

**I  
N  
A  
O  
E**

# **Estudio de la Interacción de un Láser con un Ion Atrapado**

Por

**M. en C. José Manuel Vargas Martínez**

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias en la especialidad de  
Óptica**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica.**

Supervisada por:

**Dr. Héctor Manuel Moya Cessa  
INAOE**

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica**

©INAOE

Tonantzintla, Pue.

Enero de 2008

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir  
y distribuir copias en su totalidad o en partes de esta tesis.

# Resumen

En la actualidad es posible atrapar iones individuales en trampas de Paul o de Penning, las partículas cargadas son confinadas en el espacio mediante campos electromagnéticos. Un ion atrapado puede contener mucha energía vibracional lo cual es indeseable en ciertas aplicaciones. En esta tesis, partiendo del Hamiltoniano de un ion atrapado en un potencial armónico, se demuestra que es posible encontrar transiciones tipo Jaynes-Cummings y anti-Jaynes-Cummings en el régimen de intensidad intermedia, es decir, ajustando la intensidad del láser que induce el acoplamiento entre los estados internos y vibracionales del ion proporcionalmente a la frecuencia de vibración del ion; estas transiciones son de utilidad porque hacen posible extraer dicha energía vibracional. En nuestro tratamiento consideramos que el ion y el láser están en resonancia lo que elimina la necesidad de usar láseres sintonizables.

También se analiza el problema de un ion atrapado en una trampa dependiente del tiempo interactuando con un campo láser. Mediante un conjunto de transformaciones unitarias con parámetros dependientes del tiempo se muestra que este sistema es equivalente a la interacción entre un campo cuantizado y un sistema de dos niveles con parámetros dependientes del tiempo. El Hamiltoniano se linealiza de tal forma que puede ser resuelto mediante métodos que se encuentran en la literatura y que involucran parámetros dependientes del tiempo. La linealización está libre de aproximaciones y de consideraciones sobre los parámetros del sistema como son, por ejemplo, el parámetro de Lamb-Dicke, la dependencia temporal de la frecuencia de la trampa y la desintonía, con lo que se logra obtener la mejor solución para este tipo de sistema.

# Abstract

Actually it is possible to trap single ions in Paul or Penning traps, charged particles are confined in space via electromagnetic fields. A trapped ion can have a lot vibrational energy which is undesirable in some applications. In this thesis, starting from the Hamiltonian of a trapped ion in a harmonic potential, it is shown that is possible to get Jaynes-Cummings and anti- Jaynes- Cummings-like transitions in the intermediate intensity regime, that is, adjusting the intensity of the laser that induce the coupling between the internal and vibrational states of the ion proportionally to the vibrational frequency of the ion; these transitions are useful because make possible to extract the vibrational energy. In our treatment we consider that the ion and the laser are in resonance what eliminate the need of using tuned lasers.

Also, the problem of a trapped ion in a trap with time-dependent parameters interacting with a laser field is analyzed. By using a set of time-dependent unitary transformations is shown that this system is equivalent to the interaction between a quantized field and a two level system with time dependent parameters. The Hamiltonian is linearized in such a way that can be solved with methods that are found in some papers and that involve time-dependent parameters. The linearization is free of approximations and assumptions on the parameters of the system as are, for instance, the Lamb-Dicke parameter, the time-dependency of the frequency trap and the detuning, with what we can obtain the best solution for this kind of sytem.

# Agradecimientos

Al **Dr. Héctor Manuel Moya Cessa** por haber dirigido la elaboración de esta tesis.

A los **Doctores: Gabriel Martínez Niconoff, Francisco Javier Renero Carrillo, Erwin José Armando Martí Panameño, Arturo Olivares Pérez y Pablo Barberis Blostein**, por haber revisado y aportado sugerencias a este trabajo.

Al **Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica** y al **CONACYT** por haberme dado todo el apoyo material y económico sin el cual este trabajo no hubiera sido posible.

# Índice general

<b>Capítulo 1 Introducción</b>	<b>1</b>
Referencias	5
<b>Capítulo 2 Trampa de Paul</b>	<b>6</b>
2.1 El potencial cuadrupolar de la trampa de iones	6
2.2 Potencial oscilante	9
2.3 Movimiento en la trampa de Paul	
2.4 Solución aproximada de la ecuación de Mathieu	12
Referencias	17
<b>Capítulo 3 Interacción ion-láser en una trampa con frecuencia independiente del tiempo</b>	<b>18</b>
3.1 Hamiltoniano del sistema	18
3.1.1 Oscilador armónico	19
3.1.1.1 Notación de Dirac	23
3.1.2 Energía interna del ion	25
3.1.3 Interacción dipolar	27
3.2 Interacción fuera de resonancia e intensidad baja	30
3.3 Interacción resonante a frecuencia intermedia	42
Referencias	49
<b>Capítulo 4 Interacción ion-láser en una trampa con frecuencia dependiente del tiempo</b>	<b>50</b>
4.1 Oscilador armónico dependiente del tiempo	50
4.1.1 Invariante de Lewis	50
4.1.2 Transformaciones unitarias	52

4.3 Análisis del Hamiltoniano de interacción entre un láser con un ion atrapado con frecuencia dependiente del tiempo	56
4.4 Linealización del sistema	63
Referencias	66
<b>Capítulo 5 Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>68</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En la física tratamos de observar la estructura de la materia y de estudiar los procesos dinámicos que se llevan a cabo en ella. Pero para entender el comportamiento de los procesos naturales como el juego de unos pocos constituyentes gobernados por unas pocas leyes y fuerzas fundamentales, uno tiene que medir las propiedades de los constituyentes más relevantes y su interacción tan preciso como sea posible. Como todos los procesos están interconectados lo ideal es separarlos y estudiarlos individualmente. La posibilidad de observar partículas individuales atrapadas abrió la posibilidad de una nueva dimensión en mediciones atómicas. Hasta hace unos años todas las mediciones fueron llevadas a cabo sobre un ensamble de partículas. Por lo tanto, el valor medido era un valor promediado sobre muchas partículas.

En este caso uno asume que todos los átomos tienen exactamente el mismo comportamiento estadístico si uno atribuye el resultado a un átomo individual. En un átomo atrapado, sin embargo, uno puede observar su interacción con un campo de radiación y su propio comportamiento estadístico únicamente.

La posibilidad de llevar a cabo atrapamiento de nubes de partículas o incluso átomos o iones individuales en pequeñas regiones del espacio fue abierta con la invención de trampas electromagnéticas. Tales trampas permiten la observación de partículas aisladas, por largos períodos de tiempo. La trampa de Kingdon se considera el primer tipo de trampa de iones en ser desarrollada (1923) [1.1]; esta consiste de un alambre delgado y cargado, los iones son atraídos hacia el alambre pero su momento angular hace que giren en órbitas circulares alrededor del alambre en trayectorias que tienen baja probabilidad de chocar contra el mismo. Sin embargo este tipo de trampa no fue tan ampliamente usada en esa época por

que tenía cortos tiempos de almacenamiento y porque su potencial no es armónico.

Desarrollos más recientes han sido la construcción de otros tipos de trampas como la de Penning [1.2] y la de Paul [1.3]. En la trampa de Penning la aplicación de campos eléctricos junto con un campo magnético hace posible el atrapamiento de iones. Los principios de la trampa de Penning fueron descritos en 1936 pero su completo desarrollo fue hasta después de que la trampa de Paul fue introducida en 1959.

La trampa electrodinámica fue inventada por Wolfgang Paul (quien recibió el premio Nobel por su trabajo). La idea es que una partícula cargada no puede ser confinada en el espacio usando campos eléctricos constantes, un campo eléctrico oscilando a radiofrecuencias es aplicado en su lugar, formando el potencial apropiado para realizar el atrapamiento. Esta emplea no solo las fuerzas de enfocamiento o desenfocamiento de campos eléctricos cuadrupolares actuando sobre iones sino que también explota las propiedades de estabilidad de sus ecuaciones de movimiento.

Ejemplos de grupos de investigación que se dedican actualmente a la realización de experimentos con iones atrapados son el de la Universidad de Innsbruck, Austria, y el NIST Ion Storage Group, en Boulder, Colorado. Estos dos grupos se encuentran entre los más importantes en el mundo.

Un ion atrapado individualmente es de interés porque ello provee un sistema simple para ser estudiado. En primer lugar, la forma del movimiento de un ion en una trampa de Paul puede ser modelada como armónica. Además, la simplicidad de un único ion atrapado permite una comparación más directa con la teoría. Iones individuales de  $\text{Ca}^+$ ,  $\text{Be}^+$ ,  $\text{Ba}^+$  y  $\text{Mg}^+$ , por ejemplo, pueden ser almacenados incluso durante días.

Los iones atrapados puede ser utilizados para implementar una compuerta cuántica y muchos iones atrapados arreglados en cadena parece ser una



herramienta prometedora para realizar una computadora cuántica [1.4]. Cada ion en la cadena representa una unidad fundamental de información o qubit. El atrapamiento de iones individuales también ofrece numerosas posibilidades en espectroscopía [1.5], en la investigación de estándares de frecuencias [1.6], [1.7], en el estudio de saltos cuánticos [1.8], y en la generación de estados no clásicos de luz [1.9]. En algunas aplicaciones es un requerimiento que el ion se encuentre en su estado base vibracional. Esto sirve para dos principales propósitos: hacer que los iones sean más estables en la trampa, aumentando su duración de confinamiento, y para eliminar movimientos aleatorios indeseados. Mediante el uso apropiado de láseres la energía puede ser removida hasta llevarlos al estado base de vibración. Con la ayuda de estos láseres los niveles internos del ion atrapado pueden ser acoplados a sus estados cuánticos vibracionales de tal modo que, para una cierta desintonía, el acoplamiento es equivalente al Hamiltoniano Jaynes-Cummings [1.10]. Por otro lado, el campo de luz que induce el acoplamiento puede ahora ser sintonizado de tal modo que permita interacciones en las cuales el estado interno del átomo y vibracional sufren una transición, ya sea, a un nivel de energía superior o inferior al mismo tiempo. Este tipo de acoplamiento es denominado anti-Jaynes-Cummings. Alternando sucesivamente estos dos tipos de interacciones puede lograrse que un ion atrapado pierda energía hasta ser llevado a su estado base vibracional.

En esta tesis se realiza un trabajo teórico en donde se reconsidera el problema y se demuestra que es posible obtener los dos tipos de interacciones mencionadas anteriormente utilizando el láser que provoca el acoplamiento a una sola frecuencia resonante con el ion y ajustando su intensidad proporcionalmente a la frecuencia de oscilación del ion, lo que resulta más fácil de implementar que utilizando un láser sintonizable.

Para esto, en el capítulo 2 se revisa la teoría básica de la trampa de Paul, ya que estaremos suponiendo a un ion confinado en este tipo de trampa.

En el capítulo 3 se expone la teoría, como antecedente, sobre el enfriamiento láser de movimiento vibratorio de un ion considerando la interacción de este con un

láser sintonizable fuera de resonancia. Junto con esto se muestra una nueva propuesta considerando interacción resonante entre el ion y un láser.

En el capítulo 4 analizamos el caso de un ion con una frecuencia dependiente del tiempo interaccionando con un campo láser. Mediante una serie de transformaciones unitarias se linealiza el Hamiltoniano de este sistema llevándolo a una forma soluble sin necesidad de ningún tipo de aproximaciones. La linealización también es válida para cualquier tipo de desintonía, y para cualquier dependencia temporal de la trampa.

El capítulo 5 es dejado para las conclusiones.

## Referencias

- [1.1] Kingdom, H. H, (1923), Phys.Rev. **21**, 408-418.
- [1.2] Penning, F. M., (1937). Physica **4**, 71-75.
- [1.3] Paul, W. (1990) Rev. Mod. Phys. **62**, 531-540.
- [1.4] J.I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091(1995).
- [1.5] Wayne M. Itano, J. C. Bergquist, Randall G. Hulet, and D. J. Wineland.  
“Precise Optical Spectroscopy with Ion Traps”, Physica Scripta. Vol. **T22**, 79-84,  
1988.
- [1.6] D. J. Wineland, W.M. Itano, J. C. Bergquist, and H. Hemmati, "Frequency  
standard research using stored ions," in Laser-Cooled and Trapped Ions,  
Proceedings of the Workshop on Spectroscopic Applications of Slow Atomic  
Beams, edited by W. D.Phillips, NBS Spec. Pub. 653 (1983), p. 19-25.
- [1.7] J.J. Bollinger, J.D. Prestage, W.M. Itano, and D.J. Wineland, "Laser-  
cooled-atomic frequency standard," Phys. Rev. Lett. **54**, 1000-1003 (1985).
- [1.8] H F Powell, M A van Eijkelenborg, W Irvine, D M Segal and R C  
Thompson (2002) *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 205
- [1.9] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland,  
“Generation of Nonclassical Motional States of a Trapped Atom”, Phys. Rev.  
Letters, **76**, 1796-1799, 1996.
- [1.10] T. Jaynes and F. W. Cummings, 1963, Proc. IEEE **51**, p. 89.

# Capítulo 2

## Trampa de Paul

En este capítulo se revisan algunos conceptos básicos sobre la trampa de Paul. Se expone que el potencial de la trampa es uno cuadrupolar y que es necesario tener campos oscilantes para poder llevar a cabo el confinamiento de iones. Se muestra que las ecuaciones que gobiernan el movimiento del ion es la ecuación de Mathieu. Se concluye con una solución aproximada de dicha ecuación.

### 2.1 El potencial cuadrupolar de la trampa de iones

Las trampas de Paul, las cuales utilizan potenciales eléctricos estáticos y oscilantes, se han empleado exitosamente para confinar partículas cargadas. Las partículas son elásticamente ligadas a un eje o coordenada en el espacio si una fuerza restauradora, la cual aumenta linealmente con la distancia  $r$ , actúa sobre ellas

$$\vec{F} = -c \vec{r} . \quad (2.1)$$

En otras palabras, si la partícula se mueve en un potencial parabólico el cual se puede escribir en forma general como

$$\Phi = A(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \quad (2.2)$$

Las herramientas apropiadas para generar tales campos de fuerza para atrapar partículas cargadas o neutras son campos eléctricos y magnéticos. En el campo cuadrupolar eléctrico el potencial es cuadrático en las coordenadas cartesianas,

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2). \quad (2.3)$$

$\Phi$  debe de cumplir la ecuación de Laplace [2.1]

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2.4)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano.

