



**I  
N  
A  
O  
E**

# **Estudio de Patrones de Difracción, en la Evaluación de Aberturas**

Por

**M. en C. Esteban Andrés Zárate**

Tesis sometida como requisito parcial  
para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD EN ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,  
Óptica y Electrónica**

Noviembre 23 de 2011  
Tonantzintla, Puebla

Dirigida por

**Dr. Alejandro Cornejo Rodríguez**

©INAOE 2011

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias de esta tesis en su  
totalidad o en partes.



## RESUMEN

El objetivo general del presente trabajo de Tesis, fue el de usar el método óptico de espectros de frecuencias espaciales o de patrones de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, en el estudio de fracturas, clasificadas como aberturas de pequeñas dimensiones lineales, contenidas en material laminado de aluminio, acero y baquelita delgadas, cuyo espesor es  $l_z=0.5mm$ ,  $1.0mm$  y  $2.0mm$ , es decir, no son muy delgadas o de espesor casi cero; usando conceptos de propagación del espectro angular en forma escalar. Se obtuvo información respecto a la forma, deformación y variaciones en las dimensiones lineales de aberturas con diferentes geometrías, usadas como modelos experimentales, para evaluar los efectos de esfuerzos permanentes a los que estuvieron sometidas; así como las deformaciones producidas por esfuerzo mecánico definido por una fuerza de tensión de magnitud conocida. El análisis cualitativo de la deformaciones en las franjas de interferencia, que definen cada imagen de los espectros de difracción capturados, mostró que ambos métodos, como técnicas de evaluación no destructiva y destructiva, proporcionan resultados respecto al estado de cada abertura bajo estudio, cuando estuvo sujeta a esfuerzos permanentes; además de que existen variaciones y deformaciones en las franjas referidas, como consecuencia de que en la abertura variaron sus dimensiones lineales, cuando se le aplica fuerza de tensión. Basado en los resultados del estudio, se concluye que éstas técnicas pueden considerarse una alternativa para el estudio de materiales, no solo en la óptica física, sino también en la mecánica de fracturas.

## **DEDICATORIA**

Me es grato dedicar esta Tesis, a mi esposa Luz María, así como a mi hijo Argel Esteban e hija Miroslava, por el apoyo incondicional que me brindaron para llevar a buen término el trabajo doctoral del cual fue derivada.

También, es importante dedicar este trabajo de Tesis, a mi madre Isabel, de igual manera a mi hermana Isidra, hermano Antonio y demás familiares; por los diferentes apoyos que de ellos he recibido.

Por todo el apoyo que me ha brindado, deseo dedicar este trabajo de Tesis a mi amigo y compañero de trabajo, Quintiliano Angulo Córdova, gracias.

## RECONOCIMIENTOS Y AGRADECIMIENTOS

Doy un reconocimiento y un sincero agradecimiento, a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, por todo el apoyo que me proporcionó a través del departamento de Investigación y Posgrado, para realizar mi estancia doctoral y concluir con la obtención del grado de Doctor.

Deseo reconocer al programa PROMEP dependiente de la SEP; y en especial doy las gracias al personal del programa referido, por el apoyo otorgado a través de la Beca para Estudios de Doctorado, que me permitió llevar a buen término mi estancia y culminarla con la obtención del grado de Doctor.

Al Doctor Alejandro Cornejo Rodríguez, le agradezco todo el apoyo que me brindó durante mi estancia en el INAOE, que culminó con la obtención del grado de Doctor.

Agradezco al honorable jurado formado por los doctores: Gabriel Martínez Niconoff, J. Félix Aguilar Valdez, Fermín S. Granados Agustín, Ibis Ricardez Vargas y J. Javier Báez Rojas; por sus comentarios, mismos que me permitieron redactar el trabajo de Tesis, en forma más apropiada.

Con todo respeto, deseo reconocer y dar las gracias a Ana María Zárate y a Pedro Tecuatl; por todo el apoyo que me brindaron durante mi estancia doctoral en el INAOE.

## CONTENIDO

	Página
<i>RESUMEN</i>	<i>i</i>
<i>DEDICATORIA</i>	<i>ii</i>
<i>RECONOCIMIENTOS</i>	<i>iii</i>
<i>ÍNDICE</i>	<i>iv</i>
<i>LISTA DE FIGURAS</i>	<i>vii</i>
<b>CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN GENERAL</b>	1
I.1 Estructura de la Tesis	4
<b>CAPÍTULO II: DIFRACCIÓN DE ONDAS MONOCROMÁTICAS Y SU PROPAGACIÓN SIN EL USO DE LENTES CONVERGENTES</b>	5
II.1 Teoría	6
II.2 Espectro angular propagado	9
II.3 Espectro angular propagado a ángulos pequeños	13
II.4 Difracción en la región de Fresnel	17
II.5 Difracción en la región de Fraunhofer	19
II.6 Conclusión	21
<b>CAPÍTULO III: DIFRACCIÓN CON LENTE TRANSFORMADORA CONVERGENTE</b>	22
III.1 Teoría	22
III.2 Espectro de difracción, de convolución de transformadas de Fourier	29
III.3 Espectro de transformada exacta de Fourier	32
III.4 Conclusión	33
<b>CAPÍTULO IV: RESULTADOS TEÓRICOS GENERADOS CON DOS FUNCIONES DE TRANSMITANCIAS ESPECÍFICAS</b>	32
IV.1 Espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, producido por una abertura rectangular	35
IV.2 Espectro de convolución de una abertura rectangular, en zona divergente de la lente transformadora	37
IV.3 Espectro de difracción en zona divergente de la lente transformadora, de una abertura rectangular	44
IV.3.1 Conclusiones a las secciones IV.1, 2 y 3	46
IV.4 Espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, con aberturas cilíndricas del mismo diámetro	47
IV.5 Espectro de difracción de una abertura cilíndrica desplazada del origen de coordenadas	50
IV.6 Espectro de difracción de transformada exacta de una abertura cilíndrica	52

situada en el origen de coordenadas	
IV.6.1 Conclusiones a las secciones IV.4, 5 y 6	53
IV.7 Espectro de convolución en zona convergente de la lente transformadora, de dos aberturas cilíndricas desplazadas del origen de coordenadas	54
IV.8 Espectro de convolución en zona convergente de la lente transformadora, de una abertura cilíndrica desplazada del origen de coordenadas	62
IV.9 Espectro de difracción en zona convergente de la lente transformadora, usando una abertura cilíndrica en el origen de coordenadas	67
IV.9.1 Conclusiones a las secciones IV.7, 8 y 9	67
IV.10 Espectro de convolución de dos aberturas cilíndricas con diámetros iguales, en la zona divergente de la lente transformadora	68
IV.11 Espectro de convolución en zona divergente de la lente transformadora, producido por una abertura cilíndrica fuera del origen de coordenadas	71
IV.12 Espectro de convolución en zona divergente de la lente transformadora, de una abertura cilíndrica en el origen de coordenadas	76
IV.12.1 Conclusiones a las secciones IV.10, 11 y 12	77
IV.13 Espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, de dos aberturas cilíndricas desplazadas del origen de coordenadas con diámetros diferentes	78
IV.14 Espectro de transformada exacta de Fourier, de dos aberturas cilíndricas desplazadas del origen de coordenadas con diámetros iguales	84
IV.15 Espectro de convolución de dos aberturas cilíndricas con diámetros diferentes desplazadas del origen de coordenadas	86
IV.15.1 Conclusiones a las secciones IV.13, 14 y 15	91
IV.16 Conclusiones al capítulo	91
<b>CAPÍTULO V: LA FUNCIÓN DE TRANSMITANCIA Y SU RELACIÓN CON EL ESFUERZO MECÁNICO O TÉRMICO, FORMA ANLÍTICA</b>	92
V.1 Fuerzas mecánicas de tensión y su efecto sobre un objeto	94
V.2 Objeto sujeto a fuerza de tensión, sin contracción lateral	95
V.3 Objeto sujeto a fuerza de tensión, con deformaciones laterales inducidas	99
V.4 Esfuerzo térmico	100
V.5 Relación entre el esfuerzo mecánico y el espectro de difracción	104
V.6 Objeto bajo fuerza de tensión	108
V.7 Espectro de difracción y el esfuerzo térmico	112
V.8 Objeto sometido simultáneamente a esfuerzo térmico y mecánico	114
IV.9 Conclusiones	116
<b>CAPÍTULO VI: DESARROLLO EXPERIMENTAL</b>	117
VI.1 Arreglo experimental	117
VI.2 Descripción de aberturas estudiadas	117
VI.3 Estudio de espectros de difracción de transformada exacta de Fourier	119
VI.4 Análisis de imágenes de patrones de difracción de transformada exacta	121
VI.5 Estudio de patrones de difracción de convolución de transformadas de	128

Fourier	
VI.5.1 Patrones de convolución producidos por las aberturas 6.2A, B, C y D	128
VI.5.2 Análisis y observaciones	129
VI.5.3 Espectros de convolución producidos por la abertura figura 6.2C	131
VI.5.4 El autoenfoco convolutivo y su posible explicación	132
VI.6 Espectros de convolución producidos por la abertura de la figura 6.2E y comentarios	133
VI.7 Espectros de convolución producidos por la abertura cilíndrica 6.2F	134
VI.7.1 análisis y observaciones	134
VI.8 Espectros de convolución producidos por la abertura 6.2G	135
VI.8.1 Análisis y observaciones	136
VI.9 Espectros de convolución producidos por la abertura figura 6.2H	137
VI.9.1 Observaciones y comentarios	137
VI.10 Espectros de convolución producidos por la abertura de la figura 6.3I	138
VI.11 Espectros de convolución producidos por la abertura de la figura 6.3J	141
VI.12 Espectro de convolución producido por la abertura de la figura 6.3K	143
VI.12.1 Análisis y observaciones	143
VI.13 Espectros de convolución producidos por la abertura 6.3L	144
VI.14 Espectros de convolución producidos por la abertura hexagonal figura 6.4M	145
VI.15 Espectros de convolución producidos por la abertura 6.4N	146
VI.16 Espectros de convolución producidos por la abertura 6.4Ñ	147
VI.17 Espectros de convolución producidos por la abertura 6.4O	148
VI.18 Espectros de difracción de aberturas sujetas a fuerza mecánica de tensión	149
VI.19 Espectros de transformada exacta y de convolución de abertura sujeta a fuerza mecánica de tensión	152
VI.20 Espectros de abertura rectangular sujeta a fuerza mecánica de tensión	154
VI.21 Conclusiones al capítulo	157
<b>CAPÍTULO VII: CONCLUSIONES GENERALES</b>	159
VII.1 Trabajo futuro	160
<b>ANEXO A: DEFINICIONES Y TEOREMAS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER</b>	162
<b>ANEXO B: LENTE DOBLETE CEMENTADA</b>	167
<b>ANEXO C: VIÑETEADO Y FRECUENCIA ESPACIAL MÁXIMA</b>	174
<b>ANEXO D: TRANSFORMADA DE FOURIER-BESSEL Y FÓRMULAS DE RECURRENCIA</b>	184
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	193

## LISTA DE FIGURAS Y TABLAS.

<b>Figura 1.1. Sistema de guía de ondas hueco metálico lleno de aire.</b>	<b>2</b>
<b>Figura 2.1. Esquema de propagación del espectro angular.</b>	<b>6</b>
<b>Figura 3.1. Arreglo teórico para producir modelos matemáticos de difracción.</b>	<b>23</b>
<b>Figura 4.1a. Abertura rectangular en lámina de aluminio.</b>	<b>35</b>
<b>Figura 4.1b. Abertura rectangular esquematizada en forma tridimensional.</b>	<b>35</b>
<b>Figura 4.1c. Abertura rectangular esquematizada en forma frontal.</b>	<b>35</b>
<b>Figura 4.2a. Abertura cilíndrica en lámina de aluminio.</b>	<b>47</b>
<b>Figura 4.2b. Abertura cilíndrica en representación gráfica.</b>	<b>47</b>
<b>Figura 4.3. Aberturas cilíndricas desplazadas del origen.</b>	<b>48</b>
<b>Figura 4.4. Abertura cilíndrica fuera del origen.</b>	<b>50</b>
<b>Figura 4.5. Abertura cilíndrica en el origen.</b>	<b>52</b>
<b>Figura 4.6. Aberturas cilíndricas de diámetros desiguales.</b>	<b>78</b>
<b>Figura 5.1. Objeto bajo fuerzas de tensión.</b>	<b>95</b>
<b>Figura 5.2a. Barra 1 sujeta a transferencia de calor.</b>	<b>101</b>
<b>Figura 5.2b. Diagrama de fuerzas.</b>	<b>101</b>
<b>Figura 5.3. Arreglo teórico para producir modelos matemáticos de difracción con fuerza de tensión.</b>	<b>104</b>
<b>Figura 6.1a. Arreglo experimental para estudiar aberturas sin fuerza de tensión.</b>	<b>118</b>
<b>Figura 6.1b. Bosquejo del arreglo experimental de la figura 6.1a</b>	<b>118</b>
<b>Figura 6.2. Aberturas construidas en lámina de aluminio y baquelita.</b>	<b>120</b>
<b>Figura 6.3. Aberturas construidas en lámina de aluminio 6061.</b>	<b>121</b>
<b>Figura 6.4. Aberturas construidas en láminas de acero.</b>	<b>121</b>



<b>Tabla 1. Características y dimensiones lineales de aberturas referidas en las figuras 6.2, 6.3 y 6.4</b>	<b>122</b>
<b>Figura 6.5. Espectros de transformada exacta de Fourier de aberturas 6.2</b>	<b>123</b>
<b>Figura 6.6. Espectros de transformada exacta de Fourier de aberturas 6.3</b>	<b>124</b>
<b>Figura 6.7. Espectros de transformada de Fourier de aberturas 6.4</b>	<b>124</b>
<b>Figura 6.8. Espectros de convolución de aberturas 6.2</b>	<b>128</b>
<b>Figura 6.9. Espectros de convolución de abertura 6.2C</b>	<b>131</b>
<b>Figura 6.10. Espectros de convolución de abertura 6.2E</b>	<b>134</b>
<b>Figura 6.11. Espectros de convolución de abertura 6.2F</b>	<b>134</b>
<b>Figura 12. Espectros de convolución de abertura 6.2G</b>	<b>135</b>
<b>Figura 6.13. Espectros de convolución de abertura 6.2H</b>	<b>138</b>
<b>Figura 6.14. Espectros de convolución de abertura 6.3I</b>	<b>139</b>
<b>Figura 6.15. Espectros de convolución de abertura 6.3J</b>	<b>141</b>
<b>Figura 6.16. Espectros de convolución de abertura 6.3K</b>	<b>143</b>
<b>Figura 6.17. Espectro de convolución de abertura 6.3L</b>	<b>144</b>
<b>Figura 6.18. Espectro de convolución de abertura 6.4M</b>	<b>145</b>
<b>Figura 6.19. Espectro de convolución de abertura 6.4N</b>	<b>146</b>
<b>Figura 6.20. Espectros de convolución de abertura 6.4Ñ</b>	<b>147</b>
<b>Figura 6.21. Espectros de convolución de abertura 6.4O</b>	<b>148</b>
<b>Figura 6.22a. Arreglo experimental para estudiar aberturas sometidas a fuerza mecánica de tensión</b>	<b>149</b>
<b>Figura 6.22b. Bosquejo del arreglo experimental de la figura 6.22a</b>	<b>150</b>
<b>Figura 6.23. Abertura bajo la acción de una fuerza de diferente magnitud</b>	<b>151</b>
<b>Figura 6.24. Espectros de transformada exacta objeto bajo fuerza de tensión</b>	<b>152</b>

<b>Figura 6.25. Espectros de convolución objeto bajo fuerza de tensión</b>	<b>153</b>
<b>Figura 6.26. Abertura rectangular en lámina de aluminio del grupo 1100 bajo fuerza de tensión</b>	<b>154</b>
<b>Figura 6.27. Espectros de transformada exacta de Fourier objeto bajo fuerza de tensión</b>	<b>155</b>
<b>Figura 6.28. Espectros de convolución objeto bajo fuerza de tensión</b>	<b>156</b>
<b>Figura B.1. Esquema de una lente doblete separada</b>	<b>168</b>
<b>Figura B.2. Configuración de una lente doblete cementada y sus parámetros</b>	<b>169</b>
<b>Figura C.1. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial <math>u_1</math></b>	<b>176</b>
<b>Figura C.2. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial <math>v_1</math></b>	<b>176</b>
<b>Figura C.3. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial <math>u_{\max}</math></b>	<b>177</b>
<b>Figura C.4. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial <math>v_{\max}</math></b>	<b>177</b>
<b>Figura C.5. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial <math>u_{\max}</math></b>	<b>182</b>
<b>Figura C.6. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial <math>v_{\max}</math></b>	<b>183</b>

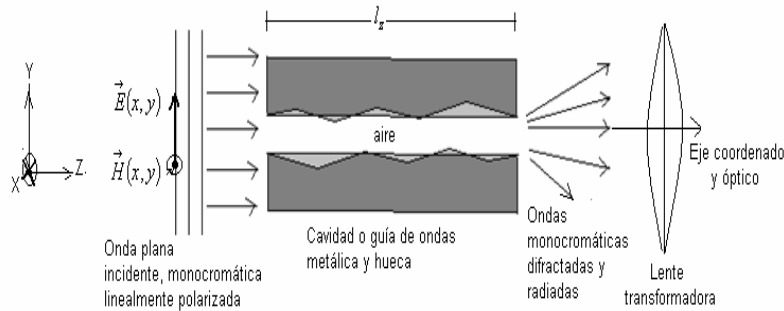
# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN GENERAL

La forma de examinar el fenómeno de difracción de una onda plana monocromática, que incide en la abertura practicada en una pantalla plana muy delgada (espesor  $l_z$  casi cero, es decir  $l_z \approx 0$ ) hecha de algún tipo de material y de extensión finita, se puede usar el principio de Huygens-Fresnel, en forma escalar (Lutomirski y Yura, 1971); así, como un tratamiento escalar haciendo uso de la ecuación de Fresnel-Kirchhoff (Kehar *et al*, 2006). También se puede realizar una descripción vectorial del fenómeno referido, en la que se aplica esta última ecuación (Hsu y Bacarat, 1994; Sheppard y Hrynevich, 1992). El método escalar de propagación del espectro angular, también es muy usado para describir el fenómeno de difracción por una abertura o una lente de Fresnel muy delgada (Goodman, 2005; Martínez et al, 2001).

Sin embargo, cuando la pantalla en la que está practicada la abertura es gruesa, esto lleva a considerarla como un sistema de canalización o cavidad hueca de guía de ondas. Además, al tomar en cuenta los dos posibles casos de polarización del vector  $\vec{E}(x, y)$  de la onda plana monocromática incidente, se tiene la posibilidad que en los sistemas de canalización existan ondas del tipo eléctrico  $\vec{E}(x, y)$  y del tipo magnético  $\vec{H}(x, y)$ . En caso de cualquier posición intermedia de  $\vec{E}(x, y)$ , la onda incidente se descompone en dos componentes: 1) la que se encuentra en el plano de incidencia; 2) la que se encuentra perpendicular al plano de incidencia. Si esto ocurre en el sistema de canalización existirán dos ondas independientes como las antes referidas, y el campo total se formará como resultado de la superposición de estas oscilaciones (Nikolski, 1985; Fiódorov, 1982). Esto hace que el problema de difracción se complique, y su posible solución se puede visualizar combinando conceptos de la óptica física vectorial y la electrodinámica en la forma siguiente: De acuerdo al esquema de la figura 1.1, se tiene una cavidad hueca de guía de ondas, llena de aire como dieléctrico, limitado por las superficies metálicas dentro de la cavidad referida y es preciso tomar en cuenta que tales superficies, tienen en mayor o menor grado rugosidades que dependen del carácter de su maquinado. En su abertura izquierda incide, una onda plana monocromática y linealmente polarizada, misma que se difracta, para luego propagarse dentro del sistema de canalización. Nikolski, (1985) y Fiódorov, (1982) establecieron que, de acuerdo a la electrodinámica, la cavidad de superficies perfectamente lisas, actúa como guía de ondas; es decir, el proceso de transmisión de energía electromagnética dentro de la guía, se realiza por medio de dos ondas; una onda superficial externa con respecto al dieléctrico (aire), y una onda interna que se propaga en el aire (dieléctrico). Mientras que en la abertura de salida del extremo derecho de la cavidad, la onda que se propaga en el aire (dieléctrico), se difracta y propaga hacia una zona de aire circundante no limitada. En tanto que las ondas que se propagan en la superficie del conductor de la abertura de la derecha son radiadas al espacio circundante, debida a los elementos que perturban la regularidad de la cavidad. El fenómeno de emisión o radiación de las ondas en el extremo derecho de la

cavidad de guía de ondas referida, introduce un problema adicional consistente en el acoplamiento de modos, para producir un frente de onda resultante que se propague hasta incidir en la lente transformadora.



