



**INAOE**

**Adelgazamiento y Detección de Bordos de Objetos en  
Imágenes Digitales Usando Conjuntos Difusos**

por

**Anmi García Arellano**

Tesis sometida como requisito parcial  
para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,  
Óptica y Electrónica**  
Octubre 2007  
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. Gonzalo Urcid Serrano**  
Investigador Titular del INAOE

©INAOE 2007

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y  
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes



# Resumen

En el presente trabajo, en primer lugar, se revisan los conceptos básicos del tratamiento convencional de imágenes y de la morfología matemática para la detección de bordes y adelgazamientos. Así como también, algunos algoritmos para implementar estas técnicas. Por otra parte, se presentan los fundamentos teóricos de un tratamiento de imágenes distinto a los tratamientos convencional y morfológico, el cual se centra en una teoría matemática alternativa, a saber, la teoría de los conjuntos difusos. Esta área del análisis y tratamiento de imágenes es conocida como procesamiento de imágenes difuso. Finalmente, se presentan las técnicas difusas de detección de bordes y adelgazamientos haciendo un análisis de las ventajas y desventajas que ofrecen los métodos convencionales, los métodos morfológicos y los resultados basados en la teoría de conjuntos difusos con el propósito de extender las posibilidades en que el tratamiento de imágenes puede desarrollarse.

# Dedicatorias

A Dios, por darme la fuerza para avanzar en la vida.

A mis padres, José Luis García Vidal y María Luisa Arellano Gutiérrez, por el apoyo de siempre, por su esfuerzo y enseñanza durante mi formación, mi más profunda admiración y respeto.

A mis hermanos, Rosalía, José Luis y Guadalupe, por su apoyo y compañía en todo momento.

*"Ninguna cantidad de poderoso equipo puede compensar la falta de un pensamiento elevado."*

F. P. Dickson, La Bóveda de la Noche, 1975.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Procesamiento de imágenes y cómputo suave . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.3. Objetivo de la tesis . . . . .	3
1.4. Preliminares . . . . .	4
1.4.1. Procesamiento digital de imágenes . . . . .	4
1.4.2. Morfología matemática . . . . .	9
<b>2. Detección de Bordes y Adelgazamientos</b>	<b>15</b>
2.1. Procedimientos convencionales . . . . .	15
2.1.1. Operadores de vecindad para detección de bordes . . . . .	15
2.1.2. Eje central . . . . .	21
2.1.3. Algoritmos de adelgazamiento . . . . .	24
2.2. El punto de vista morfológico . . . . .	29
2.2.1. Gradientes morfológicos . . . . .	29
2.2.2. Esqueletización . . . . .	31
2.2.3. Adelgazamientos morfológicos . . . . .	32
2.3. Análisis comparativo . . . . .	34
2.3.1. Criterios de comparación . . . . .	34
2.3.2. Ventajas y desventajas . . . . .	35
<b>3. Procesamiento de Imágenes Difuso</b>	<b>37</b>
3.1. Conjuntos nítidos vs. conjuntos difusos . . . . .	37
3.2. Operaciones con conjuntos difusos . . . . .	39

3.3.	Funciones de membresía . . . . .	44
3.4.	Marco conceptual de procesamiento difuso . . . . .	45
3.5.	Mejoramiento del contraste en imágenes . . . . .	48
3.5.1.	Uso de transformaciones puntuales . . . . .	48
3.5.2.	Uso del histograma . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Técnicas Difusas para Detección de Bordos y Adelgazamientos</b>	<b>60</b>
4.1.	Detección de bordes . . . . .	60
4.1.1.	Caracterización difusa de bordes . . . . .	60
4.1.2.	Detectores basados en reglas . . . . .	65
4.1.3.	Operadores morfológicos difusos . . . . .	72
4.2.	Adelgazamientos . . . . .	77
4.2.1.	Eje central en tonos de gris . . . . .	77
4.2.2.	Eje central difuso . . . . .	80
4.3.	Resumen comparativo . . . . .	84
4.3.1.	Técnicas convencionales vs. difusas . . . . .	84
4.3.2.	Ventajas y desventajas . . . . .	86
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>88</b>
5.1.	Conclusiones generales . . . . .	88
5.2.	Conclusiones adicionales . . . . .	89
5.3.	Contribuciones específicas . . . . .	91
5.4.	Trabajos relacionados . . . . .	93
5.5.	Trabajo futuro . . . . .	94
	<b>Apéndices</b>	<b>95</b>
<b>A.</b>	<b>Demostraciones matemáticas</b>	<b>95</b>
A.1.	Operadores para detección de bordes . . . . .	95
A.2.	Propiedades de los operadores- $s$ . . . . .	96
A.3.	Factores fusificadores $F_e$ y $F_d$ . . . . .	98
A.4.	Derivada del índice de difusividad $\gamma(\lambda)$ . . . . .	99

<b>B. Ejemplos de Algoritmos</b>	<b>101</b>
B.1. Operadores de Sobel . . . . .	101
B.2. Adelgazamientos de Zhang & Suen . . . . .	102
B.3. Esqueleto morfológico optimizado . . . . .	104
B.4. Minimización de la difusividad . . . . .	105
B.5. Caracterización difusa de bordes . . . . .	107
<b>C. Imágenes Adicionales</b>	<b>109</b>

# Prefacio

En esta tesis se plantea un tratamiento de imágenes distinto a los tratamientos convencional y morfológico de las técnicas de detección de bordes y adelgazamientos. En los primeros dos capítulos, para adquirir una idea general de estas técnicas, se revisan los conceptos básicos del tratamiento convencional de imágenes y de la morfología matemática para la detección de bordes y adelgazamientos. De ninguna manera se pretende tratar todos los temas correspondientes a la morfología matemática a profundidad; no obstante, al igual que en el caso convencional, los temas útiles para la detección de bordes y adelgazamientos son tratados completamente. Los capítulos 3 y 4 se centran en utilizar una teoría matemática alterna, a saber, la teoría de los conjuntos difusos, que sirve como base matemática para las técnicas mencionadas del tratamiento de imágenes. Por último, se hace un análisis de las ventajas y desventajas que ofrecen los métodos convencionales, los métodos morfológicos y los resultados basados en la teoría de conjuntos difusos de modo que el propósito fundamental de la tesis es extender la gama de posibilidades en que el tratamiento de imágenes puede desarrollarse.

Por otra parte, agradezco al CONACYT por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría con la beca No. 199238 y al INAOE por facilitarme los medios para concluir la maestría. A mis sinodales, Dr. Jorge Castro Ramos, Dr. Fermín Granados Agustín y Dr. Julio César Ramírez San Juan por la revisión de este trabajo. Al Dr. Gonzalo Urcid Serrano por la crítica objetiva y los consejos pertinentes en cada etapa de este trabajo, mi más sincera gratitud. A mi familia, por la confianza y el apoyo de siempre. Finalmente, a mis amigos y todas aquellas personas que hicieron posible la realización de este trabajo.

Anni García Arellano  
Octubre, 2007

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Procesamiento de imágenes y cómputo suave

En la vida cotidiana es a menudo común encontrar situaciones o problemas que presentan cierta incertidumbre o vaguedad cuando tratamos de definirlos. Esta incertidumbre no es el resultado de una definición errónea o de un mal planteamiento del problema, más bien, es el resultado de la propia naturaleza de la situación que estamos tratando. De hecho, el razonamiento humano es un ejemplo de este tipo de situaciones, pues se presentan cuando tenemos que reconocer gente, objetos, sonidos, distancias u otros patrones haciendo uso de nuestro razonamiento, es decir, se basa en un conjunto de conocimientos previos y a partir de ello obtenemos una definición del patrón que estamos tratando [26]. Por otro lado, estas situaciones surgen cuando se trabaja en el procesamiento digital de imágenes porque ciertas características de las imágenes presentan en su definición cierto grado de incertidumbre. De la misma manera, algunas operaciones en el procesamiento de imágenes tales como detección de bordes y adelgazamientos pueden presentar cierta imprecisión cuando tratamos de aplicarlas. Asimismo, al adquirir imágenes, la incertidumbre aparece debido a la pérdida de datos, a mediciones incorrectas de los dispositivos de medición, o a mezcla de ruido en las imágenes obtenidas [27]. En fin, mientras algunas situaciones se pueden definir claramente, en contraste, hay otras que presentan características de incertidumbre, para las cuales se han desarrollado algunos modelos matemáticos que benefician su tratamiento.

El *cómputo suave* es una manera adecuada para manejar el tipo de situaciones antes



mencionadas [27], en particular la noción de conjunto difuso fue introducida por Lofti A. Zadeh en 1965 [39]. Tuvo origen a partir de la idea de que precisión y certidumbre toman un cierto costo de cómputo, el cuál se puede reducir, si se considera que el razonamiento y las decisiones que se toman pueden explotar la tolerancia de imprecisión e incertidumbre siempre que sea posible. Para ilustrar, cuando en el cómputo tradicional se hacen modificaciones ligeramente distintas en un sistema que tiene mucha precisión y certidumbre, como resultado, el sistema generará cambios grandes en los resultados. A este efecto se le conoce como *fragilidad* [1]. Mientras tanto, el cómputo suave ofrece las metodologías necesarias para aprovechar las distintas formas de incertidumbre que se presentan en situaciones cotidianas y en este caso en el procesamiento de imágenes. De manera general, el cómputo suave ofrece metodologías tales como *lógica difusa, redes neuronales artificiales y algoritmos genéticos*<sup>1</sup>. La lógica difusa basada en la teoría de conjuntos difusos ofrece las herramientas necesarias para el manejo de la imprecisión y la incertidumbre, asimismo, las redes neuronales artificiales incorporan la capacidad de aprendizaje para reducir errores, finalmente, los algoritmos genéticos ofrecen las herramientas para la optimización del sistema. En particular, en este trabajo se utilizan los conceptos pertenecientes a la teoría de conjuntos difusos.

La teoría de conjuntos difusos está dirigida hacia situaciones que presentan características de imprecisión y vaguedad. Específicamente, algunas de estas situaciones son el procesamiento y razonamiento humano, la inteligencia computacional, algunos modelos biológicos y algunos otros casos, entre ellos, algunas operaciones del tratamiento de imágenes [13]. Desde luego, esta teoría provee las herramientas matemáticas para explotar la tolerancia a la imprecisión y la incertidumbre que se presentan, con lo que se tiene un conjunto de conocimientos adecuado para el tipo de situaciones mencionadas [33]. A diferencia de otras teorías que utilizan modos de razonamiento exacto cuando el resultado sólo puede ser *verdadero o falso*, esta teoría utiliza un modo de razonamiento que es aproximado, donde el razonamiento exacto se ve como un caso límite. Para ello, las situaciones de incertidumbre se tratan de una manera gradual, se utiliza la noción de función de membresía o pertenencia que sirve para medir la compatibilidad de algún evento con el conjunto difuso que lo describe. Por consiguiente, se tiene una amplia variedad de resultados. Asimismo, las expresiones que utiliza la teoría de conjuntos difusos pueden ser de carácter *cuantitativo, cualitativo, de probabilidad y de*

---

<sup>1</sup>También se utilizan combinaciones de éstas.

*posibilidad*, entre otras [37]. Por ejemplo, algunas expresiones cuantificables son *poco*, *varios*, *usualmente*, *la mayoría*, *casi siempre*, *etc.*, además, algunas graduaciones de probabilidad pueden ser *probable*, *poco probable*, *muy probable*, *etc.* Más adelante, en el Capítulo 3 se presenta una descripción detallada de algunos conceptos de esta teoría.

## 1.2. Planteamiento del problema

Como se ha mencionado, algunas operaciones convencionales en el análisis y procesamiento digital de imágenes presentan cierto grado de incertidumbre. De hecho, conceptos como la detección de bordes y los adelgazamientos de objetos en imágenes digitales caen en el tipo de operaciones mencionadas. Además de las herramientas matemáticas que se usan asiduamente en dichas operaciones del tratamiento de imágenes, la teoría matemática de los conjuntos difusos es una herramienta alterna que se puede utilizar como base de las operaciones de detección de bordes y adelgazamientos. En este trabajo de tesis el problema que se trata consiste en lo siguiente: *aplicar la teoría de los conjuntos difusos a las técnicas de detección de bordes y adelgazamiento de objetos en imágenes digitales binarias y en tonos de gris*. La teoría de los conjuntos difusos es adecuada para manejar situaciones de incertidumbre, se pretende utilizar algunos resultados de esta teoría para llevar a cabo las operaciones de detección de bordes y adelgazamientos como un camino alternativo en la realización de estas operaciones al tratamiento convencional de imágenes y determinar cuales son sus ventajas.

## 1.3. Objetivo de la tesis

Como objetivo principal, se utilizan conceptos de la teoría de los conjuntos difusos como base matemática para las operaciones de detección de bordes y adelgazamientos de objetos en imágenes binarias y en tonos de gris. Los objetivos secundarios son los siguientes:

- hacer un análisis e implementación de algoritmos de detección de bordes y adelgazamiento de objetos basados en el tratamiento convencional de imágenes y en la morfología matemática,
- desarrollar algunos de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos difusos que sirven de base a las operaciones de detección de bordes y adelgazamientos,

- implementar las versiones difusas correspondientes a la detección de bordes y adelgazamientos considerando la definición de algunos criterios de comparación para aplicarlos a los resultados obtenidos mediante las técnicas convencionales y morfológicas vs. las técnicas difusas.

La tesis consta de cinco capítulos. En el Capítulo 1 se expone una introducción al cómputo suave considerando sus antecedentes y un enfoque hacia el tratamiento de imágenes, se presentan conceptos preliminares del procesamiento de imágenes digitales y de la morfología matemática. En el Capítulo 2 se presentan las técnicas de detección de bordes y de adelgazamientos utilizando el tratamiento convencional de imágenes y morfológico. En el Capítulo 3 se presenta un desarrollo de la teoría de conjuntos difusos. A continuación, en el Capítulo 4 se presentan las técnicas difusas para detección de bordes y adelgazamientos; se presentan resultados para imágenes binarias y en tonos de gris y la comparación respectiva con las técnicas convencionales. Por último, en las conclusiones (Capítulo 5) se presentan resultados, un resumen de los objetivos logrados, algunas consideraciones sobre el trabajo realizado y posibles investigaciones futuras.

## **1.4. Preliminares**

### **1.4.1. Procesamiento digital de imágenes**

El procesamiento y análisis de imágenes es un área que se ha desarrollado durante las últimas décadas. En principio, algunos de los impulsores de esta área han sido los programas espaciales y la medicina. Se hicieron transmisiones digitales de imágenes obtenidas del espacio, además, se utilizaron técnicas de realce de imágenes para la obtención de mejores diagnósticos en la medicina. Con el paso del tiempo, el análisis de imágenes se expandió a otros ámbitos científicos y tecnológicos, tales como la biología, la industria, la arqueología y las comunicaciones donde el procesamiento digital de imágenes se ha convertido en una herramienta fundamental para llevar a cabo muchas tareas y para la consecución de mejores resultados [28]. En general, el tratamiento de imágenes es utilizado para transformar las características de las imágenes y así lograr una apariencia visual más adecuada para la visión humana, también, se usa en aplicaciones de medición de características de objetos presentes en las imágenes tratadas [31].

Una imagen se considera como una distribución bidimensional de energía ya que comúnmente es generada por el espectro de luz visible aunque también puede ser generada por otra radiación del espectro electromagnético o por otro tipo de fuente natural como las ondas acústicas. Sin embargo, para poder realizar el procesamiento digital de imágenes es necesario que las imágenes sean transformadas a una forma numérica antes de llevar a cabo dicho procesamiento, usualmente, a este procedimiento se le llama *digitalización de la imagen* [5]. Primero, para digitalizar una imagen, se debe muestrear la distribución bidimensional en ambas dimensiones de una forma igualmente espaciada, a esta etapa se le conoce como *muestreo*. Asimismo, se debe muestrear la amplitud, esta etapa es llamada *cuantización*. Para ilustrar estas etapas, en la Fig. 1.1 se muestra la representación del procedimiento de digitalización en una dimensión. Por lo general, cuando en este procedimiento las cantidades que se obtienen son finitas y discretas el resultado es una *imagen digital*, que se puede definir como una función bidimensional discreta definida por

$$f(x, y), \quad (1.1)$$

en donde la imagen digital queda dividida en pequeñas regiones que se les refiere como elementos de la imagen o más comúnmente como *pixeles*. Cada pixel tiene una posición  $(x, y)$  y un valor entero asociado  $f(x, y)$  que representa la intensidad de la imagen y que, frecuentemente, se le denomina como *nivel de gris*.

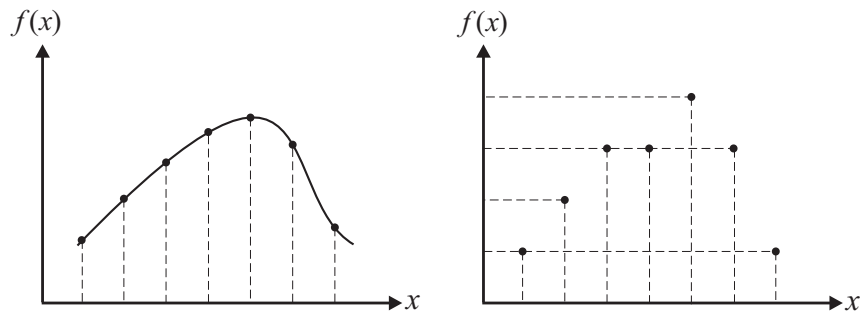


Figura 1.1: etapas de digitalización en una dimensión; izq., muestreo de  $f(x)$ ; der., cuantización de  $f(x)$ .

Además, la calidad de la imagen digital depende del número de pixeles y de niveles de gris que se utilicen en el muestreo y la cuantización. En general, una imagen digital se puede

asociar a una matriz de datos de  $M \times N$  elementos. Siendo el elemento  $(0, 0)$  el origen de la imagen digital y el elemento  $(M - 1, N - 1)$  el punto final de ésta. De manera ilustrativa, en la Fig. 1.2 se muestra el concepto de imagen digital. De aquí en adelante, una vez definido el concepto de imagen digital, haremos referencia a este concepto simplemente con el término imagen.

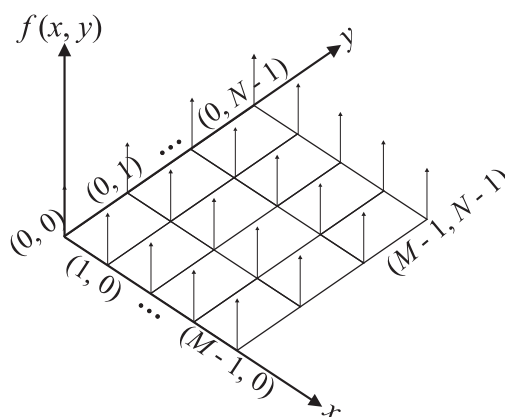


Figura 1.2: asociación de una imagen digital con un arreglo de números.  $f(x, y)$  representa el nivel de gris de cada pixel con posición  $(x, y)$ .

Mientras tanto, en base a la intensidad de una imagen se pueden definir dos tipos de imágenes, a saber, imágenes en escala de grises y binarias. De manera general, una imagen en escala de grises es aquella en donde la intensidad  $f(x, y)$  de cada uno de sus píxeles puede tomar valores enteros en el intervalo  $[0, L - 1]$  con el máximo valor de intensidad  $L - 1 > 0$ . De esta manera, un pixel con coordenadas  $(x, y)$  podrá tener valores de 0, 1, hasta  $L - 1$ . Por otro lado, una imagen binaria es aquella en donde el nivel de gris  $f(x, y)$  de cada pixel solo puede tener dos valores distintos únicos. Estos valores pueden ser dos números cualquiera del intervalo  $[0, L - 1]$  aunque en la práctica es común que estos dos valores sean el 0 y 1. Dependiendo del criterio utilizado, un valor representará las zonas oscuras y otro las zonas blancas, habitualmente, el 0 se utiliza para representar zonas oscuras y el 1 para zonas blancas. En este trabajo las imágenes de prueba utilizan un byte por pixel de modo que el intervalo de grises de las imágenes es  $[0, 255]$ . Un ejemplo de este tipo de imágenes se presenta en la Fig. 1.3.

Enseguida, algunos conceptos acerca de los píxeles de una imagen son presentados ya que algunas operaciones del tratamiento de imágenes se aplican sobre cada pixel de la imagen



Figura 1.3: clasificación de las imágenes considerando su intensidad; izq., imagen en escala de grises; der., imagen binaria. Ambas imágenes son de tamaño  $192 \times 192$  píxeles.

que se está utilizando. Inicialmente, para cualquier píxel  $p$  con coordenadas  $(x, y)$  se define la *vecindad de un píxel* como el conjunto de píxeles que tienen las siguientes posiciones

$$(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1), \quad (1.2)$$

$$(x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1), \quad (1.3)$$

en donde los píxeles cuyas posiciones se definen en la Ec. (1.2) son los píxeles vecinos *horizontales y verticales* y se encuentran a una distancia unitaria de éste. A estos píxeles se les denota por  $N_4(p)$  (vecindad de Von Neumann). Además de estos píxeles, los cuatro píxeles cuyas posiciones son definidas en la Ec. (1.3) se denominan *vecinos diagonales* y se encuentran a una distancia de  $\sqrt{2}$  píxeles del píxel  $p$ . Estos píxeles son denotados por  $N_D(p)$ . En total, el píxel  $p$  tiene 8 píxeles vecinos los cuales son denotados por  $N_8(p)$ . El concepto de vecindad es utilizado en muchas operaciones del tratamiento de imágenes. Generalmente, se utiliza cuando se desean conocer o cambiar características generales de alguna región de la imagen o de la imagen misma. De manera particular, este concepto es utilizado en las operaciones de detección de bordes y adelgazamientos, pues estas operaciones dan características generales de objetos en una imagen. Para aclarar mejor este concepto, en la Fig. 1.4 se muestra el concepto de vecindad de un píxel identificando las diferentes posiciones de los píxeles vecinos en la dirección horizontal y vertical, y en las direcciones diagonales.

Hemos mencionado el concepto de región en una imagen y el de borde. No obstante, aunque el nombre de estos conceptos brinda una idea intuitiva de su significado, se necesita una definición formal de estos conceptos para llevar a cabo las operaciones de detección

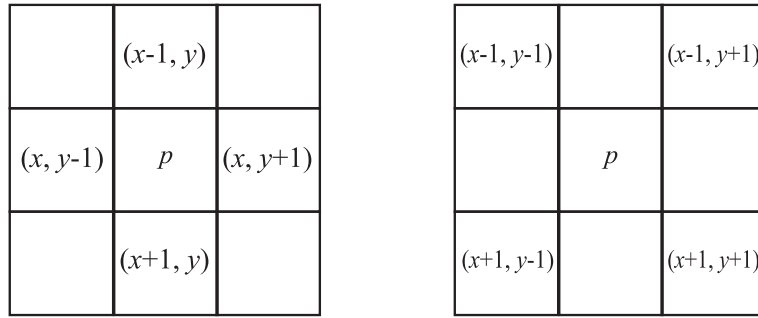


Figura 1.4: vecindad del pixel  $p = (x, y)$ ; izq., pixeles vecinos horizontales y verticales; der., pixeles vecinos diagonales.

de bordes y adelgazamientos sin ambigüedad alguna. Para ello, empezamos por definir tres conceptos útiles, a saber, el concepto de adyacencia, de conectividad y el concepto de camino. Se define un pixel *adyacente* como el pixel vecino del pixel  $p$  que tiene el mismo nivel de gris, de hecho, utilizando las definiciones de vecindad se definen tres tipos de *adyacencia* [12].

- La *adyacencia-4* de dos pixeles  $p$  y  $q$  que contienen el mismo nivel de gris, si el pixel  $q$  se encuentra entre los pixeles  $N_4(p)$ .
- La *adyacencia-8* de dos pixeles  $p$  y  $q$  con igual nivel de gris, si el pixel  $q$  se encuentra en la vecindad  $N_8(p)$ .
- La *adyacencia mixta* o *adyacencia- $m$*  de dos pixeles  $p$  y  $q$  con el mismo nivel de gris, si se cumplen las siguientes condiciones:  $q \in N_4(p)$  ó  $q \in N_D(p)$  y los pixeles de  $N_4(p) \cap N_4(q)$  tienen diferente nivel de gris.

Para ejemplificar el concepto de adyacencia, en la Fig. 1.5 se muestra un ejemplo de los tres tipos de adyacencia mencionados para una vecindad binaria. Normalmente, la adyacencia-8 del pixel central genera cierta confusión cuando el pixel central es adyacente a dos pixeles que son vecinos horizontales o verticales. Mientras tanto, el concepto de adyacencia mixta no presenta ninguna confusión en la adyacencia de pixeles ya que elimina el tipo de confusión mencionado, utilizando para ello, la segunda condición de su definición.

Enseguida, se define el concepto de *camino* [30] del pixel  $p$  al pixel  $q$  como la secuencia de pixeles

$$p = p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \text{ con } p_{n-1} = q, \tag{1.4}$$

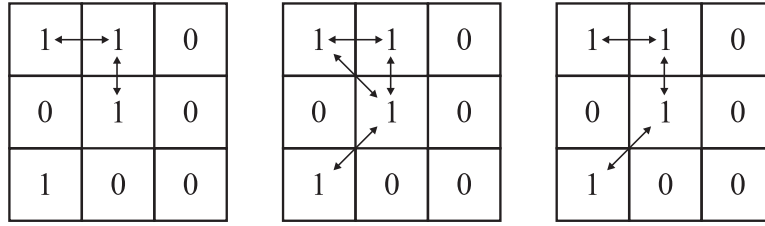


Figura 1.5: tipos de adyacencia; izq., adyacencia-4; al centro; adyacencia-8, nótese la ambigüedad del pixel central con los pixeles al norte de éste; der., adyacencia-m.

tal que el pixel  $p_i$  es adyacente al pixel  $p_{i-1}$ , donde  $1 \leq i \leq n$  y  $n$  es la longitud del camino. Por supuesto que, dependiendo del tipo de adyacencia podemos clasificar a un camino en diferentes tipos<sup>2</sup>, pero usaremos este concepto solo como adyacencia a menos que sea necesario especificarlo.

Por último, el concepto de *conectividad entre pixeles* [12], el cual se define sobre un subconjunto  $S$  de una imagen  $f(x, y)$ . Dados dos pixeles  $p$  y  $q$  en  $S$  se dice que están *conectados* cuando existe un camino entre estos pixeles totalmente contenido en  $S$ . Además, al conjunto de todos los pixeles conectados al pixel  $p$  se le llama un *componente conectado* en  $S$ , asimismo, si en  $S$  sólo hay un componente conectado, a  $S$  se le denomina un *subconjunto conectado*. A partir de lo anterior, se define una *región*  $\mathcal{R}$  como un subconjunto de pixeles de una imagen  $f(x, y)$  si  $\mathcal{R}$  es un conjunto conectado, lo cual significa que una región es un conjunto de pixeles que presentan una cierta homogeneidad dentro de una imagen. Mientras tanto, el *borde* de una región  $\mathcal{R}$  son todos los pixeles en la región que tienen uno o más vecinos que no se encuentran en  $\mathcal{R}$ .

## 1.4.2. Morfología matemática

La teoría de la morfología matemática surgió en Francia durante la década de los sesenta con los trabajos desarrollados por G. Matheron y J. Serra. Esta teoría tiene sus raíces matemáticas en la geometría entera y la geometría de las probabilidades [32]. De manera general, la morfología matemática está fundamentada en la cuantificación de la intuición que se tiene sobre la *noción geométrica de estructura*, para ello, utiliza el concepto de *elemento estructural*, el cual es visto como un objeto que interactúa con los objetos bajo estudio a fin

<sup>2</sup>Se definen caminos 4, 8 y m.



de obtener información espacial de los objetos. En otras palabras, la morfología matemática propone cuantificar la estructura geométrica de un cierto objeto  $A$  “probándolo” con uno o más objetos pequeños denominados elementos estructurales. Las características geométricas de estos elementos se determinan a priori a fin de obtener información estructural del elemento  $A$ , por consiguiente, se puede obtener distinta información estructural de una imagen utilizando diferentes elementos estructurales.

El tratamiento morfológico de una imagen consiste en la obtención de la información estructural de ésta a través de transformaciones sucesivas de la imagen, no obstante, estas transformaciones morfológicas cumplen con ciertos principios fundamentales [36]. Específicamente, los cuatro principios fundamentales que cumple toda transformación  $\Psi$  que aplica sobre un conjunto  $A$  son los siguientes.

- En primer lugar, se denomina *compatibilidad ante traslación* si el aplicar la transformación  $\Psi$  al conjunto  $A$  y hacer una traslación del resultado, resulta equivalente al procedimiento inverso, esto es, hacer primero la traslación seguida de la aplicación de la transformación. Si se denota la traslación del conjunto  $A$  por la cantidad  $h$  como  $A_h$ , la compatibilidad ante traslación se denota como

$$\Psi(A_h) = [\Psi(A)]_h. \quad (1.5)$$

- Para algún factor  $\lambda > 0$ , la transformación  $\Psi$  es invariante ante cambios de escala cuando cumple con

$$\Psi(\lambda A) = \lambda \Psi(A), \quad (1.6)$$

a este principio se le conoce como *compatibilidad ante cambios de escala*.

- Si  $Z$  es una máscara de medición con la cual se conoce la parte del conjunto  $A$  que se encuentra en la región  $Z \cap A$  y si  $\Psi(Z \cap A)$  es la transformación correspondiente a esa región, entonces, para otra región  $Z' \cap A$ , solamente se puede conocer el resultado de la transformación  $\Psi(Z' \cap A)$  si  $Z'$  es una máscara acotada por la máscara  $Z$ . A este principio se le denomina *conocimiento local*.
- Si se realizan transformaciones incrementales  $\Psi$ , esto es, si  $A$  es subconjunto de  $B$  ó  $A \subseteq B$ , entonces,  $\Psi(A) \subseteq \Psi(B)$ , sobre una secuencia decreciente de conjuntos

cerrados<sup>3</sup> que tienden hacia un límite  $\Delta$  diferente de cero y se obtiene una secuencia de transformaciones que tiende hacia la transformación  $\Psi(\Delta)$  diferente de cero, entonces, se cumple el principio de *semicontinuidad*.

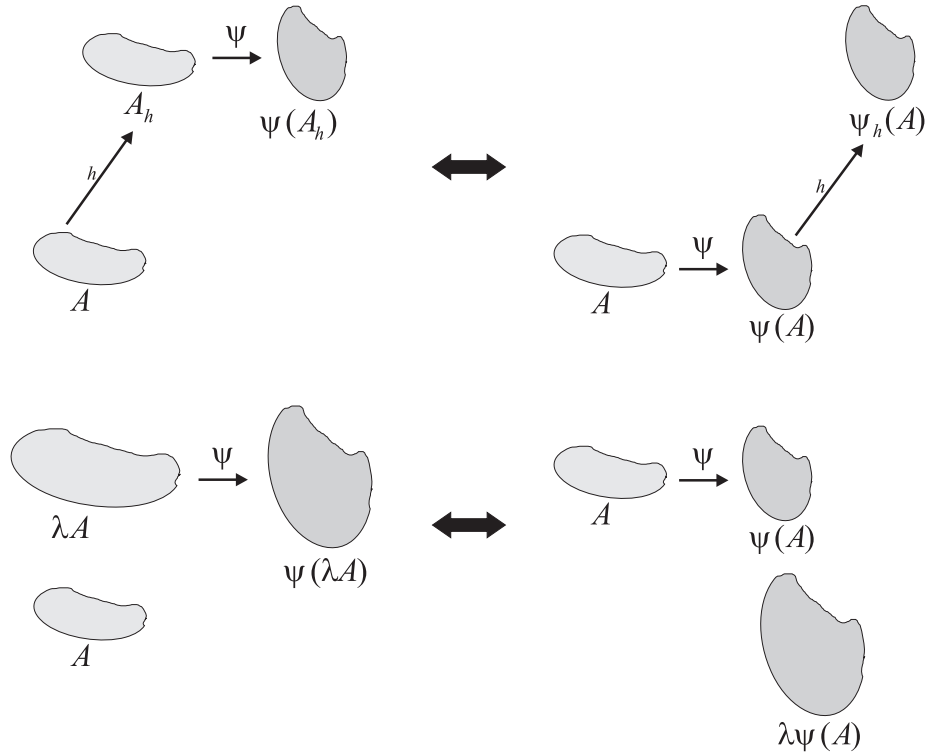


Figura 1.6: principios fundamentales de la morfología matemática; 1ra. hilera, compatibilidad ante traslación; 2da. hilera, compatibilidad ante cambios de escala.

Cuando una transformación cumple con estos cuatro principios se dice que es una “transformación morfológica”. Los resultados obtenidos dependerán de las características del elemento estructural que se utilice en la transformación. Como ilustración, en la Fig. 1.6 se presentan los dos primeros principios mencionados, en esta figura  $\Psi_h$  es la transformación trasladada por  $h$ . A continuación, se definen algunas operaciones fundamentales de la morfología matemática, a saber, la dilatación, la erosión y la transformación “todo o nada” o HMT <sup>4</sup> [32]. Antes de definir estas operaciones se define la *diferencia de dos conjuntos*  $C$  y

<sup>3</sup>un conjunto cerrado es un conjunto que contiene sus fronteras.

<sup>4</sup>Del inglés Hit-or-Miss Transform

$D$  como

$$C \setminus D = C \cap D^c, \quad (1.7)$$

en donde  $C \setminus D$  es la parte de  $C$  que no pertenece a  $D$ . Asimismo, la *dilatación* de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  en  $\mathbb{R}^2$  se define como

$$A \oplus B = \{h | B_h^* \cap A \neq \emptyset\}, \quad (1.8)$$

en donde  $B_h^*$  representa la reflexión respecto al origen del elemento  $B$  trasladado por el vector  $h$ . La dilatación es el conjunto de todos los desplazamientos del vector  $h$  tal que  $B_h^*$  y  $A$  se intersectan en al menos un elemento. Por otra parte, la *erosión* de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  en  $\mathbb{R}^2$  se define como

$$A \ominus B = \{h | B_h \subseteq A\}, \quad (1.9)$$

en este caso  $B_h$  es el elemento estructural  $B$  trasladado por el vector  $h$ . La erosión consta de todos los vectores  $h$  para los cuales  $B_h$  está totalmente incluido en  $A$ . Finalmente, se define la *transformación todo o nada* como la diferencia de  $A$  erosionado por el elemento estructural  $B^1$  con  $A$  dilatado por otro elemento estructural  $B^2$ , esto es

$$\text{HMT}(A, B^1, B^2) = (A \ominus B^1) \setminus (A \oplus B^2). \quad (1.10)$$

Normalmente, es común que la dilatación se utilice para unir algunos caminos rotos y la erosión se utilice para eliminar detalles irrelevantes de la imagen según sea la forma geométrica y el tamaño del elemento estructural  $B$ . En la Fig. 1.7 se muestra un ejemplo de este par de operaciones morfológicas.

