



INAOE

**PROPAGACIÓN DE PATRONES
PERIÓDICOS EN MEDIOS NO-
LINEALES TIPO KERR**

Por

M.C. Enrique Morales Rodríguez.

**Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de**

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica**

Junio de 2008

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. Nikolai Korneev
Investigador Titular del INAOE**

©INAOE 2008

Derechos Reservados

**El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir
y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en
partes.**



Resumen

Límites espectrales de propagación

Las ecuaciones de Hamilton describen la energía de un sistema dinámico, de modo que resulta una formulación adecuada para resolver la ecuación no-lineal de Schrödinger:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa |\psi|^2 \psi.$$

que junto con la condición de frontera

$$\psi(x + 2L, t) = e^{i\theta} \psi(x, t).$$

forman el conjunto dinámico llamado *Modelo NLS* y que justamente describe la propagación de la luz en medios tipo Kerr tanto para materiales fotorrefractivos (dos coordenadas espaciales) como para fibras ópticas (una coordenada espacial y una temporal). Atribuimos a t el significado de coordenada espacial de propagación. La constante κ es positiva auto-desenfocamiento y negativa para auto-enfocamiento.

A menudo los patrones periódicos tipo Kerr a menudo pueden ser modelados considerando la interacción de un número limitado de órdenes espectrales.

El problema lineal asociado se escribe como:

$$\frac{\partial F(x, t, \lambda)}{\partial x} = U(x, t, \lambda) F(x, t, \lambda),$$

con una función vectorial de dos componentes F . Aquí λ es un parámetro espectral y la matriz U es:

$$U(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2i} & \sqrt{\kappa} \bar{\psi}(x, t) \\ \sqrt{\kappa} \psi(x, t) & -\frac{\lambda}{2i} \end{pmatrix}$$

La matriz monodrómica T_L se presenta como la matriz que da el cambio para la solución al problema asociado sobre el periodo x , así que $F(L, t, \lambda) = T_L(t, \lambda) F(-L, t, \lambda)$.

Puede mostrarse que $\text{tr}(T_L(\lambda))$ para cualquier λ es una cantidad conservada, esto es, si la evolución en t de ψ puede describirse por la NLS, el trazo de la matriz monodrómica permanece igual. Esto permite encontrar un conjunto de cantidades conservadas calculando el trazo para parámetros espectrales reales grandes. Nominalmente:

$$\text{tr}(T_L(\lambda)) \approx 2 \cos \left(-\lambda L + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda^{-\infty}|) \right).$$

La intensidad I_1 es

$$I_1 = \int_{-L}^L |\psi|^2 dx = 2LI,$$

e introducimos la intensidad promedio I .

El Hamiltoniano I_3 es

$$I_3 = \int_{-L}^L (|\psi_x|^2 + \varkappa |\psi|^4) dx.$$

La quinta integral es

$$I_5 = \int_{-L}^L (|\psi_{xx}|^2 + \varkappa \left(\frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2\right)^2 + 6\varkappa |\psi_x|^2 |\psi|^2 + 2\varkappa^2 |\psi|^6) dx.$$

Nuestro objetivo es establecer límites para el espectro coordinado espacial transversal de ψ

$$\psi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikKx) \psi_k(t),$$

Como ambos términos en el Hamiltoniano son positivos, entonces:

$$\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx = 2LK^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\psi_k(t)|^2 \leq I_3,$$

y

$$|\psi_k(t)|^2 \leq \frac{I_3}{2LK^2 k^2}.$$

Hay un procedimiento más elaborado el cual permite una estimación independiente de t . Demostramos este procedimiento primero para I_3 . Presentamos

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x |\psi(z)|^2 dz.$$

La segunda integral en el Hamiltoniano puede reescribirse como:

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} |\psi|^4 dx = \Phi |\psi|^2 \Big|_{x_0}^{x_0+2L} - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi_x \bar{\psi} dx - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi \bar{\psi}_x dx.$$

El primer término en la ecuación anterior no excede $2LI^2$. Para estimar el valor absoluto de los próximos dos términos, usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, entonces:

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi_x \bar{\psi} dx \right| \leq \sqrt{\int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi^2 |\psi|^2 dx} \sqrt{\int_{x_0}^{x_0+2L} |\psi_x|^2 dx} \leq (2LI)^{3/2} \sqrt{\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx}.$$

La misma estimación se obtiene para el tercer término de esa ecuación mediante la ecuación:

$$\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx \leq \left(\sqrt{I_3 + |\varkappa| 2LI^2 + |\varkappa|^2 (2LI)^3 + |\varkappa| (2LI)^{3/2}} \right)^2 = A_1^2.$$

Tomando en cuenta sólo los términos principales en esta última ecuación, para fuerte no-linealidad auto-enfocante, tenemos que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_k|^2}{I} k^2 \lesssim \frac{\nu^2}{\pi^2},$$

donde el parámetro de no-linealidad sin dimensiones $\nu = \varkappa I (2L)^2$ describe la cantidad de no-linealidad.

Similarmente a la derivación para I_3 , de la conservación de I_5 se sigue que

$$\int_{-L}^L |\psi_{xx}|^2 dx \leq I_5 + 10 |\varkappa| (A_1^2 I + 2A_1^3 I^{1/2}) + 2 |\varkappa|^2 (Q_1 I + 2A_1 Q_1 I^{1/2}).$$

Estos resultados demuestran que hay una estimación uniforme para las amplitudes de los órdenes de difracción con un decrecimiento para k grande más rápido que cualquier potencia negativa de $|k|$.

Para una cantidad de no-linealidad dada y un espectro inicial angosto, sólo es importante un número finito N de los más bajos armónicos de Fourier, cualquiera que sea la longitud de propagación. Debido a que se sabe que la NLS es completamente integrable, las soluciones son restringidas aproximadamente a unos toroides N -dimensionales en el espacio de fase de $2N$ -dimension de N amplitudes complejas. Presentaremos otro conjunto de leyes de conservación, las cuales tienen una estructura mucho más simple para no-linealidad pequeña. Estas se obtienen con iteraciones estándar de la ecuación integral del tipo Fredholm para un conjunto discreto finito de valores especiales de λ , $\lambda_k = k\pi/L$.

Cuando introducimos

$$\mu_k(z) = \exp(-i\lambda_k z) \psi(z),$$

el trazo de la matriz monodrómica es

$$\text{tr}(T_L(\lambda_k)) = J_k = (-1)^k 2\text{Re}[1 + G_1 + G_2 + \dots]$$

con

$$G_1 = \varkappa \int_{-L}^L dz \overline{\mu_k}(z) \int_{-L}^z dz' \mu_k(z'),$$

$$G_2 = \varkappa^2 \int_{-L}^L dz \overline{\mu_k}(z) \int_{-L}^z dz' \mu_k(z') \int_{-L}^{z'} dz'' \overline{\mu_k}(z'') \int_{-L}^{z''} dz''' \mu_k(z'''),$$

y así en adelante.

Con la función $f(z) = \int_{-L}^z dz' \mu_k(z')$, e integrando el lado derecho de G_1 por partes, se muestra que

$$Re(G_1) = 2\varkappa L^2 |\psi_k|^2$$

Por lo tanto, para no-linealidad pequeña, las cantidades conservadas son simplemente intensidades de órdenes de difracción que corresponden a la propagación lineal, las $G_1 + G_2 + \dots$ pueden ser considerados como un módulo al cuadrado del k -ésimo armónico de Fourier generalizado, el cual es conservado para el caso no-lineal.

Si está expresado en armónicos de Fourier, G_2 incluye combinaciones del tipo

$$\overline{\psi}_{k1} \psi_{k2} \overline{\psi}_{k3} \psi_{k4}$$

Es posible estimar los términos usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En este caso, tenemos

$$|G_n| \leq \frac{|\nu|^n}{\sqrt{(2n)!}}.$$

Esto prueba la convergencia, pero la estimación se hace con la intensidad promedio la cual es independiente de la propagación.

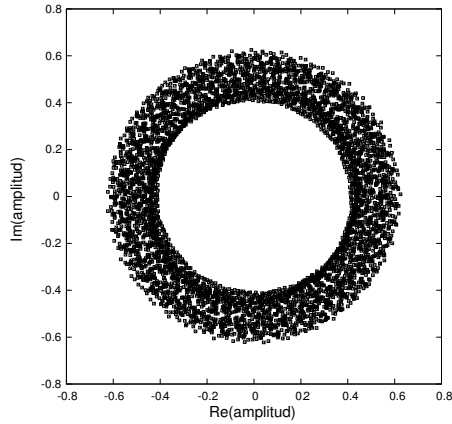
De la estimación para G_2 y la parte real de G_1 se sigue que si inicialmente tenemos

$$|\psi_k|^2 / I \gg |\nu| / \sqrt{6}$$

el k -ésimo orden conserva su identidad porque la suma de los términos subsecuentes para J_k serán más pequeños que G_1 . Por lo tanto, si inicialmente el orden es fuerte y la no-linealidad ν es pequeña, la amplitud evoluciona en un anillo característico en un plano de fase, tal y como se muestra en la siguiente figura:

Para determinar la forma del espectro cuando el número de armónicos en él esta limitado inicialmente, hemos realizado cálculos numéricos de la propagación para las condiciones iniciales dadas por los armónicos 2-4 más bajos de Fourier con fases y amplitudes tomadas aleatoriamente.

El conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtuvo de la ecuación NLS representando a ψ como una serie de Fourier. Después de sustituir las series dentro de la

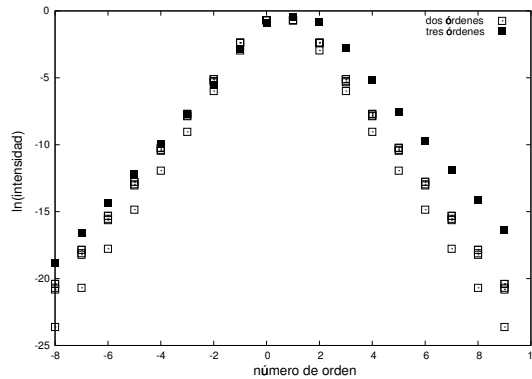


ecuación NLS y forzando todos los armónicos superiores a cero, se obtiene el conjunto de N ecuaciones diferenciales en N variables. Para obtener una solución numérica más eficiente compensamos la parte lineal de la propagación por el ansatz:

$$\psi_k(t) = \psi'_k(t) \exp(-ik^2 K^2 t)$$

Después de esto, las ecuaciones para ψ'_k se solucionaron numéricamente con el método Runge-Kutta de 4^o orden. La consistencia fue verificada agregando nuevos órdenes al cálculo y doblando el número de pasos. El algoritmo permite calcular con suficiente exactitud con 20 órdenes de difracción tomados en cuenta para longitudes de hasta 10^4 o más.

Para investigar la disminución de la intensidad con el número de orden de difracción, dibujamos su valor máximo a lo largo del camino de propagación para todos los armónicos involucrados. Se consideraron diferentes longitudes de propagación. Para las condiciones iniciales investigadas las gráficas se ven muy similares. El resultado típico es presentado en la siguiente figura:



Los dibujos muestran una disminución exponencial progresiva con una pendiente relacionada con las condiciones iniciales y la cantidad de no-linealidad. Como una función de

la longitud de propagación, hay una saturación pronunciada, de hecho, los puntos para longitudes de $l = 10^3$ y 10^4 son indistinguibles en la gráfica. La diferencia en logaritmos para el armónico más alto es 0.004. El valor escogido para no-linealidad auto-enfocante esta casi en una región de inestabilidad de modulación.

Ondas cnoidales como interacción de un número finito de modos

La propagación de paquetes de ondas en medios no-lineales con variación periódica de la dispersión o índice de refracción es uno de los problemas fundamentales de la fotónica moderna. Importantes aplicaciones como la transmisión de pulsos ópticos en enlaces de fibra de Dispersión Controlada, por ejemplo.

Nuestra atención se enfoca en los casos de localización débil y moderada que tienen esencialmente nuevas características en comparación con la propagación de solitones. El análisis está basado en el concepto de onda elíptica truncada que muestra su representación por una suma finita de armónicos con coeficientes especialmente ajustados.

Fijando la dispersión promedio, la diferencia de dispersión e incrementando el periodo del mapeo, mostramos cómo la dispersión regular es reemplazada por el comportamiento caótico. El crecimiento del periodo de mapeo conduce a la aparición de regiones con comportamiento caótico en el espacio de fase coexistente con las regiones de comportamiento cuasi-periódico. La vecindad cercana de un punto de mapeo correspondiente a la onda cnoidal truncada puede permanecer neutralmente estable, pero pequeñas perturbaciones mueven a la solución a la región caótica. La DM en gran escala conduce a caos KAM determinístico aún en el caso de la dimensionalidad más baja del espacio de fase.

Usamos el tipo (1+1)D de la ecuación de Schrödinger para la fibra óptica no-lineal sin pérdidas modificada para incluir dispersión de la velocidad de grupo variando longitudinalmente $d(\xi)$:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{d(\xi)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + |q|^2 q = 0,$$

En esta ecuación $q(\eta, \xi) = \left(\frac{L_{dis}}{L_{spm}} \right)^{1/2} I_0^{-1/2} A(\eta, \xi)$ es la amplitud compleja normalizada;

$A(\eta, \xi)$ es la envoltura que varía lentamente; I_0 es la intensidad pico de entrada; $\eta = \frac{t-z}{\tau_0}$ es el tiempo de evolución; τ_0 es escala de tiempo característica; $u_{gr} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}^{-1}$ es la velocidad de grupo; $k_0 = k(\omega_0)$ es el número de onda ; ω_0 es la frecuencia portadora; $\xi = \frac{z}{L_{dis}}$ es la distancia de propagación normalizada; $L_{dis} = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}$ es la longitud de dispersión; el coeficiente $\beta_2 = \frac{d^2k}{d\omega^2} \omega=\omega_0$ está definido por la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) para una fibra de comunicaciones estándar; $L_{spm} = \frac{2c}{\omega_0 n_2 I_0}$ es la longitud de auto-modulación de fase; n_2 es el coeficiente de no-linealidad.

El coeficiente de normalización en la ecuación de Schrödinger para un periodo del mapa de dispersión simétrico de dos pasos es introducido por las relaciones;

$$\begin{aligned} d(\xi) &= d_0, 0 < \xi < aL \\ d(\xi) &= -d_0, aL < \xi < (a+b)L \\ d(\xi) &= d_0, (a+b)L < \xi < (2a+b)L \end{aligned}$$

Aquí $L_0 = (2a+b)L$ es el periodo del mapa de dispersión, $d_0 > 0$ es la mitad de la diferencia de dispersión, a, b son parámetros positivos; La dispersión promedio está dada por $d_{av} = (2a-b)/(2a+b)d_0$, y L es la longitud característica.

Dos soluciones específicas de doble periodo de la ecuación de Schrödinger se conocen para la GVD anómala $d(\xi) = d_{av} > 0$ en forma de ondas elípticas dn- y cn-.

$$\begin{aligned} q_{dn}(\eta, \xi) &= \kappa |d_{av}|^{-1/2} dn(\kappa\eta; m) \exp[i\kappa^2(1-m^2/2)\xi + i\psi_0] \\ q_{cn}(\eta, \xi) &= m\kappa |d_{av}|^{-1/2} cn(\kappa\eta; m) \exp[i\kappa^2(m^2-1/2)\xi + i\psi_0], \end{aligned}$$

y una solución estacionaria periódica para dispersión constante normal $d(\xi) = d_{av} < 0$:

$$q_{sn}(\eta, \xi) = m\kappa |d_{av}|^{-1/2} sn(\kappa\eta; m) \exp[i\kappa^2(1+m^2)\xi/2 + i\psi_0].$$

Aquí $cn(\eta, \xi)$, $sn(\eta, \xi)$ y $dn(\eta, \xi)$ son funciones elípticas de Jacobi; $0 \leq m \leq 1$ es el módulo de la función elíptica que describe el grado de localización de la energía del campo de onda; $\kappa > 0$ es un factor de forma arbitrario; ψ_0 es la constante de fase. El periodo transversal de la onda-dn es igual a $l_{dn} = \frac{2K(m)}{\kappa}$, donde $K(m)$ es la integral elíptica de primera clase, mientras que los periodos transversales de las ondas cn- y sn- son iguales a $l_{cn} = l_{sn} = \frac{4K(m)}{\kappa}$.

Las series trigonométricas para funciones elípticas son bien conocidas:

$$\begin{aligned} dn(\eta; m) &= \pi l_{dn}^{-1} + 4\pi l_{dn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (1 + \rho^{2n})^{-1} \cos \left[\frac{2\pi n\eta}{l_{dn}} \right], \\ cn(\eta; m) &= 8\pi l_{cn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1/2} (1 + \rho^{2n-1})^{-1} \cos \left[\frac{2\pi(2n-1)\eta}{l_{cn}} \right], \\ sn(\eta; m) &= 8\pi l_{sn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1/2} (1 - \rho^{2n-1})^{-1} \sin \left[\frac{2\pi(2n-1)\eta}{l_{sn}} \right], \end{aligned}$$

$$\text{y } \rho = \exp[-\pi K(\sqrt{1-m^2})/K(m)]$$

En el límite de la localización débil $m \rightarrow 0$, $K(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $K(\sqrt{1-m^2}) \rightarrow \infty$, y sólo unas cuantos términos son suficientes para adecuar la representación de las correspondientes funciones elípticas.

En general, la forma compleja de la onda elíptica truncada puede escribirse como:

$$q_{el}(\eta, \xi) = \sum_{n=-N}^{n=N} S_n(\xi) \exp(i\Omega_n \eta).$$

Es posible obtener el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la forma del Hamiltoniano:

$$i \frac{\partial S_n}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial S_n^*}.$$

y el Hamiltoniano está dado por:

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{S}^*, \xi) = \frac{d(\xi)}{2} \sum_n \Omega_n^2 S_n S_n^* - \frac{1}{2} \sum_{l_1+l_2=l_3+l_4} S_{l_1} S_{l_2} S_{l_3}^* S_{l_4}^*,$$

donde cada índice l toma cualquier valor posible de n .

El control de la dispersión aleja la situación de la integrabilidad completa. De acuerdo al teorema de KAM para perturbación débil los toroides invariantes deben sobrevivir, pero las trayectorias degeneradas rompen en regiones caóticas. Para perturbaciones más grandes el volumen ocupado por las regiones caóticas crece y finalmente todo el espacio de fase se vuelve caótico. Primero, ilustraremos este proceso cuando sólo están involucrados dos armónicos

En el caso de dos armónicos el mapeo en la esfera de Poincaré prueba ser una herramienta muy efectiva para el análisis del comportamiento dinámico en general y la transición al caos en particular. Los parámetros de Stokes se introducen en lugar de las amplitudes espectrales siguiendo las relaciones:

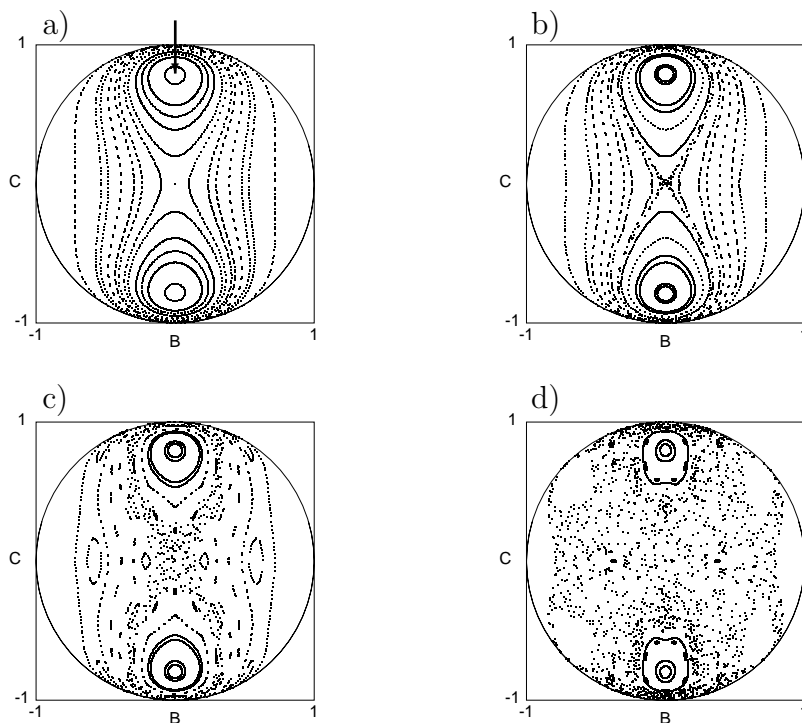
$$\begin{aligned} A &= I_1 - I_2 = S_1 S_1^* - S_2 S_2^* \\ B &= -i(S_1 S_2^* - S_1^* S_2) \\ C &= S_1 S_2^* + S_1^* S_2. \end{aligned}$$

La conservación de la intensidad conduce a la identidad:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \text{const},$$

Para ilustrar la propagación en una fibra de dispersión controlada calculamos numéricamente y dibujamos en la esfera de Poincaré los puntos de mapeo correspondientes a los parámetros de solución después de periodos consecutivos de mapeo. Típicamente, se toman 150 puntos por trayectoria. La suma de las intensidades de los armónicos se toman igual a 1. Los parámetros de Stokes fueron escalados para dibujarse en la esfera con un radio de 1 para ambos casos cn- y dn-.

La evolución de la onda del tipo-dn esta presentada en la siguiente figura. Hemos escogido el mapa de dispersión con $d_0 = 1, a = 0.5, b = 0.2$. La longitud L de la ecuación



como parámetro variable (el periodo del mapa es entonces $L_0 = 1.2L$). Para el caso completamente integrable los puntos de mapeo forman líneas cerradas correspondientes a las trayectorias de la solución.

Si L es pequeña en comparación con un periodo longitudinal típico de las ondas cnoicdales (el cual es físicamente de un orden de longitud de dispersión, en nuestro caso) el patrón de las trayectorias es muy similar al que tiene dispersión igual al promedio $d_{av} = 2/3$ (inciso *a*) de la anterior figura).

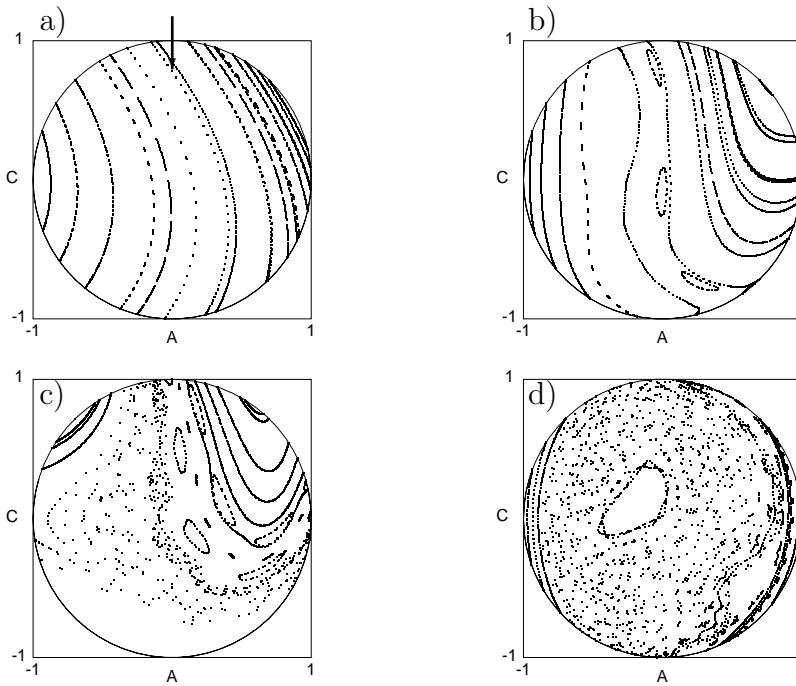
Para la solución del tipo-dn, el punto en el centro del círculo en esta figura corresponde a la distribución uniforme de la intensidad (únicamente existe el cero-ésimo armónico) y es inestable debido a la inestabilidad de modulación para GVD anómala y no-linealidad positiva. La trayectoria que pasa a través de este punto se vuelve caótica primero. Para $L = 0.75$ (inciso *b* de la anterior figura), la región caótica es un tanto pequeña, pero se incrementa rápidamente con L , (Incisos *c* y *d* de la misma anterior figura).

En nuestro caso, la esfera de Poincaré es el subespacio bi-dimensional de nuestra espacio de fase tetra-dimensional, y la línea cerrada del problema no-perturbado (sin DM) son intersecciones de la esfera con el toroide invariante. Para la onda-dn, el toroide degenerado corresponde al punto estacionario $B = C = 0$ sobre la esfera. Un manifold estable y uno inestable empiezan en la vecindad de este punto estacionario. Ellos se forman por puntos que se aproximan al punto estacionario con alguna iteración moviéndose hacia adelante o hacia atrás en el tiempo. Los manifolds producen una figura con forma de “8”, el punto en el manifold inestable en la vecindad cercana del punto estacionario primero

se mueve lejos y después se aproxima a este punto en el manifold estable.

Para el caso de dispersión controlada la imagen es diferente - los manifolds se arreglan en lazos complicados llamados marañas homoclínicas. El centro de la figura de “8” se vuelve difusa, como puede verse en el inciso *b* de la anterior figura. Las trayectorias que tienen puntos periódicos bajo perturbación, primero rompen en cadenas con puntos periódicos alternando de hiperbólicos a elípticos y se forman marañas homoclínicas similares en la vecindad de las trayectorias hiperbólicas. Algunas de estas cadenas pueden verse en los incisos *c*, y *d* de la anterior figura y este comportamiento es un tanto típico.