**Figura 1.1 Sistema de guía de ondas hueco. metálico lleno de aire**

Por otro lado, en la ciencia e ingeniería de los materiales cuando se diseña un método de fabricación, en el que realiza la transformación de materiales en dispositivos, componentes o estructuras mecánicas, o bien en el diseño de un método de ensayo de tenacidad a la fractura, en el que se ha seleccionado previamente el material, además de conocer la magnitud del esfuerzo aplicado y el tamaño del componente o estructura en la que se transformará. Uno de los problemas es que, existe la necesidad de calcular el tamaño máximo de la abertura (fractura) que se puede tolerar en la estructura mecánica, a través de una técnica de ensayo no destructivo, que detecte cualquier imperfección o abertura de menor, mayor o igual magnitud a su tamaño máximo, información que puede asegurar que la estructura mecánica funcionará con seguridad (Askeland y Phulé, 2008).

En base a lo anterior, el objetivo general de este trabajo de Tesis, consiste en usar: El método óptico de espectros de frecuencias espaciales o de patrones de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, en el estudio de fracturas, clasificadas como aberturas de pequeñas dimensiones lineales, contenidas en material laminado de aluminio, acero y baquelita delgadas, cuyo espesor es  $l_z=0.5mm$ ,  $1.0mm$  y  $2.0mm$ , es decir, no son muy delgadas o de espesor casi cero; usando conceptos de propagación del espectro angular en forma escalar. Para lograr el objetivo planteado, se propone los siguientes objetivos específicos. a) Establecer que el método de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, primero, como una técnica de evaluación no destructiva, es decir, cuando el objeto difractor bajo estudio, no esté sujeto a una fuerza mecánica o a transferencia de calor de forma externa. La técnica referida permitirá cuantificar de forma cualitativa, tamaño y forma geométrica de una abertura, producto de un proceso de fracturado o por corrosión y oxidación; así como las deformaciones permanentes en sus dimensiones lineales debidas a deformaciones permanentes, causadas por tensión, compresión, torsión, térmicos, entre otros, a los que fue sometida; mediante el estudio de imágenes de los espectros de difracción que producen y a través de la distribución de las franjas de interferencia que los definen. Otros objetivos específicos son los que se documentan a continuación. b) Producir los modelos matemáticos de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, a través de un arreglo óptico coherente, haciendo énfasis del uso de una lente doble

acromática cementada como transformadora. c) Implementar un arreglo experimental para generar espectros de difracción y grabarlos en el plano de Fraunhofer o de la transformada exacta, y en las zonas convergente y divergente de la lente transformadora o regiones de Fresnel.

Un objetivo específico más, está contenido en el siguiente inciso d) hacer uso del método de espectros de difracción referido, como técnica de evaluación destructiva; que también se puede entender como una técnica óptica de ensayo de tenacidad a la fractura. En la que se aplica una fuerza cuya magnitud produce un esfuerzo mecánico conocido, a la estructura mecánica o láminas de aluminio, acero y baquelita delgadas, cuyo espesor sea de  $l_z=0.5mm$ ,  $1.0mm$  y  $2.0mm$ ; las cuales contienen una abertura de tamaño y geometría de dimensiones lineales específicas, esto se logrará a través de los objetivos específicos siguientes. e) Determinar las nuevas funciones de transmitancia asociadas a la abertura difractora, cuando ella esté sujeta a esfuerzo mecánico, térmico y simultáneamente a ambos; f) Adicionar en el arreglo experimental del objetivo c), un extensómetro en el que se inserte un dinamómetro para determinar la magnitud de la fuerza de tensión aplicada a la abertura bajo estudio. g) Producir y grabar los espectros de difracción en las regiones antes referidas. Nuevamente el estudio y cuantificación de la forma, deformación de la abertura se realizará mediante la distribución, forma y deformación de las franjas interferométricas que definen el espectro de difracción en cada etapa, usando como referencia el espectro de difracción producido por la abertura cuando está sujeta a fuerza de magnitud cero.

Se cuenta con información en forma separada, respecto a un ensayo de tenacidad a la fractura, el cual se puede realizar usando métodos mecánicos destructivos (Askeland y Phulé, 2008; Beer *et al*, 2004). Mientras que los métodos ópticos entre los cuales se puede mencionar la interferometría holográfica, de moiré y la interferometría electrónica de patrones de moteado (ESPI) (Zárate *et al*, 2005; Sirohi, 2002; Erf, 1974) se han usado como técnicas de evaluación no destructiva, en el estudio de imperfecciones en materiales, tales como deformaciones, fracturas (aberturas), agrietamientos entre otros defectos. En tanto que Yao *et al*, (2006), reportaron el estudio de fractura en V de primera punta usando el método de gradiente con detección coherente, en el que iluminan con ondas planas la estructura con el defecto, y producen las imágenes con un par de rejillas, filtrando la información grabada con una lente convergente. Considerando una abertura circular como puntual, se determinó la respuesta al impulso de manera teórica y experimental (Ersoy, 2007). Adicionalmente el fenómeno de difracción, también se usa para estudiar coherencia espacial y temporal, procesamiento óptico de datos y producción de filtros holográficos para el reconocimiento de patrones y caracteres (Hecht y Zajac, 1998). Como se observa en lo antes referido, aún no se publican técnicas en la que se proporcione referencia al uso del método de espectros de difracción, en la forma que se ha propuesto en este trabajo de Tesis, por lo tanto el estado del arte en este sentido apenas comienza y permitirá conocer una nueva alternativa de detección de aberturas pequeñas, como defectos de falla en el material especificado, y establecer qué tan viable, accesible y eficiente es el método aquí propuesto.

## I.1 ESTRUCTURA DE LA TESIS

La Tesis se ha dividido en siete capítulos, cuyo contenido permite lograr los objetivos antes planteados y se le ha dado la siguiente estructura:

CAPÍTULO II: En él, se discute el concepto de difracción y se da una descripción teórica de cómo se produce el fenómeno, por una abertura rectangular, de igual manera se proporcionan algunos aspectos respecto a las condiciones que debe cumplir el espectro angular propagado. El capítulo culmina dando una breve descripción de las regiones de Fresnel y la de Fraunhofer en las que existen los planos de distribución de frecuencia espacial, en los que se distribuyen los espectros de convolución y de transformada de Fourier.

CAPÍTULO III: Incluye una descripción teórica de un arreglo óptico coherente, a través del cual se determinan los modelos matemáticos de difracción de transformada exacta ( Es decir, en el que, el modelo matemático no contienen un factor cuya forma funcional es,  $\exp\left\{i \frac{k}{2z} (x_z^2 + y_z^2)\right\}$ , que se interpreta como factor cuadrático de fase e indica que la fase de las ondas difractadas y propagadas se distribuye en una esfera y no en el plano).

CAPÍTULO IV: Describe resultados teóricos, mediante un análisis completo y la forma de determinar la distribución de amplitud compleja de transformada exacta en el plano de Fraunhofer y de convolución de transformadas de Fourier, en las regiones de Fresnel o zonas convergente y divergente de la lente doblete cementada o transformadora, definiendo la función de transmitancia asociada a la abertura en términos de la función cilindro o rectángulo.

CAPÍTULO V: Da evidencia respecto a la forma de relacionar conceptos de la óptica física, mecánica de los medios continuos y transferencia de calor, determinando nuevas funciones de transmitancia en términos del esfuerzo mecánico, térmico y de ambos; considerando a la función rectángulo como transmitancia y como caso específico. Esto a su vez implicó la generación de los nuevos modelos matemáticos de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier.

CAPÍTULO VI: Presenta los resultados más importantes obtenidos en forma experimental, así como el análisis de cada espectro de difracción en distribución de intensidad, de los objetos estudiados.

CAPÍTULO VII: Da referencia de las conclusiones a las cuales se ha llegado en la realización de este trabajo de Tesis.

## CAPÍTULO II

### DIFRACCIÓN DE ONDAS MONOCROMÁTICAS Y SU PROPAGACIÓN SIN EL USO DE LENTES CONVERGENTES

#### INTRODUCCIÓN

La introducción del formalismo matemático de la transformada bidimensional de Fourier adaptada a la óptica física contemporánea, ha propiciado métodos que conducen a tratar el proceso óptico del fenómeno de difracción de ondas electromagnéticas, en términos de frecuencias espaciales y de propagación del espectro angular, que aunados a las técnicas de la óptica coherente, dan como resultado procesos tecnológicos importantes, entre los que se pueden destacar, el filtraje espacial, reconocimiento de patrones, producción de hologramas, etc. (Hecht y Zajac, 1998). De aquí la importancia de entender que: el fenómeno óptico de difracción del campo de ondas electromagnéticas, como el proceso de interacción de dicho campo con uno o más cuerpos transparentes u opacos; tal fenómeno ocurre donde quiera que un frente de onda es obstruido, es decir, si en el transcurso de su trayectoria de propagación se encuentra con los objetos referidos, se alteran porciones de dicho frente en amplitud o en fase. Los diferentes segmentos del frente de onda que se propagan más allá del objeto u objetos, interfieren y producen una densidad de energía particular, cuya distribución espacial de intensidad se denomina patrón de difracción (Malacara, 2004; Hecht y Zajac, 1998; Fiódorov, 1982).

En referencia al fenómeno de difracción, se sabe que es uno de los problemas más difíciles de tratar dentro de la electrodinámica y la óptica física. En base a esto, solo puede esbozarse algunos caminos de solución del problema de difracción que se tratará en este capítulo, sin el uso de lentes transformadoras. Consiste en examinar la difracción de una onda plana monocromática, que incide en la abertura practicada en una pantalla plana muy delgada por ejemplo de aluminio 6061, de extensión finita, además de que posee conductividad ideal; es decir, es un problema que puede solucionarse empleando el método aproximado que requiera la deducción de relaciones auxiliares; y se sobreentiende que este caso está lejos de agotar los posibles métodos de solución del problema (Fiódorov, 1982).

En base a lo antes expuesto y con el fin de propiciar una mejor comprensión del contenido de este capítulo II, éste se ha dividido en las siguientes secciones. La sección II.1 se dedica a fundamentar y definir el espectro de difracción no propagado, como la transformada de Fourier bidimensional, cuya forma funcional depende de los cosenos directores  $\alpha$  y  $\beta$ . La sección II.2 es dedicada a describir la propagación del espectro angular. La interpretación paraxial del espectro angular y su propagación a ángulos pequeños, es el tema de la sección II.3; en tanto que la sección II.4 es dedicada para establecer las condiciones de difracción en la región de Fresnel. El capítulo culmina con una interpretación del fenómeno de difracción y la distribución del espectro propagado en la región denominada de Fraunhofer.

## II.1 TEORÍA

Considérese que en plano  $xy$  de la Figura 2.1, se sitúa un objeto difractor transparente y su entorno es opaco, que puede poseer cualquier tipo de geometría. Pero, con el fin de hacer más fácil la descripción que se realiza a continuación: se considera que el objeto sea una abertura de geometría rectangular de ancho  $l_x$ , altura  $l_y$ , delgada de espesor  $l_z$ , y está fabricada en la parte central de una lámina por ejemplo de aluminio, de geometría plana y cuadrada de 10cm de lado y  $l_z=0.5mm$  de espesor, es decir, no muy delgada. A este objeto difractor se le asocia una función de transmitancia  $t(x,y)$  y además es iluminado entre otras opciones, con ondas planas y monocromáticas de luz de láser de Helio-Neón de amplitud  $E_{ilum}(x,y)$  constante.

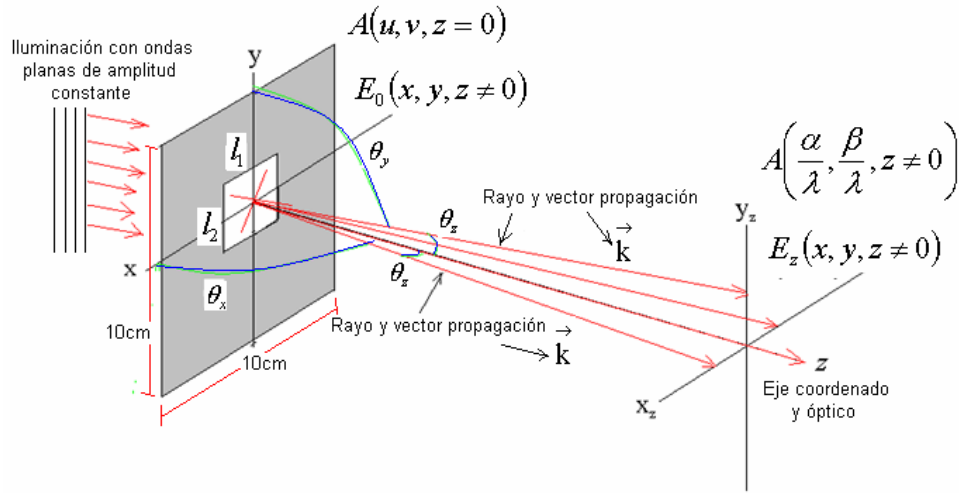


Figura 2.1. Esquema de propagación del espectro angular

En base a que, los diferentes segmentos del frente de onda plana que produce la fractura como objeto difractor, de acuerdo al concepto de difracción arriba expuesto; justo después de él se produce una distribución espacial de luz del campo eléctrico difractado  $E_0(x,y)$ ; que puede ser definida de dos maneras: Una forma, es en términos de la transmitancia asociada al objeto difractor, mediante la siguiente expresión,

$$E_0(x, y) = t(x, y)E_i(x, y) . \quad (2.1)$$

La otra posibilidad de definir al campo eléctrico  $E_0(x, y)$  difractado por el objeto es mediante la transformada de Fourier inversa del espectro de difracción  $A(u, v; z=0)$  no propagado (Mandel y Wolf, 2008; Born y Wolf, 2005; Goodman, 2005), esto es,

$$E_0(x, y, z=0) = \mathfrak{F}^{-1}\{A(u, v, z=0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(u, v, z=0) e^{i2\pi(ux+vy)} dudv . \quad (2.2)$$



De la ecuación (2.2) se determina que el campo eléctrico  $E_0(x, y; z=0)$  no propagado, y se ha distribuido en el plano de coordenadas  $xy$ . Ahora, la distribución de amplitud compleja del espectro de difracción  $A(u, v; z=0)$  no propagado, y distribuido en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ , se obtiene mediante la transformada de Fourier de la ecuación (2.2) (Mandel y Wolf, 2008; Goodman, 2005), es decir,

$$A(u, v, z = 0) = \mathfrak{F}\{E_0(x, y, z = 0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y, z = 0) \exp\{-i2\pi(ux + vy)\} dx dy. \quad (2.3)$$

Puesto que la fase de una onda plana tridimensional se puede representar como  $\Phi(P) = \vec{r} \cdot \vec{k}$ , donde  $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$  es el vector posición y representa cualquier punto del plano o frente de onda plano, respecto a un origen O,  $\vec{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z$  es el vector de propagación perpendicular en cada punto del plano o frente de onda constante de la onda plana referida (Goodman, 2005; Hecht y Zajac, 1998); entonces, la fase es

$$\Phi(P) = xk_x + yk_y + zk_z. \quad (2.4)$$

Basta recordar que los números de propagación hacia cada eje coordenado, están relacionados con los cosenos directores  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , a través de las ecuaciones siguientes:

$$k_x = |\vec{k}| \cos \theta_x, \quad k_y = |\vec{k}| \cos \theta_y, \quad k_z = |\vec{k}| \cos \theta_z. \quad (2.5)$$

Donde  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de propagación. Puesto que los cosenos directores dan referencia del ángulo que forma el vector propagación respecto de cada eje coordenado, pueden definirse de acuerdo a la figura 1a como:

$$\alpha = \cos \theta_x, \quad \beta = \cos \theta_y, \quad \gamma = \cos \theta_z. \quad (2.6)$$

Además los cosenos directores satisfacen la siguiente identidad

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \equiv 1. \quad (2.7)$$

Luego, la fase en término de los cosenos directores y del número de propagación, se escribe en la forma siguiente

$$\Phi(P) = \left| \vec{k} \right| [\alpha x + \beta y + \gamma z] . \quad (2.8)$$

Para el caso en que  $z=0$  se tiene que

$$\Phi(P) = 2\pi \left[ \frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right] ; \quad (2.9)$$

definiendo las frecuencias espaciales como

$$u = \frac{\alpha}{\lambda} \quad y \quad v = \frac{\beta}{\lambda} . \quad (2.10)$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.10) la fase dada por la ecuación (2.9) queda definida en término de las frecuencias espaciales  $u$  y  $v$ , en la forma siguiente

$$\Phi(P) = 2\pi [ux + vy] . \quad (2.11)$$

Entonces, relacionando la ecuación (2.9) y (2.11) el espectro de frecuencias espaciales  $u$ ,  $v$ , dado por la ecuación (2.3) puede ser reescrito en términos de los cosenos directores y será identificado como el espectro angular no propagado, definido por la ecuación siguiente:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; 0\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y, z=0) \exp\left\{-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right\} dx dy . \quad (2.12)$$

## II.2. ESPECTRO ANGULAR PROPAGADO

Observando la situación gráfica se ilustra en la figura 1a, se establece lo siguiente: existe un espectro de difracción no propagado  $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; 0)$ , es decir en  $z=0$ , distribuido en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ ; por lo que, la siguiente propuesta es que: existe otro plano de frecuencias espaciales  $uv$ , que permanece paralelo al anterior, a una distancia  $z \neq 0$ . En este plano debe de existir el espectro de difracción propagado  $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$ , que puede ser descrito mediante la transformada de Fourier bidimensional del campo eléctrico  $E_z(x_z, y_z; z)$  difractado y propagado a la distancia referida, esto es,

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) &= \mathfrak{F}\{E_z(x_z, y_z, z)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(x_z, y_z, z) \exp\left\{-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)\right\} dx_z dy_z. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como se ve en la ecuación (2.13), el espectro angular  $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda; z)$  propagado su forma funcional explícita, depende de la forma funcional del campo eléctrico  $E_z(x_z, y_z; z)$  difractado y propagado. Por lo que en el siguiente desarrollo se determinará la forma funcional explícita del espectro; para lograr esto se a la definición del campo eléctrico difractado mediante la transformada de Fourier inversa, esto es,

$$\begin{aligned} E_z(x_z, y_z, z) &= \mathfrak{F}^{-1}\left\{A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) \exp\left\{i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)\right\} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

El campo eléctrico  $E_z(x_z, y_z; z)$  definido por la ecuación (2.14) debe ser solución de la ecuación diferencial escalar de Helmholtz (Goodman, 2005; Arfken y Wever, 2001), la cual nos da referencia de las variaciones de forma espacial tan rápidas que sufre el campo referido al propagarse en la distancia  $z$ , la cual es escrita como:

$$\nabla^2 E_z(x_z, y_z, z) + k^2 E_z(x_z, y_z, z) = 0. \quad (2.15)$$

Después de operar y sustituir la ecuación (2.14) en la ecuación (2.15) se obtiene la siguiente ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dz^2} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) \right\} \bullet \\ \bullet \exp\left[-i2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x_z + \frac{\beta}{\lambda}y_z\right)\right] d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda} = 0. \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) es igual cero, sí y sólo sí el término entre llaves es igual a cero, generándose la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constates (Zill, 1997),

$$\frac{d}{dz^2} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = 0. \quad (2.17)$$

La ecuación diferencial (2.17) tiene como solución una función de la forma  $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = e^{mz}$ , que al sustituir y operar en la ecuación referida, en la que se ha elegido a  $m$  tal que sea una raíz de la ecuación cuadrática misma que, genera la ecuación auxiliar o característica siguiente,

$$\left( m^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) \right) m = 0. \quad (2.18)$$

En este caso se tiene que la ecuación característica (2.18) tiene dos raíces  $m_1$  y  $m_2$ , complejas, que producen las dos soluciones siguientes,

$$A_1\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2)z} \quad y \quad A_2\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = e^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2)z}. \quad (2.19)$$

Estas funciones son linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$  y, en consecuencia, forman un conjunto fundamental. Entonces, la solución general de la ecuación (2.17) en ese intervalo es la combinación lineal de las ecuaciones (2.19) (Zill, 1997), es decir

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = C_1 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2})z} + C_2 e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2})z}. \quad (2.20)$$

De la ecuación (2.7) se obtiene  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ , y sustituyendo este resultado en (2.20) se obtiene

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = C_1 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z} + C_2 e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}, \quad (2.21)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes a determinar en la ecuación (2.21); misma que da referencia de la propagación de un espectro de ondas planas propagándose hacia +Z y hacia -Z respecto al coseno director  $\gamma$ , cuyo ángulo  $\theta_z$  lo forma el vector propagación  $\vec{k}$  y el eje Z. Puesto que interesa solo el espectro de difracción que se propaga hacia el eje +Z. Para esto, se considerará que el espectro de Fourier dado por (2.21), al propagarse en aire cuyo índice de refracción aproximadamente 1 ( $n_{\text{aire}} \approx 1$ ) y dentro de una zona restringida. El aire posee las propiedades de ser dieléctrico, no conductor, isotrópico, lineal, no absorbente, transparente y además de no ser buen dispersor de la luz roja de laser de Helio-Neón. Otro aspecto a considerar es que, la densidad de energía del espectro que se propaga hacia +Z es mucho mayor que la del espectro que se propaga hacia -Z y de acuerdo a las propiedades del aire, es posible no tomar en cuenta el espectro que viaja hacia -Z, por lo que la ecuación (2.21) se reduce a la siguiente expresión:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = C_1 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}. \quad (2.22)$$

La constante  $C_1$ , se determina imponiendo en la ecuación (2.22) la condición inicial de  $z=0$ , obteniéndose,

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z=0\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}. \quad (2.23)$$

La solución (2.23) puede interpretarse en la forma siguiente: Existe una función denominada de transferencia  $\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z\right\}$ , que multiplica al espectro no propagado

$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right)$ , hace que exista el espectro angular  $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right)$  propagado o transferido a una distancia  $z$ . Ahora, con el fin de saber si la ecuación (1.23) es la apropiada para propagar el espectro de difracción a la distancia  $z$ , se analizarán tres casos, ya que como se ve la ecuación referida también depende del coseno director  $\gamma$ .