A partir de estas operaciones se pueden obtener otras operaciones morfológicas. Estas operaciones son la abertura y la cerradura. La *abertura* de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  en  $\mathbb{R}^2$  se define como

$$A \circ B = \bigcup \{B_h | B_h \subseteq A\}, \quad (1.11)$$

esta operación realiza la unión de todos los trasladados  $B_h$  del elemento estructural  $B$  tal que  $B_h$  está totalmente incluido en  $A$ . Una manera alterna de representar esta operación es utilizando la erosión y la dilatación, i.e.,

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B. \quad (1.12)$$

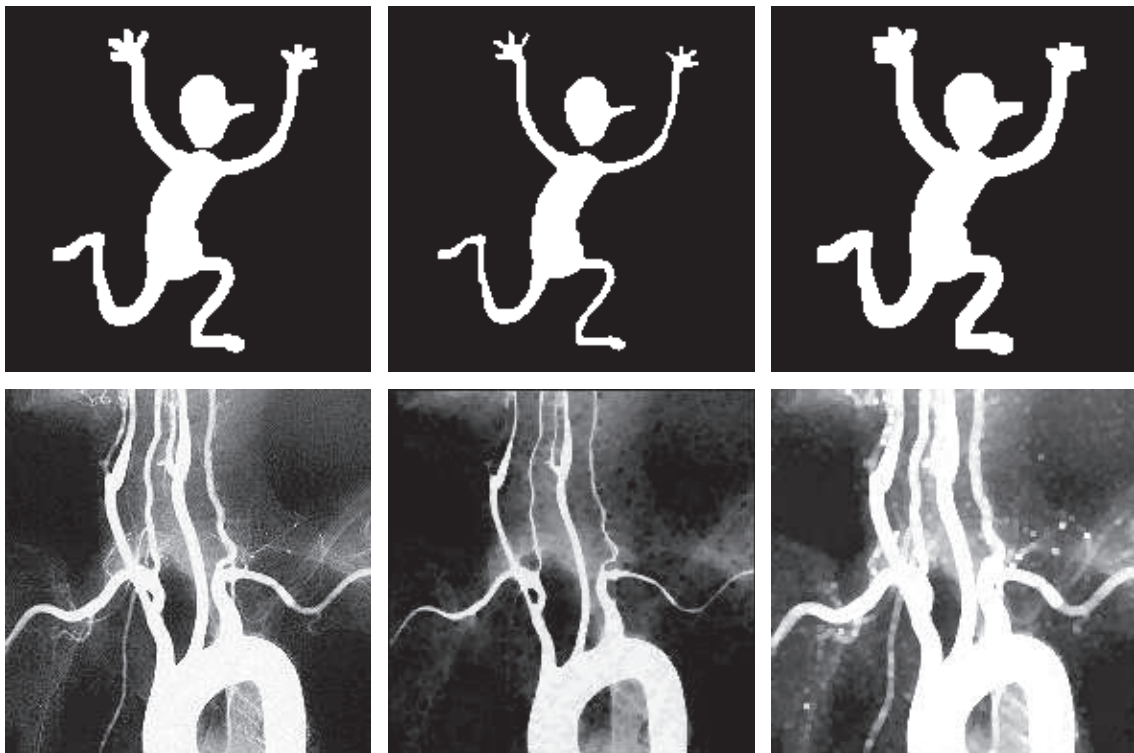


Figura 1.7: operaciones morfológicas fundamentales. 1ra. hilera, imágenes binarias; 2da. hilera; imágenes en tonos de gris. Izq., imagen original, al centro, operación de erosión; der., operación de dilatación.

La *cerradura* de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  en  $\mathbb{R}^2$  se define como

$$A \bullet B = \{z | B_h \cap A \neq \emptyset\}, \quad (1.13)$$

lo que implica que  $z$  será parte del resultado si  $B$  desplazado por el vector  $h$  tiene al menos un elemento en común con  $A$ . La manera de representar la cerradura mediante las operaciones morfológicas básicas es

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B. \quad (1.14)$$

Por último, para ejemplificar estas operaciones, en la Fig. 1.8 se presenta una interpretación geométrica de la abertura y la cerradura en donde se toma al elemento estructural  $B$  como un *disco* que se mueve sobre la imagen. En el caso de la abertura, el disco se moverá en el interior de la imagen  $A$  y la abertura de  $A$  por  $B$  estará compuesta por todos los puntos

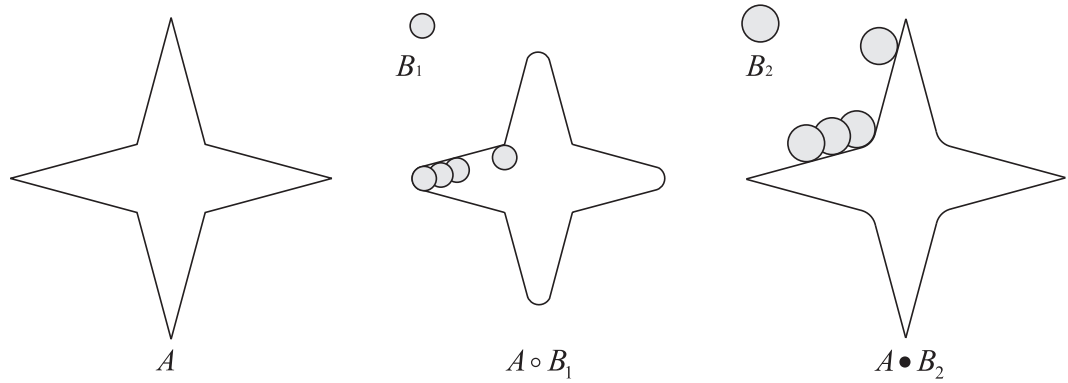


Figura 1.8: izq., conjunto  $A$ ; al centro, operación de abertura; der., operación de cerradura

de  $B$  que alcancen los puntos más lejanos de  $A$ . Por otra parte, en el caso de la cerradura el disco se moverá en el exterior de  $A$  y el resultado de cerrar  $A$  con  $B$  estará compuesto por el conjunto de todos los puntos alcanzados por  $B$ .

# Capítulo 2

## Detección de Bordes y Adelgazamientos

### 2.1. Procedimientos convencionales

#### 2.1.1. Operadores de vecindad para detección de bordes

Como su nombre sugiere, la operación de detección de bordes se enfoca a encontrar los píxeles que unen a dos o más regiones. Por lo general, la operación de detección de bordes se realiza a través de *maskarillas* que se aplican sobre la imagen, específicamente, se aplican sobre la vecindad de cada píxel de la imagen. Desde luego que, para detectar los bordes entre regiones, se necesitan herramientas matemáticas capaces de realizar la detección. Comúnmente, la *derivada digital* es una de las herramientas utilizadas para la detección de bordes. La derivada digital está basada en el concepto matemático de derivada continua. Para poder definirla, es necesario partir del concepto de derivada continua. En [34] se define una derivada continua, siempre y cuando el límite exista, como

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}. \quad (2.1)$$

Como se sabe, la distancia o *incremento* mínimo entre los píxeles de una imagen es un píxel. Comúnmente, el incremento se designa por la letra griega  $\Delta$ . Teniendo en cuenta esta característica de una imagen ( $\Delta = 1$ ), la derivada digital se representa por *diferencias* entre píxeles. De esta manera, se define la derivada digital como

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x + 1) - f(x). \quad (2.2)$$

Además, ya que la derivada digital queda definida en diferencias entre pixeles vecinos, la derivada se puede definir considerando la diferencia entre el pixel referido y el pixel anterior, esto es

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) - f(x - 1). \quad (2.3)$$

Si se hace una combinación de las Ecs. (2.2) y (2.3) se tiene una tercera definición de derivada digital, la cual se expresa como

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + 1) - f(x - 1)}{2}. \quad (2.4)$$

Para una imagen representada por  $f(x, y)$ , las derivadas se definen en las direcciones horizontal y vertical.

$f(x, y)$

$(x-1, y-1)$	$(x-1, y)$	$(x-1, y+1)$
$(x, y-1)$	$(x, y)$	$(x, y+1)$
$(x+1, y-1)$	$(x+1, y)$	$(x+1, y+1)$

Figura 2.1: vecindad  $f(x, y)$ , al centro se sitúa el pixel con posición  $(x, y)$ .

Considerando la Fig. 2.1 se puede definir la derivada parcial en la dirección horizontal como

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} f(x + 1, y) - f(x, y) \text{ o} \\ f(x, y) - f(x - 1, y). \end{cases} \quad (2.5)$$

Similarmente, la derivada parcial en la dirección vertical se define como

$$f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \begin{cases} f(x, y + 1) - f(x, y) \text{ o} \\ f(x, y) - f(x, y - 1), \end{cases} \quad (2.6)$$

y si combinamos las definiciones de las Ecs. (2.5) o (2.6) obtenemos una tercera definición similar a la Ec. (2.4).

Al igual que la derivada continua, al evaluarse la derivada digital sobre regiones homogéneas o, en otras palabras, sobre regiones que tienen niveles de gris constante, el resultado será cero, opuestamente será distinto de cero en áreas que presenten variaciones

o discontinuidades en intensidad. Como se ha establecido, los objetos en una imagen son regiones homogéneas de intensidad y los bordes son regiones en donde la intensidad cambia abruptamente [38]. En la Fig. 2.2 se muestra el concepto de derivada en este tipo de regiones, es decir, en regiones homogéneas y en regiones de variación de intensidad.

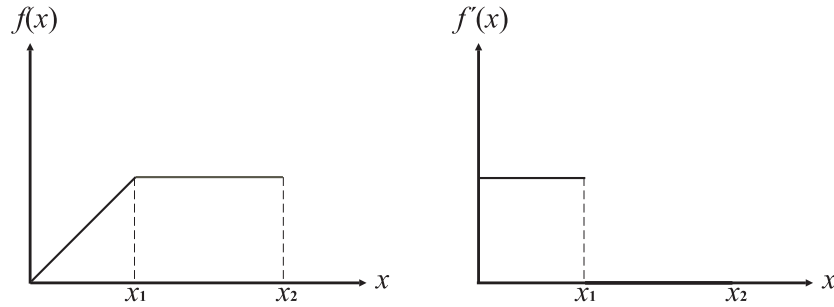


Figura 2.2: ilustración del concepto de derivada; izq., comportamiento de  $f(x)$ ; der., el resultado de la derivada en una región homogénea es cero, asimismo, en regiones de variación, la derivada es distinta de cero.

Por otra parte, las *maskarillas* utilizadas en la operación de detección de bordes están basadas en *operadores de gradiente*, los cuales, a su vez, se fundamentan en el concepto de derivada digital. De manera general, el *gradiente* de una función  $f(x, y)$  se define como el siguiente vector transpuesto( $t$ )

$$\nabla f(x, y) = \left[ G_x, G_y \right]^t = \left[ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^t. \quad (2.7)$$

Además de la definición de gradiente, es posible definir la *magnitud* y el *ángulo* del gradiente de la función  $f(x, y)$ . Específicamente, en el caso del tratamiento de imágenes, la magnitud del gradiente representa el cambio máximo, por distancia unitaria, de nivel de gris dentro de la imagen  $f(x, y)$ , asimismo, el ángulo del gradiente representa la dirección del cambio máximo de nivel de gris dentro de la imagen [12]. Generalmente, la magnitud y el ángulo del gradiente se definen respectivamente por las siguientes ecuaciones

$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}, \quad \alpha(x, y) = \arctan(G_y/G_x). \quad (2.8)$$

No obstante, las *maskarillas* para la detección de bordes no se calculan en la Ec. (2.7), más bien, se basan solamente en la magnitud del gradiente definido en la Ec. (2.8) aunque para



hacer más fácil el cálculo de la magnitud del gradiente como se presenta en esta ecuación, normalmente, se usa la siguiente aproximación

$$|\nabla f(x, y)| \simeq |G_x| + |G_y|, \quad (2.9)$$

donde  $|G_x|$  y  $|G_y|$  representan la magnitud de las derivadas parciales en la dirección horizontal y vertical respectivamente (ver Apéndice A para una justificación).

$p_9$	$p_2$	$p_3$
$p_8$	$p_1$	$p_4$
$p_7$	$p_6$	$p_5$

Figura 2.3: mascarilla para definir los operadores de gradiente; los pixeles se encuentran posicionados en el sentido de las manecillas del reloj.

Enseguida, se presentan tres de los operadores de gradiente más utilizados y las mascarillas correspondientes para la detección de bordes en imágenes binarias, para ello, utilizamos la Fig. 2.3 en la cual se presenta la vecindad del pixel  $p_1$ . Inicialmente, se presenta el operador de Roberts [12]. En estos operadores se realizan diferencias entre pixeles vecinos diagonales a fin de hacer énfasis en las esquinas de las mascarillas, estos operadores se definen como

$$G_x = p_5 - p_1; \quad G_y = p_6 - p_4, \quad (2.10)$$

la mascarilla correspondiente a los operadores de Roberts detectarán mejor aquellos bordes en direcciones diagonales que aquellos bordes en las direcciones horizontal y vertical, en la Fig. 2.4 se muestran las mascarillas correspondientes a estos operadores. Prewitt y Sobel definieron otros operadores que generan mascarillas de  $3 \times 3$  pixeles, las cuales presentan cierta ventaja sobre el operador de Roberts ya que al establecer mascarillas *cuadradas impares* se establece un pixel pivote central mientras que esto no ocurre en las mascarillas de Roberts.

En la Ec. (2.11) se presentan los operadores de Prewitt y en la Fig. 2.5 se presentan sus mascarillas correspondientes. Basados en la Fig. 2.3, los operadores de Prewitt para la

-1	0
0	1

0	-1
1	0

Figura 2.4: mascarillas de Roberts para la detección diagonal de bordes; izq., mascarilla generada por el operador  $G_x$ ; der., mascarilla generada por el operador  $G_y$ .

detección de bordes en la dirección horizontal y vertical se definen como

$$\begin{aligned} G_x &= (p_7 + p_6 + p_5) - (p_9 + p_2 + p_3), \\ G_y &= (p_3 + p_4 + p_5) - (p_9 + p_8 + p_7). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como se puede apreciar en la Fig 2.5, a diferencia de las mascarillas de Roberts, las mascarillas basadas en los operadores de Prewitt presentan pixel pivote central, además, detectan preferencialmente bordes en las direcciones horizontal y vertical.

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

Figura 2.5: mascarillas de Prewitt para la detección de bordes; izq., mascarilla para la detección vertical; der., mascarilla para la detección horizontal.

Finalmente, se presentan los operadores de Sobel y sus mascarillas correspondientes, al igual que los operadores de Prewitt, los operadores de Sobel realizan la detección de bordes en las direcciones horizontal y vertical, sin embargo, a diferencia de estos operadores, en los operadores de Sobel se hace énfasis en los pixeles centrales, para ello, se da un peso de 2 a estos pixeles. Estos operadores se definen como

$$\begin{aligned} G_x &= (p_7 + 2p_6 + p_5) - (p_9 + 2p_2 + p_3), \\ G_y &= (p_3 + 2p_4 + p_5) - (p_9 + 2p_8 + p_7). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Las mascarillas de Sobel, al igual que las mascarillas de Prewitt, presentan un centro bien definido, estas mascarillas se muestran en la Fig 2.6.

Por otro lado, resulta importante explicar el procedimiento de aplicación de una mascarilla sobre una imagen. Comúnmente, este procedimiento se denomina como *convolución* [12].

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Figura 2.6: mascarillas de Sobel para la detección de bordes; izq., mascarilla para la detección vertical; der., mascarilla para la detección horizontal.

La convolución significa que para cada pixel  $p$  dentro de la imagen la mascarilla será colocada en la posición  $(x, y)$  y los coeficientes de la máscara se multiplicarán con la vecindad de  $p$  sobre la cual la mascarilla intersecta. Estos resultados se sumarán y serán asignados como nuevo valor de intensidad para el pixel  $p$  de la imagen resultante. Si  $M \times N$  es el tamaño de la mascarilla utilizada denotada como  $h(x, y)$ , para una imagen  $f(x, y)$  la convolución de  $f(x, y)$  y  $h(x, y)$  se define como

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n). \quad (2.13)$$

Para ilustrar este procedimiento, en la Fig 2.7 se emplea una mascarilla de Prewitt <sup>1</sup>.

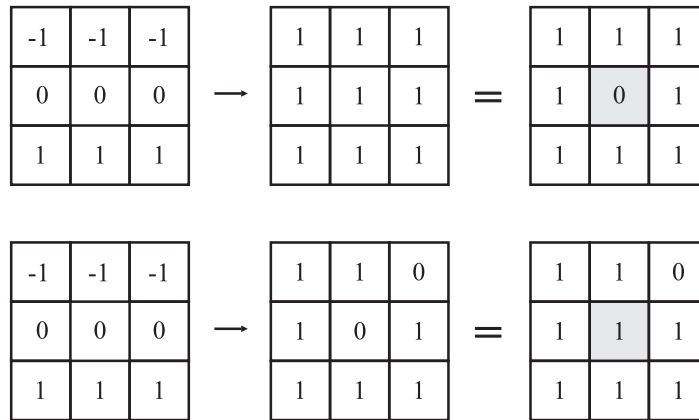


Figura 2.7: aplicación de una mascarilla de Prewitt para procesar el pixel central; 1ra. hilera, aplicación de la mascarilla horizontal sobre una región homogénea; 2da. hilera, aplicación de la mascarilla sobre una región no homogénea.

Como se puede notar en esta figura, cuando se aplica una de las mascarillas mencionadas

<sup>1</sup>El mismo resultado se obtiene para una mascarilla de Roberts o de Sobel.

en alguna región de intensidad homogénea dentro de la imagen, el resultado que se obtiene para todos los puntos que están en esta región es cero [38], no obstante, en regiones que no son homogéneas se tiene un resultado diferente de cero.

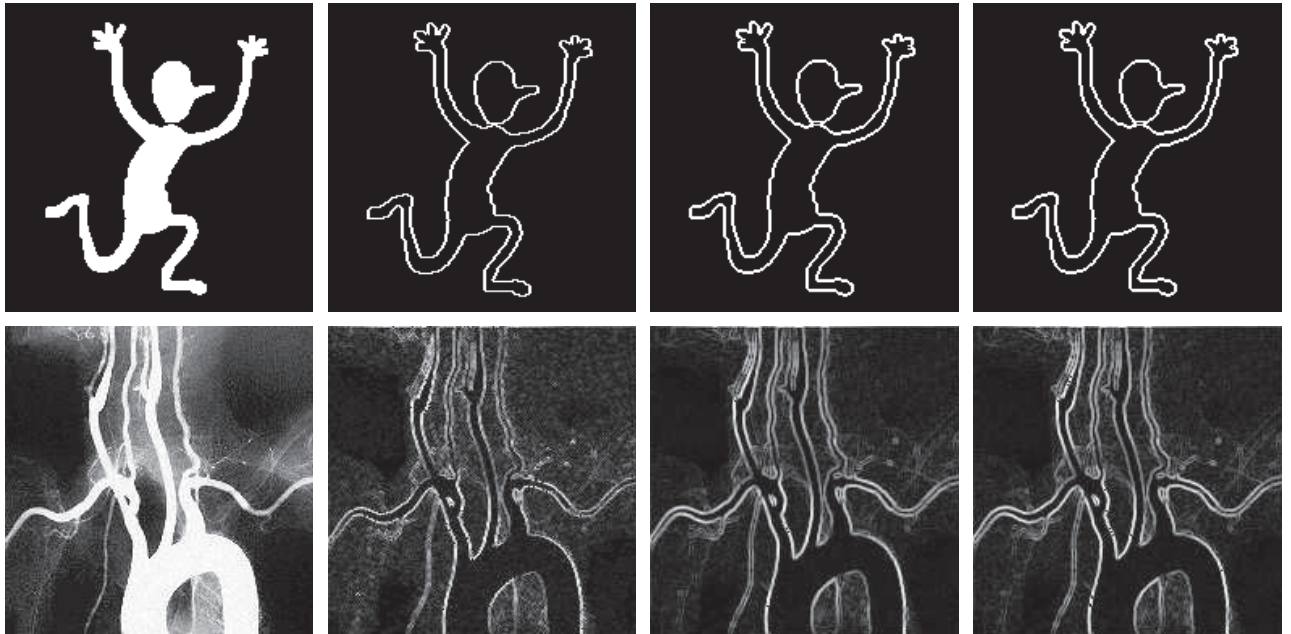


Figura 2.8: detección de bordes; 1ra. hilera, imágenes binarias; 2da. hilera, imágenes en tonos de gris; de izq. a der., imagen original, detección con mascarilla de Roberts, detección con Prewitt y detección con Sobel.

En la Fig. 2.7 sólo se presenta la acción de la mascarilla para el pixel central. Un programa que ejemplifica la implementación de los operadores de Sobel se presenta en el Apéndice B. En la Fig. 2.8 se presenta la acción de aplicar las mascarillas de Roberts, Prewitt y Sobel a imágenes binarias y en tonos de grises. Como es de esperarse, se obtienen los bordes de las imágenes. Por otro lado, en el Apéndice C se presentan otros resultados visuales de los operadores de Sobel.

### 2.1.2. Eje central

Uno de los problemas del procesamiento y análisis digital de imágenes durante la década de los 60's fue la carencia de una representación bien definida de las formas de objetos en una imagen. Para representar la forma de un objeto en una imagen se necesita utilizar algún

método que genere un *descriptor de forma*, el cual debe cumplir con ciertas propiedades [20]. A saber, el descriptor debe ser invariante ante cualquier traslación del objeto, además, debe ser invariante ante algún cambio de escala del objeto y, finalmente, el descriptor debe ser invariante ante posibles rotaciones del objeto. En otras palabras, ya que las transformaciones mencionadas no cambian la forma del objeto, entonces, el descriptor debe permanecer sin alteración al aplicarle una de ellas.

En 1967 H. Blum presentó el concepto de *eje medio*. El eje medio es un descriptor de forma que se basa en la idea de representar la forma del objeto utilizando una *gráfica* de esta forma. De manera general, este descriptor describe las características de formas de objetos en una imagen manteniendo la distribución espacial de las formas de la imagen. Una noción intuitiva de la definición del eje medio está basada en el concepto de *fuego de pradera* [20]. En este concepto, se considera a un objeto en una imagen compuesto por pasto seco, asimismo, al fondo de la imagen se le considera pasto húmedo. Si al mismo tiempo se prende fuego en los bordes del objeto, el fuego se propagará hacia el centro del objeto, después de cierto tiempo, algunos frentes de fuego se intersectarán con otros frentes que vienen de otra dirección. Es común, llamar a estos puntos de intersección como *puntos de extinción*. El conjunto de todos los puntos de extinción constituye el eje medio. Particularmente, en el procesamiento digital de imágenes es común denominar al eje medio como sinónimo de *eje central* o *esqueleto*. Para ilustrar este concepto, en la Fig 2.9 se presentan algunas figuras geométricas elementales y sus esqueletos correspondientes.

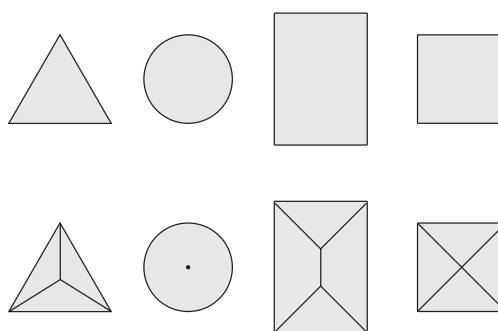


Figura 2.9: 1ra. hilera, figuras geométricas elementales: triángulo, círculo, rectángulo y cuadrado; 2da. hilera, esqueletos sobrepuestos, respectivamente, en las figuras geométricas elementales.

Otra noción del concepto de eje medio [4], consiste en considerar un plano cuyos elementos pueden tomar dos valores, 0 ó 1, siendo 0 su estado sin perturbación. Además, cuando los

puntos son excitados cambian de su estado inicial al estado *excitado*, esto es, cambian de 0 a 1. Asimismo, cuando un punto ha sido excitado, este punto excitará puntos adyacentes en el plano, esta *propagación* tomará un retardo que es proporcional a la distancia entre los puntos excitados. Sin embargo, una vez que un punto se ha excitado no podrá ser afectado por una segunda excitación después de un intervalo de tiempo, al cual se le llama *tiempo muerto*. Inicialmente, cuando un objeto excita el plano, un grupo de *frentes de onda* será generado, los frentes de onda se propagarán sin traslaparse unos con otros, después de un intervalo de tiempo, algunos de los frentes llegarán a las esquinas del plano, asimismo, otros frentes se encontrarán entre sí. El lugar en donde ocurra este último encuentro estará formado por *puntos de colisión* que, en conjunto, representan el eje medio. Para ejemplificar, en la Fig 2.10, esquemáticamente, se representa la propagación de una perturbación generada por un objeto sobre un plano. Inicialmente, se genera un primer punto de colisión después de un intervalo de tiempo  $t_1$ . Después de un intervalo  $t_2$ , se genera el último punto de colisión. Además, la *función del eje medio* determina la ocurrencia de los puntos de colisión [4]. Esta función asocia los puntos del eje medio con un intervalo de tiempo correspondiente a cada punto del eje medio.

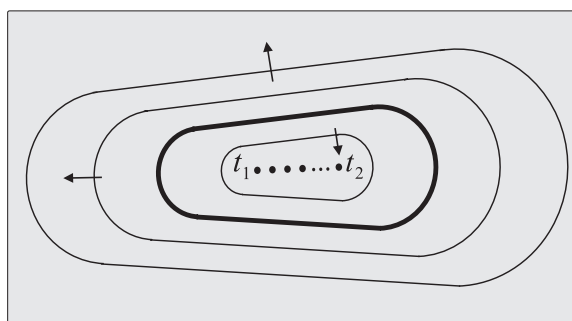


Figura 2.10: creación del eje medio a través de frentes de onda generados por un objeto. El punto de colisión marcado con  $t_1$  corresponde a la parte más angosta del objeto mientras que el punto de colisión marcado con  $t_2$  corresponde a la parte más ancha del objeto y  $t_2 > t_1$ . Las flechas en la imagen representan la dirección de los frentes de onda generados.

Finalmente, se presenta una definición matemática del concepto de eje medio o esqueleto mediante el concepto de discos maximales. Específicamente, si se denomina al esqueleto de una imagen  $A$  por  $S(A)$ , se puede concebir el esqueleto de la manera siguiente: si  $z$  es un punto del esqueleto  $S(A)$  y se define  $D_z$  como el disco más grande centrado en  $z$  y,

además, contenido en  $A$ , entonces, no es posible encontrar un disco más grande, aunque no esté centrado en  $z$ , que contenga al disco  $D_z$  y que esté incluido en  $A$ . Por lo tanto,  $D_z$  se denomina *disco maximal* [12]. Este disco maximal tiene la propiedad de tocar la frontera de la imagen en dos o más puntos y la colección de todos los puntos  $z$  constituyen el esqueleto de la imagen.

### 2.1.3. Algoritmos de adelgazamiento

Los algoritmos de adelgazamiento realizan un proceso análogo al concepto de fuego de pradera, ya que aplican, sucesivamente, un conjunto de condiciones a cada pixel de un objeto dentro de una imagen, eliminando aquellos pixeles que las cumplen mientras que mantienen aquellos pixeles que no las cumplen. De modo que, los pixeles que no son eliminados durante este proceso forman el esqueleto de la imagen.

T. Y. Zhang y C. Y. Suen, presentan en [40] un algoritmo de adelgazamiento para obtener el esqueleto de objetos en imágenes binarias utilizando dos etapas. La primera etapa consiste en eliminar los pixeles de la imagen a partir de la frontera sureste y desde la esquina noroeste. En la segunda etapa se eliminan los pixeles de la imagen a partir de la frontera noroeste y desde la esquina sureste. En cada una de estas etapas se aplica un cierto conjunto de condiciones.

**Primera etapa-** Las condiciones para un pixel  $p_1$  dentro de la imagen son

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & 2 \leq B(p_1) \leq 6, \\
 (b) \quad & C(p_1) = 1, \\
 (c) \quad & p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 = 0, \\
 (d) \quad & p_4 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

En la primera condición,  $B(p_1)$  se define como la cantidad de pixeles vecinos de  $p_1$  que son diferentes de cero; en la segunda condición,  $C(p_1)$  se define como el número de transiciones 0 a 1 en la secuencia ordenada de pixeles

$$p_2, p_3, \dots, p_8, p_9, p_2. \tag{2.15}$$

**Segunda etapa-** Las condiciones que se evalúan del pixel  $p_1$  son

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & 2 \leq B(p_1) \leq 6, \\
 (b) \quad & C(p_1) = 1, \\
 (c') \quad & p_2 \cdot p_4 \cdot p_8 = 0, \\
 (d') \quad & p_2 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Como se puede observar en las Ecs. (2.14) y (2.16), las primeras dos condiciones son iguales en ambas etapas mientras que las condiciones (c) y (d) de la Ec. (2.14) se cambian para la segunda etapa por las condiciones (c') y (d'). La aplicación de este algoritmo consiste en realizar los siguientes pasos:

**P1** Inicialmente, se aplican las condiciones de la Ec. (2.14) a todos los pixeles de la imagen, marcando aquellos pixeles que deben ser eliminados.

**P2** Después, se eliminan los pixeles señalados durante la primera etapa.

**P3** Enseguida, se aplican las condiciones de la Ec. (2.16) a la imagen resultante del paso anterior marcando los pixeles que deben ser eliminados.

**P4** Por último, se eliminan aquellos pixeles que se señalaron en el paso tres.

Estos pasos se aplicarán iterativamente hasta que no haya pixeles por eliminar lo que, finalmente, proporciona el esqueleto de los objetos en la imagen.

Es importante señalar que, las condiciones de las Ecs. (2.14) y (2.16) se utilizan para preservar ciertas características del esqueleto. Las condiciones (a) y (b) se usan para mantener los puntos extremos del esqueleto. En cambio, las condiciones (c) y (d) garantizan la eliminación de los puntos de la frontera sureste y de la esquina noroeste; en forma análoga, las condiciones (c') y (d') garantizan la eliminación de los puntos de la frontera noroeste y los de la esquina sureste [40]. Cabe comentar que este algoritmo presenta algunas desventajas cuando se aplica en imágenes con ruido ya que, la cantidad de ruido se incrementa, en vez de disminuirlo. Además, algunos segmentos diagonales que tienen un grosor de dos pixeles son eliminados. Pese a lo anterior, una solución a este problema es presentada por H. E. Lü y S. P. Wang en [21], lo cual se logra cambiando la condición (a) de las Ecs. (2.14) y (2.16) por la condición

$$(a) \quad 3 \leq B(p_1) \leq 6, \tag{2.17}$$



de tal manera, que se consideran de forma más cuidadosa, los puntos extremos del esqueleto. En los Apéndices B y C se presentan, respectivamente, una implementación del algoritmo de Zhang y Suen y algunos resultados visuales distintos a los presentados en esta sección.

Además del ruido, los esqueletos con “picos” y los esqueletos “desconectados” en algunos píxeles son algunas desventajas de los algoritmos de adelgazamiento. Otro problema que aparece en los algoritmos de adelgazamiento es la distorsión en forma de ‘Y’. Esta distorsión aparece cuando se eliminan píxeles de la unión de formas horizontales o verticales. En [9] H. C. Fu et al., presentan un algoritmo que considera la eliminación de estas desventajas en el proceso de esquelización. Para describir dicho algoritmo, son necesarios algunos conceptos. Para las direcciones *oeste–este* ( $o \leftrightarrow e$ ), *noroeste–sureste* ( $no \leftrightarrow se$ ), *norte–sur* ( $n \leftrightarrow s$ ) y *noreste–suroeste* ( $ne \leftrightarrow so$ ) se define un *trazo de barrido*, para un píxel  $p(i, j)$  como

$$T_{d \leftrightarrow d'}(i, j), \quad (2.18)$$

en donde  $d$  y  $d'$  representan alguna de las direcciones mencionadas. También, la *longitud de barrido* de un trazo de barrido de un punto  $p(i, j)$  se define como la cantidad de píxeles en un trazo de barrido a lo largo de alguna de las direcciones mencionadas, estas direcciones se presentan en la Fig. 2.11. Específicamente, la longitud de barrido se define como

$$L_d(i, j). \quad (2.19)$$

Además de las definiciones anteriores es necesario introducir algunas operaciones que nos ayudarán a identificar la dirección de barrido que estamos realizando. Estas operaciones están basadas en las operaciones lógicas AND y OR. Se define la operación AND *direccional*, DAND, para las cuatro direcciones como

$$\text{DAND}_{d \leftrightarrow d'} [p(i, j)], \quad (2.20)$$

la operación AND se realiza entre los píxeles vecinos del píxel central a lo largo de cualquiera de las direcciones mostradas en la Fig. 2.11. Además de esta operación, se definen la operaciones OR *direccional izquierda*, DORL y OR *direccional derecha*, DORR como

$$\text{DORL}_{d \leftrightarrow d'} [P(i, j)], \quad (2.21)$$

$$\text{DORR}_{d \leftrightarrow d'} [P(i, j)]. \quad (2.22)$$

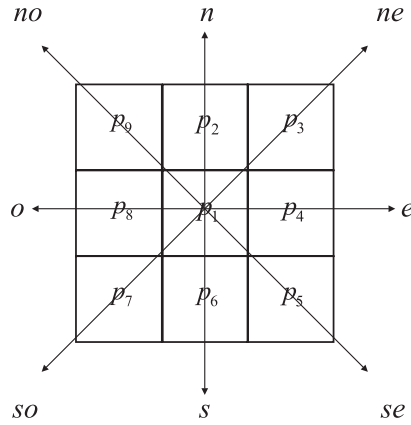


Figura 2.11: direcciones utilizadas para el trazo de barrido.

A continuación, se presentan las condiciones para evitar la distorsión en forma de ‘Y’ y un esqueleto desconectado, estas condiciones se aplican a cada píxel determinando si este píxel debe ser eliminado o no.

**P1** - En primer lugar, si un píxel  $p$  pertenece a una línea larga y *delgada* [9], esto es, una línea de grosor de un píxel, entonces existe un trazo de barrido  $T_{d \leftrightarrow d'}(i, j)$ , de tal manera que la longitud de barrido asociada cumple la condición

$$L_d(i, j) > \delta L_{d'}(i, j) \quad (2.23)$$

para todo  $d' \neq d$ , en donde  $d$  y  $d'$  representa las direcciones del trazo de barrido del punto  $P$ . Además,  $\delta$  es la razón longitud-ancho de la longitud de barrido.

**P2** - La segunda condición se utiliza para determinar si un píxel está en un borde terminal de un trazo largo y delgado. De manera general, para cualquier dirección  $d$ , un punto  $p$  pertenecerá a un borde terminal si cumple las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \text{DAND}_{d \leftrightarrow d'} [p(i, j)] &= 0, \\ \text{DORL}_{d \leftrightarrow d'} [p(i, j)] &= 1, \\ \text{DORR}_{d \leftrightarrow d'} [p(i, j)] &= 1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

**P3** - Finalmente, en el caso de esqueletos con picos, para un *pixel terminal*  $p$ , esto es, un píxel que sólo tiene un píxel vecino  $q$ , al que se le llama *pixel de referencia*, el procedimiento consiste en evaluar el píxel de referencia  $q$ , si se supone que el píxel terminal  $p$  es cero.

La evaluación se hará aplicando las condiciones de Chen y Hsu [6] o condiciones de “extremidad” con las que se determina si el pixel de referencia  $q$  se debe eliminar. Las condiciones de extremidad presentan algunos cambios de las Ecs. (2.14) y (2.16). Para la primera etapa las condiciones de extremidad son

$$\begin{aligned}
(a) \quad & 2 \leq B(p_1) \leq 7, \\
(b) \quad & \text{si } C(p_1) = 1, \\
(c) \quad & p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 = 0 \quad \text{y} \\
(d) \quad & p_4 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0, \\
(e) \quad & \text{o } C(p_1) = 2, \\
(f) \quad & p_2 \cdot p_4 = 1 \text{ y } p_6 + p_7 + p_8 = 0 \quad \text{o} \\
(g) \quad & p_4 \cdot p_6 = 1 \text{ y } p_2 + p_8 + p_9 = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Para la segunda etapa, únicamente cambian las condiciones  $c, d, f$  y  $g$ , éstas se redefinen como

$$\begin{aligned}
(c') \quad & p_2 \cdot p_4 \cdot p_8 = 0, \\
(d') \quad & p_2 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0, \\
(e') \quad & p_2 \cdot p_8 = 1 \text{ y } p_4 + p_5 + p_6 = 0, \\
(f') \quad & p_6 \cdot p_8 = 1 \text{ y } p_2 + p_3 + p_4 = 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

En conjunto, con las condiciones mencionadas anteriormente se puede describir el algoritmo planteado en [9] como sigue

**P1** - Inicialmente, se calcula la cantidad de pixeles vecinos de la imagen  $B(p_1)$ , para todos los pixeles que pertenecen al objeto dentro de la imagen, es decir, se calcula  $B(p_1)$  para todo  $A(x, y) = 1$ . Además, Si se encuentra un pixel terminal, esto es,  $B(p_1) = 1$ , entonces se aplican las condiciones de extremidad a su pixel de referencia. Si las condiciones se cumplen para este pixel, entonces, se prosigue a eliminar el pixel terminal. de lo contrario se conserva este último.