Dicha ecuación impone la condición

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (2.5)$$

Existen varias posibilidades de satisfacer esta condición.

a) Una de ellas es hacer  $\alpha = 1 = -\gamma$ ,  $\beta = 0$ , lo cual resulta en un campo bidimensional.

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2}(x^2 - z^2) \quad (2.6)$$

b)  $\alpha = \beta = 1, \gamma = -2$ , genera la configuración en tres dimensiones, en coordenadas cilíndricas

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{r_0^2 + 2z_0^2}(r^2 - 2z^2), \quad \text{con } r_0^2 = 2z_0^2 \quad (2.7)$$

La configuración (2.6) es generada por cuatro electrodos en forma hiperbólica linealmente extendidos en la dirección  $z$  como es mostrada en la figura 2.1.

La configuración (2.7) se genera por electrodos con forma de hiperboloides de revolución alrededor del eje  $z$ . Figura 2.2

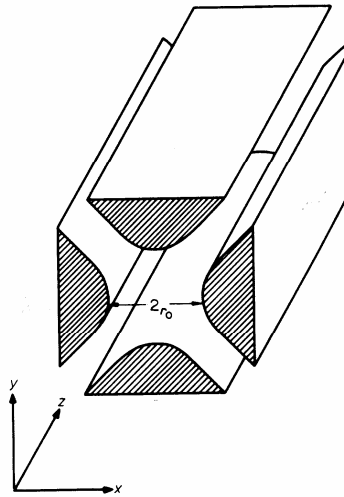


Figura 2.1 Estructura de los electrodos para la configuración (2.6)

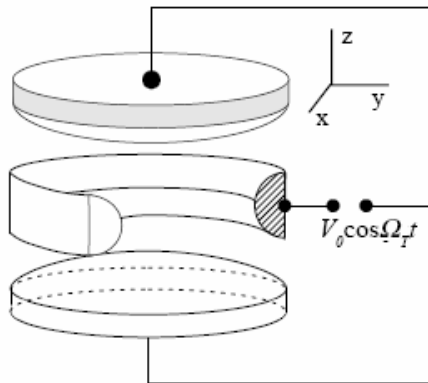


Figura 2.2 Diagrama mostrando los electrodos de la trampa de iones para la configuración (2.7). Tomada de [2.7].

El potencial en los electrodos es  $\pm \frac{\Phi_0}{2}$  si uno aplica el voltaje  $\Phi_0$  entre el par de electrodos opuestos. La magnitud del campo está dado por

$$E_x = -\frac{\Phi_0}{r_0^2} x, \quad (2.8)$$

$$E_y = -\frac{\Phi_0}{r_0^2} y, \quad (2.9)$$

$$E_z = 2 \frac{\Phi_0}{r_0^2} z. \quad (2.10)$$

La inspección de las expresiones para el potencial y el campo eléctrico revelan que las componentes  $r$  y  $z$  del campo eléctrico son independientes una de otra y son funciones lineales de  $r$  y  $z$ , respectivamente. También revelan que el potencial es el de un oscilador armónico en una dirección y un potencial parabólico en la otra. Si uno inyecta un ion es obvio que para un voltaje constante  $\Phi_0$  los iones se mantendrán oscilando armónicamente en el plano  $x$ - $y$ ; pero debido al signo opuesto en el campo  $E_z$ , su amplitud en la dirección  $z$  aumentará exponencialmente. Las partículas se desenfocarán y se perderán al chocar contra los electrodos. Así, el potencial cuadrupolar estático por si mismo no es capaz de confinar partículas en tres dimensiones, ya que la forma del potencial produce a lo más equilibrio inestable.

## 2.2 Potencial oscilante de la trampa de Paul.

Sin embargo este comportamiento puede ser evitado si se modifica el aparato. Aplicando un campo eléctrico oscilatorio se produce una situación en la cual las partículas pueden ser confinadas. Debido al cambio periódico del signo de la fuerza eléctrica, uno obtiene enfocamiento y desenfocamiento en ambas direcciones de  $x$  y  $y$  alternadamente en el tiempo.

Si el voltaje aplicado es dado por un voltaje continuo más un voltaje  $V$  con una frecuencia  $\Omega$

$$\Phi_0 = U_0 + V_0 \cos \Omega t, \quad (2.11)$$

el potencial resultante en el eje de la trampa tiene la forma

$$\Phi = \frac{U_0 + V_0 \cos(\Omega t)}{r_0^2 + 2z_0^2} (r^2 - 2z^2), \quad (2.12)$$

donde  $r_0$  es la distancia desde el centro de la trampa hasta la superficie del electrodo. En la figura 2.3 se muestra un dibujo de una sección transversal de una trampa de Paul usando un campo eléctrico oscilante.

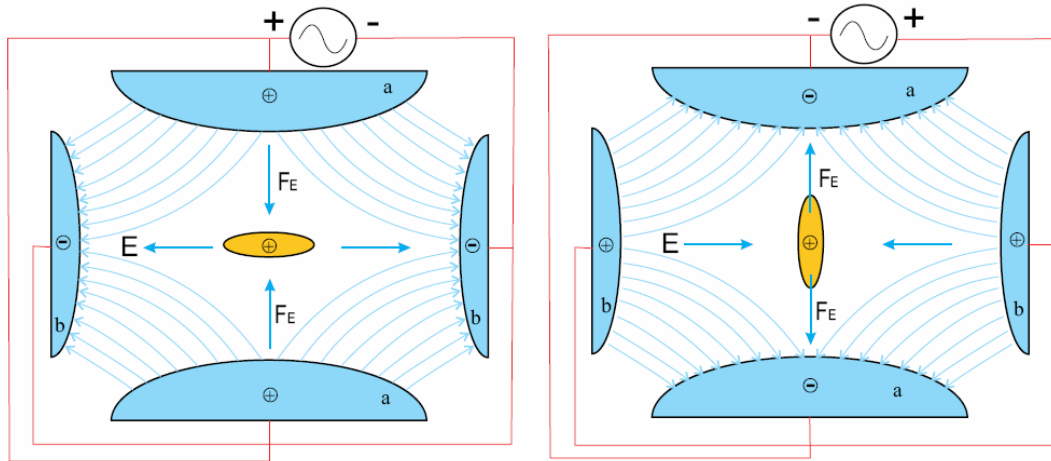


Figura 2.3 Esquema de una trampa de Paul para el almacenamiento de partículas cargadas usando campos eléctricos oscilantes generados por un cuadrupolo. La figura muestra dos estados durante un ciclo AC.

## 2.3 Movimiento en la trampa de Paul

Consideremos el caso de un único ion. En un campo de este tipo las ecuaciones de movimiento de un ion de masa  $m$  y carga  $q$  son

$$m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E} = -q \nabla \Phi, \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad (2.13)$$

o rescrito en las componentes

$$\ddot{x} = -\frac{2q}{mR^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] x, \quad (2.14)$$

$$\ddot{y} = -\frac{q}{mR^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] y, \quad (2.15)$$



$$\ddot{z} = \frac{2q}{mR^2} [2(U_0 + V_0 \cos(\Omega t))]z. \quad (2.16)$$

Después de la sustitución

$$a_r = \frac{8qU_0}{mr_0^2\Omega^2} = -\frac{a_z}{2}, \quad q_r = -\frac{4qU_0}{mr_0^2\Omega^2} = -\frac{q_r}{2} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{\Omega t}{2}, \quad (2.17)$$

las ecuaciones (2.14), (2.15) y (2.16) toman la forma de las ecuaciones de Mathieu

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a_r - 2q_r \cos 2\tau)x = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + (a_r - 2q_r \cos 2\tau)y = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + (a_z - 2q_z \cos 2\tau)z = 0, \quad (2.20)$$

respectivamente. Estas ecuaciones las podemos escribir en una sola

$$\frac{d^2u_i}{d\tau^2} + (a_i - 2q_i \cos 2\tau)u_i = 0. \quad (2.21)$$

El subíndice  $i = r, z$  corresponde a cantidades asociadas con los movimientos axial y radial del ion, respectivamente.  $u_i$  representa el desplazamiento en las direcciones  $r$  y  $z$ .

## 2.4 Solución aproximada de la ecuación de Mathieu

La ecuación de Mathieu es una ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos. Esta ecuación puede ser resuelta por el teorema de Floquet el cual asegura que la solución general de (2.21) es [2.2]

$$u_i(\tau) = A_i e^{i\beta_i \tau} \phi(\tau) + B_i e^{-i\beta_i \tau} \phi(-\tau) \quad (2.22)$$

$A_i$  y  $B_i$  son constantes y

$$\phi(\tau) = \phi(\tau + \pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\tau} \quad (2.23)$$

es una función periódica.

Las ecuaciones de Mathieu tienen dos tipos de soluciones [2.3]:

1) Movimiento estable: Cuando el exponente característico  $\beta$  es puramente real la variable  $u(\tau)$  es acotada y consecuentemente el movimiento es estable. Esto significa que las partículas oscilan con amplitudes limitadas y sin golpear los electrodos.

2) Movimiento inestable: Cuando  $\beta$  tiene una parte imaginaria la función  $u(\tau)$  contiene una contribución exponencialmente creciente. Las amplitudes crecen exponencialmente y las partículas se pierden al chocar contra los electrodos.

Es decir, existen condiciones que posibilitan que el ion quede atrapado en el campo cuadrupolar; es decir, su movimiento axial y radial puede ser estable con amplitudes limitadas.

Las fronteras de las regiones de estabilidad corresponden a valores enteros o cero de  $\beta_i$  y la primera región de estabilidad está rodeada por cuatro líneas con  $\beta_r=0$  y 1 y  $\beta_z=0$  y 1 [2.4], como se muestra en la figura 2.4.

Ya que  $\beta_i$  está determinada por  $a$  y  $q$ , la ecuación de Mathieu tiene soluciones estables como una función de  $a$  y  $q$ . Regiones de estabilidad para la ecuación (2.21) corresponde a regiones en el espacio de los parámetros  $a$ - $q$  en donde se traslapan las regiones de estabilidad en la dirección axial y radial.

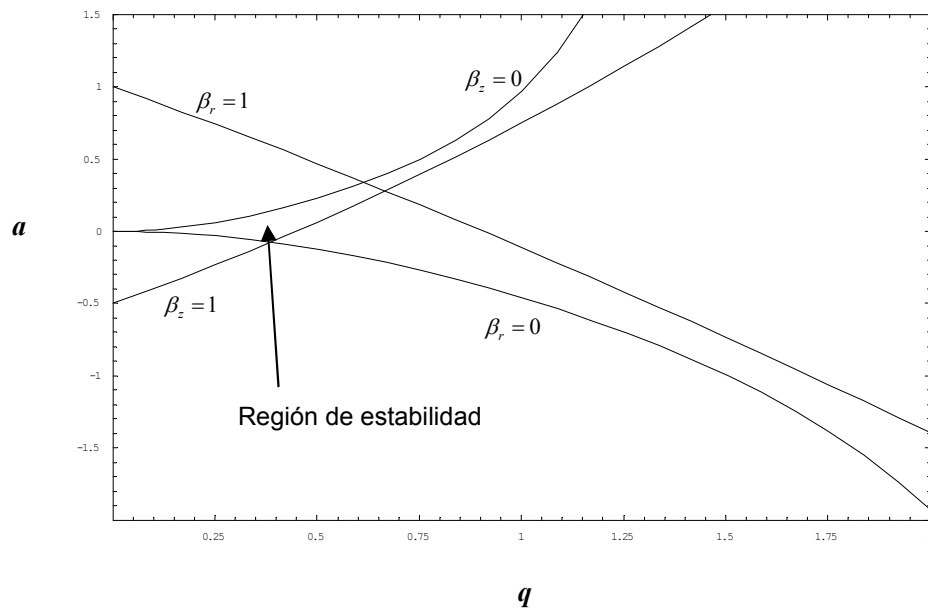


Figura 2.4 Región de estabilidad de la trampa de Paul (Tomada de [2.5]).

En la literatura no es posible encontrar soluciones analíticas para la ecuación (2.22), pero para la mayoría de las aplicaciones una especificación de la carta de estabilidad de sus soluciones es suficiente y no es necesaria una dependencia funcional detallada. Pero se puede dar una solución aproximada en la región de estabilidad que es de interés.

Con este fin podemos describir la ecuación (2.22) como

$$u_i(\tau) = A_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}^i \cos(2n + \beta_i)\tau + B_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}^i \sin(2n + \beta_i)\tau, \quad (2.24)$$

donde  $A_i$  y  $B_i$  están determinadas por la posición inicial  $u_i(0)$  y la velocidad  $\dot{u}_i(0)$  del ion, también como de la fase inicial del campo  $rf$ . El subíndice  $i=r, z$  corresponde a las cantidades asociadas con el movimiento axial y radial del ion., respectivamente.

Los coeficientes  $C_{2n}^i$  están dados por una relación de recurrencia

$$C_{2n+2}^i - D_{2n}^i C_{2n}^i + C_{2n-2}^i = 0, \quad (2.25)$$

con 
$$D_{2n}^i = [a_i - (2n + \beta_i)^2] / q_i. \quad (2.26)$$

Dados  $a_i$  y  $q_i$ ,  $C_{2n}^i$  y  $\beta_i$  pueden ser calculados.