**CASO 1:** Espectro transversal a z. Basta recordar que el coseno director  $\gamma$  de acuerdo a la ecuación (1.7) puede ser definido como

$$\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \quad (2.24)$$

de acuerdo con la ecuación (2.6) se tiene que  $\gamma = \cos\theta_z$ . Ahora, bajo la condición de que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , implica que de la ecuación (2.24) se obtiene que  $\gamma = 0$  y como consecuencia se determina que  $\theta_z = 90^\circ$ , esto significa que el vector propagación  $\vec{k}$  y el vector unitario  $\hat{k}_z$  en la dirección del eje Z, son perpendiculares; en este caso las ondas que componen el espectro de difracción, se propagan perpendiculares al eje Z, y este es un caso que no da solución al problema planteado. Además, con  $\gamma = 0$  se tiene que  $e^{\frac{i2\pi}{\lambda}\gamma z} = 1$  y de la ecuación (2.23) se establece que,

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z = 0\right); \quad (2.25)$$

entonces, de acuerdo a la ecuación (2.25), el espectro se propaga perpendicular al eje Z y posee la misma distribución que el espectro no propagado; esta situación no favorece al desarrollo que se realiza.

**CASO II:** Espectro evanescente. Para este caso, se supone que se cumple la condición  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ , esto implica que  $\gamma = \sqrt{(-1)(\alpha^2 + \beta^2 - 1)} = i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}$ , es decir el coseno director es complejo, por lo tanto la ecuación (2.23) se escribe como:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z = 0\right) e^{-\frac{2\pi}{\lambda}[\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}]z}. \quad (2.26)$$

La ecuación (2.26) representa un espectro de ondas evanescentes, que decaen conforme se propagan en la distancia z. Este también es un caso no apropiado para el desarrollo que se está realizando.

**CASO III:** Espectro propagado a la distancia z. Para este caso, se impone la condición  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$  e implica que  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} > 0$  o sea que el coseno director adquiere valores reales, entonces la ecuación (2.23) representa el espectro de ondas propagándose angularmente o en las direcciones de los cosenos directores  $\alpha$  y  $\beta$ , y es el caso que se desea estudiar. De acuerdo a la ecuación (2.6) se puede escribir (2.23) como

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z = 0\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}]z}. \quad (2.27)$$

Definiendo ahora el factor exponencial como una función de transferencia  $T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right)$  en la forma siguiente

$$T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}]z} . \quad (2.28)$$

Quedando el espectro propagado como

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z=0\right)T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) . \quad (2.29)$$

### II.3. ESPECTRO ANGULAR PROPAGADO A ÁNGULOS PEQUEÑOS

Considerando ahora que el vector propagación  $\vec{k}$  forma un ángulo  $\theta_z$  de pequeña magnitud respecto al eje Z. Además, se considera que el exponente de la ecuación (2.28) puede ser escrito de acuerdo al teorema del binomio como:

$$\left(1 - (\alpha^2 + \beta^2)\right)^{1/2} = 1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2} - \frac{1}{8}(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \dots \quad (2.30)$$

Considerando solo los primeros dos términos del desarrollo en serie dado en (2.30), bajo la condición de que  $(\alpha^2 + \beta^2) \ll 1$ , esto es,

$$\left(1 - (\alpha^2 + \beta^2)\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2} . \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) permite escribir a la función de transferencia como

$$T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) \approx e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\left[1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2}\right]z} = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z\left[\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\right]} . \quad (2.32)$$

Sustituyendo la ecuación (2.9) en la ecuación (2.32) se escribe la función de transferencia en términos de las frecuencias espaciales  $u$ ,  $v$ , esto es

$$T(u, v; z) \approx e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z [u^2 + v^2]} . \quad (2.33)$$

Aquí, es importante recordar que se cumple la condición

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 = u^2 + v^2 \ll \frac{1}{\lambda^2} . \quad (2.34)$$

Puesto que el coseno director  $\alpha$  de acuerdo a la geometría de la figura 2.1 y para ángulos pequeños, puede ser escrito como:

$$\alpha = \cos\theta_x = \cos(\pi - \theta_z) = \text{sen}\theta_z \approx \theta_z = \frac{x_z}{z} . \quad (2.35)$$

De manera similar el coseno director  $\beta$  y en base a la geometría de la figura 2.1, además de considerar ángulos pequeños, se escribe en la forma siguiente,

$$\beta = \cos\theta_y = \cos(\pi - \theta_z) = \text{sen}\theta_z \approx \theta_z = \frac{y_z}{z} . \quad (2.36)$$

Las ecuaciones (2.35) y (2.36) permiten escribir a (2.34) como

$$\left(\frac{x_z}{\lambda z}\right)^2 + \left(\frac{y_z}{\lambda z}\right)^2 = u^2 + v^2 \ll \frac{1}{\lambda^2} . \quad (2.37)$$

De la ecuación (2.37) se determina que

$$u = \frac{x_z}{\lambda z} \quad \text{y} \quad v = \frac{y_z}{\lambda z} ; \quad (2.38)$$

es decir, las frecuencias espaciales  $u, v$  son paraxiales. De manera que el espectro de difracción angular propagado con ángulo pequeño, es decir  $\gamma \approx 1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2}$ , puede ser escrito en término de las frecuencias espaciales  $u$  y  $v$ , que es la función que se quería determinar, esto es:

$$A(u, v, z) = A(u, v, z = 0) e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z [u^2 + v^2]} . \quad (2.39)$$



De acuerdo a la ecuación (2.39) ahora es posible determinar de forma explícita la forma del campo eléctrico, asociado a las ondas difractadas y propagadas una distancia  $z$ , con solo obtener la transformada de Fourier inversa de la ecuación referida, es decir,

$$\mathfrak{F}^{-1}\{A(u, v, z)\} = e^{ikz} \mathfrak{F}^{-1}\{A(u, v, z=0)e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\}. \quad (2.40)$$

Haciendo uso de el teorema de transformada de Fourier inversa del producto de dos funciones, teorema (A-19), el cual establece que se obtiene la convolución representada mediante el símbolo  $\otimes$ , de las transformadas de Fourier inversas, y de acuerdo a las ecuación (2.3) y (2.13), la ecuación (2.40) se escribe como:

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\{E_z(x_z, y_z, z)\} = e^{ikz} \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\{E_0(x, y, z=0)\} \otimes \mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\}. \quad (2.41)$$

El teorema fundamental de Fourier (A-6), establece que  $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\{E_z(x_z, y_z, z)\} = E_z(x_z, y_z, z)$ , entonces, se tiene que la ecuación (2.41) se reduce a la siguiente expresión,

$$E_z(x_z, y_z, z) = e^{ikz} E_0(x, y, z=0) \otimes \mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\}. \quad (2.42)$$

En el desarrollo siguiente se obtiene la transformada de Fourier inversa de la función exponencial, es decir  $\mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\}$ , la cual puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\lambda z u^2 + i2\pi x_z u} du \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\lambda z v^2 + i2\pi y_z v} dv \right]. \quad (2.43)$$

Haciendo uso del siguiente resultado integral (Spiegel, 1980),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \quad (2.44)$$

Entonces, con  $a = i\pi\lambda z$  y  $b = -2i\pi x_z$  la integral del primer factor de (2.43) será

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\lambda z u^2 + i2\pi x_z u} du = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} e^{\frac{-i\pi x_z^2}{\lambda z}}. \quad (2.45)$$

Mientras que si se hace que  $a = i\pi\lambda z$  y  $b = 2\pi y_z$  la integral del segundo factor de (2.43) será

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\lambda z v^2 + i2\pi y_z v} dv = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} e^{\frac{-i\pi y_z^2}{\lambda z}}. \quad (2.46)$$

Luego entonces, de acuerdo a (2.45) y (2.46), la ecuación (2.43) puede ser escrita como

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{e^{-i\pi\lambda z[u^2+v^2]}\right\}=\left(\frac{1}{i\lambda z}\right)e^{\frac{-i\pi}{\lambda z}(x_z^2+y_z^2)}. \quad (2.47)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.42) se obtiene:

$$E_z(x_z, y_z, z) = \left(\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\right) E_0(x, y, z=0) \otimes e^{\frac{-ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}; \quad (2.48)$$

luego entonces, la ecuación (2.48) resulta de gran importancia, ya que permite establecer la forma de propagar el campo eléctrico difractado  $E_z(x_z, y_z, z)$ , una distancia  $z$ , desde el plano  $xy$  en  $z=0$  información contenida en el factor  $e^{ikz}$ , hasta el plano  $x_z y_z$  en el que se distribuye, y se obtiene como la convolución del campo eléctrico no propagado  $E_0(x, y; z=0)$  con la función exponencial  $e^{\frac{-ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}$ . Además el campo propagado está desfasado en  $\frac{\pi}{2}$  radianes debido al factor  $i^{-1}$ . La ecuación referida, también será de gran importancia en el desarrollo de los capítulos siguientes de este trabajo de Tesis. Si ahora, se sustituye la ecuación (2.1) en (2.48), se determina que,

$$E_z(x_z, y_z, z) = \left(\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\right) [t(x, y) E_{ilum}(x, y)] \otimes e^{\frac{-ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}. \quad (2.49)$$

De acuerdo a la ecuación (2.49), el campo eléctrico  $E_z(x_z, y_z, z)$  difractado y propagado a la distancia  $z \neq 0$ , definida en el factor  $e^{ikz}$ , además de poseer las características descritas en el párrafo anterior, ahora es la operación matemática de convolución representada mediante el símbolo  $\otimes$ , de la exponencial  $e^{\frac{-ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}$  con el producto de la función de transmitancia  $t(x, y)$  asociada al objeto difractor y la amplitud del campo eléctrico  $E_{ilum}(x, y)$  asociado a las ondas que iluminan al objeto referido; que de acuerdo a desarrollo realizado, al campo de iluminación aún no se le impone condición y esto da origen a que se ilumine con ondas esféricas, cilíndricas Gaussianas, tipo Bessel entre otras opciones. Pero en el desarrollo inicial de este capítulo, se planteo iluminación con ondas planas, condición que se impone en el siguiente desarrollo.

## II.4. DIFRACCIÓN EN LA REGIÓN DE FRESNEL

En el siguiente desarrollo se analiza el caso del fenómeno de difracción de Fresnel de ondas monocromáticas; para esto, consideramos que la distancia  $z$  definida dentro del intervalo  $0 < z < \infty$  y medida desde el plano  $xy$  objeto, hasta el plano  $x_z y_z$  donde se produce la distribución del campo difractado definido por la ecuación (2.49), cumple la condición de estar dentro de la región de difracción denominada zona de Fresnel. Por lo que la ecuación de difracción paraxial referida puede ser descrita en la forma siguiente:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}[x_z^2 + y_z^2]\right) \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) E_{ilum}(x, y) \exp\left(\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]\right) \exp\left(-i2\pi\left[\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y\right]\right) dx dy. \quad (2.50)$$

La expresión (2.50) se conoce como la ecuación de difracción de ondas electromagnéticas de ecuación de Fresnel-Kirchhoff (Goodman, 2005). En ella, la expresión  $\exp\{ikz\}$ , se conoce como el término de propagación, La cantidad compleja  $\frac{1}{i}$  indica un desfaseamiento en  $\frac{\pi}{2}$  de las ondas difractadas al propagarse del plano  $xy$  hasta el plano  $x_z y_z$ . Mientras que el término  $\exp\left\{i\frac{k}{2z}(x_z^2 + y_z^2)\right\}$ , se interpreta como factor cuadrático de fase e indica que para las ondas difractadas y propagadas una distancia  $z$  hasta el plano  $x_z y_z$ , su fase se distribuye en una esfera y no en el plano referido. El término  $\exp\left\{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right\}$ , se le

denomina factor de Fresnel. Mientras que el factor  $e^{-i2\pi\left[\frac{x_z}{\lambda z}x + \frac{y_z}{\lambda z}y\right]}$  se le denomina término de Fraunhofer. Como se ve la ecuación (2.50), tiene una estructura matemática cuya forma funcional del campo eléctrico asociado a las ondas difractadas y propagadas, no es fácil de interpretar, por lo que se recurre a darle una interpretación como espectro de difracción propagado a la distancia  $z$ , para esto basta definirlo en término de las frecuencias espaciales las frecuencias espaciales dadas por las ecuaciones (2.38), esto es

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} e^{\left(\frac{ik}{2z}[x_z^2 + y_z^2]\right)} \mathfrak{F} \left\{ t(x, y) E_{ilum}(x, y) e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]} \right\}_{u=\frac{x_z}{\lambda z}, v=\frac{y_z}{\lambda z}}. \quad (2.51)$$

La ecuación (2.51) se interpreta como la transformada de Fourier del producto de tres funciones, ver la propiedad de la convolución (A-16), y será la convolución de las transformadas de Fourier (Gaskill, 1998), es decir,

$$\begin{aligned} E_z(x_z, y_z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\left(\frac{ik}{2z}[x_z^2 + y_z^2]\right)} \mathfrak{F}\{t(x, y)E_{ilum}(x, y)\} \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}\right\} = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\left(\frac{ik}{2z}[x_z^2 + y_z^2]\right)} \left[\mathfrak{F}\{t(x, y)\} \otimes \mathfrak{F}\{E_{ilum}(x, y)\}\right] \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}\right\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Es decir, en la región de Fresnel, el espectro de difracción es una triple convolución de las funciones que ahí intervienen, se ha propagado una distancia  $z$  y está desfasado y su fase está distribuida en una esfera y no es el plano de frecuencias espaciales  $uv$ . Puesto que el objeto difractor es iluminado con una onda plana de amplitud constante, es decir  $E_{ilum} = cte$ , se tendrá que (2.52) se reduce a la siguiente ecuación,

$$E_z(x_z, y_z, z) = \frac{E_{ilum}e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\left(\frac{ik}{2z}[x_z^2 + y_z^2]\right)} \mathfrak{F}\{t(x, y)\} \otimes \mathfrak{F}\{1\} \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}\right\}. \quad (2.53)$$

Pero  $\mathfrak{F}\{1\} = \delta(u, v)$  (Gaskill, 1978) entonces se tendrá que la ecuación (2.53) queda escrita en la forma

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{E_{ilum}e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\left(\frac{ik}{2z}[x_z^2 + y_z^2]\right)} \mathfrak{F}\{t(x, y)\} \otimes \delta(u, v) \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}\right\}. \quad (2.54)$$

Pero la convolución de la función delta de Dirac con otra función, se obtiene la misma función, es decir  $\mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}\right\} = \delta(u, v) \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}\right\}$  (Gaskill, 1978) y el teorema (A-14), esto implica que la ecuación (2.54) se escribe como:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{E_{ilum}e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\left(\frac{ik}{2z}[x_z^2 + y_z^2]\right)} \mathfrak{F}\{t(x, y)\} \otimes \mathfrak{F}\left\{e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}\right\}. \quad (2.55)$$

Es decir, en la región de Fresnel la distribución del campo del espectro de difracción, se determina a través de la convolución de la transformada de Fourier de la función de transmitancia  $t(x, y)$  asociada al objeto difractor; con la respectiva transformada de Fourier de la función exponencial  $e^{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]}$ .

## II.5. DIFRACCIÓN EN LA REGIÓN DE FRAUNHOFER

Para el caso del fenómeno de difracción de ondas electromagnéticas en la región de Fraunhofer, el análisis se realiza en la forma siguiente: Para esto, se debe considerar que la región referida existe, cuando el plano  $X_z Y_z$  en el que se distribuye el campo de difracción  $E_z(x_z, y_z, z)$  y está situado a la distancia  $z$  medida desde el plano objeto  $XY$ , cumple la condición de ser muy grande, es decir  $z \rightarrow \infty$ . Así, bajo esta condición se toma el límite de la ecuación (2.50), o sea

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} E_z(x_z, y_z, z) &= \left[ \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \right] \left[ \lim_{z \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{ik}{2z} [x_z^2 + y_z^2]\right) \right] \bullet \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) E_{ilum}(x, y) \left[ \lim_{z \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{i\pi}{z\lambda} [x^2 + y^2]\right) \right] \bullet \\ &\bullet \left[ \lim_{z \rightarrow \infty} \exp\left(-i2\pi \left[ \frac{x_z}{\lambda z} x + \frac{y_z}{\lambda z} y \right]\right) dx dy \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Cuando  $z \rightarrow \infty$ , se tiene que  $\exp\left(\frac{ik}{2z} [x_z^2 + y_z^2]\right) = 1$ ; mientras que Goodman, (2005) estableció que  $z \gg \frac{\pi}{z\lambda} [x^2 + y^2]$  y por lo tanto el primer término exponencial en la integral (2.56) es uno, es decir  $\exp\left(\frac{i\pi}{z\lambda} [x^2 + y^2]\right) = 1$ . Bajo estas consideraciones la ecuación referida puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} E_z(x_z, y_z, z \rightarrow \infty) &= \frac{\exp(ik[z \rightarrow \infty])}{i(\lambda z)} \bullet \\ &\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) E_{ilum}(x, y) (1) \exp\left(-i2\pi \left[ \frac{x_z}{\lambda z} x + \frac{y_z}{\lambda z} y \right]\right) dx dy. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Se observa que la forma funcional del campo eléctrico difractado y propagado hasta una distancia  $z$  muy grande o sea  $z \rightarrow \infty$ , su interpretación funcional no es sencilla. Por lo que se recurre, definir ahora las frecuencias espaciales y paraxiales estrella, a través de las ecuaciones siguientes:

$$u^* = \frac{x_z}{\lambda z} \quad \text{y} \quad v^* = \frac{y_z}{\lambda z}. \quad (2.58)$$

En base a las ecuaciones (2.58), la ecuación (2.57) se identifica como el espectro de difracción, definido a través de la transformada de Foutier del producto de funciones, que se ha propagado una distancia  $z$  muy grande y está desfasado en  $\pi/2$ , además su fase está distribuida en el plano de frecuencias espaciales estrella  $u^*v^*$ . La función puede ser escrita en la forma,

$$A(u^*, v^*, z \rightarrow \infty) = \frac{\exp(ik[z \rightarrow \infty])}{i(\lambda z)} \mathfrak{T}\{t(x, y)E_{ilum}(x, y)(1)\}_{u^* = \frac{x_z}{\lambda z}, v^* = \frac{y_z}{\lambda z}} \quad (2.59)$$

Pero, de acuerdo al teorema de transformada de Fourier del producto de dos funciones (A-16) (Gaskill, 1978) la ecuación (2.59) se escribe como

$$A(u^*, v^*, z \rightarrow \infty) = \frac{\exp(ikz \rightarrow \infty)}{i\lambda z} \mathfrak{T}\{t(x, y)\} \otimes \mathfrak{T}\{E_{ilum}(x, y)\} \otimes \delta(u^*, v^*) \quad (2.60)$$

En la ecuación (2.60) se ha considerado que  $\mathfrak{T}\{1\} = \delta(u^*, v^*)$ ; si además se considera el hecho siguiente  $E_z(x_z, y_z, z) = \delta(u^*, v^*) \otimes E_z(x_z, y_z, z)$ , entonces a ecuación referida se reduce a la siguiente expresión

$$A(u^*, v^*, z \rightarrow \infty) = \frac{\exp(ik[z \rightarrow \infty])}{i(\lambda z = K)} \mathfrak{T}\{t(x, y)E_{ilum}(x, y)\}_{u^* = \frac{x_z}{\lambda z = K}, v^* = \frac{y_z}{\lambda z = K}} \quad (2.61)$$

Para el caso de iluminación con ondas planas monocromáticas de amplitud constante, es decir  $E_{ilum}(x, y) = cte$ ; entonces la ecuación (2.61) queda escrita como

$$A(u^*, v^*, z \rightarrow \infty) = \frac{E_{ilum} \exp(ik[z \rightarrow \infty])}{i(\lambda z)} \mathfrak{T}\{t(x, y)\} \otimes \mathfrak{T}\{1\}_{u^* = \frac{x_z}{\lambda z}, v^* = \frac{y_z}{\lambda z}} \quad (2.62)$$

Donde se ha considerado nuevamente que  $\mathfrak{T}\{1\} = \delta(u^*, v^*)$ , se obtiene

$$A(u^*, v^*, z \rightarrow \infty) = \frac{E_{ilum} \exp(ik[z \rightarrow \infty])}{i(\lambda z)} \mathfrak{T}\{t(x, y)\} \otimes \delta(u^*, v^*)_{u^* = \frac{x_z}{\lambda z}, v^* = \frac{y_z}{\lambda z}} \quad (2.63)$$

Si además de considerar que  $\mathfrak{T}\{t(x, y)\} = \mathfrak{T}\{t(x, y)\} \otimes \delta(u^*, v^*)$ , entonces la ecuación (2.63) queda escrita como

$$A(u^*, v^*, z \rightarrow \infty) = \frac{E_{ilum} \exp(ik[z \rightarrow \infty])}{i(\lambda z)} \mathfrak{T}\{t(x, y)\} \quad (2.64)$$

Siempre que las frecuencias espaciales estrella estén definidas como  $u^* = \frac{x_z}{\lambda z}$  y  $v^* = \frac{y_z}{\lambda z}$ .