**P2** - A continuación, para los pixeles que no son terminales, es decir,  $B(p_1) > 1$ , se calculan las condiciones de extremidad. Para los pixeles  $B(p_1) > 1$  que satisfacen estas condiciones, se calcula la longitud de barrido  $L_d(i, j)$  en las cuatro posibles direcciones. Enseguida, se evalúan las condiciones 1 y 2 para evitar un esqueleto desconectado y para evitar distorsión en forma ‘Y’. Si los pixeles cumplen con estas condiciones, entonces, estos pixeles serán conservados. De lo contrario serán eliminados.



Figura 2.12: de izq. a der., imagen original, esqueleto de Zhang y Suen, esqueleto de Lü y Wang.

La obtención del esqueleto consiste en aplicar iteradamente estos dos pasos hasta que no haya más píxeles por eliminar. En la Fig. 2.12 se presentan los distintos esqueletos obtenidos por algunos de los algoritmos mencionados en esta sección.

## 2.2. El punto de vista morfológico

### 2.2.1. Gradientes morfológicos

Usualmente los *gradiente morfológicos* son utilizados para calcular variaciones de niveles de gris como es el caso de los bordes de objetos en una imagen. Para ello, utilizan un elemento estructural que permite encontrar las variaciones de intensidad en la imagen. El elemento estructural define la vecindad alrededor del píxel sobre el cual se trabaja. Normalmente, los gradientes morfológicos están basados en operaciones aritméticas y en operaciones de conjuntos. Antes de establecer un conjunto de combinaciones entre operadores aritméticos y de conjuntos, es necesario hacer una clasificación de los operadores como extensivos y antiextensivos [29]. Específicamente, para una función  $f$ , un operador  $\phi$  es *extensivo* si cumple

$$f \leq \phi(f), \forall f, \quad (2.27)$$

similarmente, el operador  $\Psi$  es *antiextensivo* si cumple

$$\Psi(f) \leq f, \forall f. \quad (2.28)$$

Con la clasificación anterior, se pueden definir algunas combinaciones de operadores mediante una diferencia aritmética, dados un operador extensivo  $\phi$  y un operador anti extensivo  $\Psi$  se

tienen las siguientes diferencias

$$\phi(f) - \Psi(f) \quad (\text{ext. vs. anti-ext.}), \quad (2.29)$$

$$\phi(f) - f \quad (\text{ext. vs. original}), \quad (2.30)$$

$$f - \Psi(f) \quad (\text{original vs. anti-ext.}) \quad (2.31)$$

En la Sección 2.1.1 se definieron algunos conceptos importantes del gradiente de una función.

En relación a estas definiciones se define el *gradiente morfológico* de una función  $f$  como

$$g(f) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f \oplus B_\rho - f \ominus B_\rho}{2\rho}, \quad (2.32)$$

en donde  $f \oplus B_\rho$  es la operación de dilatación, siendo  $B$  el elemento estructural que tiene radio  $\rho$ , de la misma manera,  $f \ominus B_\rho$  es la operación de erosión. En el caso discreto, al igual que en el caso de la derivada digital, el límite mínimo al cual  $\rho$  tiende es diferente de cero.

Bajo esta consideración, cuando  $\rho \rightarrow 1$ , el *gradiente morfológico discreto* se define como

$$g(f) = \frac{f \oplus B - f \ominus B}{2}, \quad (2.33)$$

comúnmente, para facilitar las operaciones, se omite el factor de  $\frac{1}{2}$  de la Ec. (2.33) puesto que no afecta al aplicar el gradiente para detectar alguna variación de intensidad, por lo tanto, el gradiente morfológico discreto se puede definir como la diferencia

$$g(f) = f \oplus B - f \ominus B, \quad (2.34)$$

De igual importancia, se definen los gradientes morfológicos *interno* y *externo* en base a la definición de gradiente morfológico discreto y a las diferencias entre operadores. Un gradiente morfológico interno se utiliza para realzar los límites interiores de los objetos en una imagen, por el contrario, un gradiente morfológico externo se utiliza para realzar los límites exteriores [29]. El *gradiente morfológico interno* se define como

$$g^-(f) = f - f \ominus B, \quad (2.35)$$

y el *gradiente morfológico externo* se define como

$$g^+(f) = f \oplus B - f. \quad (2.36)$$

Usualmente, este par de gradientes es empleado en la detección de contornos delgados. Esto resulta más claro en la Fig. 2.13, en donde se utilizan los tres tipos de gradiente morfológico mencionados para detectar los bordes de una imagen. En el Apéndice C, se muestran algunos resultados diferentes a los presentados en esta sección del gradiente morfológico interno.

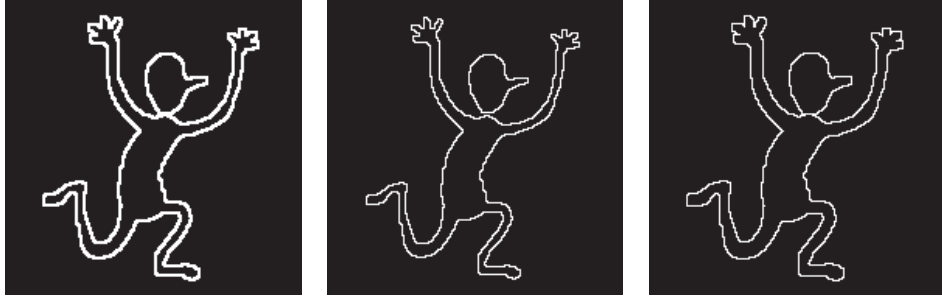


Figura 2.13: detección de bordes utilizando los gradientes, de izq. a der., morfológico discreto, morfológico interno, morfológico externo.

### 2.2.2. Esqueletización

El esqueleto morfológico, como su nombre lo sugiere, tiene sus bases en la morfología matemática. Utilizando algunas operaciones fundamentales de esta teoría es posible obtener el esqueleto de una imagen. Específicamente, las operaciones de erosión y abertura se aplican sucesivamente a fin de obtener *subesqueletos* de la imagen. Una vez encontrado el último subesqueleto, esto es, un subesqueleto antes de que la operación de erosión elimine todos los píxeles de la imagen, se prosigue a hacer una unión de todos los subesqueletos hallados. Originalmente, esta idea fue introducida por J. Serra [32]. P. A. Maragos presenta en [24] una forma computacional para implementar el esqueleto morfológico  $S(A)$  de una imagen  $A$  como

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A), \quad (2.37)$$

en donde, el  $k$ -ésimo subesqueleto  $S_k(A)$  se define como

$$S_k(A) = (A \ominus kB) \setminus (A \ominus (k+1)B) \circ B, \quad (2.38)$$

siendo  $B$  el elemento estructural utilizado en las operaciones de erosión y abertura. Además,  $A \ominus kB$  indica que se deben realizar  $k$  erosiones sucesivas de la imagen  $A$  hasta una erosión antes de que se eliminen los píxeles de los objetos en toda la imagen. Más claramente, esto se expresa por

$$A \ominus kB = (\dots (A \ominus B) \ominus B) \ominus \dots \ominus B \quad k \text{ veces.} \quad (2.39)$$

El valor de  $k = K$  representa el último paso iterativo, es decir,

$$K = \text{máx}\{k | A \ominus kB \neq \emptyset\}. \quad (2.40)$$



Figura 2.14: izq., imagen original, der., esqueleto morfológico de la imagen original.

El esqueleto morfológico  $S(A)$  de la imagen  $A$  se genera por medio de la unión finita de todos los subesqueletos o esqueletos parciales  $S_k(A)$  obtenidos. En la Fig. 2.14 se presenta el resultado del esqueleto morfológico para una imagen binaria.

### 2.2.3. Adelgazamientos morfológicos

El proceso de obtención de esqueletos mediante adelgazamientos morfológicos es similar al mencionado en la Sección 2.1.3. Los adelgazamientos morfológicos están basados en la operación de diferencia de conjuntos y en la transformación “todo o nada” (HMT, Hit-Miss Transform). Utilizando la diferencia entre conjuntos Ec. (1.7) y la operación “todo o nada” Ec. (1.10), se define el adelgazamiento de  $A$  por el elemento estructural  $B$  como

$$A \circ B = A \setminus A \otimes B, \quad (2.41)$$

siendo la operación  $A \otimes B$  una representación alternativa de la transformación HMT. La operación de adelgazamiento morfológico se puede entender como un proceso de *buscar y borrar* [16]. La transformación todo o nada representa un proceso de búsqueda, usando el elemento estructural  $B$ , de los elementos que no corresponden al esqueleto de la imagen  $A$ , una vez que estos elementos han sido encontrados se aplica la operación de diferencia entre la imagen original y los elementos hallados por la transformación todo o nada a fin de obtener el esqueleto de la imagen. Una manera de llevar a cabo esta operación sobre una imagen  $A$  es utilizar al elemento estructural  $B$  como un conjunto de elementos estructurales. Cada elemento de este conjunto tendrá una rotación de  $90^\circ$  respecto al elemento estructural

anterior a fin de escudriñar la imagen en todas las direcciones digitales posibles. Por otra parte, B. K. Jang y R. T. Chin presentan en [16] un algoritmo de adelgazamiento morfológico. A continuación se presentan las dos etapas en que consiste el algoritmo.

**Etapas 1** - Utilizar un conjunto de elementos estructurales  $B$  formado por cuatro elementos estructurales. Con ello, se pretende utilizar cada elemento estructural para eliminar los puntos de los bordes en cuatro direcciones posibles, a saber, las direcciones son noroeste, noreste, sureste y suroeste.

**Etapas 2** - Un segundo conjunto de elementos estructurales se utiliza para remover los bordes en las direcciones norte, este, sur y oeste, además, algunos puntos innecesarios de la imagen son eliminados.

En la Fig. 2.15 se muestran los elementos estructurales para la primera y la segunda etapas mencionadas. La obtención del esqueleto terminará cuando después de las dos etapas anteriores ya no haya más elementos por eliminar. Es importante destacar que al utilizar

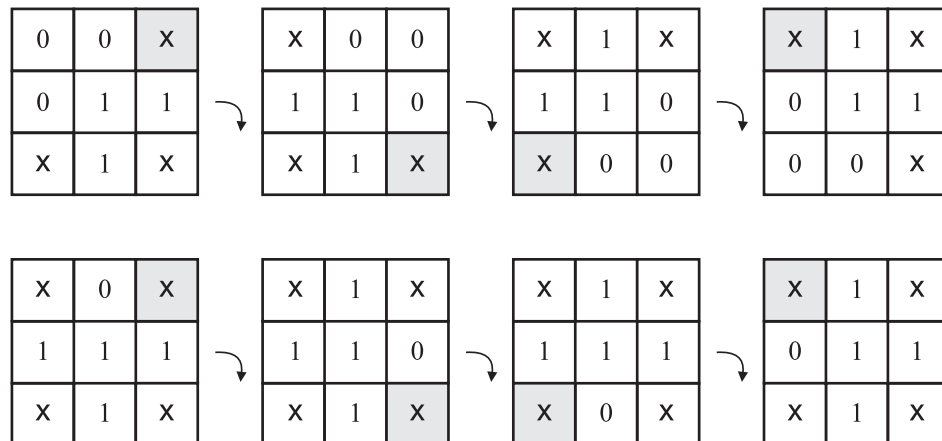


Figura 2.15: conjuntos de elementos estructurales para eliminar los bordes de una imagen; 1ra. hilera, eliminación de los bordes, de izq. a der., noroeste, noreste, sureste y suroeste; 2da. hilera, eliminación de los bordes, de izq. a der., norte, este, sur y oeste.

diferentes conjuntos de elementos estructurales, dependiendo de su tamaño y geometría, se tendrán como resultado distintos algoritmos de adelgazamiento.



## 2.3. Análisis comparativo

### 2.3.1. Criterios de comparación

Los criterios a considerar al comparar las diferentes operaciones y algoritmos presentados en las secciones previas se basan, de manera general, en una estimación del tiempo de cómputo y el espacio necesarios para llevar a cabo los procedimientos mencionados. Para estimar el tiempo de cómputo se utilizará el concepto de *complejidad computacional* que proporciona, dependiendo de un parámetro principal  $n$ , el *orden* de cómputo de un procedimiento. Un procedimiento computacional tiene asociado un número de operaciones dado por  $f(n)$  y su orden de cómputo se representa por  $g(n)$ . Para dos funciones  $f$  y  $g$  con dominio  $\mathbb{N}$  [17] siempre que

$$|f(n)| \leq C |(g(n))|, \quad C > 0, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (2.42)$$

se dice que  $f(n)$  es de orden  $g(n)$  para una constante positiva  $C$ , lo que se denota por  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  y que comúnmente se denomina como notación  $\mathcal{O}$ -mayúscula.

En una estimación basada en el orden de cómputo se considera como entrada una imagen cuadrada de  $n \times n$ , asimismo, para el espacio de memoria requerido debe considerarse el número de imágenes intermedias o auxiliares  $m$  utilizadas durante un procedimiento completo. Con la notación anterior, en el Cuadro 2.1 se dan los órdenes de cómputo y la cantidad de imágenes intermedias para los procedimientos desarrollados en este capítulo.

El orden de cómputo de la detección de bordes es  $\mathcal{O}(k^2 n^2)$  en donde  $k \times k$  es el tamaño de las mascarillas utilizadas en esta operación y  $k^2$  denota la cantidad más significativa de operaciones realizadas en cada paso de la operación. En el caso de las mascarillas mencionadas en este capítulo el valor de  $k^2 \ll n^2$  por lo que el orden de cómputo es  $\mathcal{O}(n^2)$ , sin embargo, las mascarillas de detección de bordes pueden ser implementadas en tamaños mayores lo que resultaría en un incremento el número de operaciones  $k^2$ . Por esta razón, se expresa explícitamente el valor de  $k^2$  en el orden de la detección de bordes ya que para mascarillas cada vez más grandes, quizá de tamaño aproximado a la imagen, aunque no es un hecho muy asiduo, la cantidad de operaciones incrementaría considerablemente; si en algún momento  $k^2 \simeq n^2$  el orden de cómputo podría crecer hasta  $\mathcal{O}(n^4)$ . Esta característica se encuentra también en los adelgazamientos morfológicos, en donde además de poder utilizar mascarillas más grandes en la obtención del esqueleto se pueden utilizar más elemento estructurales en

Cuadro 2.1: Órdenes de cómputo y no. de imágenes auxiliares

Algoritmo	Complejidad $\mathcal{O}(g(n))$	No. img. inter., $m$
Detección de bordes (Roberts, Prewitt, Sobel)	$\mathcal{O}(k^2n^2)$ , $k^2 \ll n^2$	1
Esqueletizaciones [40], [21], [9]	$\mathcal{O}(n^2)$	2
Erosión & dilatación morfológicas	$\mathcal{O}(n^2)$	1
Abertura & cerradura morfológicas	$2\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^2)$	1
Esqueleto morfológico	$4\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^2)$	$2K$
Adelgazamiento morfológico	$\mathcal{O}(k^2n^2)$ , $k^2 \ll n^2$	2

la obtención de éste, lo que resulta en un incremento considerable de operaciones realizadas, y en determinado momento, de un incremento en el orden de cómputo. Por otro lado, en las operaciones de apertura y cerradura se denota el orden de cómputo como  $2\mathcal{O}(n^2)$  para expresar el hecho de que estas operaciones se realizan mediante una erosión y una dilatación o viceversa, aunque el orden de cómputo final es  $\mathcal{O}(n^2)$ . De manera similar, el orden del esqueleto morfológico se denota como  $3\mathcal{O}(n^2)$  para explicitar el uso de 2 erosiones y una dilatación en la obtención de un subesqueleto.

### 2.3.2. Ventajas y desventajas

Los algoritmos para la obtención del esqueleto presentados en este capítulo generan diferentes resultados que presentan distintas características. Aunque no existe diferencia en la complejidad computacional de los algoritmos mencionados, existen ciertas ventajas y desventajas en la implementación de dichos algoritmos. Por ejemplo, una de las desventajas que presenta el esqueleto morfológico es que requiere más imágenes intermedias, pues se tienen que almacenar los subesqueletos que constituyen el esqueleto, en contraste, se necesitan realizar  $K(K + 1)/2$  operaciones morfológicas de erosión y dilatación, esto resulta ventajoso

ya que no se necesitan aplicar ciertas condiciones a cada pixel de la imagen para obtener el resultado final como se hace en los algoritmos presentados en [40, 21, 9], aunque estos algoritmos requieren de menos recursos de memoria, pues no utilizan muchas imágenes intermedias (solamente 2). Desde otro punto de vista, el esqueleto presentado por Fu Ch. H. [9] genera un esqueleto con mejores detalles puesto que considera la conectividad de esqueleto y la eliminación de algunas distorsiones que se generan en el proceso de obtención de éste; a diferencia de los algoritmos presentados en [40, 21] que no consideran tales distorsiones y del esqueleto morfológico que no genera un esqueleto conectado.

# Capítulo 3

## Procesamiento de Imágenes Difuso

### 3.1. Conjuntos nítidos vs. conjuntos difusos

Una de las herramientas matemáticas sobre la cual está fundamentado el procesamiento difuso de imágenes es la *teoría de conjuntos difusos* (FST, Fuzzy Set Theory). Los conjuntos difusos son una herramienta matemática que, originalmente, está dirigida hacia el manejo de situaciones que presentan vaguedad o incertidumbre. Este concepto fue introducido por primera vez en 1965 por Lofti A. Zadeh, quien presentó la teoría matemática de los conjuntos difusos como una generalización de la teoría convencional de conjuntos. La idea principal que presenta esta herramienta matemática, es que utiliza una *función de membresía*, la cual asigna el grado de pertenencia que tiene un elemento dentro de un conjunto, a diferencia de los *conjuntos convencionales*, en donde se considera la pertenencia o no pertenencia de un elemento [39].

Sea  $X$  un conjunto no vacío, el cual será llamado *conjunto universal* y  $x$  un *elemento* de este conjunto. Un conjunto  $A$  que es un subconjunto del conjunto universal  $X$ , lo cual denotamos por  $A \subseteq X$ , se define como la colección de elementos  $x$  que están en el conjunto universal  $X$ , de tal manera que el elemento  $x$  pertenece o no al conjunto  $A$ . Por otra parte, un *conjunto difuso*  $A$ , subconjunto del conjunto universal  $X$ , se representa por el par  $(X, f_A)$ , en donde  $f_A$  representa la función de membresía del conjunto  $A$ , relativa a  $X$ , y dada por [8]

$$f_A : X \rightarrow I, \quad (3.1)$$

que se utiliza para asociar cada elemento  $x$  del conjunto universal  $X$  con algún número dentro

del intervalo  $I = [0, 1]$ . El valor de  $f_A(x)$  representa el grado de pertenencia de  $x$  en  $A$ . De esta manera, cuando  $f_A(x) = 0$ , el elemento  $x$  no pertenecerá al conjunto difuso, mientras que para  $f_A(x) = 1$ , el elemento  $x$  definitivamente pertenecerá al conjunto difuso. Los demás casos, en los que  $f_A(x)$  asocia un valor intermedio entre 0 y 1, representan la pertenencia parcial de los elementos  $x$  al conjunto difuso  $A$ . El valor asignado del intervalo  $I$  con cada elemento  $x$  del conjunto universal  $X$ , dependerá de la función de membresía especificada [2]. La familia de todos los conjuntos difusos que se encuentran en el conjunto universal  $X$  se denota por  $\mathcal{F}(X)$  y matemáticamente se representa por

$$\mathcal{F}(X) = \{f_A | f_A : X \rightarrow I \text{ con } A \subseteq X\}. \quad (3.2)$$

El concepto de conjunto difuso es una generalización de los conjuntos convencionales por lo que se puede definir un conjunto convencional en términos de conjuntos difusos con una función de membresía que únicamente asocie uno de dos posibles valores a cada elemento  $x$ , esto es  $f_A(x) \in \{0, 1\}$  donde 0 representa la no pertenencia y 1 la pertenencia del elemento  $x$ ; en tal caso se le conoce como *función característica*. Es por esta razón que a los conjuntos convencionales también se les denomina *conjuntos nítidos o duros* (crisp/hard sets). Con la definición de conjunto difuso, varios de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos se redefinen. Como se ha mencionado, denotamos al conjunto universal como  $X$  y lo representamos por el par  $(U, f_U)$  en donde  $U = X$ , y

$$f_U(x) = 1, \quad \forall x \in X. \quad (3.3)$$

Además, se define el complemento del conjunto universal, es decir, el conjunto *vacío*, el cual se representa por el par  $(\emptyset, f_\emptyset)$  y se obtiene cuando la función de membresía asocia a cada elemento  $x$  del conjunto universal  $X$  el valor cero, esto es

$$f_\emptyset(x) = 0 \quad \forall x \in X. \quad (3.4)$$

Otra definición útil en operaciones con conjuntos difusos, es la definición de *complemento* de un conjunto difuso, introducida en [39]. De manera general, para cualquier conjunto difuso  $A$  con función de membresía  $f_A$ , se define el conjunto difuso complemento  $A^c$ , el cual tiene la función de membresía  $f_{A^c}$ , dada por

$$f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x), \quad \forall x \in X. \quad (3.5)$$

De aquí en adelante denotaremos al conjunto universal sólomente por  $X$ , así como también al conjunto difuso vacío por  $\emptyset$ . Por otro lado, dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$ , que son representados por las funciones de membresía  $f_A$  y  $f_B$  respectivamente, son iguales si sus funciones de membresía lo son para todo elemento  $x$  en el conjunto universal  $X$ , esto es

$$A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x), \quad \forall x \in X. \quad (3.6)$$

En las siguientes secciones se presentan algunas de las operaciones entre conjuntos difusos, que se traducen en operaciones con funciones de membresía, así como también, el marco teórico del procesamiento difuso de imágenes digitales para el cuál se utiliza la herramienta matemática de los conjuntos difusos como base fundamental.

## 3.2. Operaciones con conjuntos difusos

Un conjunto difuso  $A$  está *incluido* en un conjunto difuso  $B$ , lo que se denota por  $A \subseteq B$ , si las funciones de membresía que representan a estos conjuntos,  $f_A$  y  $f_B$  respectivamente, satisfacen que

$$f_A(x) \leq f_B(x), \quad \forall x \in X. \quad (3.7)$$

Asimismo, otras dos operaciones con conjuntos difusos que son muy útiles son la unión y la intersección. Para definir las, en el ámbito difuso utilizaremos las funciones máximo y mínimo. Además, si  $A$ , y  $B$  son conjuntos difusos que están en el conjunto universal  $X$  y considerando que todas las operaciones se realizan en el intervalo  $I = [0, 1]$ , entonces, para todo elemento  $x$  perteneciente al conjunto universal  $X$ , lo que se denota por  $x \in X$ , se definen las operaciones de unión e intersección en el Cuadro 3.1 como

Cuadro 3.1: Operaciones básicas con conjuntos difusos

Descripción	Operación	Definición
Unión	$A \cup B$	$f_{A \cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$
Intersección	$A \cap B$	$f_{A \cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$
Complementación	$A^c$	$f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$

En ocasiones, en vez de escribir  $\max\{f_A(x), f_B(x)\}$ , se utilizará  $f_A(x) \vee f_B(x)$  para representar el resultado de la unión de dos conjuntos difusos, de manera similar, se representará

el resultado de la intersección de dos conjuntos difusos como  $f_A(x) \wedge f_B(x)$ . Además, las operaciones de unión, intersección y complementación representan, respectivamente, las operaciones lógicas difusas OR, AND y NOT. La unión de los conjuntos difusos  $A$  y  $B$  se puede interpretar como el conjunto difuso más pequeño que contiene a ambos conjuntos. De manera similar, la intersección de los conjuntos difusos  $A$  y  $B$  se puede interpretar como el conjunto difuso más grande el cual está contenido en ambos conjuntos. En la Fig. 3.1, esquemáticamente, se presentan estas operaciones de la teoría de conjuntos difusos. A diferencia del caso convencional en donde para un conjunto  $A$ , siendo  $A^c$  su complemento, se tienen las igualdades

$$A \cap A^c = \emptyset \quad ; \quad A \cup A^c = X, \quad (3.8)$$

en el caso de los conjuntos difusos estas condiciones no se cumplen ya que para un conjunto difuso  $A$  se tiene

$$A \cap A^c \neq \emptyset \quad \text{ya que } f_{A \cap A^c}(x) = \min\{f_A(x), 1 - f_A(x)\} \neq 0, \quad (3.9)$$

$$A \cup A^c \neq X \quad \text{ya que } f_{A \cup A^c}(x) = \max\{f_A(x), 1 - f_A(x)\} \neq 1 \quad (3.10)$$

por ejemplo, si  $f_A(x) = 1/2$  para alguna  $x$ , entonces

$$f_{A \cap A^c}(x) = \min\{1/2, 1 - 1/2\} = 1/2 \neq 0, \quad (3.11)$$

$$f_{A \cup A^c}(x) = \max\{1/2, 1 - 1/2\} = 1/2 \neq 1, \quad (3.12)$$

como se puede observar, comparando el resultado de la Ecs. (3.11)-(3.12) con la Ec. (3.8), el resultado obtenido con las operaciones de unión e intersección difusas difiere del resultado clásico. Al igual que en el caso convencional, las operaciones de unión e intersección en el ámbito difuso cumple ciertos requerimientos los cuales se presentan en el Cuadro 3.2. Además

Cuadro 3.2: Operaciones principales de unión e intersección con conjuntos difusos

Unión	Intersección
$A \cup X = X$	$A \cap X = A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$\emptyset \cup X = X$	$X \cap X = X$
$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$	$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

de estas condiciones, las operaciones de unión e intersección difusas cumplen algunos axiomas

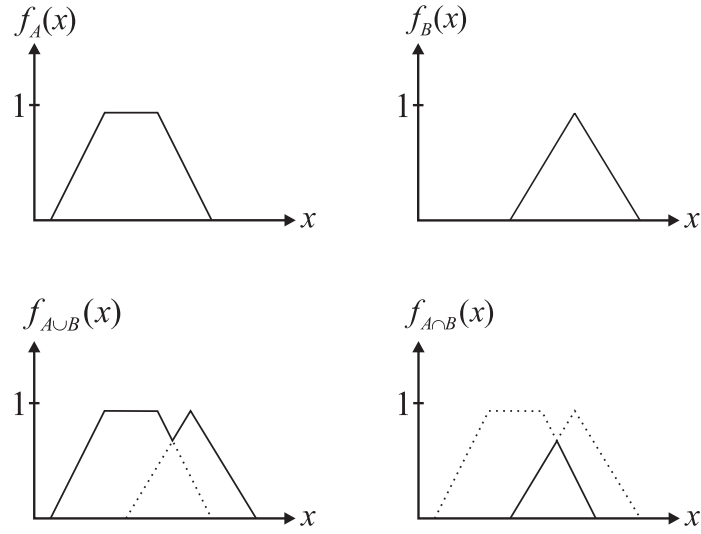


Figura 3.1: 1ra. hilera, representación de dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$  por sus funciones de membresía,  $f_A$  y  $f_B$ ; 2da. hilera, izq., representación de la unión de dos conjuntos difusos; der., representación de la intersección de dos conjuntos difusos.

fundamentales que se presentan a continuación. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres conjuntos difusos que se encuentran en el conjunto universal  $X$ , para estos conjuntos se cumplen los siguientes axiomas:

- Las operaciones de unión e intersección son *conmutativas*,

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cap B = B \cap A. \quad (3.13)$$

- Las operaciones de unión e intersección son *asociativas*,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad ; \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \quad (3.14)$$

- Si el conjunto difuso  $A$  es subconjunto de  $A'$ , o bien  $A \subset A'$  y además, si  $B$  es subconjunto de  $B'$ , representado por  $B \subset B'$ , entonces las operaciones de unión e intersección son *monótonas*, i.e.,

$$A \subset A', \quad B \subset B' \Rightarrow A \cup B \subset A' \cup B', \quad (3.15)$$

$$A \subset A', \quad B \subset B' \Rightarrow A \cap B \subset A' \cap B'. \quad (3.16)$$



- Las operaciones de unión e intersección cumplen las *leyes De Morgan*,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad ; \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (3.17)$$

Por ejemplo, en términos de las funciones de membresía de  $A$  y  $B$  las relaciones de De Morgan se expresan así

$$1 - [f_A(x) \vee f_B(x)] = [1 - f_A(x)] \wedge [1 - f_B(x)], \quad (3.18)$$

$$1 - [f_A(x) \wedge f_B(x)] = [1 - f_A(x)] \vee [1 - f_B(x)]. \quad (3.19)$$

En el Cuadro 3.3 se presentan las operaciones aritmeticas entre conjuntos difusos, las cuales también están basadas en las funciones máximo y mínimo, y son el producto, la adición y la diferencia [8].

Cuadro 3.3: Operaciones algebraicas con conjuntos difusos

Descripción	Operación	Definición
Adición	$A + B$	$f_{A+B}(x) = \text{mín}\{f_A(x) + f_B(x), 1\}$
Producto	$AB$	$f_{AB}(x) = f_A(x)f_B(x)$
Diferencia	$A \setminus B$	$f_{A \setminus B}(x) = \text{máx}\{f_A(x) - f_B(x), 0\}$

En la adición del Cuadro 3.3 se utiliza la función mínimo para acotar el valor máximo que se puede obtener de la suma de  $f_A$  y  $f_B$  ya que el resultado de esta suma puede ser mayor a uno, es por ello que este resultado se compara contra uno. De manera similar, ya que la diferencia entre  $f_A$  y  $f_B$  puede ser menor a cero, se utiliza la función máximo para acotar el valor mínimo a cero.

Dos operadores que generalizan el concepto de conjunto difuso y que se aplican siguiendo el principio de dualidad a los valores correspondientes de las funciones de membresía de los conjuntos involucrados son las normas y conormas triangulares. Las *normas triangulares* o *normas-T*, y las *conormas triangulares* o *conorma-S* se definen como funciones de dos argumentos pertenecientes al intervalo  $I$  a un número también en  $I$ , y que satisfacen un cierto grupo de propiedades. Si  $I = [0, 1]$ , una *norma triangular* y una *conorma triangular* se definen respectivamente como

$$T : I \times I \rightarrow I \quad ; \quad S : I \times I \rightarrow I. \quad (3.20)$$

Sean  $a, b, c, u, v \in I = [0, 1]$ , entonces las normas y conormas triangulares cumplen con los siguientes axiomas:

1. Condiciones de frontera

$$\forall a \in I, \quad T(a, 1) = a,$$

$$\forall a \in I, \quad S(a, a) \geq a, \quad \text{y } S(a, 0) = a, S(a, 1) = 1.$$

2. Monotonía

$$T(a, b) \leq T(u, v) \quad \text{y } S(a, b) \leq S(u, v) \quad \text{siempre que } a \leq u, b \leq v.$$

3. Conmutatividad

$$T(a, b) = T(b, a) \quad \text{y } S(a, b) = S(b, a).$$

4. Asociatividad

$$T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)) \quad \text{y } S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c)).$$

5. Equivalencia

$$\forall a, b \in I \quad S(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$$

Usando estos operadores, la *intersección y unión generalizadas* de dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$  con funciones de membresía  $f_A$  y  $f_B$  respectivamente, se definen así  $\forall x \in X$ ,

$$(A \cap B)_g = T(f_A(x), f_B(x)) \quad \text{y } (A \cup B)_g = S(f_A(x), f_B(x)). \quad (3.21)$$

Cuando no haya lugar a confusión se usará la notación común de  $A \cap B$  y  $A \cup B$  en vez de  $(A \cap B)_g$  y  $(A \cup B)_g$ . En base a los axiomas 1-5, es posible definir distintos pares de normas-conormas. Algunas de las normas y conormas triangulares más comunes correspondientes a la familia de operadores- $s$  introducida por M. J. Frank [14] se presentan en el Cuadro 3.4.

Cuadro 3.4: Normas y conormas triangulares típicas

<b>Norma</b>	<b>Conorma</b>
$T_0(x, y) = \min(x, y)$	$S_0(x, y) = \max(x, y)$
$T_1(x, y) = xy$	$S_1(x, y) = x + y - xy$
$T_\infty(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$	$S_\infty(x, y) = \min(x + y, 1)$

Como se puede observar, del Cuadro. (3.1) y de la Ec. (3.21), se pueden definir las operaciones de unión e intersección utilizando la norma  $T_0$  y la conorma  $S_0$  ya que estos

operadores representan la función mínimo y máximo respectivamente. Las normas y conormas de la familia de operadores- $s$ , denotadas como  $T_s$  y  $S_s$  respectivamente, cumplen los siguientes axiomas donde el tercero se satisface únicamente para  $T_0$  y  $S_0$  (ver demostración de algunos de estos axiomas en el Apéndice A).

1.  $T_s$  y  $S_s$  son conmutativas.
2.  $T_s$  y  $S_s$  son asociativas.
3.  $T_0$  y  $S_0$  son mutuamente distributivas.
4. Condiciones de frontera:  $T_s(1, 1) = 1$  y  $S_s(0, 0) = 0$ .
5.  $T_s$  y  $S_s$  son funciones continuas en  $I \times I$ .
6.  $T_s$  y  $S_s$  son crecientes en ambos argumentos, i.e.,  
 $T_s(x, x) < T_s(y, y)$  y  $S_s(x, x) < S_s(y, y) \Leftrightarrow x < y$ .

### 3.3. Funciones de membresía

Una característica importante de la teoría de conjuntos difusos es que es posible medir el *grado de difusividad* de los conjuntos que se están tratando. Para ello, normalmente se utiliza la *relación de nitidez* (*sharpness*) la cual mide la cantidad de difusividad de un conjunto. Comúnmente, esta cantidad es representada por la relación  $\leq_{nt}$  y se aplica a la familia de todos los conjuntos difusos  $\mathcal{F}(X)$ . Para dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$ , la relación  $A \leq_{nt} B$  significa que el conjunto  $A$  es menos o tan difuso que el conjunto  $B$ . Esta medida de difusividad fue propuesta por De Luca-Termini [7] y está definida  $\forall x \in X$ , como

$$A \leq_{nt} B = \begin{cases} f_A(x) \leq f_B(x), & \text{si } f_B(x) \leq \frac{1}{2} \\ f_A(x) \geq f_B(x), & \text{si } f_B(x) > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.22)$$

En base a esta definición se define el *grado o medida de difusividad* que se representa por el mapeo de la familia de los conjuntos difusos a los números reales, i.e.,

$$\varphi : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.23)$$

el cual queda definido completamente por los axiomas siguientes:

1.  $\varphi$  es una función *isótona* respecto del orden  $\leq_{nt}$ , lo cual significa que si el conjunto  $A$  es menos o tan difuso que el conjunto  $B$ , entonces los conjuntos difusos  $\varphi(A)$  y  $\varphi(B)$  satisfacen que  $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ .
2. Si  $\varphi(A) = 0$ , entonces  $A$  es un *conjunto convencional*.
3.  $\varphi$  alcanza su máximo valor para  $A$  si y sólo si  $A$  es *maximalmente difuso* lo que ocurre si  $f_A(x) = \frac{1}{2} \forall x \in X$ .