Si definimos

$$G_{2n}^i = \frac{C_{2n}^i}{C_0^i}, \quad A_i' = A_i C_0^i \quad \text{y} \quad B_i' = B_i C_0^i, \quad (2.27)$$

y haciendo

$$u_i(t) = u_i^s(t) + u_i^m(t), \quad (2.28)$$

se obtiene de la ecuación (2.24)

$$u_i^s(\tau) = A_i' \cos \omega_i t + B_i' \text{sen} \omega_i t, \quad (2.29)$$

$$u_i^m(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_i' \cos \omega_i t + B_i' \text{sen} \omega_i t)(G_{2n}^i + G_{-2n}^i) \cos n\Omega t] \\ + (B_i' \cos \omega_i t - A_i' \text{sen} \omega_i t)(G_{2n}^i - G_{-2n}^i) \sin n\Omega t. \quad (2.30)$$

Con  $\omega_i = \frac{\beta_i \Omega}{2}$ . Puede verse de las ecuaciones (2.29) y (2.30) que el movimiento del ion para la dos regiones consiste de dos componentes: el movimiento  $u_i^s(t)$  en

la forma de una oscilación armónica con una frecuencia  $\omega_i$  y el movimiento  $u_i^m(t)$  compuesto de la superposición de varias subcomponentes con frecuencia fundamental  $\Omega$  y sus múltiplos  $n\Omega$  ( $n=2, 3, \dots$ ) y con amplitudes moduladas con la frecuencia  $\omega_i$ . Sin embargo, la proporción de las dos componentes, los valores de  $\omega_i$ , el número de subcomponentes que contribuyen apreciablemente y sus pesos dependen fuertemente de los valores  $a_i$  y  $q_i$ , de tal forma que ellos variarán con la región. Todo esto se determina cuando los valores de  $\beta_i$  y  $G_{2n}^i$  están dados.

Varios valores de  $\beta_i$  y  $G_{2n}^i$  correspondientes a algunos valores típicos de  $a_i$  y  $q_i$  aparecen listados en [2.5]. En esta tabla puede apreciarse que para  $a \ll q \ll 1$  en la primera región uno puede asumir que  $G_2^i \cong G_{-2}^i$  y se pueden ignorar el resto de los coeficientes  $G_{\pm 2n}^i$  ( $n > 1$ ); entonces las ecuaciones (2.29) y (2.30) pueden ser rescritas como

$$u_i^s(\tau) = u_{i0} \cos(\omega_i t + \delta_i), \quad (2.31)$$

$$u_i^m(\tau) = C u_{i0} \cos \Omega t \cos(\omega_i t + \delta_i), \quad (2.32)$$

Es decir

$$u_i(t) = u_{i0} \cos(\omega_i t + \delta_i) (1 + C \cos \Omega t) \quad (2.33)$$

$$u_{i0}^2 = A_i'^2 + B_i'^2, \quad \delta = \cos^{-1} \left( A_i' / \sqrt{A_i'^2 + B_i'^2} \right) \text{ y } C \text{ una constante.}$$

En la figura (2.5) se muestra una gráfica de la ecuación (2.33).

Generalmente se desprecia el micromovimiento, aunque es posible su reducción mediante el uso de electrodos adicionales [2.6]. Entonces el movimiento del ion

está gobernado por la ecuación (2.31) y se comporta como si estuviera confinado en un pseudopotencial armónico, que para la parte radial, tiene la forma

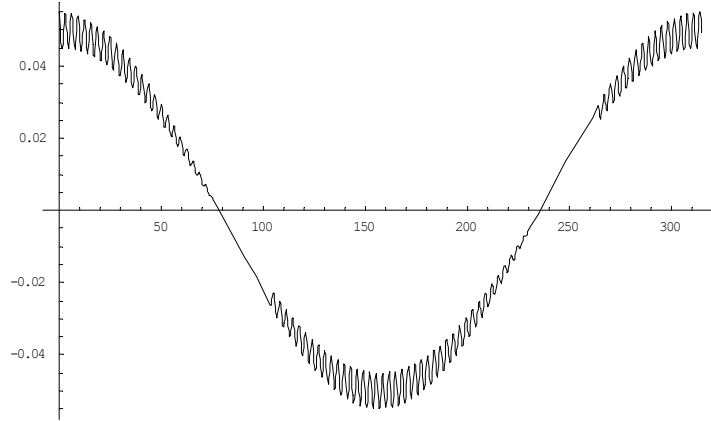


Figura 2.5 Muestra el micromovimiento y el movimiento secular de un ion atrapado con parámetros  $q = 0.2$ ,  $\beta = 0.02$ . Las oscilaciones a mayor frecuencia son el micromovimiento y las de menor frecuencia el movimiento secular.

$$q\psi_{2D} = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2). \quad (2.34)$$

Típicamente,  $U_0 = 0$  V y de aquí  $a = 0$  (además de que se está trabajando en la región para la que  $a = 0$ ); así que la frecuencia radial  $\omega_x$  y  $\omega_y$  son degeneradas. La ecuación (2.34) se reduce a

$$q\psi_{2D} = \frac{m\omega_r^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.35)$$

con la frecuencia radial de la trampa  $\omega_r$  dada por

$$\omega_r = \frac{\Omega b}{2^{3/2}} = \frac{qV_0}{mr_0^2 \Omega^{1/2}}. \quad (2.36)$$

En conclusión, podemos modelar el movimiento de un ion atrapado en una trampa de Paul como el de un oscilador armónico.

## Referencias

- [2.1] John David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, Inc., 1962.
- [2.2] P. J. Bardroff, C. Leichtle, G. Schrade, and W. P. Schleich, Phys. Review Letters, (1996), **77**, 2198-2201.
- [2.3] M. Abramowitz y I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions Dover, New Cork, 1972.
- [2.4] Bate, D., J., Dholakia, K., Thompson, R. C., y Wilson, D. C. (1992). J. Mod. Opt. **39**, 411-416.
- [2.5] X. Zhu y D. Qi, Journal of Modern Optics, (1992), vol. 39, No. 2, 291-303
- [2.6] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland, J. Appl. Phys. 83, 5025 (1998)
- [2.7] Brian E. King, Quantum State Engineering and Information Processing with Trapped Ions, Tesis Doctoral, University of Colorado at Boulder, 1999.

# Capítulo 3

## Interacción ion-láser en una trampa con frecuencia independiente del tiempo

En este capítulo, partiendo del Hamiltoniano de un ion atrapado en un potencial armónico, se demuestra que es posible encontrar transiciones tipo Jaynes-Cummings y anti-Jaynes-Cummings ajustando la intensidad del láser que induce el acoplamiento entre los estados internos y vibracionales del ion proporcionalmente a la frecuencia de vibración del ion y a una sola frecuencia resonante.

### 3.1 Hamiltoniano del sistema

En el capítulo anterior se mostró que el movimiento de un ion confinado en una trampa de Paul puede ser considerado como un movimiento armónico. En este capítulo estudiamos la interacción de un láser con un ion atrapado en una trampa con una frecuencia independiente del tiempo. Para estudiar al sistema nosotros consideramos el Hamiltoniano, esto es, la energía total del sistema. Se considera la situación de un único ion atrapado en un campo cuadrupolar eléctrico vibrando armónicamente en la dirección  $x$ . Este movimiento vibracional se acopla a la dinámica interna del ion lo cual se logra vía la interacción con el láser. El modelo contempla usualmente tres términos: la energía vibracional del centro de masas del ion, la energía interna del mismo, y la energía de interacción entre el láser y el ion. Esto lo podemos escribir en la forma



$$H = H_{vib} + H_{at} + H_{int} \quad (3.1)$$

donde  $H_{vib}$  es la energía vibracional del centro de masa del ion,  $H_{at}$  es la energía interna del ion y  $H_{int}$  es la energía de interacción entre el ion y el láser.

Los movimientos vibracionales se modelan como los de un oscilador armónico cuántico. Para describir la energía interna del ion se consideran dos niveles de energía de entre todo su espectro. La energía de interacción se representa mediante la interacción dipolar. El Hamiltoniano total es simple pero no idealizado.

En las secciones siguientes se detallará más a fondo el significado y la expresión matemática de cada uno de los términos del Hamiltoniano total.

### 3.1.1 Oscilador armónico

El oscilador armónico es uno de los ejemplos más sencillos en la teoría cuántica. En mecánica clásica la ecuación de movimiento del oscilador armónico de masa  $m_0$  y constante de restitución  $k$  está dado por

$$m_0 \ddot{x} = -kx, \quad (3.2)$$

$x$  es la posición y los puntos significan derivadas respecto del tiempo.

La energía cinética asociada es

$$E_k = (m_0 / 2) \dot{x}^2, \quad (3.3)$$

y la energía potencial como

$$V = (k / 2) x^2. \quad (3.4)$$

Para encontrar el hamiltoniano clásico expresamos la velocidad en términos del momento,

$$\dot{x} = (p/m). \quad (3.5)$$

También se usa la relación clásica entre frecuencia de oscilación  $\omega$ , masa  $m_0$  y constante de restitución  $k$ ,

$$\omega^2 = k/m_0. \quad (3.6)$$

De esta forma uno obtiene la siguiente expresión para la energía total o Hamiltoniano del oscilador clásico:

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0}{2} \omega^2 x^2. \quad (3.7)$$

Para traducir esto a la mecánica cuántica si reemplazamos las variables clásicas posición y momento,  $p$  y  $x$ , por los correspondientes operadores Hermitianos  $\hat{p}$  y  $\hat{x}$  respectivamente. El Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico queda

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \frac{m_0}{2} \omega^2 \hat{x}^2. \quad (3.8)$$

Siendo  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  operadores que satisfacen la relación de conmutación de Heisenberg

$$\left[ \hat{x}, \hat{p} \right] = \hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x} = i\hbar, \quad (3.9)$$

con  $\hbar$  la constante de Plank.

El operador de momento también es equivalente a

$$\hat{p} = -\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Considerando esto, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E \psi(x), \quad (3.11)$$

la cual es una ecuación de eigenvalores, para el caso del oscilador es

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d}{dx^2} + \frac{m_0}{2} \omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E \psi(x). \quad (3.12)$$

Las eigenfunciones de esta ecuación están dadas por [3.1]

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2 m_0 \omega / \hbar\right) H_n\left(x \sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}}\right), \quad (3.13)$$

donde  $H_n$  son los polinomios de Hermite.

Los eigenvalores correspondientes están dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Es decir, el oscilador armónico cuántico tiene un espectro discreto de energías, igualmente espaciadas por una cantidad  $\hbar \omega$ , la energía de una unidad de excitación llamados fonones. Para  $n=0$  se obtiene  $\frac{1}{2} \hbar \omega$ , que es la energía del estado base, la mínima energía vibracional del oscilador.

Cuando se resuelve la ecuación (3.12) se ve que es de utilidad definir los operadores

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\nu}}, \quad (3.16)$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\nu}}. \quad (3.17)$$

Los cuales son llamados operador de aniquilación y creación, respectivamente, porque tienen la propiedad siguiente

$$a \psi_n(x) = \sqrt{n} \psi_{n-1}(x), \quad (3.18)$$

$$a^+ \psi_n(x) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x). \quad (3.19)$$

Es decir, si aplicamos el operador de aniquilación a un estado del oscilador, hace que este descienda al estado inmediato inferior, perdiendo un fonón, y si le aplicamos el operador de creación hace que este ascienda al estado inmediato superior, ganando un fonón, Figura 3.1.

De las definiciones (3.16) y (3.17) puede demostrarse que los operadores  $a$  y  $a^+$  obedecen la relación de conmutación

$$[a, a^+] = 1. \quad (3.20)$$

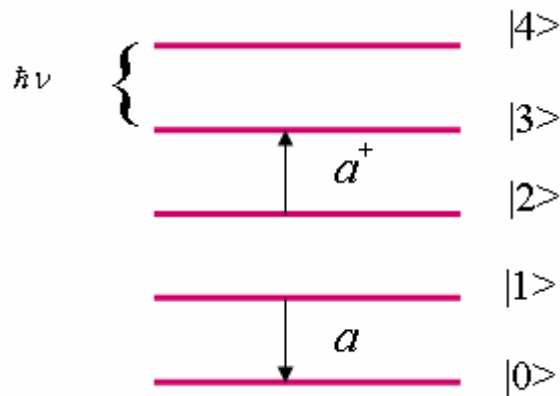


Figura 3.1 Ilustración del efecto del operador de creación y aniquilación. La aplicación de  $a^+$  significa subir un nivel en la escalera de estados. La aplicación de  $a$  significa descender un nivel en la escalera de estados.

Al operador  $a^+a$ , se le llama operador de número y se representa como

$$\hat{n} = a^+a. \quad (3.21)$$

Dicho operador recibe ese nombre porque cumple

$$\hat{n}\psi_n(x) = n\psi_n(x), \quad (3.22)$$

es decir, una medición de dicho operador da uno de los eigenvalores 0, 1, 2, 3, ... el cual es interpretado como el número de fonones en el estado. Al estado correspondiente a  $n=0$  también se le llama estado  $n$  vacío.

### 3.1.1.1 Notación de Dirac.

Dirac introdujo una notación muy concisa, especialmente para valores de expectación y eigenvalores. En esta notación en lugar de escribir  $\psi_n$  para los estados del oscilador, uno escribe  $|n\rangle$ . La integral  $\int \psi_n^*(\xi)\psi_n(\xi)d\xi$  es escrita

como  $\langle n|n\rangle$ , y el valor de expectación del operador  $b, \int \psi_n^*(\xi)b\psi(\xi)d\xi$ , como  $\langle n|b|n\rangle$ .  $\langle n|$  es llamado bra y  $|n\rangle$  ket. El bra  $\langle n|$  corresponde a  $\psi_n^*(\xi)$ .

Las relaciones (3.18) y (3.19) para los operadores de aniquilación y creación en esta notación se escriben

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.23)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (3.24)$$

y para el operador de número, (3.22),

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Los estados de número forman una base ortonormal, esta propiedad se escribe

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}, \quad (3.25)$$

y cumplen una relación de completés

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|, \quad (3.26)$$

$I$  es el operador identidad. Esta relación es de utilidad porque nos permite expresar un operador o a un estado arbitrario en función de los estados de número.

Para el Hamiltoniano del oscilador se tiene

$$H = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2). \quad (3.27)$$

### 3.1.2 Energía interna del ion

Como se dijo previamente, se están considerando solo dos niveles de energía del ion entre todo su espectro. No existen átomos de dos niveles en la naturaleza pero se puede crear esta situación si se hace interaccionar al ion con un láser en resonancia o casi en resonancia de tal forma que seleccione a solo dos niveles de energía.