En la ecuación (2.64) el término  $\mathfrak{F}\{t(x, y)\}$  se identifica como la transformada de Fourier de la función de transmitancia asociada al objeto difractor que existe en el plano  $u^*v^*$ . El término exponencial indica que las ondas difractadas como un patrón de Fourier se han propagado a la distancia  $z$  muy grande, además existe un desfaseamiento de ellas y que la fase se distribuye en un plano de frecuencias  $u^*v^*$ .

## II.6. CONCLUSIÓN

Una primera conclusión es que, a través de lo documentado en este capítulo, se ha podido establecer uno de los modelos matemáticos para el tratamiento del fenómeno de difracción, definido por la ecuación (2.48), que será fundamental en el desarrollo del capítulo III. Como segunda conclusión se establece que: se amplió tanto el análisis matemático como físico, desde una perspectiva particular, respecto a lo publicado en la bibliografía existente; en lo que respecta a las zonas de difracción, en las que existe el plano de distribución de frecuencias espaciales  $uv$ , conocida también como región de Fresnel; así como el plano de frecuencias espaciales estrella  $u^*v^*$  o de Fraunhofer.

## CAPÍTULO III

### DIFRACCIÓN CON LENTE CONVERGENTE

#### INTRODUCCIÓN

La configuración de una lente doblete cementada, depende de los tipos de vidrio escogidos, así como la elección de las aberraciones a ser controladas, que algunas veces son introducidas con el propósito de balancear las aberraciones que posee el sistema óptico en el que va a actuar la lente referida. Entre otros tipos de lentes, el doblete acromático cementado tipo Fraunhofer es el sistema óptico más comúnmente usado, está formada por una lente biconvexa de vidrio Crown, en contacto con lente cóncava casi plana de vidrio Flint. La forma global de este tipo de lente, es muy parecida a una lente plano convexa (Hecht y Zajac, 1998; Newport, 1990). La selección de vidrios y las curvaturas apropiadas permiten la posibilidad de producir una lente doblete acromática, además de eliminar las aberraciones de esfericidad y de coma; mientras que la aberración de distorsión de un sistema de lentes delgadas que forman la lente doblete tipo Fraunhofer será cero, si su centro óptico coincide con el centro geométrico del diafragma de abertura. Pero si se hace uso de luz monocromática como la de láser de Helio Neón, no se tiene uno que preocupar por la aberración monocromática (Hecht y Zajac, 1998).

Para tener una mejor idea de lo realizado en el capítulo, éste, se ha dividido en cuatro secciones en las que se consideran los siguientes aspectos: La sección III.1 está dedicada a la descripción lo más rigurosamente posible, respecto a la propagación del campo o el espectro de difracción. Mientras que en la sección III.2 se determina el modelo matemático de difracción de convolución de transformadas de Fourier, bajo condiciones específicas que deben de existir. Surge el concepto de transformada exacta de Fourier, como un caso especial de convolución, y la sección III.3 es dedicada a fundamentarlo. En tanto que la sección III.4 se proporciona una conclusión al capítulo.

#### III.1 TEORÍA

Una lente doblete cementada posee diferentes formas de actuar, cuando ella es implementada en un arreglo óptico o procesador óptico como el que se ilustra en la figura 3.1. Por lo que en el siguiente desarrollo, se producirá los modelos matemáticos de difracción para diferentes regiones donde se distribuye el campo o el espectro de difracción según sea el caso; puntualizando las condiciones que deben satisfacer los parámetros involucrados en cada situación que se trate. Para esto, es de importancia recordar que: Goodman, (2005) y Hecht y Zajac, (1998) argumentaron que el viñeteado y la aceptación de una frecuencia espacial máxima, es el efecto que produce la limitación de la sección eficaz impuesta por la abertura finita de una lente esférica doblete cementada convergente. Esto lleva a realizar un análisis de la relación que existe entre la frecuencia espacial máxima, el ancho  $l_1$ , y la altura  $l_2$  de la fractura o abertura rectangular figura 3.1, que actúa como objeto difractor y el radio  $a$  de la pupila asociada a la lente transformadora, un análisis detallado respecto a estas afirmaciones se presenta en el anexo C.



Por lo antes documentado, en el desarrollo que se realiza a continuación, se centrará en determinar los modelos matemáticos del espectro de difracción, haciendo uso del concepto de frecuencias espaciales paraxiales. Para esto, consideremos el arreglo óptico coherente que se ilustra en la figura 3.1 ya referida, en este caso, el objeto difractor (4) que puede ser entre otras opciones, una abertura rectangular de ancho  $l_1$ , de altura  $l_2$  muy delgada; contenida en una pantalla de espesor  $l_3$  casi cero, a la que se le asocia una función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$ . Tal objeto es iluminado por ondas electromagnéticas planas de amplitud constante  $E_0$  y monocromáticas de luz de láser de Helio-Neón ( $\lambda=632.8\text{nm}$ ), colimadas con la lente convergente  $L_3$  de distancia focal  $f_{LC}$  conocida, provenientes de la fuente (1), ampliadas y filtradas con el filtro espacial (2). Son difractadas por el objeto referido (4), se propagan e inciden sobre la lente doblete cementada convergente o lente transformadora  $L_5$ , de distancia focal  $f_{LD}$  también conocida. La lente referida tiene a su vez diferentes formas de actuar sobre el campo o el espectro de difracción, ya que los puede propagar a diferentes distancias  $z$  medida a partir de ella, produciendo una distribución de amplitud compleja del campo en el plano  $X_z Y_z$  o del espectro en el plano de frecuencias  $uv$ . Las zonas o regiones en las que se sitúa el plano en el que se distribuye el campo o el espectro se clasifican como: la zona cercana a la lente, la región convergente y divergente de la lente, también conocidas como regiones de Fresnel o zonas de convolución de transformadas de Fourier; una cuarta zona denominada región de Fraunhofer, o plano de la transformada exacta de Fourier, también conocida como plano conjugado de la fuente de iluminación. Mientras que la quinta zona será identificada como la región del plano imagen o plano conjugado al plano objeto (Hecht y Zajac, 1998).

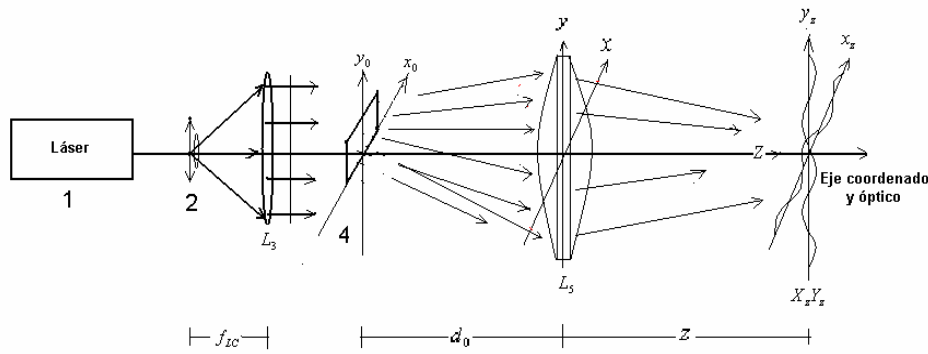


Figura 3.1 Arreglo teórico en aire para producir modelos matemáticos de difracción (1) Láser de He-Ne. (2) filtro espacial,  $L_3$  colimador, (4) Objeto difractor,  $L_5$  lente transformadora,  $X_z Y_z$  plano de distribución del campo difractado

Con el fin de producir los modelos matemáticos de difracción, se supone que el objeto difractor se encuentra situado en el plano objeto  $X_0 Y_0$ , a la distancia  $d_0$  de la lente transformadora, figura 3.1. Como es iluminado con ondas planas de amplitud constante  $E_0$ , entonces, la distribución del campo difractado por el objeto de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$ , será  $E_1(x_0, y_0)$  y es definida mediante la siguiente ecuación

$$E_1(x_0, y_0) = E_0 t_0(x_0, y_0). \quad (3.1)$$

Ahora, las ondas monocromáticas difractadas y propagadas una distancia  $d_0$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  y propagadas hasta el plano  $XY$  a la entrada de la lente doblete cementada (5), ver figura 3.1, pueden ser descritas usando la ecuación (2.48) del capítulo I, en la que se ha considerando las siguientes modificaciones,  $z = d_0$  en tanto que  $E_z(x_z, y_z, z) = E_{d_0}(x, y)$ , también  $E_{illum}(x, y, z = 0) = E_0(x_0, y_0) = cte$ , mientras que la transmitancia será  $t(x, y) = t(x_0, y_0)$  y el factor exponencial es  $e^{\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} = e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2 + y^2)}$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$E_{d_0}(x, y) = \frac{E_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} t_0(x_0, y_0) \otimes e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2 + y^2)}. \quad (3.2)$$

Como se estableció en la sección II.3, el símbolo  $\otimes$  en la ecuación (3.2) significa la operación matemática de convolución de dos funciones. De acuerdo al teorema de convolución A-8 anexo A, la ecuación (3.2) puede ser escrita como

$$E_{d_0}(x, y) = \frac{E_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2d_0}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda d_0}x_0 + \frac{y}{\lambda d_0}y_0\right)} dx_0 dy_0. \quad (3.3)$$

Una mejor interpretación funcional del campo difractado dado por la ecuación (3.3), se obtiene si definimos las frecuencias espaciales paraxiales en la forma siguiente:

$$u_1 = \frac{x}{\lambda d_0} \quad v_1 = \frac{y}{\lambda d_0}. \quad (3.4)$$

De manera que al sustituir las ecuaciones (3.4) en la ecuación (3.3) se obtiene,

$$E_{d_0}(u_1, v_1) = \frac{E_0}{i\lambda d_0} e^{ik(d_0)} \bullet \left\{ e^{i\pi\lambda d_0(u_1^2 + v_1^2)} \mathfrak{F} \left\{ t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} \right\} \right\}_{u_1 = \frac{x}{\lambda d_0} \quad v_1 = \frac{y}{\lambda d_0}}. \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) se interpreta como el espectro de difracción paraxial o de transformada de Fourier del producto de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada al objeto

difractor, con la función exponencial  $e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)}$ . El patrón de difracción, se ha propagado una distancia ( $d_0$ ) desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano  $XY$  a la entrada de la lente doblete cementada, además está desfasado  $\frac{\pi}{2}$  información que se obtiene del factor  $\frac{1}{i}$ . En

tanto que, del factor  $e^{i\pi\lambda d_0(u_1^2+v_1^2)}$  indica que la fase del espectro de difracción, está distribuida en una esfera información que se obtiene del término  $e^{i\pi\lambda d_0(u_1^2+v_1^2)}$ , más no en el plano de frecuencias espaciales  $u_1v_1$ .

Considerando ahora, que campo eléctrico difractado por el objeto y propagado a través de la lente doblete cementada, produce en su plano  $XY$  justo en la salida de la lente referida, una distribución de amplitud compleja definida mediante la ecuación siguiente,

$$E_l(x, y) = t_l(x, y)E_{d_0}(x, y). \quad (3.6)$$

Siendo el campo eléctrico paraxial incidente  $E_{d_0}(x, y)$  definido en la ecuación (3.3), mientras que  $t_l(x, y)$  es la función de transmitancia asociada a la lente doblete cementada; se sugiere ver el anexo B, en el que se presentan los detalles de cómo determinarla; así, de acuerdo a la ecuación (B-25) la función de transmitancia referida se escribe en la forma

$$t_l(x, y) = \text{cir}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \exp\{-ikW(x, y)\} \cdot \exp[ik(n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2})] \exp\left\{-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2f_{LD}}\right)\right\}, \quad (3.7)$$

donde la expresión  $\text{cir}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$  es la función círculo o de pupila, asociada a la lente esférica; mientras que  $W(x, y)$  es la función de aberración (Welford, 1991);  $n_{L1}$  es el índice de refracción asociado a la lente delgada que forma el doblete,  $\Delta_{0L1}$ , es el espesor de la lente referida;  $n_{L2}$  será el índice de refracción asociado a la segunda lente y,  $\Delta_{0L2}$  es su espesor. La distancia focal de la lente doblete cementada será  $f_{LD}$ . Ahora, al sustituir las ecuaciones (3.3) y (3.7), el campo de difracción propagado a través de la lente doblete o transformadora queda definido en la forma siguiente:

$$E_l(x, y) = \text{cir}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) e^{ik[d_0 + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{-ikW(x, y)} \cdot \frac{E_0}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2}(x^2 + y^2)\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_{LD}}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda d_0}x_0 + \frac{y}{\lambda d_0}y_0\right)} dx_0 dy_0. \quad (3.8)$$

Hecht y Zajac, (1998) también documentaron en su libro de Óptica que, las lentes dobles algunas veces se diseñan con algunas aberraciones, dependiendo del sistema óptico en el van a actuar. Un caso especial es, cuando la lente esférica doblete cementada no posee aberraciones cromáticas y monocromáticas, por ejemplo un doblete tipo Fraunhofer, como se documentó en la introducción de este capítulo; bajo esta condición la función de aberración  $W(x, y)$  en la ecuación (3.8), se considera igual a cero, es decir  $W(x, y) = 0$ , esto implica que  $\exp\{-ikW(x, y)\} = 1$ . Además, también se debe tomar en cuenta que, el ancho y altura del objeto difractor o transparencia, son mucho menores que el diámetro  $2a$  de pupila asociada a la lente doblete cementada; se sugiere ver detalles y justificación sobre esta afirmación en el anexo C. Lo antes documentado, implica que todas las ondas paraxiales difractadas por el objeto, que inciden sobre la lente doblete cementada convergente, se propagan a través de ella; como consecuencia, la función círculo se toma como igual a uno, esto es  $\text{cir}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = 1$ . En base a estas consideraciones la ecuación

(3.8) se reduce a la siguiente expresión:

$$E_l(x, y) = \frac{E_0}{i\lambda d_0} e^{ik[d_0 + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2}(x^2 + y^2)\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_{LD}}\right)} \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda d_0}x_0 + \frac{y}{\lambda d_0}y_0\right)} dx_0 dy_0. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) establece la forma como se distribuye el campo eléctrico  $E_l(x, y)$  asociado a las ondas difractadas desde el objeto; es decir, la distribución de amplitud compleja se han propagado una distancia  $d_0 + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$ , cuya fase no se encuentra distribuida en el plano  $XY$  a la salida de la lente doblete cementada, sino en una esfera información contenida en el factor exponencial siguiente  $e^{\frac{ik}{2}(x^2 + y^2)\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_{LD}}\right)}$ ; además continúa desfasado en  $\frac{\pi}{2}$  y su forma funcional, se determina a través de la doble integral y no es nada sencilla de interpretar.

Ahora, para interpretar la propagación del campo eléctrico difractado, desde el plano  $XY$  hasta el plano  $X_z Y_z$  en el que se distribuye, que está situado a la distancia  $z$  de la lente transformadora o doblete acromática cementada; puede usarse nuevamente la ecuación paraxial (2.48) escrita en la forma siguiente:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} E_l(x, y) \otimes e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_l(x, y) e^{\frac{ik}{2z}[(x_z - x)^2 + (y_z - y)^2]} dx dy. \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.9) en la ecuación (3.10) se obtiene,

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{E_0 e^{ik[d_0+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i^2 \lambda^2 z d_0} \bullet \quad (3.11)$$

$$\bullet \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2) \left( \frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f_{LD}} \right)} e^{-i2\pi \left[ \left( \frac{x}{\lambda d_0} x_0 + \frac{x_z}{\lambda z} x \right) + \left( \frac{y}{\lambda d_0} y_0 + \frac{y_z}{\lambda z} y \right) \right]} dx dy dx_0 dy_0.$$

De la ecuación (3.11) se establece que, el campo eléctrico de difracción  $E_z(x_z, y_z)$  distribuido en el plano  $X_z Y_z$ ; se ha propagado desde el plano objeto  $X_0 Y_0$  una distancia  $\{d_0 + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}\}$  información contenida en el primer factor exponencial; pero de acuerdo con el factor  $i^{-2}$  se ha desfasado en  $\pi$  radianes y su fase está distribuida en una esfera, de acuerdo al factor  $e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}$ , ambos aspectos aún no son definitivos, ya que se necesita conocer su forma funcional específica, cuya interpretación no es tan evidente. Para definir la función  $E_z(x_z, y_z)$  en forma explícita, se recurre a definir las frecuencias espaciales  $u_2$  y  $v_2$ , de acuerdo a las siguientes ecuaciones,

$$u_2 = \left( \frac{x_0}{\lambda d_0} + \frac{x_z}{\lambda z} \right) = u_0 + u_z, \quad (3.12)$$

$$v_2 = \left( \frac{y_0}{\lambda d_0} + \frac{y_z}{\lambda z} \right) = v_0 + v_z. \quad (3.13)$$

La importancia de las ecuaciones (3.12) y (3.13) permiten, por un lado definir y dar la posibilidad de determinar la magnitud de las frecuencias espaciales paraxiales  $u_0, v_0$  emitidas en zonas específicas en el objeto, así como las frecuencias espaciales también paraxiales  $u_z$  y  $v_z$  con las que se distribuye en el plano  $X_z Y_z$ . Ahora, relacionando las ecuaciones referidas con la ecuación (3.11) se obtiene:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{e^{ik[d_0+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2+y_z^2)}}{i^2 \lambda^2 z d_0} \bullet \quad (3.14)$$

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} E_{d_0}(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2) \left( \frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f_{LD}} \right)} e^{-i2\pi[u_2 x + v_2 y]} dx dy dx_0 dy_0.$$

La ecuación (3.14) también puede ser escrita en la forma siguiente, de acuerdo al teorema A-1 de transformada bidimensional de Fourier

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{e^{ik[d_0 + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{\frac{ik}{2z}(x_z^2 + y_z^2)}}{i^2 \lambda^2 z d_0} \bullet$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{d_0}(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} \left[ \mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2}(x^2 + y^2) \left( \frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f_{LD}} \right)} \right\}_{u_2, v_2} \right] dx_0 dy_0 \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) indica que el espectro de difracción  $E_z(x_z, y_z)$  distribuido en el plano  $X_z Y_z$  es una modulación producida por el primer factor integral, sobre la transformada de

Fourier de la función exponencial  $e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)}$  del segundo factor. Pero a falta de un criterio matemático al respecto, también puede ser interpretada como la modulación del factor transformada de Fourier sobre el primer factor Integral en la ecuación referida. De

acuerdo a los parámetros que intervienen en el factor de la exponencial  $e^{\frac{ik}{2}(x^2 + y^2) \left( \frac{1}{d_0} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f_{LD}} \right)}$  de la ecuación arriba referida, existen diferentes condiciones que se les pueden asociar a dichos parámetros, lo que permite clarificar la interpretación de la forma funcional de la ecuación (3.15); por lo que, en este capítulo y en el desarrollo siguiente solo se presenta la deducción de los modelos matemáticos de difracción bajo condición inicial de que  $d_0 = f_{LD}$ , así como sus consecuencias. Existen otras condiciones iniciales que se pueden imponer al parámetro referido, así como al parámetro  $z$  de la exponencial en la ecuación (3.15) y generar otros modelos matemáticos de difracción; pero el análisis respecto a esas otras posibilidades, no se presenta ya que sale de las expectativas de este trabajo de Tesis.

