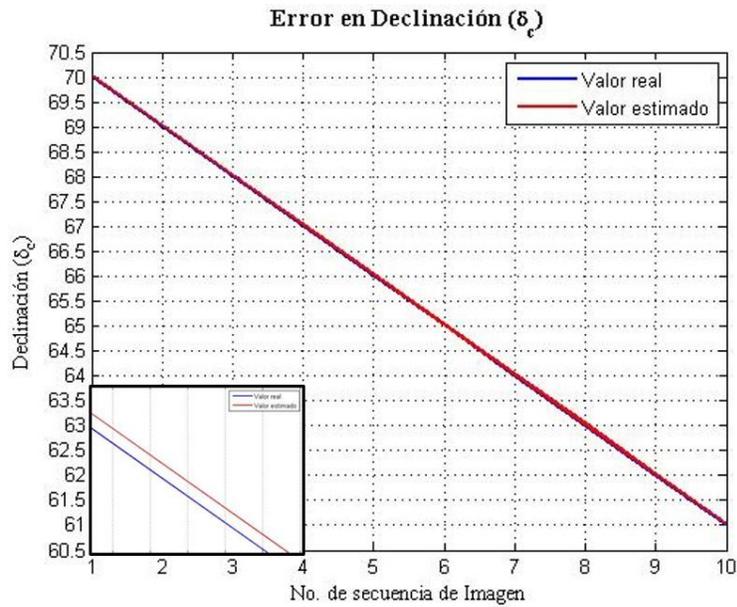


Figura 7.3 Identificación de estrellas a través de la metodología de triángulos cuasi-equiláteros.

De la misma manera que en el apartado 7.1, se calcula el error existente entre las coordenadas astronómicas reales y las coordenadas estimadas por el algoritmo de identificación estelar.



(a)



(b)

Figura 7.4 Error en coordenadas astronómicas. a) Error entre el valor real y el valor estimado en ascensión recta. b) Error en entre el valor real y el valor estimado en declinación.

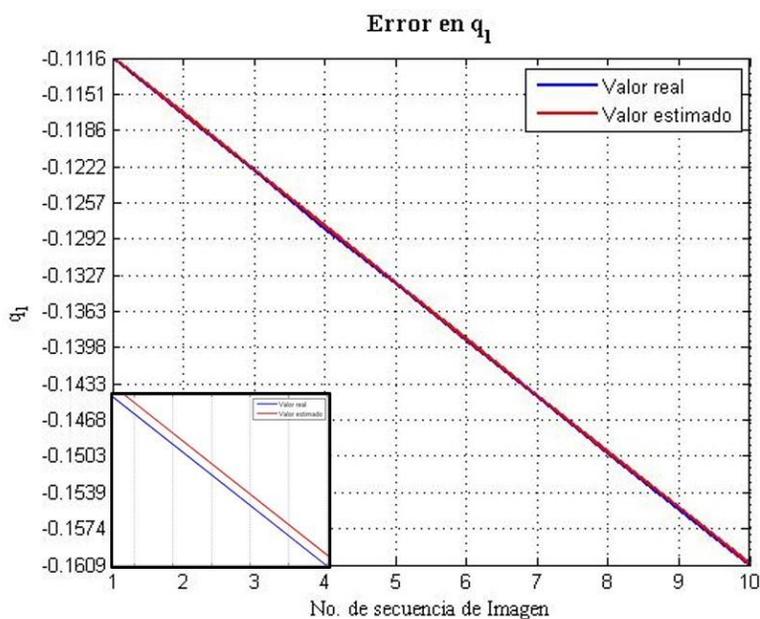
El error cuadrático presente en ascensión recta y declinación es:

Coordenada Astronómica	Error cuadrático (°)
Ascensión Recta	2.80×10^{-5}
Declinación	0.80×10^{-4}