Si denotamos el nivel superior de energía o excitado  $E_a = \hbar\omega_a$  por  $|a\rangle$  y el nivel de energía inferior o base  $E_b = \hbar\omega_b$  por  $|b\rangle$ .

Estos estados son eigenestados del Hamiltoniano  $H_{at}$  del ion y forman una base ortonormal. Podemos representar cualquier operador atómico en términos de sus eigenestados por medio de la relación de completos de los estados atómicos. Para el caso del Hamiltoniano del estado interno del ion podemos usar dos veces la relación de completés para escribir

$$H_{atom} = I \cdot H_{atom} \cdot I = \sum_{j,j'=a,b} |j\rangle\langle j| H |j'\rangle\langle j'|, \quad (3.28)$$

encontrándose para el Hamiltoniano del átomo

$$H_{atom} = E_a |a\rangle\langle a| + E_b |b\rangle\langle b|. \quad (3.29)$$

Con la representación vectorial

$$|a\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle a| \equiv (1 \ 0), \quad (3.30)$$

para el estado excitado y

$$|b\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle b| \equiv (0 \ 1), \quad (3.31)$$

para el estado base.

El Hamiltoniano del átomo toma la representación matricial

$$H_{atom} = \begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(E_a + E_b) + 1/2(E_a - E_b) & 0 \\ 0 & 1/2(E_a + E_b) - 1/2(E_a - E_b) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

se han sumado y restado términos de manera conveniente. Lo anterior se puede describir

$$H_{at} = E \cdot I + \frac{1}{2} \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Donde  $E \equiv \frac{1}{2}(E_a + E_b)$  y  $\omega = \omega_a - \omega_b$  denota la frecuencia de transición.

Debido a que la energía constante  $E \cdot I$  en el Hamiltoniano es solo un corrimiento en la energía la suprimimos de tal forma que

$$H_{at} = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z, \quad (3.34)$$

donde se ha introducido la matriz de Pauli

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$



### 3.1.3 Interacción dipolar

La interacción dipolar consiste en el acoplamiento entre un dipolo y un campo eléctrico. Sabemos que un átomo consistiendo de un electrón y un protón separados por un vector  $\vec{r}$  posee un momento dipolar

$$\vec{\rho} = e \vec{r}. \quad (3.36)$$

Se considera que el campo eléctrico no cambia considerablemente en una región del tamaño del átomo. De esto, el campo eléctrico en la posición del electrón es casi idéntico en la posición del protón o al hallado en la posición del centro de masa. A esto se le llama la aproximación dipolar.

El dipolo en el campo eléctrico  $\vec{E}$  experimenta una energía potencial

$$H_{\vec{r}, \vec{E}} = -\vec{\rho} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) = -e \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t). \quad (3.37)$$

Ahora usamos la relación de completés (atómica) para escribir el operador dipolar en eigenestados de energía. Debido a que los eigenestados de energía de la función de onda  $\psi_j(\vec{r})$  tienen una paridad bien definida, los elementos de la diagonal se anulan, esto es,

$$\langle j | \vec{r} | j \rangle = \int d^3 r \left| \psi_j(\vec{r}) \right|^2 \vec{r} = 0. \quad (3.38)$$

Además, ya que  $\left| \psi_j(\vec{r}) \right|^2$  es una función simétrica y  $\vec{r}$  es una función antisimétrica, el integrando es antisimétrico.

Los elementos fuera de la diagonal se escriben

$$e\langle a|\vec{r}|b\rangle = e\int d^3r\psi_a^*(\vec{r})\vec{r}\psi_b(\vec{r}) = \vec{\wp}, \quad (3.39)$$

y

$$e\langle b|\vec{r}|a\rangle = e\int d^3r\psi_b^*(\vec{r})\vec{r}\psi_a(\vec{r}) = \vec{\wp}^*. \quad (3.40)$$

Y de aquí el operador dipolar toma la forma

$$e\vec{r} = \vec{\wp}|a\rangle\langle b| + \vec{\wp}^*|b\rangle\langle a|. \quad (3.41)$$

Este operador describe transiciones desde el estado base al estado excitado y viceversa. Para hacer esto mas claro aplicamos el operador al estado  $|a\rangle$

$$e\vec{r}|a\rangle = \vec{\wp}|a\rangle\langle b|a\rangle + \vec{\wp}^*|b\rangle\langle a|a\rangle = \vec{\wp}^*|b\rangle, \quad (3.42)$$

y para el estado  $|b\rangle$

$$e\vec{r}|b\rangle = \vec{\wp}|a\rangle\langle b|b\rangle + \vec{\wp}^*|b\rangle\langle a|b\rangle = \vec{\wp}|a\rangle, \quad (3.43)$$

de lo anterior, el operador

$$\sigma_+ = |a\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

actúa como operador de creación para el estado interno del ion. Por el contrario, el operador

$$\sigma_- = |b\rangle\langle a| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

actúa como operador de aniquilación para el estado interno del ion.

En términos de las matrices de Pauli,  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$ , el operador dipolar se escribe

$$\vec{e}r = \vec{\wp} \sigma_+ + \vec{\wp}^* \sigma_- . \quad (3.46)$$

Ya que tenemos el operador dipolar en la forma (3.46), calculamos la expresión (3.37). Estamos considerando que el campo de luz que induce el acoplamiento entre los estados internos y vibracionales del ion es una onda plana cuya parte negativa del campo eléctrico se escribe

$$\vec{E}^{(-)}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(k\hat{x} - \omega t)} , \quad (3.47)$$

por lo que (3.37) es

$$\begin{aligned} -e \vec{r} \cdot \vec{E} &= -\left( \vec{\wp} \sigma_+ + \vec{\wp}^* \sigma_- \right) \cdot \left( \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} + \vec{E}_0^* e^{-i(kx - \omega t)} \right) , \\ &= -\left( \vec{\wp} \cdot \vec{E}_0 \sigma_+ e^{i(kx - \omega t)} + \vec{\wp} \cdot \vec{E}_0^* \sigma_+ e^{-i(kx - \omega t)} + \vec{\wp}^* \cdot \vec{E}_0 \sigma_- e^{i(kx - \omega t)} + \vec{\wp}^* \cdot \vec{E}_0^* \sigma_- e^{-i(kx - \omega t)} \right) . \end{aligned}$$

$$\text{Haciendo} \quad \vec{\wp} \cdot \vec{E}_0 = \lambda E_0 , \quad (3.48)$$

$$\text{con} \quad \lambda = \left| \vec{\wp} \cdot \hat{u}_E \right| , \quad (3.49)$$

el momento dipolar es

$$\begin{aligned} -e \vec{r} \cdot \vec{E} &= -\left( \lambda E_0 \sigma_+ e^{i(kx - \omega t)} + \lambda E_0 \sigma_+ e^{-i(kx - \omega t)} + \lambda E_0 \sigma_- e^{i(kx - \omega t)} + \lambda E_0 \sigma_- e^{-i(kx - \omega t)} \right) , \\ & \quad (3.50) \end{aligned}$$

siendo  $\lambda$  un parámetro de acoplamiento entre el ion y el campo y  $\hat{u}_{\vec{E}}$  el vector unitario en la dirección de  $\vec{E}$ .

### 3.2 Interacción fuera de resonancia e intensidad baja.

Esta sección está dedicada al estudio de la interacción fuera de resonancia entre un láser y una transición electrónica de un ion atrapado en un campo. Cabe aclarar que este método que se mostrará es usado comúnmente por los grupos de investigación que se dedican al estudio de la dinámica de un ion atrapado inducida por láser [3.2], [3.3] y [3.4]. La motivación para mostrarlo aquí es para contrastarlo con otro método novedoso que se mostrará mas tarde.

Para este caso el Hamiltoniano se construye usando la ecuación (3.1) y usando la forma explicita para cada uno de los términos encontrados en (3.27), (3.34) y (3.50), (en lo subsiguiente  $x$  es un operador y se omitirá el signo de operador  $\hat{\phantom{x}}$ ),

$$H = \nu \hat{n} + \frac{\omega_{21}}{2} \sigma_z + \lambda E_0 (e^{i(kx - \omega t)} \sigma_+ + e^{-i(kx - \omega t)} \sigma_-). \quad (3.51)$$

Como ya se mencionó anteriormente el primer término en el Hamiltoniano corresponde a la energía de vibración del ion, el segundo a la energía interna del ion y el tercero es la energía de interacción entre el ion y la onda plana. Por comodidad se ha desplazado el Hamiltoniano vibracional en una cantidad  $\hbar\nu/2$ , el cual es un término constante y con esto no se pierde información del sistema.

Consideramos primero la transformación a un marco rotante de frecuencia  $\omega$  por medio de la transformación unitaria

$$T(t) = e^{\frac{i\omega}{2}\sigma_z t}, \quad (3.52)$$

Si consideramos que el hamiltoniano (3.51) corresponde a la función de onda  $|\xi(t)\rangle$ , la ecuación de schrödinger puede escribirse

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\xi\rangle = H |\xi\rangle. \quad (3.53)$$

La transformación  $T$  transforma  $|\xi(t)\rangle$  en  $|\phi(t)\rangle$ ,

$$|\phi(t)\rangle = T(t) |\xi(t)\rangle, \quad (3.54)$$

Para obtener la expresión para el Hamiltoniano transformado debemos obtener la ecuación de Schrödinger para la nueva función de onda. Primero derivamos ambos lados de (3.54) respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t} T(t) |\xi(t)\rangle + T(t) \frac{\partial}{\partial t} |\xi(t)\rangle, \quad (3.55)$$

usando

$$T^+(t) |\phi(t)\rangle = |\xi(t)\rangle, \quad (3.56)$$

donde  $T^+$  es la adjunta de  $T$ , y la ecuación (3.53) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) |\phi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar} T(t) H T^+(t) |\phi(t)\rangle. \quad (3.57)$$

Multiplicando por  $i\hbar$  y agrupando se obtiene la ecuación de Schrödinger para  $|\phi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \left( i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) + T(t) H T^+(t) \right) |\phi(t)\rangle. \quad (3.58)$$

La expresión

$$H_{trans} = \left( i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) + T(t) H T^+(t) \right), \quad (3.59)$$

corresponde al Hamiltoniano transformado. Siempre que llevemos a cabo una transformación en el sentido de (3.54) debemos calcular la expresión (3.59) para obtener el nuevo Hamiltoniano.

Para la transformación de marco rotante tenemos que

$$i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) = -\frac{\omega}{2} \sigma_z. \quad (3.60)$$

Para  $T(t) H T^+(t)$  necesitamos

$$e^{\frac{i\omega}{2}\sigma_z t} \sigma_+ e^{-\frac{i\omega}{2}\sigma_z t} = \sigma_+ + \frac{i\omega}{2} [\sigma_z, \sigma_+] + \left(\frac{i\omega}{2}\right)^2 [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_+]] + \frac{\left(\frac{i\omega}{2}\right)^3}{3!} [\sigma_z, [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_+]]] + \dots \quad (3.61)$$

Se ha usado el lema de Baker-Hausdorff [3.5]

$$e^{cA} B e^{-cA} = B + c[A, B] + \frac{c^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{c^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (3.62)$$

donde A, B son operadores que no conmutan y c un parámetro constante.

Utilizando la relación de conmutación entre las matrices de Pauli en (3.61)

$$[\sigma_{\pm}, \sigma_z] = \mp 2\sigma_{\pm} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
e^{\frac{i\omega}{2}\sigma_z t} \sigma_+ e^{-\frac{i\omega}{2}\sigma_z t} &= \sigma_+ + \frac{i t \omega}{2} (2\sigma_+) + \left(\frac{i t \omega}{2}\right)^2 (2\sigma_+)^2 + \frac{\left(\frac{i t \omega}{2}\right)^3}{3!} (2\sigma_+)^3 + \dots \\
&= \sigma_+ e^{i\omega t}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Al calcular la expresión (3.59) se han hecho las siguientes consideraciones: que los operadores que describen el movimiento vibracional del ion conmutan con los operadores que describen su estado interno por corresponder a sistemas diferentes, es decir,

$$[n, \sigma_z] = 0, \tag{3.65}$$

y no se ven afectados por la transformación.

También consideramos que

$$[\sigma_z, \sigma_z] = 0. \tag{3.66}$$

Con (3.60) y (3.64) tenemos para el Hamiltoniano transformado

$$H = \nu \hat{n} + \frac{k}{2} \nu \sigma_z + \lambda E_0 (e^{i\eta(a^\dagger + a)} \sigma_+ + H.c.), \tag{3.67}$$

en donde

$$\eta = K \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}, \tag{3.68}$$

es llamado parámetro de Lamb-Dicke,  $K$  es el vector de onda del láser y

$$k\nu = \omega_{21} - \omega \tag{3.69}$$

es la desintonía entre la frecuencia de la onda plana y la frecuencia de transición del ion; es decir, estamos considerando que la desintonía es un múltiplo entero de la frecuencia vibracional del ion, ver Figura (3.2)

$$\omega_{21} > \omega. \quad (3.70)$$

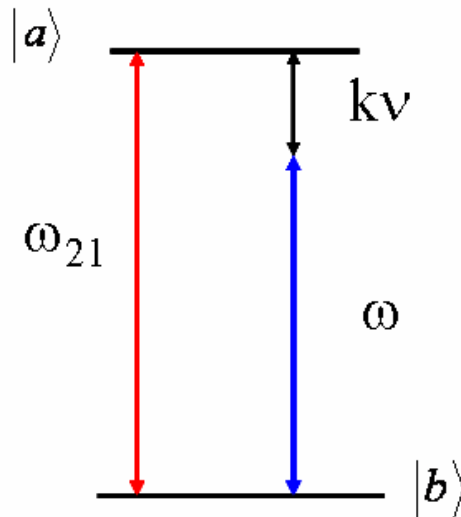


Figura 3.2 Muestra la desintonía entre el láser y la transición electrónica para el caso en que la frecuencia del láser es menor que la de la transición.

Con la transformación (3.52) logramos deshacernos de la frecuencia  $\omega$  en las exponenciales. El operador de posición  $x$  se ha expresado, de acuerdo a las ecuaciones (3.16) y (3.17), en términos de los operadores de aniquilación.