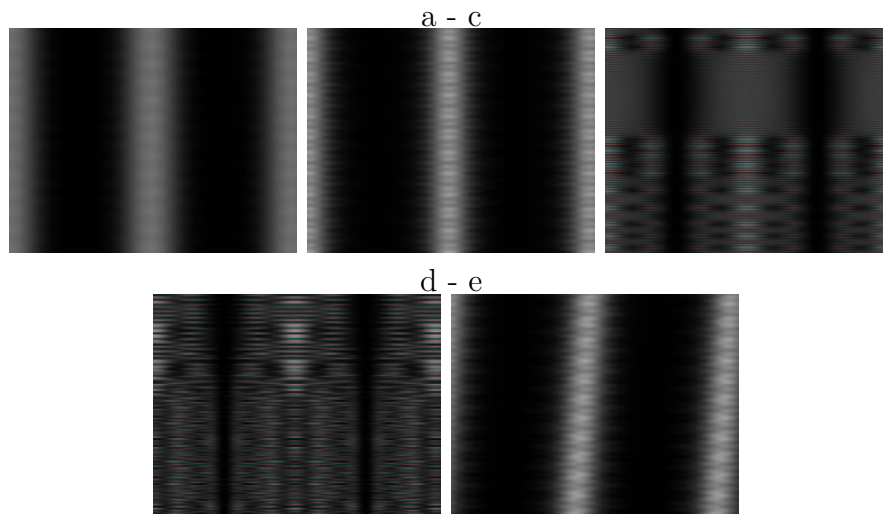
Para el caso-cn, la topología de las trayectorias es diferente. Aquí la trayectoria inestable no existe para el caso integrable (inciso *a* de la siguiente figura).



Entonces, con el crecimiento de L aparecen las cadenas de puntos periódicos del mapa y el caso se desarrolla cercano a puntos periódicos inestables de esas cadenas. Por lo tanto, para la onda-cd para el mismo periodo e intensidad que la onda-dn, la región caótica se desarrolla para longitudes mayores del control de dispersión y empieza un tanto lejos de la región de la onda cnoidal truncada en el espacio de fase. Consecuentemente, las ondas-cn son más estables con respecto al control de dispersión a gran escala.

Cuando el número de armónicos tomados en cuenta crece, la característica principal de las presentadas en el escenario permanecen válidas. La onda cnoidal existe, y para control de la dispersión débil hay una solución que corresponde a una onda con dispersión promediada sobre un periodo. El control de la dispersión en gran escala conduce a la aparición de regiones caóticas en el espacio de fase. La proyección sobre la esfera de Poincaré en el caso de multiarmónicos es menos informativa porque aun cuando para

el caso integrable las proyecciones no forman líneas cerradas. Aparece algo de “jitter” debido al crecimiento del número de armónicos. Para ilustrar la influencia de armónicos adicionales en la solución hemos calculado la propagación de la onda tipo-cn usando truncamiento de armónicos 4,8 y 10 como se muestra en la siguiente figura:



Se ve que para L pequeña la solución retiene su estructura. El valor umbral de L produciendo comportamiento caótico desarrollado disminuye si se involucran armónicos adicionales. Si la perturbación no es simétrica, la onda cnoidal puede empezar a moverse, pero generalmente retiene su estructura (inciso e de la última figura).

El comportamiento caótico para caos KAM es un tanto delicado y significa la aparición de pequeñas regiones caóticas primero, el volumen ocupado por esas regiones se incrementa con un “grado de no-integrabilidad”, el cual depende, en nuestro caso, de la longitud del periodo de control de dispersión.

Para nuestra simulación hemos escogido los parámetros de la onda para los cuales la dinámica para el no control de la dispersión está bien descrito por sólo dos amplitudes independientes. Para la representación en la esfera de Poincaré esto significa que las trayectorias permanecen en la región cercana al punto $B = C = 0$ en la esfera, donde los armónicos más altos son pequeños en comparación con los centrales (ver incisos a de la primera y segunda figuras). El teorema de KAM significa que para pequeño control de la dispersión la adición de nuevos armónicos en el esquema del truncamiento no cambia drásticamente la dinámica (incisos a y b de la última figura). Como el caos se desarrolla primero en la región del espacio de fase bien descrito por la dinámica de dos amplitudes, el truncamiento es adecuado generalmente para describir el inicio del caos.

Agradecimientos

A mi adorada esposa: **Leticia María Hernández Avila**
Por estar a mi lado y por creer en mí

A mi madre: **Roberta Rodríguez Bernabé**
Su ejemplo me ha guiado

A mi prima: **Elodia Lozano Hernández**
Por su ayuda incondicional

A mi asesor **Dr. Nikolai Korneev**
Por haberme guiado tan sabiamente durante mi estancia en el INAOE.

Al CONACyT, por haberme dado la oportunidad de superarme personalmente.

Al INAOE, por facilitarme el acceso, las instalaciones y toda la ayuda necesaria para aprovechar al máximo la oportunidad brindada.

Al Personal de Docencia:

Martha Olmos,
Rocío Leticia Rodas Fernández,
Ma.Esther Montes Tecanhuey
Landy Rios Morales.

A mis amados hijos

Enrique
Sofía Cristina

Bruno
Como un angel llegaste
Un regalo de fe nos diste
in memoriam

A mis suegros

Dn. Martín Hernández Hernández
Dña. Felipa Avila Rojas
in memoriam

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	XII
Dedicatoria	XIII
Prefacio	VIII
1. Introducción	1
1.1. Sistemas completamente integrables.	1
1.1.1. Ecuaciones de movimiento de Lagrange	1
1.1.2. Ecuaciones de movimiento de Hamilton	3
1.1.3. El corchete de Poisson	6
1.2. Caos en sistemas hamiltonianos	9
1.2.1. La teoría de KAM	10
1.3. Ecuación No-Lineal de Schrödinger	16
1.4. Métodos numéricos de solución	17
1.4.1. Runge-Kutta	17
1.4.2. Extrapolación Richardson	18
1.4.3. Corrector-Predictor	19
2. Límites espectrales para propagación	21
2.1. Monodromy matrix	22
2.2. Intensidades de los órdenes	24
2.3. Integrales de movimiento	26
2.4. Ilustraciones numéricas	29
3. Ondas cnoidales como interacción entre modos	32
3.1. Dispersión	32
3.1.1. Dispersión Material	32
3.1.2. Fibra de dispersión controlada (DMF)	33
3.2. Ondas cnoidales	34

3.3. Modelo matemático y parámetros	35
3.4. Ondas elípticas truncadas	38
4. Conclusiones	45
4.1. Primera:	45
4.2. Segunda:	46
A. Cálculo de variaciones	47
B. Estimación de los términos que contienen I_5	50
C. Prueba de la convergencia	52
Bibliografía	54
Referencias electrónicas	59
Summary	60

...
soy enemigo de mí
*y soy amigo de lo que he soñado que soy*¹
...

¹Tomado de la canción *Detalle de mujer con sombrero* de Silvio Rodríguez Domínguez

Prefacio

La óptica no-lineal tiene sus inicios en la observación de la generación del segundo armónico por Franken [20, 11] en 1961. El fenómeno es no-lineal en el sentido de que ocurre como respuesta de ciertos materiales a la gran intensidad del campo óptico, típico de algunos láseres. A partir de ese momento, se ampliaron los campos de estudio sobre el tema de la óptica no-lineal, tales como la automodulación de fase (que da lugar a solitones ópticos), la generación de tercer armónico, la generación de suma o diferencia de frecuencias, entre los procesos de mezclado de frecuencias, además de otros efectos como el efecto Pockels (susceptibilidad no-lineal de segundo orden), el efecto Kerr (susceptibilidad no-lineal de tercer orden), amplificación Raman, conjugación de fase óptica, principalmente.

En los sistemas de comunicaciones modernos se ha empezado a usar extensivamente la fibra óptica como guía de onda para las señales de comunicación que por diversos motivos la hacen una comunicación excelente en cuanto a ancho de banda, entre las características comercialmente más productivas y actualmente la investigación se enfoca en el desarrollo de sistemas más eficientes que lograrán mayores distancias sin pérdida de señal, más ancho de banda, etcétera.

Sin embargo las fibras ópticas y en general los elementos ópticos utilizados en telecomunicaciones u otras aplicaciones, tiene pérdidas de señal producidos por diferentes respuestas a la luz.

Dentro del régimen lineal las fibras ópticas tienen pérdidas de energía óptica debido a causas como la atenuación, dispersión cromática (CD), Dispersión del modo de polarización (PMD), razón señal-a-ruido óptica (OSNR).

Dentro del régimen no-lineal, tenemos: automodulación de fase (SPM), modulación cruzada de fase (XPM), Mezclado de cuatro ondas (FWM), dispersión estimulada Raman (SRS) y dispersión estimulada Brillouin (SBS).

Las fibras ópticas tienen ventanas que permiten una mejor transmisión de luz, y la investigación ha entregado métodos para mejorar las propiedades de las fibras ópticas, no solo si la luz es una onda continua, sino que se ha encontrado que una señal digital puede enviarse lanzando pulsos individuales que viajan grandes distancias y que gracias a los efectos no-lineales introducidos (recordemos que tales efectos no-lineales dependen de la intensidad del campo eléctrico de la luz) no pierden su forma original: tales son los solitones.

La transmisión no-lineal es de gran interés teórico, pues se observan fenómenos que no tienen análogos dentro del régimen lineal y mencionamos al comportamiento caótico, al menos el caso especial del caos Hamiltoniano explicado por la teoría de KAM y los ya mencionados solitones. Ambos casos son de apreciable dificultad de desarrollo teórico comparados con los métodos para describir los efectos dentro del régimen lineal.

El desarrollo actual de los sistemas computacionales nos ha proveído de herramientas invaluable para dar un atisbo al conocimiento de soluciones que nos explican la evolución de la luz dentro de materiales no-lineales pues nos permiten velocidades de cálculo mayores mediante métodos numéricos adecuados, ya que en muchos casos el cálculo directo no resuelve satisfactoriamente el problema. La tendencia moderna para resolver estos problemas con materiales no-lineales se basa en la interacción entre desarrollos teóricos y cálculos numéricos realizados con computadoras con suficientes velocidades de proceso y memoria.

En esta tesis estudiamos el problema específico de la propagación de patrones periódicos en un medio no-lineal tipo Kerr y los resultados pueden ser utilizados tanto en propagación en fibras como en materiales fotorrefractivos, ya que las ecuaciones son las mismas.

El problema periódico está menos desarrollado que para las condiciones de rápida disminución; el método matemático abstracto para la solución del problema no es práctico para su implementación.

Estudiamos las integrales de movimiento del problema y refinamos ciertas estimaciones del ancho espectral, lo que permite prácticamente reducir el sistema al número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias y en el ejemplo que tiene utilidad práctica, estudiamos numéricamente el comportamiento caótico determinista de patrones periódicos.

En el capítulo 1, se aborda el tema de la integrabilidad de la ecuación Schrödinger, iniciando con un esquema de las ecuaciones de movimiento de Lagrange, las cuales derivan las ecuaciones de Hamilton y su relación con el corchete de Poisson para números complejos. Sigue un análisis de los sistemas caóticos sin pérdidas, esto es, Hamiltonianos, soportados por la Teoría de Kolmogorov-Arnold-Moser, para finalmente mostrar a la ecuación no-lineal de Schrödinger como un sistema totalmente integrable, anotando los métodos de integración más usados en este tipo de problemas.

En el capítulo 2, utilizando la Ecuación no lineal de Schrödinger, con la notación de Faddeev [19], mostramos que se cumplen las leyes de conservación, podemos estimar las intensidades para los distintos órdenes de difracción dentro de los materiales tipo Kerr, por medio de las integrales de movimiento asociadas a cada orden de difracción presentando las ilustraciones obtenidas por métodos numéricos.

Para el capítulo 3, analizamos las ondas cuasi-senoidales (cnoidales), que están basadas en la onda elíptica truncada y cuya representación es una suma de armónicas. Se utiliza la ecuación de Schrödinger del tipo (1+1)D en una fibra sin pérdidas tomando en cuenta su Dispersión de la Velocidad de Grupo, para después considerar esta ondas elípticas truncadas en una fibra DMF, utilizando la herramienta de la esfera de Poincaré para calcular numéricamente las trayectorias de propagación dentro de la fibra, mostrando los puntos donde pasa de estable a inestable típico del caso KAM, en las gráficas obtenidas.

Finalmente, en el capítulo 4, se presentan las conclusiones del trabajo aquí presentado.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Sistemas completamente integrables.

Sabemos que un sistema integrable tiene una integral de movimiento para cada grado de libertad, definiendo en mecánica clásica al grado de libertad como una magnitud independiente que determina unívocamente la posición del sistema [39].

Como se podría esperar, para que un sistema sea integrable, las integrales de movimiento deben ser independientes, esto es, no pueden ser funciones de otras integrales de movimiento.

Una propiedad general de los sistemas integrables es que pueden solucionarse por cuadraturas, esto es, una combinación finita de operaciones algebraicas, inversas de funciones o integrales de funciones. En otras palabras, un sistema integrable es aquel para el cual puede obtenerse, de manera analítica, su evolución temporal con más facilidad [61].

En este sentido, podremos ver que las ecuaciones de movimiento, ecuaciones (1.9, 1.23 y 1.24), son completamente integrables .

1.1.1. Ecuaciones de movimiento de Lagrange

Consideremos que la posición del sistema está totalmente dada por su coordenada q y que su velocidad generalizada es \dot{q} . Consideraremos que cada grado de libertad es una coordenada, entonces, en este caso, como sólo tenemos una coordenada q , nuestro sistema tiene un grado de libertad.

El Principio de Mínima Acción (Principio de Hamilton) está dado por la *Función de Lagrange*:

$$L(q, \dot{q}, t). \tag{1.1}$$

Según esto, el sistema se moverá de t_1 a t_2 de forma que la *integral de acción* 1.2, tiene

un mínimo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.2)$$

Si variamos la posición del sistema a una nueva posición $\delta q(t)$, la nueva posición será $q(t) + \delta q(t)$. La variación que experimenta S (la *acción*), es:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.3)$$

La condición para que S sea mínima es que todos los términos se anulen (primera variación de la integral), entonces, en la frontera, se cumple que

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (1.4)$$

Por lo que el principio de mínima acción puede escribirse de la forma (efectuando la variación)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (1.5)$$

Teniendo en cuenta que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, entonces, la ecuación (1.5) queda como:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d \delta q}{dt} \right) dt &= 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d \delta q}{dt} dt &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Integrando por partes el segundo término (como en el apéndice A),

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt = 0. \quad (1.7)$$

Pero, aplicando la condición (1.4), el término medio se vuelve cero, y nos queda que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt = 0 \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

A partir de esta ecuación vemos que para que se cumpla, tienen que anularse las funciones dentro del paréntesis. Entonces, la ecuación diferencial resultante la podemos escribir de

la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.9)$$

La que se conoce como *ecuación de Lagrange*.

Si el sistema posee n grados de libertad, con coordenadas generalizadas q_k , las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.10)$$

y forman un sistema lagrangiano de n ecuaciones de segundo orden para S incógnitas $q_k(t)$, el cual tiene $2n$ constantes arbitrarias que se pueden conocer por medio de las *condiciones iniciales* para describir completamente al sistema.

Si el movimiento se describe por medio de la ecuación de Lagrange, entonces los momenta generalizados del sistema, para n grados de libertad son:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.11)$$

1.1.2. Ecuaciones de movimiento de Hamilton

En la definición de Lagrange de las ecuaciones del movimiento, no hay variables independientes, puesto que q_k y \dot{q}_k no son independientes y que nos conducen a que n ecuaciones de *segundo* orden tengan $2n$ constantes arbitrarias. Este problema se simplifica con el Hamiltoniano, con el cual $2n$ ecuaciones de *primer* orden tienen $2n$ constantes arbitrarias.

Si consideramos únicamente a las coordenadas q_k , entonces podemos considerar únicamente n ecuaciones de *primer* orden con n constantes arbitrarias.

Introduciendo los momenta generalizados (1.11), la derivada total de 1.10 es:

$$dL = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \quad (1.12)$$

$$dL = \sum_k \dot{p}_k dq_k + \sum_k p_k d\dot{q}_k. \quad (1.13)$$

Por otra parte, podemos decir:

$$d\left(\sum p_k \dot{q}_k\right) = \sum p_k d\dot{q}_k + \sum \dot{q}_k dp_k \quad (1.14)$$

$$\sum p_k d\dot{q}_k = d\left(\sum p_k \dot{q}_k\right) - \sum \dot{q}_k dp_k. \quad (1.15)$$

Y substituyendo el segundo término del lado derecho de la ecuación (1.13), tenemos:

$$\begin{aligned}
dL &= \sum \dot{p}_k dq_k + d\left(\sum p_k \dot{q}_k\right) - \sum \dot{q}_k dp_k \\
dL - d\left(\sum p_k \dot{q}_k\right) &= \sum \dot{p}_k dq_k - \sum \dot{q}_k dp_k \\
-dL + d\left(\sum p_k \dot{q}_k\right) &= -\sum \dot{p}_k dq_k + \sum \dot{q}_k dp_k \\
d\left(\sum p_k \dot{q}_k - L\right) &= -\sum \dot{p}_k dq_k + \sum \dot{q}_k dp_k. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

En donde, según las ecuaciones de Lagrange, el lado derecho de esta ecuación (1.16), representa la energía del sistema, la cual, expresada en función de las coordenadas y los momenta, recibe el nombre de *función de Hamilton*, H :

$$H(p_k, q_k, t) = \sum p_k \dot{q}_k - L. \tag{1.17}$$

Pero sucede que, derivando el lado izquierdo de la ecuación (1.17):

$$dH(p_k, q_k, t) = \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{1.18}$$

Además, por la definición del Hamiltoniano (Ecuación 1.17), al derivar el lado derecho, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d\left(\sum p_k \dot{q}_k - L(\dot{q}, q, t)\right) &= d\left(\sum p_k \dot{q}_k\right) - d[L(q, \dot{q}, t)] \\
&= \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Pero, como $\dot{q}_k = 0$, además, por las ecuaciones (1.11) y (1.10), tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k \tag{1.20}$$

Y resulta entonces que 1.19 queda finalmente (reacomodando los términos):

$$dH = -\dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{1.21}$$

Comparando las ecuaciones (1.18) y (1.21), tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{1.22}$$

Comparando termino a término, encontramos que:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (1.23)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (1.24)$$

Que son las *Ecuaciones de Hamilton*, las cuales constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden para $2n$ funciones $p(t)$ y $q(t)$ desconocidas. Por su sencillez formal y por su simetría se llaman también *Ecuaciones Canónicas conjugadas*. Además, para un sistema independiente del tiempo, la parte temporal de 1.22, ecuación (1.25), se vuelve cero.

$$\frac{\partial L}{\partial t} dt = -\frac{\partial H}{\partial t} dt = 0. \quad (1.25)$$

Para encontrar el significado físico del hamiltoniano H . Asumimos que la energía cinética T es una expresión homogénea en \dot{q}_k y que la energía potencial U es independiente de \dot{q}_k , entonces:

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k p_k \dot{q}_k. \quad (1.26)$$

De la ecuación (1.17) y como el lagrangiano es $L = T - U$, entonces

$$H(p_k, q_k, t) = \sum p_k \dot{q}_k - L = 2T - (T - U) = T + U. \quad (1.27)$$

lo que demuestra que el hamiltoniano es la energía total del sistema dinámico expresado en términos de p_k y q_k .

Ecuaciones de Hamilton para números complejos

Consideremos ahora números complejos z del tipo

$$z = a + ib \quad (1.28)$$

$$\bar{z} = a - ib. \quad (1.29)$$

y \bar{z} es el complejo conjugado de z y tomemos las coordenadas complejas como:

$$S_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2}} \quad (1.30)$$

$$\bar{S}_k = \frac{q_k - ip_k}{\sqrt{2}}. \quad (1.31)$$

En donde \bar{S} es la compleja conjugada de S .

Derivemos la ecuación (1.30), con respecto al tiempo:

$$\partial S_k = \frac{\dot{q}_k + i\dot{p}_k}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{q}_k + i\dot{p}_k). \quad (1.32)$$

sustituyendo 1.23 y 1.24 en la ecuación (1.32), tenemos:

$$\partial S_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - i \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad (1.33)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{i\partial p_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \right) H \quad (1.34)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{-i\partial p_k} \right) H. \quad (1.35)$$

Pero, de esta última ecuación, vemos que las derivadas entre paréntesis son la derivada vectorial de \bar{S}_k tal y como se definió en (1.31), a partir de la forma $\sqrt{2}\bar{S}_k = q_k - ip_k$, la ecuación (1.35), queda como:

$$\partial S_k = \frac{-i}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \frac{\partial H}{\partial \bar{S}_k} \quad (1.36)$$

$$i\partial S_k = -i^2 \frac{\partial H}{\partial \bar{S}_k}. \quad (1.37)$$

En estas condiciones, el Hamiltoniano $H(S_k, \bar{S}_k)$ para números complejos es:

$$i\partial_z S_k = \frac{\partial H}{\partial \bar{S}_k}. \quad (1.38)$$

De las ecuaciones (1.30) y (1.31), se sigue que:

$$q_k = \frac{\bar{S}_k - S_k}{\sqrt{2}i} \quad (1.39)$$

$$p_k = \frac{\bar{S}_k + S_k}{\sqrt{2}}. \quad (1.40)$$

1.1.3. El corchete de Poisson

Consideremos dos funciones f y g cualquiera, ambas dependientes de las variables canónicas q_k y p_k . El *Corchete de Poisson* se define como:

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right). \quad (1.41)$$

La ventaja del corchete de Poisson es que no depende de la elección de las coordenadas, ya que es invariante bajo una transformación canónica¹

Propiedades del Corchete de Poisson

En mecánica clásica se denominan *corchetes fundamentales* tanto al corchete de Poisson como al corchete de Lagrange², que puede ser considerado como el inverso del corchete de Poisson. Ambos tienen que ver con q_k y p_k como variables independientes, lo que nos da que

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_l} = \delta_{kl}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = 0 \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0 \quad \frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}. \quad (1.42)$$

donde δ_{kl} es la función delta de Kronecker definida por:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{para } k = l, \\ 0, & \text{para } k \neq l. \end{cases} \quad (1.43)$$

De la ecuación (1.41), se siguen las siguientes propiedades:

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) = -\{g, f\}. \quad (1.44)$$

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}, \quad \{q_k, q_l\} = 0, \quad \{p_k, p_l\} = 0. \quad (1.45)$$

Como el corchete de Poisson³ es invariante bajo una transformación canónica, entonces se cumple que, para cualesquiera funciones f y g :

$$\{f, g\}' = \{f, g\}. \quad (1.46)$$

¹Consideremos una transformación de un conjunto de variables q_k y p_k hacia otro conjunto de variables α_k, β_k . Se llama *transformación canónica* si en esta transformación las nuevas variables de las ecuaciones de movimiento están otra vez en forma canónica. Esto es, si

$$p_k = p_k(\alpha, \beta), \quad q_k = q_k(\alpha, \beta).$$

es una transformación canónica del conjunto p, q hacia el conjunto α, β , las ecuaciones de movimiento en α, β serán:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k}.$$

² El corchete de Lagrange se define como:

$$[f, g] = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial f} \frac{\partial p_k}{\partial g} - \frac{\partial p_k}{\partial f} \frac{\partial q_k}{\partial g} \right) = -[g, f].$$

³Y también el de Lagrange, claro está.

Debemos notar que otra propiedad del corchete de Poisson es:

$$\{p_k, f\}' = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (1.47)$$

$$\{q_k, f\}' = \frac{\partial f}{\partial p_k}. \quad (1.48)$$

Ahora, la discusión de las ecuaciones de movimiento se hace por medio de la llamada *identidad de Jacobi*:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (1.49)$$

En particular podemos considerar a F como una función y a H , el Hamiltoniano, como otra función. Aplicando la definición del corchete de Poisson, ecuación (1.41), entonces obtenemos que:

$$\{F, H\} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \quad (1.50)$$

Pero, sustituyendo al Hamiltoniano por las ecuaciones canónicas (1.23) y (1.24) dentro de (1.50), tenemos que:

$$\{F, H\} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \dot{F} \quad \therefore \quad (1.51)$$

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (1.52)$$

De la ecuación (1.52) se sigue directamente que para que F sea una constante de movimiento, se debe cumplir que

$$\{F, H\} = 0. \quad (1.53)$$

Cuando un sistema dinámico cumple con la propiedad (1.53), se dice que el sistema está en involución y es condición necesaria y suficiente para que F sea una ecuación de movimiento.

El corchete de Poisson y los números complejos

Consideremos también para este caso, las coordenadas complejas definidas en las ecuaciones (1.30) y (1.31).

El corchete de poisson (ecuación 1.41) para f y g , toma la forma:

$$\{f, g\} = i \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{S}_k} \frac{\partial g}{\partial S_k} \right). \quad (1.54)$$

1.2. Caos en sistemas hamiltonianos

La palabra *caos* tiene en física un sentido especial con respecto a algún sistema dinámico no-lineal, cuya característica más conocida es la de tener una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales, tanto que al iniciarse el estudio del primer experimento con relación a la predicción climática dio lugar al llamado “Efecto mariposa”⁴

En general los sistemas que exhiben caos matemático están gobernados por ecuaciones deterministas y por lo tanto son en algún sentido ordenados.

Para clasificar el comportamiento de un sistema como caótico, debe presentar las siguientes propiedades:

- Debe tener una frontera definida.
- Debe ser sensible a las condiciones iniciales.
- Debe ser transitivo.
- Sus órbitas periódicas deben ser densas⁵.

La sensibilidad a las condiciones iniciales significa que dos sistemas pueden moverse en trayectorias ostensiblemente diferentes en su espacio de fase aún cuando la diferencia en los valores de sus condiciones iniciales fueran infinitamente pequeñas⁶. Matemáticamente, la sensibilidad a las condiciones iniciales puede determinarse calculando su exponente de Lyapunov.

El exponente de Lyapunov (o exponente característico de Lyapunov), λ , de un sistema dinámico es una cantidad que caracteriza el rango de separación de trayectorias infinitamente cercanas.

Cuantitativamente, dos trayectorias en el espacio de fase con separación inicial $\delta Z(0)$ divergen a:

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta Z(0)|. \quad (1.55)$$

Para cualquier exactitud finita $\delta x = |\delta x(0)|$ de los datos iniciales, la dinámica es predecible solo hasta un *tiempo de Lyapunov* finito:

$$T_{Lyap} \approx -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\delta x}{L} \right|. \quad (1.56)$$

donde L es la longitud total de la trayectoria [15].