### 3.4. Marco conceptual de procesamiento difuso

La herramienta matemática de la teoría de los conjuntos difusos ofrece un punto de vista complementario que es útil para el desarrollo de técnicas alternativas del procesamiento digital de imágenes. Las herramientas basadas en conjuntos difusos son por naturaleza no lineales y están dirigidas al procesamiento y análisis de imágenes cuando estas se reinterpretan en términos de vaguedad e incertidumbre. En el ámbito del *procesamiento de imágenes difuso* (FIP, *Fuzzy Image Processing*), una imagen en niveles de gris  $A$  de tamaño  $M \times N$  pixeles con  $L$  niveles de gris, se puede definir como un arreglo de conjuntos difusos unitarios, lo cual significa que cada pixel es considerado como un conjunto difuso. En esta correspondencia, cada conjunto difuso unitario representa el grado de pertenencia que tiene cada pixel respecto de alguna característica predefinida de la imagen [19]. Esta asociación de conjuntos difusos unitarios con los pixeles de la imagen modela a la imagen en el contexto difuso y se describe matemáticamente como la unión del grado de membresía de todos sus pixeles, esto es

$$A = \bigcup_{m=1}^M \bigcup_{n=1}^N \frac{\mu_{mn}}{g_{mn}} \quad \text{con} \quad \mu_{mn} \in [0, 1], \quad (3.24)$$

en donde el símbolo  $\frac{\mu_{mn}}{g_{mn}}$  representa la membresía  $\mu_{mn}$  del pixel  $mn$  con nivel de gris  $g_{mn}$ . La función de membresía,  $\mu(m, n) = \mu_{mn}$  se asocia con la propiedad deseada de la imagen. El procesamiento de imágenes difuso consiste básicamente en tres etapas [19]. En primer lugar, se realiza la transformación de *fusificación* (fuzzify) denotada por  $\Phi$ , en la cual se pasa del espacio de los pixeles al espacio de membresía, de modo que a cada pixel se le asigna un conjunto difuso unitario. Enseguida, una vez que se ha pasado al espacio de membresía, se aplican una o más operaciones representadas por  $\Gamma$  a los valores de membresía. Finalmente,

en caso de ser necesario, se efectúa el proceso de *defusificación* (defuzzify), en el cual se regresa del espacio de membresía al espacio de los pixeles, transformación representada por  $\Psi$ . Específicamente, si la entrada es la imagen  $A$ , la imagen de salida  $B$  bajo un proceso difuso está dada por

$$B = \Psi(\Gamma(\Phi(A))). \quad (3.25)$$

Es importante recalcar que los datos de entrada son procesados en el espacio de membresía en el cual se pueden utilizar una gran cantidad de herramientas difusas para modificar los valores de membresía y los nuevos valores de membresía se mapean correspondientemente al espacio de los pixeles. Un esquema del procesamiento de imágenes difuso se muestra en la Fig. 3.2.

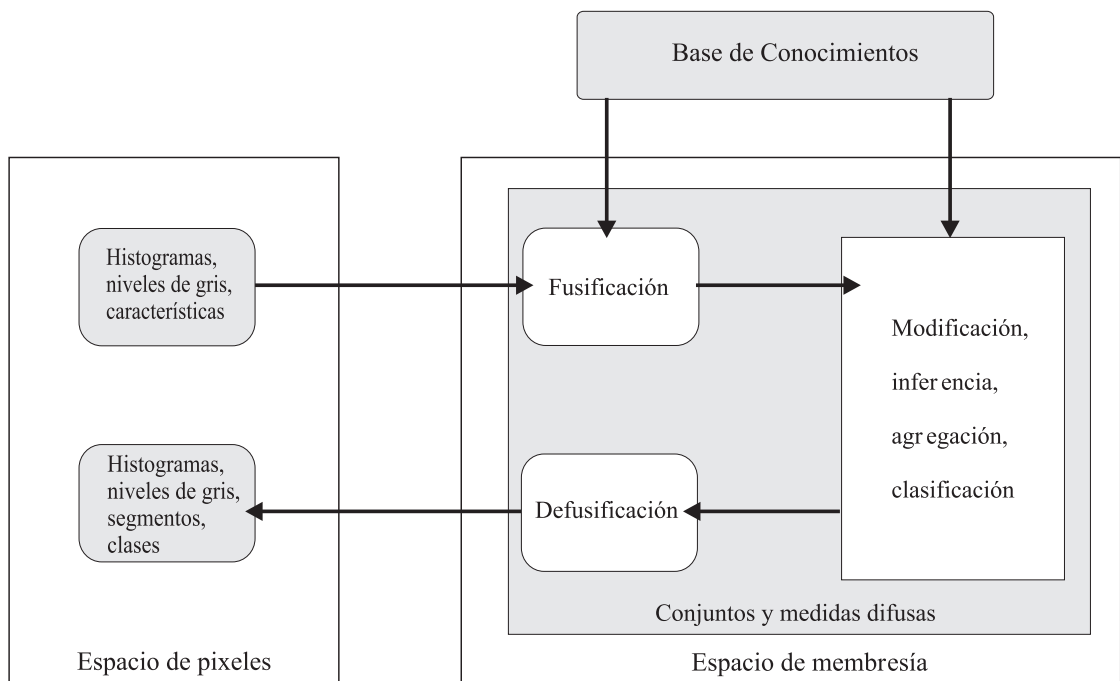


Figura 3.2: marco teórico del procesamiento de imágenes difuso.

Como se observa en esta figura, en el espacio de membresía se llevan a cabo las operaciones de *modificación, inferencia, agregación y clasificación* [19]. La operación de modificación consiste en cambiar directamente los valores de membresía, con lo cual se cambian las características de la imagen de entrada. Asimismo, en la etapa de inferencia, se utilizan decisiones condicionadas para cambiar los valores de membresía asignados a la imagen. En la

operación de agregación se suman niveles de membresía asignados a la imagen para generar nuevos valores de membresía. Finalmente, la clasificación consiste en seleccionar los pixeles a los que se les debe cambiar la función de membresía asociada. Por último, una vez que han sido cambiados los valores de membresía, en algunos casos, se necesita regresar al espacio de los pixeles ya que las operaciones mencionadas en el espacio de membresía siempre generan resultados en el intervalo  $I = [0, 1]$ .

Un concepto que se mencionó anteriormente y que es de gran utilidad en el procesamiento de imágenes difuso es el grado de difusividad de una imagen. Para medir la difusividad de un conjunto difuso, A. Kaufmann [18] introdujo el índice de difusividad. Específicamente, para un conjunto difuso  $A \subset X$ , el *índice de difusividad* está dado por

$$\gamma(A) = \frac{2}{n^k} d(A, A^*), \quad (3.26)$$

donde  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  es una métrica en  $X$ ,  $n$  representa el número de elementos del conjunto  $A$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$  y  $A^*$  es el conjunto nítido más cercano al conjunto difuso  $A$ . Utilizando la  $q$ -norma de Minkowski<sup>1</sup> como una métrica y utilizando el operador mínimo como norma triangular se define el *índice de difusividad lineal* ( $q = 1$ ), para una imagen  $A$  de tamaño  $M \times N$  con nivel de gris  $g \in [0, L - 1]$  y con histograma  $h(g)$ , como [18]

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \frac{2}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g) \min[\mu_A(g), \mu_{A^c}(g)] \\ &= \frac{2}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g) \min[\mu_A(g), 1 - \mu_A(g)]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

El factor  $2/MN$  frente a la sumatoria en la Ec. (3.27), es una constante de normalización referida a difusividad maximal. Considerando la información espacial de la imagen, la Ec. (3.27) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \frac{2}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \min[\mu_A(g_{ij}), \mu_{A^c}(g_{ij})] \\ &= \frac{2}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \min[\mu_A(g_{ij}), 1 - \mu_A(g_{ij})]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

---

<sup>1</sup>Dado un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , la  $q$ -norma de Minkowski es el número  $\|\mathbf{x}\|_q = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n |x_i|^q}$

Otra medida de la difusividad de una imagen está dada por el *índice de difusividad cuadrático* ( $q = 2$ ), esto es

$$\begin{aligned}\gamma_c(A) &= \frac{2}{\sqrt{MN}} \sqrt{\sum_{g=0}^{L-1} [h(g) \min[\mu_A(g), \bar{\mu}_A(g)]^2]} \\ &= \frac{2}{\sqrt{MN}} \sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \min[\mu_A(g_{ij}), \mu_{A^c}(g_{ij})]^2}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

En la siguiente sección se presentan algunos procedimientos para ejemplificar el procesamiento de imágenes difuso. Se presentan dos ejemplos en los cuales se modifica el contraste de imágenes. En cada uno de éstos, se describen las técnicas de mejoramiento clásica y aquellas en donde se aplica la teoría de conjuntos difusos. En primer lugar, se presenta el uso de transformaciones puntuales para el mejoramiento del contraste. Se muestra la técnica de corrección gamma y la minimización de la difusividad que corresponde al procesamiento difuso. En segundo lugar, se hace uso del histograma para mejorar la apariencia visual de las imágenes. Se describen las técnicas convencionales de igualación y especificación del histograma y se presenta el mejoramiento difuso- $\lambda$ .

## 3.5. Mejoramiento del contraste en imágenes

### 3.5.1. Uso de transformaciones puntuales

#### Corrección-gamma

La parte del mejoramiento de imágenes se basa en el cambio de los tonos de gris de la imagen a través de un mapeo o por medio de una función de transformación, con lo cual se mejora la apariencia visual de la imagen [12, 28]. La *corrección gamma* es una de las técnicas más utilizadas y en esta se generan nuevos niveles de gris elevando los niveles de gris de la imagen original a cierta potencia determinada. Entonces, los nuevos niveles de gris  $g'$  se generan a partir de la transformación

$$g' = T(g) = cg^\gamma, \quad (3.30)$$

donde  $c$  es una constante de escalamiento y  $\gamma$  es la potencia a la cual se elevan los niveles de gris, estas dos constantes son valores positivos.

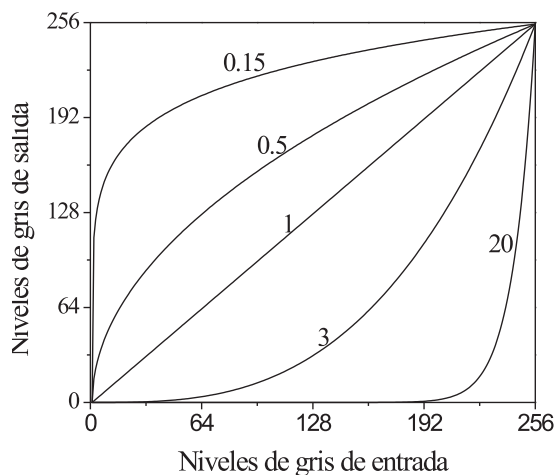


Figura 3.3: gráficas de la corrección-gamma con  $c = 1$  y  $\gamma = 0.15, 0.5, 1, 3, 20$ . Se muestra el valor de gamma utilizado sobre cada gráfica.

En la Fig. 3.3 se muestran algunas gráficas de  $T(g)$  para algunos valores de  $\gamma$ . Como se puede notar de esta figura para los valores de gamma menores que la unidad, el mapeo transformará la imagen original en una imagen más clara ya que un intervalo amplio de niveles de gris oscuros se mapean como niveles de gris más claros. El caso contrario ocurre para valores de gamma mayores que la unidad, lo que resultará en imágenes más oscuras que la imagen original ya que para estos valores, muchos de los niveles de gris más claros son mapeados a niveles de gris más oscuros.

### Minimización de la difusividad

En forma parecida a la corrección-gamma, desde el punto de vista del procesamiento difuso, la técnica de *minimización de la difusividad* está enfocada a mejorar el contraste y el brillo de una imagen, lo cual se logra reduciendo la cantidad de difusividad de una imagen. En una primera etapa los niveles de gris se fusifican mediante la función de membresía  $\mu(g)$



que representa el grado de brillantez de la imagen, la cual se define como

$$\mu(g) = \left[ 1 + \frac{g_{\text{máx}} - g}{F_d} \right]^{-F_e}, \quad (3.31)$$

en donde  $F_d$  y  $F_e$  son factores fusificadores que controlan la cantidad de ambigüedad de gris de los pixeles en la imagen original (ver el cálculo de estos valores en el Apéndice A). El siguiente paso es la modificación de la membresía asociada a cada pixel utilizando el *operador de intensificación* de Zadeh [19] que se define como

$$\mu'(g) = \begin{cases} 2[\mu(g)]^2 & \text{si } 0 \leq \mu(g) \leq 0.5, \\ 1 - 2[1 - \mu(g)]^2 & \text{si } 0.5 < \mu(g) \leq 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

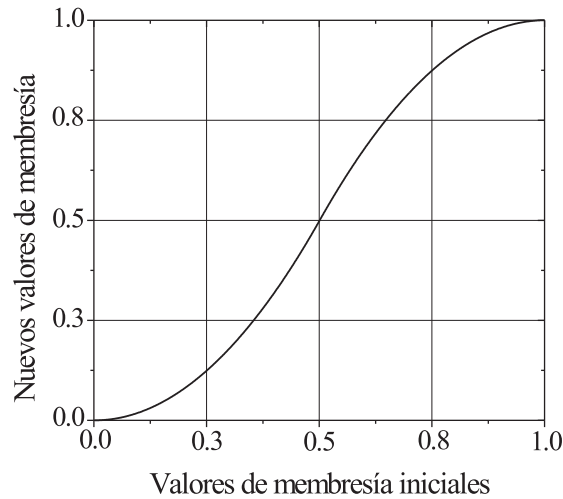


Figura 3.4: operador de intensificación de Zadeh.

En la Fig. 3.4 se muestra la gráfica de este operador de intensificación. Como se puede observar, a los valores que son menores al punto central se les asigna un valor menor que su valor inicial, de la misma manera, a los valores que son mayores al punto central se les asigna un valor mayor que su valor inicial, en otras palabras, un pixel que tiene nivel de gris debajo del nivel de gris central ( $g = 127$ ) se hará más oscuro mientras que un pixel que tenga

nivel de gris mayor al nivel de gris central se hará más claro. Finalmente, una vez aplicado el operador de intensificación de Zadeh se obtienen nuevos niveles de gris con la transformación

$$g' = T(g) = \begin{cases} g_{\text{máx}} - F_d \left[ \mu'(g)^{\frac{-1}{F_e}} - 1 \right] \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{g_{\text{máx}}}{F_d} \right)^{-F_e} \leq \mu'(g) \leq 1 \\ g \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (3.33)$$

En forma resumida, el algoritmo de minimización de la difusividad consiste de los siguientes pasos:

**MD1** - Mapear los niveles de gris al plano de membresía utilizando la función de membresía de la Ec. (3.31), siendo los valores típicos de  $F_e = 1$  o  $F_e = 2$  a partir de los cuales se determina  $F_d$ .

**MD2** - Modificar los niveles de membresía obtenidos en el paso anterior utilizando el intensificador de Zadeh definido en la Ec. (3.32).

**MD3** - Una vez modificada la imagen en el plano de membresía se regresa al plano de los pixeles utilizando la Ec. (3.33).

En la Fig. 3.5 se muestran los resultados de aplicar esta técnica después de varias iteraciones y como puede apreciarse, las imágenes resultantes tienen mayor contraste y menor difusividad. Además, en el Cuadro 3.5 se presentan valores del nivel de gris central de las imágenes, el factor fusificador  $F_d$  y el índice de difusividad lineal correspondiente a cada imagen presentada en la Fig. 3.5 considerando el factor fusificador  $F_e = 1$ . Por otro lado, en el Apéndice B se muestra una implementación de este método.

Cuadro 3.5: Valores de: nivel de gris central =  $g_c$ ,  $F_d$ ,  $\gamma_l$  correspondientes a la Fig.3.5

<b>Imagen</b>	$g_c$	$F_d$	$\gamma_l$
1ra. hilera; izq.	39	216.26	0.967
1ra. hilera; centro.	47	208.23	0.902
1ra. hilera; der.	57	197.71	0.848
2da. hilera; izq.	128	126.73	0.950
2da. hilera; centro.	122	133.07	0.816
2da. hilera; der.	113	141.86	0.685



Figura 3.5: mejoramiento de imágenes mediante minimización de la difusividad. Izq., imagen original; al centro, resultado después de dos iteraciones; der., resultado después de tres iteraciones. 1ra. hilera, imágenes de semillas de trigo de tamaño  $221 \times 221$  píxeles. 2da. hilera, imágenes de paseo en bote de tamaño  $256 \times 256$  píxeles.

### 3.5.2. Uso del histograma

#### Igualación y especificación del histograma

Las técnicas de *igualación* (equalization) y la *especificación* (matching) del histograma convencionales modifican el histograma de una imagen para mejorar su apariencia visual [12, 28]. El histograma de una imagen representa la ocurrencia de los niveles de gris que al ser normalizado se puede interpretar como una distribución de las probabilidades de ocurrencia para los diferentes niveles de gris. Como es usual, el nivel de gris  $f(x, y)$  de un pixel  $(x, y)$  se denota por  $g$ . Para una imagen  $A$  con  $L$  niveles de gris, en donde  $g_k$  representa el  $k$ -ésimo nivel de gris, el *histograma* de una imagen se define como

$$h(g_k) = n_k, \quad k = 0, \dots, L - 1, \quad (3.34)$$

donde  $n_k$  representa el número de píxeles en la imagen que tienen nivel de gris  $g_k$ . La función discreta  $h(g_k)$ , asocia cada nivel de gris  $g_k$ , el número de píxeles en la imagen que tienen ese nivel de gris. El *histograma normalizado*, se obtiene dividiendo el histograma de la Ec. (3.34) entre la cantidad total de píxeles de la imagen, si está última es de tamaño  $M \times N$  se tiene

$$h(g_k) = \frac{n_k}{MN}. \quad (3.35)$$

Algunas imágenes presentan histogramas concentrados hacia alguna mitad del intervalo de niveles de gris, lo que resulta en imágenes mal contrastadas, lo que se interpreta como imágenes muy claras o muy oscuras. Un ejemplo de esta situación se observa en la Fig. 3.6. Para resolver este problema, se utiliza la técnica de igualación del histograma, en la cual se

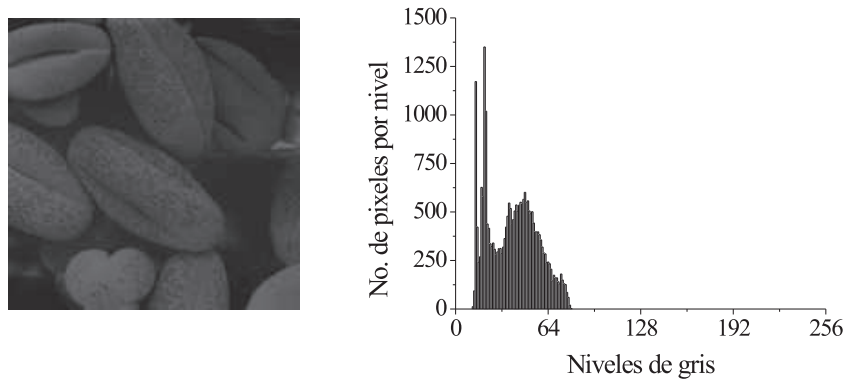


Figura 3.6: der., histograma de la imagen a la izq., la concentración hacia la izquierda del histograma resulta en una imagen oscura.

intenta expandirlo a lo largo de todo el intervalo de niveles de gris. Para ello, se genera una distribución uniforme de niveles de gris partiendo de la imagen original. Los nuevos niveles de gris se obtienen a través de la función de *distribución de probabilidad acumulada* definida como

$$g'_k = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{MN}, \quad k = 0, \dots, L - 1, \quad (3.36)$$

el siguiente paso consiste en mapear cada nivel de gris  $g_k$  de la imagen original con el correspondiente nivel  $g'_k$ . La Fig. 3.7 presenta la distribución acumulada correspondiente a la imagen de la Fig. 3.6 y el resultado de la igualación del histograma se presenta en la Fig. 3.8.

Como se puede notar, el histograma está más ensanchado que el histograma de la Fig. 3.6, con lo que la imagen tiene mejor contraste y se distingue más clara.

En algunas ocasiones la aplicación de la igualación del histograma no proporciona los resultados esperados. Este problema surge cuando además de un histograma concentrado hacia algún lado del intervalo de grises, la concentración de píxeles con cierto nivel de gris resulta mucho mayor en comparación con otros niveles. Una solución a este problema se obtiene utilizando la técnica de *especificación del histograma*, en donde, a partir del histograma original, se diseña un histograma que corrija la distribución de los niveles de gris. Cabe mencionar, que no existe regla estricta sobre el criterio de diseño del histograma deseado. A

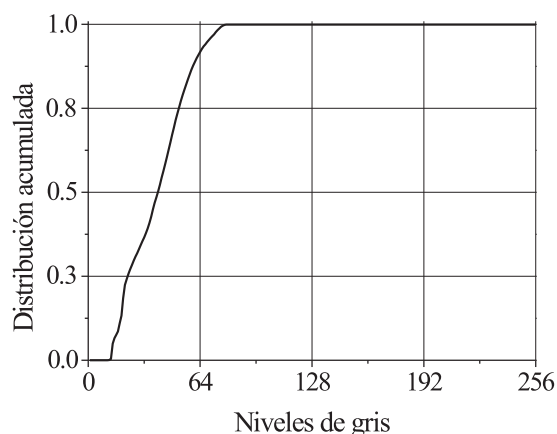


Figura 3.7: función de distribución acumulada para generar nuevos niveles de gris para la imagen de la Fig. 3.6.

partir del histograma diseñado, se cambia el valor de gris de los píxeles realizando un mapeo entre niveles de gris que corresponden al histograma original con los del histograma diseñado. El histograma diseñado y la imagen final se presentan en la Fig. 3.9. En este diseño se consideró utilizar funciones lineales para generar el histograma deseado con lo que se logró redistribuir los tonos de gris de la imagen obteniendo así un histograma mejor distribuido.

La escala del histograma de la figura original ha sido limitada para poder observar los píxeles correspondientes a los tonos más claros debido a que la diferencia entre tonos oscuros y claros en la escala original resulta casi imperceptible.

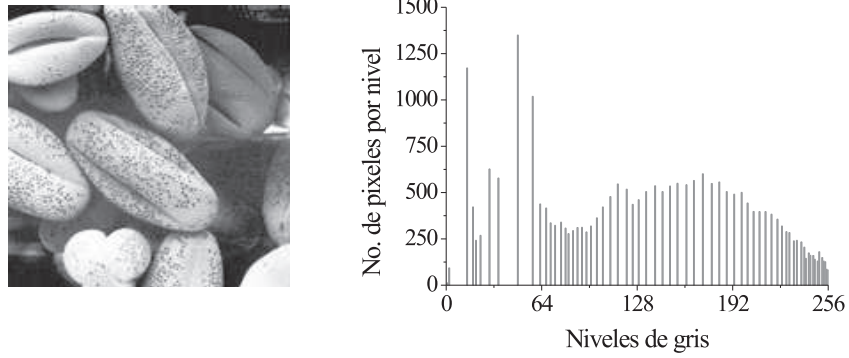


Figura 3.8: izq., resultado de la igualación del histograma para la imagen de la Fig. 3.6; der., histograma de la imagen mejorada con mejor distribución de los tonos de gris.

### Mejoramiento difuso- $\lambda$

La técnica de *mejoramiento difuso- $\lambda$*  es una técnica que optimiza la difusividad utilizando funciones de membresía *involutivas*, las cuales están basadas en complementos involutivos. Una función  $\mu_\lambda(g)$  es involutiva cuando cumple con

$$[\mu_{\lambda^c}(g)]^c = \mu_\lambda(g), \quad (3.37)$$

donde  $\mu_{\lambda^c}(g)$  representa el complemento de la función  $\mu_\lambda(g)$  y  $[\mu_{\lambda^c}(g)]^c$  representa el complemento de  $\mu_{\lambda^c}(g)$  que, en este caso, representa la función misma. Los complementos difusos involutivos fueron introducidos por Sugeno y están definidos como [35]

$$\mu_{\lambda^c}(g) = \frac{1 - \mu(g)}{1 + \lambda\mu(g)}. \quad (3.38)$$

Utilizando esta definición de complemento difuso involutivo se define una *función de membresía involutiva* como [19]

$$\mu_\lambda^*(g) = 1 - \mu_{\lambda^c}(g) = \frac{(1 + \lambda)\mu(g)}{1 + \lambda\mu(g)}. \quad (3.39)$$

En esta definición el valor de  $\lambda \in (-1, \infty)$ ; de esta cantidad  $\lambda$  dependerá el brillo de la imagen que se obtenga a través de la función de membresía involutiva. Cuando  $\lambda$  se aproxima a  $-1$  como resultado se tendrá una imagen completamente oscura, de manera similar, cuando  $\lambda$  tiende a  $\infty$  el resultado corresponderá a una imagen completamente blanca.

La técnica de mejoramiento difuso- $\lambda$  consiste en encontrar un valor óptimo de  $\lambda = \lambda_{\text{opt}}$  con el cual se generen nuevos valores de membresía que correspondan a una imagen mejorada. Para encontrar  $\lambda_{\text{opt}}$  es necesario resolver la ecuación  $\frac{d}{d\lambda}\gamma(\lambda) = 0$  respecto de  $\lambda$  y para ello es necesario modificar el índice de difusividad lineal. Utilizando el operador producto en vez del operador mínimo, el índice de difusividad lineal modificado queda así

$$\gamma(\lambda) = \frac{4}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g)\mu_{\lambda}^*(g)(1 - \mu_{\lambda}^*(g)), \quad (3.40)$$

y el factor de normalización  $4/MN$  frente a la sumatoria se debe al cambio del operador mínimo por el operador producto y está referido a difusividad maximal. La derivada de esta función se define como

$$\frac{d}{d\lambda}\gamma(\lambda) = \frac{4}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g) \frac{\mu(g) - \mu^2(g)(3 + \lambda) + \mu^3(g)(2 + \lambda)}{[1 + \lambda\mu(g)]^3}. \quad (3.41)$$

La deducción de la derivada en la Ec. (3.41) a partir de la Ec. (3.40) se presenta en el Apéndice A. En forma resumida, el algoritmo de mejoramiento difuso- $\lambda$ , basado en las Ecs. (3.40) y (3.41) consiste de los siguientes pasos:

**ML1** Calcular el histograma  $h(g)$  de la imagen de entrada  $A$  y su valor máximo  $m = \max g \in [0, L - 1]h(g)$ .

**ML2** Inicializar los valores de membresía  $\mu(g)$  mediante la siguiente función que depende de  $h(g)$ ,

$$\mu(g) = \begin{cases} \frac{h(g)}{m} \Leftrightarrow g = 0, \\ \frac{h(g)+h(g-1)}{m} \Leftrightarrow g > 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

**ML3** Calcular el índice de difusividad de la imagen  $A$  utilizando la Ec. (3.40).

**ML4** Obtener el valor óptimo de  $\lambda_{\text{opt}}$  resolviendo la ecuación  $\frac{d}{d\lambda}\gamma(\lambda_o) = 0$  para  $\lambda$ .

**ML5** Calcular los nuevos niveles de membresía usando  $\lambda_{\text{opt}}$  y la Ec. (3.42), i.e.,

$$\mu_n^*(g) = \frac{(1 + \lambda_o)\mu(g)}{1 + \lambda_o\mu(g)}. \quad (3.43)$$

**ML6** Generar los nuevos valores de gris con la transformación

$$g' = T(g) = (L - 1)\mu_n^*(g). \quad (3.44)$$

En la Fig. 3.10 se muestra el resultado de aplicar la técnica de mejoramiento difuso- $\lambda$  a la imagen mostrada en la primera hilera de la Fig. 3.9; el valor óptimo de  $\lambda$  fue  $\lambda_{opt} = 370.24$ , el cual se utilizó para generar los nuevos niveles de gris de la imagen. Aunque la imagen mostrada en esta figura resulta distinta de la imagen obtenida por especificación del histograma (ver Fig. 3.9), ambas imágenes tienen mayor contraste que la imagen original. Además, en la Fig. 3.11 se presenta la gráfica del índice de difusividad lineal, calculado a partir del histograma de dicha imagen.



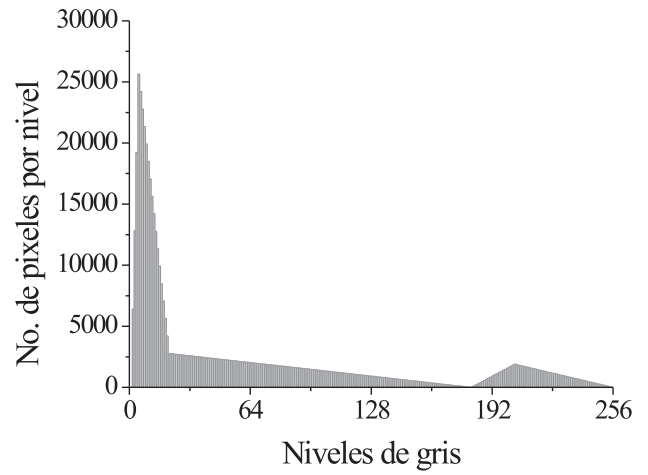
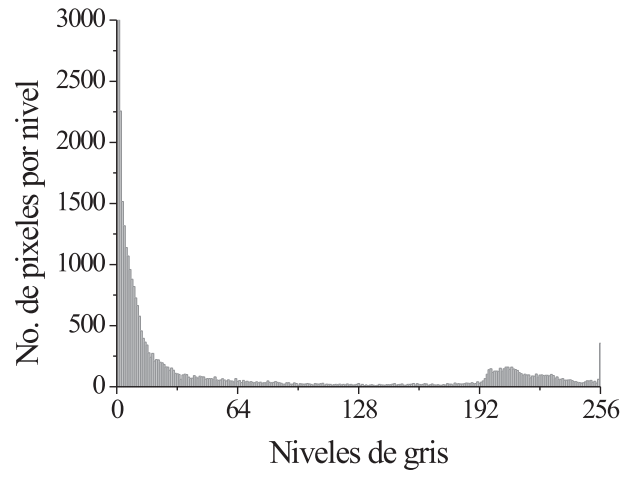


Figura 3.9: 1ra. hilera, izq., imagen original; der., histograma de esta imagen; 2da. hilera, izq., imagen resultante de la aplicación de la especificación del histograma; der., histograma especificado. Imagen de tamaño  $192 \times 279$  píxeles.

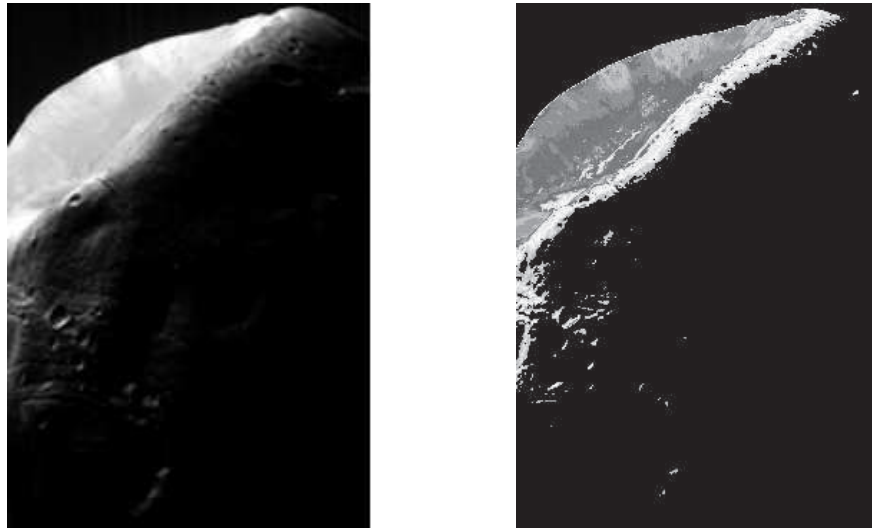


Figura 3.10: izq., imagen original; der., imagen obtenida después de ser procesada por mejoramiento difuso- $\lambda$ .

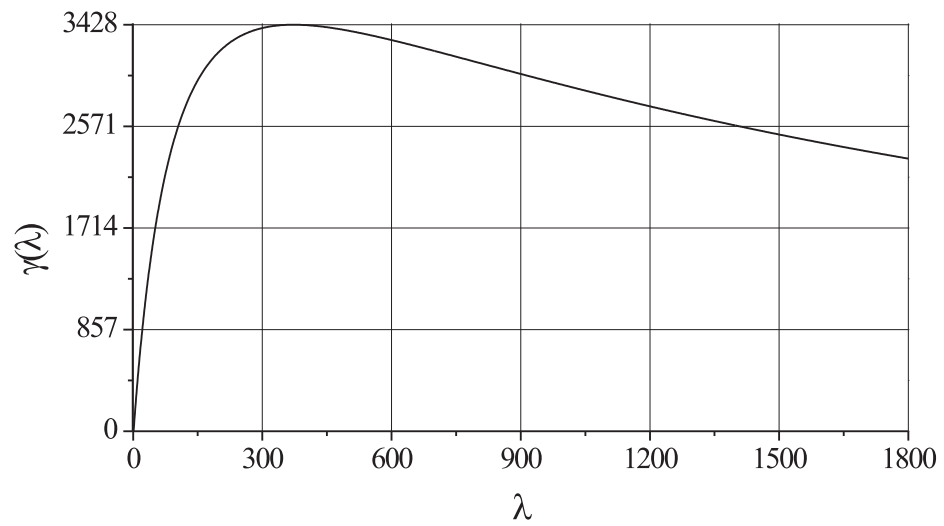


Figura 3.11: gráfica del índice de difusividad lineal vs.  $\lambda$ .

# Capítulo 4

## Técnicas Difusas para Detección de Bordes y Adelgazamientos

### 4.1. Detección de bordes

#### 4.1.1. Caracterización difusa de bordes

El proceso de detección de bordes consiste en hallar las regiones de una imagen en donde se presentan diferencias “significativas” de tonos de gris; a dichas regiones se les denomina bordes. No obstante, resulta indispensable establecer la *diferencia mínima o umbral* que se considera un borde. Sin embargo, es difícil definir un criterio general, pues para diferentes imágenes se necesitan diferentes valores de umbral, lo que genera cierta vaguedad en la elección de estos valores. Una manera alternativa de manejar la detección de bordes es mediante la *caracterización difusa de bordes*, en la cual se define una función de membresía que expresa la pertenencia de cada pixel con los bordes de la imagen (*edginess*). De esta manera se evita la elección de valores de umbral en este procedimiento. De aquí en adelante, simplemente se llamará a este procedimiento como caracterización de bordes. Sea  $g_i$  con  $i = 0, \dots, 8$  el nivel de gris correspondiente al pixel  $p_i$  de la vecindad mostrada en la Fig. 4.1. La función de membresía de borde  $\mu_e$  asignada al pixel central  $p_0$  está dada por [15]

$$\mu_e(g_0) = 1 - \left[ 1 + \frac{1}{\Delta} \sum_{i=0}^8 |g_0 - g_i| \right]^{-1} \quad \text{con} \quad \Delta = \max_{0 \leq i \leq 8} \{g_i\}. \quad (4.1)$$

$p_1$	$p_2$	$p_3$
$p_8$	$p_0$	$p_4$
$p_7$	$p_6$	$p_5$

Figura 4.1: ventana de referencia para la caracterización de bordes; los pixeles  $p_1, \dots, p_9$  están acomodados en el sentido de las manecillas del reloj.

El factor de  $1/\Delta$  delante de la sumatoria de la Ec. (4.1) se utiliza para normalizar la función de membresía respecto al máximo valor de la vecindad. Como es de esperarse, esta función de membresía es cero para aquellos pixeles que se hallan dentro de regiones homogéneas y valores mayores que cero para pixeles que no se encuentran en dichas regiones. La gráfica de  $\mu_e(g_0)$  con  $g_0 \in [0, 255]$ , para algunos casos típicos de bordes en una imagen, como los presentados en la Fig. 4.2, se muestra en la Fig. 4.3. En particular, se tiene el mismo resultado para bordes en dirección vertical u horizontal.

0	0	0
0	$p_0$	128
128	128	128

0	0	0
128	$p_0$	128
128	128	128

0	128	128
0	$p_0$	128
0	128	128

Figura 4.2: bordes comúnmente detectados; izq., borde diagonal; al centro, borde horizontal., der., borde vertical.

En la Fig. 4.4 se ejemplifica la aplicación de  $\mu_e$  en distintas regiones. En la parte superior de esta figura, la función de membresía asigna valor de pertenencia cero, pues la región es homogénea. En la parte inferior de esta misma figura, se muestra la aplicación de  $\mu_e$  en una región heterogénea. El máximo valor asignado por  $\mu_e$  es 0.899 y ocurre cuando se tiene un pixel central con nivel de gris distinto de cero mientras que sus vecinos son todos cero, de modo que el resultado de la sumatoria de la Ec. (4.1), multiplicada por el máximo valor de la vecindad es siempre 8 para cualquier tono de gris, e.g., para la zona heterogénea de la

Fig. 4.4 el valor máximo dentro de la vecindad y todas las diferencias que se realizan en la sumatoria de la Ec. (4.1) son 255, esto resulta en la asignación  $\mu_e = 1 - 1/9 = 0.889$ .