Lo siguiente es desenredar la exponencial en (3.67). Como es una exponencial de operadores se utiliza el teorema de Baker-Hausdorff-Campbell [3.6]

$$e^{A+B} = e^B e^A e^{1/2[A,B]} = e^A e^B e^{-1/2[A,B]}, \quad (3.71)$$

siendo  $A$  y  $B$  operadores que no conmutan,  $[A,B] \neq 0$ , pero que cumplen la relación

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0,$$

por lo cual podemos escribir



$$e^{-i\eta(a+a^\dagger)} = e^{-\eta^2/2} e^{-i\eta a^\dagger} e^{-i\eta a}. \quad (3.72)$$

Desarrollando en serie de Taylor las exponenciales que contienen operadores en la ecuación anterior

$$e^{-i\eta(a+a^\dagger)} = e^{-\eta^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{n+m}}{n!m!} a^{+n} a^m, \quad (3.73)$$

al sustituir en (3.67)

$$H = \nu \hat{n} + \frac{k\nu}{2} \sigma_z + \lambda E_0 e^{-\eta^2/2} \left\{ \sigma_- \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{n+m}}{n!m!} a^{+n} a^m + c.c. \right\}. \quad (3.74)$$

Ahora pasamos al cuadro de interacción mediante la transformación

$$T_1 = e^{\frac{i}{\hbar} \left( \nu \hat{n} + \frac{k\nu}{2} \sigma_z \right) t}, \quad (3.75)$$

con esto básicamente eliminamos los dos primeros términos en (3.74) y nos quedamos con el tercero que es el de interacción. Para esto debemos calcular la expresión (3.59), obviamente para este Hamiltoniano y la transformación (3.75), quedando para

$$i\hbar \frac{\partial T_1(t)}{\partial t} T_1^\dagger(t) = - \left( \nu \hat{n} + \frac{k\nu}{2} \sigma_z \right). \quad (3.76)$$

Para calcular  $T_1 H T_1^\dagger(t)$  necesitamos

$$e^{\frac{i}{\hbar} \nu \hat{n} t} a^{+n} a^m e^{-\frac{i}{\hbar} \nu \hat{n} t} = a^{+n} a^m + \left( \frac{i}{\hbar} \nu t \right) \left[ \hat{n}, a^{+n} a^m \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{\hbar} \nu t \right)^2 \left[ \hat{n}, \left[ \hat{n}, a^{+n} a^m \right] \right] + \dots \quad (3.77)$$

Para esto

$$\left[ \hat{n}, a^{+n} a^m \right] = a^+ \left[ a, a^{+n} a^m \right] + \left[ a^+, a^{+n} a^m \right] a. \quad (3.78)$$

Usando

$$\left[ a, f(a, a^+) \right] = \frac{\partial f}{\partial a^+}, \quad (3.79)$$

para calcular

$$a^+ \left[ a, a^{+n} a^m \right] = n a^{+n} a^m \quad (3.80)$$

y

$$\left[ a^+, f(a, a^+) \right] = -\frac{\partial f}{\partial a}, \quad (3.81)$$

para obtener

$$\left[ a^+, a^{+n} a^m \right] a = -m a^{+n} a^m, \quad (3.82)$$

se obtiene para (3.77)

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} v \hat{n} t} a^{+n} a^m e^{-\frac{i}{\hbar} v \hat{n} t} &= a^{+n} a^m + \left( \frac{i}{\hbar} v t \right) (n-m) a^{+n} a^m + \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar} v t \right)^2 (n-m)^2 a^{+n} a^m + \dots \\ &= a^{+n} a^m e^{\frac{i}{\hbar} v (n-m) t}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Para  $T_1 HT_1^+(t)$  también necesitamos

$$e^{\frac{i}{\hbar} \frac{k v}{2} \sigma_z t} \sigma_- e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{k v}{2} \sigma_z t} = \sigma_- + \left( \frac{i}{\hbar} v t \right) \left[ \sigma_z, \sigma_- \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{\hbar} v t \right)^2 \left[ \sigma_z, \left[ \sigma_z, \sigma_- \right] \right] + \dots, \quad (3.84)$$

usando (3.63)

$$= \sigma_- + \left( \frac{i}{\hbar} \frac{k v}{2} \right) (-2\sigma_-) + \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar} \frac{k v}{2} \right)^2 (-2\sigma_-)^2 + \dots$$

$$= \sigma_- e^{-\frac{i}{\hbar} k \nu t} . \quad (3.85)$$

Con los resultados (3.83) y (3.85), el Hamiltoniano transformado está dado por

$$H_I = \lambda E_0 e^{-\eta^2 / 2} \left\{ \sigma_- e^{-\frac{i}{\hbar} k \nu t} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{n+m}}{n!m!} a^{+n} a^m e^{\frac{i}{\hbar}(n-m)\nu t} + h.c. \right\}, \quad (3.85)$$

es decir,

$$H_I = \Omega e^{-\eta^2 / 2} \left\{ \sigma_- \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{n+m}}{n!m!} a^{+n} a^m e^{\frac{i}{\hbar}(n-m-k)\nu t} + c.c. \right\}, \quad (3.86)$$

con

$$\Omega = \lambda E_0, \quad (3.87)$$

llamada frecuencia de Rabi.

Ahora aplicamos la aproximación de onda rotante [3.7]. Ya que la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo tenemos que integrar en el tiempo. Esta integración trae la suma y diferencia de frecuencia al denominador. De esto la contribución dominante debe venir de los términos variando lentamente por lo que se desechan los términos que rotan más rápidamente, por considerar que su contribución al Hamiltoniano es despreciable, conservándose los más lentos. En este caso los términos que no rotan rápidamente son aquellos cuyo exponente cumple la relación  $n-m=k$  y son los que podemos conservar, ya que al hacer esta consideración estos términos no rotan.

La aproximación es válida para

$$\Omega \ll \nu, \quad (3.88)$$

Como  $\Omega$  es proporcional a la amplitud del campo eléctrico del láser, (3.87), decimos que esta aproximación es válida para una intensidad baja.

Tenemos entonces que

$$H_I = \Omega e^{-\eta^2/2} \left\{ \sigma_- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{2m+k}}{(m+k)!m!} a^{+k} a^{+m} a^m + c.c. \right\}. \quad (3.89)$$

Se puede reescribir lo anterior si utilizamos la relación de completés de los estados de número (3.26) y las relaciones (3.23) y (3.24) para obtener

$$a^{+m} a^m \sum |j\rangle\langle j| = \frac{\hat{n}!}{(\hat{n}-m)!} \sum |j\rangle\langle j|, \quad (3.90)$$

es decir

$$H_I = \Omega e^{-\eta^2/2} \left\{ a^{+k} \sigma_- f_k(\hat{n}) + c.c. \right\}, \quad (3.91)$$

en donde

$$f_k(\hat{n}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{2m+k}}{(m+k)!m!} \frac{\hat{n}!}{(\hat{n}-m)!}, \quad (3.92)$$

$$= (-i\eta)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)^{2m}}{(m+k)!m!} \frac{\hat{n}!}{(\hat{n}-m)!}, \quad (3.93)$$

$$f_k(\hat{n}) = (-i\eta)^k \frac{\hat{n}!}{(\hat{n}+k)!} L_{\hat{n}}^{(k)}(\eta^2), \quad (3.94)$$

$L_{\hat{n}}^{(k)}(\eta^2)$  son los polinomios Asociados de Laguerre [3.8] .

Sustituyendo (3.94) en (3.89) el Hamiltoniano de interacción toma la forma

$$H_I = \Omega e^{-\eta^2/2} \{ a^{+k} \sigma_- (-i\eta)^k \frac{n!}{(n+k)!} L_n^{(k)}(\eta^2) + c.c. \}. \quad (3.95)$$

Finalmente, para el caso  $k=1$  y para el régimen de Lamb-Dicke [3.9], es decir,  $\eta \ll 1$ , lo que significa que la amplitud de oscilación del ion es mucho menor que la frecuencia del láser, el Hamiltoniano toma la forma

$$H_{jc} = -i\eta\Omega_0 (a^+ \sigma_- - a \sigma_+). \quad (3.96)$$

El Hamiltoniano (3.96) describe la emisión y absorción de un cuanto vibracional cuando el átomo sufre transiciones electrónicas. El primer término implica el ascenso en un cuanto del movimiento vibracional del ion y la transición, al mismo tiempo, de un estado interno excitado al estado base. El segundo término corresponde a la situación contraria, a la creación de un estado interno excitado del ion y al decaimiento, al mismo tiempo, del movimiento vibracional en un cuanto. Esto puede verse si aplicamos el operador (3.96) al estado  $|n\rangle|e\rangle$ ,  $|n\rangle$  representa  $n$  cuantos vibracionales y  $|e\rangle$  al ion en estado excitado, lo que da

$$H_{jc} |n\rangle|e\rangle = |n+1\rangle|g\rangle. \quad (3.97)$$

O viceversa

$$H_{jc} |n+1\rangle|g\rangle = |n\rangle|e\rangle. \quad (3.98)$$

Esta clase de Hamiltoniano es llamado tipo Jaynes-Cummings [3.10].

Partiendo de nuevo del Hamiltoniano (3.67) podríamos repetir todo el procedimiento utilizado para el caso en que la frecuencia del láser es menor que la de la transición, pero ahora para el caso en que, Figura (3.3)

$$k\nu = \omega - \omega_{21}, \quad (3.99)$$

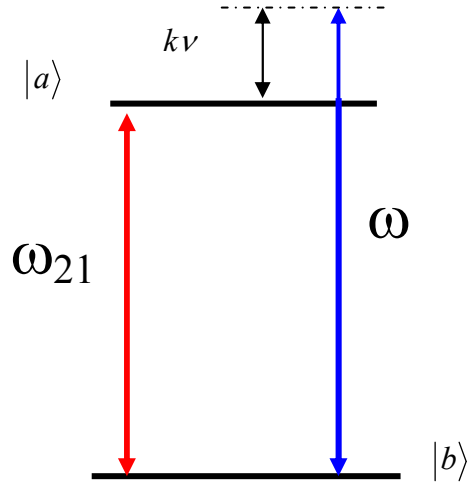


Figura 3.3 Muestra la desintonía entre el láser y la transición electrónica para el caso en que la frecuencia del láser es mayor que la de la transición.

es decir, para cuando la frecuencia de láser es mayor que la de la transición

$$\omega > \omega_{21}, \quad (3.100)$$

para obtener el siguiente Hamiltoniano

$$H_{ajc} = -i\eta\Omega_0(a\sigma_- - a^+\sigma_+). \quad (3.101)$$

En el primer término del Hamiltoniano (3.101) se tiene la aniquilación de un cuanto en el movimiento vibracional y la transición del estado excitado al estado base en los niveles internos del ion. El segundo término nos dice que el ion puede sufrir la creación de un cuanto en su estado vibracional y el ascenso del estado base al excitado en sus niveles internos. Este es un Hamiltoniano tipo anti-Jaynes-Cummings. Figura (3.4)

Lo anterior puede verse si aplicamos el Hamiltoniano (3.101) al estado  $|n\rangle|e\rangle$

$$H_{ajc}|n\rangle|e\rangle = |n-1\rangle|g\rangle, \quad (3.102)$$

o al contrario

$$H_{ajc} |n-1\rangle |g\rangle = |n\rangle |e\rangle. \quad (3.103)$$

El poder realizar estos dos tipos de Hamiltonianos, (3.96) y (3.101), significa que podemos llevar un ion atrapado a su nivel más bajo de energía vibracional alternando sucesivamente y cuantas veces sea necesario la desintonía entre la frecuencia de la onda plana y la frecuencia de transición interna del ion. Esto implica la utilización de un láser sintonizable. Esto puede ilustrarse si consideramos a un ion inicialmente en estado base interno y en estado  $n$  vibracional, al aplicarle el Hamiltoniano (3.96)

$$H_{jc} |n\rangle |g\rangle = |n-1\rangle |e\rangle. \quad (3.104)$$

Si ahora le aplicamos (3.101) al nuevo estado

$$H_{ajc} |n-1\rangle |e\rangle = |n-2\rangle |g\rangle. \quad (3.105)$$

Lo que significa que el ion ha perdido dos cuantos de energía vibracional.

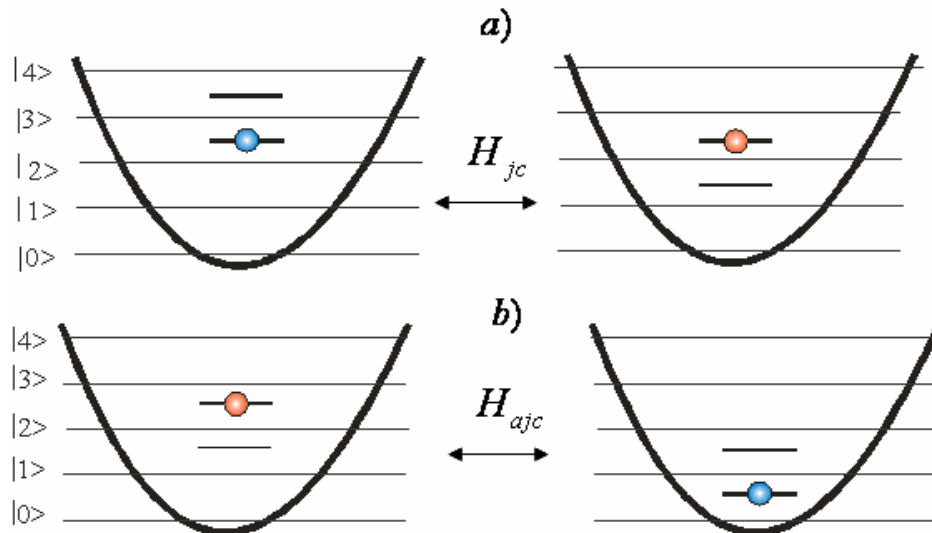


Figura 3.4 a) Un Hamiltoniano Jaynes-Cummings implica el ascenso en un cuanto del movimiento vibracional del ion y la transición, al mismo tiempo, de un estado interno excitado al estado base o viceversa. b) El Hamiltoniano anti Jaynes-Cummings tiene el efecto de aniquilar un

cuanto en el movimiento vibracional y la transición del estado excitado al estado base en los niveles internos del ion o viceversa.