⁴Al predecir el clima global, el que una mariposa mueva sus alas o no en alguna parte del mundo, puede hacer la diferencia de si después de un año aparece una tormenta o no en otra parte del mundo

⁵En topología y áreas relacionadas de las matemáticas un subconjunto A de un espacio topológico X es llamado *denso* (en X) si el único subconjunto de X que contiene a A es el mismo X

⁶Ver “Efecto Mariposa”

La transitividad significa que la aplicación de una transformación sobre cualquier intervalo I_1 se expande hasta traslaparse con cualquier otro intervalo dado I_2 , esto es, el sistema evolucionará sobre el tiempo de tal manera que cualquier región dada o conjunto abierto de su espacio de fase se traslapará con cualquier otra región, por ejemplo, la mezcla de pinturas líquidas (o fluidos coloreados) es un sistema caótico.

1.2.1. La teoría de KAM

De la teoría del caos surge un importante teorema establecido por Kolmogorov en 1954, probado en los 60's por Arnold y Moser y por ello llamado *Teorema de KAM* (Kolmogorov-Arnold-Moser).

Este teorema delinea las condiciones bajo las cuales el caos se restringe en extensión. la prueba de Moser en 1962 fue válida también para los llamados “*twist maps*”:

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta + 3\pi f(I) + g(\theta, I) \\ I' &= I + f(\theta, I).\end{aligned}\tag{1.57}$$

En 1963, Arnold realizó una prueba para sistemas Hamiltonianos:

$$H = H_0(I) + \epsilon H_1(I).\tag{1.58}$$

El teorema original requería perturbaciones de alrededor de $\epsilon \sim 10^{-48}$, aunque esto ha sido superado significativamente. La prueba de Arnold requería que C^∞ , y la prueba original de Moser requería C^{333} . Subsecuentemente la versión de Moser ha sido reducida a C^6 , después a $C^{2+\epsilon}$, aún cuando se conocen contraejemplos para C^2

Las condiciones para la aplicabilidad del teorema KAM son:

1. Perturbaciones pequeñas,
2. Perturbaciones suaves, y
3. Mapa con número de espirales suficientemente irracional ⁷

⁷El número de espirales $W(\theta)$ de un mapa $f(\theta)$ con valor inicial θ esta definido por

$$W(\theta) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\theta) - \theta}{n}.$$

el cual representa el incremento promedio en el ángulo θ por unidad de tiempo (frecuencia promedio). Un sistema con un número de espirales irracional es quasi-periódico

Moser consideró una función integrable Hamiltoniana con un *torus* H_0 y un conjunto de frecuencias $\sum \omega k$ teniendo un vector de frecuencia inconmensurable⁸ ω^* (i.e. $\omega \cdot k \neq 0$), para todos los enteros k_i .

Sea H_0 perturbada por alguna función periódica $H_1(I)$ (ecuación 1.58). El teorema KAM afirma que, si H_1 es suficientemente pequeña, entonces, para casi cada ω^* existe un torus invariante $T(\omega^*)$ del sistema perturbado tal que $T(\omega^*)$ esta “cerca de” $T_0(\omega^*)$. Más aún, los toroides $T(\omega^*)$ forman un conjunto de mediciones positivas $T(\omega^*)$ cuyo complemento tiene una medida la cual tiende a cero como $|H_1| \rightarrow 0$.

El teorema KAM, podría decir que: “Para perturbación suficientemente pequeña, casi todos los toroides son preservados (excluyendo aquellos con vectores de frecuencia racional).” Entonces, el teorema explícitamente excluye a los toroides con frecuencias relacionadas racionalmente, esto es, $n - 1$ condiciones de la forma:

$$\omega \cdot k = 0. \quad (1.59)$$

Esos toroides son destruidos por la perturbación. Para un sistema con dos grados de libertad, la condición de órbitas cerradas es:

$$\sigma = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s}. \quad (1.60)$$

Para mapas de órbitas cuasi-periódicas, σ es irracional. KAM muestra que los toroides preservados satisfacen la condición de irracionalidad:

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}}. \quad (1.61)$$

para toda r y s , aún cuando no se sabe mucho acerca de esto.

El teorema KAM rompió el estancamiento del problema de los pequeños divisores en la teoría clásica de las perturbaciones y provee el punto de inicio para un entendimiento de la aparición del caos.

Para un sistema Hamiltoniano, la condición de no-degeneración isoenergética

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (1.62)$$

⁸Los términos “medida,” “medible,” etc. tienen una definición técnica muy precisa (generalmente involucrando σ -álgebras).

Una medida se define como una función real no-negativa de un δ -ring F tal que:

$$m(\phi) = 0.$$

donde ϕ es el conjunto vacío, y

$$m(A) = \sum_n m(A_n).$$

para alguna colección finita o contable de pares de conjuntos disjuntos (A_n) en F tal que $A = \bigcup A_n$ está también en F .

garantiza la preservación de la mayoría de los toroides invariantes bajo pequeñas perturbaciones $\epsilon \ll 1$.

La versión de Arnold afirma que

$$\left| \sum_{k=1}^n m_k \omega_k \right| > K(\epsilon) \left(\sum_{k=1}^n |m_k| \right)^{-n-1}. \quad (1.63)$$

para toda $m_k \in \mathbb{Z}$. Esta condición es menos restrictiva que la de Moser, así que algunos puntos están excluidos.

Si el sistema sin perturbar satisface las condiciones de no-degeneración, para una perturbación suficientemente pequeña la mayoría de los toroides invariantes no se desvanecen, pero se deforman ligeramente, así que en el espacio de fase hay toroides invariantes densamente llenos con curvas cuasiperiódicas zigzagueando alrededor de ellos. Aquí “la mayoría” significa que la medida de su complemento es pequeña y se va a cero con el tamaño de la perturbación. Los toroides que sobreviven son aquellos que son suficientemente irracionales.

Para frecuencias irracionales la condición (1.59) no se satisface para algún k , pero si tenemos un $|k|$ lo suficientemente grande, podemos encontrar valores de k para los cuales $|\omega \cdot k|$ se vuelve pequeña.

La teoría de KAM nos dice que para $\epsilon \rightarrow 0$ y perturbaciones lo suficientemente suaves los toroides irracionales sobrevivientes son aquellos con ω_0 que satisfacen la condición:

$$|\omega_0 \cdot k| > \gamma |k|^{-\tau}. \quad (1.64)$$

para todos los vectores de números enteros k y algunos γ y τ con fronteras sobre τ que pueden refinarse dependiendo de las condiciones de suavidad atribuidas a la perturbación y las restricciones del sistema sin perturbación. Por ejemplo, KAM ha mostrado que los toroides sobreviven para perturbaciones C^r si $N - 1 < \tau < \frac{1}{2}r - 1$ y γ es del orden de $\sqrt{\epsilon}$ para ϵ pequeña.

En términos del método de generación de funciones para transformaciones canónicas buscamos una función $S(I', \theta)$, donde

$$I = \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad \theta' = \frac{\partial S}{\partial I'}. \quad (1.65)$$

de tal manera que el Hamiltoniano transformado es independiente de θ' :

$$H'(I') = H(I, \theta) = H \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta \right). \quad (1.66)$$

Podemos expandir S de la siguiente manera:

$$S(I', \theta) = I' \cdot \theta + \epsilon S_1(I', \theta). \quad (1.67)$$

y la ecuación (1.66) se vuelve de primer orden en ϵ :

$$H'(I') = H_0(I') + \epsilon \frac{\partial H_0(I')}{\partial I'} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon H_1(I', \theta). \quad (1.68)$$

Si escribimos la dependencia periódica θ de S_1 y H_1 en términos de su serie de Fourier multidimensional

$$S_1(I', \theta) = \sum_m S_{1,m}(I') e^{im \cdot \theta}. \quad (1.69)$$

y reunimos los coeficientes de cada componente de Fourier, encontramos:

$$S_1(I', \theta) = \sum_m \frac{H_{1,m}(I')}{m \cdot \omega_0(I')} e^{im \cdot \theta}. \quad (1.70)$$

Derrumbe de los toroides racionales

El destino de los toroides racionales puede investigarse usando el “twist map” de Moser.

Para el sistema sin perturbaciones en coordenadas de acción-ángulo el mapa M es:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi a(r_n). \end{aligned} \quad (1.71)$$

donde $a(r) = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ es la razón de la frecuencia del mapa con respecto la frecuencia eliminada en la formación de la sección de Poincaré. Se asume que $\frac{da}{dr} \neq 0$.

Para razones de frecuencia racionales $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$, con p y q enteros, cada punto en el círculo $r = r_{pq}$, con $a(r_{pq}) = \frac{p}{q}$, es un punto fijo del mapa iterado q veces; esto es, M^q .

Ahora, perturbamos el “twist map” a M_ϵ

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + \epsilon f(r_n, \theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi a(r_n) + \epsilon g(r_n, \theta_n). \end{aligned} \quad (1.72)$$

y consideramos el efecto de M^q en la vecindad de r_{pq} . Por continuidad con el caso sin perturbaciones, para cada θ podemos encontrar un radio al cual el punto se mapea puramente en la dirección radial (esto es, con cero giro⁹). Conectando estos puntos obtenemos una curva continua R_ϵ (la deformación de $r_n = r_{pq}$) que se mapea sólo en la dirección radial por M^q .

Por la propiedad de preservación de área del mapa, la imagen $M_\epsilon^q R_\epsilon$ de esta curva bajo M_ϵ^q debe intersectar a R_ϵ en un número *par* de puntos como se muestra en la figura 1.1:

⁹twist

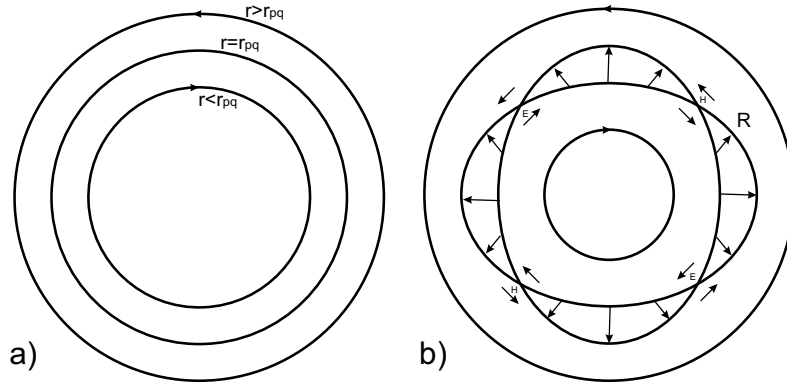


FIGURA 1.1: Comportamiento del mapa M^q en los casos: a) integrable y b) perturbado

y estos son puntos fijos de M_ϵ^q . Se muestra en el bosquejo que tales puntos fijos deben ser alternadamente elípticos (E) e hiperbólicos (H).

Mostramos que hay, de hecho, al menos $2q$ puntos fijos de M_ϵ^q . Sea (r_0, θ_0) uno de los puntos fijos. Para el mapa sin perturbaciones $(r_0, \theta_0), M(r_0, \theta_0), \dots, M^{q-1}(r_0, \theta_0)$ son puntos diferentes y para el sistema perturbado:

$$M_\epsilon^q M_\epsilon(r_0, \theta_0) = M_\epsilon(r_0, \theta_0). \tag{1.73}$$

esto es, $M_\epsilon(r_0, \theta_0)$ es también un punto fijo de M_ϵ^q , por lo tanto, hay al menos q distintos puntos de M_ϵ sobre R_ϵ , pero los puntos fijos elípticos no pueden ser mapeados dentro de los puntos fijos hiperbólicos, así que deben ser $2nq$ puntos fijos de M_ϵ^q (con n entero) en la vecindad de $r_{p,q}$.

División del último torus KAM

Para un mapa **2-D** los toroides KAM dividen el espacio de fase en regiones disjuntas: El movimiento caótico que comienza desde una condición inicial dentro del toroide no puede escapar a través del toroide. Este resultado no es del todo obvio: ya que tenemos que ver con iteraciones discretas, se vería posible que la órbita podría “saltar a través de” el toroide invariante, sin embargo, considerando el mapeo del area dentro del toroide como un todo y la restricción de la preservación de área, es suficiente para probar el resultado.

Para el mapa estándar los toroides para $K = 0$ abarcan el rango de $0 < x \leq 1$ y dividen el rango y en tiras. Como los toroides son destruidos sucesivamente conforme K incrementa esas regiones conectadas, pero hasta que el último toroide sobreviviente desaparezca, el movimiento caótico es confinado a un rango limitado de y agrupando la condición inicial. Para este mapa el último toroide sobreviviente es aquel con el número de espirales igual a $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ y el “arrugamiento” de la curva suave en el punto de rompimiento $K = K_c \simeq 0.97$ tiene interesantes propiedades de escalamiento.

Difusión de Arnold

En dos dimensiones después de la división del último toroide, o en dimensiones superiores donde los toroides sobrevivientes no son suficientes para confinar el movimiento, aún para una perturbación no-integrable arbitrariamente pequeña, una trayectoria caótica eventualmente tenderá desviarse a regiones distantes del espacio de fase. Este proceso se conoce como **difusión de Arnold**.

La naturaleza difusiva del proceso se ve fácilmente para el mapa estándar a grandes K :

$$\Delta y_{n+1} = y_{n+1} - y_n = -\frac{K}{2\pi} \text{sen } 2\pi x_n. \quad (1.74)$$

y $x_{n+1} - x_n$ será grande así que x_n variará salvajemente. Podríamos tomar entonces a $\text{sen } 2\pi x_n$ como una variable aleatoria en el rango entre ± 1 y y_n evoluciona como un camino aleatorio:

$$\langle y_n^2 \rangle \sim n \left(\frac{K}{2\pi} \right)^2 \langle \text{sen}^2 2\pi x_n \rangle. \quad (1.75)$$

esto es, se difunde con una constante de difusión $D = \frac{1}{2} \left(\frac{K}{2\pi} \right)^2$. Para K más pequeñas, aproximación al valor crítico K_c o para no-integrabilidad débil en dimensiones superiores, la difusión se vuelve mucho más lenta.

Caos fuerte

aún después de que la última superficie KAM se ha dividido en el mapa circular, permanecen curvas invariantes encerrando regiones del espacio de fase y el sistema permanece no-ergódico. No todas las condiciones iniciales conducen a órbitas que visiten todas las regiones del espacio de fase consistente con las cantidades conservadas. Ya que la ergodicidad es una idea clave de la mecánica estadística es interesante construir sistemas dinámicos simples que son ergódicos y también mezclados. La última propiedad asegura que la correlación de funciones se relaje hacia los valores de “equilibrio” dados por los promedios sobre el espacio de fase disponible. Los dos sistemas de una partícula rebotando entre las paredes mostradas en la siguiente figura 1.2.

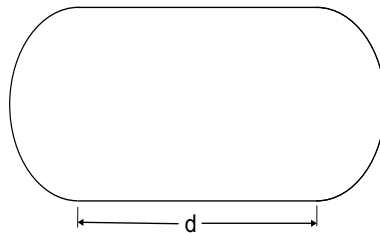


FIGURA 1.2: *Sistema caótico ergódico y mezclador: Partícula en un estadio*

La figura 1.2, parecida a un estadio, es caótica para todos los valores no-cero de la longitud del lado recto d ; es claro que para $d = 0$, es integrable.

1.3. Ecuación No-lineal de Schrödinger como un sistema completamente integrable

Utilizamos la ecuación no-lineal de Schrödinger (Non-Linear Schrödinger, NLS) [19]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa |\psi|^2 \psi. \quad (1.76)$$

con la condición inicial:

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x). \quad (1.77)$$

Donde $\psi(x)$ es una función compleja y $|\psi|^2 = \psi \bar{\psi}$ ($\bar{\psi}$ es la compleja conjugada) y κ es la constante de acoplamiento con valor real.

En este trabajo consideramos la condición de frontera cuasi-periódica, donde ψ es una función suave que satisface:

$$\psi(x + 2L, t) = e^{i\theta} \psi(x, t). \quad (1.78)$$

donde θ esta dentro del intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ y θ no depende de t .

El dominio fundamental es:

$$-L \leq x < L. \quad (1.79)$$

En conjunto, la ecuación (1.76) con la condición de frontera (1.78), determina un sistema dinámico llamado *Modelo NLS*.

El paréntesis de Poisson, con esta condición de frontera dentro del dominio fundamental es [19, 23]:

$$\{F, G\} = i \int_{-L}^L \left(\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\psi}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} \right) dx. \quad (1.80)$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi(y)\} &= \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0, \\ \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= i \delta_{L,\theta}(x - y). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Donde $\delta_{L,\theta}(x)$ es la función delta promediada:

$$\delta_{L,\theta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta n} \delta(x - 2nL). \quad (1.82)$$

la cual satisface la condición de cuasi-periodicidad con respecto a x .

Aquí la ecuación NLS puede representarse en la forma Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \{H, \psi\} = -i\frac{\delta H}{\delta\psi}, \\ \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} &= \{H, \bar{\psi}\} = i\frac{\delta H}{\delta\bar{\psi}},\end{aligned}\tag{1.83}$$

y el Hamiltoniano está dado por la ecuación:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|^2 + \varkappa|\psi|^4 \right) dx.\tag{1.84}$$

1.4. Métodos numéricos más frecuentes para la solución de sistemas integrables

Existen diversos métodos numéricos para solucionar ecuaciones diferenciales que van desde los más básicos como el método de Euler, que es un método paso a paso basado en la serie de Taylor hasta los avanzados métodos Corrector-Predictor.

La desventaja de los métodos básicos es la presencia inherente del error de truncamiento, mientras que en los métodos más avanzados deben estar contenidos dentro de los rangos adecuados para evitar alguna posible divergencia.

Los métodos preferidos para sistemas integrables son:

- Runge-Kutta
- Extrapolación Richardson
- Métodos Predictor-Corrector (Adams-Bashford-Moulton, por ejemplo)

1.4.1. Runge-Kutta

Este método propaga una solución sobre un intervalo combinando la información desde algunos pasos al estilo del método Euler y después utilizando la información para acoplar una expansión en serie de Taylor hasta algún orden superior.

La fórmula para el método de Euler es:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).\tag{1.85}$$

la cual adelanta una solución desde x_n hasta x_{n+1} . Esta fórmula es antisimétrica: avanza con la solución a través de un intervalo h , pero usa la información de la derivada sólo al principio de ese intervalo. Esto significa que error del paso es únicamente una potencia menor de h que la corrección.

Ya hemos mencionado que el uso del método de Euler es impráctico, pero consideremos el uso del paso (1.85) para tomar un paso de “intento” hacia el punto medio del intervalo. Entonces se usa el valor tanto de x como de y en ese punto medio para calcular el paso “real” a través del intervalo principal, esto es:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 + O(h^3). \end{aligned} \tag{1.86}$$

Como se indica en el término de error $O(h^3)$, esta simetría cancela el término de error de primer orden, haciendo al método *de segundo orden*; de hecho, la ecuación (1.86) es llamada *Runge-Kutta de segundo orden* o método *Runge-Kutta del punto medio*.

Hay muchas maneras de evaluar el lado derecho (rhs, Right-Hand Side) de $f(x, y)$, todas de acuerdo al primer orden. Tienen diferentes coeficientes del término de error de órdenes superiores. Agregando la correcta combinación de ellos podemos eliminar los términos de error orden por orden: esta es la idea básica del método Runge-Kutta.

Por mucho, la fórmula más a menudo usada [5, 37, 53], incluso en la presente tesis se hace uso extensivo de ella, es la clásica *Fórmula Runge-Kutta de cuarto orden*:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5). \end{aligned} \tag{1.87}$$

Esta fórmula requiere cuatro evaluaciones del lado derecho por cada paso h .

1.4.2. Extrapolación Richardson

Este método usa la potente idea de extrapolar un resultado calculado a un valor que debería haberse obtenido si el tamaño del paso hubiera sido mucho más pequeño de lo que actualmente es. En particular, la extrapolación a un paso de tamaño cero es la meta deseada. El primer integrador de ODEs con esta idea implementada fue desarrollado por Burlisch y Stoer, por lo que a los métodos de interpolación también son llamados *métodos Burlisch-Stoer* [53].

Estos métodos no son para ecuaciones diferenciales que contengan funciones que no son suaves, pero la recompensa es que se obtiene una mayor exactitud que otros métodos. Las tres ideas clave del método Burlisch-Stoer son:

Primera.- La *postergada aproximación al límite de Richardson*. La idea es considerar la respuesta final de un cálculo numérico como si fuera en sí mismo, una función analítica de un parámetro ajustable como el tamaño de paso h . Esa función analítica puede ser probada ejecutando los cálculos con varios valores de h , ninguno de ellos siendo lo suficientemente pequeño para alcanzar la exactitud deseada. Cuando sabemos lo suficiente acerca de la función, la colocamos en alguna forma analítica y entonces la evaluamos en el punto $h = 0$.

Segunda.- Esta tiene que ver con la clase de función construida. Burlisch y Stoer reconocieron la fuerza de la *extrapolación de función racional*. Esta fuerza consiste en romper los grilletes de la serie de potencias y su radio limitado de convergencia hasta la distancia del primer polo del plano complejo. La construcción de funciones racionales siguen siendo buena aproximación a funciones analíticas aún después de que varios términos en una serie de potencias de h tengan magnitudes comparables. En otras palabras, h puede ser tan grande que la noción de “orden del método” pierda significado y el método siga funcionando excelentemente.

Tercera.- El uso de un método cuya función de error es estrictamente par, permitiendo la aproximación polinomial o de función racional debe ser en términos de la variable h^2 en lugar de únicamente h .

Un solo paso Burlisch-Stoer toma desde x hasta $x + H$, donde H se supone una distancia bastante grande. Un solo paso en un gran salto consistente de muchos (docenas, cientos) se subpasos del método de punto modificado, los cuales son después extrapolados al tamaño cero. La secuencia de intentos separados de cruzar el intervalo H se hace con valores crecientes de n , el número de subpasos:

$$n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, \dots, [n_j = 2n_{j-2}], \dots \quad (1.88)$$

Por supuesto que hay un límite superior. más allá del cual concluimos que hay un obstáculo para H , así que reducimos H más que dividirlo en pedazos más pequeños. Se sugiere en [53] tomar el máximo de 8. El octavo valor de la secuencia es 16 y esas serán las subdivisiones de nuestro intervalo H .

1.4.3. Corrector-Predictor

Los métodos Corrector-Predictor son una subcategoría particular de los métodos multipasos y multivalores.

El más popular de estos métodos es el llamado Método Adams-Bashford-Moulton (incluso en MATLAB se encuentra en la función ODE113), el cual tiene buenas propiedades de estabilidad.

La parte *Adams-Bashford* es el Predictor. Por ejemplo, para el caso de tercer orden es:

$$\text{Predictor:} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}) + O(h^4). \quad (1.89)$$

donde $y'_n = f(x_n, y_n)$.

Aquí la información en el punto actual x_n , junto con los dos puntos previos x_{n-1} y x_{n-2} (que se asume igualmente espaciados), es usado para predecir el valor y_{n+1} en el punto siguiente x_{n+1} .

La parte *Adams-Moulton* es el corrector. En el caso de tercer orden:

$$\text{Corrector:} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}) + O(h^4). \quad (1.90)$$

Sin el valor de prueba de y_{n+1} del *Predictor* insertado en el lado derecho, el *Corrector* sería una grotesca ecuación implícita de y_{n+1} .

Capítulo 2

Demostración de los límites espectrales para propagación

La ecuación no-lineal de Schrödinger (NLS) describe la propagación de la luz en medios tipo Kerr, tanto en dos coordenadas espaciales (cristales fotorrefractivos y otros materiales no-lineales), como en una coordenada espacial y una temporal (fibras ópticas). El problema con condiciones iniciales periódicas ha atraído la atención recientemente debido a sus posibles aplicaciones en líneas de fibra óptica de alta frecuencia, guías de onda no-lineales, conmutación, etcétera. Para esta discusión usaremos el lenguaje de la propagación espacial bidimensional (**2-D**), pero los resultados pueden ser fácilmente reformulados también para una coordenada espacial y una temporal.

Hay una solución formal de la NLS basada en el análisis del espectro del problema lineal asociado, el cual generalmente tiene un número infinito de bandas. Si el número de bandas es finito pueden construirse soluciones analíticas complicadas cuasi-periódicas [41]. No es claro cómo puede aplicarse este procedimiento en la práctica a un problema con condiciones iniciales dadas.

Por otro lado, la propagación de patrones periódicos en materiales no-lineales tipo Kerr a menudo pueden ser modelados considerando la interacción entre un número limitado de ordenes espectrales (de difracción) [36]. Físicamente, la interacción se produce por el haz de difracción sobre las rejillas dinámicas que él escribe en el material. Para el importante caso cuando el periodo del patrón es pequeño, la aproximación de Bragg-Kogelnik es, a menudo, suficiente para realizar los cálculos. En esta aproximación, la formación de más altos ordenes de difracción no ocurren, las intensidades de los ordenes se conservan y la interacción no-lineal se reduce a modificaciones de las velocidades de fase para haces que interactúan. Procesos tales como el auto-enfocamiento o el auto-desenfocamiento que conducen al enriquecimiento del espectro espacial armónico, evidentemente no pueden ser explicados dentro de esta aproximación, pero los cálculos numéricos demuestran que tomando en cuenta un número relativamente pequeño de ordenes (por ejemplo, 3, 4 o más) frecuentemente dan una descripción adecuada para una longitud limitada de propa-

gación. En el artículo de Thyagaraja [62], motivado por los primeros resultados numéricos en el contexto de la dinámica de fluidos, fue demostrado que para la intensidad del k -ésimo orden de difracción $|\psi_k|^2$, $|\psi_k|^2 < C_2/|k|^2$ con C_2 como constante de propagación independiente de la longitud. Esta estimación asegura sólo una disminución un tanto lenta de los extremos del espectro y, como se demostró usando cálculos numéricos en [43], sobreestima fuertemente el número de órdenes necesarios para adecuar la descripción.