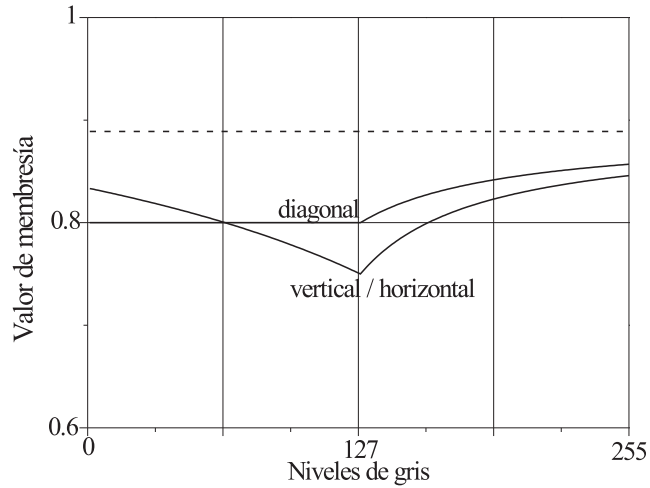


Figura 4.3: función de membresía de algunos bordes típicos. La línea punteada representa el máximo valor de membresía asignado.

Dos transformaciones en el plano de membresía comúnmente utilizadas para modificar el nivel de pertenencia se realizan mediante las operaciones de *concentración* y de *dilatación* definidas respectivamente como

$$\mu_c(g) = \mu^2(g), \quad \mu_d(g) = \sqrt{\mu(g)}. \quad (4.2)$$

Estas operaciones se pueden utilizar para enfatizar los niveles de membresía que corresponden a los bordes de una imagen. En forma resumida, la aplicación de la caracterización de bordes consiste de los siguientes pasos:

- CB1** Calcular la membresía de borde  $\mu_e(g)$  para una imagen de entrada  $A$ .
- CB2** Generar nuevos niveles de membresía  $\mu'(g)$  mediante alguna operación en el plano de membresía (e.g., el intensificador de Zadeh (Ec. 3.32), las operaciones de concentración o de dilatación).

**CB3** Finalmente, se generan nuevos niveles de gris con la transformación

$$g' = T(g) = (L - 1)\mu'(g), \quad (4.3)$$

como es usual,  $L - 1$  representa el máximo valor de los tonos de gris  $g$  de la imagen de entrada  $A$ .

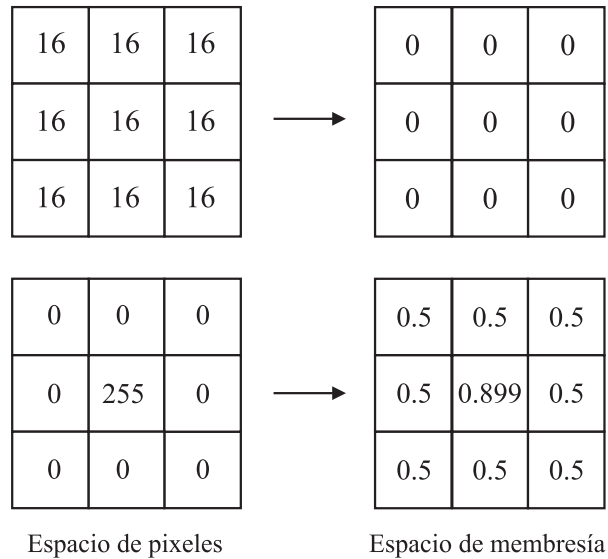


Figura 4.4: aplicación de caracterización de bordes sobre: 1ra. hilera, región homogénea de píxeles; 2da. hilera, píxel central aislado.

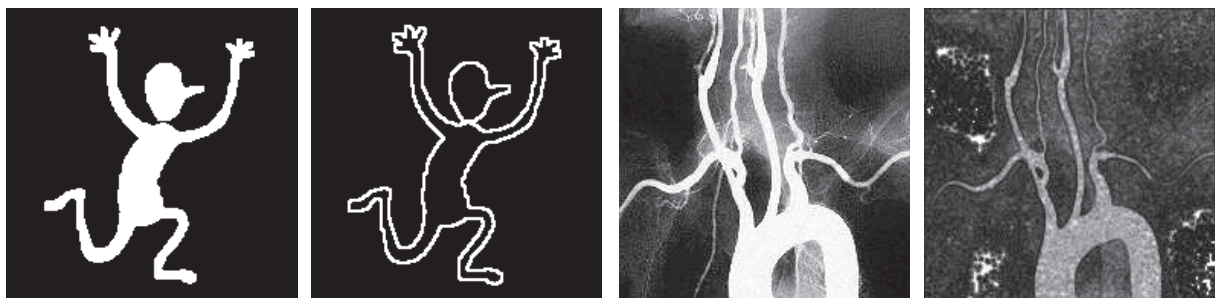


Figura 4.5: imágenes de izq. a der., original binaria, aplicación del intensificador de Zadeh, original en tonos de gris, aplicación del operador de dilatación.

El procedimiento anterior también puede ser utilizado para la detección de bordes de objetos en imágenes binarias; en cuyo caso, el paso 3 del procedimiento anterior, consistirá

en tomar los valores mayores a cero como uno en lugar de la transformación mencionada. En las Fig. 4.5 y 4.6 se muestra la caracterización de bordes para algunas imágenes aplicando el intensificador de Zadeh y los operadores de concentración y dilatación. En los Apéndices B y C se presentan, respectivamente, un ejemplo de implementación de la caracterización de bordes utilizando regiones de  $3 \times 3$  píxeles y algunos resultados distintos a los presentados en esta sección.



Figura 4.6: imágenes en tonos de gris; de izq. a der., imagen original, resultado del intensificador de Zadeh, resultado del operador de concentración. Ambas imágenes son de tamaño  $256 \times 256$  píxeles.

Es importante notar que la caracterización de bordes se puede realizar sobre ventanas mayores que  $3 \times 3$  píxeles. Por ejemplo, para una ventana de tamaño  $5 \times 5$ , como la mostrada en la Fig. 4.7 se redefine la función de membresía de borde  $\mu_e$  como

$$\mu_e(g_0) = 1 - \left[ 1 + \frac{1}{\Delta} \left( \sum_{i=0}^{16} |g_0 - g_i| \bmod (i, 2) + \sum_{i=17}^{24} |g_0 - g_i| \right) \right]^{-1}, \quad (4.4)$$

en donde,  $\bmod (i, 2)$  representa la función módulo<sup>1</sup> de  $i$  con 2. Como en la definición previa (ventana de tamaño  $3 \times 3$  píxeles),  $g_i$  con  $i = 0, \dots, 24$  corresponde al pixel  $p_i$ , de

<sup>1</sup>La función  $\bmod (x, y)$  da como resultado el residuo de dividir  $x$  entre  $y$ .

la Fig. 4.7, además,  $\Delta$  es el máximo valor dentro de la ventana considerando solamente los píxeles involucrados.

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$
$p_{16}$	$p_{17}$	$p_{18}$	$p_{19}$	$p_6$
$p_{15}$	$p_{24}$	$p_0$	$p_{20}$	$p_7$
$p_{14}$	$p_{23}$	$p_{22}$	$p_{21}$	$p_8$
$p_{13}$	$p_{12}$	$p_{11}$	$p_{10}$	$p_9$

Figura 4.7: ventana de  $5 \times 5$  para la caracterización de bordes; los píxeles  $p_2, p_4, \dots, p_{14}, p_{16}$  no son incluidos en la detección.

La diferencia al utilizar ventanas de tamaño más grande que  $3 \times 3$  píxeles resulta en la detección de bordes más gruesos. En la Fig. 4.8 se presenta la caracterización de bordes de las imágenes de prueba de las Figs. 4.5 y 4.6 utilizando una ventana de  $5 \times 5$  píxeles. Como se observa, algunos de los bordes obtenidos con esta ventana se distinguen con mayor facilidad que los obtenidos mediante una ventana de  $3 \times 3$  píxeles, a pesar de su grosor.

## 4.1.2. Detectores basados en reglas

### Método de Russo-Ramponi

El proceso de detección de bordes basado en reglas es un procedimiento que se encuentra clasificado como una técnica de *inferencia difusa*, pues utiliza un conjunto de decisiones condicionales que se basan en la lógica difusa para evaluar qué características de la imagen de entrada deben ser modificadas. Para tomar estas decisiones, se utiliza una base de conocimientos que relaciona los datos de entrada y de salida. En general, los métodos basados en reglas se componen de tres etapas. La fusificación, la inferencia difusa y la defusificación [15]. Las etapas de fusificación y defusificación se describieron en la Sección 3.2. En la etapa de inferencia difusa se toman decisiones basadas en las condiciones *sí-entonces difusas* (*fuzzy if-then rules*). Donde la premisa o antecedente de cada regla es la membresía de los datos de entrada obtenida a partir de una *función de membresía premisa*. Asimismo, el consecuente





Figura 4.8: caracterización de bordes utilizando una ventana de  $5 \times 5$  píxeles. En estas imágenes se aplicó el operador de concentración.

de cada regla es la pertenencia obtenida de una *función de membresía consecuyente*. Además de las reglas sí-entonces difusas (en adelante, se denominaran como reglas sí-entonces), algunos operadores lógicos son empleados en la toma de decisiones. Como se mencionó en la Sección 3.2, los operadores OR, AND y NOT difusos corresponden a las operaciones de unión, intersección y complementación difusas.

F. Russo y G. Ramponi [3] definen un conjunto de reglas para determinar los bordes de una imagen. Estas reglas se basan en el concepto de *intensidad de disparo* (*firing strength*)  $\alpha$  que sirve para enfatizar la pertenencia de un píxel con los bordes de la imagen. Dada la vecindad de la Fig. 4.9, sea  $g_i$  con  $i = 0, \dots, 8$  el nivel de gris correspondiente al píxel  $p_i$ . Recordando que  $L - 1 > 0$  es el máximo valor de intensidad, se define la diferencia  $\forall i$  como

$$d_i = g_0 - g_i. \quad (4.5)$$

Estas diferencias generan valores de gris en el intervalo  $[-(L - 1), L - 1]$ . En la Fig. 4.10 se muestra la función de membresía premisa que es utilizada en las reglas de Russo-Ramponi. La escala horizontal de esta figura está definida en el intervalo  $[-255, 255]$ , pues las diferencias de

$p_1$	$p_2$	$p_3$
$p_8$	$p_0$	$p_4$
$p_7$	$p_6$	$p_5$

Figura 4.9: ventana de referencia para el método de Russo-Ramponi.

la Ec. (4.5) son utilizadas como argumento en la detección de bordes. Esta función también es conocida como *función de membresía cero* y está definida por

$$f_C(g) = \exp\left(\frac{-g^2}{2\sigma_1^2}\right) \quad \text{con } \sigma_1 = 40. \quad (4.6)$$

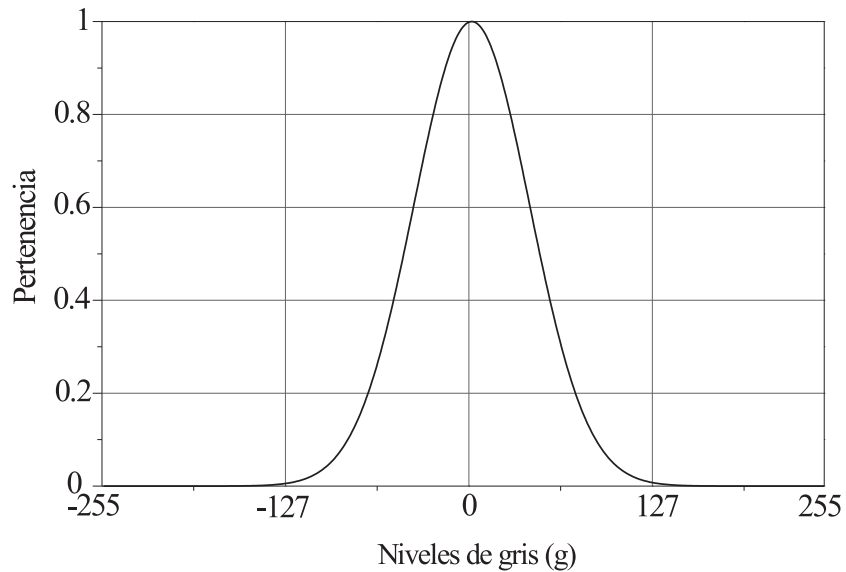


Figura 4.10: función de membresía premisa utilizada en el método de Russo-Ramponi para la detección de bordes.

Las funciones de membresía consecuentes utilizadas para la detección de bordes se cono-

cen como *funciones de membresía negro y blanco* (black and white) y se representan, respectivamente, como  $f_B$  y  $f_W$ . Estas funciones se definen como

$$f_B(g) = \begin{cases} \frac{-1}{175}g + 1 & \text{si } g \leq 175, \\ 0 & \text{si } g > 175, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$f_W(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \leq 79, \\ \frac{1}{175}g + \frac{79}{175} & \text{si } g > 79. \end{cases} \quad (4.8)$$

En la Fig. 4.11 se presentan las gráficas de estas funciones de membresía.

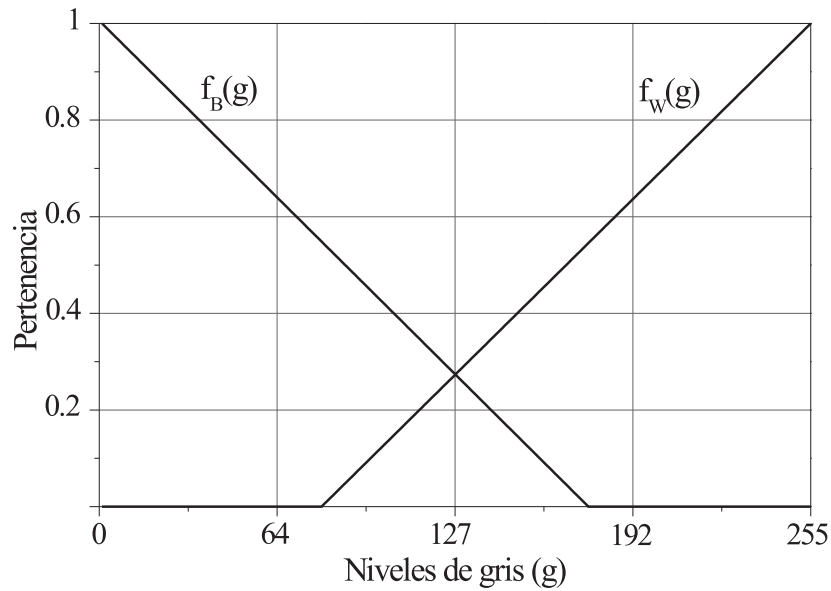


Figura 4.11: funciones de membresía consecuentes  $f_B$  y  $f_W$  utilizadas en las reglas del método de Russo-Ramponi.

En base a la Fig. 4.9, utilizando las diferencias definidas en la Ec. (4.5) y las funciones de membresía  $f_C$ ,  $f_B$  y  $f_W$ , las reglas de Russo-Ramponi aplicadas al pixel  $p_0$  y denotadas como  $\mathbf{R}_j$  con  $j = 1, \dots, 9$ , son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_1), f_C(d_2), f_C(d_3)] \leq \tau \text{ entonces } & I_1(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_2 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_2), f_C(d_4)] \leq \tau \text{ entonces } & I_2(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_3 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_3), f_C(d_4), f_C(d_5)] \leq \tau \text{ entonces } & I_3(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_4 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_4), f_C(d_6)] \leq \tau \text{ entonces } & I_4(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_5 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_5), f_C(d_6), f_C(d_7)] \leq \tau \text{ entonces } & I_5(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_6 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_6), f_C(d_8)] \leq \tau \text{ entonces } & I_6(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_7 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_7), f_C(d_8), f_C(d_1)] \leq \tau \text{ entonces } & I_7(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_8 : & \quad \text{sí } \min[f_C(d_8), f_C(d_2)] \leq \tau \text{ entonces } & I_8(p_0) = f_W(g_0). \\
\mathbf{R}_9 : & \quad \text{de lo contrario} & I_9(p_0) = f_B(g_0).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

En donde  $0 < \tau \leq 1$  se utiliza para determinar la pertenencia de los bordes. Un valor típico utilizado es  $\tau = 0.9$ . Para cada una de las primeras ocho reglas, las diferencias de entrada son hechas en ciertas direcciones, de tal modo, que cada regla evalúa si existe un borde en alguna dirección determinada. Las reglas  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_5, \mathbf{R}_7$  son utilizadas para detectar bordes en las direcciones vertical y horizontal, las reglas  $\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_6, \mathbf{R}_8$  para detectar bordes diagonales. Para aclarar, en la Fig. 4.12 se muestra la dirección correspondiente a cada regla. Como se observa en la Ec. (4.9), en cada regla  $\mathbf{R}_j$  se utiliza una variable  $I_j$  para almacenar el resultado de la evaluación de cada regla. No obstante, como las reglas son aplicadas a una imagen  $A$  de tamaño  $M \times N$ ,  $I_j$  es una matriz (del mismo tamaño que la imagen) que se conoce como *matriz de intensidad*. Cabe mencionar, que cuando el resultado de la evaluación de alguna regla es falso se asigna cero al elemento de la matriz correspondiente. La última regla ( $\mathbf{R}_9$ ) corresponde al caso en que ninguna de las ocho reglas anteriores haya sido cierta, lo que corresponde a evaluar pixeles dentro de regiones homogéneas, entonces, se utiliza la función de membresía negro con la cual se calcula la pertenencia de pixeles en zonas homogéneas. El resultado de las reglas  $\mathbf{R}_j$  son matrices de intensidad  $I_j$  que corresponden a bordes en distintas direcciones dentro de la imagen.

Como se mencionó, el método de Russo-Ramponi utiliza el concepto de intensidad de disparo la cual se calcula a partir de la función de membresía premisa. Sea  $D_E$  la cantidad de diferencias de entrada para alguna de las reglas  $\mathbf{R}_j$  con  $j = 1, \dots, 8$  (ocho primeras reglas)

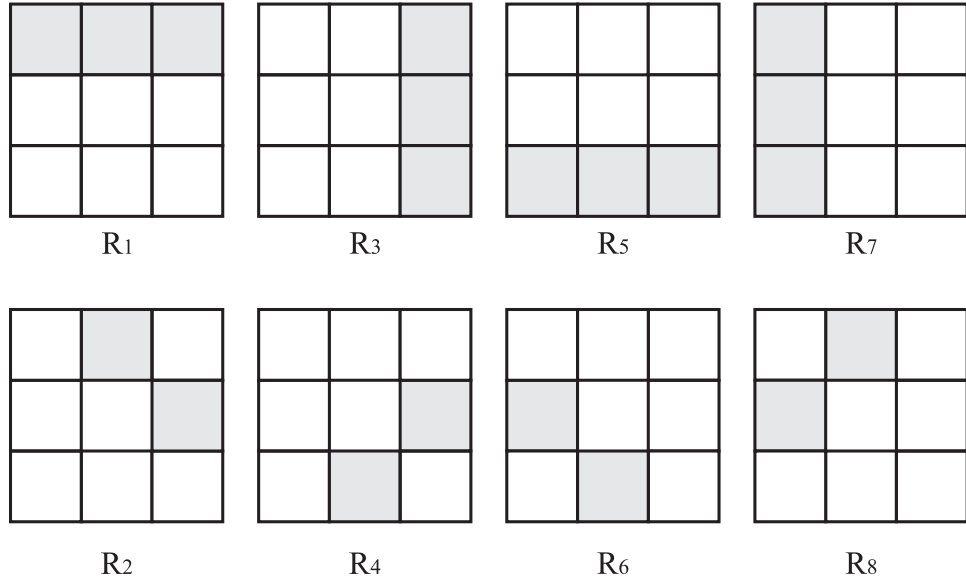


Figura 4.12: direcciones de la detección de bordes correspondiente a cada regla del método de Russo-Ramponi. 1ra. hilera, detección correspondiente a las direcciones vertical y horizontal; 2da. hilera, detección en direcciones diagonales.

y sea  $D_j^k$  el conjunto de diferencias de entrada para la  $j$ -ésima regla con  $k$  diferencias. La intensidad de disparo de un pixel  $p_0$  se calcula como el promedio de diferencias de entrada dado por

$$\alpha_j(D_j^k) = \frac{1}{D_E} \sum_{d \in D_j^k} f_C(d). \quad (4.10)$$

Por ejemplo, en el caso de  $\mathbf{R}_2$  las diferencias de entrada son  $D_2^2 = \{d_2, d_4\}$ , de modo que  $D_E = 2$  y  $\alpha_2$  se calcula como

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} [f_C(d_2) + f_C(d_4)]. \quad (4.11)$$

El cálculo de  $\alpha_9$ , la cual corresponde a la última regla, se obtiene por medio de las reglas anteriores. Sea  $\alpha_T$  el máximo valor de intensidad de disparo de las primeras 8 reglas, i.e.,

$$\alpha_T(D_j^k) = \max_{1 \leq j \leq 8} \{\alpha_j(D_j^k)\}. \quad (4.12)$$

Entonces,  $\alpha_9$  se calcula como

$$\alpha_9(D_j^k) = 1 - \alpha_T(D_j^k) = 1 - \max_{1 \leq j \leq 8} \{\alpha_j(D_j^k)\}. \quad (4.13)$$

Una vez obtenidas la intensidad de disparo se multiplican por el valor de intensidad correspondiente. Considerando éstas últimas, el método de Russo-Ramponi se especifica en forma resumida como sigue,

**MRR1** Aplicar las reglas de la Ec. (4.9) a cada pixel de la imagen de entrada  $A$ . En esta etapa la fusificación es implícita, pues además de mapear la imagen al espacio de membresía, las reglas, mediante inferencia difusa, detectan los bordes de la imagen.

**MRR2** El segundo paso consiste en calcular la intensidad de disparo para cada pixel de la imagen mediante la Ec. (4.10). Estos valores, sirven para transformar la tonalidad de los bordes en la imagen. Para un pixel  $p_0$  la modificación es

$$g = I(p_0) = \sum_{l=1}^9 [\alpha_l(p_0)I_l(p_0)] / \sum_{l=1}^9 \alpha_l(p_0). \quad (4.14)$$

**MRR3** Finalmente, la defusificación de los valores de membresía del paso anterior se realiza con la transformación

$$g' = T(g) = (L - 1)g. \quad (4.15)$$

En la Fig. 4.13 se muestra un ejemplo del método de Russo-Ramponi para regiones homogénea y heterogénea considerando  $\tau = 0.9$ . Para el pixel central de la región homogénea sombreada la evaluación de las reglas resultan en  $I_1 = I_2, \dots, I_9 = 0$ ; las intensidades de disparo son  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_8 = 0.607$ ,  $\alpha_9 = 0.393$ . Cuando estas cantidades se sustituyen en la Ec. (4.14) el dividendo es cero, lo que da salida cero en regiones homogéneas. Por otro lado, para el pixel señalado en la región heterogénea sombreada el resultado del método se muestra en el Cuadro 4.1.

Cuadro 4.1: Reglas e intensidades de disparo de una región heterogénea

Descripción	$\mathbf{R}_1$	$\mathbf{R}_2$	$\mathbf{R}_3$	$\mathbf{R}_4$	$\mathbf{R}_5$	$\mathbf{R}_6$	$\mathbf{R}_7$	$\mathbf{R}_8$	$\mathbf{R}_9$
I	0	0	0	0.691	0.691	0.691	0.691	0.691	0
$\alpha$	1	1	1	0.5	0.333	0	0.333	0.5	0.5

Sustituyendo los valores obtenidos en la Ec. (4.14) se tiene  $\mathbf{I}(p_0) = 0.247$ . El mismo procedimiento se realiza para cada pixel de la imagen. En la Fig. 4.14 se muestra la aplicación del método de Russo-Ramponi para algunas imágenes en tonos de gris.

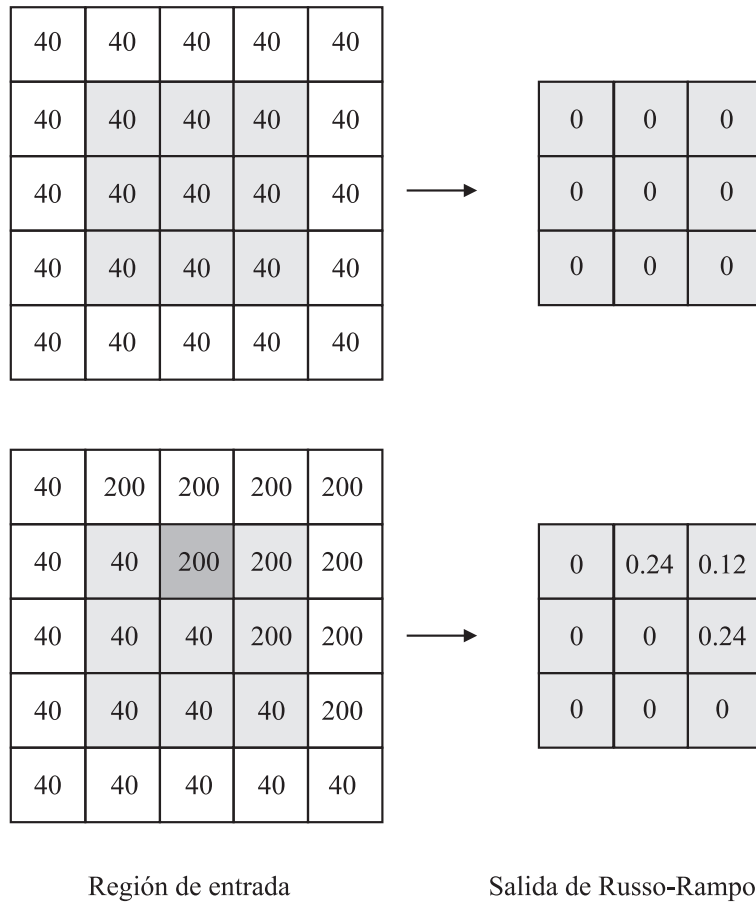


Figura 4.13: regiones de prueba de las reglas de detección de bordes del método de Russo-Ramponi. 1ra. hilera, región homogénea; 2da. hilera, región heterogénea, los resultados del Cuadro 4.1 corresponden al pixel resaltado en la zona sombreada.

### 4.1.3. Operadores morfológicos difusos

Como se mencionó en la Sección 2.2.1, la detección de bordes puede ser realizada mediante un operador morfológico extensivo y uno anti-extensivo. Normalmente, la erosión y dilatación son las operaciones utilizadas para obtener los bordes de una imagen. En esta sección se presentan las bases para desarrollar las operaciones básicas correspondientes a la morfología difusa.

En 1997, B. De Baets propuso utilizar una modificación de algunos operadores booleanos para definir las operaciones básicas de la morfología difusa. En particular, se redefinieron los operadores de negación, conjunción e implicación en el ámbito difuso para desarrollar las



Figura 4.14: detección de bordes basado en reglas usando el método de Russo-Ramponi.

operaciones de erosión y dilatación difusas. En adelante, omitiremos el adjetivo difuso y si es necesario, utilizaremos el adjetivo booleano para diferenciar las distintas definiciones.

Los operadores de negación, conjunción e implicación se definen en el intervalo  $I = [0, 1]$ . Estos operadores son conocidos como negador, conjuntor e implicador respectivamente. Un *negador*  $\mathcal{N}$  se interpreta como un mapeo decreciente que coincide con la negación booleana, i.e.  $\mathcal{N}(0) = 1$  y  $\mathcal{N}(1) = 0$ . Un negador es involutivo si  $\forall x \in I, \mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$ . Un operador de este tipo es el *negador estandar*  $N_e$  que se define  $\forall x \in I$  como [19]

$$N_e(x) = 1 - x. \quad (4.16)$$

Un *conjuntor*  $\mathcal{C}$  se define como un mapeo creciente que coincide con la conjunción booleana en  $I^2$ , i.e.  $\mathcal{C}(0, 0) = \mathcal{C}(0, 1) = \mathcal{C}(1, 0) = 0$  y  $\mathcal{C}(1, 1) = 1$ . Un conjuntor es una



norma- $T$  cuando cumple, principalmente, los axiomas de frontera, conmutatividad y asociatividad de las normas triangulares mencionados en la Sección 3.2. Algunos de los conjuntores más comunes corresponden a las normas- $T$  presentadas en el Cuadro 3.4. Los conjuntores utilizados en esta sección se presentan en el Cuadro 4.2. El conjuntor  $W$  también es conocido como la norma- $T$  de Lukasiewicz, pues J. Lukasiewicz introdujo esta definición.

Cuadro 4.2: Conjuntores típicos

Conjuntor	Definición
Mínimo ( $M$ )	$T_0(x, y) = \min(x, y)$
Producto ( $P$ )	$T_1(x, y) = xy$
Suma limitada ( $W$ )	$T_\infty(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$

Un *implicador*  $\mathcal{I}$  se interpreta como un mapeo que inicialmente realiza mapeos decrecientes seguido de un mapeo creciente. Un implicador coincide con la implicación booleana en  $I^2$ , i.e.  $\mathcal{I}(0, 0) = \mathcal{I}(0, 1) = \mathcal{I}(1, 1) = 1$  y  $\mathcal{I}(1, 0) = 0$ . Algunos de los implicadores más comunes se presentan en el Cuadro 4.3.  $I_L$  también se conoce como el implicador de Lukasiewicz,  $I_{KD}$  como implicador de Kleene-Dienes e  $I_R$  se conoce como implicador de Reichenbach.

Cuadro 4.3: Implicadores típicos

Implicador	Definición
$I_L$	$I_L(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$
$I_{KD}$	$I_{KD}(x, y) = \max(1 - x, y)$
$I_R$	$I_R(x, y) = 1 - x + xy$

Además de los operadores definidos anteriormente, se pueden definir otros conjuntores e implicadores que se basan en ciertas combinaciones de negadores, conjuntores e implicadores. De manera general, un conjuntor y un implicador se definen, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}(x, y) &= \mathcal{N}[\mathcal{I}(x, \mathcal{N}(y))], \\ \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}(x, y) &= \mathcal{N}[\mathcal{C}(x, \mathcal{N}(y))]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

El conjuntor o implicador obtenido mediante la Ec. (4.17) también se define en  $I$ . Otro concepto útil es el de supremo e ínfimo de un conjunto. Dado un conjunto  $A$ , el supremo de

un conjunto  $A$ , denotado como  $\sup(A)$ , es el menor elemento que es mayor o igual que cada elemento de  $A$  y puede o no pertenecer a  $A$ . En otras palabras, el supremo es la mínima cota superior del conjunto  $A$ . Cabe mencionar, que este valor es único. Por ejemplo, para el conjunto de números  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\sup(A) = 3$ . El ínfimo de un conjunto  $A$ , expresado como  $\inf(A)$  es el mayor elemento, no necesariamente en el conjunto, que es menor o igual que cada elemento de  $A$ , e.g.,  $\inf(B) = 0$ . El ínfimo también se puede entender como la máxima cota inferior del conjunto  $A$ . En base a los operadores de negación, conjunción e implementación se define la dilatación de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  como

$$(A \oplus_{\mathcal{C}} B)(y) = \sup_{x \in B_y^*} \mathcal{C}(A(x), B(x - y)). \quad (4.18)$$

Como se definió en la Sección 1.4.2,  $B_y^*$  representa la reflexión del elemento  $B$  respecto al origen trasladado por  $y$ . Se define la erosión de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  como

$$(A \ominus_{\mathcal{I}} B)(y) = \inf_{x \in B_y^*} \mathcal{I}(A(x), B(x - y)). \quad (4.19)$$

Recordando que  $C \setminus D$  representa la diferencia de los conjuntos  $C$  y  $D$ , la detección de los bordes para una imagen  $A$ , utilizando el elemento estructural  $B$  se logra mediante la operación

$$(A \oplus_{\mathcal{C}} B) \setminus (A \ominus_{\mathcal{I}} B). \quad (4.20)$$

Esta operación detecta bordes gruesos de la imagen. Además, se pueden detectar los bordes externo e interno, respectivamente, mediante las siguientes expresiones

$$(A \oplus_{\mathcal{C}} B) \setminus A, \quad (4.21)$$

$$A \setminus (A \ominus_{\mathcal{I}} B). \quad (4.22)$$

En el caso de una implementación computacional, el supremo de la Ec. (4.18) corresponde a la función máximo y el ínfimo de la Ec. (4.19) a la función mínimo. La operación de dilatación (o erosión) se realiza, de manera general, trasladando el elemento  $B_{-y}$  sobre cada pixel  $p$  de la imagen. En la posición  $(x, y)$  del pixel  $p$  se evalúan las operaciones correspondientes a la dilatación (o erosión) entre la vecindad de  $p$  y los componentes intersectados de  $B_y^*$ . Una vez evaluada la vecindad, el valor asignado a la posición  $(x, y)$  será el máximo (o mínimo) de los valores evaluados. Como en el capítulo 1, a partir de estas operaciones se puede obtener la

cerradura y abertura difusas. En términos de la dilatación y erosión la *cerradura difusa* de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  se define como

$$(A \circ_{c,\mathcal{I}} B)(y) = [(A \oplus_c B) \ominus_{\mathcal{I}} (-B)](y), \quad (4.23)$$

de manera parecida, la *abertura difusa* de un conjunto  $A$  por el elemento estructural  $B$  está dada por

$$(A \bullet_{c,\mathcal{I}} B)(y) = [(A \ominus_{\mathcal{I}} B) \oplus_c (-B)](y). \quad (4.24)$$

Algunas características importantes de la dilatación son la tendencia a eliminar detalles oscuros y realzar los claros de los objetos en la imagen, esto tiene como consecuencia que los objetos oscuros disminuyan su tamaño mientras que los objetos claros lo aumenten. El caso contrario resulta para la erosión, pues esta operación elimina detalles claros y mejora los oscuros. Por otra parte, la cerradura únicamente elimina los detalles oscuros y la abertura sólo los detalles claros.

Brevemente, el proceso de detección de bordes se obtiene mediante

**DBMD1** Fusificación de  $A$  mediante el escalamiento lineal de la forma

$$g' = T(g) = \frac{1}{L-1}g, \quad (4.25)$$

en donde, como es costumbre,  $L-1 > 0$  es el máximo nivel de intensidad y  $g$  representa los niveles de gris de la imagen  $A$ .

**DBMD2** Obtener la dilatación y erosión de  $A$  por el elemento estructural  $B$  mediante las Ecs. (4.18) y (4.19) respectivamente.

**DBMD3** Obtener los bordes mediante alguna de las Ecs. (4.20)-(4.22).

**DBMD4** Finalmente, defusificar mediante la transformación

$$g' = T(g) = (L-1)g. \quad (4.26)$$

En la Fig. 4.15 se presenta la detección de bordes utilizando el conjuntor  $M$  y el implicador  $I_{KD}$ . Es importante notar que estas operaciones también pueden ser aplicadas a imágenes binarias, no obstante, este caso particular resulta equivalente al presentado en la Sección 2.2.



Figura 4.15: detección de bordes mediante operadores morfológicos difusos; izq., imagen original, der., bordes de la imagen original utilizando el conjuntor  $M$  y el implicador  $I_{KD}$ . Las dos imágenes presentadas son de tamaño  $256 \times 256$  píxeles.