### III.2 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Para este caso, se propone la condición inicial de que, la distancia  $d_0$  del objeto difractor a la lente doblete acromática cementada o transformadora, sea igual a su distancia focal frontal o anterior  $f_{LD}$  (ver ecuación (B-10), es decir  $d_0 = f_{LD}$ . Esta condición implica que el factor transformada de Fourier de la ecuación (3.15), además de usar la definición de separación de variables (D-4) sea escrita como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z}\right)} e^{-i2\pi[u_2x+v_2y]} dx dy &= \mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z}\right)} \right\}_{u_2, v_2} \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}x^2 - i2\pi u_2 x} dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}y^2 - i2\pi v_2 y} dy \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Haciendo uso del resultado integral propuesto por Spiegel, (1980),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4a}}; \quad (3.17)$$

definiendo  $\alpha = \frac{-ik}{2z}$ ,  $\beta = i2\pi u_2$ , el primer factor integral de la ecuación (3.16) se reduce a la siguiente expresión,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}x^2 - i2\pi u_2 x} dx = \sqrt{\frac{2\pi z}{-ik}} e^{-\frac{(i2\pi u_2)^2(2z)}{4ik}} = \sqrt{\frac{\lambda z}{-i}} e^{-i\lambda z \pi u_2^2}. \quad (3.18)$$

Ahora, en el caso en que  $\alpha = \frac{-ik}{2z}$  y  $\beta = i2\pi v_2$ , el segundo factor integral de (3.16) es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2z}y^2 - i2\pi v_2 y} dy = \sqrt{\frac{2\pi z}{-ik}} e^{-\frac{(i2\pi v_2)^2(2z)}{4ik}} = \sqrt{\frac{\lambda z}{-i}} e^{-i\lambda z \pi v_2^2} \quad (3.19)$$

Relacionando las ecuaciones (3.18) y (3.19) con las ecuaciones (3.12) y (3.13), y el resultado que se obtiene se sustituye en la ecuación (3.16) se determina

$$\mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{z}\right)} \right\}_{u_2, v_2} = \left[ \sqrt{-\lambda z} \sqrt{\frac{1}{i}} e^{-i\lambda z \pi \left(\frac{x_0}{\lambda d_0} + \frac{x_z}{\lambda z}\right)^2} \right] \left[ \sqrt{-\lambda z} \sqrt{\frac{1}{i}} e^{-i\lambda z \pi \left(\frac{y_0}{\lambda d_0} + \frac{y_z}{\lambda z}\right)^2} \right]. \quad (3.20)$$

Sustituyendo la ecuación (3.20) en la ecuación (3.15), considerando que  $d_0=f_{LD}$ , después de breves operaciones, se determina que la amplitud compleja del campo difractado distribuido en el plano  $X_z Y_z$  es:

$$E_z(x_z, y_z) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]}}{\lambda f_{LD}} \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} t_{0x}(x_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} e^{-i2\pi\left[\frac{x_z}{\lambda f_{LD}}x_0\right]} dx_0 \right] \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} t_{0y}(y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(y_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} e^{-i2\pi\left[\frac{y_z}{\lambda f_{LD}}y_0\right]} dy_0 \right]. \quad (3.21)$$

De la ecuación (3.21) se establece que: el campo eléctrico  $E_z(x_z, y_z)$  asociado a las ondas difractadas, se ha propagado una distancia  $\{d_0 + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}\}$  desde el plano objeto  $X_0 Y_0$  hasta el plano  $X_z Y_z$ , en el que se distribuye. Se observa que la definición explícita de la función  $E_z(x_z, y_z)$  depende de los factores integrales, la cual no es tan sencilla de realizar en el espacio de coordenadas  $x_0, y_0$ ; además en tales factores se aporta el desfase de  $\frac{\pi}{4}$  radianes que aporta el campo de difracción distribuido hacia cada uno de los ejes coordenados antes referidos, pero no es definitiva. Aunque de manera general, el campo eléctrico difractado se distribuye en el plano  $X_z Y_z$ , desfasado en  $\frac{\pi}{2}$  radianes, información que se obtienen del factor  $\frac{1}{\sqrt{i}}$ , pero tampoco es definitiva. Por lo que respecta a la fase total del campo difractado, está distribuida en el plano  $X_z Y_z$ , más no en una esfera como se ve en la ecuación referida. Para la definición explícita de la función  $E_z(x_z, y_z)$ , se recurre a interpretar los factores integrales en término de las frecuencias espaciales paraxiales  $u$  y  $v$  definidas en la forma siguiente:

$$u = \frac{x_z}{\lambda f_{LD}} \quad \text{y} \quad v = \frac{y_z}{\lambda f_{LD}} \quad (3.22)$$

Entonces, sustituyendo las ecuaciones (3.22) en la ecuación (3.21), se obtiene que la nueva expresión matemática, ahora es interpretada como el espectro de difracción bidimensional de transformada de Fourier del producto de dos funciones, esto es,

$$G_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]}}{\lambda f_{LD}} \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{F} \left\{ t_{0x}(x_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\} \right]_{u=\frac{x_z}{\lambda f_{LD}}} \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{F} \left\{ t_{0y}(y_0) e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(y_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\} \right]_{v=\frac{y_z}{\lambda f_{LD}}}. \quad (3.23)$$



Pero la transformada de Fourier de un producto de dos funciones, de acuerdo al teorema A-16, es igual a la convolución de transformadas de Fourier; dicho teorema permite escribir a la ecuación (3.23) como

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{\lambda f_{LD}} \bullet \\
 & \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{F}\{t_{0x}(x_0)\} \otimes \mathfrak{F}\left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\} \right]_{u=\frac{x_z}{\lambda f_{LD}}} \bullet \\
 & \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{F}\{t_{0y}(y_0)\} \otimes \mathfrak{F}\left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(y_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\} \right]_{v=\frac{y_z}{\lambda f_{LD}}} .
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ahora, de la ecuación (3.24) se establece que: el espectro de difracción  $G_z(u, v)$  como el producto de las convoluciones de las transformadas de Fourier distribuidas hacia cada uno de los ejes de frecuencias espaciales  $u$  y  $v$ , de la función transmitancia  $t_{0x}(x_0)$  y  $t_{0y}(y_0)$  asociada al objeto difractor, con la transformada de Fourier de cada exponencial  $e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)}$  y  $e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(y_0^2)\left(1-\frac{z}{f_{LD}}\right)}$ ; se ha propagado una distancia  $d_0 + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye. Donde cada espectro de difracción aporta un desfase de está desfasado en  $\frac{\pi}{4}$  radianes hacia cada eje de distribución, información que se obtienen del factor  $\frac{1}{\sqrt{i}}$ , pero aún no es definitiva. Además, la fase total del campo referido, está distribuida en el plano  $uv$ , más no en una esfera. Entre otros aspectos, la ecuación (3.24) propicia el poder discernir respecto a las posibles regiones o zonas de distribución del espectro de difracción que ella representa; por ejemplo, la zona convergente y divergente de la lente transformadora, mismas que serán tratadas con mayor detalle en el capítulo IV. Existe una zona de gran interés, de distribución del espectro de difracción, misma que se trata a continuación.

### III.3 ESPECTRO DE TRANSFORMADA EXACTA DE FOURIER

Un caso muy especial de convolución de transformadas de Fourier, se obtiene considerando nuevamente que el objeto continúa situado a la distancia focal frontal  $f_{LD}$  de la lente doblete cementada acromática convergente o transformadora (ver ecuación B-10), es decir, se cumple la condición de que  $d_0 = f_{LD}$ . Además, si se considera que la distancia  $z$  de la lente doblete cementada al plano  $uv$  donde se distribuye el espectro, es igual a la distancia focal posterior  $f_{LD}$  de la lente doblete antes referida (ver ecuación B-10), esto es  $z = f_{LD}$ . Bajo estas circunstancias la ecuación (3.24) se reduce a la siguiente expresión,

$$E_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}{\lambda f_{LD}} \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{T}\{t_{0x}(x_0)\} \otimes \mathfrak{T}\{1\} \right]_{u=\frac{x_z}{\lambda f_{LD}}} \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{T}\{t_{0y}(y_0)\} \otimes \mathfrak{T}\{1\} \right]_{v=\frac{y_z}{\lambda f_{LD}}}. \quad (3.25)$$

(Gaskill, 1978) estableció que la transformada de Fourier unidimensional de la función igual a uno, es la función delta de Dirac, esto es,

$$\mathfrak{T}\{1\}_{u=\frac{x_z}{\lambda d_0}} = \delta(u) \quad \text{y} \quad \mathfrak{T}\{1\}_{v=\frac{y_z}{\lambda d_0}} = \delta(v). \quad (3.26)$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.26), la ecuación (3.25) puede ser escrita como:

$$E_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}{\lambda f_{LD}} \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{T}\{t_{0x}(x_0)\} \otimes \delta(u) \right]_{u=\frac{x_z}{\lambda f_{LD}}} \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \mathfrak{T}\{t_{0y}(y_0)\} \otimes \delta(v) \right]_{v=\frac{y_z}{\lambda f_{LD}}}. \quad (3.27)$$

El teorema A-8 respecto a la convolución de una función con una delta de Dirac, genera la misma función (Gaskill, 1978), es decir,

$$F(u) = F(u) \otimes \delta(u); \quad (3.28)$$

entonces, en base a la ecuación (3.28), la ecuación (3.27) se reduce a la forma:

$$E_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda f_{LD}}} \right] \mathfrak{F}\{t_{0x}(x_0)\} \right]_{u=\frac{x_z}{\lambda f_{LD}}} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda f_{LD}}} \right] \mathfrak{F}\{t_{0y}(y_0)\} \right]_{v=\frac{y_z}{\lambda f_{LD}}} \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) es conocida como el espectro de difracción de transformada de exacta de Fourier, de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada al objeto difractor, que en el espacio de Fourier o de frecuencias  $u, v$ , continúa siendo un campo eléctrico, información que se obtiene del factor  $E_0$ ; está distribuido en el plano de frecuencias espaciales  $uv$  o de Fraunhofer, y se ha propagado desde el plano objeto hasta el plano de distribución, una distancia  $2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$ . De la ecuación referida, se observa que, si la forma funcional de la función de transmitancia, es una función real, hacia cada uno de los ejes coordenados  $x_0, y_0$ , el espectro de frecuencias espaciales paraxiales  $u, v$  aporta un desfaseamiento de  $\frac{\pi}{4}$  radianes.

### III.4 CONCLUSIÓN

En conclusión: se han deducido los modelos matemáticos de difracción de convolución de transformadas ecuación (3.24), así como el de transformada exacta de Fourier ecuación (3.29), que permiten realizar un tratamiento general del fenómeno de difracción y su propagación paraxial en términos de frecuencias espaciales  $u, v$ ; haciendo énfasis en el uso de una lente doblete cementada acromática como lente transformadora. Uno de los aspectos a resaltar de cada modelo de difracción referido, es la forma en que el espectro distribuido hacia cada eje de frecuencias  $u$  y  $v$ , aporta al espectro de difracción total su propio desfaseamiento de  $\frac{\pi}{4}$  radianes. Tal desfaseamiento no es definitivo para el espectro de convolución; mientras que para el espectro de transformada exacta de Fourier, es definitivo si la función es real. Otro aspecto a resaltar es que: de acuerdo con el modelo matemático de la ecuación (3.11) y las ecuaciones (3.12), (3.13) existen otras posibilidades de asignar condiciones iniciales a los parámetros de distancia  $d_0$  y  $z$  a la lente transformadora, bajo las cuales se generan otros modelos de difracción.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS TEÓRICOS GENERADOS CON DOS FUNCIONES DE TRANSMITANCIAS ESPECÍFICAS

#### INTRODUCCIÓN

EL siguiente desarrollo se centra en determinar la forma funcional definida para los diferentes modelos matemáticos de difracción generados en el capítulo III representados por las ecuaciones (3.24) y (3.29), para lo cual se hace uso entre otras opciones, de manera específica de la función cilindro y rectángulo, asociada a la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  que posee la abertura como objeto difractor, contenida en una lámina o pantalla delgada de aluminio, acero o baquelita, entre otro tipo de materiales, es decir, su espesor puede tener los valores de  $l_z=0.5mm, 1.0mm$  y  $2.0mm$ , y no ser casi cero, es decir no es muy delgada, lo que permite tomar en cuenta el espesor  $l_z$ . Así, con el fin de propiciar una mejor comprensión de lo realizado, este capítulo se ha dividido en 15 secciones en las que se tocan los temas siguientes. En la sección IV.1 se determina el modelo matemático de difracción de transformada exacta de Fourier; mientras que el modelo de difracción de convolución de transformadas de Fourier, en zona convergente de la lente transformadora, se obtiene en la sección IV.2. Un análisis del espectro de difracción propagado hasta la zona divergente de la lente transformadora, es el tema de la sección IV.3. El análisis del espectro de difracción por dos aberturas con geometría cilíndrica, de diámetros iguales, cuando ellas están fuera del origen en el plano objeto  $X_0Y_0$ , se da referencia en la sección IV.4. La sección IV.5 trata sobre el espectro de difracción producido por una abertura cilíndrica desplazada del origen de coordenadas; en tanto que en la sección IV.6 el análisis se realiza para una abertura cilíndrica colocada en el origen de coordenadas. En la sección IV.7 se proporciona aspectos importantes del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier en la zona convergente de la lente transformadora. Por lo que se refiere a la sección IV.8, aquí se realiza el análisis del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, de una sola abertura cilíndrica desplazada del origen. Mientras que en la sección IV.9 el análisis de convolución de transformadas de Fourier, se produce para una sola abertura situada en el origen de coordenadas. Respecto al espectro de convolución de de dos aberturas cilíndricas con diámetros iguales, en la zona divergente de la lente transformadora, se da referencia en la sección IV.10. Por lo que respecta a la sección IV.11, se dedica a analizar el espectro de convolución de una fractura cilíndrica desplazada del origen de coordenadas y en la sección IV.12, se determina el espectro de convolución de una abertura cilíndrica situada en el origen del sistema de coordenadas. Por lo que respecta a la sección IV.13, en ella se da referencia del espectro de transformada exacta de Fourier de dos fracturas cilíndricas desplazadas fuera del origen con diámetros desiguales; también se analiza el caso en que los diámetros sean iguales, y es el tema de la sección IV.14. Mientras que la sección IV.15, es análisis es dedicado al espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, en la región convergente de la lente transformadora, producido por las aberturas cilíndricas de diámetros desiguales.

#### IV.1 ESPECTRO DE DIFRACCIÓN DE TRANSFORMADA EXACTA DE FOURIER, PRODUCIDO POR UNA ABERTURA RECTANGULAR

Para obtener la forma funcional definida de los diferentes modelos de difracción; entre otras opciones, se considera como objeto difractor una abertura delgada de geometría rectangular, que se denominará también como rendija, misma que se muestra en la figura 4.1a de base  $l_x$ , altura  $l_y$ , de pequeño espesor  $l_z$ , de tal manera que sea tomado en cuenta. La abertura referida puede ser producida en lámina por ejemplo de aluminio, del grupo 1100, pudiendo ser otro tipo de material, que es implementada en plano objeto  $X_0Y_0$  (4) del arreglo óptico bosquejado en la figura 3.1. Una función rectángulo representada por la función  $rect\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right)$  de espesor  $l_z$  como las representadas por las figuras 4.b y c (Goodman, 2005; Bracewel, 2002; Yu, 1983; Gaskill, 1978), la definieron en la forma siguiente,

$$rect\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } -a/2 \leq x_0 \leq a/2, -b/2 \leq y_0 \leq b/2 \\ 1/2, & \text{si } |x_0| = a/2, \dots, |y_0| = b/2 \\ 0, & \text{en otro lado.} \end{cases} \quad (4.1)$$

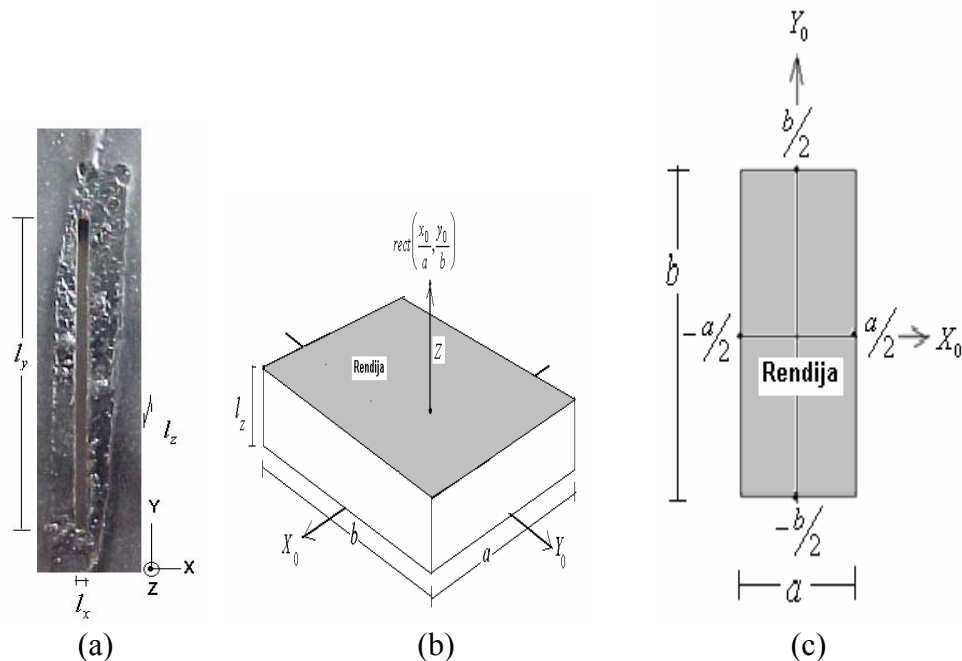


Figura 4.1. (a) Abertura rectangular en lámina de aluminio; (b) esquematizada en forma tridimensional y (c) en forma frontal

En base a lo antes documentado y para los fines de este trabajo de Tesis, recordando que espesor puede ser considerado, ya que la abertura es delgada; entonces, la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada a abertura rectangular de la figura 4.1a, es escrita en la forma.

$$t_0(x_0, y_0) = l_z \left[ (l_y) \text{rect} \left( \frac{x_0}{l_x} \right) \right] \left[ (l_x) \text{rect} \left( \frac{y_0}{l_y} \right) \right]. \quad (4.2)$$

En la ecuación (4.2),  $l_x$  es el ancho de la función rectángulo  $\text{rect}(x_0/l_x)$  definida en el eje  $X_0$ ; cuya altura es  $l_y$ . En tanto que, en el segundo factor  $l_x$  es la altura de la función rectángulo  $\text{rect}(y_0/l_y)$  de ancho  $l_y$  definida en el eje  $Y_0$ . Por lo tanto, la transformada de Fourier de la ecuación (4.2), y de acuerdo al teorema de escalamiento (A-8) es.

$$\mathfrak{F} \{ t_0(x_0, y_0) \} = l_z [l_y l_x \text{sinc}(l_x u)] [l_x l_y \text{sinc}(l_y v)]. \quad (4.3)$$

Las expresiones  $\text{sinc}(l_x u)$  y  $\text{sinc}(l_y v)$  en la ecuación (4.3) son conocidas como la funciones sinc o seno cociente (Goodman, 2005; Gaskill, 1978). Esta misma ecuación conjuntamente con la ecuación (3.29) permiten escribir el espectro de transformada exacta de Fourier, en la forma siguiente,

$$E_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} l_z}{\lambda f_{LD}} \bullet \left[ l_y l_x \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \text{sinc}(l_x u) \right] \left[ l_x l_y \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \text{sinc}(l_y v) \right]. \quad (4.4)$$

Luego, de acuerdo a la ecuación (4.4) el espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, producido por una abertura rectangular no desplazada del origen de coordenadas del plano objeto  $X_0 Y_0$ , se ha propagado una distancia  $2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano referido, hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, situado a la distancia  $z$  que es igual a la distancia focal posterior de la lente doblete cementada o transformadora, es decir  $z=f_{LD}$ ; también conocido como plano de la transformada de Fourier o de Frunhofer; además continúa siendo un campo eléctrico en el espacio de Fourier. De forma particular, el espectro de difracción de frecuencias espaciales o patrón de difracción de Fraunhofer, que se distribuye hacia cada eje coordenado de frecuencias espaciales  $u$  y  $v$ , está desfasado en  $\pi/4$  radianes; y como un todo el espectro se desfasa en  $\pi/2$  radianes. Por lo tanto, la distribución de intensidad es

$$E_z(u, v) = \left( \frac{E_0 l_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \left[ (l_y l_x)^2 \text{sinc}^2(l_x u) \right] \left[ (l_x l_y)^2 \text{sinc}^2(l_y v) \right] \quad (4.5)$$

## IV.2 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN DE UNA ABERTURA RECTANGULAR, EN ZONA CONVERGENTE DE LA LENTE TRANSFORMADORA

Para determinar el modelo matemático del espectro de difracción de transformadas de Fourier producido por la abertura rectangular antes definida, en la zona convergente de la lente transformadora, también conocida como región de Fresnel, situada a la distancia  $z$  de la lente referida definida dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ , ver el arreglo óptico de la figura 3.1. Para esto, se hace uso de la ecuación (3.24) determinada en el capítulo anterior; obteniendo primero la transformada de Fourier de la exponencial en la ecuación referida, recurriendo al siguiente resultado integral (Spiegel, 1980),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - \gamma x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\gamma^2}{4a}} \quad (4.6)$$

Haciendo que  $\alpha = -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{f_{LD} - z}{f_{LD}^2} \right)$  y  $\gamma = i2\pi u x_0$ , en base a la ecuación (4.6) se obtiene

$$\mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}} (x_0^2) \left( 1 - \frac{z}{f_{LD}} \right)} \right\} = \left( \sqrt{\frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD} - z)}} \right) e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)} (u^2)} \quad (4.7)$$

Ahora, en el caso de que  $\alpha = -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{f_{LD} - z}{f_{LD}^2} \right)$  y  $\gamma = i2\pi v y_0$ , nuevamente de la ecuación (4.6) se determina

$$\mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}} (y_0^2) \left( 1 - \frac{z}{f_{LD}} \right)} \right\} = \left( \sqrt{\frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD} - z)}} \right) e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)} (v^2)} \quad (4.8)$$

Relacionando las ecuaciones (4.7) y (4.8) con la ecuación (3.24), se obtiene

$$G_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt{\frac{f_{LD}}{(f_{LD} - z)}} [l_y l_x \sin c(l_x u)] \otimes \sqrt{i} e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)} (u^2)} \right] \bullet \left[ \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt{\frac{f_{LD}}{(f_{LD} - z)}} [l_x l_y \sin c(l_y v)] \otimes \sqrt{i} e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)} (v^2)} \right] \quad (4.9)$$

De la ecuación (4.9) el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier  $G_z(u, v)$  de acuerdo al cociente, se ha propagado una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$ , hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, situado en la zona convergente o de Fresnel de la lente doblete acromática cementada o transformadora, dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ ; de forma aún no definitiva, se establece que no está desfasado y continúa siendo un campo eléctrico. Además, queda definido en términos de cada espectro de convolución de transformadas de Fourier, que a su vez se distribuyen hacia cada eje coordenado  $u$  y  $v$ , en el plano de frecuencias referido; cada uno de ellos está escalado por el factor  $\sqrt{\frac{f_{LD}}{f_{LD} - z}}$ . Como se ve nuevamente en la ecuación (4.9), cada termino de Fourier de la función de transmitancia, aporta un desfasamiento en forma de retraso de  $-\frac{\pi}{4}$  radianes definidos por el factor  $\frac{1}{\sqrt{i}}$ ; mientras que la transformada de Fourier de cada término exponencial aporta un desfasamiento equivalente a un adelanto en las ondas propagadas desde el objeto difractor, en la cantidad de  $\frac{\pi}{4}$  radianes definida a través del término  $\sqrt{i}$ ; de manera que no hay desfasamiento total en cada espectro de convolución de la ecuación (4.9), es decir, las ondas difractadas por el objeto y propagadas hasta la zona convergente de la lente transformadora están en fase. Esta condición permite establecer que: el espectro de difracción de convolución  $G_z(u, v)$  definido por la ecuación (4.9), permanece con orientación derecha o hacia el eje  $+u$  y  $+v$  de frecuencias espaciales paraxiales, durante su distribución en el plano  $uv$  antes referido.