### 3.3 Interacción resonante a frecuencia intermedia.

En esta sección se introduce una nueva forma de lograr las interacciones Jaynes-Cummings y anti Jaynes-Cummings. En esta propuesta se demuestra que partiendo del Hamiltoniano (3.67) se pueden alcanzar el mismo tipo de transiciones dadas por los Hamiltonianos (3.96) y (3.101) utilizando un láser a una sola frecuencia resonante.

La condición de resonancia entre el láser y el ion es

$$\omega_{21} = \omega. \quad (3.106)$$

Si introducimos esta condición en el Hamiltoniano (3.67) resulta

$$H = \nu \hat{n} + \Omega(\sigma_- e^{-i\eta(a+a^+)} + H.c.). \quad (3.107)$$

Considerando el régimen de Lamb- Dicke,  $\eta \ll 1$ , y desarrollando la exponencial en serie de Taylor a primer orden se obtiene

$$H = \nu \hat{n} + \Omega(\sigma_- \{1 - i\eta(a + a^+)\} + \sigma_+ \{1 + i\eta(a + a^+)\}), \quad (3.108)$$

reagrupando términos se tiene que

$$H = \nu \hat{n} + \Omega i\eta(a + a^+)(\sigma_+ - \sigma_-) + \Omega(\sigma_+ + \sigma_-). \quad (3.109)$$

Podemos transformar este Hamiltoniano mediante una rotación del tipo [3.11]



$$R = e^{\frac{1}{2}i\theta\sigma_y} = \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_y \sin \frac{\theta}{2}. \quad (3.110)$$

Esta transformación conmuta con los dos primeros términos por lo que para  $RHR^+$  solo necesitamos calcular

$$\left( \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_y \sin \frac{\theta}{2} \right) (\sigma_+ + \sigma_-) \left( \cos \frac{\theta}{2} - i\sigma_y \sin \frac{\theta}{2} \right) = \quad (3.111)$$

multiplicando y reduciendo

$$\begin{aligned} &= \sigma_x \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\sigma_z \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sigma_x \sin^2 \frac{\theta}{2} = \\ &= (\sigma_x + \sigma_y) \cos \theta + \sigma_z \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Con esto el Hamiltoniano rotado es

$$H_\theta = \nu \hat{n} + \Omega i \eta (a + a^+) (\sigma_+ - \sigma_-) + \Omega [(\sigma_+ + \sigma_-) \cos \theta + \sigma_z \sin \theta]; \quad (3.113)$$

haciendo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  encontramos

$$H_{\pi/2} = \nu \hat{n} + \Omega \sigma_z + \Omega i \eta (a + a^+) (\sigma_+ - \sigma_-), \quad (3.114)$$

y para  $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$$H_{-\pi/2} = \nu \hat{n} - \Omega \sigma_z + \Omega i \eta (a + a^+) (\sigma_+ - \sigma_-). \quad (3.115)$$

Mediante la transformación

$$T = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\nu \hat{n} \pm \Omega \sigma_z)t\right) \quad (3.116)$$

pasamos al cuadro de interacción. El signo positivo corresponde a (3.114) y el negativo a (3.115).

Para el Hamiltoniano (3.114) se tiene

$$i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^\dagger(t) = -(\nu \hat{n} + \Omega \sigma_z). \quad (3.117)$$

Para obtener  $T(t)HT^\dagger(t)$  necesitamos calcular

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} \sigma_+ e^{-\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} = \sigma_+ + \left(\frac{i}{\hbar}\Omega t\right) [\sigma_z, \sigma_+] + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar}\Omega t\right)^2 [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_+]] + \dots \quad (3.118)$$

Usando la relación de conmutación (3.63)

$$= \sigma_+ + \left(\frac{i}{\hbar}\Omega t\right)(2\sigma_+) + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar}\Omega t\right)^2 (2\sigma_+)^2 + \dots,$$

por lo que

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} \sigma_+ e^{-\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} = \sigma_+ e^{\frac{2i\Omega t}{\hbar}}. \quad (3.119)$$

También se calcula

$$e^{\frac{i}{\hbar}\nu\hat{n}t} a e^{-\frac{i}{\hbar}\nu\hat{n}t} = a + \left(\frac{i}{\hbar}\nu t\right) [\hat{n}, a] + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar}\nu t\right)^2 [\hat{n}, [\hat{n}, a]] + \dots \quad (3.120)$$

Usando ahora

$$\left[ \hat{n}, a \right] = -a, \quad (3.121)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} \nu \hat{n} t} a e^{-\frac{i}{\hbar} \nu \hat{n} t} = a + \left( \frac{i}{\hbar} \nu t \right) (-a) + \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar} \nu t \right)^2 (-a)^2 + \dots$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} \nu \hat{n} t} a e^{-\frac{i}{\hbar} \nu \hat{n} t} = a e^{-\frac{i}{\hbar} \nu t}. \quad (3.122)$$

El Hamiltoniano transformado resulta ser

$$H_{\pi/2} = \Omega i \eta (a e^{-\frac{i}{\hbar} \nu t} + a^+ e^{\frac{i}{\hbar} \nu t}) (\sigma_+ e^{2i\frac{\Omega}{\hbar} t} - \sigma_-^{-2i\frac{\Omega}{\hbar} t}), \quad (3.123)$$

desarrollando la multiplicación

$$= \Omega i \eta \left( a e^{-\frac{i}{\hbar} \nu t} \sigma_+ e^{2i\frac{\Omega}{\hbar} t} - a e^{-\frac{i}{\hbar} \nu t} \sigma_-^{-2i\frac{\Omega}{\hbar} t} + a^+ e^{\frac{i}{\hbar} \nu t} \sigma_+ e^{2i\frac{\Omega}{\hbar} t} - a^+ e^{\frac{i}{\hbar} \nu t} \sigma_-^{-2i\frac{\Omega}{\hbar} t} \right)$$

$$H_{\pi/2} = \Omega i \eta \left( a \sigma_+ e^{-\frac{i}{\hbar} (\nu-2\Omega)t} - a \sigma_- e^{-\frac{i}{\hbar} (\nu+2\Omega)t} + a^+ \sigma_+ e^{\frac{i}{\hbar} (\nu+2\Omega)t} - a^+ \sigma_- e^{\frac{i}{\hbar} (\nu-2\Omega)t} \right). \quad (3.124)$$

De manera análoga podemos ver que para el caso del Hamiltoniano (3.115) y la transformación (3.116) con el signo negativo

$$i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) = -(\nu \hat{n} - \Omega \sigma_z). \quad (3.125)$$

Para obtener  $T(t) H T^+(t)$  necesitamos calcular

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} \sigma_+ e^{\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} = \sigma_+ + \left(-\frac{i}{\hbar}\Omega t\right) [\sigma_z, \sigma_+] + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\Omega t\right)^2 [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_+]] + \dots \quad (3.126)$$

Usando (3.63)

$$= \sigma_+ + \left(-\frac{i}{\hbar}\Omega t\right) (2\sigma_+) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\Omega t\right)^2 (2\sigma_+)^2 + \dots$$

Por lo que

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} \sigma_+ e^{\frac{i}{\hbar}\Omega\sigma_z t} = \sigma_+ e^{-\frac{2i\Omega t}{\hbar}}. \quad (3.127)$$

También se necesita

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{v}nt} a e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{v}nt} = a e^{-\frac{i}{\hbar}vt},$$

el cual se ha obtenido en (3.122).

El hamiltoniano transformado resulta ser

$$H_{-\pi/2} = \Omega i \eta (a e^{-\frac{i}{\hbar}vt} + a^+ e^{\frac{i}{\hbar}vt}) (\sigma_+ e^{-2i\frac{\Omega}{\hbar}t} - \sigma_- e^{2i\frac{\Omega}{\hbar}t}). \quad (3.128)$$

Multiplicando y agrupando

$$H_{-\pi/2} = \Omega i \eta \left( a e^{-\frac{i}{\hbar}vt} \sigma_+ e^{-2i\frac{\Omega}{\hbar}t} - a e^{-\frac{i}{\hbar}vt} \sigma_- e^{2i\frac{\Omega}{\hbar}t} + a^+ e^{\frac{i}{\hbar}vt} \sigma_+ e^{-2i\frac{\Omega}{\hbar}t} - a^+ e^{\frac{i}{\hbar}vt} \sigma_- e^{2i\frac{\Omega}{\hbar}t} \right),$$

$$H_{-\pi/2} = \Omega i \eta \left( a \sigma_+ e^{-\frac{i}{\hbar}(v+2\Omega)t} - a \sigma_- e^{-\frac{i}{\hbar}(v-2\Omega)t} + a^+ \sigma_+ e^{\frac{i}{\hbar}(v-2\Omega)t} - a^+ \sigma_- e^{\frac{i}{\hbar}(v+2\Omega)t} \right). \quad (3.129)$$

En los Hamiltonianos transformados (3.124) y (3.129) se puede apreciar que se tienen términos que oscilan a las frecuencias  $\nu + 2\Omega$  y  $\nu - 2\Omega$ . Por la aproximación de onda rotante se tiene que la contribución dominante viene de los términos que oscilan más lentamente, es decir, de aquellos que cumplen

$$\Omega \approx \frac{\nu}{2}. \quad (3.130)$$

De hecho al hacer esta consideración los términos correspondientes a las frecuencias  $\nu - 2\Omega$  no oscilarían y serían los que conservamos. Los que corresponden a la frecuencia  $\nu + 2\Omega$  los despreciamos. Con esto los Hamiltonianos de interacción con aproximación de onda rotante están dados por

$$H_{\pi/2} = \Omega i \eta (a \sigma_+ - a^\dagger \sigma_-), \quad (3.131)$$

$$H_{-\pi/2} = \Omega i \eta (a^\dagger \sigma_+ - a \sigma_-). \quad (3.132)$$

La ecuación (3.131) corresponde a un Hamiltoniano tipo Jaynes-Cummings y el (3.132) a un Hamiltoniano tipo anti-Jaynes-Cummings. Estos Hamiltonianos se han obtenido mediante la condición (3.130), y debido a que  $\Omega$  está relacionada con la intensidad de la onda plana como  $\Omega = \lambda E_0$  a través de (3.87), esto significa que podemos obtener las transiciones Jaynes-cummings y anti Jaynes-cummings ajustando la intensidad de la onda plana según (3.130), es decir a una intensidad intermedia, y a una sola frecuencia resonante, condición (3.106), eliminando la necesidad de utilizar un láser sintonizable como en el caso del método mostrado como antecedente. La rotación (3.110) está relacionada con la interacción del ion con un láser a una frecuencia fija y en resonancia con el ion, siendo función el ángulo de rotación  $\theta$  del tiempo de interacción con este láser. Podemos decir que

i) Un pulso  $\pi/2$  produce interacciones Jaynes-Cummings. Es decir,

$$|n\rangle|e\rangle \xleftrightarrow{\pi/2} |n+1\rangle|g\rangle.$$

ii) Un pulso  $-\pi/2$  produce interacciones anti-Jaynes-Cummings. Es decir,

$$|n+1\rangle|g\rangle \xleftrightarrow{-\pi/2} |n\rangle|e\rangle$$

Se está preparando un artículo acerca de esta parte de la tesis para ser enviado a la Revista Mexicana de Física.

## Referencias

- [3.1] Hermann Haken y Hans C. Wolf, *The Physics of atoms and Quanta*, Springer–Verlag, 4a. Edición, p. 138.
- [3.2] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe and D. Wineland, 2003, *Reviews of Modern Physics* **75**, p. 281.
- [3.3] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King and D. M. Meekhof, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, **103**, p. 259 (1998)
- [3.4] Marek Sasura y Vladimír Buzek, *Journal of Modern Optics*, 2002, **49**, 1593-1647.
- [3.5] William H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley and Sons, 1973, p. 137.
- [3.6] Ver referencia [3.5] p. 136
- [3.7] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Dover Publications Inc., 1987, p. 41.
- [3.8] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physics*, Academic Press, 5<sup>th</sup> Edition, p. 725.
- [3.9] Stephen Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley and Sons, 1974, p. 133.
- [3.10] T. Jaynes and F. W. Cummings, 1963, *Proc. IEEE* **51**, p. 89.
- [3.11] Ver referencia [3.8], p. 832.

# Capítulo 4

## Interacción ion-láser en una trampa con frecuencia dependiente del tiempo.

Se analiza el problema de un ion atrapado en una trampa dependiente del tiempo interactuando con un campo láser. Mediante un conjunto de transformaciones unitarias se muestra que este sistema es equivalente a la interacción entre un campo cuantizado y un sistema de dos niveles con parámetros dependientes del tiempo. Usando transformaciones unitarias dependientes del tiempo se linealiza el problema.

### 4.1 Oscilador armónico dependiente del tiempo

En el capítulo anterior se estudio la interacción entre un ion confinado en una trampa con una frecuencia independiente del tiempo y un campo láser. Pero en una trampa de Paul la frecuencia de la trampa podría ser manipulada de tal forma que no sea constante sino que varíe en el tiempo. En este capítulo se estudiará el caso de un ion con un confinamiento oscilatorio en una trampa con una frecuencia dependiente del tiempo.

#### 4.1.1 Invariante de Lewis

En 1967 Lewis [4.1] consideró sistemas físicos poseyendo un Hamiltoniano de la forma

$$H = (1/2\varepsilon)(p^2 + \omega^2(t)q^2), \quad (4.1)$$



donde  $q$  es una coordenada canónica,  $p$  es su momento conjugado y  $\omega(t)$  es una función continua de  $t$  arbitraria. La motivación original para considerar tales sistemas fue el deseo de investigar la naturaleza de las series del momento magnético para un partícula cargada moviéndose en un campo electromagnético relativamente simple para el cual el potencial escalar es cero y el vector potencial es

$$\vec{A} = \frac{1}{2} h(t) \vec{B}(t) \times \vec{r}, \quad (4.2)$$

La ecuación de movimiento para tal sistema corresponde al Hamiltoniano (4.1), en cuyo caso  $\omega(t)$  es  $1/2B(t)$ , y  $\varepsilon$  es la razón carga-masa. Lewis aplicó la teoría de Kruskal [4.2] a este sistema y como una consecuencia derivó un invariante exacto. Dicho invariante resulta ser

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q}{\rho} \right)^2 + \left( \rho p - \dot{\rho} q \right)^2 \right]. \quad (4.3)$$

Con  $\rho$  una función de  $t$  satisfaciendo la llamada ecuación de Ermakov

$$\ddot{\rho} + \omega(t)\rho = \frac{1}{\rho^3}, \quad (4.4)$$

puede verse más sobre la obtención de este invariante en [4.3].