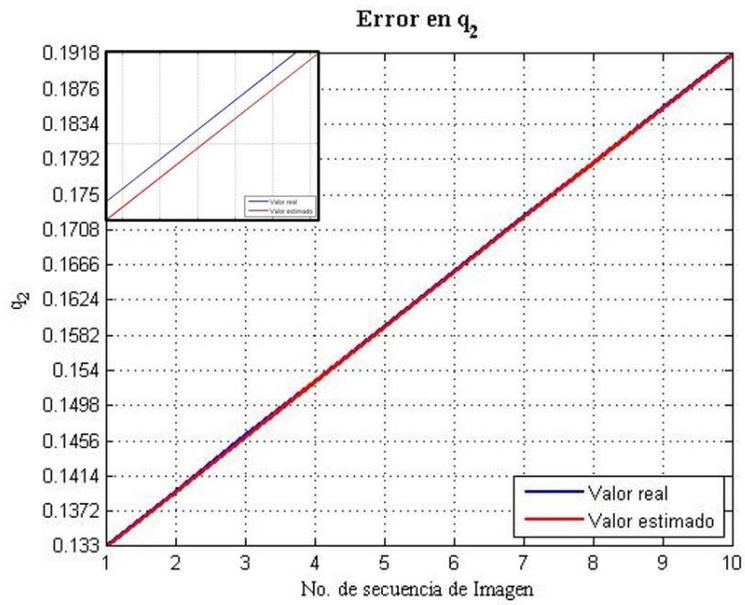
Tabla 7.2 Error cuadrático en coordenadas astronómicas

7.3 Resultados de la determinación de orientación.

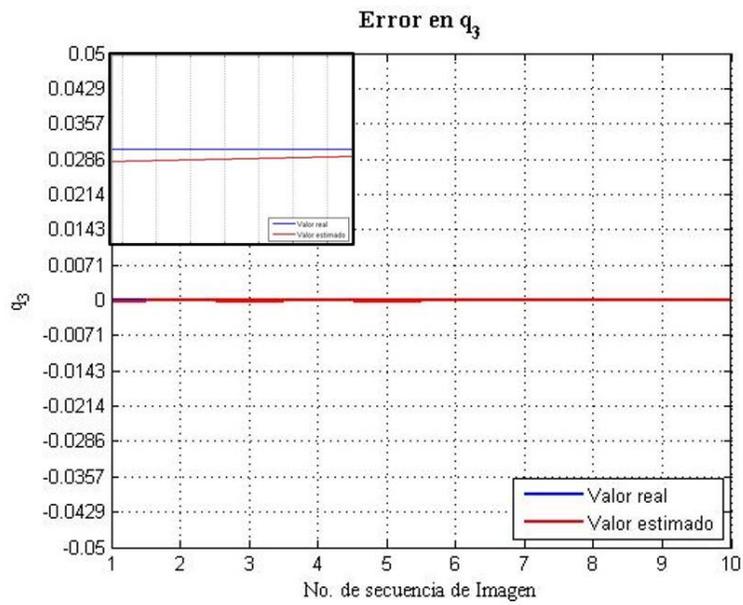
Por último, se presenta el error para cada uno de las cuatro componentes que conforman el cuaternión. Nuevamente, el cuaternión real es definido por el Simulador CITLALLI y posteriormente se compara con el cuaternión estimado a través del Método de QUEST.



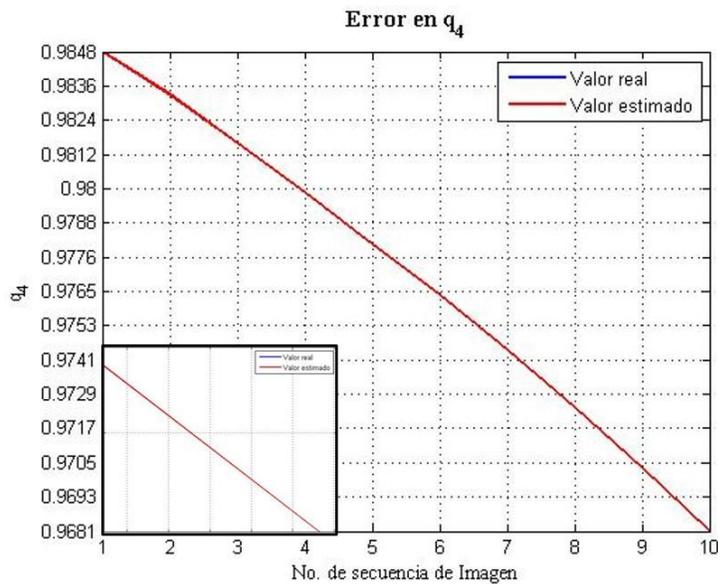
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.5 Error en la determinación de orientación. a) Error entre el valor real y el valor estimado en q_1 . b) Error entre el valor real y el valor estimado en q_2 . c) Error entre el valor real y el valor estimado en q_3 . d) Error entre el valor real y el valor estimado en q_4 .