A continuación, se determina la convolución del primer factor de la ecuación (4.9), para esto, se hace uso del teorema de convolución (A-10) y de la propiedad conmutativa de la convolución (A-11) (Gaskill, 1978), pudiendo escribir

$$e^{\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u^2)} \otimes \sin c(l_x u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)} \sin c(l_x(u - \beta)) d\beta . \quad (4.10)$$

La integración por partes establece que

$$\int g dh = gh - \int h dg . \quad (4.11)$$

Haciendo que

$$g = \sin c(l_x(u - \beta)) = \frac{\text{senc}(\pi l_x(u - \beta))}{\pi l_x(u - \beta)} , \quad (4.12)$$

entonces,

$$dg = d[\sin c(l_x(u - \beta))] = d\left(\frac{\text{senc}(\pi l_x(u - \beta))}{\pi l_x(u - \beta)}\right) . \quad (4.13)$$



Mientras que

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)} d\beta = 2 \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)\right) d\beta - 2i \int_0^{\infty} \text{sen}\left(\frac{\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)\right) d\beta. \quad (4.14)$$

Spiegel, (1980) propuso los siguientes resultados integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \text{ para } 0 \leq p < 1, \quad (4.15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\text{sen}\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \text{ para } 0 \leq p < 1. \quad (4.16)$$

En las ecuaciones (4.15) y (4.16) la expresión  $\Gamma(p)$  es la función Gamma de  $p$ . Ahora, haciendo en la integral de la ecuación (4.15) que  $t = \frac{\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)$ , esto implica que

$$d\beta = \sqrt{\frac{(f_{LD}-z)}{\pi\lambda f_{LD}^2}} \left( \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}} \right); \text{ además, en el caso en que } \beta \rightarrow \infty, \text{ implica que } t \rightarrow \infty, \text{ de}$$

manera similar  $\beta \rightarrow 0, \text{ implica que } t \rightarrow 0$ . Por lo tanto la ecuación referida es escrita como:

$$\left( \sqrt{\frac{(f_{LD}-z)}{\pi\lambda f_{LD}^2}} \right) \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \left( \sqrt{\frac{(f_{LD}-z)}{\pi\lambda f_{LD}^2}} \right) \left[ \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right], \quad 0 \leq \frac{1}{2} < 1. \quad (4.17)$$

Mientras que, la integral de la ecuación (4.16), puede ser escrita bajo las condiciones anteriores en la forma siguiente

$$\left( \sqrt{\frac{(f_{LD}-z)}{\pi\lambda f_{LD}^2}} \right) \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \left[ \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right] \left( \sqrt{\frac{(f_{LD}-z)}{\pi\lambda f_{LD}^2}} \right), \quad 0 \leq \frac{1}{2} < 1. \quad (4.18)$$

Como  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , además de que  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (Spiegel, 1980), las ecuaciones (4.17) y (4.18), se reducen a las siguientes expresiones

$$\left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\pi\lambda f_{LD}^2}}\right) \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}}\right), \quad (4.19)$$

$$\left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\pi\lambda f_{LD}^2}}\right) \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}}\right). \quad (4.20)$$

En base a las ecuaciones (4.19) y (4.20) la ecuación (4.14) se escribe en la forma

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)} d\beta = 2 \left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}}\right) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (4.21)$$

Basta recordar que,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = (i)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{i}}. \quad (4.22)$$

Con el resultado de la ecuación (4.22), la ecuación (4.21) queda reducida a la expresión

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)} d\beta = \frac{2}{\sqrt{i}} \left(\sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}}\right). \quad (4.23)$$

Luego, la integral (4.11) puede ser escrita de acuerdo con las ecuaciones (4.10), (4.13) y (4.23) como

$$\begin{aligned}
\int gdh &= \frac{2}{\sqrt{i}} \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \left[ \frac{\text{senc}(\pi l_x (u - \beta))}{\pi l_x (u - \beta)} \right]_{-\infty}^{\infty} - \\
&- \frac{2}{\sqrt{i}} \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi l_x} \left( \frac{(u - \beta) \cos(\pi l_x (u - \beta)) (-\pi l_x d\beta)}{(u - \beta)^2} \right) \\
&+ \frac{2}{\sqrt{i}} \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi l_x} \left( \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta)) (-\pi l_x d\beta)}{(u - \beta)^2} \right). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

El primer término del miembro derecho de la ecuación (4.24) es cero, ya que  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta))}{\pi l_x (u - \beta)} = 0$  (Spiegel, 1980), quedando solo

$$\begin{aligned}
\int gdh &= - \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \bullet \\
&\bullet \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi l_x} \left( \frac{\cos(\pi l_x (u - \beta)) (-\pi l_x d\beta)}{(u - \beta)} \right) + \\
&+ \frac{2}{\sqrt{i}} \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi l_x} \left( \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta)) (-d\beta)}{(u - \beta)^2} \right). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Realizando la primera integral de la ecuación (4.25) por partes usando la representación,

$$\int kdn = nk - \int ndk \tag{4.26}$$

Haciendo que

$$k = \frac{1}{(u - \beta)}, \text{ entonces } dk = \left[ \frac{1}{(u - \beta)^2} \right] d\beta \tag{4.27}$$

En tanto que

$$n = \int dn = \int \cos(\pi l_x (u - \beta)) (-\pi l_x d\beta) = \text{sen}(\pi l_x (u - \beta)) \tag{4.28}$$

Luego, la integral (4.26), de acuerdo a las ecuaciones (4.27) y (4.28) es

$$\begin{aligned} \int kdn &= \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta))}{(u - \beta)} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta))}{(u - \beta)^2} d\beta = \\ &= -\frac{\text{sen}(\pi l_x u)}{(u)} - \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta))}{(u - \beta)^2} d\beta. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sustituyendo la ecuación (4.29) en la ecuación (4.24) se obtiene

$$\begin{aligned} \int gdh &= \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \frac{\text{sen}(\pi l_x u)}{\pi l_x (u)} \\ &+ \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta))}{\pi l_x (u - \beta)^2} d\beta \\ &- \frac{2}{\sqrt{i}} \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi l_x} \left( \frac{\text{sen}(\pi l_x (u - \beta)) (d\beta)}{(u - \beta)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

La ecuación (4.30) se reduce a la expresión

$$\int gdh = \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \frac{\text{sen}(\pi l_x u)}{\pi l_x (u)}. \quad (4.31)$$

Finalmente, la ecuación de convolución (4.10) puede ser escrita de acuerdo a la ecuación (4.30) en la forma

$$e^{\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u^2)} \otimes \text{sen } c(l_x u) = \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \text{sen } c(l_x u). \quad (4.32)$$

A través de un análisis similar al anterior, se determina la convolución del segundo factor de la ecuación (4.10), resultando,

$$e^{\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(v^2)} \otimes \text{sen } c(l_x v) = \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \text{sen } c(l_x v). \quad (4.33)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.32) y (4.33) en la ecuación (4.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \frac{[E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}] f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \bullet \\
 & \bullet \left[ \frac{2l_y l_x}{\sqrt{i}} \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{l_z f_{LD}^2}} [\sin c(l_x u)] \right] \bullet \\
 & \bullet \left[ \frac{2l_y l_x}{\sqrt{i}} \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{l_z f_{LD}^2}} [\sin c(l_y v)] \right].
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

La ecuación (4.34) establece que, el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier  $G_z(u, v)$  se ha propagado la distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  situado en el intervalo  $0 < z < f_{LD}$  de la zona convergente de la lente doblete acromática cementada o transformadora, también conocida como región de Fresnel. En la ecuación referida se observa que, el espectro que se distribuye hacia cada uno de los ejes de frecuencia espacial  $u$  y  $v$  posee su propio desfaseamiento en  $\pi/4$  radianes información que se obtiene del factor  $1/\sqrt{i}$ . Por lo tanto, la ecuación (4.34) queda reducida a la expresión

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & [E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]}] \bullet \\
 & \bullet \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \left[ 2l_y l_x \sqrt{\frac{l_z}{\lambda f_{LD}}} \right] \sin c(l_x u) \right] \\
 & \bullet \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \left[ 2l_x l_y \sqrt{\frac{l_z}{\lambda f_{LD}}} \right] \sin c(l_y v) \right].
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Como se documentó en el párrafo anterior, el espectro de difracción  $G_z(u, v)$  propagado la distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  situado en el intervalo  $0 < z < f_{LD}$  de la zona convergente de la lente transformadora, también conocida como región de Fresnel. Recibe un desfaseamiento de  $\pi/4$  por cada espectro de convolución que se distribuye hacia cada eje frecuencias espaciales  $u$  y  $v$  de acuerdo a la ecuación (4.35). Además, cada factor como  $2l_y l_x \sqrt{\frac{l_z}{\lambda f_{LD}}}$  y

$2l_x l_y \sqrt{\frac{l_z}{\lambda f_{LD}}}$  escalan a la función sinc que preceden. Visto como un todo, el espectro de difracción  $G_z(u, v)$  está desfasado en  $\pi/2$  radianes y su fase total está distribuida en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ .

### IV.3 ESPECTRO DE DIFRACCIÓN EN ZONA DIVERGENTE DE LALENTE TRANSFORMADORA, DE UNA ABERTURA RECTANGULAR

Puesto que la zona divergente de la lente doblete acromática cementada o transformadora, conocida también como región de Fresnel, existe para la distancia  $z$  definida dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ , medida desde la lente referida al plano de frecuencias  $uv$ , en el que se distribuye el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier. Entonces, el modelo matemático que define el espectro de difracción, producido por la abertura rectangular con las características ya establecidas en la sección IV.1; se realiza el análisis siguiente:

Tomando en cuenta que la distancia  $z$  de la lente transformadora al plano  $uv$ , en el que se distribuye el espectro de convolución, cumple la condición de estar definida en el intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ ; así como la propiedad conmutativa de la convolución (A-11), la ecuación (4.9) puede ser escrita en la forma

$$Q_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \bullet \left[ l_y l_x \sqrt{\frac{f_{LD}}{z - f_{LD}}} \frac{1}{\sqrt{i}} e^{\frac{i\pi f_{LD}^2}{(z - f_{LD})} (u^2)} \otimes \frac{1}{\sqrt{i}} [\sin c(l_x u)] \right] \bullet \left[ l_x l_y \sqrt{\frac{f_{LD}}{z - f_{LD}}} \frac{1}{\sqrt{i}} e^{\frac{i\pi f_{LD}^2}{(z - f_{LD})} (v^2)} \otimes \frac{1}{\sqrt{i}} [\sin c(l_y v)] \right]. \quad (4.36)$$

La ecuación (4.36) establece que, en la zona divergente de la lente doblete acromática cementada o transformadora, también conocida como región de Fresnel, situada a la distancia  $z$  de la lente referida al plano de frecuencias  $uv$ , dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ . El espectro de difracción  $Q_z(u, v)$  se ha propagado la distancia  $[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]$ , está formado por cada uno de los espectros de convolución de transformadas de Fourier, que se distribuyen hacia cada eje de frecuencias espaciales  $u$  y  $v$ ; en este caso se observa que cada espectro de convolución están escalados por los factores  $l_y l_x \sqrt{\frac{l_z f_{LD}}{z - f_{LD}}}$  y  $l_x l_y \sqrt{\frac{l_z f_{LD}}{z - f_{LD}}}$

respectivamente; puesto transformada de Fourier que interviene en cada factor de convolución, aporta el mismo desfaseamiento de  $\pi/4$  radianes, esto implica que el desfaseamiento total de cada espectro de convolución en la zona divergente de la lente transformadora de acuerdo con la ecuación (4.36), será de  $\pi/2$  radianes. De manera que el desfaseamiento total del espectro de difracción  $Q_z(u, v)$  definido por la ecuación referida, posee un desfaseamiento no definitivo de  $\pi$  radianes. Esto permite asegurar que la orientación del espectro de difracción, es izquierda o invertida, es decir el espectro ahora

está orientado hacia el eje de frecuencias  $-u$  y  $-v$ ; información que se obtiene del factor  $e^\pi$  como se establece simplificando la ecuación (4.36) obteniendo la siguiente expresión

$$Q_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] e^{i\pi} \bullet$$

$$\bullet \left[ l_y l_x \sqrt{\frac{l_z f_{LD}}{(z - f_{LD})}} e^{\frac{i\pi \lambda_{LD}^2}{(z - f_{LD})}(u^2)} \otimes [\sin c(l_x u)] \right] \bullet$$

$$\bullet \left[ l_x l_y \sqrt{\frac{l_z f_{LD}}{(z - f_{LD})}} e^{\frac{i\pi \lambda_{LD}^2}{(z - f_{LD})}(v^2)} \otimes [\sin c(l_y v)] \right].$$
(4.37)

La condición impuesta para  $z$  definida en el intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ ; implica que ahora se pueden determinar las operaciones de convolución en la ecuación (4.37), para esto, basta con simplificar las ecuaciones (4.32) y (4.33), obteniéndose las expresiones siguientes,

$$e^{\frac{i\pi \lambda_{LD}^2}{(z - f_{LD})}(u^2)} \otimes \sin c(l_x u) = \left( 2\sqrt{i} \right) \left( \sqrt{\frac{(z - f_{LD})}{\lambda_{LD}^2}} \right) \sin c(l_x u),$$
(4.38)

$$e^{\frac{i\pi \lambda_{LD}^2}{(z - f_{LD})}(v^2)} \otimes \sin c(l_y v) = \left( 2\sqrt{i} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda_{LD}^2}} \right) \sin c(l_y v).$$
(4.39)

Sustituyendo ahora, las ecuaciones (4.38) y (4.39) en la ecuación (4.36) el espectro de difracción de convolución de transformadas en el intervalo  $f_{LD} < z < \infty$  o en la zona divergente de la lente transformadora es,

$$Q_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \bullet$$

$$\bullet \left[ 2l_y l_x \sqrt{\frac{l_z}{\lambda_{LD}}} (\sqrt{i}) \sin c(l_x u) \right] \bullet$$

$$\bullet \left[ 2l_x l_y \sqrt{\frac{l_z}{\lambda_{LD}}} (\sqrt{i}) \sin c(l_y v) \right].$$
(4.40)

La forma funcional de la ecuación (4.40) contiene información del espectro de difracción en general y particular. De forma general, es un campo eléctrico en el espacio de Fourier, se ha propagado desde el plano objeto  $X_0 Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$ ; su extensión hacia cada eje de

frecuencias espaciales depende de los factores  $2l_y l_x \sqrt{\frac{1}{\lambda f_{LD}}}$  y  $2l_x l_y \sqrt{\frac{1}{\lambda f_{LD}}}$  respectivamente.

De manera particular, cada espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, aporta de manera definitiva un desfaseamiento en  $\pi/4$  radianes, cuando se distribuyen hacia cada uno de los ejes de frecuencias espaciales  $u$  y  $v$ ; mientras en forma total el espectro de difracción  $Q_z(u, v)$  está desfasado en  $\pi/2$  radianes:

### IV.3.1 CONCLUSIONES A LAS SECCIONES IV.1, 2 Y 3

Como conclusión a esta sección se puede establecer lo siguiente: se realizó lo más rigurosamente posible, el tratamiento matemático para establecer de manera definida la convolución de la transformada de Fourier de la función rectángulo con la transformada de Fourier de la función exponencial, lo que da la pauta para el caso de otro tipo de funciones involucradas. Un aspecto importante que resulta del tratamiento hasta aquí realizado, es la forma de apreciar el desfaseamiento del espectro de difracción como un todo. Como se puede apreciar en las ecuaciones (4.4), (4.9) y (4.37) que dan referencia del espectro de transformada exacta, y de convolución de transformadas de Fourier, en la zona convergente y divergente de la lente transformadora.