## 4.2. Adelgazamientos

### 4.2.1. Eje central en tonos de gris

Los métodos para obtener el eje central o esqueleto se desarrollaron, inicialmente, para el caso de objetos en imágenes binarias, algunos de los cuales se han presentado en el Capítulo 2. Uno de los primeros métodos de esqueletización de objetos en imágenes en tonos de gris se logró empleando los fundamentos del *principio de superposición por umbral* [25]. Este principio establece que una imagen en escala de grises  $A$ , se puede separar en un conjunto de

imágenes binarias las cuales se obtienen mediante la umbralización de la imagen  $A$  en cada uno de sus niveles de gris y que sumando el conjunto de cortes binarios se puede reconstruir la imagen original. Dada una imagen  $A(x, y)$  con niveles de gris  $g = 0, 1, \dots, L - 1$ , el conjunto de cortes binarios de  $A$  se obtiene con la umbralización

$$A_g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } A(x, y) \geq g, \\ 0 & \text{si } A(x, y) < g. \end{cases} \quad (4.27)$$

La idea principal del método de esqueletización por superposición es que una transformación  $\Omega$  de una imagen  $A$  se obtiene mediante la suma de las transformaciones de cada imagen binaria obtenida por umbralización, i.e.,

$$\Omega(A) = \sum_{g=1}^{L-1} \Omega(A_g). \quad (4.28)$$

En el caso de que la transformación  $\Omega(A_g) = A_g$  el resultado de la superposición de las transformaciones corresponde a la misma imagen, i.e.  $\Omega(A) = A$ . Sea  $S(A_g)$  el esqueleto correspondiente al corte  $A_g$ , el *esqueleto morfológico superpuesto* (EMS) de una imagen  $A$  se obtiene mediante [25]

$$S(A) = \sum_{g=1}^{L-1} S(A_g), \quad (4.29)$$

en donde el esqueleto de cada imagen  $S(A_g)$  se obtiene mediante la esqueletización presentada en la Sección 2.2.2 Debido a que una imagen en escala de grises  $A$  se separa en  $L - 1$  imágenes binarias se necesitan realizar  $L - 1$  esqueletizaciones morfológicas para obtener el esqueleto de la imagen  $A$ , esto incrementa considerablemente el orden computacional del algoritmo que calcula el esqueleto superpuesto. Una manera de reducir las operaciones empleadas en dicho algoritmo es empleando una versión optimizada del esqueleto morfológico, en la cual, específicamente, se simplifica la obtención de cada esqueleto parcial. Como se mencionó en el Capítulo 2, el esqueleto morfológico de una imagen binaria  $A_g$  está dado por

$$S(A_g) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A_g), \quad (4.30)$$

en donde  $S_k(A_g)$  es el  $k$ -ésimo subesqueleto de  $A_g$  y  $K$  representa la última erosión antes de que se eliminen todos los pixeles de los objetos en la imagen. La forma simplificada del subesqueleto es [23]

$$S_k(A_g) = (A_g \ominus kB) \setminus (A_g \ominus kB) \oplus B. \quad (4.31)$$

En los Apéndices B y C se presenta, respectivamente, una implementación programática de este algoritmo y resultados de otras imágenes de prueba.

En resumen, el esqueleto morfológico superpuesto se obtiene con los siguientes pasos:

**EMS1** Separar la imagen en escala de grises  $A$  en un conjunto de imágenes binarias utilizando la Ec. (4.27).

**EMS2** Obtener el esqueleto morfológico de cada imagen binaria obtenida en el paso anterior mediante la Ec. (4.30) con la optimización del subesqueleto parcial presentada en la Ec. (4.31).

**EMS3** Finalmente, se construye el esqueleto superpuesto sumando los esqueletos obtenidos con la Ec. (4.29).

En la Fig. 4.16 se presentan algunos ejemplos de esqueletización por superposición obtenidos mediante el procedimiento mencionado.

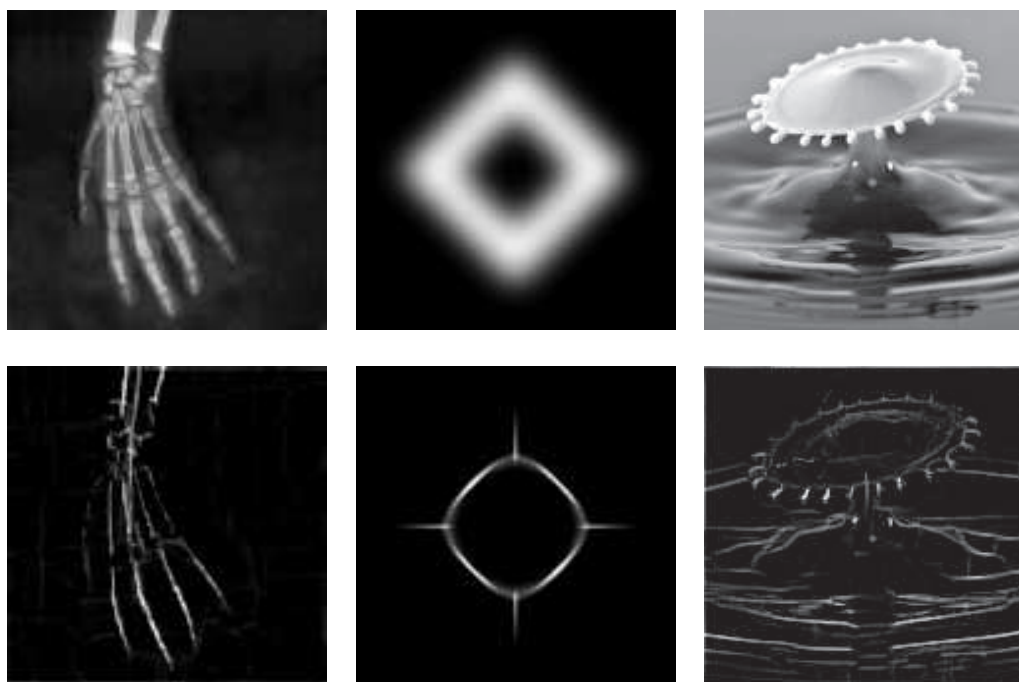


Figura 4.16: 1ra. hilera, imágenes originales; 2da. hilera, esqueletos morfológicos obtenidos mediante superposición. Las imágenes presentadas son de tamaño  $128 \times 128$  píxeles.

Aunque en el método previamente presentado se haya hecho una optimización en el algoritmo de esqueletización, no obstante, la cantidad de recursos necesarios para obtener el eje medio continúa siendo considerablemente grande. Una alternativa a este método, se basa en explotar las características del procesamiento de imágenes difuso (FIP), principalmente se aprovechan las operaciones de erosión y dilatación difusas y el modelaje de alguna de las características de una imagen como una función de membresía. Normalmente, el eje medio basado en técnicas del FIP se denomina *eje central difuso*. En la siguiente sección se presentan algunos procedimientos para obtener el eje central difuso.

## 4.2.2. Eje central difuso

### Esqueleto morfológico difuso

Una manera directa de obtener el eje central difuso se basa en utilizar la misma forma de esqueletización presentado en la Sección 2.2.2 pero utilizando las operaciones morfológicas difusas definidas en la Sección 4.1.3. En adelante, haremos referencia al eje central difuso únicamente como eje central o esqueleto. Para obtener el *esqueleto morfológico difuso* (EMD) de una imagen  $A$  en escala de grises se requieren los siguientes pasos

**EMD1** La etapa de fusificación de la imagen  $A$  es un escalamiento lineal de la forma

$$g' = T(g) = \frac{1}{L-1}g, \quad (4.32)$$

**EMD2** El esqueleto de la imagen fusificada se obtiene con

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A), \quad (4.33)$$

es importante señalar que para implementar esta versión del esqueleto morfológico se debe considerar que la unión de los subesqueletos corresponde a la operación OR difusa. Cada subesqueleto se obtiene mediante la expresión

$$S_k(A) = (A \ominus_{\mathcal{I}} kB) \setminus [(A \ominus_{\mathcal{I}} kB) \circ_{\mathcal{C}, \mathcal{I}} B]. \quad (4.34)$$

**EMD3** Finalmente, el esqueleto se defusifica mediante la transformación

$$g' = T(g) = \frac{1}{L-1}g. \quad (4.35)$$

En la Fig. 4.17 se presentan algunos esqueletos obtenidos mediante el procedimiento anterior. Para llevar a cabo estas operaciones, en la erosión se utilizó el implicador de Kleene-Dienes y para la abertura también se consideró el conjuntor mínimo.

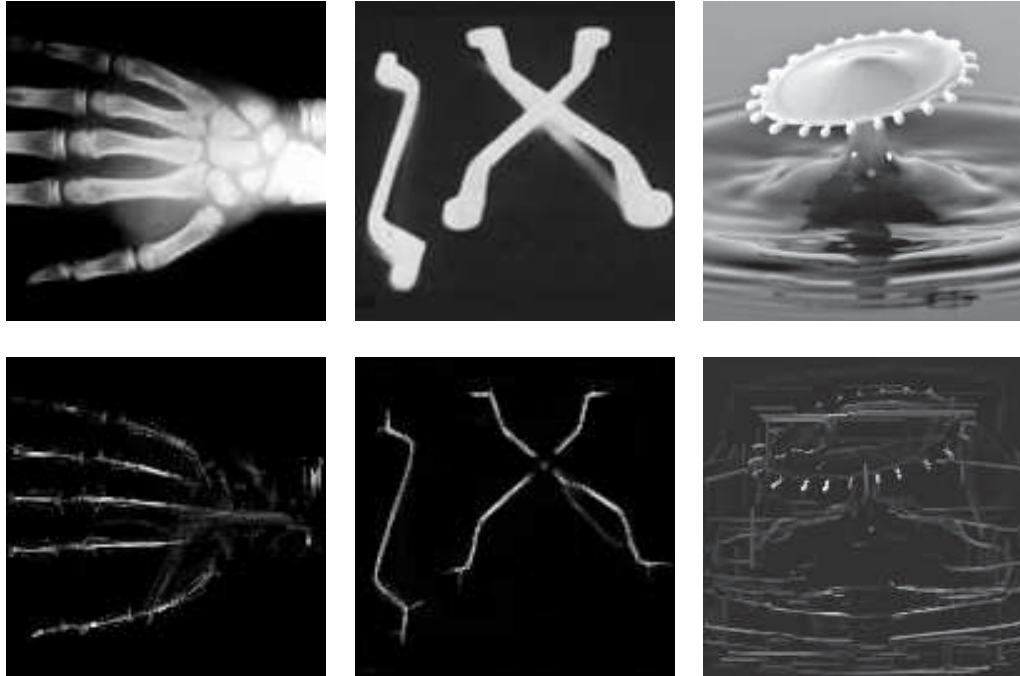


Figura 4.17: ejemplos de esqueletización morfológico difusa. 1ra. hilera, imágenes originales; 2da. hilera, esqueleto morfológico difuso correspondiente. Estas imágenes son de tamaño  $128 \times 128$  píxeles.

### Caracterización difusa del esqueleto

Otra manera para hallar el eje central, la cual se identifica con la noción de discos maximales, se basa en el concepto de *círculos difusos* de objetos en la imagen. El método consiste en obtener información de los círculos a través de cierta transformación de distancia con la cual se determina si un píxel es o no centro de un círculo difuso. Enseguida, se buscan aquellos píxeles que representan a los círculos más grandes o círculos maximales, los cuales forman el esqueleto de la imagen.

Para encontrar los círculos se utiliza una función de membresía que detecta los bordes difusos en la imagen que se conoce como *transformación de distancia sigma normalizada difusa* (*normalized fuzzy sigma distance transform*) comúnmente denotada por  $F_S$ . Esta



función utiliza la imagen en escala de grises  $A$  y una versión erosionada de la misma, denotada por  $A^e$ . Dada una imagen  $A$  de tamaño  $M \times N$  con  $i = 0, 1, \dots, M - 1$  y  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $F_S$  se define como [27]

$$F_S(A, A^e) = \begin{cases} 0.5F_e(A_{i,j}, A^e_{i,j}) & 0 \leq d_{i,j} \leq 0.5, \\ 1 - 0.5F_e(A_{i,j}, A^e_{i,j}) & 0.5 < d_{i,j} \leq 1, \end{cases} \quad (4.36)$$

en donde  $F_e$  y  $d_{i,j}$  son funciones de membresía auxiliares definidas, respectivamente, como [7]

$$F_e(A_{i,j}, A^e_{i,j}) = -d_{i,j} \log(d_{i,j}) - (1 - d_{i,j}) \log(1 - d_{i,j}), \quad (4.37)$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{\text{máx}(A)} - \frac{A^e_{i,j}}{\text{máx}(A^e)}. \quad (4.38)$$

Una gráfica del comportamiento de  $F_S$  se presenta en la Fig. 4.18. Como se observa en la figura, la transformación tiene un comportamiento incremental, i.e., entre más grande es el valor de distancia de un pixel, mayor es la probabilidad de pertenecer al borde.

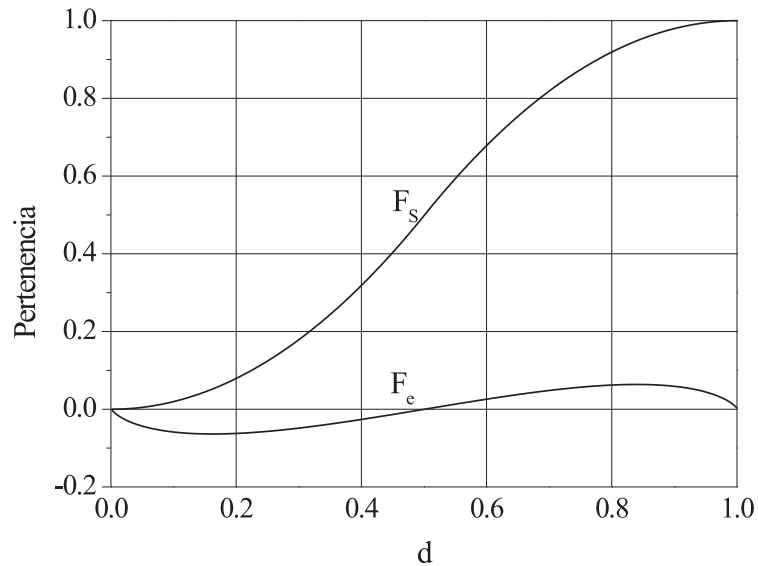


Figura 4.18: funciones de membresía  $F_S$  y  $F_e$  para la caracterización difusa del eje central.

Después de encontrar el *conjunto de bordes difuso* (*fuzzy boundary set*) en la imagen, denotado como  $\chi_{BS}$ , mediante  $F_S$ , se obtiene una representación binaria de la imagen aplicando

un valor de umbral  $\alpha$  con el cual se determina que pixeles de los bordes no serán considerados en dicha representación. En otras palabras, los pixeles de  $A$  con valor menor al umbral  $\alpha$  y con membresía diferente de cero tanto en  $A$  como en  $A^e$  son considerados como centros de los círculos difusos inscritos en  $A$ , a partir de los cuales se genera una representación binaria  $B$  de la forma

$$B_{i,j} = B(A_{i,j}, A^e_{i,j}) = \{1 | \chi_{BS_{i,j}} < \alpha \text{ y } A_{i,j} > 0, A^e_{i,j} > 0\}. \quad (4.39)$$

Una vez que se ha obtenido la imagen binaria  $B$ , la cual representa los centros de los círculos difusos de la imagen  $A$ , se necesita saber que pixeles de  $B$  corresponden a los círculos maximales y que forman el eje central. Para hallar dichos pixeles, se aplica la esqueletización presentada en la Sección 2.2.2 a  $B$ , mediante la cual se encuentra el esqueleto de  $B$  y por consiguiente el eje central de la imagen  $A$ .

En forma breve, los pasos para caracterizar el esqueleto son

**CDE1** Fusificar la imagen  $A$  mediante la transformación

$$g' = T(g) = \frac{1}{L-1}g, \quad (4.40)$$

como es costumbre,  $g$  representa los niveles de gris de  $A$ .

**CDE2** Obtener una versión erosionada de  $A$ . Esto se puede lograr mediante la erosión morfológica difusa vista en la Sección 4.1.3. Si  $B$  es el elemento estructural utilizada en la erosión se tiene

$$A^e = A \ominus_C B. \quad (4.41)$$

**CDE2** Encontrar el conjunto de bordes difuso  $\chi_{BS} = F_S$  aplicando las Ecs. (4.36)-(4.38).

**CDE3** A partir de los bordes de la imagen generar la representación binaria  $B$  con la Ec. (4.39).

**CDE4** Obtener el esqueleto de  $B$  con las Ecs. (2.37), (2.38) .

Un ejemplo de caracterización del esqueleto se muestra en la siguiente figura. En estos ejemplos la versión erosionada se obtuvo mediante la erosión morfológica difusa utilizando el implicador de Kleene-Dienes. El valor de umbral para la imagen de la izquierda de la

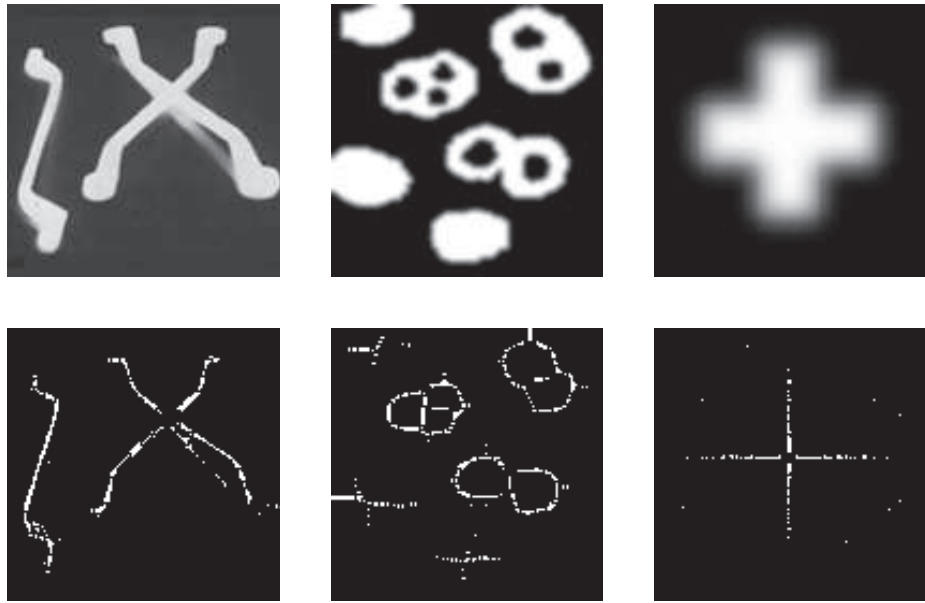


Figura 4.19: ejemplos de caracterización difusa del esqueleto; 1ra. hilera, imágenes de prueba; 2da. hilera, esqueletos correspondientes obtenidos ( $\alpha = 0.153$ ,  $\alpha = 0.047$ ,  $\alpha = 0.082$ ). Las imágenes presentadas son de tamaño  $128 \times 128$  píxeles.

Fig. 4.19 es  $\alpha = 0.153$ , para la del centro es  $\alpha = 0.047$  y para la imagen de la derecha es  $\alpha = 0.082$ ; estos valores se escogieron realizando distintas pruebas con diferentes umbrales  $\alpha$ , según la naturaleza de la imagen.

### 4.3. Resumen comparativo

#### 4.3.1. Técnicas convencionales vs. difusas

##### Bordes

En esta sección se presenta una estimación del orden de cómputo de los procedimientos de detección de bordes difusos considerando el concepto de complejidad computacional mencionado en el Capítulo 2. Esta estimación se presenta en en el Cuadro 4.4, en donde la imagen de entrada a un procedimiento se considera de tamaño  $n \times n$  y el número de imágenes auxiliares es  $m$ .

Como se puede notar, en los métodos correspondientes al procesamiento de imágenes

difuso, en ninguno de los métodos el orden de cómputo podría crecer respecto de algún parámetro  $k$  adicional, pues la implementación no requiere del uso de máscaras como algunas de las técnicas cuyos ejemplos fueron presentados con los algoritmos descritos en el Capítulo 2. Aunque las técnicas difusas presentan mayor esfuerzo computacional, pues requieren de la etapa de fusificación y defusificación a diferencia de los métodos convencionales en donde la implementación es directa, generalmente los métodos se extienden a imágenes en escala de grises y como casos particulares a imágenes binarias. No obstante, la mayoría de las técnicas emplean más recursos computacionales, como el método de Russo-Ramponi en el que se utilizan varias imágenes auxiliares, a diferencia de los procedimientos clásicos de detección, cuya implementación no requiere de éstas.

Cuadro 4.4: Complejidad computacional de los métodos difusos de detección de bordes

Algoritmo	Complejidad	$m$
Caracterización difusa de bordes	$\mathcal{O}(n^2)$	1
Método de Russo-Ramponi	$\mathcal{O}(n^2)$	18
Operadores morfológico difusos	$\mathcal{O}(n^2)$	2

### Adelgazamientos

En el Cuadro 4.5, se presenta una estimación del orden de cómputo y de la cantidad de imágenes auxiliares correspondientes a los procedimientos de adelgazamiento correspondientes a las técnicas difusas y al esqueleto por superposición. Como se puede observar, las operaciones para realizar la esqueletización morfológica convencional pueden ser reducidas aplicando propiedades algebraicas de la morfología matemática, resultando en una reducción del orden de cómputo del algoritmo. Los métodos mencionados en este capítulo utilizan como base esta esqueletización siendo su estimación mínima la correspondiente a dicho procedimiento, no obstante, su estimación del orden de cómputo continúa siendo mayor, pues los métodos requieren obtener otras características que se estiman en  $\mathcal{O}(n^2)$ . El método de esqueletización por superposición corresponde a uno de los procedimientos convencionales para encontrar el eje central de imágenes en escala de grises. El orden de cómputo de este procedimiento requiere de una gran cantidad de operaciones y de recursos de memoria, pues se necesitan realizar  $L - 1$  esqueletizaciones binarias para obtener el eje central de una imagen.

Cuadro 4.5: Órdenes de cómputo de las técnicas para encontrar el eje central difuso

Algoritmo	Complejidad	$m$
Esqueleto morfológico optimizado, Ec. (4.30), (4.31)	$\mathcal{O}(n)$	$K$
Esqueleto por superposición	$(L - 1)\mathcal{O}(n^2)$	$(L - 1)K$
Esqueleto morfológico difuso	$\mathcal{O}(n^2)$	$K$
Caracterización difusa del esqueleto	$\mathcal{O}(n^2)$	$K$

Es importante notar que la cantidad de imágenes intermedias puede variar dependiendo de la manera en que se implementen los algoritmos de esqueletización. Por ejemplo, una implementación secuencial de los métodos presentados requeriría de la cantidad de imágenes estimada en el cuadro anterior. Sin embargo, cuando se realiza una implementación paralela es posible reducir la cantidad de imágenes considerablemente.

### 4.3.2. Ventajas y desventajas

De manera análoga a una transformada de Fourier mediante la cual se pasa del espacio ordinario al espacio de frecuencias para resolver de forma alternativa un problema de procesamiento de señales, una de las principales ventajas del procesamiento de imágenes difuso (FIP) es que se puede concebir como una transformación que a través de la fusificación mapea el espacio de píxeles al espacio de membresía, en donde pueden aplicarse las herramientas de la teoría de los conjuntos difusos, que permiten ampliar la gama de posibilidades para resolver un problema. Además, los procedimientos son definidos de tal modo que se aplican indistintamente a imágenes binarias o imágenes en escala de grises; a diferencia con los métodos convencionales, en los cuales, frecuentemente las técnicas para imágenes binarias deben ser modificadas o generalizadas para poder utilizarlas con imágenes en tonos de gris. Por ejemplo, el esqueleto morfológico por superposición (EMS) que está basado en el esqueleto morfológico binario. No obstante, otros métodos como la detección de bordes convencional pueden utilizarse con cualquier tipo de imágenes. En algunos casos, las técnicas del FIP facilitan el tratamiento y análisis de las imágenes como es el caso del esqueleto morfológico difuso, que requiere de menor cantidad de operaciones e imágenes intermedias que el eje central en escala de grises obtenido mediante el método basado en el principio de superposición por

umbral. Sin embargo, desde el punto de vista de una transformación, una desventaja del FIP es que no hay una forma única de pasar del espacio de píxeles al espacio de membresía así como para la transformación inversa, i.e., del espacio de membresía al espacio de píxeles, de modo que el proceso de fusificación y su contraparte, la defusificación, pueden incrementar la complejidad computacional respecto de los métodos convencionales así como también sus recursos de memoria.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En el presente capítulo la exposición está organizada de la siguiente manera. En la primera sección se resumen las conclusiones generales referidas al objetivo principal propuesto al inicio de esta tesis. En una segunda sección se resumen las conclusiones específicas relativas a los objetivos particulares señalados al principio de este trabajo. En la tercera sección se hacen explícitas las contribuciones realizadas en cada capítulo y finalmente, en la última sección se describe el trabajo futuro posible.

### 5.1. Conclusiones generales

Se presentaron los elementos básicos necesarios del procesamiento digital de imágenes (PDI) y de la morfología matemática (MM), que sirven para sustentar los procedimientos computacionales pormenorizados en este trabajo. En particular, se describieron las herramientas matemáticas necesarias y algunos de los métodos convencionales de *detección de bordes* y *adelgazamiento de objetos en imágenes binarias*, explicando en cada uno de éstos los pasos a seguir para implementar el algoritmo correspondiente. Como preámbulo a las técnicas difusas correspondientes, se presentó una descripción detallada de la *teoría de los conjuntos difusos* junto con el marco conceptual y las principales características del *procesamiento de imágenes difuso* (FIP) incluyendo varios ejemplos que permitieron profundizar en el modo de operar de esta rama del *cómputo suave*. También, se presentaron algunas técnicas difusas para la detección de bordes y adelgazamiento de objetos, las cuales, se aplican tanto en imágenes binarias como en escala de gris. En algunos casos, se ha propuesto una extensión

del método cuyas características son más elaboradas, pero ofrecen resultados satisfactorios. Asimismo, para los métodos presentados, se realizó una comparación cuantitativa basada en la estimación del orden de complejidad computacional así como de recursos adicionales en cuanto a número de imágenes auxiliares requeridas. Tanto los métodos convencionales y los correspondientes a las técnicas difusas se implementaron con el lenguaje de programación propietario de MathCad presentando los resultados obtenidos.

## 5.2. Conclusiones adicionales

Se describió el concepto de borde y las herramientas tanto convencionales como de la morfología matemática, útiles para implementar los *algoritmos de detección de bordes*. Se presentó la noción fundamental del eje medio o central como descriptor geométrico de formas de objetos en una imagen así como el fundamento matemático que lo define, a saber, como el conjunto de centros de discos maximales incluyendo diversos métodos clásicos de adelgazamiento y otros de la morfología matemática conocidos como *algoritmos de esqueletización*. Además, se realizó el análisis estimativo del número de operaciones realizadas para cada algoritmo y la cantidad de imágenes auxiliares necesarias para su implementación.

Por otra parte, se presentaron los conceptos fundamentales de la *teoría de conjuntos difusos*, aclarando cada vez que fué conveniente su distinción con la *teoría de conjuntos nítidos* (convencional); siempre que fué posible, se hizo una interpretación aplicada al tratamiento y análisis de imágenes con la finalidad de facilitar el manejo e implementación de los algoritmos de detección de bordes y adelgazamientos. En forma complementaria, se describió el marco conceptual y las principales características del *procesamiento de imágenes difuso* (FIP) similar al punto de vista de una transformación integral como es el caso de Fourier en el procesamiento digital de imágenes clásico. Este marco conceptual es de gran utilidad para comprender las etapas fundamentales de cualquier técnica FIP. Adicionalmente, se comentaron algunas medidas difusas para imágenes, por ejemplo, como el *índice de difusividad* adecuadas a este contexto.

En base a los conceptos desarrollados en el Capítulo 3, se describieron las técnicas difusas de detección de bordes y adelgazamiento de objetos en escala de grises, las cuales se aplican también a imágenes binarias. En el caso de la *caracterización difusa de bordes*, el método se extendió para aplicarlo con mascarillas de tamaño  $5 \times 5$  píxeles, con resultados visualmente



satisfactorios. Por otro lado, se presentó uno de los primeros métodos para la detección de bordes en imágenes de gris basado en el *principio de superposición por umbral* y varios procedimientos para obtener el *eje central difuso*. Asimismo, se estimaron los órdenes de cómputo de los algoritmos mencionados y se realizó una comparación entre estos métodos y los convencionales, explicando sus ventajas y desventajas. Cada algoritmo se implementó mediante el MathCad.

En las Figs 5.1 y 5.2 se muestran los métodos y algunas herramientas matemáticas para la detección de bordes y adelgazamiento de objetos, respectivamente, del procesamiento digital de imágenes y del procesamiento de imágenes difuso, tratados en esta tesis.

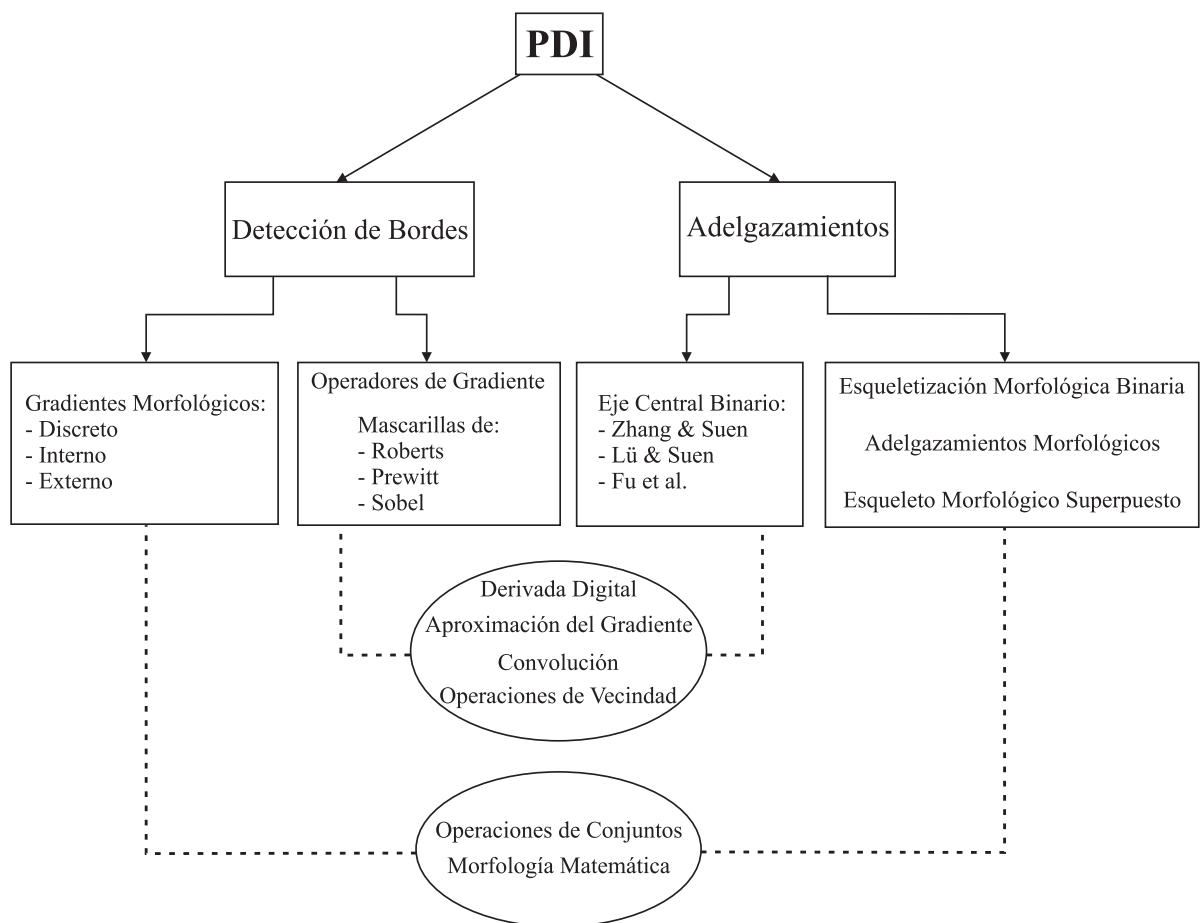


Figura 5.1: se muestran, esquemáticamente, los métodos de PDI de detección de bordes y adelgazamiento de objetos presentados en este trabajo; así como algunas herramientas matemáticas empleadas en estos métodos.

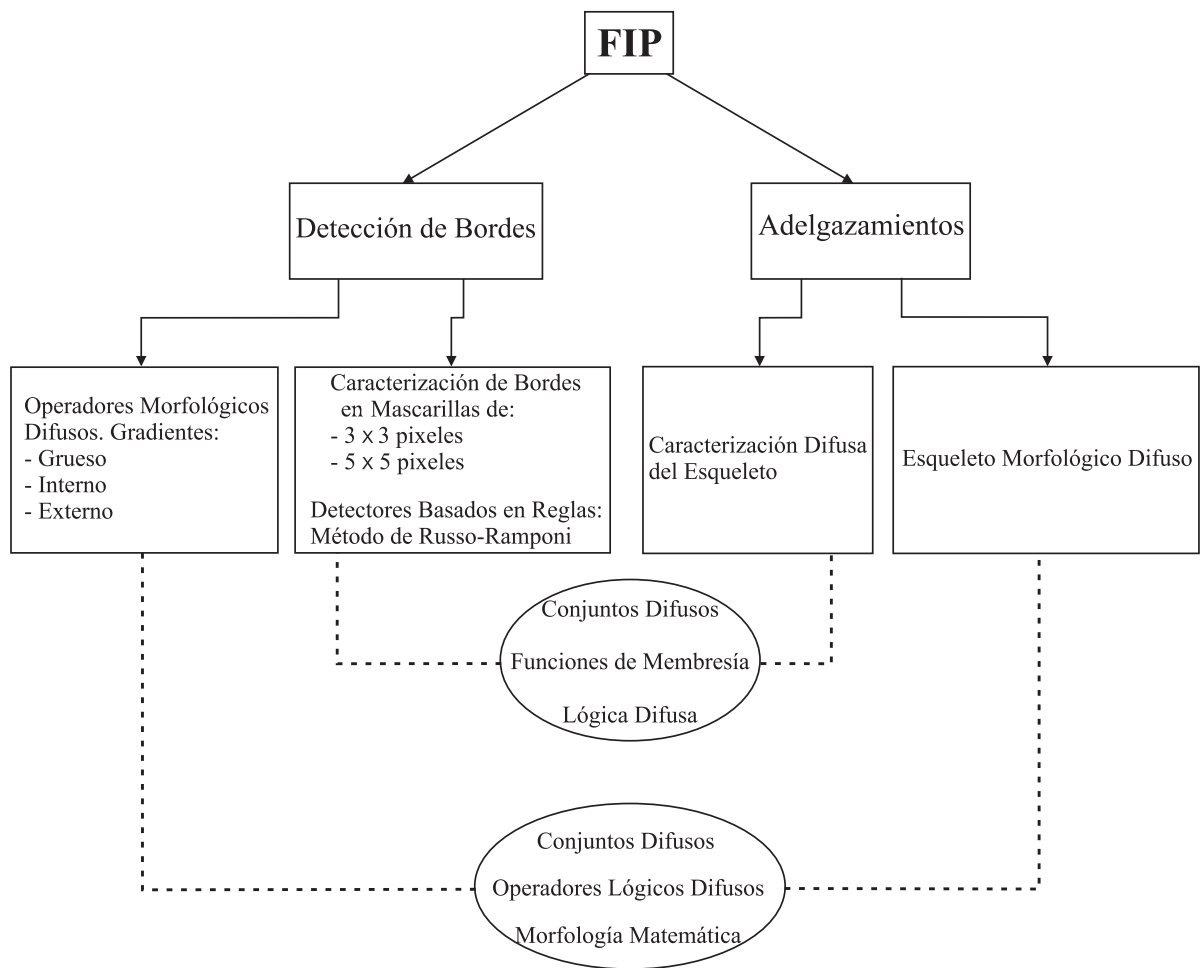


Figura 5.2: de manera esquemática, se muestran los métodos y las herramientas matemáticas de FIP y MM para la detección de bordes y adelgazamiento de objetos presentados en este trabajo.

### 5.3. Contribuciones específicas

En los capítulos 2, 3 y 4 de este trabajo se han expuesto distintas técnicas de detección de bordes y adelgazamientos de objetos. Para mejorar la comprensión de los procedimientos descritos, se presentó en la mayoría de los casos un resumen listando los pasos necesarios y se mencionaron los detalles principales que deben considerarse para implementar correctamente el método seleccionado. Las contribuciones por capítulo se listan a continuación:

**Capítulo 1.** Se expusieron los conceptos fundamentales del procesamiento digital de

imágenes y de la morfología matemática necesarios para la detección de bordes y adelgazamiento de objetos. Para ilustrar estos conceptos con ejemplos distintos a los existentes en la literatura técnica, el autor propuso las Figs. 1.1, 1.6 y 1.8.