Este invariante es una constante de movimiento del sistema descrito por el Hamiltoniano (4.1) en el sentido de que

$$\frac{dI}{dt} = 0. \quad (4.5)$$

Si se considera a un sistema cuántico cuyo Hamiltoniano esté dado por la ecuación (4.1) donde  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  son ahora operadores que satisfacen la relación de conmutación

$$\left[ \hat{q}, \hat{p} \right] = i\hbar, \quad (4.6)$$

usando la relación de conmutación dada arriba y la ecuación para  $\rho$  se puede demostrar que la cantidad  $I$  el cual es un invariante del sistema clásico es también un invariante del sistema cuántico. Esto es, satisface,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0. \quad (4.7)$$

En lo siguiente  $x$  y  $p$  son operadores y se omitirá el signo de operador  $\hat{\phantom{x}}$ .

#### 4.1.2 Transformaciones unitarias

Recientemente Moya y Guasti [4.4] presentaron una forma alternativa de obtener el invariante  $I$ . Utilizando transformaciones unitarias que involucran la función auxiliar de este sistema cuántico logran resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para un oscilador armónico con parámetros dependientes del tiempo cuya ecuación es de la forma

$$H = (1/2)(p^2 + \omega^2(t)q^2). \quad (4.8)$$

Dichas transformaciones unitarias son

$$D = \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right), \quad (4.9)$$

$$S = \exp\left(i \frac{\ln \rho}{2\hbar}(qp + pq)\right), \quad (4.10)$$

Estas transformaciones pueden ser obtenidas a partir del invariante de Lewis considerando a los términos  $\frac{q}{\rho}$  y  $\rho p$  en el invariante como una compresión en las variables  $q$  y  $p$ , y al término  $-\dot{\rho}q$  como un desplazamiento en la variable  $p$ .

Una transformación unitaria de la forma  $\exp(iq\alpha)$  desplaza al operador de momento  $p$  en una cantidad  $-\alpha$  [4.5]

$$e^{iq\alpha} p e^{-iq\alpha} = p - \alpha. \quad (4.11)$$

Puede verse esto usando el lema (3.71) y la relación de conmutación entre  $q$  y  $p$  (3.9). En general se tiene

$$e^{iq^n \alpha / n} p e^{-iq^n \alpha / n} = p - \alpha q^{n-1}. \quad (4.12)$$

Usando esta expresión para el caso del invariante de Lewis puede escribirse el desplazamiento en el operador momento en la forma

$$D = \exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t) q^2}{2\rho(t)}\right), \quad (4.13)$$

el cual actúa sobre  $p$  como

$$\exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t) q^2}{2\rho(t)}\right) p \exp\left(\frac{i \dot{\rho}(t) q^2}{2\rho(t)}\right) = p + \frac{\dot{\rho}(t) q}{\rho(t)}. \quad (4.14)$$

Aplicado al invariante resulta

$$DID^+ = \frac{1}{2} \left( \rho^2 p^2 + \frac{1}{\rho^2} q^2 \right). \quad (4.15)$$

Por otro lado la transformación unitaria realizada por el operador de compresión [4.6]

$$\exp\left(i \frac{g(t)}{2} (qp + pq)\right), \quad (4.16)$$

genera una compresión y una dilatación en las variables posición y momento. Para  $p$  se tiene

$$SpS^+ = pe^{g(t)}, \quad (4.17)$$

y para  $q$

$$SqS^+ = qe^{-g(t)}. \quad (4.18)$$

La compresión y la dilatación dependen del signo de  $g(t)$ . Haciendo  $g(t) = \ln \rho$ , para el caso del invariante de Lewis la transformación

$$S = \exp\left(i \frac{\ln \rho}{2} (qp + pq)\right), \quad (4.19)$$

genera

$$SpS^+ = \rho p, \quad (4.20)$$

y

$$SqS^+ = \frac{q}{\rho}. \quad (4.21)$$

Si aplicamos  $S$  a (4.3) se obtiene

$$SDID^+S^+ = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad (4.22)$$

Es decir, el invariante de Lewis es transformado en otro invariante, el Hamiltoniano de un oscilador armónico independiente del tiempo con masa unitaria.

Las transformaciones  $S$  y  $D$  se pueden agrupar en una sola transformación  $T$

$$T = \exp\left(\frac{i \ln \rho(q p + p q)}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t) q^2}{2\rho(t)}\right). \quad (4.23)$$

Esta transformación  $T$  tiene la propiedad de que al ser aplicada al Hamiltoniano del oscilador armónico dependiente del tiempo, (4.1), factoriza la dependencia temporal del hamiltoniano, es decir, si  $|\psi\rangle$  corresponde a la función de onda del oscilador dependiente del tiempo,  $T$  la transforma en

$$|\varphi\rangle = T|\psi\rangle. \quad (4.24)$$

La ecuación de Schrödinger para  $|\varphi\rangle$  es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi\rangle = H_0 |\varphi\rangle, \quad (4.25)$$

donde

$$H_0 = \frac{1}{2\rho^2(t)} (p^2 + q^2). \quad (4.26)$$

Es decir, la transformación factoriza la dependencia temporal del Hamiltoniano, haciéndolo más fácil de resolver.

Este hecho se utiliza en la siguiente sección para el análisis del problema de un ion con frecuencia dependiente del tiempo interactuando con un láser y encontrar una forma de su Hamiltoniano que sea soluble.

### 4.3 Análisis del Hamiltoniano de interacción entre un láser con un ion atrapado con frecuencia dependiente del tiempo.

El Hamiltoniano del sistema ion atrapado con frecuencia dependiente del tiempo en interacción con un láser es

$$H = \frac{1}{2} \left( p + v^2(t)x^2 \right) + \frac{\hbar}{2} \omega_{21} \sigma_z + \hbar \lambda(t) \left[ E^{(-)}(x, t) \sigma_- + H.c. \right]. \quad (4.27)$$

El Hamiltoniano se construye igual que en el caso independiente del tiempo pero ahora la frecuencia de la trampa no es constante sino que se considera una función del tiempo. La ecuación de Schrödinger para este Hamiltoniano lo escribimos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\xi(t)\rangle = H |\xi(t)\rangle. \quad (4.28)$$

En el análisis del problema primero hacemos la transformación

$$|\phi(t)\rangle = T(t) |\xi(t)\rangle, \quad (4.29)$$

con

$$T(t) = \exp \left( \frac{i \ln \{ \rho(t) \sqrt{v_0} \} (x p + p x)}{2\hbar} \right) \exp \left( \frac{-i \dot{\rho}(t) x^2}{2\hbar \rho(t)} \right), \quad (4.30)$$

con la ecuación de Ermakov (4.4).

Esta transformación convierte la función de onda correspondiente al Hamiltoniano (4.27) en la función  $|\phi(t)\rangle$ .

Al igual que en las transformaciones que hemos utilizado anteriormente debemos calcular la expresión (3.58)

$$H_T = \left( i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) + T(t) H T^+(t) \right) \quad (4.31)$$

para encontrar el Hamiltoniano transformado.

Para obtener  $\frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t)$  calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) &= \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(x p + p x)}{2\hbar}\right) \frac{i\hbar}{2\hbar} (x p + p x) \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \exp\left(\frac{i \dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{-i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(x p + p x)}{2\hbar}\right) + \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(x p + p x)}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \\ &\times \left(-\frac{i}{2\hbar} x^2 \frac{\ddot{\rho}(t)\rho(t) - \dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}\right) \exp\left(\frac{-i \dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right) \exp\left(\frac{-i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(x p + p x)}{2\hbar}\right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) &= \frac{i\hbar}{2\hbar} \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} (x p + p x) + \left(-\frac{i}{2\hbar} \frac{\ddot{\rho}(t)\rho(t) - \dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}\right) \exp\left(\frac{i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(x p + p x)}{2\hbar}\right) x^2 \\ &\times \exp\left(\frac{-i \ln\{\rho(t)\sqrt{v_0}\}(x p + p x)}{2\hbar}\right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para calcular lo anterior necesitamos en el segundo término la expresión siguiente

$$\exp\left(\alpha(x p + p x)\right)x^2 \exp\left(-\alpha(x p + p x)\right) = x^2 + \alpha\left[x p + p x, x^2\right] + \frac{\alpha^2}{2!}\left[x p + p x, \left[x p + p x, x^2\right]\right] + \dots \quad (4.34)$$

En donde se ha usado (3.62) y por comodidad definimos

$$\alpha = \frac{i \ln(\rho(t)\sqrt{v_0})}{2\hbar}. \quad (4.35)$$

El conmutador

$$\left[x p + p x, x^2\right] = -4i\hbar x^2 \quad (4.36)$$

se puede obtener usando la propiedad

$$\left[p, x'\right] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x'; \quad (4.37)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \exp\left(\alpha(x p + p x)\right)x^2 \exp\left(-\alpha(x p + p x)\right) &= x^2 + \alpha(-4i\hbar)x^2 + \frac{\alpha^2}{2!}(-4i\hbar)^2 x^2 + \dots \\ &= x^2 e^{-4i\hbar\alpha} = x^2 \rho^2(t)v_0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Sustituyendo en (4.33) y utilizando la ecuación de Ermakov (4.4) se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} T^+(t) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} (x p + p x) + \frac{1}{2} \left( \ddot{\rho}(t)\rho(t) - \dot{\rho}^2(t) \right) x^2 v_0. \quad (4.39)$$

Para calcular  $T(t)HT^+(t)$  necesitamos en primer lugar

$$T(t)\left(\frac{1}{2}p^2 + v^2(t)x^2\right)T^+(t). \quad (4.40)$$



En esta tarea se encuentra uno en la necesidad de obtener

$$\exp\left(\frac{-i\dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right)p\exp\left(\frac{i\dot{\rho}(t)x^2}{2\hbar\rho(t)}\right)=p+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}x, \quad (4.41)$$

$$e^{\alpha(xp+px)}xe^{-\alpha(xp+px)}=\rho(t)\sqrt{v_0}x \quad (4.42)$$

y

$$\exp\left(\alpha(xp+px)\right)\left(p+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}x\right)\exp\left(-\alpha(xp+px)\right)=p\left(\frac{1}{\rho(t)\sqrt{v_0}}\right). \quad (4.43)$$

Las que se obtienen usando (3.62) y (3.9). Con las expresiones anteriores se puede obtener

$$T(t)p^2T^+(t)=\left(\frac{1}{\rho^2(t)v_0}\right)p^2+\dot{\rho}^2(t)v_0x^2+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}(xp+px), \quad (4.44)$$

y

$$T(t)x^2T^+(t)=\rho^2(t)v_0x^2. \quad (4.45)$$

Con lo cual, usando (4.4), (4.39), (4.44) y (4.45) resulta

$$T(t)\left(\frac{1}{2}p+v^2(t)x^2\right)T^+(t)+i\hbar\frac{\partial T(t)}{\partial t}T^+(t)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\rho^2(t)v_0}\right)p^2+\frac{v_0}{\rho^2(t)}x^2\right). \quad (4.46)$$

En la transformación (4.31) también necesitamos

$$T(t)e^{-i(kx-\omega t)}T^+(t)=e^{\omega t}T(t)e^{-ikx}T^+(t), \quad (4.47)$$

separamos de esta forma porque  $e^{\omega t}$  conmuta con  $T(t)$ . De lo anterior

$$T(t)e^{-ikx}T^+(t) = \exp\left(\alpha(xp + px)\right)e^{-ikx}\exp\left(-\alpha(xp + px)\right), \quad (4.48)$$

desarrollando en Taylor la exponencial y con  $\alpha$  como en (4.35)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} \exp\left(\alpha(xp + px)\right)x^m \exp\left(-\alpha(xp + px)\right) =, \quad (4.49)$$

usando (3.62)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} \left( x^m + \alpha[xp + px, x^m] + \frac{\alpha^2}{2!} [xp + px, [xp + px, x^m]] + \dots \right). \quad (4.50)$$

Considerando que

$$[xp + px, x^m] = x[p, x^m] + [p, x^m]x = -2i\hbar mx^m, \quad (4.51)$$

(4.50) se iguala a

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} \left( x^m + \alpha(-2i\hbar m)x^m + \frac{\alpha^2}{2!} (-2i\hbar m)^2 x^m \dots \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} e^{(-2i\hbar \alpha m)} x^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} (xe^{-2i\hbar \alpha})^m, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} x^m (\rho(t)\sqrt{v_0})^m \\ &= e^{-ik\rho(t)\sqrt{v_0}x}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Insertando esto en (4.50)

$$T(t)e^{-i(kx-\omega t)}T^\dagger(t) = e^{-i(k\rho(t)\sqrt{v_0}x-\omega t)}. \quad (4.54)$$

Conjuntando los resultados (4.46) y (4.54) el Hamiltoniano transformado resulta ser

$$H_T = \frac{1}{2\rho^2(t)v_0}(p^2 + v_0^2x^2) + \frac{\hbar}{2}\omega_{21}\sigma_z + \hbar\Omega(t)\left[e^{-i(k\rho(t)\sqrt{v_0}x-\omega t)}\sigma_- + h.c.\right], \quad (4.55)$$

siendo

$$\Omega(t) = \lambda E_0 \quad (4.56)$$

la frecuencia de Rabi.

Como podemos ver en el Hamiltoniano (4.55), hemos podido factorizar la dependencia temporal de la trampa, esta dependencia está implícita en  $\rho(t)$ . Esto representa una ventaja cuando se requiere resolver la ecuación de Schrödinger para este sistema.