El error cuadrático para cada componente del cuaternión es:

Componente del cuaternión	Error cuadrático
q_1	2.96×10^{-8}
q_2	2.97×10^{-8}
q_3	2.04×10^{-8}
q_4	2.75×10^{-9}

Tabla 7.3 Error cuadrático en cuaterniones.

En las tablas 7.1 se puede observar que la precisión del algoritmo para la función centroide es de 4.48" en la coordenada x y de 3.30" en la coordenada y , considerando una imagen de 500 x 500 pixeles y un campo de visión de 10 x 10, da como resultado una resolución de 72"/pixel. Lo que equivale a un margen de error aproximadamente del 6 % . Por otra parte, la tabla 7.2 y 7.3 presentan el error que se presenta al obtener la orientación del satélite,

presentando un margen de error de $\pm 0.0052^\circ$ en ascensión recta y $\pm 0.0282^\circ$ en declinación, es decir, aproximadamente una precisión de 100 segundos de arco. Una gran ventaja de esta metodología es que el umbral se ajusta automáticamente a la magnitud de las estrellas presentes en el campo observado, por ende, el número de triángulos a ser formados es acorde a la magnitud de las estrellas presentes en el campo de visión, lo que brinda mayor probabilidad de que la imagen celeste conlleve a determinar la orientación del satélite. A su vez, al limitar los parámetros de identificación debido a la geometría de triángulos cuasi-equiláteros y la distribución uniforme, se reducen casos de ambigüedad.

8. Conclusiones y Trabajo a futuro

8.1 Conclusiones

En la presente tesis se expone un nuevo algoritmo de identificación estelar, el cual requiere de una imagen celeste como entrada, analizando las estrellas mediante una técnica de geometría de triángulos cuasi-equiláteros junto con una distribución cuasi-uniforme del mapa celeste y de esta manera, se obtiene como salida un vector cuaternión con la información de la orientación del satélite.

Se construyó un simulador estelar con el cual se puede generar la imagen estática del mapa celeste a partir de las características ópticas que tendría un sensor de estrellas. Tales características ópticas pueden ir desde el ajuste del campo de visión, las coordenadas centrales astronómicas de la imagen, control de la intensidad del brillo de las estrellas, la resolución en pixeles de la imagen hasta añadir ruido gaussiano. Así como la opción de graficar la cuadrícula ecuatorial, lo que permite al usuario tener una visión más clara de la posición de las estrellas en términos de coordenadas astronómicas.

La función de eliminación de ruido de fondo mediante los parámetros de la media y desviación estándar en términos de intensidad de pixeles presentes en la imagen del mapa celeste permite evitar la detección de estrellas falsas y al mismo tiempo reducir el error en el cálculo del centroide, La función centroide propuesta en este trabajo presenta un error de $\pm 4.48''$ en la coordenada x y $\pm 3.30''$ en la coordenada y ; considerando una resolución de $0.02^\circ/\text{pixel}$. Por consiguiente al tener mayor precisión en el cálculo del centroide de cada estrella, se tiene mayor robustez en la determinación de orientación.

También se propone un método por segmentación tridimensional del mapa celeste que tiene dos funciones principales. La primera función consiste en generar un catálogo cuasi-uniforme evitando la ambigüedad en estrellas muy cercanas. Mientras que la segunda función consiste en generar un catálogo de identificación basado en triángulos cuasi-equiláteros, haciendo hincapié en que el uso de esta metodología puede ampliarse a cualquier otra geometría basada en distancias angulares.