Considerando integrales de movimiento de más alto índice, refinamos los resultados de Thyagaraja. Demostramos que para un espectro inicial angosto $|\psi_k|^2 < C_n/|k|^n$ para cualquier n constantes independientes de la longitud C_n . Para pequeña no-linealidad (tanto positiva como negativa) probamos adicionalmente que órdenes de difracción inicialmente fuertes siempre permanecen fuertes durante la propagación, esto es, sólo una pequeña parte de su intensidad inicial se transfiere a órdenes de difracción más altos.

La NLS con condiciones iniciales periódicas suaves es esencialmente finito-dimensional. Sólo un número limitado de armónicos puede ser tomado en cuenta para obtener una descripción generalmente adecuada de la propagación. Las trayectorias caen predominantemente en toroides n -dimensionales dentro de un espacio de fase de $2N$, con un número N determinado por las condiciones iniciales y la cantidad de no-linealidad. El resto de los armónicos produce un pequeño “jitter”¹ en un espacio de fase que modifica ligeramente la forma de los toroides invariantes y las frecuencias angulares características. Esta característica notable se debe a la estructura un tanto especial de la NLS la cual admite un conjunto infinito de leyes de conservación.

2.1. La matriz de monodromía y las leyes de conservación

Aquí se reproducen algunos resultados conocidos sobre la matriz monodrómica y las leyes de conservación que son necesarias para el resto de este capítulo. Se sigue muy cercanamente el Capítulo 1 del libro de Takhtajan y Faddeev [19], y usamos su notación.

La NLS se escribe de la forma:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\kappa|\psi|^2\psi. \quad (2.1)$$

La función de onda compleja ψ es periódica en x , $\psi(x + 2L, t) = \psi(x, t)$. Atribuimos a t el significado de coordenada espacial de propagación. La constante κ es positiva para cuando existe auto-desenfocamiento y negativa para el auto-enfocamiento.

¹En telecomunicaciones, jitter es una variación no deseada y abrupta de una o más señales características como el intervalo entre pulsos sucesivos, la amplitud de ciclos sucesivos o la frecuencia o fase de ciclos sucesivos [RE6].

El problema lineal asociado se escribe como:

$$\frac{\partial F(x, t, \lambda)}{\partial x} = U(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda), \quad (2.2)$$

con una función vectorial de dos componentes F . Aquí λ es un parámetro espectral y la matriz U es:

$$U(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2i} & \sqrt{\varkappa} \bar{\psi}(x, t) \\ \sqrt{\varkappa} \psi(x, t) & -\frac{\lambda}{2i} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Aquí $\bar{\psi}$ es la compleja conjugada de ψ . Para la raíz cuadrada, el valor positivo se toma para $\varkappa > 0$, y el valor con parte imaginaria positiva es para $\varkappa < 0$.

La matriz monodrómica T_L se presenta como la matriz que da el cambio para la solución al problema asociado sobre el periodo x , así que $F(L, t, \lambda) = T_L(t, \lambda)F(-L, t, \lambda)$.

La matriz monodrómica T_L puede encontrarse formalmente con una solución de la ecuación integral del tipo Fredholm:

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \int_y^x E(x - z, \lambda) U_0(z) T(z, y, \lambda) dz, \quad (2.4)$$

donde

$$E(x - y, \lambda) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{\lambda}{2i}(x - y)) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{\lambda}{2i}(x - y)) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

y

$$U_0(z) = \sqrt{\varkappa} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}(z) \\ \psi(z) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

entonces $T_L(\lambda) = T(L, -L, \lambda)$ y omitimos la dependencia de t .

Puede mostrarse que $\text{tr}(T_L(\lambda))$ para cualquier λ es una cantidad conservada, esto es, si la evolución en t de ψ puede describirse por la NLS, el trazo de la matriz monodrómica permanece igual. Esto permite encontrar un conjunto de cantidades conservadas calculando el trazo para parámetros espectrales reales grandes. Nominalmente:

$$\text{tr}(T_L(\lambda)) \approx 2 \cos \left(-\lambda L + \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda^{-\infty}|) \right). \quad (2.7)$$

Como $\text{tr}(T_L)$ es una cantidad conservada, los coeficientes reales I_n se conservan sobre la propagación. Esas cantidades se encontraron primero en [68] y constituyen el clásico conjunto de integrales de movimiento para la NLS. Estas pueden ser expresadas como integrales de $\psi, \bar{\psi}$, y sus derivadas en x . Nominalmente,

$$I_n = \int_{-L}^L P_n(x) dx, \quad (2.8)$$

con

$$P_1 = \psi(x)\bar{\psi}(x), \quad (2.9)$$

$$P_{n+1} = -i\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_n}{\bar{\psi}}\right) + \varkappa\sum_{k=1}^{n-1}P_kP_{n-k}. \quad (2.10)$$

Necesitamos que algunas de esas integrales sean escritas explícitamente. Algunos de sus términos son modificados de la expresión anterior con integración por partes (ver también [68]). La intensidad I_1 es

$$I_1 = \int_{-L}^L |\psi|^2 dx = 2LI, \quad (2.11)$$

e introducimos la intensidad promedio I .

El Hamiltoniano I_3 es

$$I_3 = \int_{-L}^L (|\psi_x|^2 + \varkappa|\psi|^4) dx. \quad (2.12)$$

La quinta integral es

$$I_5 = \int_{-L}^L \left(|\psi_{xx}|^2 + \varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2\right)^2 + 6\varkappa|\psi_x|^2|\psi|^2 + 2\varkappa^2|\psi|^6 \right) dx. \quad (2.13)$$

2.2. Estimaciones para intensidades de los órdenes de difracción

Nuestro objetivo es establecer límites para el espectro coordinado espacial transversal de la función de onda ψ

$$\psi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikKx)\psi_k(t), \quad (2.14)$$

donde k es entero, y $K = \pi/L$ es un vector de onda.

Para \varkappa positiva correspondiente al auto-desenfocamiento, es posible una estimación simple. Ambos términos en I_3 , ecuación (2.12) son, entonces, positivos; esto significa que

$$\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx = 2LK^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\psi_k(t)|^2 \leq I_3, \quad (2.15)$$

entonces

$$|\psi_k(t)|^2 \leq \frac{I_3}{2LK^2k^2}. \quad (2.16)$$

El mismo argumento trabaja también para I_5 , dando la estimación con k^{-4} . Sin embargo, falla para I_7 donde el término proporcional para \varkappa puede ser negativo para algunas funciones.

Hay un procedimiento más elaborado el cual permite una estimación independiente de t , que no tiene relación con el signo de la no-linealidad y da un decrecimiento más rápido que cualquier potencia de k . Demostramos este procedimiento primero para I_3 . Presentamos

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x |\psi(z)|^2 dz. \quad (2.17)$$

El punto x_0 se escoge para que corresponda al mínimo de $|\psi(x)|^2$.

Entonces

$$|\psi(x_0)|^2 \leq I \quad (2.18)$$

y

$$0 \leq \Phi(x) \leq 2LI \quad (2.19)$$

para

$$x_0 \leq x \leq x_0 + 2L \quad (2.20)$$

La segunda integral en la ecuación (2.12) puede reescribirse como:

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} |\psi|^4 dx = \Phi |\psi|^2 \Big|_{x_0}^{x_0+2L} - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi_x \bar{\psi} dx - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi \bar{\psi}_x dx. \quad (2.21)$$

El primer término en la ecuación (2.21) no excede $2LI^2$. Para estimar el valor absoluto de los próximos dos términos usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\left| \int_{-L}^L f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \int_{-L}^L |g(x)|^2 dx. \quad (2.22)$$

Entonces

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi_x \bar{\psi} dx \right| \leq \sqrt{\int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi^2 |\psi|^2 dx} \sqrt{\int_{x_0}^{x_0+2L} |\psi_x|^2 dx} \leq (2LI)^{3/2} \sqrt{\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx}. \quad (2.23)$$

Aquí hemos usado el límite superior para Φ y la conservación de la intensidad. La misma estimación se obtiene para el tercer término en la ecuación(2.21). Ahora se ve

que el límite superior para el primer término en I_3 existe, porque si el primer término es grande, el segundo es proporcional a su raíz cuadrada. La estimación uniforme puede obtenerse mediante:

$$\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx \leq \left(\sqrt{I_3 + |\varkappa| 2LI^2 + |\varkappa|^2 (2LI)^3 + |\varkappa| (2LI)^{3/2}} \right)^2 = A_1^2. \quad (2.24)$$

Entonces, para fuerte no-linealidad auto-enfocante, tomando en cuenta sólo los términos principales en la ecuación(2.24),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_k|^2}{I} k^2 \lesssim \frac{\nu^2}{\pi^2}, \quad (2.25)$$

donde el parámetro de no-linealidad sin dimensiones $\nu = \varkappa I (2L)^2$ describe la cantidad de no-linealidad. Esto significa que el ancho espectral típico es proporcional a $|\nu|$. Para fuerte no-linealidad auto-desenfocante, el ancho, como sigue de la ecuación (2.16), es proporcional a $\sqrt{|\nu|}$. Entonces, la no-linealidad auto-enfocante produce una mayor anchura en el espectro en comparación con la auto-desenfocante. Esto se esperaba, pues para el auto-enfocamiento existe una inestabilidad de la modulación, la cual está ausente de otra manera. La ecuación(2.24) se obtuvo primero en [62].

El lado izquierdo de la ecuación (2.21), como sigue de las ecuaciones (2.23, 2.24) está limitado por $Q_1 = 2LI^2 + 2(2LI)^{3/2}A_1$. Entonces, similarmente a la derivación para I_3 , de la conservación de I_5 se sigue que

$$\int_{-L}^L |\psi_{xx}|^2 dx \leq I_5 + 10 |\varkappa| (A_1^2 I + 2A_1^3 I^{1/2}) + 2 |\varkappa|^2 (Q_1 I + 2A_1 Q_1 I^{1/2}). \quad (2.26)$$

Por inducción podemos mostrar que todos los términos para integrales más altas también están limitados. La prueba para I_5 y el procedimiento para integrales más altas está dado en el Apéndice B.

2.3. Integrales de movimiento relacionadas con el orden de difracción

Los resultados de la sección previa demuestran que hay una estimación uniforme para las amplitudes de los órdenes de difracción con un decrecimiento para k grande más rápido que cualquier potencia negativa de $|k|$. Esto indica que hay una estimación exponencial $|\psi_k|^2 < C \exp(-\alpha |k|)$ con constantes C y α determinadas por las condiciones iniciales y \varkappa .

Estimando el ancho de la distribución exponencial y comparándola con las ecuaciones (2.16, 2.25) para ν grande, se ve que α se escala aproximadamente como $|\nu|^{-1}$ para no-linealidad auto-enfocante, y como $|\nu|^{-1/2}$ para auto-desenfocante.

Esto es, para una cantidad de no-linealidad dada y un espectro inicial angosto, sólo es importante un número finito N de los más bajos armónicos de Fourier, cualquiera que sea la longitud de propagación. Los órdenes de difracción más altos introducen perturbación uniformemente pequeña. Debido a que se sabe que la NLS es completamente integrable, las soluciones son restringidas aproximadamente a unos toroides N -dimensionales en el espacio de fase de $2N$ -dimension de N amplitudes complejas. La forma de los toroides está determinada por las leyes de la conservación. Podemos utilizar las N primeras integrales de Zakharov-Shabat para este propósito, sin embargo, presentaremos otro conjunto de leyes de conservación, las cuales tienen una estructura mucho más simple para no-linealidad pequeña. Estas se obtienen con iteraciones estándar de la ecuación integral del tipo Fredholm (2.4) para un conjunto discreto finito de valores especiales de λ , $\lambda_k = \frac{k\pi}{L}$.

Cuando introducimos

$$\mu_k(z) = \exp(-i\lambda_k z)\psi(z), \quad (2.27)$$

el trazo de la matriz monodrómica es

$$\text{tr}(T_L(\lambda_k)) = J_k = (-1)^k 2\text{Re}[1 + G_1 + G_2 + \dots] \quad (2.28)$$

con

$$G_1 = \varkappa \int_{-L}^L dz \overline{\mu_k}(z) \int_{-L}^z dz' \mu_k(z'), \quad (2.29)$$

$$G_2 = \varkappa^2 \int_{-L}^L dz \overline{\mu_k}(z) \int_{-L}^z dz' \mu_k(z') \int_{-L}^{z'} dz'' \overline{\mu_k}(z'') \int_{-L}^{z''} dz''' \mu_k(z'''), \quad (2.30)$$

y así en adelante.

Con la función $f(z) = \int_{-L}^z dz' \mu_k(z')$, e integrando la ecuación (2.29) por partes, es fácil mostrar que

$$\text{Re}(G_1) = 2\varkappa L^2 |\psi_k|^2 \quad (2.31)$$

Por lo tanto, para no-linealidad pequeña, las cantidades conservadas son simplemente intensidades de órdenes de difracción que corresponden a la propagación lineal, las $G_1 + G_2 + \dots$ pueden ser considerados como un módulo al cuadrado del k -ésimo armónico de Fourier generalizado, el cual es conservado para el caso no-lineal. A diferencia del caso lineal, $G_1 + G_2 + \dots$ no disminuyen exponencialmente con $k \rightarrow \infty$ para datos iniciales suaves.

Por comparación con la expresión asintótica, ecuación (2.7), se ve que esta suma se comporta como $-\varkappa^2 I_1^2 L^2 / 2(k\pi)^2$. Para obtener el conjunto que disminuye exponencialmente para $k \rightarrow \infty$, podemos restar los términos de la ecuación (2.7) que se comportan

como $\frac{1}{k^n}$ para todo n . Después de esto, el término $O(|k|^{-\infty})$ permanece, debido a las series en la ecuación (2.7) son asintóticas y no exactas. El ejemplo de la función constante $\psi(x) = \text{const}$, para la cual la matriz monodrómica puede ser encontrada analíticamente, demuestra que este procedimiento puede trabajar únicamente para k suficientemente grande; de otra manera, las series de la ecuación (2.7) no convergen.

Si está expresado en armónicos de Fourier, G_2 incluye combinaciones del tipo

$$\bar{\psi}_{k_1} \psi_{k_2} \bar{\psi}_{k_3} \psi_{k_4} \quad (2.32)$$

las cuales son resonantes, esto es, para obtener contribución no-cero es necesario que

$$-a_1 k_1 + a_2 k_2 - a_3 k_3 + a_4 k_4 = a_5 k \quad (2.33)$$

con

$$a_1 \dots a_4 = 0, 1 \quad \text{y} \quad a_5 \text{ entero} \quad (2.34)$$

La ecuación explícita para este coeficiente es complicada debido a que hay muchas posibles combinaciones resonantes de diferentes tipos.

La convergencia de las series de la ecuación (2.28) se sigue de la teoría de las ecuaciones integrales. La prueba común [19] incluye estimación con el máximo valor de $|\psi|$. Es posible estimar los términos usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz también (ver apéndice C). En este caso, tenemos

$$|G_n| \leq \frac{|\nu|^n}{\sqrt{(2n)!}}. \quad (2.35)$$

Esto prueba la convergencia, como se hace usualmente, pero la estimación se hace con la intensidad promedio la cual, a diferencia del valor máximo de $|\psi|$, es independiente de la propagación.

De la estimación para G_2 y la ecuación (2.31) se sigue que si inicialmente tenemos

$$\frac{|\psi_k|^2}{I} \gg \frac{|\nu|}{\sqrt{6}} \quad (2.36)$$

el k -ésimo orden conserva su identidad porque la suma de los términos subsecuentes para J_k serán más pequeños que G_1 . Por lo tanto, si inicialmente el orden es fuerte y la no-linealidad, como se determina por el parámetro ν es pequeña, la amplitud evoluciona en un anillo característico en un plano de fase (ver figura 2.2 para una ilustración numérica). Si el parámetro de no-linealidad ν es grande, los órdenes inicialmente fuertes pierden su identidad y el anillo se vuelve un círculo. En este caso, permanece un número finito de órdenes fuertes, pero su número es más grande que el número de órdenes que eran fuertes inicialmente.

2.4. Ilustraciones numéricas

Para determinar la forma del espectro cuando el número de armónicos en él está limitado inicialmente, hemos realizado cálculos numéricos de la propagación para las condiciones iniciales dadas por los armónicos 2-4 más bajos de Fourier con fases y amplitudes tomadas aleatoriamente.

El conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtuvo de la ecuación NLS representando a ψ como una serie de Fourier, ecuación (2.14). Después de sustituir las series dentro de la ecuación NLS y forzando todos los armónicos superiores a cero, se obtiene el conjunto de N ecuaciones diferenciales en N variables, similar, por ejemplo, a [36]. Para obtener una solución numérica más eficiente compensamos la parte lineal de la propagación por el ansatz²

$$\psi_k(t) = \psi_{l_k}(t) \exp(-ik^2 K^2 t) \quad (2.37)$$

Para investigar la disminución de la intensidad con el número de orden de difracción, dibujamos su valor máximo a lo largo del camino de propagación para todos los armónicos involucrados. Se consideraron diferentes longitudes de propagación. Para las condiciones iniciales investigadas las gráficas se ven muy similares. El resultado típico es presentado en la figura 2.1. Los dibujos muestran una disminución exponencial progresiva con una pendiente relacionada con las condiciones iniciales y la cantidad de no-linealidad. Como una función de la longitud de propagación, hay una saturación pronunciada, de hecho, los puntos para longitudes de $l = 10^3$ y 10^4 son indistinguibles en la gráfica. La diferencia en logaritmos para el armónico más alto es 0.004. El valor escogido para no-linealidad auto-enfocante está casi en una región de inestabilidad de modulación.

Para parámetro un no muy pequeño de no-linealidad ($4 < |\nu| < 40$) la pendiente de la disminución exponencial en la figura (2.1) se escala bien a $|\nu|^{-1}$. Para ν grande, el número de órdenes necesario para tomar en cuenta crece, lo que hace que el cálculo sea más difícil. Para no-linealidad negativa en la misma cantidad, la pendiente es más grande que para no-linealidad positiva y disminuye más o menos proporcional a $|\nu|^{-1/2}$, aunque la correspondencia es peor que en el caso de auto-enfocamiento.

En la figura 2.2 mostramos la evolución en el plano complejo para el orden fuerte a una no-linealidad moderada. Se ve que la intensidad del orden bajo propagación varía sólo en ciertos límites, de acuerdo a la teoría presentada anteriormente. La ecuación (2.36) se ve que subestima el valor de ν necesario para la destrucción del orden en aproximadamente un orden de magnitud. Es posible, entonces, que otras configuraciones de haces conduzcan a valores más cercanos.

²Un ansatz[RE7] es una forma asumida para una función matemática que no está basada en alguna teoría o principio implícitos.

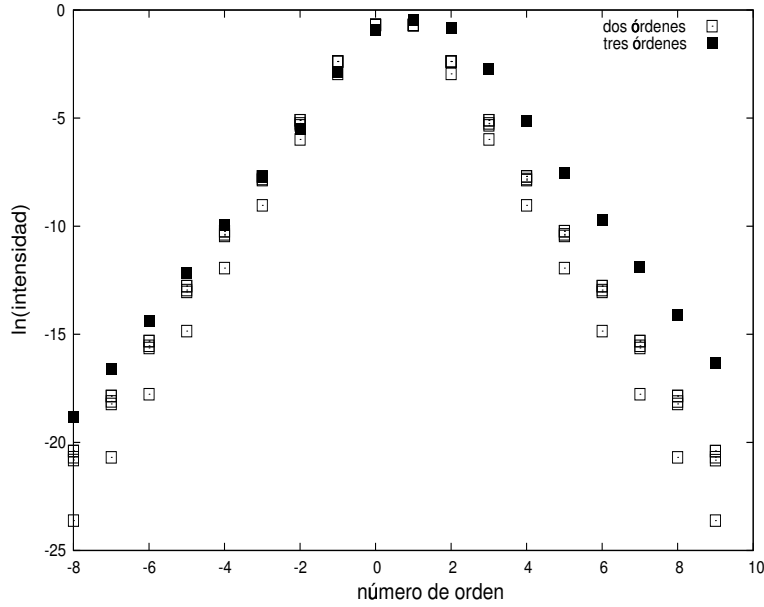


FIGURA 2.1: Cuadrados abiertos - Intensidad máxima en el k -ésimo orden de difracción a lo largo de las distancias de propagación 1, 10, 100, 1000, y 10000 (Trazos del más bajo al más alto). Se toman inicialmente el 0-ésimo y el 1-er órdenes de difracción con amplitudes iguales $(\frac{1}{2})^{1/2}$. Cuadrados sólidos - inicialmente hay 3 órdenes, el 0-ésimo y el 1-ero con amplitudes iguales $(0.8)(\frac{1}{2})^{1/2}$, el 2-ndo orden $0.6i$, longitud de propagación 1000. Para ambos casos $K = 1, \varkappa = -0.3, \nu = -1.2\pi^2$.

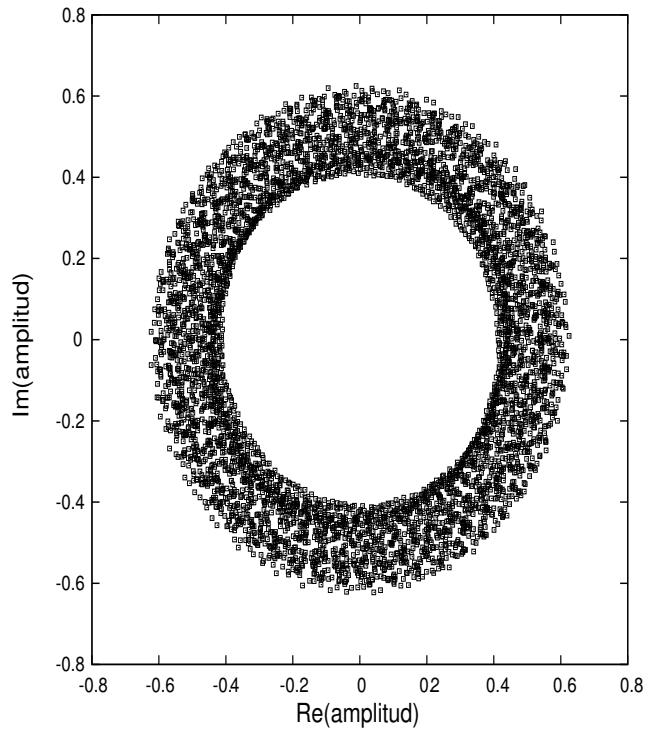


FIGURA 2.2: La evolución del 0-ésimo orden en el plano de fase para una longitud de propagación de 500. Los puntos se tomaron cada 0.1 a lo largo de la distancia de propagación. Las amplitudes iniciales de los órdenes son: el 0-ésimo y el 1-ro con amplitudes iguales $(0.8) \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$, el 2-ndo orden $0.6i$, $K = 1$, $\varkappa = -0.3$, $\nu = -1.2\pi^2$.

Capítulo 3

El caso de Ondas cnoidales como interacción de un número finito de modos

3.1. Dispersión

La señal óptica puede tener diversas causas de atenuación dentro de una guía de onda. Una de las más importantes causas es la *dispersión*, la cual puede explicarse examinando el comportamiento de la velocidad de grupo.

Existen dos causas principales de dispersión:

Dispersión material: Surge de la variación del índice de refracción del material como una función de la longitud de onda¹. Esto causa una dependencia de la longitud de onda de la velocidad de grupo de cualquier modo dado, esto es, el ensanchamiento del pulso ocurre aún cuando diferentes longitudes de onda sigan los mismos caminos.

Dispersión de Guía de onda: Ocurre cuando la velocidad de una onda dentro de una guía de onda depende de su frecuencia.

3.1.1. Dispersión Material

Cuando una onda electromagnética interactúa con los electrones en la frontera de un dieléctrico, en general la respuesta del medio depende de una frecuencia óptica ω .

Como consecuencia, la velocidad de grupo V_g es una función del índice de refracción $n(\omega)$.

¹A veces se le llama “dispersión cromática” o “dispersión espectral”. Es la que ocurre en la separación de colores en un prisma

Para calcular la dispersión material inducida se considera una onda plana cuya constante de propagación es:

$$\beta = \frac{2\pi n(\lambda)}{\lambda} \quad (3.1)$$

La velocidad de grupo se desarrolla como $V_g = \beta^{-1}$
Quedando, finalmente como una dispersión de:

$$D_{mat} \simeq -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \quad (3.2)$$

3.1.2. Fibra de dispersión controlada (DMF)

La dispersión es una de las principales limitaciones de los sistemas de telecomunicación por fibras ópticas.

La velocidad de grupo es considerada a menudo como la velocidad a la cual se transporta la energía o la información a lo largo de la onda. En muchos casos resulta cierto y en ese caso, la velocidad de grupo puede considerarse la velocidad de la señal de la forma de onda.

La velocidad de grupo generalmente es una función de la frecuencia de la onda. Esto resulta en una *Dispersión de Velocidad de Grupo*, GVD^2 la cual causa que un pulso de luz angosto se ensanche en el tiempo como resultado de los diferentes componentes de frecuencia del pulso viajando a diferentes velocidades. LA GVD es cuantificada a menudo como el parámetro de dispersión de retardo de grupo D (ecuación (3.2)).

Si D es menor que cero, se dice que el medio tiene dispersión positiva; si D es mayor que cero, el medio tiene dispersión negativa. Si un pulso de luz se propaga a través de un medio normalmente dispersivo, el resultado es que los componentes de frecuencia más altos viajan más lentamente que los componentes más bajos, incrementando la frecuencia con el tiempo (chirped³ positivamente), lo que se conoce como *up-chirped*. Inversamente, si el pulso de luz viaja a través de un medio con dispersión anómala, los componentes de alta frecuencia viajan más rápido que los componentes de baja frecuencia y decrece la frecuencia en el tiempo(chirped negativamente), los que se conoce como *down-chirped*

El resultado de la GVD, ya sea positiva o negativa es el ensanchamiento temporal del pulso, lo que hace que el control de la dispersión sea extremadamente importante en sistemas de comunicación basados en fibras ópticas, ya que si la dispersión es muy alta un grupo de pulsos representando un conjunto de bits se ensancharán en el tiempo y emergerán unidos volviendo al conjunto de bits ininteligible. Esto limita la longitud de una fibra en la que puede enviarse una señal sin regeneración. Una posible respuesta a este problema es enviar señales que tengan una GVD igual a cero, por ejemplo en fibras

²Group Velocity Dispersion

³Un *chirp* es una señal en la cual la frecuencia aumenta o disminuye

de silicio de $1.3\mu m$ a $1.5\mu m$, así, los pulsos a esta longitud de onda sufren un mínimo ensanchamiento por dispersión. En la práctica, sin embargo, esto causa más problemas que los que resuelve; la GVD cero incrementa inaceptablemente la amplificación de otros efectos no-lineales

Otra posible opción es el uso de solitones en el régimen de dispersión anómala, pero tiene el problema práctico de que un solitón requiere de cierto nivel de potencia para que conserve la intensidad correcta.