**Capítulo 2.** Para recordar, en este capítulo se presentaron las ideas fundamentales de la detección de bordes y del eje medio y sus principales procedimientos de obtención. Las contribuciones de este capítulo son:

- Se demostró la aproximación de la magnitud del gradiente Ec. (2.8) mediante el valor absoluto de sus componentes Ec. (2.9) en el Apéndice A. Esta demostración suele ser omitida en la literatura.
- Para ejemplificar la convolución como el procedimiento para aplicar las mascarillas de Roberts, Sobel y Prewitt para la detección de bordes, el autor ideó la Fig. 2.7.
- Se realizó un análisis explícito de los procedimientos computacionales presentados en este capítulo, tomando como base el concepto de orden de cómputo o complejidad computacional como se le denomina formalmente en el contexto de las matemáticas discretas y que es indispensable para comparar cuantitativamente algoritmos que dan solución a un mismo problema. Esta cuantificación, contempla la cantidad de imágenes intermedias requeridas para implementar los algoritmos correspondientes. En base a estos resultados, se hizo una comparación explicando las distintas ventajas y desventajas entre los métodos convencionales del procesamiento digital de imágenes y los correspondientes a la morfología matemática.

**Capítulo 3.** En este capítulo se expusieron los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos difusos y el marco conceptual del procesamiento de imágenes difuso. Las contribuciones de este capítulo son:

- Se demostraron algunas de las propiedades fundamentales de las normas y conormas triangulares (Apéndice A).
- Para aclarar el marco conceptual del FIP se presentaron algunos ejemplos de mejoramiento del contraste en imágenes exponiendo las técnicas de PDI que se basan en conceptos similares. Para el *mejoramiento por transformaciones puntuales*, se explicó

e ilustró la corrección-gamma (PDI) y la minimización de la difusividad (FIP). Para el *mejoramiento basado en el histograma* se explicaron la igualación y especificación del histograma (PDI) y el mejoramiento- $\lambda$  difuso (FIP).

**Capítulo 4.** En este capítulo se presentaron las técnicas difusas de detección de bordes y adelgazamiento de objetos, siendo las contribuciones las que a continuación se listan:

- Se analizó la función de membresía de detección de bordes para determinar el valor de asignación máximo a un borde. Para ejemplificarla, se aplicó en algunos bordes típicos y se graficó su comportamiento como puede verse en la Fig. 4.2. Por otra parte, se redefinió la función de membresía para la caracterización de bordes de modo que se pueda aplicar usando una ventana de tamaño  $5 \times 5$  píxeles y se realizó la implementación computacional de las dos versiones de ésta caracterización. También, se ejemplificó mediante la Fig. 4.4, la aplicación de la función de membresía de borde sobre una región homogénea y otra heterogénea.
- En el método de Russo-Ramponi se definieron matemáticamente las funciones de membresía premisa y consecuentes, que se encuentran de forma parcial o incompleta en la literatura técnica. Se explicaron estas reglas sobre una región homogénea y otra heterogénea mediante la Fig 4.13 y los resultados obtenidos con imágenes se muestran en el Cuadro 4.1.
- A partir de la versión del esqueleto morfológico binario dado en la Sección 2.2.2 se extendió este mismo concepto al esqueleto morfológico difuso (EMD), incluyendo su implementación programática y los resultados correspondientes a imágenes quasi-binarias.

## 5.4. Trabajos relacionados

Algunos de los trabajos presentados por el autor relacionados con este trabajo son:

- Se presentó el resumen en extenso [10] “Esqueletización y Adelgazamiento de Objetos Binarios” en la memoria técnica del 7º Encuentro de Investigación del INAOE, realizado en las instalaciones del mismo en noviembre de 2006.

- Se participó mediante Sesión Mural en el 7º Encuentro de Investigación del INAOE, presentando el trabajo [10] “Esqueletización y Adelgazamiento de Objetos Binarios” en noviembre de 2006.
- Se expusó la plática “Procesamiento Difuso de Imágenes,” en el seminario de instrumentación de la coordinación de óptica durante el periodo enero-mayo de 2007.
- La parte correspondiente al esqueleto morfológico difuso y sus diversas implementaciones incluyendo resultados con imágenes quasi-binarias ha sido presentado recientemente en la memoria en extenso “Esqueletización Morfológica Difusa” [11].
- Se presentó la ponencia [11] “Esqueletización Morfológica Difusa” en el IV Taller de Procesamiento de Imágenes realizado en el CIMAT en agosto de 2007.

## 5.5. Trabajo futuro

El trabajo a futuro consistirá en optimizar la implementación de las técnicas difusas de detección de bordes y adelgazamiento de objetos, principalmente aquellas dirigidas a la obtención del eje medio con el fin de reducir el orden de cómputo de tales métodos, ya que en la actualidad realizan muchas operaciones iterativas y requieren un cierto número de imágenes intermedias. Además, es de interés investigar el comportamiento de los operadores de la morfología matemática difusa cuando se utilizan distintos elementos estructurales e indagar otras técnicas y herramientas de la teoría de los conjuntos difusos aplicables al procesamiento digital de imágenes que puedan servir para mejorar los algoritmos aquí descritos.

# Apéndice A

## Demostraciones matemáticas

### A.1. Operadores para detección de bordes

En este apartado, se presenta la equivalencia entre la magnitud del gradiente, Ec. (2.8), con la aproximación de ésta, Ec. (2.9), para detectar bordes en la dirección horizontal y vertical utilizando los operadores de Prewitt y Sobel, aunque sólo se utilizan los operadores de Prewitt en esta demostración, pues se usa el mismo argumento para los operadores de Sobel.

La magnitud del gradiente y su aproximación, se definieron respectivamente como

$$\begin{aligned} |\nabla f(x, y)| &= \sqrt{G_x^2 + G_y^2}, \\ |\nabla f(x, y)| &\simeq |G_x| + |G_y|. \end{aligned}$$

Además, los operadores de Prewitt son

$$\begin{aligned} G_x &= (p_7 + p_6 + p_5) - (p_9 + p_2 + p_3), \\ G_y &= (p_3 + p_4 + p_5) - (p_9 + p_8 + p_7). \end{aligned}$$

Para bordes orientados verticalmente  $G_x = 0$  y  $G_y \neq 0$ , de modo que al sustituir en la magnitud del gradiente se tiene

$$\begin{aligned} |\nabla f(x, y)| &= \sqrt{G_x^2 + G_y^2} = \\ &= \sqrt{0^2 + G_y^2} = \\ &= \sqrt{G_y^2} = |G_y|. \end{aligned}$$

Este resultado es el mismo si se sustituyera en la aproximación de la magnitud del gradiente, i.e.,

$$\begin{aligned} |\nabla f(x, y)| &\simeq |G_x| + |G_y| = \\ &= |0| + |G_y| = |G_y|. \end{aligned}$$

De manera parecida, para bordes en la dirección horizontal  $G_x \neq 0$  y  $G_y = 0$ , de modo que

$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{G_x^2} = |G_x|.$$

Con esto, se demuestra la equivalencia de las Ecs. (2.8) y (2.9) para la detección de bordes horizontales y verticales.

## A.2. Propiedades de los operadores- $s$

En este apartado, se presenta un ejemplo de demostraciones para algunas de las propiedades que satisfacen, en particular, los operadores norma y conorma triangular para  $s = 1$  dados por  $T_1(x, y) = xy$  y  $S_1(x, y) = x + y - xy$ .

**Conmutatividad.** Se denota como

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= T_1(y, x), \\ S_1(x, y) &= S_1(y, x). \end{aligned}$$

Demostración. Empleando la conmutatividad de la multiplicación,  $T_1(x, y)$  se reescribe como

$$T_1(x, y) = xy = yx = T_1(y, x).$$

Para  $S_1(x, y)$  se utiliza la conmutatividad de la suma y de la multiplicación, se tiene

$$\begin{aligned} S_1(x, y) &= x + y - xy = y + x - xy = \\ &= y + x - yx = S_1(y, x) \end{aligned}$$

**Asociatividad.** Se denota como

$$\begin{aligned} T_1(T_1(x, y), z) &= T_1(x, T_1(y, z)), \\ S_1(S_1(x, y), z) &= S_1(x, S_1(y, z)). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Demostración. Empleando la asociatividad de la multiplicación, para  $T_1(T_1(x, y), z)$  se observa que

$$\begin{aligned} T_1(T_1(x, y), z) &= T_1(xy, z) = (xy)z = x(yz) = \\ &= T_1(x, yz) = T_1(x, T_1(y, z)). \end{aligned}$$

De manera similar, para  $S_1(S_1(x, y), z)$  se tiene

$$\begin{aligned} S_1(S_1(x, y), z) &= S_1(x + y - xy, z) = \\ &= x + y - xy + z - z(x + y - xy) = \\ &= x + y + z - yz - x(y + z - yz) = \\ &= S_1(x, y + z - yz) = S_1(x, S_1(y, z)). \end{aligned}$$

**Propiedades de frontera.** Se definen como  $T_1(1, 1) = 1$  y  $S_1(0, 0) = 0$ .

Demostración. Evaluando  $T_1(x, y)$  con  $x = y = 1$ , se tiene

$$T_1(1, 1) = 1(1) = 1.$$

Evaluando  $S_1(x, y)$  con  $x = y = 0$ , se tiene

$$S_1(0, 0) = 0 + 0 - 0(0) = 0.$$

Estas propiedades se cumplen para todas las normas y conormas de la familia de Frank.

**$T_1$  y  $S_1$  son continuas**

Para una demostración rigurosa de este axioma véase [14].

**$T_1$  y  $S_1$  incrementan con respecto a sus dos argumentos**

Demostración. Sea  $\delta > 0$ , para  $\delta, a \in I$ , sustituyendo  $x = y = a$  en  $T_1(x, y)$  se tiene

$$T_1(a, a) = aa = a^2.$$

Conservando  $x = a$  e incrementando  $y$  en  $\delta$ , esto es  $y = a + \delta$ , se tiene

$$T_1(a, a + \delta) = a(a + \delta) = a^2 + a\delta.$$



Suponemos que los resultados obtenidos se relacionan como

$$a^2 \leq a^2 + a\delta \Leftrightarrow a \leq a + \delta.$$

Como la condición  $a \leq a + \delta$  es verdadera, se demuestra que  $T_1(x, y)$  incrementa con respecto al segundo argumento. Esto resulta equivalente a incrementar el primer argumento y mantener el segundo. Por otra parte, al evaluar  $S_1(x, y)$  con  $x = y = a$ , se tiene

$$S_1(a, a) = a + a - aa = 2a - a^2.$$

Conservando  $x = a$  e incrementando  $y$  en  $\delta$ , se tiene

$$\begin{aligned} S_1(a, a + \delta) &= a + (a + \delta) - a(a + \delta) = \\ &= 2a + \delta - a^2 - a\delta. \end{aligned}$$

Comparando los resultados obtenidos, se tiene

$$\begin{aligned} 2a - a^2 &\leq 2a + \delta - a^2 - a\delta \Leftrightarrow \\ 0 &\leq \delta - a\delta \Leftrightarrow a \leq 1. \end{aligned}$$

La condición  $a \leq 1$  es verdadera ya que  $0 \leq a \leq 1$  puesto que  $I = [0, 1]$ . Con esto se demuestra que  $S_1(x, y)$  incrementa con respecto al primer argumento. El mismo resultado se obtiene incrementando el primer argumento y manteniendo el segundo.

### A.3. Factores fusificadores $F_e$ y $F_d$

En este apartado, se hace el cálculo explícito del factor fusificador  $F_d$  a partir del valor dado para el factor fusificador  $F_e$ ; factores utilizados en el procedimiento para la minimización de la difusividad. Recuérdese que los factores  $F_d$  y  $F_e$  controlan la cantidad de ambigüedad de gris en el espacio de membresía y los valores típicos de  $F_e$  son 1 ó 2. Además, el valor de  $F_d$  se calcula respecto al punto de cruce  $g_c$ , para el cual, en la función de membresía de la Ec. (3.31), se tiene  $\mu(g_c) = 0.5$  (*difusividad maximal*).

**A3.1** Suponiendo que  $F_e = 1$ ,  $\mu(g_c) = 0.5$  y sustituyendo en la Ec. (3.31), se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{2} = \left[ 1 + \frac{g_{max} - g_c}{F_d} \right]^{-1} = \left[ \frac{F_d + (g_{max} - g_c)}{F_d} \right]^{-1} = \frac{F_d}{F_d + (g_{max} - g_c)},$$

por lo tanto

$$F_d + (g_{max} - g_c) = 2F_d \Rightarrow F_d = g_{max} - g_c.$$

Entonces, para  $F_e = 1$  y  $F_d = g_{max} - g_c$ , la Ec. (3.31) se calcula como

$$\mu(g) = \left[ 1 + \frac{g_{max} - g}{g_{max} - g_c} \right]^{-1}.$$

**A3.2** Ahora para  $F_e = 2$ ,  $\mu(g_c) = 0.5$  y sustituyendo en la Ec. (3.31), se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{2} = \left[ 1 + \frac{g_{max} - g_c}{F_d} \right]^{-2} = \left[ \frac{F_d + (g_{max} - g_c)}{F_d} \right]^{-2} = \frac{F_d^2}{[F_d + (g_{max} - g_c)]^2},$$

por lo tanto

$$F_d^2 - 2F_d(g_{max} - g_c) - (g_{max} - g_c)^2 = 0.$$

Resolviendo para  $F_d$  se obtiene que

$$F_d = (g_{max} - g_c)(1 \pm \sqrt{2}).$$

Entonces, para  $F_e = 2$  y  $F_d = (g_{max} - g_c)(1 \pm \sqrt{2})$  la Ec. (3.31) se calcula como

$$\mu(g) = \left[ 1 + \frac{g_{max} - g}{(g_{max} - g_c)(1 \pm \sqrt{2})} \right]^{-2}.$$

## A.4. Derivada del índice de difusividad $\gamma(\lambda)$

En este apartado, se deduce la derivada presentada en la Ec. (3.41) a partir del índice de difusividad lineal modificado, Ec. (3.40). En esta ecuación se define el índice de difusividad lineal como

$$\gamma(\lambda) = \frac{4}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g) \mu_{\lambda}^*(g) (1 - \mu_{\lambda}^*(g)).$$

Derivando la Ec. 3.40, se tiene

$$\frac{d}{d\lambda}\gamma(\lambda) = \frac{4}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g) \frac{d}{d\lambda} [\mu_{\lambda}^*(g)(1 - \mu_{\lambda}^*(g))],$$

en donde

$$\frac{d}{d\lambda} [\mu_{\lambda}^*(g)(1 - \mu_{\lambda}^*(g))] = \mu_{\lambda}^*(g) \frac{d}{d\lambda} (1 - \mu_{\lambda}^*(g)) + (1 - \mu_{\lambda}^*(g)) \frac{d}{d\lambda} \mu_{\lambda}^*(g)$$

el valor de  $\mu_{\lambda}^*(g)$  se definió como

$$\mu_{\lambda}^*(g) = \frac{(1 + \lambda)\mu(g)}{1 + \lambda\mu(g)}$$

sustituyendo  $\mu_{\lambda}^*(g)$  y abreviando  $\mu(g)$  por  $\mu$  se tiene

$$\frac{d}{d\lambda} [\mu_{\lambda}^*(g)(1 - \mu_{\lambda}^*(g))] = \frac{(1 + \lambda)\mu}{1 + \lambda\mu} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1 - \mu}{1 + \lambda\mu} \right] + \frac{1 - \mu}{1 + \lambda\mu} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{(1 + \lambda)\mu}{1 + \lambda\mu} \right].$$

El primer término se desarrolla como

$$\frac{(1 + \lambda)\mu}{1 + \lambda\mu} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1 - \mu}{1 + \lambda\mu} \right] = \frac{(1 + \lambda)\mu}{1 + \lambda\mu} \frac{(\mu - 1)\mu}{(1 + \lambda\mu)^2} = \frac{\mu^3 + \lambda\mu^3 - \mu^2 - \lambda\mu^2}{(1 + \lambda\mu)^3},$$

el segundo término queda así

$$\begin{aligned} \frac{1 - \mu}{1 + \lambda\mu} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{(1 + \lambda)\mu}{1 + \lambda\mu} \right] &= \frac{1 - \mu}{1 + \lambda\mu} \frac{(1 + \lambda\mu)\mu - (1 + \lambda)\mu^2}{(1 + \lambda\mu)^2} = \\ &= \frac{1 - \mu}{1 + \lambda\mu} \frac{\mu - \mu^2}{(1 + \lambda\mu)^2} = \frac{\mu^3 - 2\mu^2 + \mu}{(1 + \lambda\mu)^3}, \end{aligned}$$

sumando ambos términos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\mu^3 + \lambda\mu^3 - \mu^2 - \lambda\mu^2}{(1 + \lambda\mu)^3} + \frac{\mu^3 - 2\mu^2 + \mu}{(1 + \lambda\mu)^3} &= \frac{2\mu^3 + \lambda\mu^3 - 3\mu^2 - \lambda\mu^2 + \mu}{(1 + \lambda\mu)^3} = \\ &= \frac{\mu - (3 + \lambda)\mu^2 + (2 + \lambda)\mu^3}{(1 + \lambda\mu)^3}, \end{aligned}$$

finalmente, sustituyendo en la derivada se tiene

$$\frac{d}{d\lambda}\gamma(\lambda) = \frac{4}{MN} \sum_{g=0}^{L-1} h(g) \frac{\mu(g) - (3 + \lambda)\mu^2(g) + (2 + \lambda)\mu^3(g)}{(1 + \lambda\mu(g))^3}.$$

# Apéndice B

## Ejemplos de Algoritmos

En este apartado se presenta un grupo de algoritmos realizados en el programa de paquetería Mathcad. Estos algoritmos corresponden a algunas de las técnicas de detección de bordes y adelgazamientos tratadas en esta tesis. En los siguientes programas, la imagen de entrada es denotada por  $A$ .

### B.1. Operadores de Sobel

Para el programa correspondiente a la detección de bordes aplicando los operadores de Sobel, se utiliza una mascarilla  $Kh$  que detecta bordes en la dirección horizontal, de igual manera, se define la mascarilla  $Kv$  para detectar bordes en la dirección vertical, estas mascarillas se presentan en la Fig. B.1.

$$Kh := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Kv := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura B.1: mascarillas de Sobel para la detección de bordes en las direcciones: izq., horizontal; der., vertical.

Este método fue presentado en la Sección 2.1.1 y su implementación se muestra en la Fig. B.2. En el caso de imágenes binarias, después de aplicar el programa de la Fig. B.2, resulta necesario aplicar una binarización a la imagen de salida; en Mathcad, esto se puede lograr con la instrucción  $\text{binarize}(A, 1)$ . Para imágenes en escala de grises la aplicación del programa es directa.

$$\begin{array}{l}
 \text{Sobel}(A, Kh, Kv) := \left\{ \begin{array}{l}
 M \leftarrow \text{rows}(A) \\
 N \leftarrow \text{cols}(A) \\
 \text{for } x \in 1..M-2 \\
 \quad \text{for } y \in 1..N-2 \\
 \quad \quad \left\{ \begin{array}{l}
 Hh_{x,y} \leftarrow \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 A_{x-i,y-j} \cdot Kh_{i+1,j+1} \\
 Hv_{x,y} \leftarrow \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 A_{x-i,y-j} \cdot Kv_{i+1,j+1}
 \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\
 H \leftarrow \sqrt{Hh^2 + Hv^2}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Figura B.2: algoritmo para obtener los bordes de una imagen aplicando los operadores de Sobel.

Como se puede observar en la figura anterior los parámetros de entrada al programa de detección de bordes mediante los operadores de Sobel son: la imagen de entrada  $A$ , la matriz  $Kh$  para detección de bordes horizontales y la matriz  $Kv$  para detección de bordes verticales.

## B.2. Adelgazamientos de Zhang & Suen

Este método de adelgazamiento fue presentado en la Sección 2.1.3 y el programa implementado en Mathcad se muestra en la Fig. B.5. Como se mencionó en el Capítulo 2, un pixel de la imagen  $A$  debe cumplir con ciertas condiciones para ser eliminado; para evaluar éstas, es necesario obtener cierta información de la vecindad del pixel en cuestión, a saber, la cantidad de pixeles vecinos distintos de cero y el número de transiciones de 0 a 1 de

los pixeles  $p_2, \dots, p_9$  ordenados en el sentido de las manecillas del reloj, las instrucciones correspondientes se muestran respectivamente en las Figs. B.3 y B.4.

$$\text{CondA}(A, x, y) := \left| \begin{array}{l}
 T \leftarrow 0 \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x-1, y} < A_{x-1, y+1}, 1, 0) \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x-1, y+1} < A_{x, y+1}, T + 1, T) \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x, y+1} < A_{x+1, y+1}, T + 1, T) \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x+1, y+1} < A_{x+1, y}, T + 1, T) \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x+1, y} < A_{x+1, y-1}, T + 1, T) \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x+1, y-1} < A_{x, y-1}, T + 1, T) \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x, y-1} < A_{x-1, y-1}, T + 1, T) \\
 T \leftarrow \text{if}(A_{x-1, y-1} < A_{x-1, y}, T + 1, T)
 \end{array} \right.$$

Figura B.3:  $\text{CondA}(A, x, y)$  define el número de transiciones de 0 a 1 en la secuencia de pixeles  $p_2, p_3, \dots, p_8, p_9, p_2$ .

El programa de adelgazamiento puede utilizarse de manera directa en imágenes binarias. Por otra parte, una manera de obtener el eje central de una imagen en escala de grises empleando este algoritmo, se puede realizar aplicando previamente a la imagen que va a ser procesada una cierta umbralización, que debe basarse en la naturaleza misma de la imagen, de modo que se obtenga una imagen binaria para poder así procesarla.

$$\text{CondB}(A, x, y) := \left| \begin{array}{l}
 S1 \leftarrow A_{x-1, y} + A_{x-1, y+1} + A_{x, y+1} + A_{x+1, y+1} \\
 S2 \leftarrow A_{x+1, y} + A_{x+1, y-1} + A_{x, y-1} + A_{x-1, y-1} \\
 S \leftarrow S1 + S2
 \end{array} \right.$$

Figura B.4:  $\text{CondB}(A, x, y)$  define la cantidad de pixeles vecinos de  $p_1$  distintos de cero.

```

Adelgazamiento(A) :=
  M ← rows(A)
  N ← cols(A)
  CM-1,N-1 ← 0
  z ← 1
  while z = 1
    for x ∈ 1..M-2
      for y ∈ 1..N-2
        R ← CondB(A, x, y)
        T ← CondA(A, x, y)
        CIx,y ← (Ax-1,y·Ax,y+1·Ax+1,y) = 0 ∧ (Ax,y+1·Ax+1,y·Ax,y-1) = 0
        Cx,y ← if[(2 ≤ R ≤ 6) ∧ T = 1 ∧ CIx,y = 1, 0, 1]
        →
      D ← (C ∧ A)
      for x ∈ 1..M-2
        for y ∈ 1..N-2
          R ← CondB(D, x, y)
          T ← CondA(D, x, y)
          CIx,y ← (Dx-1,y·Dx,y+1·Dx,y-1) = 0 ∧ (Dx,y+1·Dx+1,y·Dx,y-1) = 0
          Cx,y ← if[(2 ≤ R ≤ 6) ∧ T = 1 ∧ CIx,y = 1, 0, 1]
          →
        B ← (C ∧ D)
        z ← if(reerror(A, B) = 0, 0, 1)
        A ← B
  A

```

Figura B.5: programa de adelgazamiento de Zhang & Suen aplicado a la imagen de entrada  $A$ .

### B.3. Esqueleto morfológico optimizado

Este método de esqueletización es una versión optimizada del algoritmo introducido por J. Serra [32], presentado en la Sección 2.2.2. Fue empleado para la consecución del esqueleto basado en el principio de superposición por umbral descrito en la Sección 4.2.1. El programa correspondiente se muestra en la Fig. B.6.

$$\begin{array}{l}
\text{Esqueleto\_opt}(A, th) := \left| \begin{array}{l}
B \leftarrow A - A \\
C \leftarrow B \\
D \leftarrow B \\
x \leftarrow 1 \\
\text{while } x = 1 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
\overrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\
C \leftarrow (C \vee D) \\
E \leftarrow \text{erode8}(A, th) \\
O \leftarrow \text{dilate8}(E, th) \\
D \leftarrow A - O \\
A \leftarrow E \\
x \leftarrow \text{if}(A = B, 0, 1)
\end{array} \right. \\
C
\end{array} \right.
\end{array}$$

Figura B.6: implementación del esqueleto morfológico optimizado presentado por P. A. Maragos en [23]. El valor de  $th$  empleado en el programa es 1.

## B.4. Minimización de la difusividad

Este procedimiento se presentó en la Sección 3.5.1. La implementación de la etapa correspondiente a la fusificación se presenta en la Fig. B.7.

$$\mu(g, gm, gc, Fe) := \left| \begin{array}{l}
gd \leftarrow gm - gc \\
Fd \leftarrow \text{if}[Fe = 2, (1 + \sqrt{2}) \cdot gd, gd] \\
v \leftarrow \left(1 + \frac{gm - g}{Fd}\right)^{-Fe}
\end{array} \right.$$

Figura B.7: etapa de fusificación del método de minimización de la difusividad.

Por otro lado, para la modificación de los niveles de membresía, se utiliza el intensificador de Zadeh presentado en la Fig. B.8. Asimismo, la etapa de defusificación utilizada en este método se presenta en la Fig. B.9.



$$\mu p(mu) := if[ mu \leq 0.5, 2 \cdot mu^2, 1 - 2 \cdot (1 - mu)^2 ]$$

Figura B.8: definición del intensificador de Zadeh para modificar los valores de membresía.

$$gp(gm, gc, Fe, mup) := \left\{ \begin{array}{l} gd \leftarrow gm - gc \\ Fd \leftarrow if[ Fe = 2, (1 + \sqrt{2}) \cdot gd, gd ] \\ a \leftarrow \left( 1 + \frac{gm}{Fd} \right)^{-Fe} \\ v \leftarrow if[ a \leq mup \leq 1, gm - Fd \cdot \left( mup^{\frac{-1}{Fe}} - 1 \right), mup ] \end{array} \right.$$

Figura B.9: etapa de defusificación del método de minimización de la difusividad.

Finalmente, el programa para minimizar la difusividad de una imagen se muestra en la Fig. B.10.

$$Mindifusividad(A, Fe) := \left\{ \begin{array}{l} m \leftarrow rows(A) \\ n \leftarrow cols(A) \\ gm \leftarrow 255 \\ gc \leftarrow mean(A) \\ for \ i \in 0 .. m - 1 \\ \quad for \ j \in 0 .. n - 1 \\ \qquad B_{i,j} \leftarrow gp(gm, gc, Fe, \mu p(\mu(A_{i,j}, gm, gc, Fe))) \\ B \end{array} \right.$$

Figura B.10: programa para minimizar la difusividad de una imagen A.

Los valores de  $F_e$  empleados en este programa fueron los mencionados en la Sección 3.5.1.

## B.5. Caracterización difusa de bordes

Este procedimiento de detección de bordes se describió en la Sección 4.1.1. Para encontrar el máximo valor dentro de la vecindad de un pixel dentro de la imagen  $A$  se usan las instrucciones presentadas en la Fig. B.11.

$$\begin{aligned} nbrs(A, x, y) &:= (A_{x-1, y-1} \ A_{x-1, y} \ A_{x-1, y+1} \ A_{x, y-1} \ A_{x, y} \ A_{x, y+1} \ A_{x+1, y-1} \ A_{x+1, y} \ A_{x+1, y+1}) \\ \Delta(A, x, y) &:= \max(nbrs(A, x, y)) \end{aligned}$$

Figura B.11: definiciones para encontrar el máximo valor dentro de la vecindad de  $3 \times 3$  pixeles.

En la Fig. B.12 se muestra la función de membresía utilizada para la caracterización de los bordes de la imagen  $A$ .

$$edginess(A, x, y) := 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\Delta(A, x, y)} \cdot \sum_{i=x-1}^{x+1} \sum_{j=y-1}^{y+1} |A_{x,y} - A_{i,j}|}$$

Figura B.12: función de membresía para caracterizar los bordes de una imagen  $A$ .

Enseguida, los valores de pertenencia obtenidos con la función de membresía mostrada anteriormente pueden modificarse mediante alguno de los operadores mostrados en la Fig. B.13.

$$\begin{aligned} int\_z(mu) &:= if[ mu \leq 0.5, 2 \cdot mu^2, 1 - 2 \cdot (1 - mu)^2 ] \\ conc(mu) &:= mu^2 \\ dil(mu) &:= \sqrt{mu} \end{aligned}$$

Figura B.13: operadores para modificar los niveles de pertenencia de la función de membresía de borde.

Finalmente, utilizando las instrucciones anteriores, en la Fig. B.14 se presenta el programa empleado para obtener los bordes de una imagen  $A$ . El parámetro  $\Gamma = 1$  es utilizado para

aplicar el intensificador de Zadeh, con  $\Gamma = 2$  se aplica el operador de concentración y con  $\Gamma = 3$  se aplica el operador de dilatación a los niveles de membresía de la imagen  $A$ .

$$\begin{array}{l}
 \text{Edge}(A, \Gamma) := \left| \begin{array}{l}
 M \leftarrow \text{rows}(A) \\
 N \leftarrow \text{cols}(A) \\
 U_{M+1, N+1} \leftarrow 0 \\
 \text{for } x \in 0..M-1 \\
 \quad \text{for } y \in 0..N-1 \\
 \quad \quad U_{x+1, y+1} \leftarrow A_{x, y} \\
 \text{for } x \in 1..M \\
 \quad \text{for } y \in 1..N \\
 \quad \quad \left| \begin{array}{l}
 E_{x-1, y-1} \leftarrow \text{if}(\Delta(U, x, y) = 0, 0, \text{edginess}(U, x, y)) \\
 mu \leftarrow E_{x-1, y-1} \\
 E_{x-1, y-1} \leftarrow \text{if}(\Gamma = 1, \text{int\_z}(mu), \text{if}(\Gamma = 2, \text{conc}(mu), \text{dil}(mu)))
 \end{array} \right. \\
 E \leftarrow \text{scale}(E, 0, 255) \\
 \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\
 E \leftarrow \text{floor}(E)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Figura B.14: programa para caracterizar los bordes de una imagen  $A$  considerando regiones de  $3 \times 3$  pixeles.

# Apéndice C

## Imágenes Adicionales

En este apartado se presentan resultados de algunos métodos de detección de bordes y adelgazamientos descritos en este trabajo, los cuales corresponden a un grupo de interferogramas sintetizados digitalmente a base de las aberraciones de Seidel de 3er orden y patrones de difracción de Fraunhofer relativos a aberturas binarias. Tanto las imágenes de prueba utilizadas como las resultantes son de tamaño  $160 \times 160$  píxeles y son imágenes en tonos de gris.

En el Cuadro C.1 se presentan las aberraciones de los interferogramas utilizados en este apéndice, en la Fig. C.1 se muestran los interferogramas 1, 2 y 3 y sus respectivos bordes obtenidos mediante la aplicación de los operadores de Sobel y el gradiente morfológico interno.

Cuadro C.1: Aberraciones de los interferogramas de prueba

<b>Interfer.</b>	<b>Esf.</b>	<b>Astig.</b>	<b>Coma</b>	<b>Defoco</b>	<b>Inc. en <math>x</math></b>	<b>Inc. en <math>y</math></b>
1	0	0	8	1	0	0
2	0	0	18	0.5	0	0
3	0	0	8	0.2	0.1	0.1

En la Fig. C.2 se muestran los patrones de difracción 1, 2 y 3 obtenidos, respectivamente, por aberturas binarias de la forma: 3 subab. en triángulo equilátero, 4 subab. en cuadrado, 5 subab. en pentágono más una al centro, todas las subaberturas tienen forma de cruz y son de tamaño  $3 \times 3$  píxeles. Además, en esta figura se muestran los bordes obtenidos

con los operadores de Sobel y morfológico interno. En las Figs. C.3 y C.4 se presentan los ejes centrales de los interferogramas y patrones de difracción antes mencionados obtenidos mediante el adelgazamiento de Zhang y Suen y también mediante el esqueleto morfológico optimizado. En las Figs. C.5 y C.6 se presentan algunos resultados obtenidos utilizando las técnicas difusas de caracterización de bordes y esqueletización morfológica difusa.

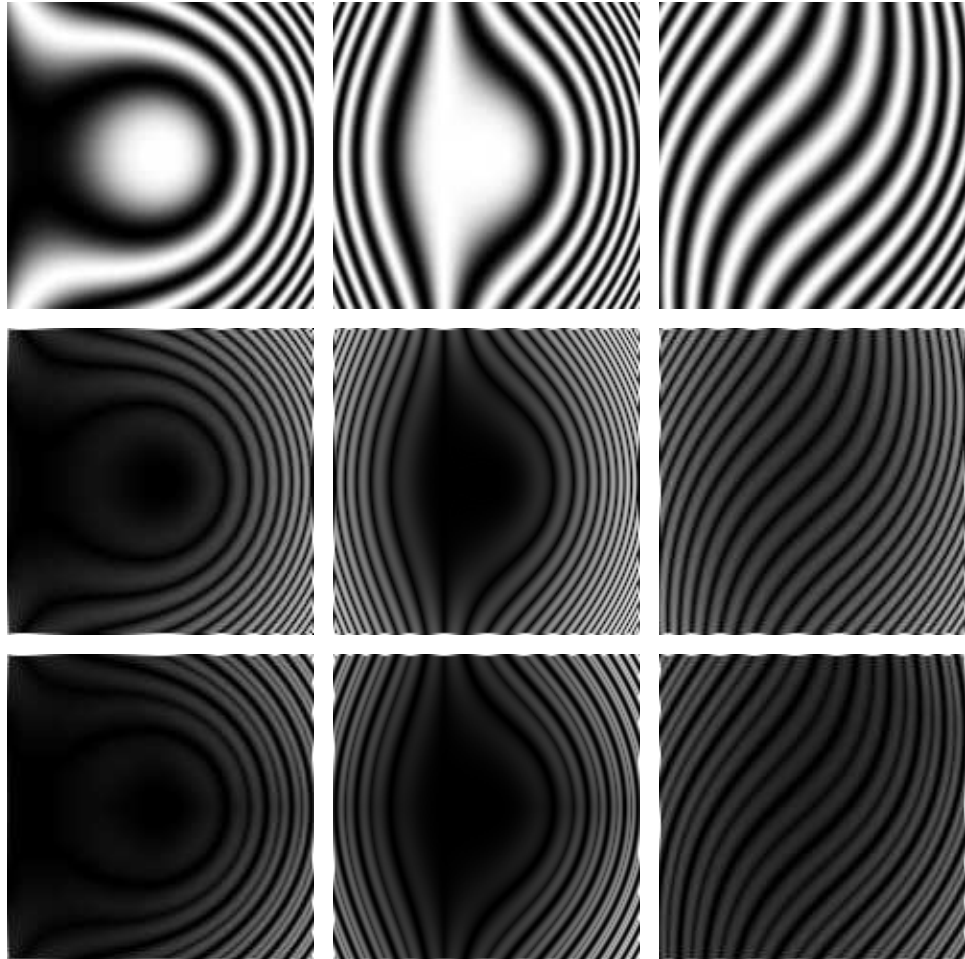


Figura C.1: 1ra. hilera, de izq. a der., interferogramas digitales 1, 2 y 3. 2da. hilera, bordes respectivos obtenidos con operadores de Sobel. 3ra. hilera, bordes obtenidos con gradiente morfológico interno.