El método identificación de estrellas a través de la geometría de triángulos cuasi-equiláteros permite ajustar el tamaño de la base de datos del catálogo y así optimizando la memoria destinada en la computadora de a bordo de un satélite. Por otra parte, si se definen los parámetros de identificación para triángulos cuasi-equiláteros dentro de un campo de visión menor; estos mismos parámetros pueden ser utilizados para el reconocimiento de campos de visiones mayores. Por tanto no se tiene la necesidad de modificar el fichero *DataBase_Pattern.dat*

La determinación de orientación por el método de QUEST basada en el algoritmo de identificación estelar por triángulos cuasi-equiláteros presenta una precisión alta al obtener los componentes del cuaternión.

8.2 Trabajo a futuro

Uno de los trabajos a futuro es diseñar el algoritmo para el seguimiento, es decir, que a través de la orientación obtenida previamente se puede realizar una hipótesis de la posición del satélite en un determinado tiempo Δt y a su vez se puede calcular las componentes de la velocidad angular para los ejes x , y y z correspondientes al movimiento del satélite.

También se plantea realizar el estudio y caracterización de la óptica para la cámara del sensor de estrellas mediante la relación de fotones, la longitud de onda permitible por el lente y la resolución óptima de la imagen.

Por otra parte, se tiene pensado el diseño de un sistema de control que permita apuntar los instrumentos científicos a bordo de un satélite. Dicho sistema de control deberá estar basado en un cuaternión de referencia.

Finalmente, sería de gran interés programar el algoritmo de Identificación Estelar basado en la geometría de triángulos cuasi-equiláteros en una tarjeta de desarrollo conectada a una cámara con las características ópticas requeridas y así verificar la operación la metodología propuesta en esta Tesis en condiciones prácticas con diversas pruebas ambientales.

Lista de Figuras

1.1	Representación de un satélite operando con un Sensor de Estrellas.....	2
2.1.	Representación gráfica de los ángulos de rotación.....	7
2.2	Sistema de Referencia ECI.....	10
2.3	Ascensión Recta y ángulo de Declinación.....	11
2.4	Campo de visión horizontal, vertical y diagonal.....	16
3.1.	Representación gráfica de un punto P en el espacio visto desde el Sistema de Coordenada Global y el Sistema de Coordenadas de un cuerpo rígido.....	19
3.2.	Sistema de coordenadas original (x,y,z)	20
3.3.	Rotación de un vector v utilizando la matriz de orientación A(q)	24
4.1.	Descripción de los parámetros de la ventana de proyección dentro del simulador CITLALLI.....	26
4.2.	Geometría del Campo de Visión en el plano xy.....	27
4.3.	Representación gráfica del umbral para el eje z.....	29
4.4.	Relación geométrica entre el eje de rotación (e), el vector de apuntado fijo del Star Tracker (r_{ST}) y el vector que apunta al centro de la ventana de proyección (r_C).....	30
4.5.	Diagrama de Flujo para filtrar las estrellas dentro de la ventana	33
4.6.	Ventana de proyección del Sensor de Estrellas (a) en sistema de coordenada rectangulares normalizadas, (b) en el plano xy de una imagen.....	34
5.1.	Diagrama a bloques de un algoritmo de identificación estelar.....	38
5.2.	Método de identificación por triángulos planos.....	40
5.3.	Método de identificación de Liebe.....	41
5.4.	Ángulo de separación φ_{ij} entre un par de estrellas {i,j}.....	44
5.5.	Estrella de referencia e_r con coordenadas astronómicas (α_r, δ_r).....	45
5.6.	Geometría de ángulos en la Esfera Celeste. (a) α_r proyectado sobre un círculo C_r , (b) Ángulo de apertura recta (α_{ap}) y el ángulo φ_{min}	46
5.7.	Relación entre el ángulo de Declinación $\delta_r > 0$ y ángulo de apertura máximo ($\alpha_{ap,max}$).....	48
5.8.	Condición para el caso en el que $\delta_{sup} = \pm 90^\circ$ o $\delta_{inf} = \pm 90^\circ$	49