La solución que corrientemente se usa en la práctica es controlando la dispersión realizando la compensación de la dispersión acoplado una fibra con otra de dispersión de signo opuesto para cancelar el efecto de la dispersión; tal compensación es a la larga limitada por los efectos no lineales tales como la automodulación de fase, la cual interactúa con la dispersión de tal modo que es muy difícil de quitar, este método recibe el nombre de Fibra de Dispersión Controlada, DMF⁴

3.2. Ondas cnoidales

La propagación de paquetes de ondas en medios no-lineales con variación periódica de la dispersión o índice de refracción es uno de los problemas fundamentales de la fotónica moderna. Importantes aplicaciones como la transmisión de pulsos ópticos en enlaces de fibra de Dispersión Controlada⁵ [26, 47]; la generación de pulso estrecho en sistemas láser en modo asegurado y en lazos de fibra recirculadora [27, 45]; la evolución de haces cuasi-solitón en una guía de onda no-lineal periódicamente modulada [9, 63], entre otros, podrían ser mencionados como ejemplos.

Ha habido un rápido progreso en esta área desde el punto de vista teórico durante los últimos años. Se han desarrollado métodos efectivos como el concepto de guiado central, diferentes aproximaciones variacionales, la teoría multiescala y el método de promediado numérico [26, 14]. Solitones oscuros, grises y antisimétricos se han encontrado recientemente en estructuras DM [16, 50, 2]. Secuencias de solitones DM pueden ser usados efectivamente para transmisión de datos gracias al mejoramiento en la robustez. Más aún, la interacción entre solitones DM fuertemente suprimida bajo condiciones apropiadas [42, 67].

Recientemente, fueron consideradas propiedades básicas de ondas no-lineales doble-periódicas en sistemas de dispersión controlada (tipos cn-, dn- y sn-) [31]. Se mostró que en el límite de localización fuerte la energía de la onda elíptica pulsante se comporta mejor que la de la onda clásica con una dispersión promedio constante. También se demostró la posibilidad de estabilización de ondas elípticas en fibras DM.

Nuestra atención se enfoca en los casos de localización débil y moderada que tienen

⁴Dispersion Managed Fiber

⁵En inglés, Dispersion Management, por lo que en el resto de este documento, usaremos las iniciales DM

esencialmente nuevas características en comparación con la propagación de solitones. El análisis está basado en el concepto de onda elíptica truncada que muestra su representación por una suma finita de armónicos con coeficientes especialmente ajustados. Una aproximación similar se usó en el estudio de la inestabilidad de modulación [28, 64]. Para localización débil este procedimiento ofrece una aproximación aceptable, la cual, siempre puede ser revisada incrementando el número de armónicos.

Fijando la dispersión promedio, la diferencia de dispersión e incrementando el periodo del mapeo, mostramos cómo la dispersión regular es reemplazada por el comportamiento caótico. El crecimiento del periodo de mapeo conduce a la aparición de regiones con comportamiento caótico en el espacio de fase coexistente con las regiones de comportamiento cuasi-periódico. La vecindad cercana de un punto de mapeo correspondiente a la onda cnoidal truncada puede permanecer neutralmente estable, pero pequeñas perturbaciones mueven a la solución a la región caótica. La DM en gran escala (cuando el periodo del mapa de dispersión es comparable con el periodo longitudinal de la onda cnoidal) conduce a caos KAM determinístico aún en el caso de la dimensionalidad más baja del espacio de fase [7]. Nótese que el escenario de transición hacia el caos tiene mucho en común con el caos de polarización en resonadores no-lineales birefringentes [35].

3.3. Modelo matemático y parámetros del sistema

Usamos el tipo (1+1)D de la ecuación de Schrödinger para la fibra óptica no-lineal sin pérdidas modificada para incluir dispersión de la velocidad de grupo variando longitudinalmente $d(\xi)$:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{d(\xi)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + |q|^2 q = 0, \quad (3.3)$$

En esta ecuación⁶

$$q(\eta, \xi) = \left(\frac{L_{dis}}{L_{spm}} \right)^{1/2} I_0^{-1/2} A(\eta, \xi). \quad (3.4)$$

es la amplitud compleja normalizada; $A(\eta, \xi)$ es la envoltura que varía lentamente; I_0 es la intensidad pico de entrada;

$$\eta = \frac{\frac{t-z}{u_{gr}}}{\tau_0}. \quad (3.5)$$

es el tiempo de evolución; τ_0 es escala de tiempo característica;

$$u_{gr} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}^{-1}. \quad (3.6)$$

⁶El subíndice *dis* se usa para la dispersión y el *spm* para la automodulación de fase (por las siglas de Self Phase Modulation)

es la velocidad de grupo; $k_0 = k(\omega_0)$ es el número de onda ; ω_0 es la frecuencia portadora; $\xi = \frac{z}{L_{dis}}$ es la distancia de propagación normalizada;

$$L_{dis} = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}. \quad (3.7)$$

es la longitud de dispersión; el coeficiente

$$\beta_2 = \frac{d^2k}{d\omega^2}_{\omega=\omega_0}. \quad (3.8)$$

está definido por la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) para una fibra de comunicaciones estándar;

$$L_{spm} = \frac{2c}{\omega_0 n_2 I_0}. \quad (3.9)$$

es la longitud de auto-modulación de fase; n_2 es el coeficiente de no-linealidad.

El coeficiente de normalización en la ecuación (3.3) para un periodo del mapa de dispersión simétrico de dos pasos es introducido por las relaciones;

$$\begin{aligned} d(\xi) &= d_0, & 0 < \xi < aL \\ d(\xi) &= -d_0, & aL < \xi < (a+b)L \\ d(\xi) &= d_0, & (a+b)L < \xi < (2a+b)L \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aquí $L_0 = (2a+b)L$ es el periodo del mapa de dispersión, $d_0 > 0$ es la mitad de la diferencia de dispersión, a, b son parámetros positivos. La dispersión promedio está dada por $d_{av} = (2a-b)/(2a+b)d_0$, y L es la longitud característica. Nótese que el primer segmento con GVD anómala (enfocamiento) está seguido por un segmento con GVD normal (desenfocamiento) y terminado con un segmento con la GVD anómala.

Dos soluciones específicas de doble periodo de la ecuación (3.3) se conocen para la GVD anómala $d(\xi) = d_{av} > 0$ en forma de ondas elípticas dn- y cn-

$$q_{dn}(\eta, \xi) = \kappa |d_{av}|^{-1/2} dn(\kappa\eta; m) \exp \left[i\kappa^2 \left(1 - \frac{m^2}{2} \right) \xi + i\psi_0 \right] \quad (3.11)$$

$$q_{cn}(\eta, \xi) = m\kappa |d_{av}|^{-1/2} cn(\kappa\eta; m) \exp \left[i\kappa^2 \left(m^2 - \frac{1}{2} \right) \xi + i\psi_0 \right], \quad (3.12)$$

y una solución estacionaria periódica para dispersión constante normal $d(\xi) = d_{av} < 0$:

$$q_{sn}(\eta, \xi) = m\kappa |d_{av}|^{-1/2} sn(\kappa\eta; m) \exp \left[\frac{i\kappa^2(1+m^2)\xi}{2} + i\psi_0 \right]. \quad (3.13)$$

Aquí $cn(\eta, \xi)$, $sn(\eta, \xi)$ y $dn(\eta, \xi)$ son funciones elípticas de Jacobi; $0 \leq m \leq 1$ es el módulo de la función elíptica que describe el grado de localización de la energía del campo de onda; $\kappa > 0$ es un factor de forma arbitrario; ψ_0 es la constante de fase. El periodo transversal de la onda-dn es igual a $l_{dn} = \frac{2K(m)}{\kappa}$, donde $K(m)$ es la integral elíptica de primera clase, mientras que los periodos transversales de las ondas cn- y sn- son iguales a $l_{cn} = l_{sn} = \frac{4K(m)}{\kappa}$. Es importante mencionar que las soluciones analíticas dadas por las ecuaciones (3.11 - 3.13) son un buen supuesto inicial para el cálculo del perfil de la verdadera onda elíptica pulsante por el método del promedio numérico [45, 14]. Las series trigonométricas para funciones elípticas son bien conocidas:

$$\begin{aligned} dn(\eta; m) &= \pi l_{dn}^{-1} + 4\pi l_{dn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (1 + \rho^{2n})^{-1} \cos \left[\frac{2\pi n \eta}{l_{dn}} \right], \\ cn(\eta; m) &= 8\pi l_{cn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1/2} (1 + \rho^{2n-1})^{-1} \cos \left[\frac{2\pi(2n-1)\eta}{l_{cn}} \right], \\ sn(\eta; m) &= 8\pi l_{sn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1/2} (1 - \rho^{2n-1})^{-1} \sin \left[\frac{2\pi(2n-1)\eta}{l_{sn}} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

y ρ es:

$$\rho = \exp \left[\frac{-\pi K(\sqrt{1-m^2})}{K(m)} \right]. \quad (3.15)$$

En el límite de la localización débil $m \rightarrow 0$, $K(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $K(\sqrt{1-m^2}) \rightarrow \infty$, y sólo unas cuantos términos son suficientes para adecuar la representación de las correspondientes funciones elípticas.

En general, la forma compleja de la onda elíptica truncada puede escribirse como:

$$q_{el}(\eta, \xi) = \sum_{n=-N}^{n=N} S_n(\xi) \exp(i\Omega_n \eta), \quad (3.16)$$

donde $S_n(\xi)$ son las amplitudes de los armónicos; la suma se toma sobre las frecuencias apropiadas dadas por las ecuaciones (3.14). Para nuestra normalización, la más pequeña Ω_n diferente de cero es de orden unitario.

Sustituyendo la ecuación (3.16) en la ecuación (3.3), es posible obtener el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la forma del Hamiltoniano:

$$i \frac{\partial S_n}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial S_n^*}. \quad (3.17)$$

y el Hamiltoniano está dado por:

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{S}^*, \xi) = \frac{d(\xi)}{2} \sum_n \Omega_n^2 S_n S_n^* - \frac{1}{2} \sum_{l_1+l_2=l_3+l_4} S_{l_1} S_{l_2} S_{l_3}^* S_{l_4}^*, \quad (3.18)$$

donde cada índice l toma cualquier valor posible de n .

Intuitivamente es claro que la solución del conjunto truncado de ecuaciones es adecuado si la contribución de los armónicos más altos en la solución de la ecuación completa permanece pequeña sobre la propagación. Esto es verdad para ondas cnoidales estacionarias, donde las amplitudes de los armónicos permanecen igual, entonces los armónicos más altos no crecen. De hecho, las soluciones de las ecuaciones truncadas que se aproximan a las ondas cnoidales pueden encontrarse de manera un tanto fácil. Estas ecuaciones corresponden al mínimo hamiltoniano en la esfera de intensidad constante $I = \sum S_n S_n^* = \text{const}$.

Si restringimos el procedimiento de minimización a amplitudes reales, los valores resultantes coinciden muy bien con los coeficientes de Fourier de la expansión de la onda cnoidal, ecuación (3.14), con el mismo periodo y la misma intensidad si el número de armónicos es suficiente para representar bien la onda cnoidal con esos parámetros. Llamaremos a esas soluciones *ondas elípticas truncadas*. Las ondas elípticas truncadas tipo-dn se obtienen si el número de armónicos es impar; se obtienen ondas cn- y sn- si el número de armónicos es par, dependiendo de la simetría/antisimetría de los coeficientes. Las ondas cnoidales truncadas son neutralmente estables, pequeñas variaciones de las amplitudes iniciales producen un pequeño *jitter* alrededor de la trayectoria de la ondas cnoidal en el espacio de fase. Esto es consecuencia de la integrabilidad compleja de la ecuación NLS - la solución se mueve a la toroide invariante cercana.

3.4. Ondas elípticas truncadas en una fibra de dispersión controlada

El control de la dispersión aleja la situación de la integrabilidad completa. De acuerdo al teorema de KAM para perturbación débil los toroides invariantes deben sobrevivir, pero las trayectorias degeneradas rompen en regiones caóticas. Para perturbaciones más grandes el volumen ocupado por las regiones caóticas crece y finalmente todo el espacio de fase se vuelve caótico. Primero ilustraremos este proceso cuando sólo están involucrados dos armónicos (localización débil, $m \ll 1$). Nótese que ambas soluciones del tipo dn- y cn- puede ser aproximadas si tomamos en cuenta el coeficiente de simetría $S_n = S_{-n}$. Las soluciones del tipo-sn se obtienen con un número par de armónicos y amplitudes antisimétricas.

En el caso de dos armónicos el mapeo en la esfera de Poincaré prueba ser una herramienta muy efectiva para el análisis del comportamiento dinámico en general y la transición al caos en particular. Los parámetros de Stokes se introducen en lugar de las amplitudes espectrales siguiendo las relaciones:

$$\begin{aligned}
A &= I_1 - I_2 = S_1 S_1^* - S_2 S_2^* \\
B &= -i(S_1 S_2^* - S_1^* S_2) \\
C &= S_1 S_2^* + S_1^* S_2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

La conservación de la intensidad conduce a la identidad:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \text{const}, \tag{3.20}$$

por lo que la trayectorias $A(\xi), B(\xi), C(\xi)$ se encuentran sobre la esfera. Su forma puede determinarse reescribiendo el Hamiltoniano en términos de los parámetros de Stokes, las trayectorias son intersecciones de una esfera con cilindros parabólicos para el caso de la onda-dn, y con cilindros elípticos en el caso de ondas-cn.

Para ilustrar la propagación en una fibra de dispersión controlada calculamos numéricamente y dibujamos en la esfera de Poincaré los puntos de mapeo correspondientes a los parámetros de solución después de periodos consecutivos de mapeo. Típicamente, se toman 150 puntos por trayectoria. La suma de las intensidades de los armónicos (la suma de los cuadrados de las amplitudes) se toman igual a 1. Los parámetros de Stokes fueron escalados para dibujarse en la esfera con un radio de 1 para ambos casos cn- y dn-.

La evolución de la onda del tipo-dn esta presentada en la figura 3.1. Hemos escogido el mapa de dispersión dado por la ecuación (3.10) con $d_0 = 1, a = 0.5, b = 0.2$. La longitud L de la ecuación (3.10) como parámetro variable (el periodo del mapa es entonces $L_0 = 1.2L$). Para el caso completamente integrable (fibra uniforme con dispersión positiva, no DM) los puntos de mapeo forman líneas cerradas correspondientes a las trayectorias de la solución.

Si L es pequeña en comparación con un periodo longitudinal típico de las ondas cnoidales (el cual es físicamente de un orden de longitud de dispersión, en nuestro caso), el patrón de las trayectorias es muy similar al que tiene dispersión igual al promedio $d_{av} = \frac{2}{3}$ (ver figura 3.1-a). Cuando el periodo del mapeo crece, aparecen trayectorias caóticas cerca de puntos periódicos inestables del mapa. Para trazar el desarrollo del caos, podemos cambiar la cantidad de no-linealidad o el periodo temporal. Se escogió el cambio de longitud debido a que se ve claramente la transición.

Para la solución del tipo-dn, el punto en el centro del círculo en la figura 3.1 corresponde a la distribución uniforme de la intensidad (únicamente existe el cero-ésimo armónico) y es inestable debido a la inestabilidad de modulación para GVD anómala y no-linealidad positiva. La trayectoria que pasa a través de este punto se vuelve caótica primero. Para $L = 0.75$ (figura 3.1-b), la región caótica es un tanto pequeña, pero se incrementa rápidamente con L , (figuras 3.1-c, 3.1-d).

El proceso se caracteriza por la formación de una maraña típica homoclínica cercana a los puntos periódicos inestables. El punto en el espacio de fase correspondiente a la onda tipo-dn pulsante es cercano a esta región caótica. Mientras la vecindad más cercana de la

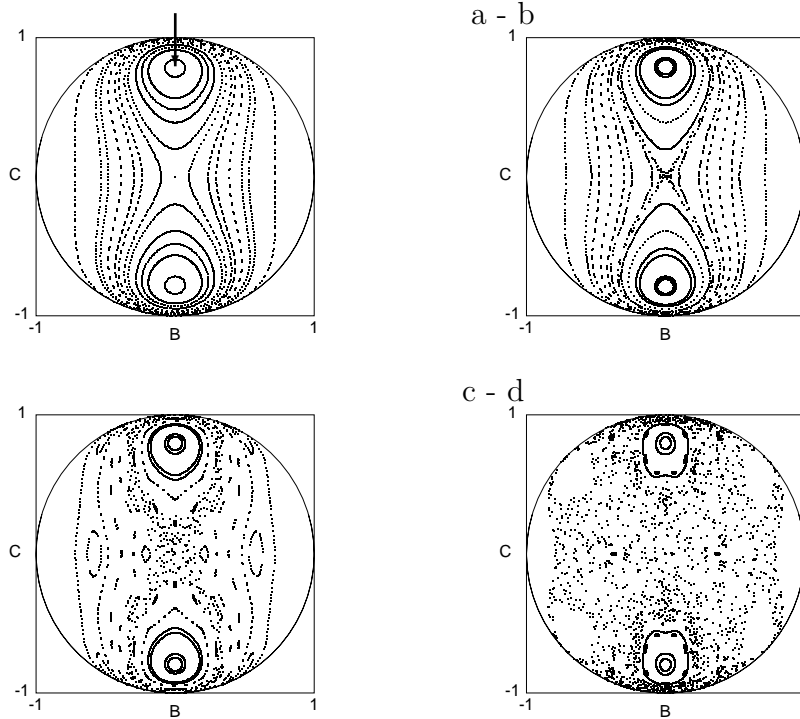


FIGURA 3.1: Imagen descriptiva de la fase de la onda tipo- dn en la esfera de Poincaré para tres armónicos. $B = 2^{3/2} \text{Im}(S_{\Omega} S_0^*)$, $C = 2^{3/2} \text{Re}(S_{\Omega} S_0^*)$, $\Omega = 2$. El periodo de control de dispersión es $L_0 = 1.2L$. $a - L = 0.1$. El centro del patrón $B = C = 0, A = 1$ corresponde a intensidad constante. Es un punto inestable estacionario del mapa. Los dos puntos periódicos estables estacionarios en las partes superior e inferior corresponden a las ondas cnoidales truncadas, la parte superior está marcada con una flecha. $b - L = 0.75$, $c - L = 0.95$, $d - L = 1.25$.

onda cnoidal permanece estable con el crecimiento del periodo del mapa de dispersión L , la región de estabilidad neutral disminuye y finalmente aún las trayectorias muy cercanas al punto de la onda cnoidal se vuelven caóticas. Para control moderado de la dispersión hay un número grande de cadenas con puntos periódicos alternando entre la estabilidad y la inestabilidad, lo cual es típico para caos KAM (figuras 3.1-c, 3.1-d)

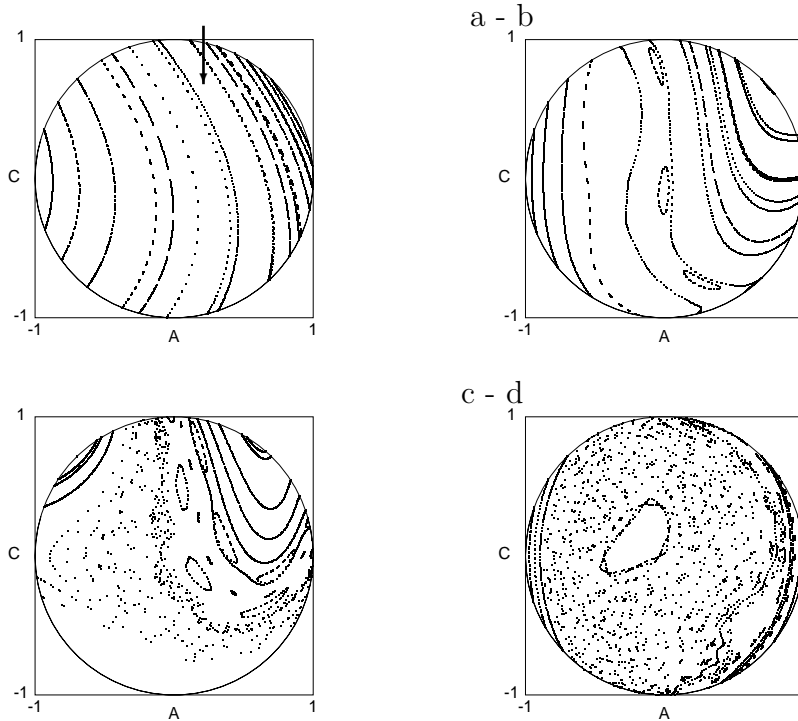


FIGURA 3.2: Igual que en la figura 3.1, pero para ondas tipo-cn con 4 armónicos $A = 2(S_{1/2\Omega}S_{1/2\Omega}^* - S_{3/2\Omega}S_{3/2\Omega}^*)$, $C = 2\text{Re}(S_{3/2\Omega}S_{1/2\Omega}^*)$, $\Omega = 2$. Los periodos de control de dispersión son: $L = 0.1$, 1.4 , 1.8 , y 2.8 para los esquemas a-d.

Discutiremos brevemente las características clave del caos KAM [7]. Para sistemas integrables hamiltonianos, las trayectorias en el espacio de fase $2N$ -dimensional caen dentro del toroide N -dimensional. Las variables de acción-ángulo pueden introducirse y cada trayectoria tiene N frecuencias características. El teorema general Kolmogorov-Arnold-Moser afirma que para perturbaciones pequeñas en un sistema Hamiltoniano integrable, la mayoría de los toroides invariantes sobreviven, pero algunas trayectorias con frecuencias degeneradas empiezan a romper en regiones caóticas. En nuestro caso, la esfera de Poincaré es el subespacio bi-dimensional de nuestro espacio de fase tetra-dimensional, y la línea cerrada del problema no-perturbado (sin DM) son intersecciones de la esfera con el toroide invariante. Para la onda-dn, el toroide degenerado corresponde al punto

estacionario $B = C = 0$ sobre la esfera. Un manifold estable y uno inestable empiezan en la vecindad de este punto estacionario. Estos se forman por puntos que se aproximan al punto estacionario con alguna iteración moviéndose hacia adelante o hacia atrás en el tiempo. Los manifolds producen una figura con forma de “8”, el punto en el manifold inestable en la vecindad cercana del punto estacionario primero se mueve lejos y después se aproxima a este punto en el manifold estable.

Para el caso de dispersión controlada la imagen es diferente; los manifolds se arreglan en lazos complicados llamados marañas homoclínicas [7]. El centro de la figura de “8” se vuelve difusa, como puede verse en la figura 3.1-b. Las trayectorias que tienen puntos periódicos bajo perturbación, primero rompen en cadenas con puntos periódicos alternando de hiperbólicos a elípticos y se forman marañas homoclínicas similares en la vecindad de las trayectorias hiperbólicas. Algunas de estas cadenas pueden verse en la figuras 3.1-c, 3.1-d y este comportamiento es un tanto típico. El ejemplo numérico de la formación de la maraña homoclínica con una descripción más detallada relacionada a la dinámica de polarización en resonadores no-lineales puede encontrarse en [35].

Para el caso-cn, la topología de las trayectorias es diferente. Aquí la trayectoria inestable no existe para el caso integrable (figura 3.2-a). Entonces, con el crecimiento de L aparecen las cadenas de puntos periódicos del mapa y entonces el caso se desarrolla cercano a puntos periódicos inestables de esas cadenas. Por lo tanto, para la onda-cn para el mismo periodo e intensidad que la onda-dn, la región caótica se desarrolla para longitudes mayores del control de dispersión y empieza un tanto lejos de la región de la onda cnoidal truncada en el espacio de fase. Consecuentemente, las ondas-cn son más estables con respecto al control de dispersión a gran escala. Nótese que los patrones de la onda-sn débilmente localizados en la esfera, son cualitativamente similares a los de la onda-cn, así que no entraremos en detalles.

Cuando el número de armónicos tomados en cuenta crece, la característica principal de las presentadas en el escenario permanecen válidas. La onda cnoidal existe, y para control de la dispersión débil hay una solución que corresponde a una onda con dispersión promediada sobre un periodo. El control de la dispersión en gran escala conduce a la aparición de regiones caóticas en el espacio de fase. La proyección sobre la esfera de Poincaré en el caso de multiarmónicos es menos informativa porque aun para el caso integrable las proyecciones no forman líneas cerradas. Aparece algo de *jitter* debido al crecimiento del número de armónicos. Para ilustrar la influencia de armónicos adicionales en la solución hemos calculado la propagación de la onda tipo-cn usando truncamiento de armónicos 4, 8 y 10 (figura 3.3). Se ve que para L pequeña la solución retiene su estructura. El valor umbral de L produciendo comportamiento caótico desarrollado disminuye si se involucran armónicos adicionales. Si la perturbación no es simétrica, la onda cnoidal puede empezar a moverse, pero generalmente retiene su estructura (figura 3.3-e).