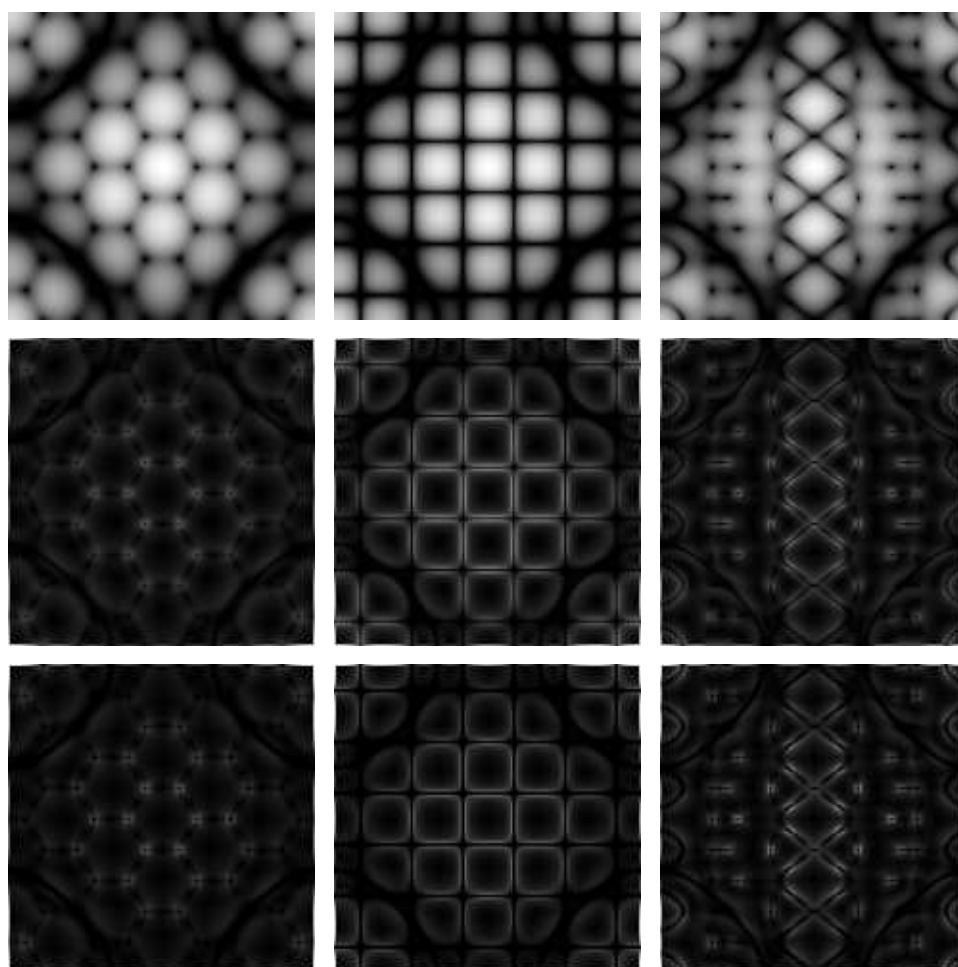


Figura C.2: 1ra. hilera, patrones de difracción obtenidos con aberturas de forma, de izq. a der., triángulo equilátero, cuadrado, pentágono. 2da. hilera, se muestran los bordes correspondientes obtenidos con operadores de Sobel. 3ra. hilera, bordes obtenidos con gradiente morfológico interno.

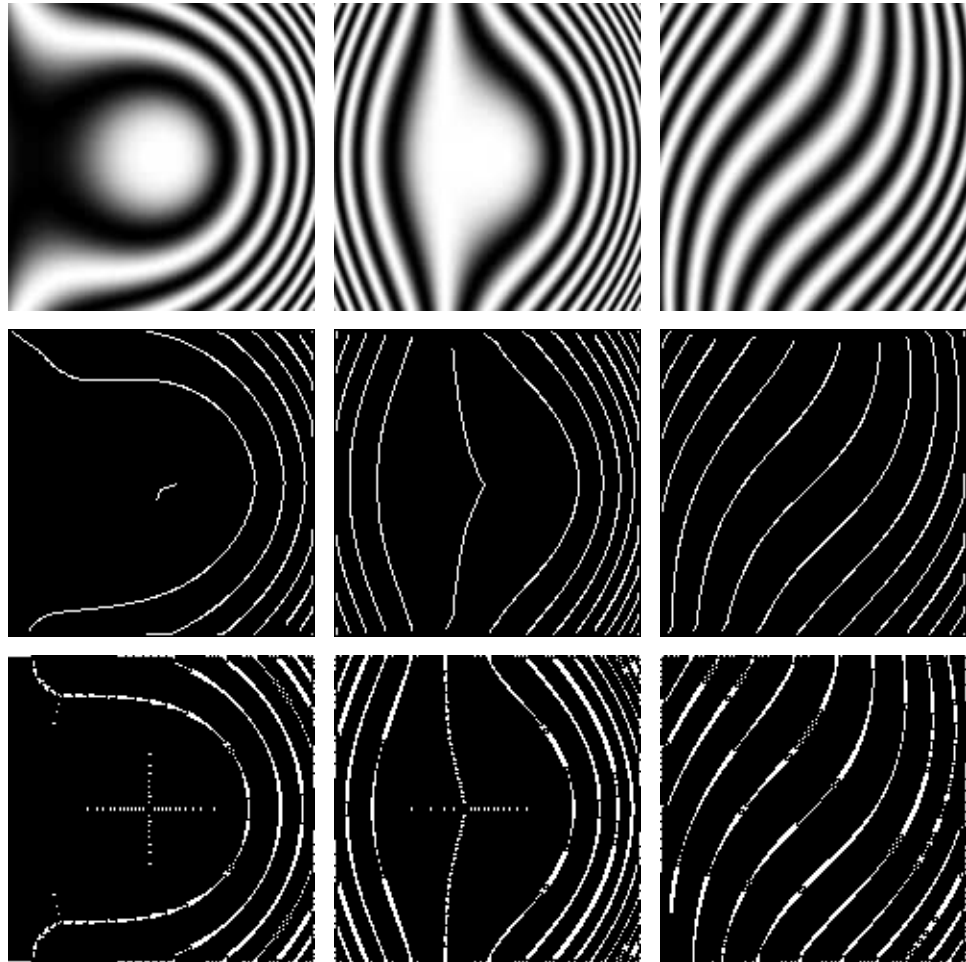


Figura C.3: 1ra. hilera, de izq. a der., interferogramas digitales 1, 2 y 3. 2da. hilera, se presenta el eje central correspondiente a cada interferograma resultado del algoritmo de Zhang y Suen. 3ra. hilera, eje central obtenido mediante esqueletización morfológica optimizada.

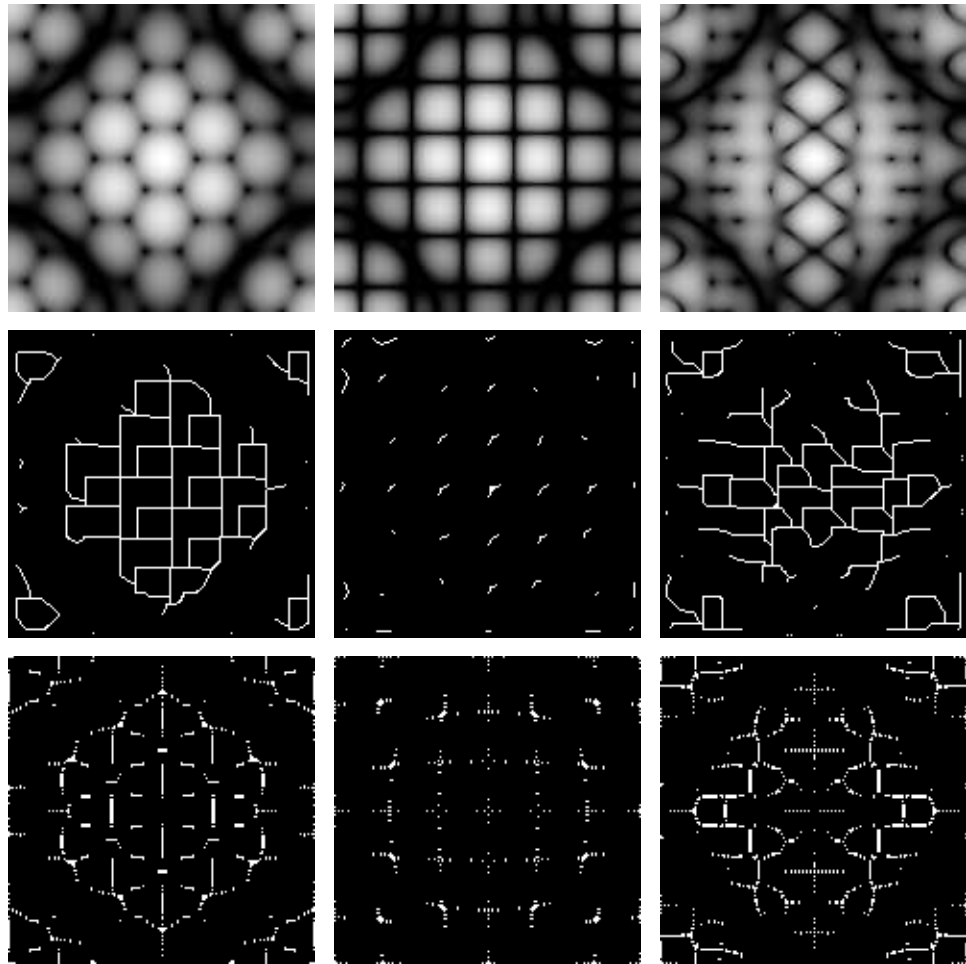


Figura C.4: 1ra. hilera, patrones de difracción obtenidos con aberturas de forma, de izq. a der., triángulo equilátero, cuadrado, pentágono. 2da. hilera, adelgazamientos respectivos obtenidos mediante el algoritmo de Zhang y Suen. 3ra. hilera, esqueletos obtenidos con la esqueletización morfológica optimizada.



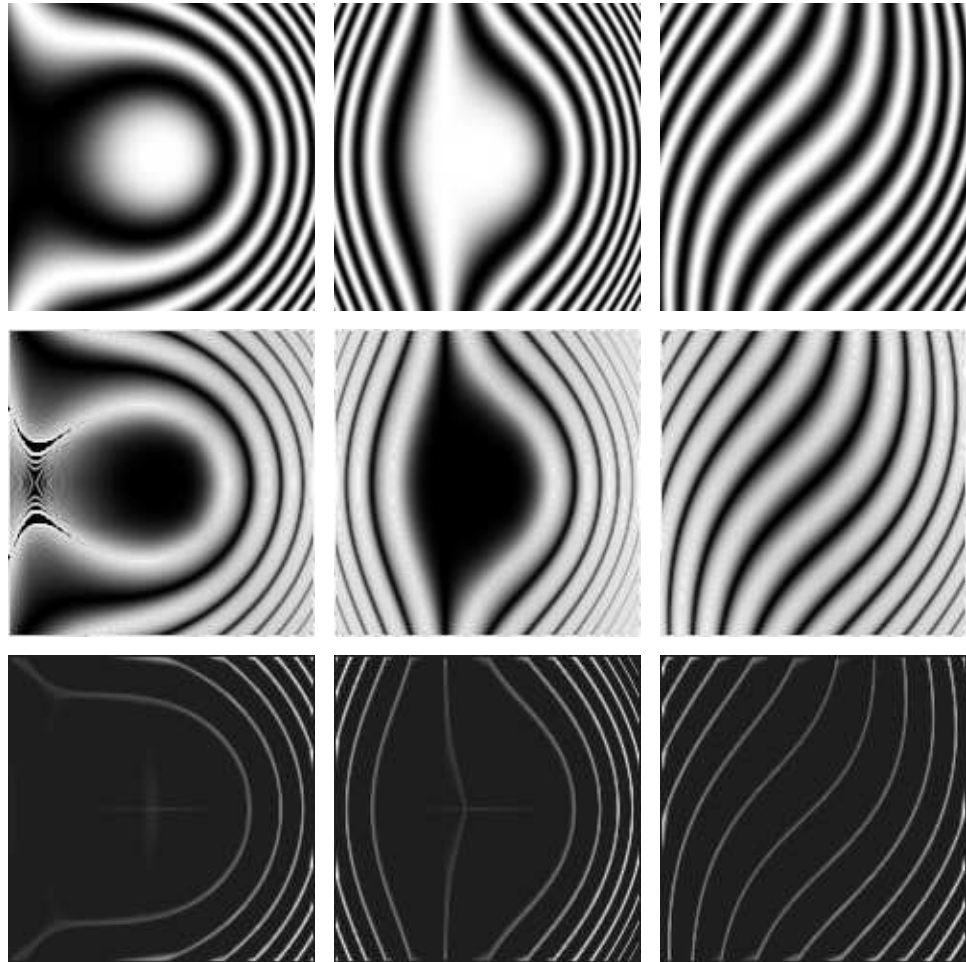


Figura C.5: 1ra. hilera, de izq. a der., interferogramas digitales 1, 2 y 3. 2da. hilera, bordes obtenidos mediante la caracterización difusa de bordes utilizando vecindades de  $3 \times 3$  pixeles. 3ra. hilera, esqueletos morfológicos difusos de cada interferograma.

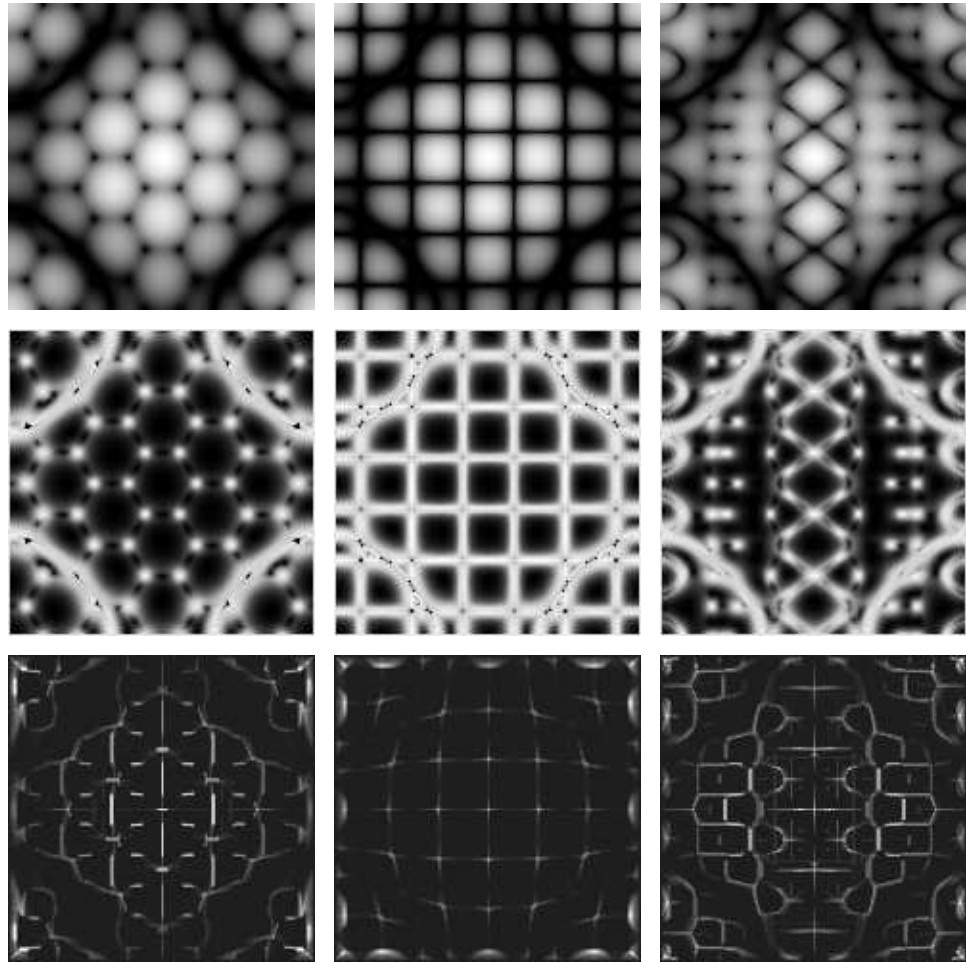


Figura C.6: 1ra. hilera, patrones de difracción obtenidos con aberturas de forma, de izq. a der., triángulo equilátero, cuadrado, pentágono. 2da. hilera, se muestran respectivamente los bordes obtenidos mediante la caracterización difusa. 3ra. hilera, esqueletos obtenidos con la esqueletización morfológica difusa.

# Índice de figuras

1.1.	etapas de digitalización en una dimensión; izq., muestreo de $f(x)$ ; der., cuantización de $f(x)$ . . . . .	5
1.2.	asociación de una imagen digital con un arreglo de números. $f(x, y)$ representa el nivel de gris de cada pixel con posición $(x, y)$ . . . . .	6
1.3.	clasificación de las imágenes considerando su intensidad; izq., imagen en escala de grises; der., imagen binaria. Ambas imágenes son de tamaño $192 \times 192$ pixeles. . .	7
1.4.	vecindad del pixel $p = (x, y)$ ; izq., pixeles vecinos horizontales y verticales; der., pixeles vecinos diagonales. . . . .	8
1.5.	tipos de adyacencia; izq., adyacencia-4; al centro; adyacencia-8, nótese la ambigüedad del pixel central con los pixeles al norte de éste; der., adyacencia-m. . . .	9
1.6.	principios fundamentales de la morfología matemática; 1ra. hilera, compatibilidad ante traslación; 2da. hilera, compatibilidad ante cambios de escala. . . . .	11
1.7.	operaciones morfológicas fundamentales. 1ra. hilera, imágenes binarias; 2da. hilera; imágenes en tonos de gris. Izq., imagen original, al centro, operación de erosión; der., operación de dilatación. . . . .	13
1.8.	izq., conjunto $A$ ; al centro, operación de abertura; der., operación de cerradura . .	14
2.1.	vecindad $f(x, y)$ , al centro se sitúa el pixel con posición $(x, y)$ . . . . .	16
2.2.	ilustración del concepto de derivada; izq., comportamiento de $f(x)$ ; der., el resultado de la derivada en una región homogénea es cero, asimismo, en regiones de variación, la derivada es distinta de cero. . . . .	17
2.3.	mascarilla para definir los operadores de gradiente; los pixeles se encuentran posicionados en el sentido de las manecillas del reloj. . . . .	18

2.4.	maskarillas de Roberts para la detección diagonal de bordes; izq., maskarilla generada por el operador $G_x$ ; der., maskarilla generada por el operador $G_y$ . . . . .	19
2.5.	maskarillas de Prewitt para la detección de bordes; izq., maskarilla para la detección vertical; der., maskarilla para la detección horizontal. . . . .	19
2.6.	maskarillas de Sobel para la detección de bordes; izq., maskarilla para la detección vertical; der., maskarilla para la detección horizontal. . . . .	20
2.7.	aplicación de una maskarilla de Prewitt para procesar el pixel central; 1ra. hilera, aplicación de la maskarilla horizontal sobre una región homogénea; 2da. hilera, aplicación de la maskarilla sobre una región no homogénea. . . . .	20
2.8.	detección de bordes; 1ra. hilera, imágenes binarias; 2da. hilera, imágenes en tonos de gris; de izq. a der., imagen original, detección con maskarilla de Roberts, detección con Prewitt y detección con Sobel. . . . .	21
2.9.	1ra. hilera, figuras geométricas elementales: triángulo, círculo, rectángulo y cuadrado; 2da. hilera, esqueletos sobrepuestos, respectivamente, en las figuras geométricas elementales. . . . .	22
2.10.	creación del eje medio a través de frentes de onda generados por un objeto. El punto de colisión marcado con $t_1$ corresponde a la parte más angosta del objeto mientras que el punto de colisión marcado con $t_2$ corresponde a la parte más ancha del objeto y $t_2 > t_1$ . Las flechas en la imagen representan la dirección de los frentes de onda generados. . . . .	23
2.11.	direcciones utilizadas para el trazo de barrido. . . . .	27
2.12.	de izq. a der., imagen original, esqueleto de Zhang y Suen, esqueleto de Lü y Wang. . . . .	29
2.13.	detección de bordes utilizando los gradientes, de izq. a der., morfológico discreto, morfológico interno, morfológico externo. . . . .	31
2.14.	izq., imagen original, der., esqueleto morfológico de la imagen original. . . . .	32
2.15.	conjuntos de elementos estructurales para eliminar los bordes de una imagen; 1ra. hilera, eliminación de los bordes, de izq. a der., noroeste, noreste, sureste y suroeste; 2da. hilera, eliminación de los bordes, de izq. a der., norte, este, sur y oeste. . . . .	33
3.1.	1ra. hilera, representación de dos conjuntos difusos $A$ y $B$ por sus funciones de membresía, $f_A$ y $f_B$ ; 2da. hilera, izq., representación de la unión de dos conjuntos difusos; der., representación de la intersección de dos conjuntos difusos. . . . .	41

3.2.	marco teórico del procesamiento de imágenes difuso. . . . .	46
3.3.	gráficas de la corrección-gamma con $c = 1$ y $\gamma = 0.15, 0.5, 1, 3, 20$ . Se muestra el valor de gamma utilizado sobre cada gráfica. . . . .	49
3.4.	operador de intensificación de Zadeh. . . . .	50
3.5.	mejoramiento de imágenes mediante minimización de la difusividad. Izq., imagen original; al centro, resultado después de dos iteraciones; der., resultado después de tres iteraciones. 1ra. hilera, imágenes de semillas de trigo de tamaño $221 \times 221$ pixeles. 2da. hilera, imágenes de paseo en bote de tamaño $256 \times 256$ pixeles. . . .	52
3.6.	der., histograma de la imagen a la izq., la concentración hacia la izquierda del histograma resulta en una imagen oscura. . . . .	53
3.7.	función de distribución acumulada para generar nuevos niveles de gris para la imagen de la Fig. 3.6. . . . .	54
3.8.	izq., resultado de la igualación del histograma para la imagen de la Fig. 3.6; der., histograma de la imagen mejorada con mejor distribución de los tonos de gris. . .	55
3.9.	1ra. hilera, izq., imagen original; der., histograma de esta imagen; 2da. hilera, izq., imagen resultante de la aplicación de la especificación del histograma; der., histograma especificado. Imagen de tamaño $192 \times 279$ pixeles. . . . .	58
3.10.	izq., imagen original; der., imagen obtenida después de ser procesada por mejoramiento difuso- $\lambda$ . . . . .	59
3.11.	gráfica del índice de difusividad lineal vs. $\lambda$ . . . . .	59
4.1.	ventana de referencia para la caracterización de bordes; los pixeles $p_1, \dots, p_9$ están acomodados en el sentido de las manecillas del reloj. . . . .	61
4.2.	bordes comúnmente detectados; izq., borde diagonal; al centro, borde horizontal, der., borde vertical. . . . .	61
4.3.	función de membresía de algunos bordes típicos. La línea punteada representa el máximo valor de membresía asignado. . . . .	62
4.4.	aplicación de caracterización de bordes sobre: 1ra. hilera, región homogénea de pixeles; 2da. hilera, pixel central aislado. . . . .	63
4.5.	imágenes de izq. a der., original binaria, aplicación del intensificador de Zadeh, original en tonos de gris, aplicación del operador de dilatación. . . . .	63

4.6. imágenes en tonos de gris; de izq. a der., imagen original, resultado del intensificador de Zadeh, resultado del operador de concentración. Ambas imágenes son de tamaño $256 \times 256$ pixeles. . . . .	64
4.7. ventana de $5 \times 5$ para la caracterización de bordes; los pixeles $p_2, p_4, \dots, p_{14}, p_{16}$ no son incluidos en la detección. . . . .	65
4.8. caracterización de bordes utilizando una ventana de $5 \times 5$ pixeles. En estas imágenes se aplicó el operador de concentración. . . . .	66
4.9. ventana de referencia para el método de Russo-Ramponi. . . . .	67
4.10. función de membresía premisa utilizada en el método de Russo-Ramponi para la detección de bordes. . . . .	67
4.11. funciones de membresía consecuentes $f_B$ y $f_W$ utilizadas en las reglas del método de Russo-Ramponi. . . . .	68
4.12. direcciones de la detección de bordes correspondiente a cada regla del método de Russo-Ramponi. 1ra. hilera, detección correspondiente a las direcciones vertical y horizontal; 2da. hilera, detección en direcciones diagonales. . . . .	70
4.13. regiones de prueba de las reglas de detección de bordes del método de Russo-Ramponi. 1ra. hilera, región homogénea; 2da. hilera, región heterogénea, los resultados del Cuadro 4.1 corresponden al pixel resaltado en la zona sombreada. . . . .	72
4.14. detección de bordes basado en reglas usando el método de Russo-Ramponi. . . . .	73
4.15. detección de bordes mediante operadores morfológicos difusos; izq., imagen original, der., bordes de la imagen original utilizando el conjuntor $M$ y el implicador $I_{KD}$ . Las dos imágenes presentadas son de tamaño $256 \times 256$ pixeles. . . . .	77
4.16. 1ra. hilera, imágenes originales; 2da. hilera, esqueletos morfológicos obtenidos mediante superposición. Las imágenes presentadas son de tamaño $128 \times 128$ pixeles. . . . .	79
4.17. ejemplos de esqueletización morfológico difusa. 1ra. hilera, imágenes originales; 2da. hilera, esqueleto morfológico difuso correspondiente. Estas imágenes son de tamaño $128 \times 128$ pixeles. . . . .	81
4.18. funciones de membresía $F_S$ y $F_e$ para la caracterización difusa del eje central. . . . .	82
4.19. ejemplos de caracterización difusa del esqueleto; 1ra. hilera, imágenes de prueba; 2da. hilera, esqueletos correspondientes obtenidos ( $\alpha = 0.153$ , $\alpha = 0.047$ , $\alpha = 0.082$ ). Las imágenes presentadas son de tamaño $128 \times 128$ pixeles. . . . .	84

5.1.	se muestran, esquemáticamente, los métodos de PDI de detección de bordes y adelgazamiento de objetos presentados en este trabajo; así como algunas herramientas matemáticas empleadas en estos métodos. . . . .	90
5.2.	de manera esquemática, se muestran los métodos y las herramientas matemáticas de FIP y MM para la detección de bordes y adelgazamiento de objetos presentados en este trabajo. . . . .	91
B.1.	maskarillas de Sobel para la detección de bordes en las direcciones: izq., horizontal; der., vertical. . . . .	101
B.2.	algoritmo para obtener los bordes de una imagen aplicando los operadores de Sobel.	102
B.3.	$CondA(A, x, y)$ define el número de transiciones de 0 a 1 en la secuencia de pixeles $p_2, p_3, \dots, p_8, p_9, p_2$ . . . . .	103
B.4.	$CondB(A, x, y)$ define la cantidad de pixeles vecinos de $p_1$ distintos de cero. . . . .	103
B.5.	programa de adelgazamiento de Zhang & Suen aplicado a la imagen de entrada $A$ .	104
B.6.	implementación del esqueleto morfológico optimizado presentado por P. A. Maragos en [23]. El valor de $th$ empleado en el programa es 1. . . . .	105
B.7.	etapa de fusificación del método de minimización de la difusividad. . . . .	105
B.8.	definición del intensificador de Zadeh para modificar los valores de membresía. . . . .	106
B.9.	etapa de defusificación del método de minimización de la difusividad. . . . .	106
B.10.	programa para minimizar la difusividad de una imagen $A$ . . . . .	106
B.11.	definiciones para encontrar el máximo valor dentro de la vecindad de $3 \times 3$ pixeles.	107
B.12.	función de membresía para caracterizar los bordes de una imagen $A$ . . . . .	107
B.13.	operadores para modificar los niveles de pertenencia de la función de membresía de borde. . . . .	107
B.14.	programa para caracterizar los bordes de una imagen $A$ considerando regiones de $3 \times 3$ pixeles. . . . .	108
C.1.	1ra. hilera, de izq. a der., interferogramas digitales 1, 2 y 3. 2da. hilera, bordes respectivos obtenidos con operadores de Sobel. 3ra. hilera, bordes obtenidos con gradiente morfológico interno. . . . .	110

C.2.	1ra. hilera, patrones de difracción obtenidos con aberturas de forma, de izq. a der., triángulo equilátero, cuadrado, pentágono. 2da. hilera, se muestran los bordes correspondientes obtenidos con operadores de Sobel. 3ra. hilera, bordes obtenidos con gradiente morfológico interno. . . . .	111
C.3.	1ra. hilera, de izq. a der., interferogramas digitales 1, 2 y 3. 2da. hilera, se presenta el eje central correspondiente a cada interferograma resultado del algoritmo de Zhang y Suen. 3ra. hilera, eje central obtenido mediante esqueletización morfológica optimizada.	112
C.4.	1ra. hilera, patrones de difracción obtenidos con aberturas de forma, de izq. a der., triángulo equilátero, cuadrado, pentágono. 2da. hilera, adelgazamientos respectivos obtenidos mediante el algoritmo de Zhang y Suen. 3ra. hilera, esqueletos obtendidos con la esqueletización morfológica optimizada. . . . .	113
C.5.	1ra. hilera, de izq. a der., interferogramas digitales 1, 2 y 3. 2da. hilera, bordes obtenidos mediante la caracterización difusa de bordes utilizando vecindades de $3 \times 3$ pixeles. 3ra. hilera, esqueletos morfológicos difusos de cada interferograma. .	114
C.6.	1ra. hilera, patrones de difracción obtenidos con aberturas de forma, de izq. a der., triángulo equilátero, cuadrado, pentágono. 2da. hilera, se muestran respectivamente los bordes obtenidos mediante la caracterización difusa. 3ra. hilera, esqueletos obtenidos con la esqueletización morfológica difusa. . . . .	115



# Índice de cuadros

2.1. Órdenes de cómputo y no. de imágenes auxiliares . . . . .	35
3.1. Operaciones básicas con conjuntos difusos . . . . .	39
3.2. Operaciones principales de unión e intersección con conjuntos difusos . . . . .	40
3.3. Operaciones algebraicas con conjuntos difusos . . . . .	42
3.4. Normas y conormas triangulares típicas . . . . .	43
3.5. Valores de: nivel de gris central = $g_c$ , $F_d$ , $\gamma_l$ correspondientes a la Fig.3.5 . . . . .	51
4.1. Reglas e intensidades de disparo de una región heterogénea . . . . .	71
4.2. Conjuntores típicos . . . . .	74
4.3. Implicadores típicos . . . . .	74
4.4. Complejidad computacional de los métodos difusos de detección de bordes . . . . .	85
4.5. Órdenes de cómputo de las técnicas para encontrar el eje central difuso . . . . .	86
C.1. Aberraciones de los interferogramas de prueba . . . . .	109

# Bibliografía

- [1] Azvine, B., Azarmi, N., Nauck, D. D., “Intelligent Systems and Soft Computing Prospects, Tools and Applications,” Springer, Cap. 1, 2000.
- [2] Bezdek, J. C., “Fuzzy Models—What Are They, and Why?,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **1**(1), pp. 1–9, 1993.
- [3] Bezdek C. J., Keller, J., Krisnapuram, R., Pal, R. N., “Fuzzy Models And Algorithms For Pattern Recognition And Image Processing,” Kluwer Academic Publishers, Caps. 4, 5, 1999.
- [4] Blum, H., “A Transformation for Extracting new Descriptors of Shape,” *Models for the Perception of Speech and Visual forms*, Cambridge, MA: MIT Press, 1964.
- [5] Castleman, K. R., “Digital Image Processing,” Prentice Hall, inc, 1996.
- [6] Chen, Y. S., Hsu, W. H., “A Modified Fast Parallel Algorithm for Thinning Digital Patterns,” *Pattern Recognition Letters*, **7**, pp. 99–106, 1988.
- [7] De Luca, A., Termini, S., “A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory,” *Information and Control*, **24**, pp. 55–73, 1972.
- [8] Dumitrescu, D., Lazzerini B., Jain L. C., “Fuzzy Sets and their Application to Clustering and Training,” CRC PRESS, Cap. 1, 4, 6, 2000.
- [9] Fu, Ch. H., Cheng, S. T., Chiang, Ch. Ch., Roan, M. Sh., “Feature-Preserving Thinning Algorithm for Optical Character Recognition,” *Journal of Electronic Imaging*, **4**(3), pp. 298–304, 1995.
- [10] García, A. A., Urcid S. G., “Esqueletización y Adelgazamiento de Objetos Binarios,” 7º Encuentro de Investigación, INAOE, Tonantzintla, Puebla, Nov. 2006.
- [11] García, A. A., Urcid S. G., “Esqueletización Morfológica Difusa,” IV Taller de Procesamiento de Imágenes, CIMAT, Guanajuato, Ago. 2007.

- [12] Gonzalez, C. R., Woods E. R., "Digital Image Processing," Pearson Education, India, 2002.
- [13] Fakhreddine, Karray, O., de Silva, C., "Soft Computing and Intelligent Systems Design, Theory, Tools and Applications," Addison Wesley, pp. 37–44, 1992.
- [14] Frank, M. J., "On the Simultaneous Associativity of  $F(x,y)$  and  $x+y-F(x,y)$ ," *Aequationes Math.*, **19**, pp. 194–226, 1979.
- [15] Jähne B., HauBecker, H., "Computer Vision and Applications, A Guide for Students and Practitioners," Academic Press, Cap. 16, 2000.
- [16] Jang, B. K., Chin R. T., "Analysis of Thinning Algorithms Using Mathematical Morphology," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **12**(6), pp. 541–551, 1990.
- [17] Johnsonbaugh, R., "Matemáticas Discretas," Prentice Hall, pp. 166–186, Cuarta Edición.
- [18] Kaufmann, A., "Introduction to the Theory of Fuzzy subsets–Fundamental Theoretical Elements," Academic Press, **1**, 1975.
- [19] Kerre, E. E., Nachtegael M., "Fuzzy Techniques in Image Processing," Physica–Verlag, Cap. 5, 2002.
- [20] Loncaric, S., "A Survey of Shape Analysis Techniques" *Pattern Recognition*, **31**(8), pp. 983–1001, 1998.
- [21] Lü, H .E., Wang, S. P. "A Comment on "a Fast Parallel Algorithm for Thinning Digital Patterns"," *Comm. ACM*, **29**(3), pp. 239–242, 1986.
- [22] Mahdavih, Y., Gonzalez, R. C. "Advances in Image Analysis," SPIE, Optical Engineering Press, Cap. 10, 1992.
- [23] Maragos, P .A., Schafer, R .W, "Morphological Skeleton Representation and Coding of Binary Images," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, **ASSP**(34), pp. 1228–1244, Oct. 1986.
- [24] Maragos, P .A., "Tutorial on advances in morphological image processing and analisis," *Optical Engineering*, **26**(7), pp. 623–632, 1987.
- [25] Maragos, P .A., Ziff, D .R, "Threshold Superposition in Morphological Image Analysis Systems," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **12**(5), pp. 498–504, Mayo 1990.

- [26] Mitra, S., Acharya T., “Data Mining. Multimedia, Soft Computing and Bioinformatics,” Wiley–Interscience, Cap. 1, 2, 2003.
- [27] Pal, S. K., Ghosh, A., Kundu, M. K., “Soft Computing for Image Processing,” Physica–Verlag, Cap. 1, 2, 2000.
- [28] Pratt, W. K., “Digital Image Processing,” John Wiley and Sons, second edition, 1991.
- [29] Rivest, J .F., Beucher, P .S. S. “Morphological Gradients,” *Journal of Electrical Imaging*, **2**(4), pp. 326–336, Oct. 1993.
- [30] Rosenfeld, A., “Adjacency in Digital Pictures,” *Information and Control*, **26**, pp. 24–33, Sep. 1974.
- [31] Russ, J. C., “The Image Processing Handbook,” fourth edition, CRC PRESS, 2002.
- [32] Serra, J., “Image Analysis and Mathematical Morphology,” Academic Press, London 1982.
- [33] Sinha, N. K., Gupta, M. M., Zadeh, L. A., “Soft Computing and Intelligent Systems: theory and applications,” Academic Press, Cap. 2.
- [34] Swokowski, E. W., “Cálculo con Geometría Analítica,” Ed. Iberoamericana, Segunda edición, Cap. 3, 1998.
- [35] Tizhoosh, H. R., Krell, G., Michaelis, B., “On Fuzzy Image Enhancement of Megavoltage Images in Radiation Therapy,” *Proceedings of FUZZ-IEEE’ 97* (Barcelona), pp. 1399–1404, 1997.
- [36] Urcid, G. S., “Procesamiento Híbrido Incoherente para Transformaciones Morfológicas en Escala de Grises,” Tesis doctoral INAOE, Cap. 2, 1999.
- [37] Yager, R. R., Zadeh, L. A., “An Introduction to Fuzzy Logic applications in Intelligent systems,” Kluwer Academic Publisher, Cap. 1, 1998.
- [38] Young, T. Y., Fu, K. S., “Handbook of Pattern Recognition and Image Processing,” Academic Press Inc., Cap. 9, 1986.
- [39] Zadeh, L. A., “Fuzzy Sets,” *Information and Control*, **8**, pp. 338–353, 1965.
- [40] Zhang, T .Y., Suen, C. Y. “Fast Parallel Algorithm for Thinning Digital Patterns,” *Commun. ACM*, **27**(3), pp. 236–239, Mar. 1984.