5.9. Distribución Estelar. (a) con StarCatalogue.dat. (b) con la técnica de segmentación tridimensional del mapa celeste.....	51
5.10. Función centroide (a) Ventana W . (b) Borde I_{borde}	55
7.1. Identificación de las estrellas a través del ajuste de una ventana cuadrada W_i	64
7.2. Error en el centroide. a) en el eje x de la imagen. b) en el eje y de la imagen.....	65
7.3. Identificación de estrellas mediante triángulos cuasi-equiláteros.....	66
7.4. Error en coordenadas astronómicas. a) en Ascensión Recta. b) en Declinación.....	67
7.5. Error en la determinación de orientación. a) q_1 . b) q_2 c) q_3 d) q_4	70

Lista de Tablas

2.1. Características generales de Sensores de Referencia Absoluta	9
4.1. Comparación entre el programa CITLALLI y el programa Stellarium.....	37
5.1. Columnas de la base de datos DataBase_Pattern.dat.....	53
7.1. Error cuadrático en el eje x y y en pixeles.....	66
7.2. Error cuadrático en coordenadas astronómicas.....	68
7.3. Error cuadrático en cuaterniones.....	70

Referencias

- [1] McBryde, C.R., Lightsey, E.G.: *A star tracker design for Cubesats*. Aerospace Conference IEEE, pp. 1-14, 2012.
- [2] Lamy Au Rousseau, G., Bostel, J., Marzari, B.: *Star Recognition Algorithm for APS Star Tracker Oriented Triangles*, IEEE AES Systems Magazine. 20(2): 27-31, 2015.
- [3] Fosu, C., Hein, G.W., Eissffeller, B.: *Determination of centroid of CCD Star Images*. XX ISPRS Congress, Commission III, pp. 612-620, 2004.
- [4] Ziliang, W., Wei, Q.: *An All-Sky Autonomous Star Map Identification Algorithm*. IEEE AES Systems Magazine, 19(3): 10-14 ,2004.
- [5] Diebel, J., *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*. Stanford University. 2016.
- [6] Cai, G., Chen, B.M, Lee, T. H.: *Unnamed Rotocraft Systems*. Advances in Industrial Control, pp. 23-34, 2011.
- [7] Taule, H., Tosdal, E.: *Sensor Integration for Nonlinear Navigation System in Underwater Vehicles (Thesis)*. Norwegian University of Science and Technology, 2007.
- [8] Dadhich, S.: *Model Development and Attitude Control for pico-satellite (Thesis)*. Julius-Maximilian-University Würzburg, 2014.
- [9] Goldstein. H.: *Classical Mechanics (3rd Edition)*. Adisson-Wesley. 2011
- [10] Toloei, A.R., Arani M.S., Abaszadeh, M.: *A New Composite Algorithm for Identifying the Stars in the Star Tracker*, International Journal of Computer Applications 102(2): 28-33, 2014.
- [11] Groÿekathöfer, K., Yoon, Z.: *Introduction into quaternions for spacecraft attitude representation*. Technical University of Berlin, Department of Astronautics and Aeronautics, 2012.
- [12] Fialho, M.A.A., Saotome, O.: *An Environment for Testing and Simulating Algorithms for Autonomous Star Sensors* , Proceedings of COBEM, 2005
- [13] Sidi, M.J.: *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge University Press, 1997
- [14] Zhang C., Chen, C. Shen, X.: *A new guide star selection algorithm for star tracker*. Intelligent Control and Automation, WCICA, 6(1): 15-19, 2004.