El comportamiento caótico para caos KAM es un tanto delicado y no significa el principio súbito del caos en todo el espacio de fase sino más bien, la aparición de pequeñas regiones caóticas primero. El volumen ocupado por esas regiones se incrementa

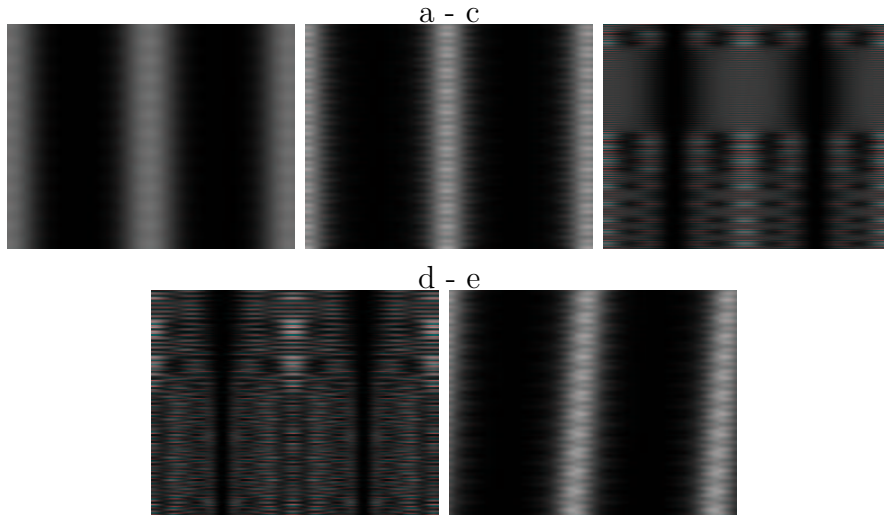


FIGURA 3.3: *Influencia de los armónicos más altos en la onda cnoidal. Se muestran las distribuciones de intensidad sobre 200 periodos en una onda, la cual es cercana a la onda-cn y tiene parámetros iniciales $S_{1/2\Omega} = \cos(0.29)/\sqrt{2}$, $S_{3/2\Omega} = \sin(0.29)/\sqrt{2}$. armónicos a - 4, $L = 0.1$, armónicos b - 10, $L = 0.1$ armónicos c - 4, $L = 3$, armónicos d - 8, $L = 2.4$, e - igual que b, pero las condiciones iniciales no son simétricas $S_{-3/2\Omega} = (1 + 0.2i)S_{3/2\Omega}$, $S_{-1/2\Omega} = (1 + 0.2i)S_{1/2\Omega}$*

con un “grado de no-integrabilidad”, el cual depende de la cantidad de no-linealidad y los parámetros de perturbación (longitud del periodo de control de dispersión, en nuestro caso). Cuando el espacio de fase es multi-dimensional la visualización de los correspondientes procesos es complicado en sí mismo. Para nuestra simulación hemos escogido los parámetros de la onda para los cuales la dinámica para el no control de la dispersión está bien descrito por sólo dos amplitudes independientes. Para la representación en la esfera de Poincaré esto significa que las trayectorias permanecen en la región cercana al punto $B = C = 0$ en la esfera, donde los armónicos más altos son pequeños en comparación con los centrales (ver las figuras 3.1-a y 3.2-a). El teorema de KAM significa que entonces la dinámica sigue bien descrita por dos amplitudes para pequeño control de dispersión. Esto se confirma por los cálculos, porque para pequeño control de la dispersión la adición de nuevos armónicos en el esquema del truncamiento no cambia drásticamente la dinámica (figuras 3.3-a y 3.3-b). Como el caos se desarrolla primero en la región del espacio de fase bien descrito por la dinámica de dos amplitudes (Por ejemplo, 3.1-b), el truncamiento es adecuado generalmente para describir el inicio del caos. Para gran control de la dispersión, cuando las trayectorias sobre la esfera de Poincaré se extienden hacia una región más grande, la dinámica truncada con sólo dos amplitudes independientes ya no es adecuada. Entonces, nuestras simulaciones modelan el comienzo del comportamiento caótico, que el caos desarrollado para fuerte no-linealidad y control de la dispersión.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Primera:

La ecuación NLS con condiciones iniciales periódicas es “esencialmente finito-dimensional”. Esto significa que la intensidad concentrada en órdenes de difracción más altos permanece uniformemente pequeña sobre la longitud de propagación. Si la intensidad inicial se concentra en un número pequeño de órdenes M , ocurre el mejoramiento del espectro relacionado al auto-enfocamiento/desenfocamiento, pero más allá de esto no hay posterior expansión. Mostramos que el espectro disminuye rápida (exponencial) y progresivamente. Esto es, la propagación puede ser modelada para cualquier longitud tomando en cuenta sólo el número finito N de órdenes de difracción. Si la no-linealidad es pequeña, N no es mucho más grande que M ; para no-linealidad fuerte, especialmente la auto-enfocante, N y M pueden diferir sustancialmente. Los armónicos más allá de N introducen una perturbación uniformemente pequeña. Por esto, la descripción adecuada puede obtenerse con un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si se utiliza una aproximación finito-dimensional integrable (por ejemplo, reescribiendo el conjunto integrable de Ablowitz-Ladik para armónicos discretos de Fourier), las soluciones se hallarán en un toroide invariante N -dimensional en un espacio de fase de dimensiones $2N$. El teorema de KAM implica que las distorsiones debidas al resto de los armónicos deformarán ligeramente ese toroide e introducirán cambios en las velocidades de fase.

Para una disminución rápida de las condiciones iniciales, se forman sobre la propagación, solitones y parte de difracción. Éste análisis muestra que para condiciones iniciales periódicas se forma la estructura de armónicos de Fourier alrededor de los órdenes fuertes. El número de órdenes involucrados en esta estructura depende en la cantidad de no-linealidad y es esencialmente finito. Esta estructura se caracteriza por N constantes de propagación que dan las velocidades de fase características. Si todas o la mayoría de esas frecuencias son iguales, se forman solitones con estructura similar a la ondas cnoidales. Para no-linealidad moderada, las ondas fuertes no pierden su identidad, entonces podemos hablar de una “onda plana modificada”

Como sólo existe un número finito de frecuencias características, el comportamiento total es cercanamente recurrente. La recurrencia se observó en un número de experimentos numéricos. Esto es también consistente con el hecho de que soluciones de banda cuasi-periódica finita formen un conjunto denso dentro en un espacio de fase. Nuestro tratamiento da una imagen complementaria, mostrando que la solución con datos iniciales suaves es cercana a la solución cuasi-periódica. Es importante que el número de frecuencias independientes puedan ser estimadas de los datos iniciales, ya sea con la ecuación (2.24), o usando integrales superiores.

4.2. Segunda:

En esta conclusión nos gustaría mencionar que las ondas elípticas demuestran una dinámica de propagación muy rica e interesante en fibras de dispersión controlada incluyendo la propagación neutralmente estable, comportamiento cuasiperiódico y transición al caos Kolmogorov-Arnold-Moser. Algunas características de esta dinámica no-trivial aparecen al nivel de la más baja dimensionalidad y están relacionadas a la *discretez* de la onda elíptica truncada en el dominio espectral y la *integrabilidad* de las correspondientes ecuaciones que la gobiernan, y no con el número de grados espectrales de libertad. Los parámetros clave que definen el escenario de propagación son el grado de no-linealidad proporcional a la intensidad de la luz, la constante de no-linealidad y el periodo temporal y el grado de desviación de la tarea integrable dada, en nuestro caso, por el periodo del mapa de dispersión. Ambos factores son necesarios para el desarrollo del comportamiento caótico.

Apéndice A

Cálculo de variaciones

Consideremos una función $f(y, \dot{y}, x)$ definida sobre un camino $y = y(x)$ entre dos valores x_1 y x_2 . Usamos

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}$$

Queremos encontrar un camino particular $y(x)$ tal que la integral curvilínea J de la función f entre x_1 y x_2 ,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx \quad (\text{A.1})$$

tenga un valor estacionario relativo a los caminos que difiera infinitesimalmente de la función correcta $y(x)$. La ecuación (A.1) se llama *la funcional* pues podemos considerar que es una función de funciones.

Aquí x desempeña el papel de t y la dependencia de y (desconocida) sobre x no es fija. Asumimos que existe un camino óptimo (que no conocemos) relativo a *todo* camino próximo y se muestra en la figura A.1, el camino óptimo y un camino vecino. La diferencia entre ambos caminos para un x dado es llamada la *variación* de y (simbolizada con δy)

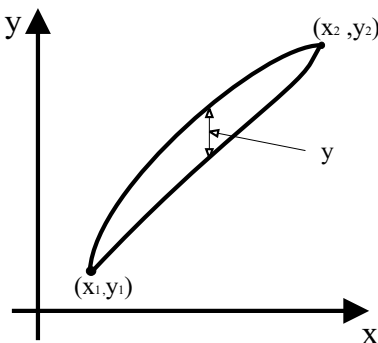


FIGURA A.1: El camino óptimo y un camino variado

La variación debe ser cero relativa a algún conjunto particular de caminos vecinos separados por un parámetro de una magnitud α y representados por $y(x, \alpha)$, siendo $y(x, 0)$ el camino óptimo.

Introduzcamos una nueva función $\eta(x)$ para definir la deformación arbitraria del camino con las restricciones:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Un conjunto posible de caminos variados sería:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x) \quad (\text{A.3})$$

y

$$\delta y = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha\eta(x) \quad (\text{A.4})$$

Para la ecuación (A.1), J es ahora una función de nuestro nuevo parámetro α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f [y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x] dx \quad (\text{A.5})$$

y nuestra condición de que exista un punto estacionario (un valor extremo), es que

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Derivando A.5, obtenemos:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} \quad (\text{A.7})$$

De la ecuación (A.5), tenemos que:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx} \quad (\text{A.9})$$

y, por lo tanto la ecuación (A.7) se vuelve:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\eta(x)}{dx} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Integramos por partes el segundo miembro de la ecuación (A.10):

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta(x)}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} dx = \eta(x) \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} dx \quad (\text{A.11})$$

Pero debido a las restricciones impuestas (ecuación A.2), la parte integrada se desvanece y la ecuación (A.10) se vuelve:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \eta(x) dx = 0 \quad (\text{A.12})$$

La ecuación (A.12) es nuestra condición para la existencia de un valor estacionario y sólo puede satisfacerse cuando la cantidad entre corchetes es idénticamente cero, la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (\text{A.13})$$

es conocida como la *Ecuación de Euler*

La ecuación (A.1) puede expresarse como una función de varias variables independientes, por lo que sería:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, x] dx \quad (\text{A.14})$$

Al igual que con la ecuación (A.10), para varias variables tendremos η_i variables independientes, y obtenemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i \right) dx = 0 \quad (\text{A.15})$$

Con la restricción A.6, también impuesta aquí para los caminos vecinos e integrando por partes el segundo término de la integral, vemos que la parte integrada desaparece (como antes) y la ecuación (A.15) queda como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \eta_i dx = 0 \quad (\text{A.16})$$

Apéndice B

Estimación de los términos que contienen I_5

La estimación de los términos que contienen I_5 puede hacerse como sigue. Introducimos

$$\Phi_1(x) = \int_{x_0}^x |\psi|^4 dz \quad (\text{B.1})$$

Con x_0 correspondiente al mínimo de $|\psi(x)|^2$. La función $\Phi_1(x)$ está limitada con la constante, independiente de t , Q_1 para $x_0 \leq x \leq x_0 + 2L$, como ya hemos establecido considerando la integral I_3 . Entonces, la ecuación similar a la ecuación(2.21) puede ser escrita para el último término en la ecuación (2.13).

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} |\psi|^6 dx = \Phi_1 |\psi|^2 \Big|_{x_0}^{x_0+2L} - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi_1 \psi_x \bar{\psi} dx - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi_1 \psi \bar{\psi}_x dx. \quad (\text{B.2})$$

El argumento procede entonces exactamente como en las ecuaciones (2.22 - 2.23), con los límites Q_1 y Φ_1 en lugar de $2LI$ y Φ . Nótese que ahora tenemos en la ecuación correspondiente a la ecuación (2.23) la integral que ya ha sido estimada para I_3 .

si introducimos

$$\Phi_2(x) = \int_{x_0}^x |\psi_z|^2 dz \quad (\text{B.3})$$

con el mismo x_0 , el argumento del último párrafo puede ser repetido para los dos términos en la ecuación (2.13) la cual tiene la primera x -derivada. Otra vez, tenemos el límite superior Φ_2 independiente de t y podemos proceder a lo largo de las líneas de las ecuaciones (2.22 - 2.23).

como todos los términos, excepto el primero en la ecuación (2.13) están limitados, y su suma se conserva, es un límite independiente de t también para el primer término. Esto da una frontera C_4/k^4 para $|\psi_k|^2$.

En el caso general, la prueba por inducción puede hacerse como sigue: los términos en P_{2n-1} , ecuación (2.10), tienen la estructura

$$\varphi_1^{(i_1)} \dots \varphi_p^{(i_p)} \tag{B.4}$$

con φ que significa ya sea ψ o $\bar{\psi}$, y el número dentro de l paréntesis es el orden derivado. Se ve p es par, y la suma es $p + i_1 + \dots + i_p = 2n$ para todos los términos pertenecientes a P_{2n-1} . Llamaremos a $2n$ el rango de un término. Siempre podemos obtener la derivada más alta en el término del rango $2n$ más pequeño o igual a $n - 1$ integrando los términos por partes. Llamaremos los términos estimado si tenemos establecido que la integral de su módulo está limitada sobre la propagación. Supongamos que todos los términos de rango $2n - 2$ o más pequeños ya han sido estimados y consideremos los términos con rango $2n$.

El único término que tiene dos φ , después de la integración por partes es $\psi^{(n-1)}\bar{\psi}^{(n-1)}$. Este es el único que podemos estimar sólo después de que de los restantes del mismo rango han sido estimados. Consideremos los términos con $p = 4, 6, \dots$ la construcción de Φ se hace del siguiente modo. Primero, separemos los términos en pares con rango par para cada par (el rango del par es la suma de su orden de derivada mas dos). Esto siempre puede hacerse ya que el número φ con derivada par es par (de otra manera, el rango del término será non). Después escogemos el par con rango más pequeño. El rango de este par r es $2 \leq r \leq n$. Los restantes tienen el rango más pequeño o igual a $2n - 2$ y es estimado por hipótesis. Así, con él podemos construir una función Φ similar a la ecuación (2.17). El par tiene un rango más pequeño que $2n$, y consecuentemente, también es estimado. Después se procede como en las ecuaciones (2.21 - 2.23). Las derivadas incrementan el rango del par en 1, así en el peor caso el rango de 1 φ en las integrales de la ecuación equivalente a la ecuación (2.23) es n , y el rango de otro es 1. En este caso la estimación nos da la raíz cuadrada del término $\int \psi^{(n-1)}\bar{\psi}^{(n-1)}$. Todas las otras posibilidades permiten estimaciones con términos de un rango más pequeño. Entonces, la estimación de todos los términos puede hacerse por inducción. Esto termina la prueba.

Apéndice C

Prueba de la convergencia

La ecuación (2.35) se obtiene como sigue. Estimemos G_2 usando la desigualdad de Cauchy - Schwarz, ecuación (2.22). El cuadrado del módulo de la última integral es

$$\left| \int_{-L}^{z''} dz''' \mu(z''') \right|^2 \leq \int_{-L}^{z''} dz''' |\mu(z''')|^2 \int_{-L}^{z''} dz''' 1 \leq 2LI(z'' + L) \quad (\text{C.1})$$

Entonces

$$\left| \int_{-L}^{z'} dz'' \bar{\mu}(z'') \int_{-L}^{z''} dz''' \mu(z''') \right|^2 \leq \int_{-L}^{z'} dz'' |\mu(z'')|^2 \int_{-L}^{z'} dz'' \left| \int_{-L}^{z''} dz''' \mu(z''') \right|^2 \leq (2LI)^2 \frac{(z' + L)^2}{2!} \quad (\text{C.2})$$

Y así por el estilo, hasta que obtenemos la ecuación (2.35).

Índice de figuras

1.1. Comportamiento del mapa M^q	14
1.2. Sistema caótico ergódico y mezclado: Partícula en un estadio	15
2.1. Intensidad del k -ésimo orden	30
2.2. Evolución del 0-ésimo orden en el plano de fase	31
3.1. Imagen descriptiva de la fase de la onda tipo-dn (con 3 armónicos)	40
3.2. Imagen descriptiva de la fase de la onda tipo-cn (con 4 armónicos)	41
3.3. Influencia de los armónicos más altos en la onda cnoidal	43
A.1. El camino óptimo y un camino variado	47

Bibliografía

- [1] M.J.Ablowitz, J.F.Ladik; *Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis*; J.Math.Phys, **17**, 1011-1018(1976).
- [2] M.J.Ablowitz, Z.H.Muslimani; *Dark and gray strong dispersion-managed solitons*; Phys.Rev.E **67**, 025601(R) (2003).
- [3] Agrawal, Govind P.; *Nonlinear fiber optics*; Ed. Academic Press; U.S.A., 1995.
- [4] Yariv, Amnon; *Quantum electronics*; 3rd. edition,Ed. Wiley & Sons; USA, 1989.
- [5] Arfken, George B. et al.; *Mathematical methods for physicists*; 4^a edición, Ed. Academic Press, U.S.A., 1995.
- [6] Arnold, V. I.; *Mathematical methods of classical mechanics*; 2^a edición; Ed. Springer-Verlag, U.S.A., 1989.
- [7] D.K.Arrowsmith, C.M.Place; *An introduction to Dynamical Systems*; Cambridge University Press, N.Y., 1990.
- [8] Babelon, Olivier et alius; *Introduction to classical integrable systems*; Ed. Cambridge University Press, U.K., 2003.
- [9] L.Berge, V.K.Mezentzev, J.J.Rasmussen, P.L.Christiansen, Yu.B.Gaididei; *Self-guiding light in layered nonlinear media*; Opt.Lett. **25**, 1037 (2000).
- [10] Born, Max & Emil, Wolf; *Principles of optics*; Cambridge University Press; 6th. edition, UK, 1980.
- [11] Boyd, Robert W.; *Nonlinear optics*; Academic Press; U.S.A., 1992.
- [12] Broer, Henk W.; *KAM theory: the legacy of Kolmogorov's 1954 paper*; Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. **41**, number **4**, pages 507-521, February, 2004.
- [13] Calogero, Francesco; *Classical many-body problems amenable to exact treatment* Ed. Spriger-Verlag, Germany, 2001.

- [14] V.Cauteraerts, A.Maruto, Y.Kodama; *On the dispersion managed soliton*; Chaos **10**, 515 (2000).
- [15] Cvitanović, P. ; Artuso, R.; Mainieri, R. Tanner G. and Vattay, G.; *Chaos: Classical and Quantum* (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2005); Chaos-Book.org/version11.
- [16] Y.Chen; *Dark solitons in dispersion compensated fiber transmission systems*; Opt. Commun. **161**, 267 (1999).
- [17] M. Chertkov, I.Gabitov, I. Kolokolov and T. Schäfer; *Periodic compensation of polarization mode dispersion*; J. Opt. Soc. Am. B/vol. 21, No. 3/March 2004, pp. 486-498.
- [18] A. Delshams, P. Gutiérrez; *Effective stability and KAM theory*; J. Differential Equations, 128 (1996), pp. 415-490.
- [19] Faddeev, L.D. and Takhtajan, L. A.; *Hamiltonian Methods in the theory of solitons*; Ed. Wiley & Sons; USA, 1997.
- [20] Franken, P.A., Hill A.E., Peters C. W. & Rabinovich, Mikhail I.; *Generation of optical harmonics.*; Phys. Rev. Lett. 7:118 - 119, 1961.
- [21] Gaponov-Grekhov, Andrei V., Rabinovich, Mikhail I.; *Nonlinearities in action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals*; Ed. Springer-Verlag; Hong Kong, 1992.
- [22] Goldstein, Herbert; *Mecánica clásica*; Ed. Reverté; España; 1992.
- [23] Grébert, Benoît y Kappeler, Thomas; *KAM Theorem for the Nonlinear Schrödinger Equation*; Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2001, V.8, Supplement, 133-138; Proceedings: NEEDS'99
- [24] Gutkin, Eugène; *Conservation laws for the nonlinear Schrödinger equation*; Annales de l'institut Henri Poincaré, (C) Analyse non linéaire, 2 no. 1 (1985), p. 67-74
- [25] Halmos, Paul R.; *Teoría intuitiva de los conjuntos*; Ed. C.E.C.S.A.; México, 1984.
- [26] A.Hasegawa; *Soliton-Based Optical Communications: An Overview*; IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **6**, 1161 (2000).
- [27] H.Haus; *Mode-Locking of Lasers*; IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **6**, 1173 (2000).

- [28] E.Infeld; *Quantitative theory of the Fermi-Pasta-Ulam Resonance in the nonlinear Schrödinger equation*; Phys. Rev. Lett. **47**, 717 (1981).
- [29] Infeld, Eryk, Rowlands, George; *Nonlinear waves, solitons and chaos*; Ed. Cambridge University Press; Great Britain, 1990.
- [30] Jardón Aguilar, Hildeberto; Linares y Miranda, Roberto; *Sistemas de comunicaciones por fibras ópticas*; Ed. Alfaomega; México, 1995.
- [31] Ya.V.Kartashov, V.A.Vysloukh, E.Marti-Panameño, D.Artigas, and L.Torner; *Dispersion-managed cnoidal pulse trains*; Phys Rev.E **68**, 026613 (2003).
- [32] Katok, Anatole and Hasselblatt, Boris; *Introduction to the modern theory of dynamical systems*; Ed. Cambridge University Press; UK, 1999.
- [33] Keiser, Gerd; *Optical Fiber communications*; Ed. McGraw-Hill; Singapore, 1991.
- [34] N.Korneev; *Analytical solutions for three and four diffraction orders interaction in Kerr media*; Opt. Express **7**, 299 (2000), <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=OPEX-7-9-299>.
- [35] N.Korneev; *Polarization chaos in nonlinear birefringent resonators*; Opt.Commun. **211**, 153 (2002).
- [36] N.Korneev, A.Apolinar-Irbe, and J.J.Sánchez -Mondragon, *Theory of multiple beam interaction in photorefractive media*; J. Opt. Soc. Am. B **16**, 580-586(1999).
- [37] Kreyszig, Erwin; *Matemáticas avanzadas para ingeniería, tomo II*; 3ª edición; Ed. LIMUSA Wiley; México, 2001.
- [38] Kuksin, Sergei B.; *Fifteen years of KAM for PDE*; Amer. Math. Soc. Transl.(2) Vol. **212**(2004), pages 237-258.
- [39] Landau, L.D. y Lifshitz E.; *Curso abreviado de física teórica. libro 1: Mecánica y electrodinámica*; Editorial MIR; Moscú, URSS, 1971.
- [40] Lorenz, E. N.; *Deterministic nonperiodic flow*; J. Atmos. Sci. **20** (1963): 130-141.
- [41] Ma, Y.C. and Ablowitz, M.J.; *The periodic cubic Schrödinger equation*; Stud. Appl. Math., **65**, 113-158(1981).
- [42] P.V.Mamyshev, L.F.Mollenauer; *Soliton collisions in wavelength-division-multiplexed dispersion-managed systems*; Opt.Lett. **24**, 448 (1999)

- [43] D.U.Martin, H.C.Yuen; *Spreading of energy in solutions of the nonlinear Schrödinger equation*; Phys.Fluids, **23**, 1269-1271 (1980).
- [44] Morales Rodríguez, Enrique; *Interacción de varios órdenes de difracción en un medio no-lineal tipo Kerr*; Tesis de Maestría, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Sta. María Tonantzintla, Puebla, México, 2001.
- [45] R.-M.Mu, V.S.Grigoryan, C.R.Menyuk; *Comparison of Theory and Experiment for Dispersion-Managed Solitons in a Recirculating Fiber Loop*; IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron **6**, 248 (2000).
- [46] Nakamura, Shoichiro; *Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*; Ed. Prentice Hall, México, 1997.
- [47] M.Nakazawa, A.Sahara, H.Kubota; *Propagation of a solitonlike nonlinear pulse in average normal group-velocity dispersion and its unsuitability for high-speed, long-distance optical transmission*; J. Opt. Soc. Am. B **18**, 409 (2001).
- [48] Nettel, Stephen; *Wave Physics: Oscillations, Solitons, Chaos*; Ed. Springer-Verlag; USA, 1995.
- [49] Ozorio de Almeida, Alfredo M.; *Hamiltonian systems: chaos and quantization*; Ed. Cambridge University Press, U.S.A., 1988.
- [50] C.Pare, P.-A. Belanger; *Antisymmetric soliton in a dispersion-managed system*; Opt.Commun. **168**, 103 (1999);
- [51] Peña, Luis de la; *Introducción a la mecánica cuántica*; 2ª edición, Ed. F.C.E, México, 1991.
- [52] Pöschel, Jürgen; *A lecture on the classical KAM theorem*; Proc. Symp. Pure Math. **69**(2001) pp. 707 - 732.
- [53] Press, William H. et al.; *Numerical recipes in C++, the art of scientific computing*; 2ª edición; Ed. Cambridge University Press, United Kingdom, 2002.
- [54] Press, William H. et al.; *Numerical recipes in Pascal, the art of scientific computing*; Ed. Cambridge University Press, U.S.A. 1989.
- [55] Pugh, Charles and Shub, Michael; *Stable ergodicity*; Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. **41**, number **1**, November, 2003.
- [56] Rubio Martínez, Baltazar; *Introducción a la ingeniería de la fibra óptica*; Ed. Addison-Wesley Iberoamericana; USA, 1994.

- [57] Sprott, Julien C.; *Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos*; en <http://sprott.physics.wisc.edu/fractals/booktext/sabook.pdf>
- [58] Sussman, G. J. , Wisdom J. & Meyr M.E.; *Structure and interpretation of classical mechanics* Ed. MIT Press, U.S.A. , 2000.
- [59] Tatum, J. B.; *Classical Mechanics*; (last updated: 2006 February 06); in <http://orca.phys.uvic.ca/~tatum/classmechs.html>
- [60] Ter Haar, D.; *Elements of Hamiltonian mechanics*; 2nd. Edition, Ed. Pergamon press; U.K., 1971.
- [61] Thaler, Jesse; *Integrable Systems and Matrix Models*; <http://www.jthaler.net/physics/notes/intsys.pdf>
- [62] A.Thyagaraja; *Recurrent motions in certain continuum dynamical systems*; Phys.Fluids, **22**, 2093-2096 (1979).
- [63] I.Towers, B.Malomed; *Stable (2+1)-dimensional solitons in a layered medium with sign-alternating Kerr nonlinearity*; J. Opt. Soc. Am. B **19**, 537 (2002).
- [64] S.Trillo, S.Wabnitz; *Dynamics of the nonlinear modulational instability in optical fibers*; Opt. Lett. **16**, 986 (1991).
- [65] Xiaomin Wang, Kazuro Kikuchi y Yuichi Takushima; *Analysis of dispersion-managed optical fiber transmission system using non-return-to-zero pulse format and performance restriction from third-order dispersion*; IEICE Trans. Electron. vol. e82-c No. 8 august 1999, pp. 1407-1413.
- [66] Wiggins, Stephen; *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*; Ed. Springer-Verlag; USA, 1990.
- [67] C.Xu, C.Xie, L.Mollenauer; *Analysis of soliton collisions in a wavelength-division-multiplexed dispersion-managed soliton transmission system*; Opt.Lett. **27**, 1303 (2002).
- [68] V.E.Zakharov and A.B.Shabat; *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*; Sov.Physics JETP, **61**, 62-69(1972).