Ahora transformamos a un marco rotante de frecuencia  $\omega$  usando la transformación

$$T_\omega(t) = e^{\frac{i}{2}\omega t\sigma_z}. \quad (4.57)$$

La transformación  $T_\omega(t)$  conmuta con  $p$  y  $q$  porque estos se refieren al movimiento vibracional y  $\sigma_z$  a los estados internos. También conmuta con  $\frac{\hbar}{2}\omega_{21}\sigma_z$  por ser función del mismo operador.

Se tiene que

$$T_\omega(t)H_T^\dagger(t) = \hbar\Omega(t)e^{-i\omega t\sigma_z}\left[e^{-i(k\rho(t)\sqrt{v_0}x-\omega t)}\sigma_- + h.c.\right]e^{i\omega t\sigma_z}. \quad (4.58)$$

Para esta parte de la transformación solo necesitamos

$$e^{\frac{i}{2}\omega t\sigma_z} \sigma_- e^{-\frac{i}{2}\omega t\sigma_z} = \sigma_- + \frac{i\omega t}{2} [\sigma_z, \sigma_-] + \frac{(\frac{i\omega t}{2})^2}{2!} [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_-]] + \dots, \quad (4.59)$$

usando (3.63)

$$= \sigma_- + \frac{i\omega}{2} t(-2\sigma_-) + \frac{(\frac{i\omega}{2}t)^2}{2!} (-2)^2 \sigma_- + \dots, \quad (4.60)$$

factorizando  $\sigma_-$

$$\begin{aligned} &= \sigma_- \left( 1 + (-i\omega t) + \frac{(-i\omega t)^2}{2!} + \frac{(-i\omega t)^3}{3!} \dots \right), \\ &= \sigma_- e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Además se puede obtener

$$i\hbar \frac{\partial T_\omega(t)}{\partial t} T_\omega^+(t) = -\frac{\hbar}{2} \omega \sigma_z. \quad (4.62)$$

Con (4.61) y (4.62) podemos obtener el siguiente resultado

$$H_\omega = \frac{\hbar}{2\nu_0\rho^2(t)} (p^2 + \nu^2_0 x^2) + \frac{\hbar}{2} (\omega_{21} - \omega) \sigma_z + \hbar\Omega(t) \left[ e^{-i(a+a^+)\eta(t)} \sigma_- + h.c. \right]. \quad (4.63)$$

Lo que podemos describir como

$$H_\omega = \hbar \tilde{\omega}(t) \left( \hat{n} + 1/2 \right) + \hbar \frac{\delta}{2} \sigma_z + \hbar\Omega(t) \left[ e^{-i(a+a^+)\eta(t)} \sigma_- + h.c. \right], \quad (4.64)$$

si consideramos que  $\delta = (\omega_{21} - \omega)$  es la desintonía entre el láser y el ion.

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{1}{\rho^2(t)} \quad (4.65)$$

es llamada la frecuencia característica del oscilador armónico dependiente del tiempo. El parámetro de Lamb-Dicke dependiente del tiempo es escrito como

$$\eta(t) = \eta_0 \rho(t) \sqrt{\nu_0}, \quad (4.66)$$

con

$$\eta_0 = k \sqrt{\frac{\hbar}{2\nu_0}}, \quad (4.67)$$

siendo  $k$  la magnitud del vector de onda del láser que ilumina al ion. También se ha escrito el operador de posición  $x$  en función de los operadores de aniquilación y creación, (3.16) y (3.17).

Por comparación con (3.67), el Hamiltoniano (4.64) es equivalente al de la interacción entre un campo cuantizado y un sistema de dos niveles con parámetros dependientes del tiempo.

## 4.4 Linealización del sistema

Finalmente hacemos la transformación

$$|\phi_R\rangle = R(t)|\phi_\omega\rangle, \quad (4.68)$$

con  $R(t)$  dada por

$$R(t) = \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\sigma_+ - \sigma_-)\right] \times \exp\left[-i\frac{\eta(t)}{2}(a + a^+)\sigma_z\right]. \quad (4.69)$$

Podemos obtener

$$i\hbar \frac{\partial R(t)}{\partial t} R^+(t) = -i \frac{\dot{\eta}(t)}{2} (a + a^+) \sigma_z. \quad (4.70)$$

Para  $RHR^+$  necesitamos

$$\begin{aligned} \exp\left[-i \frac{\eta(t)}{2} (a + a^+) \sigma_z\right] \hat{n} \exp\left[i \frac{\eta(t)}{2} (a + a^+) \sigma_z\right] = \\ = \hat{n} - i \frac{\eta(t)}{2} (a - a^+) \sigma_z + \frac{\eta^2(t)}{4} \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \exp\left[-i \frac{\pi}{4} \sigma_y\right] \sigma_z \exp\left[i \frac{\pi}{2} \sigma_y\right] &= \sigma_z + \left(-i \frac{\pi}{4}\right) [\sigma_y, \sigma_z] + \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\pi}{4}\right)^2 [\sigma_y, [\sigma_y, \sigma_z]] \\ &+ \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\pi}{4}\right)^3 [\sigma_y, [\sigma_y, [\sigma_y, \sigma_z]]] + \frac{1}{4!} \left(-i \frac{\pi}{4}\right)^4 [\sigma_y, [\sigma_y, [\sigma_y, [\sigma_y, \sigma_z]]]] + \dots \\ &= \sigma_z + \left(-i \frac{\pi}{4}\right) 2i \sigma_x + \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\pi}{4}\right)^2 (2i)(-2i) \sigma_z + \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\pi}{4}\right)^3 (2i)(-2i)(2i) \sigma_x + \\ &+ \frac{1}{4!} \left(-i \frac{\pi}{4}\right)^4 (2i)(-2i)(2i)(-2i) \sigma_z + \dots = \\ &= \sigma_z \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sigma_x \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_x \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\exp\left[-i \frac{\eta(t)}{2} (a + a^+) \sigma_z\right] \sigma_- \exp\left[i \frac{\eta(t)}{2} (a + a^+) \sigma_z\right] = \sigma_- \exp[i\eta(t)(a + a^+)] \quad (4.73)$$

$$\exp\left[-i \frac{\pi}{4} \sigma_y\right] (\sigma_- + \sigma_+) \exp\left[i \frac{\pi}{2} \sigma_y\right] =$$

$$= (\sigma_x + \sigma_y) \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sigma_z \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sigma_z. \quad (4.74)$$

Con lo que el Hamiltoniano resultante es,

$$H_R = \hbar \left( \tilde{\omega}(t) \hat{n} + \tilde{\omega}(t) \frac{\eta^2(t)}{4} + \Omega(t) \sigma_z - i \frac{\dot{\eta}(t)}{2} (a + a^+) \sigma_z + \right. \\ \left. + \left( \frac{\delta}{2} - i \frac{\tilde{\omega}(t) \eta(t)}{2} [a - a^+] \right) (\sigma_+ + \sigma_-) \right). \quad (4.70)$$

No hemos considerado el término  $\tilde{\omega}(t)/2$  porque solo representa una fase.

En conclusión, hemos logrado linealizar el Hamiltoniano sin necesidad de ningún tipo de aproximaciones, la aproximación de onda rotante no es usada por ejemplo y queda abierta la posibilidad para considerar distintos regímenes de intensidad; tampoco se ha hecho ninguna suposición sobre  $\eta(t)$ , el parámetro de Lamb-Dicke. También es válido para cualquier tipo de desintonía, y para cualquier dependencia temporal de la trampa. La forma obtenida para el Hamiltoniano es soluble. Un método para resolver interacciones tipo Jaynes-Cummings con parámetros dependientes del tiempo, como el del Hamiltoniano (4.71), se ha publicado en [4.7]. Los resultados de esta parte de la tesis se han publicado en [4.8].

## Referencias

- [4.1] H. R. Lewis Jr., 1967, Phys. Rev. Letters, **18**, 510 (1967).
- [4.2] M. Kruskal, J. Math. Phys. **3**, 806 (1962)
- [4.3] H. R. Lewis Jr., 1967, Journal of Mathematical Physics, **9**, 1967.
- [4.4] M. Fernández Guasti y H Moya-Cessa J. Phys. A: Math. Gen., **36**, (2003), 2069-2076
- [4.5] K. E. Cahill y R. J. Glauber, Physical Review, **177**, 1857.
- [4.6] Marlan O. Scully, Quantum Optics, Cambridge University Press, 1997, p. 63
- [4.7] Shen J. Q., Zhu H Y y Chen P., 2003, Eur. Phys. J. D **23**, 305.
- [4.8] J. M. Vargas Martínez and H Moya-Cessa, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6** (2004) S618–S620.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Hemos estudiado la interacción de un láser con un ion atrapado en un potencial armónico independiente del tiempo y hemos encontrado Hamiltonianos de acoplamiento entre los niveles internos del ion y sus estados vibracionales que nos dan transiciones tipo Jaynes-Cummings y anti-Jaynes-Cummings. En nuestro tratamiento hemos considerado la condición de resonancia entre el láser y los niveles internos del ion y mediante la aproximación de onda rotante se impone una condición sobre la intensidad del láser (intensidad intermedia), encontrándose que debe ser proporcional a la frecuencia de vibración del ion. También se han utilizado rotaciones del Hamiltoniano que corresponden a interacciones del ion con un láser a una frecuencia fija. Este método es más fácil de implementar porque no es necesaria la utilización de láseres sintonizables.

Mediante una serie de transformaciones unitarias hemos logrado linealizar el Hamiltoniano del sistema formado por un ion atrapado interaccionando con un láser encontrándose una forma soluble sin necesidad de aproximación de onda rotante, tampoco se ha hecho ninguna suposición sobre  $\eta(t)$ , el parámetro de Lamb-Dicke. También es válido el tratamiento para cualquier tipo de desintonía, y para cualquier dependencia temporal de la trampa. También ha quedado sin condición el régimen de intensidad utilizada. Por lo mencionado anteriormente la solución presentada es la mejor para este tipo de sistema.

Hemos visto que existen distintos regímenes de intensidad alcanzables en la interacción entre iones atrapados y láseres en el caso independiente del tiempo. Como trabajo futuro los distintos regímenes de interacción pueden ser estudiados para el caso dependiente del tiempo. También, queda por estudiar el comportamiento del sistema para distintas formas de la frecuencia dependiente del tiempo.

# Lista de Figuras

Figura 2.1 Estructura de los electrodos para la configuración (2.6)

Figura 2.2 Diagrama mostrando los electrodos de la trampa de iones para la configuración (2.7). Tomada de [2.7].

Figura 2.3 Esquema de una trampa de Paul para el almacenamiento de partículas cargadas usando campos eléctricos oscilantes generados por un cuadrupolo. La figura muestra dos estados durante un ciclo AC.

Figura 2.4 Región de estabilidad de la trampa de Paul (Tomada de [2.5]).

Figura 2.5 Muestra el micromovimiento y el movimiento secular de un ion atrapado con parámetros  $q = 0.2$ ,  $\beta = 0.02$ . Las oscilaciones a mayor frecuencia son el micromovimiento y las de menor frecuencia el movimiento secular.

Figura 3.1 Ilustración del efecto del operador de creación y aniquilación. La aplicación de  $a^+$  significa subir un nivel en la escalera de estados. La aplicación de  $a$  significa descender un nivel en la escalera de estados.

Figura 3.2 Muestra la desintonía entre el láser y la transición electrónica para el caso en que la frecuencia del láser es menor que la de la transición.

Figura 3.3 Muestra la desintonía entre el láser y la transición electrónica para el caso en que la frecuencia del láser es mayor que la de la transición.

Figura 3.3 a) Un Hamiltoniano Jaynes-Cummings implica el ascenso en un cuanto del movimiento vibracional del ion y la transición, al mismo tiempo, de un estado interno excitado al estado base o viceversa. b) El Hamiltoniano anti Jaynes-Cummings tiene el efecto de aniquilar un cuanto en el movimiento vibracional y la transición del estado excitado al estado base en los niveles internos del ion o viceversa.

# Publicaciones

- 1. “Solution of Master Equations for the anharmonic oscillator interacting with a heat bath and for parametric down conversion process”.**  
L.M. Arévalo-Aguilar, R. Juárez-Amaro, **J.M. Vargas-Martínez**, O. Aguilar-Loreto and H. Moya-Cessa. *App. Math and Inf. Sc.* **2**, (2008), pp. 43-49.
- 2. “Useful transformations: from ion-laser interactionsto master equations”.**  
R. Juárez-Amaro, **J.M. Vargas-Martínez** and H. Moya-Cessa. *Laser Physics*, 2008, Vol. 18, No. 3, pp. 344–348.
- 3. “Normal and Anti-normal Ordered Expressions for Annihilation and Creation Operators”, J. M. Vargas Martínez, H. M. Moya-Cessa and M. Fernández Guasti, Revista Mexicana de Física, sección Enseñanza, E 52 (1) 13-16 (2006).**
- 4. “On the quantum phase operator”, J. M. Vargas Martínez and H.M. Moya-Cessa, Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 6 (2004) S155-S157.**
- 5. “A trapped ion with time-dependent frequency interaction with a laser field” J.M. Vargas Martínez and H. M. Moya-Cessa, Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 6 (2004) S618-S620.**
- 6. “Estudio de la Interacción de Láser con un Ion Atrapado”, J. M. Vargas Martínez and H. M. Moya-Cessa, XLVII Congreso Nacional SMF/ XVII Reunión Anual AMO, Hermosillo Sonora, (2004) p. 65-OPTICA2004. (Trabajo en extenso)**
- 7. “Normal Ordered Expressions for Annihilation and Creation Operators”, J. M. Vargas Martínez and H. M. Moya-Cessa, Proceedings of the 8<sup>th</sup> international Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, (2003) Rinton Press , p. 424.**
- 8. “On the quantum phase operator”, J.M. Vargas Martínez and H.M. Moya-Cessa, Proceedings of the 8<sup>th</sup> international Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, (2003) Rinton Press , p. 428.**
- 9. “Ordenamiento Normal y Antinormal de operadores”, J. M. Vargas Martínez and H. M. Moya-Cessa, XLVI Congreso Nacional SMF/ XVI Reunión Anual AMO, Mérida Yucatán, (2003) p. 60V03. (Trabajo en extenso).**