#### IV.4 ESPECTRO DE DIFRACCIÓN DE TRANSFORMADA EXACTA, CON ABERTURAS CILÍNDRICAS DEL MISMO DIÁMETRO

Ahora, como segundo problema de funciones específicas, se tratará el caso de usar como objetos difractores, dos aberturas circulares poseen el mismo diámetro en magnitud, cuyo valor es  $d_1=d_2= 0.25mm$  como las mostradas en la figura 4.2a. En este caso, las aberturas están fabricadas en lámina de baquelita delgada, es decir de espesor  $l_z=2.0mm$ , pero pueden ser producidas en láminas de otro tipo de material. Las aberturas circulares son implementadas en el arreglo óptico coherente ilustrado en la figura 3.1 del capítulo anterior. Gaskill, (1978) propuso que para cada abertura de la geometría referida, se les puede asociar a su transmitancia  $t_0(x_0,y_0)$  la función cilindro definida como  $t_0(x_0,y_0) = cyl\left(\frac{r_0}{d}\right)$

cuya gráfica se ilustra en la figura 4.2b, donde  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  en coordenadas polares,  $d$  es el diámetro de la abertura referida; la transmitancia es definida en la forma siguiente,

$$t(x_0,y_0) = circ\left(\frac{r_0}{c}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq r_0 \leq c \\ 1/2, & \text{si } r_0 = \frac{c}{2} \\ 0, & \text{si } r_0 > c \end{cases} . \quad (4.41)$$

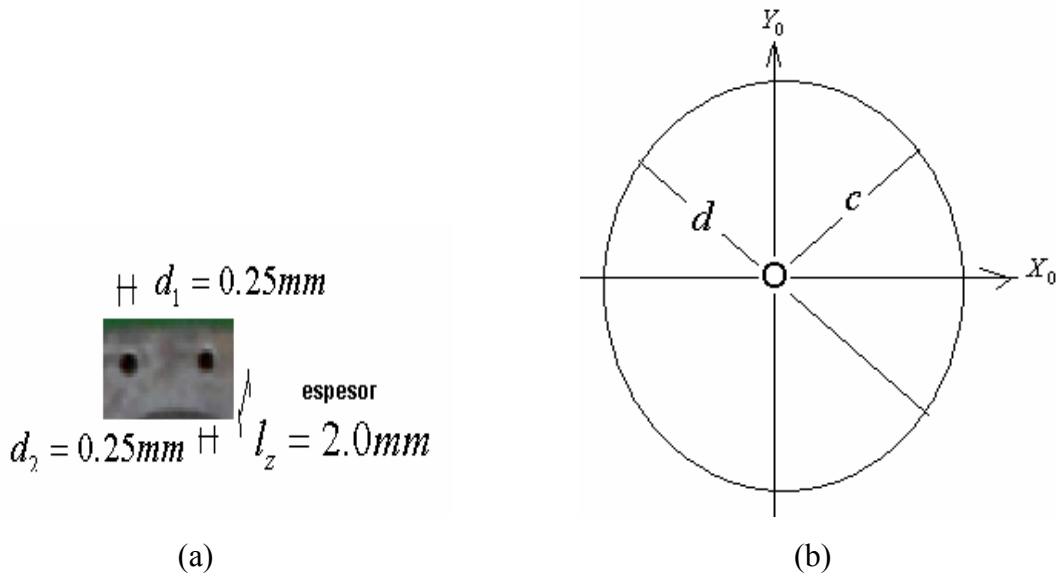


Figura 4.2. a) Aberturas circulares en lámina de baquelita y b) representación gráfica

Tomando en cuenta lo estipulado en el párrafo anterior, el siguiente desarrollo se realizará considerando que la circunferencia de cada abertura circular de la figura 4.2a, como se estableció antes, poseen radios iguales, implica que sus diámetros  $d_1$  y  $d_2$  sean de igual magnitud; es decir  $d_1=d_2$ , además están desplazadas del origen del sistema de coordenadas en el plano objeto  $X_0Y_0$  como se ilustra en la figura 4.3, recordando que están construidas en lámina de baquelita de espesor casi cero, es decir  $l_z \approx 0$ . Nuevamente, para este trabajo de Tesis, y en base a la ecuación (4.41) la función de transmitancia de ambas aberturas, queda definida como

$$t_0(x_0, y_0) = \text{circ}\left(\frac{r_0 - l_1}{c}\right) + \text{circ}\left(\frac{r_0 + l_1}{c_1}\right). \quad (4.42)$$

Haciendo uso del teorema de linealidad (A-5), el de escalamiento y desplazamiento (A-8), se tiene que la transformada de Fourier de la ecuación (4.42) es

$$\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} = \left[ \left( e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{cJ_1(2\pi c \omega)}{\omega} \right) \right) + e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{cJ_1(2\pi c \omega)}{\omega} \right) \right]. \quad (4.43)$$

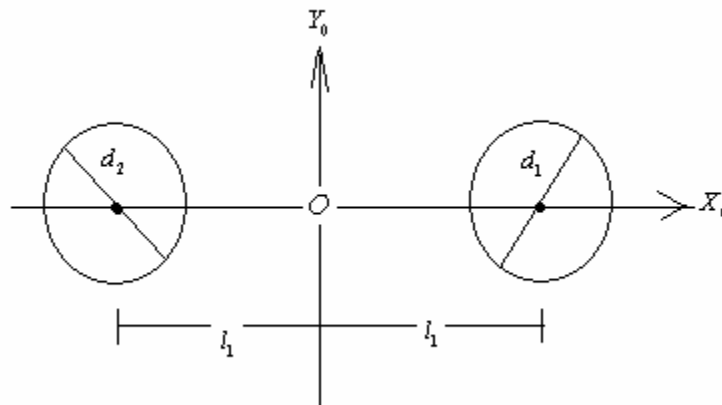


Figura 4.3. Aberturas cilíndricas desplazadas del origen

De acuerdo a la ecuación (3.30) el espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, de dos fracturas cilíndricas, se determina sustituyendo en ésta la ecuación (4.43) y tomando en cuenta la condición de igualdad de diámetros, se obtiene

$$E_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \bullet}{i\lambda f_{LD}} \bullet$$

$$\bullet l_z d_1^2 \left( \left[ e^{-i2\pi l_1 u} + e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right] \right) \bullet \quad (4.44)$$

La identidad trigonométrica establece que  $2\cos(2\pi l_1 u) = e^{i2\pi l_1 u} + e^{-i2\pi l_1 u}$ , entonces la ecuación (4.44) queda reducida a la expresión

$$E_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \bullet}{i\lambda f_{LD}} \bullet$$

$$\bullet l_z d_1^2 \left( 2\cos(2\pi l_1 u) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right) \bullet \quad (4.45)$$

En tanto que la intensidad es,

$$I_z(u, v) = \left( \frac{E_0 l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 [4\cos^2(2\pi l_1 u)] \bullet \quad (4.46)$$

De la ecuación (4.46) se establece que, en el plano de Fraunhofer o de la transformada exacta, el espectro de difracción debido al par de aberturas cilíndricas, es un conjunto de anillos concéntricos de máxima y mínima intensidad producidos por la función Bessinc cuadrada, modulando a un patrón de franjas de interferencia de Young, también de máxima y mínima intensidad, definidas por la función del tercer factor de la ecuación referida. Pero a falta de un criterio matemático, también se puede establecer que la función Bessinc cuadrada es modulada por las franjas de Young definidas por el coseno cuadrado.

#### IV.5 ESPECTRO DE DIFRACCIÓN DE TRANSFORMADA EXACTA, DE UNA ABERTURA CILÍNDRICA DESPLAZADA DEL ORIGEN DE COORDENADAS

Para el caso de que solo se tenga una fractura cilíndrica de altura o espesor  $l_z$  con aberturas circulares en los extremos de diámetros  $d_1$ , y desplazada fuera del origen de coordenadas en el plano  $X_0Y_0$ , en el arreglo óptico de la figura 3.1; digamos hacia la derecha como se ilustra en la figura 4.4. Al aplicar esta condición a la ecuación (4.44) el espectro de transformada exacta queda definido de acuerdo a la siguiente ecuación,

$$E_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{i} \right] \left( e^{-i2\pi u} \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right) \quad (4.47)$$

De la ecuación (4.47) se establece que el espectro de difracción de transformada exacta, producido por una abertura cilíndrica, se ha propagado la distancia  $2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$ , hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, situado a la distancia  $z=f_{LD}$  de la lente transformadora, está escalado por el factor  $\left[ \frac{l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right]$ ; además está desfasado en  $\pi/2$  radianes y su fase está distribuida en el plano de frecuencias referido. La característica importante es que el espectro de difracción de transformada exacta  $E_z(u, v)$  definida por la ecuación (4.47), es una función compleja.

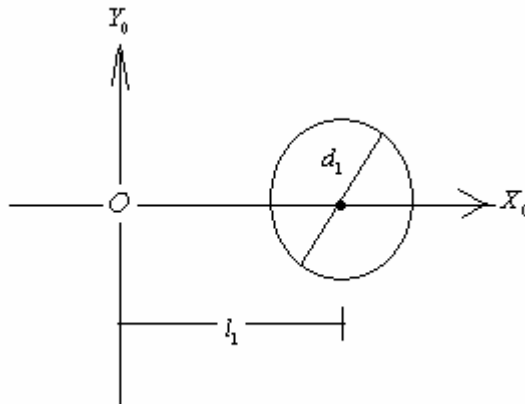


Figura 4.4. Abertura cilíndrica fuera del origen

En este caso, la amplitud del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, definida por la ecuación (4.47) también puede ser escrita como una función compleja, en la forma siguiente

$$E_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] e^{-i\frac{\pi}{2} \left[ \frac{l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right]} \bullet \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) [\cos(2\pi l_1 u) - i \text{sen}(2\pi l_1 u)] \quad (4.48)$$

Para obtener información física real, se toma la parte imaginaria de la ecuación (4.48), ya que la parte real de la misma es cero (Hecht y Zajac, 1998), obteniéndose

$$\text{Im}(E_z(u, v)) = E_0 \text{sen} \left[ k(2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}) \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right] \bullet \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) [\text{sen}(2\pi l_1 u)]. \quad (4.49)$$

La intensidad del espectro de difracción, se obtiene involucrando la ecuación (4.49), esto es

$$I_z(u, v) = \left( \frac{E_0 l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \text{sen}^2 \left[ k(2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}) \right] \bullet \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 [\text{sen}^2(2\pi l_1 u)]. \quad (4.50)$$

Es decir, el espectro de difracción en el plano de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier, para una abertura cilíndrica desplazada del origen, está compuesto por anillos concéntricos de máxima y mínima intensidad definidos por la función Bessinc cuadrada, tal función modula a una función seno cuadrado. Nuevamente a falta de un criterio matemático, también se puede establecer que la función seno cuadrada, modula a la función Bessinc cuadrada; para tener mejor certeza de cuál criterio usar, se debe hacer una verificación de tipo experimental o de simulación en computadora.

#### IV.6 ESPECTRO DE DIFRACCIÓN DE TRANSFORMADA EXACTA, DE UNA ABERTURA CILÍNDRICA SITUADA EN EL ORIGEN DE COORDENADAS

En el caso en que la abertura cilíndrica se implementa en el origen de coordenadas del plano objeto  $X_0Y_0$ , del arreglo óptico bosquejado en la figura 3.1, esto implica que el desplazamiento es  $l_1=0$ , como se ilustra la figura 4.5; además de que posee un o espesor  $l_z$  y un diámetro  $d_1$  en las circunferencias de sus aberturas circulares de sus extremos;

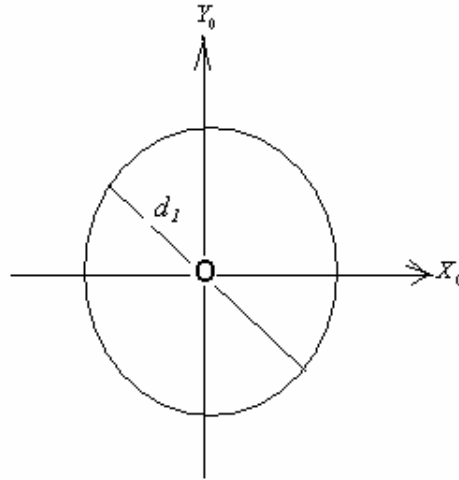


Figura 4.5. Abertura cilíndrica en el origen O

Bajo las condiciones establecidas en el párrafo anterior, se tiene que la ecuación (4.46) queda reducida a la expresión,

$$E_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right] \bullet \left[ \frac{1}{i} \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right). \quad (4.51)$$

Se observa que el espectro de difracción  $E_z(u, v)$  de transformada exacta de Fourier definido por la ecuación (4.51) y producido por una sola abertura cilíndrica, se ha propagado la distancia  $2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$ , hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, está desfasado en  $\pi/2$  radianes, además de que el factor  $\left[ \frac{l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right]$  escala a la función Bessinc. Así, la intensidad del espectro referido es,

$$I_z(u, v) = \left( \frac{E_0 l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2. \quad (4.52)$$

De acuerdo a la ecuación (4.52), bajo la condición de que la abertura cilíndrica está situada en el origen del plano  $X_0Y_0$ , la intensidad del espectro de difracción de transformada exacta, queda definida por anillos concéntricos de máxima y mínima intensidad, descritos por la función Bessinc cuadrada. La extensión del espectro de difracción, es directamente proporcional al factor  $(E_0 I_z d_1^2)^2$  en el que interviene el espesor de la abertura cilíndrica estudiada, así como el diámetro de sus partes circulares: a la vez, es inversamente proporcional de acuerdo al factor  $(\lambda f_{LD})^2$  del denominador en la ecuación referida.

#### IV.6.1 CONCLUSIONES A LAS SECCIONES IV.4, 5 y 6

El análisis documentado a través de estas secciones, ha permitido obtener información sobre el problema de modulación de funciones, ya que por no existir un criterio matemático, a priori no se puede establecer qué función modula a qué función, como ejemplo se tiene la ecuación (4.50). Se recuerda que este problema de modulación de funciones afecta la geometría de las franjas de interferencia que definen el espectro de difracción, de aquí su importancia para definirla pronto. Se observa que este problema de modulación, desaparece si se trata con una sola abertura cilíndrica pero no desplazada del origen.

#### IV.7 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN EN ZONA CONVERGENTE DE LA LENTE TRANSFORMADORA, DE DOS ABERTURAS CILÍNDRICAS DESPLAZADAS DEL ORIGEN DE COORDENADAS

Ahora, se determinará el modelo matemático de difracción de convolución de transformadas de Fourier, producido por dos aberturas cilíndricas que poseen las propiedades descritas en la sección IV.4 y que se bosquejan en la figura 4.3. se debe recordar que el par de aberturas cilíndricas están implementadas en el arreglo óptico coherente bosquejado en la figura 3.1. Para esto, se hará uso de ecuación (4.9) en la que se sustituye la ecuación (3.44); además de considerar el caso en que la distancia  $z$  de la lente doblete acromática cementada o transformadora, está definida en el intervalo  $0 < z < f_{LD}$ ; es decir en la zona convergente de la lente referida, también conocida como región de Fresnel. Aplicando nuevamente la propiedad conmutativa de la convolución A-10 (Gaskil, 1978); se obtiene,

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2 f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \right] \bullet \\
 & \bullet e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \otimes \left( e^{-i2\pi_1 u \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)} \right) + \\
 & + e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \otimes \left( e^{i2\pi_1 u \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)} \right).
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Considerando las definiciones siguientes:  $(\omega = \sqrt{u^2 + v^2})$ , además de que  $(\omega^2 = u^2 + v^2)$  y  $u = \omega \cos \varphi$  (Bracewel, 2002; Gaskil, 1978; Papoulis, 1968) se escribe la ecuación (4.53) como

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2 f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \right] \bullet \\
 & \bullet e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}\omega^2} \otimes \left( e^{-i2\pi_1 \omega \cos \varphi \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)} \right) + \\
 & + e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}\omega^2} \otimes \left( e^{i2\pi_1 \omega \cos \varphi \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)} \right).
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Del teorema de convolución (A-6), (Gaskil, 1978) se tiene

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \bullet \\
 & l_z d_1^2 e^{-i2\pi_1 u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}\beta^2} e^{i2\pi_1 \beta \cos \varphi} \frac{J_1(2\pi d_1 [\omega - \beta])}{\omega - \beta} d\beta + \cdot \\
 & + l_z d_2^2 e^{i2\pi_1 u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}\beta^2} e^{-i2\pi_1 \beta \cos \varphi} \frac{J_1(2\pi d_1 [\omega - \beta])}{\omega - \beta} d\beta
 \end{aligned} \tag{4.55}$$



Realizando la primera integral por partes, haciendo uso de la ecuación (4.11) y considerando que,

$$g = \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}, \quad \text{en tanto que} \quad dg = d\left[\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right]; \quad (4.56)$$

mientras que, si se usa resultado integral de la ecuación (4.6) (Spiegel, 1980), es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - \gamma x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\gamma^2}{4\alpha}}, \quad (4.6)$$

y haciendo que  $\alpha = \frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}$ ,  $\gamma = i2\pi d_1 \cos \phi$ , de acuerdo a las exponenciales de la ecuación (4.55) se obtiene

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}\beta^2 + i2\pi d_1 \beta \cos \phi} d\beta = \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \phi}{\lambda f_{LD}^2}}. \quad (4.57)$$

Luego, la primera integral de la ecuación (4.55) es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}\beta^2} e^{i2\pi d_1 \beta \cos \phi} \frac{J_1(2\pi d_1 [\omega - \beta])}{\omega - \beta} d\beta = \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} e^{\frac{i\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \cos^2 \phi}{\lambda f_{LD}^2}} \cdot \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 [\omega - \beta])}{\omega - \beta} \right]_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} d\left[ \frac{J_1(2\pi d_1 [\omega - \beta])}{\omega - \beta} \right]. \quad (4.58)$$

Papoulis, (1968) estableció que la función real de Bessel de  $n$ -ésimo orden, se puede determinar a través de la ecuación siguiente:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (4.59)$$

Considerando que  $\beta = x$ ,  $n=1$  en la ecuación (4.59), y si además se divide entre  $\beta$  ambos miembro de ella, se obtiene,

$$\frac{J_1(\beta)}{\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta - \beta \operatorname{sen} \theta)}{\beta} d\theta. \quad (4.60)$$

Tomando el límite de la ecuación (4.60) cuando  $\beta \rightarrow \infty$ , es decir,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{J_1(\beta)}{\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\cos(\theta - \beta \text{sen} \theta)}{\beta} \right] d\theta . \quad (4.61)$$

Por su parte, Spigel, (1980) documentó que  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\cos(\beta)}{\beta} = 0$ : luego entonces, se obtiene de la ecuación (4.61) que,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{J_1(\beta)}{\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\cos(\beta)}{\beta} \right] d\theta = 0 . \quad (4.62)$$

Aplicando el resultado de la ecuación (4.62) a la ecuación (4.58), además de usar la ecuación de recurrencia  $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$  (Papoulis, 1968), e integrar, se determina que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}\beta^2} e^{i2\pi\lambda_1\beta \cos\phi} \frac{J_1(2\pi d_1[\omega - \beta])}{\omega - \beta} d\beta = \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}}} e^{\frac{i\pi_1^2 (f_{LD}-z)\cos^2\phi}{\lambda f_{LD}^2}} \bullet \quad (4.63)$$

$$\left[ -2 \frac{J_1(2\pi d_1[\omega - \beta])}{\omega - \beta} \right]_0^{\infty}$$

Al aplicar nuevamente el resultado de la ecuación (4.62) y la ecuación de recurrencia  $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$  a la ecuación (4.63), ésta se reduce a la expresión siguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}\beta^2} e^{i2\pi\lambda_1\beta \cos\phi} \frac{J_1(2\pi d_1[\omega - \beta])}{\omega - \beta} d\beta = 2 \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} \bullet \quad (4.64)$$

$$\bullet e^{\frac{i\pi_1^2 (f_{LD}-z)\cos^2\phi}{\lambda f_{LD}^2}} \frac{J_1(2\pi d_1\omega)}{\omega}$$

Mediante un proceso similar al antes desarrollado, se obtiene la segunda integral de la ecuación (4.55), resultando,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}\beta^2} e^{-i2\pi\lambda_{LD}\beta\cos\phi} \frac{J_1(2\pi d_1[\omega-\beta])}{\omega-\beta} d\beta = 2\sqrt{\frac{f_{LD}-z}{i\lambda_{LD}^2}} \cdot e^{\frac{i\pi\lambda_{LD}^2(f_{LD}-z)\cos^2\phi}{\lambda_{LD}^2}} \frac{J_1(2\pi d_1\omega)}{\omega}. \quad (4.65)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.64) y (4.65) en la ecuación (4.55) el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier para un par de aberturas cilíndricas con diámetros de igual magnitud en las circunferencias de sus partes extremas, además de considerar que  $(u/\omega)^2 = \cos^2\phi$ , se obtiene

$$G_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(f_{LD}-z)}} \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) e^{\frac{i\pi\lambda_{LD}^2(f_{LD}-z)\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda_{LD}^2}} \left[ e^{-i2\pi\lambda_1 u} + e^{i2\pi\lambda_1 u} \right] \frac{J_1(2\pi d_1\omega)}{\omega} \right]. \quad (4.66)$$

Como se ve en la ecuación (4.66) el espectro de difracción está desfasado en  $\pi/4$  radianes; pero de acuerdo a la identidad trigonométrica ya especificada en la sección IV.4, tal ecuación puede ser escrita en la forma

$$G_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(f_{LD}-z)}} \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) e^{\frac{i\pi\lambda_{LD}^2(f_{LD}-z)\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda_{LD}^2}} \left[ \cos(2\pi\lambda_1 u) \right] \frac{J_1(2\pi d_1\omega)}{\omega} \right]. \quad (4.67)$$

La función definida por la ecuación (4.67) es compleja y puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] e^{-i\frac{\pi}{4}} \bullet \\
 & \bullet \left[ \cos(2\pi l_1 u) \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \bullet \\
 & \bullet \left( \cos \left[ \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right] + i \operatorname{sen} \left[ \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right] \right). \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

Tomando la parte real de la ecuación (4.68) para obtener información física palpable, se tiene

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}[G_z(u, v)] = & \cos(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \\
 & \frac{l_z d_1^2 E_0}{\sqrt{\lambda f_{LD} - z}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \bullet \\
 & \bullet \left[ \cos(2\pi l_1 u) \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \bullet \\
 & \bullet \cos \left[ \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right]. \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

En tanto que la intensidad de acuerdo a la ecuación (4.69), es

$$\begin{aligned}
 I_z(u, v) = & \cos^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \\
 & \left( \frac{l_z d_1^2 E_0}{\sqrt{\lambda f_{LD} - z}} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos^2(2\pi d_1 u) \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2 \bullet \\
 & \bullet \cos^2 \left[ \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right].
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Así, la intensidad del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier definida por la ecuación (4.70), se ha propagado la distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, mismo que se encuentra situado a la distancia  $z$  de la lente transformadora definida dentro del intervalo de convergencia  $0 < z < f_{LD}$ , que a su vez, define la zona de convergencia de la lente referida, también conocida como región de Fresnel. El espectro en intensidad, está desfasado en  $\pi/4$  radianes; es un conjunto de anillos concéntricos de máxima y mínima intensidad, definidos por la función Bessinc cuadrada, que modula franjas de interferencia de Young definidas por la función  $\cos^2(2\pi d_1 u)$ . Más existe la posibilidad de que la función Bessinc cuadrada, module también a la función

$$\cos^2 \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right), \text{ que en base a su argumento representa franjas curvas de}$$

interferencia de máxima y mínima intensidad. Pero a falta de un criterio matemático se visualiza otras posibles formas de modulación, por ejemplo que, esta última función module tanto a la función Bessinc cuadrada como a las franjas de Young. Este problema de modulación tal vez se puede resolver a través de una etapa experimental, o mediante un proceso de simulación con computadora, y establecer qué aseveración es correcta.