Referencias electrónicas

- [RE1] <http://www.fractalwisdom.com/FractalWisdom/fourattr.html>
- [RE2] http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Damped_driven_chaotic_pendulum_-_double_period_behavior.png
- [RE3] http://es.wikipedia.org/wiki/Caos_determinista
- [RE4] <http://en.wikipedia.org/wiki/Attractor>
- [RE5] <http://sprott.physics.wisc.edu/fractals/bookfigs/fig6-42.gif>
- [RE6] <http://en.wikipedia.org/wiki/Jitter>
- [RE7] <http://en.wikipedia.org/wiki/Ansatz>

Summary

Introduction

We know that one integrable system has one integral of movement for each freedom degree.

The position of the system is completely given by its q coordinate and its generalized velocity \dot{q} .

The Lagrange function is:

$$L(q, \dot{q}, t).$$

By means of basic calculus, this gives us the Lagrange equation:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

If the system has n freedom degrees, with generalized q_k , the Lagrange equations are:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

and form one Lagrangian system of n second order equations for S unknowns $q_k(t)$, it has $2n$ arbitrary constants known by means of the *initial conditions*.

Hamilton equations

The task simplifies using Hamiltonian equations yielding $2n$ *first order* equations having $2n$ arbitrary constants. Then we use the *Hamiltonian function*, H :

$$H(p_k, q_k, t) = \sum p_k \dot{q}_k - L.$$

It gives us the *Canonical Conjugate Equations* (Hamilton equations):

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned}$$

Hamiltonian equations for complex numbers

Using complex numbers z like:

$$z = a + ib$$
$$\bar{z} = a - ib.$$

The canonical conjugate equations take the form:

$$q_k = \frac{\bar{S}_k - S_k}{\sqrt{2}i}$$
$$p_k = \frac{\bar{S}_k + S_k}{\sqrt{2}}.$$

The Poisson bracket and the Hamiltonian

It's well known that if any two functions F and H , complies (the poisson bracket) :

$$\{F, H\} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0.$$

it says that if both functions presenting that behavior then it are in involution and is necessary and sufficient for to F be a movement equation.

The above equations still valid for complex numbers.

Chaos in Hamiltonian systems

In Physics the word “*chaos*” get the sense with respect to any dynamic systems showing strong sensitivity to *initial conditions*.

One dynamic system must show the properties:

- have a definite boundary
- be sensitivity to initial conditions
- be transitive
- it orbits must be dense

KAM theory

The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem depicts the conditions under which chaos is restricted in extension. In 1963, Arnold did one proof for Hamiltonian systems:

$$H = H_0(I) + \epsilon H_1(I).$$

The original theorem requires perturbations almost $\epsilon \sim 10^{-48}$, although have yet overcome. Arnold's proof requires C^∞ , Moser's proof requires C^* 333.

The application conditions of the KAM theorem are:

- small perturbations
- soft perturbations
- map with sufficiently irrational whirls

Let H_0 be perturbed for any periodic function $H_1(I)$. If this $H_1(I)$ is sufficiently small, then for each ω^* exist one invariant torus $T(\omega^*)$

$$W(\theta) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\theta) - \theta}{n}.$$

represent the average increase in θ for average frequency

Let H_0 be perturbed for an periodic function $H_1(I)$. KAM theorem stays if H_1 is enough small then for almost each ω^* exist one invariant torus $T(\omega^*)$ of the perturbed system that $T(\omega^*)$ is "close to" $T_0(\omega^*)$. Moreover, the $T(\omega^*)$ tori form one set of positive measures $T(\omega^*)$ that its complement has a measure that led to zero like $|H_1| \rightarrow 0$.

The KAM theorem could say: "For enough small perturbation, almost all tori are preserved (excluding those with rational frequency vectors)." then the theorem explicitly excludes the tori with rational frequencies, i.e., $n - 1$ conditions of the form:

$$\omega \cdot k = 0. \tag{C.3}$$

That tori are destroyed for perturbation. For a system with two freedom degrees, the condition for closed orbits is:

$$\sigma = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s}. \tag{C.4}$$

For orbit maps quasi-periodic, σ is irrational. KAM show that the preserved tori satisfies the irrationality condition:

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}}. \tag{C.5}$$

for all r and s .

The KAM theorem broke the standstill of the problem of the small dividers in the classic theory of the perturbations and provide the starting point for the understanding of the chaos.

For a Hamiltonian System, the isoenergetic no-degeneracy condition

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (\text{C.6})$$

guarantee the preservation of major invariant tori under small perturbations $\epsilon \ll 1$.

If the unperturbed systems satisfies the no-degeneracy conditions, for enough small perturbation, the majority of the tori isn't vanished, but they deform slightly, so in the phase space still invariant tori densely full of cuasi-periodic curves around.

KAM theory says that for $\epsilon \rightarrow 0$ and perturbations enough smooth the irrational tori surviving are those with ω_0 that satisfies the condition:

$$|\omega_0 \cdot k| > \gamma |k|^{-\tau}. \quad (\text{C.7})$$

for all vectors with whole numbers k and some γ and τ with boundaries on τ that can refine depending of the smoothness conditions of the perturbation and the restrictions of the unperturbed system. For example, KAM has showed that if the tori survive for perturbations C^r si $N - 1 < \tau < \frac{1}{2}r - 1$ and γ is of the order of $\sqrt{\epsilon}$ for small ϵ .

In terms of the function generation method for canonical transformations, we are looking for a function $S(I', \theta)$, where

$$I = \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad \theta' = \frac{\partial S}{\partial I'}. \quad (\text{C.8})$$

so the transformed Hamiltonian is independent of θ' :

$$H'(I') = H(I, \theta) = H \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta \right). \quad (\text{C.9})$$

We can expand S of the follow manner:

$$S(I', \theta) = I' \cdot \theta + \epsilon S_1(I', \theta). \quad (\text{C.10})$$

and the equation (C.9) turns of first order in ϵ :

$$H'(I') = H_0(I') + \epsilon \frac{\partial H_0(I')}{\partial I'} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon H_1(I', \theta). \quad (\text{C.11})$$

If we write the periodic dependence θ of S_1 and H_1 in terms of it multidimensional Fourier series

$$S_1(I', \theta) = \sum_m S_{1,m}(I') e^{im \cdot \theta}. \quad (\text{C.12})$$

and collect the coefficients of each Fourier component, find:

$$S_1(I', \theta) = \sum_m \frac{H_{1,m}(I')}{m \cdot \omega_0(I')} e^{im \cdot \theta}. \quad (\text{C.13})$$

Nonlinear Schrödinger equation like completely integrable system

We utilize the Nonlinear Schrödinger Equation (NLS) [19]:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\kappa|\psi|^2\psi. \quad (\text{C.14})$$

with the initial condition:

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x). \quad (\text{C.15})$$

Where $\psi(x)$ is a complex function and $|\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$ ($\bar{\psi}$ is the complex conjugate) and κ is the coupling constant with real value.

In this thesis we are considering the quasi-periodic boundary condition where ψ is a smooth function satisfying:

$$\psi(x + 2L, t) = e^{i\theta}\psi(x, t). \quad (\text{C.16})$$

where θ is into the interval $0 \leq \theta < 2\pi$ and θ no depends of t .

The fundamental domain is:

$$-L \leq x < L. \quad (\text{C.17})$$

Together, the equation (C.14) with the boundary condition C.16, determines one dynamical system named *NLS Model*.

The Poisson bracket, with this boundary condition inside the fundamental domain is: [19, 23]:

$$\{F, G\} = i \int_{-L}^L \left(\frac{\delta F}{\delta\psi(x)} \frac{\delta G}{\delta\bar{\psi}(x)} - \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta\psi(x)} \right) dx. \quad (\text{C.18})$$

Then, we have:

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi(y)\} &= \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0, \\ \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= i\delta_{L,\theta}(x - y). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Where $\delta_{L,\theta}(x)$ is the delta function averaged:

$$\delta_{L,\theta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta n} \delta(x - 2nL). \quad (\text{C.20})$$

that satisfies the quasi-periodicity condition with respect to x .

Here NLS equation can be represented of the Hamiltonian form:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \{H, \psi\} = -i\frac{\delta H}{\delta\bar{\psi}}, \\ \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} &= \{H, \bar{\psi}\} = i\frac{\delta H}{\delta\psi},\end{aligned}\tag{C.21}$$

and the Hamiltonian is given by the equation:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|^2 + \varkappa|\psi|^4 \right) dx.\tag{C.22}$$

Demonstration of the spectral limits for propagation

The nonlinear Schrödinger equation (NLS) describes the propagation of light in Kerr media, both in two spatial coordinates (photorefractive crystals and other nonlinear materials), and in one spatial and one temporal coordinate (fibers). The problem with periodic initial conditions has attracted attention recently because of possible applications in high-frequency fiber lines, nonlinear waveguiding, switching, etc. For discussion we will use the language of 2D spatial propagation, but the results can be easily reformulated for one temporal and one spatial coordinate as well.

There is a formal solution of periodic NLS based on the analysis of the associated linear problem spectrum, which has generally an infinite number of bands. If the number of bands is finite, complicated almost-periodic in propagation coordinate analytical solutions can be built [41]. It is not clear, how this procedure can be applied in practice to a problem with given initial conditions.

On the other hand, the propagation of periodic patterns in nonlinear Kerr-type materials often can be modeled by considering interaction between a limited number of spectral (diffraction) orders [36]. Physically, the interaction is produced by the beam diffraction on the dynamic gratings it writes in a material. For the important case when the period of the pattern is small, the Bragg - Kogelnik approximation is often sufficient for calculations. In this approximation, the formation of higher orders does not occur, order intensities are conserved, and the nonlinear interaction is reduced to modifications of phase velocities for interacting beams. Such processes as self-focusing or self-defocusing which lead to the enrichment of the spatial harmonic spectrum evidently cannot be explained in this approximation, but numerics demonstrates that taking into account a relatively small number of orders (e.g. 3-4 or more) often gives an adequate description for limited propagation length. In the paper by Thyagaraja [62] motivated by the earlier numerical results in the context of fluid dynamics it was demonstrated that for the k -th order intensity $|\psi_k|^2$, $|\psi_k|^2 < C_2/|k|^2$ with propagation length independent constant C_2 . This estimation assures only quite slow diminishing of spectrum tails and, as it was shown using numerics in [43], strongly overestimates the number of orders necessary for adequate description.

By considering higher integrals of motion we refine the result of Thyagaraja. We demonstrate that for narrow initial spectrum $|\psi_k|^2 < C_n/|k|^n$ for any n with propagation length independent constants C_n . For small nonlinearity (both positive and negative), we prove additionally that initially strong orders always remain strong upon propagation, i.e only the small part of their initial intensity is transferred to higher orders.

The NLS for smooth periodic initial conditions is essentially finite-dimensional. Only a limited number of harmonics can be taken into account to obtain a generally adequate description of the propagation. The trajectories predominantly lie on N -dimensional tori in $2N$ dimensional phase space, with a number N determined by initial conditions and nonlinearity strength. The rest of harmonics produce a fine "jitter" in a phase space, they slightly modify invariant tori form and characteristic angular frequencies. This remarkable feature is due to the quite special structure of the NLS which admits an infinite set of conservation laws.

Monodromy matrix and conservation laws

Here we reproduce some known results on monodromy matrix and conservation laws which are necessary for the main part of the paper. This section closely follows Ch.1 of the book of Takhtajan and Faddeev [?], and we use their notation. The NLS is written in the form:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\kappa|\psi|^2\psi. \quad (\text{C.23})$$

Complex wavefunction ψ is x - periodic, $\psi(x + 2L, t) = \psi(x, t)$. We attribute to t the meaning of propagation spatial coordinate. The κ is positive for the self-defocusing situation, and negative for the self-focusing.

The associated linear problem is written as

$$\frac{\partial F(x, t, \lambda)}{\partial x} = U(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda), \quad (\text{C.24})$$

with a two-component vector function F . Here λ is a spectral parameter, and the matrix U is:

$$U(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2i} & \sqrt{\kappa}\bar{\psi}(x, t) \\ \sqrt{\kappa}\psi(x, t) & -\frac{\lambda}{2i} \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

The $\bar{\psi}$ is complex conjugate. For the square root, the positive value is taken for $\kappa > 0$, and the value with positive imaginary part for $\kappa < 0$.

The monodromy matrix T_L is introduced as the matrix which gives the associated problem solution change over the x -period, so that $F(L, t, \lambda) = T_L(t, \lambda)F(-L, t, \lambda)$.

The monodromy matrix T_L can be formally found with a solution of the Fredholm-type integral equation

$$T(x, y, \lambda) = E(x - y, \lambda) + \int_y^x E(x - z, \lambda) U_0(z) \overline{T}(z, y, \lambda) dz, \quad (\text{C.26})$$

where

$$E(x - y, \lambda) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{\lambda}{2i}(x - y)) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{\lambda}{2i}(x - y)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.27})$$

and

$$U_0(z) = \sqrt{\varkappa} \begin{pmatrix} 0 & \overline{\psi}(z) \\ \psi(z) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.28})$$

Then $T_L(\lambda) = T(L, -L, \lambda)$, and we omit t -dependence.

It can be shown that $\text{tr}(T_L(\lambda))$ for any λ is a conserved quantity, i.e. if the t -evolution of ψ is described by NLS, the monodromy matrix trace remains the same. This permits to find a set of conserved quantities calculating the trace for large real spectral parameter. Namely,

$$\text{tr}(T_L(\lambda)) \approx 2 \cos \left(-\lambda L + \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} + O(|\lambda^{-\infty}|) \right). \quad (\text{C.29})$$

As $\text{Tr}(T_L)$ is a conserved quantity, the real coefficients I_n are conserved upon propagation. These quantities were first found in [68] and constitute the classic set of integrals of motion for NLS. They can be expressed as integrals of $\psi, \overline{\psi}$, and their x -derivatives. Namely,

$$I_n = \int_{-L}^L P_n(x) dx, \quad (\text{C.30})$$

with

$$P_1 = \psi(x) \overline{\psi}(x), \quad (\text{C.31})$$

$$P_{n+1} = -i \overline{\psi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_n}{\psi} \right) + \varkappa \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}. \quad (\text{C.32})$$

We will need some of these integrals written explicitly. Some terms are modified in them from the expressions above using integration by parts (see also [68]). The intensity I_1 is

$$I_1 = \int_{-L}^L |\psi|^2 dx = 2LI, \quad (\text{C.33})$$

and we introduce the average intensity I .

The Hamiltonian I_3 is

$$I_3 = \int_{-L}^L (|\psi_x|^2 + \varkappa |\psi|^4) dx. \quad (\text{C.34})$$

The 5-th integral is

$$I_5 = \int_{-L}^L (|\psi_{xx}|^2 + \varkappa \left(\frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2\right)^2 + 6\varkappa |\psi_x|^2 |\psi|^2 + 2\varkappa^2 |\psi|^6) dx. \quad (\text{C.35})$$

Estimations for order intensities

Our aim is to establish limits for transversal spatial coordinate spectrum of the wavefunction ψ

$$\psi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikKx) \psi_k(t), \quad (\text{C.36})$$

where k is integer, and $K = \pi/L$ is a wavevector.

For positive \varkappa corresponding to self-defocusing, a simple estimation is possible. Both terms in I_3 Eq.(C.34) are then positive, this means that

$$\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx = 2LK^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\psi_k(t)|^2 \leq I_3, \quad (\text{C.37})$$

thus

$$|\psi_k(t)|^2 \leq \frac{I_3}{2LK^2 k^2}. \quad (\text{C.38})$$

The same argument works for I_5 as well, giving the estimation with k^{-4} . Nevertheless, it fails for I_7 where the term proportional to \varkappa can be negative for some functions.

There is a more elaborate procedure which permits the t - independent estimation which does not rely on the nonlinearity sign, and gives a decrease faster than any power of k . We demonstrate it for I_3 first. Let us introduce

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x |\psi(z)|^2 dz. \quad (\text{C.39})$$

The point x_0 is chosen to correspond to the minimum of $|\psi(x)|^2$. Then $|\psi(x_0)|^2 \leq I$ and

$0 \leq \Phi(x) \leq 2LI$ for $x_0 \leq x \leq x_0 + 2L$. The second integral in Eq.(C.34) can be then written as:

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} |\psi|^4 dx = \Phi |\psi|^2 \Big|_{x_0}^{x_0+2L} - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi_x \bar{\psi} dx - \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi \bar{\psi}_x dx. \quad (\text{C.40})$$

The first term in Eq.(C.40) does not exceed $2LI^2$. To estimate the absolute value of the next two we use the Cauchy-Schwarz inequality.

$$\left| \int_{-L}^L f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \int_{-L}^L |g(x)|^2 dx. \quad (\text{C.41})$$

Then

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi \psi_x \bar{\psi} dx \right| \leq \sqrt{\int_{x_0}^{x_0+2L} \Phi^2 |\psi|^2 dx} \sqrt{\int_{x_0}^{x_0+2L} |\psi_x|^2 dx} \leq (2LI)^{3/2} \sqrt{\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx}. \quad (\text{C.42})$$

Here we have used the upper limit for Φ and the intensity conservation. The same estimation is obtained for the third term in Eq.(C.40). Now it is seen that the upper limit for the first term in I_3 exists, because if the first term is large, the second is proportional to the square root of it. The uniform estimation can be obtained:

$$\int_{-L}^L |\psi_x|^2 dx \leq (\sqrt{I_3} + |\varkappa| 2LI^2 + |\varkappa|^2 (2LI)^3 + |\varkappa| (2LI)^{3/2})^2 = A_1^2. \quad (\text{C.43})$$

Thus, for strong self-focusing nonlinearity, taking into account only the leading term in the Eq.(C.43),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_k|^2}{I} k^2 \lesssim \frac{\nu^2}{\pi^2}, \quad (\text{C.44})$$

where the dimensionless nonlinearity parameter $\nu = \varkappa I(2L)^2$ describes the nonlinearity strength. This means that the typical spectrum width is proportional here to $|\nu|$. For strong self-defocusing nonlinearity, the width, as it follows from Eq.(C.38) is proportional to $\sqrt{|\nu|}$. Thus, the self-focusing nonlinearity produces more pronounced widening of the spectrum in comparison with the self-defocusing one. This is to be expected, since for the self-focusing a modulation instability exists, which is absent otherwise. The Eq.(C.43) was first obtained in [62].

The left-hand side of the Eq.(C.40), as it follows from Eqs.(C.42, C.43) is limited by $Q_1 = 2LI^2 + 2(2LI)^{3/2}A_1$. Then, similar to the derivation for I_3 , from the I_5 conservation it follows that

$$\int_{-L}^L |\psi_{xx}|^2 dx \leq I_5 + 10 |\varkappa| (A_1^2 I + 2A_1^3 I^{1/2}) + 2 |\varkappa|^2 (Q_1 I + 2A_1 Q_1 I^{1/2}). \quad (\text{C.45})$$

Order-related integrals of motion

The results of the previous section demonstrate that there is a uniform estimation for the order amplitudes with a decrease for large k faster than any negative power of $|k|$. This indicates that there is an exponential estimation $|\psi_k|^2 < C \exp(-\alpha |k|)$ with constants C and α determined by the initial conditions and \varkappa . By estimating the width of exponential distribution, and comparing it with Eqs.(C.38, C.44) for large ν , it is seen that α scales approximately as $|\nu|^{-1}$ for self-focusing nonlinearity, and as $\nu^{-1/2}$ for self-defocusing.

Thus, for a given nonlinearity strength and narrow initial spectrum, only a finite number N of lower Fourier harmonics is important, whatever the propagation length is. The higher orders introduce uniformly small perturbation. As NLS is known to be completely integrable, the solutions are approximately restricted to N -dim tori in $2N$ -dim phase space of N complex amplitudes. The form of the tori is determined by conservation laws. One can use N first integrals of Zakharov-Shabat to this purpose. Nevertheless, we will introduce another set of conservation laws, which have simpler structure for small nonlinearity. They are obtained with standard iterations of the Fredholm-type integral equation Eq.(C.26) for an infinite discrete set of special values of λ , $\lambda_k = k\pi/L$.

By introducing

$$\mu_k(z) = \exp(-i\lambda_k z)\psi(z), \quad (\text{C.46})$$

the monodromy matrix trace is

$$\text{tr}(T_L(\lambda_k)) = J_k = (-1)^k 2\text{Re}[1 + G_1 + G_2 + \dots] \quad (\text{C.47})$$

with

$$G_1 = \varkappa \int_{-L}^L dz \overline{\mu_k}(z) \int_{-L}^z dz' \mu_k(z'), \quad (\text{C.48})$$

$$G_2 = \varkappa^2 \int_{-L}^L dz \overline{\mu_k}(z) \int_{-L}^z dz' \mu_k(z') \int_{-L}^{z'} dz'' \overline{\mu_k}(z'') \int_{-L}^{z''} dz''' \mu_k(z'''), \quad (\text{C.49})$$

etc.

Using the function $f(z) = \int_{-L}^z dz' \mu_k(z')$, and integrating the Eq.(C.48) by parts, is easy to show that

$$Re(G_1) = 2\kappa L^2 |\psi_k|^2 \quad (C.50)$$

Thus, for small nonlinearity the conserved quantities are simply order intensities, which corresponds to linear propagation. The $G_1 + G_2 + \dots$ can be considered as a modulus square of generalized k -th Fourier harmonic, which is conserved for the nonlinear case. Different from the linear case, $G_1 + G_2 + \dots$ do not diminish exponentially with $k \rightarrow \infty$ for smooth initial data. By comparing with asymptotical expression Eq.(C.29), it is seen that they behave as $-\kappa^2 I_1^2 L^2 / 2(k\pi)^2$. To obtain the exponentially diminishing for $k \rightarrow \infty$ set one can subtract the terms of Eq.(C.29) behaving as $1/k^n$ for all n . After this, the term $O(|k|^{-\infty})$ still remains, because the series in Eq.(C.29) are asymptotic, and not exact. The example of constant function $\psi(x) = const$ for which the monodromy matrix can be found analytically demonstrates that this procedure can work only for large enough k , otherwise the series in Eq.(C.29) do not converge.

If expressed in Fourier harmonics, the G_2 includes combinations of the type $\bar{\psi}_{k_1} \psi_{k_2} \bar{\psi}_{k_3} \psi_{k_4}$ which are resonant, i.e to obtain nonzero contribution it is necessary that $-a_1 k_1 + a_2 k_2 - a_3 k_3 + a_4 k_4 = a_5 k$ with $a_1 \dots a_4 = 0, 1$ and integer a_5 . The explicit equation for this coefficient is complicated because there are many possible resonant combinations of different types.

The convergence of series Eq.(C.47) follows from the theory of integral equations. The usual proof [?] includes estimation with the maximal value of $|\psi|$. It is possible to estimate the terms using Cauchy-Schwarz inequality as well. In this case, one has

$$|G_n| \leq \frac{|\nu|^n}{\sqrt{(2n)!}}. \quad (C.51)$$

This proves the convergence, as the usual procedure do, but the estimation is made with the average intensity which, different to the maximal value of $|\psi|$, is propagation-independent.

From the estimation for G_2 and Eq.(C.50) it follows that if initially

$$|\psi_k|^2 / I \gg |\nu| / \sqrt{6} \quad (C.52)$$

the k -th order preserves its identity, because the sum of the subsequent terms for J_k will be smaller than G_1 . Thus, if initially the order is strong, and the nonlinearity, as determined by the ν parameter is small, the amplitude evolves in a characteristic ring in a phase plane (see Fig.2 for a numerical illustration). If the nonlinearity parameter ν is large, the initially strong orders loose their identity, and the ring becomes a circle. In this case there is still a finite number of strong orders, but this number is greater than the number of orders which were strong initially.

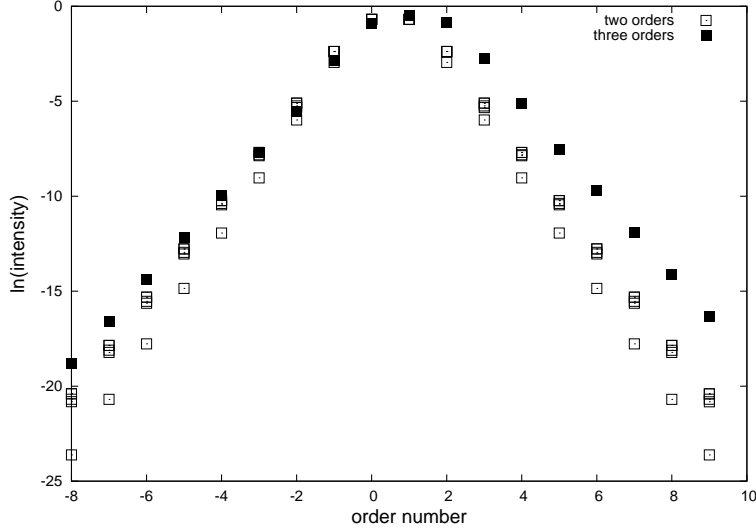


FIGURA C.1:

Numerical illustrations

To determine the actual form of the spectrum when the number of harmonics in it is initially limited, we have performed numerical calculations of propagation for initial conditions given by 2-4 lower Fourier harmonics with randomly taken phases and amplitudes.