- [15] Liebe, C.C.: *Pattern Recognition of Star Constellations for Spacecraft Applications*. IEEE AES Systems Magazine, 8(1):31-39, 1993.
- [16] Pham, M.D., Low K-S., Chen, S., Xing, Y.T.: *A Star Pattern Recognition Algorithm for Satellite Attitude Determination*, IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA), 2012.
- [17] Chao-san, L., Huan, X., Song, X., Guang-bin, L.: *A Triangle Algorithm of Stars Identification Improved by Geometric Hull*, Symposium on Photonics and Optoelectronic (SOPO), 2010.
- [18] Liebe, C.C.: *Pattern Recognition of Star Constellations for Spacecraft Applications*. IEEE AES Systems Magazine 8(1): 31-39, 1993.
- [19] Swartwout M.A.: *A Brief History of Rideshares (and Attack of The CubeSats)*. Aerospace Conference IEEE, pp 1-15. 2011.
- [20] Liebe, C.C.: *Accuracy performance of star trackers – a tutorial*. Aerospace and Electronics Systems IEEE, 38(2): 587-599, 2002.
- [21] Vicente de Brum, A.G., Selingardi, M.L., Fialho, M.M.A., Borrego, N.D., Lourenço J.L.: *Brazilian Effort to Develop an Autonomous Star Tracker (AST): Modeling and Simulation of the Search and Track Modes*, Proceedings of COBEM, 2011.
- [22] Stone, R C.: *A comparison of digital centering algorithms*. The Astronomical Journal. 97(4): 1227-1237,1989
- [23] Liebe, C.C., Dennison E.W., Hancock, B., Stribl, R.C, Pain, B.: *Active Pixel Sensor (APS) based Star Tracker*. Aerospace Conference IEEE. 127(1): 119-127, 1998.
- [24] Pham, M.D., Low K-S., Chen, S.: *An Autonomous Star Recognition Algorithm with Optimized Database*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 49(3): 1467-1475, 2013.
- [25] Kolomenkin, M., Pollak, S., Shimshoni, I., Lindenbaum, M.: *Geometric Voting Algorithm for Star trackers*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 44(2): 441-456, 2008.
- [26] Zuiderwijk, S., Kruijff, M., Heide, V.: *SSATT: A tool for automated evaluation of star sensor design, performance and on-board algorithms*. ESA SP-425: Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems, pp.18 -21, 2000.

- [27] White, J.T., Ghosal, S.: *Multiple testing approaches for removing background noise from images*. Topics in Nonparametric Statistics, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 74, 2014.
- [28] Accardo D., Rufino, G.: *Brightness-Independent Start-Up Routine for Star Trackers*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 38(3): 813-823, 2002.
- [29] Spratling, B.B.: *A Survey on Star Identification Algorithms*. Algorithms 2(1): 93-197, 2009.
- [30] Heide, E.J.: *Development and Validation of a Fast and Reliable Star Sensor Algorithm with Reduced Data Base*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [31] Knuston, M., Miller, D.: *Fast Star Tracker Centroid Algorithm for High Performance CubeSat with Air Bearing Validation*. Massachusetts Institute of Technology., 2012.
- [32] Padgett, C., Kreutz-Delgado, K.: *A Grid Algorithm for Autonomous Star Identification*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 33(1): 202-213, 1997.
- [33] Brown, R.G, Hwang, P.Y.C.: *Introduction to Random Signals and Applied Kalma Filtering*, Wiley 4 edition, 2012.
- [34] Catálogo Hipparcos: <http://cdsarc.u-strasbg.fr/viz-bin/Cat?I/311#sRM-F.53>. (accessed July 10, 2015).
- [35] Cubesat Satellite Missions: <http://mtech.dk/thomsen/space/cubesat.php> (accessed July 10, 2015).
- [36] *Software Stellarium*: <http://www.stellarium.org/pt> (accessed July, 10, 2015).
- [37] Markley, F.L., Crassidis, J.L.: *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, Space Technology Library, 2014.
- [38] Wertz, J.R.: *Spacecraft Attitude and Determination Control*, Astrophysics and Space Science Library, 1978.
- [39] Ruitter, A.H., Damaren, C., Forbes, J.R., *Spacecraft Dynamics and Control: An Introduction*. Wiley, 2013
- [40] Li, C., Zheng, C., Wu, J., Zang, L.: *A fast algorithm of simulating star map for star sensor*. International Conference on Computer and Network Technology, pp 396-399, 2011.

- [41] Markley, F.L.: *Fast Quaternion Attitude Estimation from Two Vector Measurements*. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(2): 411-414, 2012.