The set of ordinary differential equations was obtained from NLS by representing ψ as a Fourier series, Eq.(C.60). After substituting the series into NLS and forcing all higher harmonics to be zero, the set of N differential equations in N variables is obtained, similar e.g. to [36]. For more efficient numerical solution we were compensating for the linear part of propagation by the ansatz :

$$\psi_k(t) = \psi_k(t) \exp(-ik^2 K^2 t) \quad (\text{C.53})$$

After this, the equations for ψ_k were solved numerically with the 4-th order Runge-Kutta method. The consistency was checked by adding new orders to calculation and doubling the number of steps. The algorithm permits to calculate with sufficient exactitude the solution with 20 orders taken into account for lengths up to 10^4 or more. To investigate the diminishing of intensity with the number of diffraction order we were plotting its maximal value along propagation path for all harmonics involved. Different propagation lengths were considered. For the initial conditions investigated, the plots look quite similar. The typical result is presented in Fig.1. The plots exhibit exponentially diminishing tails with a slope depending on the initial conditions and nonlinearity strength. As a function of propagation length there is a pronounced saturation. In fact, the points for propagation lengths $l = 10^3$ and 10^4 are indistinguishable on the graph. The difference in logarithms for the highest harmonic is 0.004. The chosen value for self-focusing nonlinearity is already

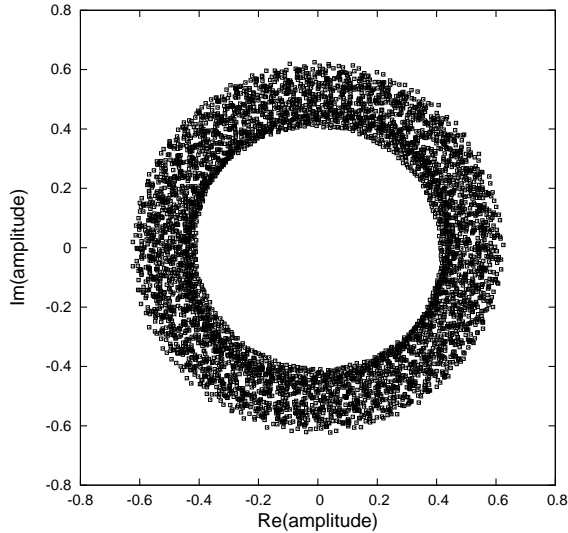


FIGURA C.2:

in a region of modulation instability.

For not very small nonlinearity parameter ($4 < |\nu| < 40$) the slope of exponential diminishing in Fig.1 scales well as $|\nu|^{-1}$. For large ν the number of orders necessary to take into account grows, which makes a calculation more difficult. For negative nonlinearity of the same strength the slope is larger, than for positive one, and it diminishes more or less proportional to $|\nu|^{-1/2}$, though the correspondence is worse than in the self-focusing case.

In Fig.2 we show the complex plane evolution for the strong order at a moderate nonlinearity. It is seen that the order intensity upon propagation varies in certain limits only, in accordance with the theory presented above. The Eq.(C.52) seems to underestimate the value of ν necessary for order destruction approximately one order of magnitude. It is possible, though, that other configurations of beams lead to closer values.

Cnoidal waves like interaction of finite modes.

Propagation of wave packets in nonlinear media with periodically varying dispersion or refractive index is one of the fundamental problems of modern photonics. Such remarkable applications as optical pulse transmission in dispersion managed (DM) fiber links [26], a stretched pulse generation in mode-locked laser systems and recirculating fiber loops [27], evolution of soliton-like beam in a periodically modulated nonlinear waveguide [9] should be mentioned as examples.

An impressive progress was achieved in this area from the theoretical point of view during the last years. Such effective methods as the guiding-center concept, different variational approaches, the multiscale theory, and the numerical averaging method [26],[14]

have been developed. Dark, gray and antisymmetric solitons were recently found in DM structures [16]. Sequences of DM solitons can be effectively used for data transmission because of enhanced robustness. Moreover, interaction between DM solitons can be strongly suppressed under appropriate conditions [42].

Recently, basic properties of doubly-periodical nonlinear waves (cn-, dn- and sn-type) in dispersion-managed systems were considered [31]. It was shown, that in the strong localization limit the energy of breathing elliptic wave is well above that of classical one with a constant average dispersion. Possibility of stabilization of elliptic waves in DM fibers was also demonstrated.

In this paper our attention is focused on the cases of weak and moderate localization that have essentially new features in comparison with soliton propagation. The analysis is based on the concept of the truncated elliptical wave that means its representation by a finite sum of harmonics with specially adjusted coefficients. For weak localization this procedure offers quite acceptable approximation, which always can be revised by increasing number of harmonics. Fixing the average dispersion, the dispersion difference and increasing the map period we show how the regular propagation dynamics similar to that in fiber with average dispersion is replaced by the chaotic behavior. Growth of the map period leads to the appearance of regions with chaotic behavior in the phase space coexisting with the regions of quasi-periodic behavior. Close vicinity of a mapping point corresponding to the truncated cnoidal wave can still remain neutrally stable, but small perturbations move the solution into the chaotic region. Long-scale DM (when the dispersion map period is comparable with the longitudinal period of the cnoidal wave) leads to the deterministic KAM chaos even in the case of lowest dimensionality of the phase space [7]. Note, that the scenario of transition to chaos has much in common with the polarization chaos in nonlinear birefringent resonators [35].

The paper is organized as follows. First, we discuss the mathematical formulation of the problem and approximation of elliptic waves with a finite number of harmonics. Then we examine in detail the case of lowest dimensionality in the spectral domain that offers the opportunity of mapping on the Poincaré sphere. It seems to be very special case, nevertheless, it is capable to model cn, sn and dn-type waves. It also demonstrates such important features as possibility to find self repeating (breathing) solutions and transition to chaos. Finally, we discuss the expansion of the method to bigger number of harmonics, physical meaning and limitations of the solutions obtained.

Mathematical model and system parameters.

We use the (1+1)D Schrödinger type equation for the lossless nonlinear optical fiber modified to include longitudinally varying group velocity dispersion $d(\xi)$:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{d(\xi)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + |q|^2 q = 0, \quad (\text{C.54})$$

In this equation $q(\eta, \xi) = (L_{dis}/L_{spm})^{1/2} I_0^{-1/2} A(\eta, \xi)$ is the normalized complex amplitude; $A(\eta, \xi)$ is the slowly varying envelope; I_0 is the peak input intensity; $\eta = (t - z/u_{gr})/\tau_0$ is the running time; τ_0 is the characteristic time scale; $u_{gr} = (dk/d\omega)_{\omega=\omega_0}^{-1}$ is the group velocity; $k_0 = k(\omega_0)$ is the wave number; ω_0 is the carrying frequency; $\xi = z/L_{dis}$ is the normalized propagation distance; $L_{dis} = \tau_0^2/|\beta_2|$ is the dispersion length; coefficient $\beta_2 = (d^2k/d\omega^2)_{\omega=\omega_0}$ is defined by the group velocity dispersion (GVD) for a standard communication fiber; $L_{spm} = 2c/(\omega_0 n_2 I_0)$ is the self-phase modulation length; n_2 is the coefficient of nonlinearity.

The normalized dispersion coefficient in Eq.(C.54) for one period of the two-step symmetric dispersion map is introduced by the relations

$$\begin{aligned} d(\xi) &= d_0, 0 < \xi < aL \\ d(\xi) &= -d_0, aL < \xi < (a+b)L \\ d(\xi) &= d_0, (a+b)L < \xi < (2a+b)L \end{aligned} \quad (C.55)$$

Here $L_0 = (2a+b)L$ is the period of the dispersion map, $d_0 > 0$ is one half of the dispersion difference, a, b are positive parameters; the average dispersion is given by $d_{av} = (2a-b)/(2a+b)d_0$, and L is the characteristic length. Note, that the first segment with anomalous group velocity dispersion (focusing) is followed by a segment with a normal GVD (defocussing) and terminated with the segment with the anomalous GVD.

Two specific doubly-periodic solutions of Eq.(C.54) are known for the constant anomalous GVD $d(\xi) = d_{av} > 0$ in a form of elliptic dn- and cn- waves.

$$q_{dn}(\eta, \xi) = \kappa |d_{av}|^{-1/2} dn(\kappa\eta; m) \exp[i\kappa^2(1-m^2/2)\xi + i\psi_0] \quad (C.56)$$

$$q_{cn}(\eta, \xi) = m\kappa |d_{av}|^{-1/2} cn(\kappa\eta; m) \exp[i\kappa^2(m^2-1/2)\xi + i\psi_0], \quad (C.57)$$

and one stationary periodic solution for normal constant dispersion $d(\xi) = d_{av} < 0$:

$$q_{sn}(\eta, \xi) = m\kappa |d_{av}|^{-1/2} sn(\kappa\eta; m) \exp[i\kappa^2(1+m^2)\xi/2 + i\psi_0]. \quad (C.58)$$

Here $cn(\eta, \xi)$, $sn(\eta, \xi)$, $dn(\eta, \xi)$ are Jacobi elliptic functions; $0 \leq m \leq 1$ is the modulus of the elliptic function that describes the degree of localization of the wave field energy; $\kappa > 0$ is the arbitrary form-factor; ψ_0 is the constant phase. The transverse period of the dn-wave equals $l_{dn} = 2K(m)/\kappa$, where $K(m)$ is the elliptic integral of the first kind, whereas transverse periods of cn- and sn- waves are equal to $l_{cn} = l_{sn} = 4K(m)/\kappa$. It is worth mentioning that the analytical solutions given by Eqs.(2-4) are a good initial guess for calculation of the profile of the true breathing elliptic wave by the numeric averaging method [4,7]. Trigonometric series for elliptic functions are well known:

$$\begin{aligned}
dn(\eta; m) &= \pi l_{dn}^{-1} + 4\pi l_{dn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (1 + \rho^{2n})^{-1} \cos[2\pi n\eta/l_{dn}], \\
cn(\eta; m) &= 8\pi l_{cn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1/2} (1 + \rho^{2n-1})^{-1} \cos[2\pi(2n-1)\eta/l_{cn}], \\
sn(\eta; m) &= 8\pi l_{sn}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1/2} (1 - \rho^{2n-1})^{-1} \sin[2\pi(2n-1)\eta/l_{dn}],
\end{aligned} \tag{C.59}$$

and $\rho = \exp[-\pi K(\sqrt{1-m^2})/K(m)]$. In the limit of weak localization $m \rightarrow 0$, $K(m) \rightarrow \pi/2$, $K(\sqrt{1-m^2}) \rightarrow \infty$, and only few terms are sufficient for adequate representation of corresponding elliptic functions.

In general complex form the truncated elliptic wave can be written as :

$$q_{el}(\eta, \xi) = \sum_{n=-N}^{n=N} S_n(\xi) \exp(i\Omega_n \eta), \tag{C.60}$$

where $S_n(\xi)$ are the amplitudes of harmonics, the sum is taken over appropriate frequencies given by Eqs.(5). By substitution of Eq.(6) into Eq.(1), it is possible to obtain the system of ordinary differential equations in the Hamiltonian form :

$$i \frac{\partial S_n}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial S_n^*}. \tag{C.61}$$

and the Hamiltonian is given by:

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{S}^*, \xi) = \frac{d(\xi)}{2} \sum_n \Omega_n^2 S_n S_n^* - \frac{1}{2} \sum_{l_1+l_2=l_3+l_4} S_{l_1} S_{l_2} S_{l_3}^* S_{l_4}^*, \tag{C.62}$$

where each index l takes any possible value of n .

Intuitively it is clear that the solution of the truncated set of equations is adequate if the contribution of higher harmonics in the solution of the complete equation remains small upon propagation. This is true for the stationary cnoidal waves, where amplitudes of harmonics remain the same, thus higher harmonics do not grow. In fact, the solutions of truncated equations which approximate cnoidal waves can be found quite easily. They correspond to the Hamiltonian minimum on the sphere of constant intensity $I = \sum S_n S_n^* = const$. If we restrict the minimization procedure to real amplitudes, the resulting values coincide quite well with the Fourier coefficients of the cnoidal wave expansion Eq.(5) with the same period and the same intensity, if the number of harmonics is sufficient to represent well the cnoidal wave with these parameters. We will call these solutions truncated elliptic waves. Dn-type truncated elliptic waves are obtained if

the number of harmonics is odd, cn- and sn- waves, if the number of harmonics is even, depending on the symmetry/antisymmetry of coefficients. Truncated cnoidal waves are neutrally stable, small variations of initial amplitudes produce a small jitter around the trajectory of the cnoidal wave in the phase space. This is the consequence of the complete integrability of the nonlinear Schrödinger equation - the solution moves to the nearby invariant torus.

Truncated elliptic waves in a dispersion-managed fiber.

The dispersion management takes the situation away from the complete integrability. According to the KAM theorem for weak perturbation most invariant tori survive, but degenerate trajectories break into chaotic regions. For bigger perturbation the volume occupied by chaotic trajectories grows and finally all the phase space becomes chaotic. First of all we will illustrate this process when only two harmonics are involved (weak localization, $m \ll 1$). Note, that both dn- and cn- type solutions can be approximated, if we take into account the symmetry of coefficients $S_n = S_{-n}$. Sn-type solutions are obtained with an even number of harmonics and antisymmetric amplitudes.

In the case of two harmonics the mapping on the Poincaré sphere proves to be very effective tool for analysis of the dynamic behavior in general and transition to chaos in particular. The Stokes parameters are introduced instead of the spectral amplitudes by following relations :

$$\begin{aligned} A &= I_1 - I_2 = S_1 S_1^* - S_2 S_2^* \\ B &= -i(S_1 S_2^* - S_1^* S_2) \\ C &= S_1 S_2^* + S_1^* S_2. \end{aligned} \tag{C.63}$$

The intensity conservation leads to the identity:

$$A^2 + B^2 + C^2 = const, \tag{C.64}$$

thus the trajectories $A(\xi), B(\xi), C(\xi)$ lie on a sphere. Their shape can be determined by rewriting Hamiltonian in terms of Stokes parameters, the trajectories are intersections of a sphere with parabolic cylinders for the case of dn-wave, and with elliptic cylinders in a case of cn-waves (see [10] for details).

To illustrate the propagation in a dispersion-managed fiber we calculate numerically and plot on the Poincaré sphere mapping points corresponding to the solution parameters after consecutive dispersion map periods. Typically, 150 points per trajectory are taken. The sum of intensities of harmonics (the sum of amplitude squares) is taken equal to 1. The Stokes parameters were scaled to be plotted on the sphere with a radius 1 both for cn- and dn- cases.

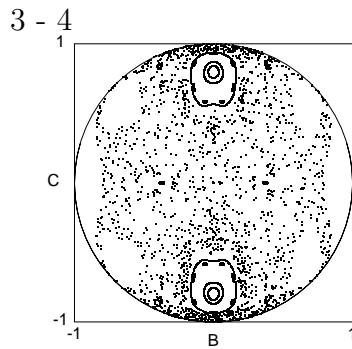
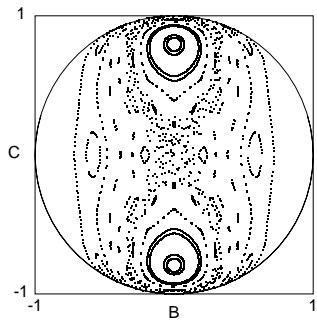
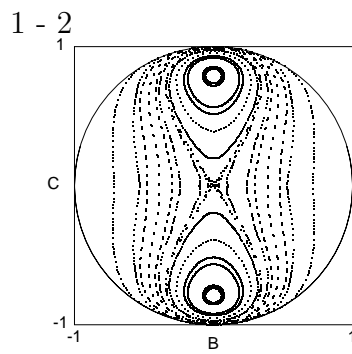
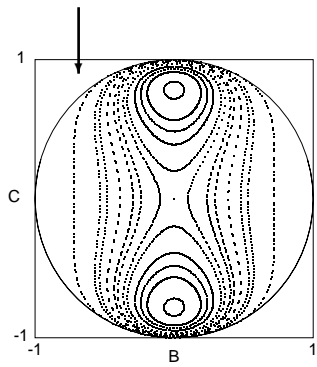


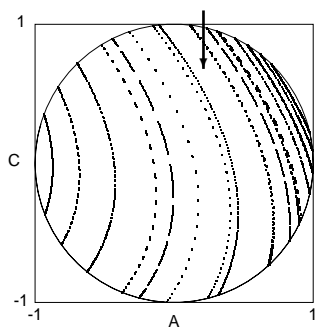
FIGURA C.3:

The dn-type wave evolution is presented in Fig.1. We have chosen the dispersion map given by the Eq.(2) with $d_0 = 1, a = 0.5, b = 0.2$. The dispersion map period L served as a variable parameter. For the completely integrable case (uniform fiber with positive dispersion, no DM) the mapping points form the closed lines corresponding to the solution trajectories. If L is small in comparison with a typical longitudinal period of the cnoidal waves (which is of an order of π in our case), the trajectory pattern is very similar to that one with a dispersion equal the average $d_{av} = 2/3$ (see Fig. 1-1). When the map period grows, chaotic trajectories appear close to the unstable periodic points of the map.

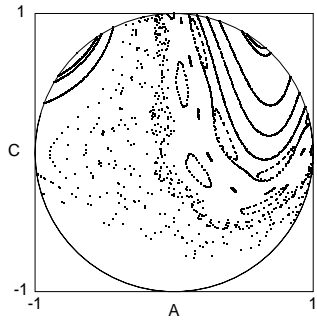
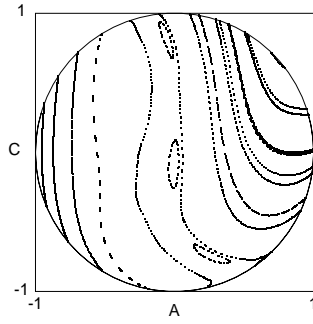
For the dn-type solution, the point in the center of the circle in Fig.1 corresponds to uniform intensity distribution (only zeroth harmonic exists), and it is unstable because of the modulation instability for anomalous GVD and positive nonlinearity. The trajectory passing through this point becomes chaotic first. For $L = 0.75$ (Fig 1-2), the chaotic region is quite small, but it increases rapidly with L , (Figs.1-3, 1-4). The process is characterized by a formation of a typical homoclinic tangle near the unstable periodic points. The point in the phase space corresponding the breathing dn-type cnoidal wave is quite close to this chaotic region. While the nearest vicinity of cnoidal wave remains stable with growing dispersion map period L , the region of the neutral stability diminishes, and finally even the trajectories very close to the cnoidal wave point become chaotic. For moderate dispersion management there is also a big number of chains with alternating stable and unstable periodic points which is typical for KAM chaos (Figs. 1-3, 1-4).

We will now briefly discuss the key features of KAM chaos [8]. For integrable Hamiltonian systems, trajectories in the 2N-dimensional phase space lie on the N-dimensional tori. The action-angle variables can be introduced, and each trajectory has N characteristic frequencies. The general Kolmogorov-Arnold Moser theorem states that for small perturbations in integrable Hamiltonian systems most of invariant tori survive, but some trajectories with degenerate frequencies start to break into chaotic regions. In our case the Poincaré sphere is the two-dimensional subspace of the four-dimensional phase space, and the closed line of the non-perturbed problem (without DM) are intersections of the sphere with the invariant tori. For dn-wave, the degenerate torus corresponds to the stationary point $B = C = 0$ on the sphere. One stable and one unstable manifold start in the vicinity of this stationary point. They are formed by points which either approximate the stationary point with any iteration moving forward or backwards in time. The manifolds produce the eight-figure, the point which starts on the unstable manifold in the close vicinity of the stationary point first moves away and then approximates it on the stable manifold.

For dispersion management case the picture is different - the manifolds are arranged in very complicated loops called homoclinic tangle [8]. The center of the eight-figure becomes diffuse, as it can be seen in Fig.1-2. The trajectories which have periodic points under perturbation first break into chains with alternating hyperbolic and elliptic periodic points, and similar homoclinic tangles are formed in the vicinity of hyperbolic ones. Some of such chains can be seen in Fig. 1-3, 1-4, and this behavior is quite typical. The numerical



1 - 2



3 - 4

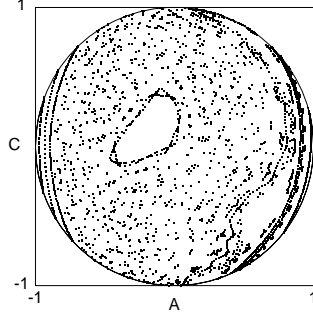


FIGURA C.4:

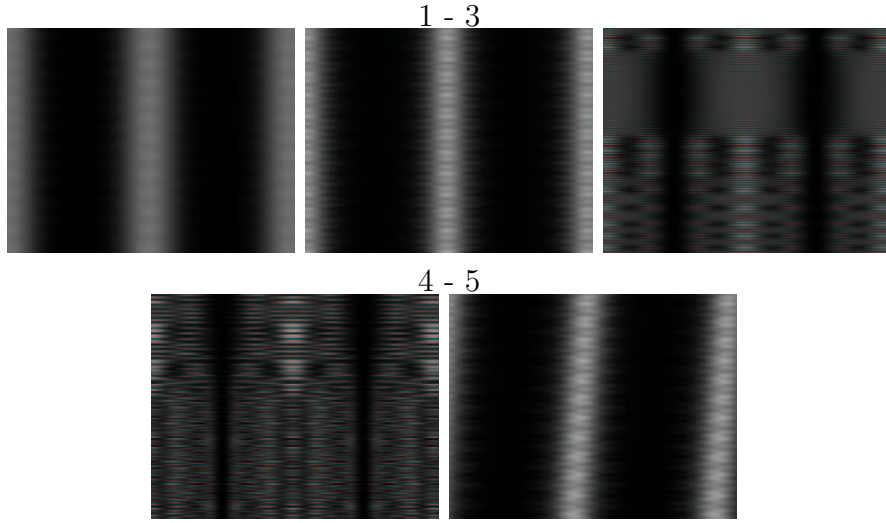


FIGURA C.5:

example of the homoclinic tangle formation with more detailed description related to the polarization dynamics in nonlinear resonators can be found in Ref.[9].

For the cn-case, the topology of the trajectories is different. Here the unstable trajectory does not exist for the integrable case (Fig.2-1). Thus, with the growth of L the chains of periodic points of the map appear, and then the chaos develops close to unstable periodic points of these chains. Thus, for the cn-wave for the same period and intensity as the dn-wave, the chaotic region develops for bigger dispersion management length, and starts quite far away from the the region of truncated cnoidal wave in the phase space. Consequently, cn-waves are more stable with respect to a long-scale dispersion management. Note, that for the weakly localized sn-wave patterns on the sphere are qualitatively similar to that for cn-wave, so we will not go into details. When the number of harmonics taken into account grows, the main features of the presented scenario are still valid. The truncated cnoidal wave exists, and for weak dispersion management there is a solution which corresponds to a wave with dispersion averaged over the period. The long-scale dispersion management leads to the appearance of chaotic regions in a phase space. The projection on the Poincaré sphere in multi-harmonics case is less informative, because even for the integrable case the projections do not form closed lines. Some amount of jitter appears due to the growth of harmonics number. To illustrate the influence of additional harmonics on the solution we have calculated the propagation of the cn-type wave using 4, 8 and 10 harmonics truncation (Fig.3). It is seen that for small L the solution retains its structure. The threshold value of L producing chaotic behavior diminishes if additional harmonics are involved. If the perturbation is not symmetric, the cnoidal wave can start to move, but generally retains its structure (Fig. 3-5).

Concluding remarks.

First:

The NLS with periodic initial conditions is "essentially finite-dimensional". This means that the intensity concentrated in higher diffraction orders remains uniformly small upon propagation. If initial intensity is concentrated in a small number of orders M , the enrichment of spectrum related to self-focusing/ defocusing occurs, but beyond this there is no further spreading. We show that the spectrum tails rapidly (exponentially) diminish. Thus, the propagation can be modeled for any length by taking into account only the finite number N of diffraction orders. If nonlinearity is small, N is not much greater than M ; for strong nonlinearity, especially self-focusing one, they can differ substantially. The harmonics beyond N introduce a uniformly small perturbation. Thus, the adequate description can be obtained with a finite number of ordinary differential equations. If one uses an integrable finite-dimensional approximation (for example by rewriting the integrable Ablowitz-Ladik set [1] for discrete Fourier harmonics), the solutions will lie on invariant N -dimensional tori in $2N$ dim phase space. The KAM theorem imply that the distortions due to the rest of harmonics will slightly deform these tori and introduce changes in phase velocities.

For rapidly diminishing initial conditions, the solitons and diffracting part are formed upon propagation. The analysis of this paper shows that for the periodic initial conditions the bound structure of Fourier harmonics is formed around strong orders. The number of orders involved in this structure depends on the nonlinearity strength, and it is essentially finite. This structure is characterized by N propagation constants giving characteristic phase velocities. If all or most of these frequencies are equal, the soliton-like structures similar to cnoidal waves are formed. For moderate nonlinearity the strong waves do not lose their identity, thus one can speak about the "dressed plane wave".

As only the finite number of characteristic frequencies exists, the total behavior is nearly recurrent. The recurrence was observed in a number of numerical experiments. It is also consistent with a fact that quasi-periodic finite band solutions form a dense set in a phase space. Our treatment gives a complementary picture, showing that the solution with smooth initial data is close to a quasi-periodic one. It is important, that the number of independent frequencies can be estimated from the initial data, either with the Eq.(C.43), or using higher integrals.

Second

Concluding the paper we would like to mention that truncated elliptic waves demonstrate very rich and interesting propagation dynamics in dispersion-managed fibers including neutrally stable propagation, quasi-periodic behavior and transition to Kolmogorov-Arnold-Moser chaos. Some specific features of this nontrivial dynamics appear at the level

of the lowest dimensionality and are related rather to the *discreteness* of the truncated elliptic waves in the spectral domain and the *integrability* of corresponding governing equations, than with the number of spectral degrees of freedom. The key parameters that define the propagation scenario are the degree of nonlinearity proportional to light intensity, nonlinearity constant and temporal period, and the degree of deviation from integrable task given in our case by the dispersion map period. Both factors are necessary for the chaotic behavior development.