También se puede trabajar con la parte imaginaria de la ecuación (4.68), quedando definida en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 \text{Im}[G_z(u, v)] &= \text{sen}(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \\
 &\frac{l_z d_1^2 E_0}{\sqrt{\lambda f_{LD} - z}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \cos(2\pi l_1 u) \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \bullet \\
 &\bullet (-1) \text{sen} \left[ \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right].
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Mientras que la distribución de intensidad de acuerdo a la ecuación (4.71) se determina a través de la ecuación siguiente

$$\begin{aligned}
 I_z(u, v) &= \text{sen}^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \\
 &\left( \frac{(l_z d_1^2 E_0)^2}{\lambda f_{LD} - z} \right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \cos^2(2\pi l_1 u) \left(\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right)^2 \right] \bullet \\
 &\bullet \text{sen}^2 \left[ \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right].
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

El comentario respecto a la ecuación (4.72), es que, la distribución de amplitud compleja del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se ha propagado la distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$ , está desfasado en  $\pi/4$  radianes, es un conjunto de anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad, definidos por la función Bessinc cuadrada, que modula a la función  $\cos^2(2\pi l_1 u)$  que representa franjas de interferencia de Young. Como en el caso anterior, a falta de un criterio desde el punto de vista matemático,

existe la posibilidad de que la función Bessinc cuadrada, también module a función a la

función  $\text{sen}^2 \left[ \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right]$ , cuyo argumento representa curvas de interferencia de

máxima y de mínima intensidad. Entre otras posibilidades, también se puede afirmar lo siguiente: que la última función referida, module tanto a la Bessinc cuadrada, así como a las franjas de interferencia de Young. Nuevamente se sugiere hacer una verificación de tipo experimental, o bien por simulación en computadora, para obtener una respuesta apropiada del problema de modulación.

#### IV.8 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN EN ZONA CONVERGENTE DE LA LENTE TRANSFORMADORA, DE UNA ABERTURA CILÍNDRICA DESPLAZADA DEL ORIGEN DE COORDENADAS

Se analiza el caso, en el que objeto difractor implementado el plano objeto  $X_0Y_0$  del arreglo óptico coherente bosquejado en la figura 3.1, es una sola abertura cilíndrica, que en este caso está desplazada del origen en el plano de coordenadas referido, en la cantidad  $l_1$  y hacia la derecha, como se ilustra en la figura 4.4. Bajo esta condición la distribución de amplitud compleja del espectro de difracción, se obtiene haciendo uso de la ecuación (4.66) escrita como

$$G_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] \bullet$$

$$\bullet \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) e^{\frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2}} \left[ e^{-i2\pi l_1 u} \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \quad (4.73)$$

Otra posible representación de la ecuación (4.73) es,

$$G_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] \bullet$$

$$\bullet \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) e^{\frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} - i2\pi l_1 u} \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \quad (4.74)$$

Tanto la ecuación (4.73) como la (4.74) son funciones complejas; y para obtener información física verídica de ellas, se recurre se recurre a describir el espectro de difracción, tomando la parte real o imaginaria de ellas como se documenta a continuación: La parte real de la ecuación (4.73) adquiere la forma matemática siguiente

$$\text{Re}[G_z(u, v)] = \frac{l_z d_1^2 E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \cos(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet$$

$$\bullet \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left[\frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right] (\cos(2\pi l_1 u)) \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \quad (4.75)$$



La distribución de intensidad de acuerdo a la ecuación (4.75) queda definida como

$$I_z(u, v) = \frac{(l_z d_1^2 E_0)^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \cos^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet$$

$$\bullet \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \cos^2\left(\frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \left( \cos^2(2\pi d_1 u) \right) \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2. \quad (4.76)$$

Lo que se puede argumentar de la ecuación (4.76) es que, el espectro de convolución de transformadas de Fourier, producido por una abertura cilíndrica fuera del origen en el plano objeto  $X_0Y_0$ , se ha propagado la distancia  $[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]$  hasta distribuirse en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ , situado en la zona convergente de la lente transformadora o región de Fresnel, a la distancia  $z$  de la lente definida dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ , además de continuar siendo un campo eléctrico, su fase está distribuida en el plano referido; además está desfasado en  $\pi/4$  radianes. Se tiene la posibilidad entre otras aseveraciones, las siguientes: la primera es que, la función Bessinc cuadrada que representa anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad, module a las funciones cuadradas

$$\left[ \cos^2\left(\frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \text{ y } \left( \cos^2(2\pi d_1 u) \right).$$

La segunda posibilidad es que, la función

coseno cuadrado definida entre corchetes, cuyo argumento representa franjas curvas de interferencia de máxima y de mínima intensidad, module tanto a la función  $(\cos^2(2\pi d_1 u))$  como a la función Bessinc cuadrada. La tercera posibilidad, es que la función coseno cuadrada entre paréntesis curvos en la ecuación referida, module tanto a la función coseno cuadrado entre corchetes y a la función Bessinc cuadrada; todo esto sucede por causa de un criterio matemático al respecto.

Nota: no se debe confundir que la función  $(\cos^2(2\pi d_1 u))$  en la ecuación (4.76) representa franjas de interferencia tipo Young, ya que tiene la misma estructura matemática que la función obtenida en la ecuación (4.70). Basta recordar que, la función  $(\cos^2(2\pi d_1 u))$  que se obtiene en la ecuación (4.70) es como consecuencia de una identidad trigonométrica la cual se deriva en base a que se consideró dos aberturas cilíndricas como objetos difractors desplazadas del origen. Mientras que la misma ecuación definida en la ecuación (4.76) se obtiene disociando la función exponencial en su parte real e imaginaria, usando en este caso una abertura cilíndrica como objeto difractor.

Una manera de evitar el problema documentado en el párrafo anterior es mediante el siguiente tratamiento: para esto, se toma la parte real de la ecuación (4.74) es decir,

$$\begin{aligned} \text{Re}[G_z(u, v)] &= \frac{4l_z d_1^2 E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \cos(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet \\ &\bullet \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \cos\left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} - 2\pi l_1 u \right) \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ahora, la distribución de intensidad queda definida en términos de la ecuación (4.77) es,

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{(4l_z d_1^2 E_0)^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \cos^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet \\ &\bullet \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \cos^2\left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} - 2\pi l_1 u \right) \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.78)$$

La ecuación (4.78) se puede interpretar en la forma siguiente: el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se ha propagado una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye situado dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ , está desfasado en  $\pi/4$  radianes, es directamente proporcional al factor  $(4l_z d_1^2 E_0)^2$  en el que interviene el espesor de la abertura y el diámetro de ella, e inversamente proporcional al factor  $\lambda(f_{LD} - z)$  contenido en el denominador de la ecuación referida. Es un conjunto de anillos concéntricos definidos por la función Bessinc cuadrada, modulando a las franjas de

interferencia definidas por la función  $\cos^2\left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} - 2\pi l_1 u \right)$ . Nuevamente por

causa de no existir un criterio matemático, también es válida la siguiente interpretación, las franjas de interferencia definidas por esta última función, module a los anillos concéntricos de máxima y mínima intensidad definidos por la Bessinc cuadrada.

Ahora, obteniendo la parte imaginaria de la ecuación (4.73), se puede obtener información física real o palpable, esto es,

$$\begin{aligned} \text{Im}[G_z(u, v)] &= \frac{l_z d_1^2 E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \text{sen}(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet \\ &\bullet \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] (\text{sen}(2\pi d_1 u)) \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Mientras que la intensidad de acuerdo a la ecuación (4.79) es,

$$\begin{aligned} I_z(u, v) &= \frac{(l_z d_1^2 E_0)^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \text{sen}^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet \\ &\bullet \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \text{sen}^2\left(\frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] (\text{sen}^2(2\pi d_1 u)) \left[\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right]^2. \end{aligned} \quad (4.80)$$

La información que se obtiene de la ecuación (4.80) es que, el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se ha propagado una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye situado dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ , está desfasado en  $\pi/4$  radianes, es directamente proporcional al factor  $(l_z d_1^2 E_0)^2$  en el que interviene el espesor de la abertura y el diámetro de ella, e inversamente proporcional al factor  $\lambda(f_{LD} - z)$  contenido en el denominador de la ecuación referida. Es un conjunto de anillos concéntricos definidos por la función Bessinc cuadrada, modulando a la función  $(\text{sen}^2(2\pi d_1 u))$  y a las franjas de interferencia curvas, definidas por la función

$\cos^2\left(\frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right)$ . Nuevamente a falta de un criterio matemático, implica también la

siguiente interpretación, las franjas de interferencia definidas por esta última función, module a los anillos concéntricos de máxima y mínima intensidad definidos por la Bessinc cuadrada y a la función  $(\text{sen}^2(2\pi d_1 u))$ . Entre otras posibilidades, se puede interpretar en la forma siguiente, esto es, que esta última función module tanto a la función Bessinc cuadrada y coseno cuadrado.

Tal parece que la función  $(\text{sen}^2(2\pi l_1 u))$  representa franjas de interferencia de Young; pero es importante recordar que en este caso se ha hecho el desarrollo considerando como objeto difractor una abertura cilíndrica desplazada del origen de coordenadas en el plano objeto  $X_0 Y_0$ ; pero hasta el momento se ha observado que el fenómeno de interferencia de Young, se produce a partir de dos aberturas, sin importar su forma geométrica. Por lo tanto, la función referida en este párrafo sólo debe de interpretarse como el seno cuadrado. Esta problemática se puede evitar a través del desarrollo siguiente:

Obteniendo ahora, la parte imaginaria de la ecuación (4.74), esto es

$$\begin{aligned} \text{Im}[G_z(u, v)] &= \frac{l_z d_1^2 E_0}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \text{sen}(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet \\ &\bullet \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \text{sen}\left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} - 2\pi l_1 u \right) \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

En tanto que, la intensidad de acuerdo a la ecuación (4.81) es,

$$\begin{aligned} I_z(u, v) &= \frac{(l_z d_1^2 E_0)^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \text{sen}^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \bullet \\ &\bullet \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \text{sen}^2\left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} - 2\pi l_1 u \right) \right] \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.82)$$

La ecuación (4.82) se puede interpretar en la forma siguiente: el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se ha propagado una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0 Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, situado dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ , está desfasado en  $\pi/4$  radianes, es directamente proporcional al factor  $(4l_z d_1^2 E_0)^2$  en el que interviene el espesor de la abertura y el diámetro de ella, e inversamente proporcional al factor  $\lambda(f_{LD} - z)$  contenido en el denominador de la ecuación referida. Se puede interpretar como un conjunto de anillos concéntricos definidos por la función Bessinc cuadrada, modulados

por franjas de interferencia definidas por la función  $\cos^2\left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} - 2\pi l_1 u \right)$ .

Nuevamente, a falta de un criterio matemático, también se puede realizar la interpretación siguiente: las franjas de interferencia definidas por la función antes definida, son moduladas por anillos concéntricos de máxima y mínima intensidad definidos por la función Bessinc cuadrada

## IV.9 ESPECTRO DE DIFRACCIÓN EN ZONA CONVERGENTE DE LALENTE TRANSFORMADORA, USANDO UNA ABERTURA CILÍNDRICA EN EL ORIGEN DE COORDENADAS

Para este caso, la abertura cilíndrica como objeto difractor, se encuentra situada en el plano  $X_0Y_0$ , del arreglo óptico coherente de la figura 3.1; mientras que en la figura 4.5, se ilustra la forma de colocarla en el origen referido. Ahora, como el desplazamiento es  $l_f=0$ , bajo esta condición la ecuación (4.73) queda reducida a la siguiente expresión

$$G_z(u, v) = \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \cdot \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] . \quad (4.83)$$

De acuerdo a la ecuación (4.83), el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier producido por una abertura cilíndrica situada en el origen de coordenadas en el plano objeto  $X_0Y_0$ , al propagarse la distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$ , está desfasado en  $\pi/4$  radianes, además, es proporcional al producto  $E_0 l_z d_1^2$  en el que interviene el espesor y el diámetro de la abertura, e inversamente proporcional de acuerdo a la expresión siguiente  $\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}$ , contenida en el denominador de la ecuación referida. Como se ve, la ecuación (4.83) es una función real, lo que implica que la distribución de intensidad es

$$I_z(u, v) = \frac{(E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 . \quad (4.84)$$

Así, la distribución de intensidad del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, definido por la ecuación (4.84), es un conjunto de anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad, que se distribuyen en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ , que cumplen la condición  $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$ , el cual está definido en la zona convergente de la lente transformadora o región de Fresnel, situada a la distancia  $z$  de lente referida definida, dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ , está escalado por el factor  $\left( \frac{(E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right)$ .

### IV.9.1 CONCLUSIONES A LAS SECCIONES IV.7, 8 y 9

Se ha dado un panorama de cómo visualizar tanto la distribución de amplitud compleja y de intensidad, considerando los casos de dos aberturas cilíndricas, y solo una desplazada del origen de coordenadas, así como el caso en que la abertura cilíndrica está en el origen referido, información que es sustentada por los modelos matemáticos respectivos. En dos de ellos se obtiene un producto de funciones y como consecuencia se presentó el dilema de modulación de funciones, para lo cual no hay un criterio matemático; pero que tal vez pueda ser resuelto a través de un trabajo experimental o de simulación en una PC.

#### IV.10 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN DE DOS ABERTURAS CILÍNDRICAS CON DIÁMETROS IGUALES, EN LA ZONA DIVERGETE DE LALENTE TRANSFORMADORA

Ahora se tratará el caso, en que las aberturas cilíndricas usadas como objetos difractores, continúan situadas en el plano objeto  $X_0Y_0$  del arreglo óptico coherente bosquejado en la figura 3.1. Es importante recordar que las aberturas referidas están a la distancia  $d_0=f_{LD}$  de la lente transformadora, además las circunferencias de sus aberturas extremas poseen el mismo diámetro y permanecen situadas como documentó en la figura 4.3. El análisis del espectro de convolución de transformadas de Fourier, se realiza cuando se ha propagado hasta la zona divergente de la lente doblete acromática cementada o región de Fresnel, situada a la distancia  $z$  de la lente transformadora y cumple la condición de estar definida en el intervalo  $f_{LD}<z<\infty$ . Bajo esta condición la ecuación (4.66) queda se escribe en la forma siguiente

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \bullet \quad (4.85)$$

$$\bullet \left[ (2\sqrt{i}) e^{-\frac{i\pi_1^2(f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}} \left[ e^{-i2\pi_1 u} + e^{i2\pi_1 u} \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]$$

En la ecuación (4.85) el signo menos indica que el espectro de difracción de convolución de transformada de Fourier  $G_z(u, v)$ , se invierte en la zona divergente de la lente transformadora, definida dentro del intervalo  $f_{LD}<z<\infty$ ; mientras que su distribución en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ ; además está desfasado, es decir, está adelantado en  $\pi/4$  radianes definida por el factor  $\sqrt{i}$ . De acuerdo a la identidad trigonométrica en al que se establece que  $2\cos(2\pi_1 u) = (e^{-i2\pi_1 u} + e^{i2\pi_1 u})$ ; la ecuación referida también puede ser escrita en la forma siguiente

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \bullet \quad (4.86)$$

$$\bullet \left[ (4\sqrt{i}) e^{-\frac{i\pi_1^2(f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}} \left[ \cos(2\pi_1 u) \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]$$

La ecuación (4.85), así como por la ecuación (4.86), son funciones complejas y pueden ser escritas en la forma siguiente:

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \left( 4e^{i\frac{\pi}{4}} \right) [\cos(2\pi d_1 u)] \right. \\ \left. \bullet \left[ \cos \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) - \text{sen} \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right] \quad (4.86)$$

Por lo tanto, tomando la parte real por ejemplo de la ecuación (4.86), para obtener información física más palpable, esto es,

$$\text{Re}(G_z(u, v)) = (-1) \left[ E_0 \cos[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \bullet \right. \\ \left. \bullet \left[ \left( 4 \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \cos \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] [\cos(2\pi d_1 u)] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \quad (4.87)$$

En tanto que su intensidad de acuerdo a la ecuación (4.87) es,

$$I_z(u, v) = \left[ \cos^2[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \left[ \frac{(E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \bullet \right. \\ \left. \bullet \left[ \left( 16 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \cos^2 \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \left[ \cos^2(2\pi d_1 u) \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \right] \quad (4.88)$$

La intensidad del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, definido por la ecuación (4.88), se ha propagado la distancia  $[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]$ , está escalado de acuerdo al factor  $\left[ \frac{(E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right]$ ; además, existe la posibilidad que la

función  $\cos^2 \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right)$  que representa franjas curvas de interferencia, module a

las franjas de Young definidas por la función  $[\cos^2(2\pi d_1 u)]$  y también module a los anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad definidos por la función Bessinc cuadrada

$\left(\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right)^2$ . Entre otras posibilidades, existe que, la función que definen franjas de Young, module a las restantes. También puede suceder que la función Bessinc module a las restantes. Estas conjeturas surgen a falta de un criterio matemático; esto, se puede resolver a través de una etapa experimental o tal vez mediante un proceso de simulación, para tener la respuesta más apropiada.

También se puede obtener la parte imaginaria de la ecuación (4.86), lo que da otra posibilidad de obtener información física palpable, esto es:

$$\begin{aligned} \text{Im}(G_z(u, v)) = & \left[ E_0 \text{sen} \left[ f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2} \right] \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \bullet \\ & \bullet \left[ \left( 4 \text{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \text{sen} \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \left[ \cos(2\pi l_1 u) \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \end{aligned} \quad (4.89)$$

La intensidad de acuerdo a la ecuación (4.89) es,

$$\begin{aligned} I_z(u, v) = & \left[ \text{sen}^2 \left[ f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2} \right] \right] \left[ \frac{(E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \bullet \\ & \bullet \left[ \left( 16 \text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \text{sen}^2 \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \left[ \cos^2(2\pi l_1 u) \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.90)$$

Así, intensidad del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, definido por la ecuación (4.90), se ha propagado la distancia  $[f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2}]$ , está escalada por el  $\left[ \frac{(E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right]$ . Como se ha documentado antes, la función

$\text{sen}^2 \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right)$  representa franjas curvas de interferencia de máxima intensidad,

y es posible que module a las franjas de Young definidas por la función  $[\cos^2(2\pi l_1 u)]$  y a su vez también modula a los anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad definidos por la función Bessinc cuadrada  $\left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2$ . La segunda posibilidad, es que la función que definen franjas de Young, module a las restantes. La tercera conjetura es que, la



función Bessine module a las restantes. Estas posibilidades, surgen a falta de un criterio matemático; pero el problema se puede resolver quizás a través de una etapa experimental o tal vez mediante un proceso de simulación, para tener la respuesta más apropiada. Se debe recordar que el análisis se realiza en la zona divergente de la lente transformadora, situada dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ .

#### IV.11 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN EN ZONA DIVERGENTE DE LA LENTE TRANSFORMADORA, PRODUCIDO POR UNA ABERTURA CILÍNDRICA FUERA DEL ORIGEN DE COORDENADAS

Se determina el modelo matemático de difracción de convolución de transformadas en la zona divergente de la lente transformadora. Para esto, es importante recordar que, la abertura cilíndrica permanece en el plano  $X_0Y_0$  situado a la distancia  $d_0=f_{LD}$ , como se ilustra en el arreglo óptico de la figura 3.1; además las circunferencias de sus aberturas extremas tienen el mismo diámetro  $d_l$  y está desplazada del origen en la cantidad  $l_l$ , ver figura 4.5. El espectro de difracción se ha propagado hasta la distancia  $z$  de la lente referida y cumple la condición de estar definida en el intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ . Bajo las condiciones anteriores y haciendo uso de la ecuación (4.85), la cual puede ser escrita en la forma

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ \frac{l_z d_l^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ (2\sqrt{i}) e^{-i \left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi l_1 u \right)} \frac{J_1(2\pi d_l \omega)}{\omega} \right] \right] \quad (4.91)$$

En este caso el espectro de difracción definido por  $G_z(u, v)$  en la ecuación (4.91) continúa siendo una función compleja que puede ser escrita como

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ \frac{l_z d_l^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \left( 2e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi l_1 u \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi l_1 u \right) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{J_1(2\pi d_l \omega)}{\omega} \right] \quad (4.92)$$

La parte real de la ecuación (4.92) es,

$$\begin{aligned} \text{Re}(G_z(u, v)) = & (-1) \left[ \cos[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \right] \left[ \frac{E_0 I_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \\ & \left( 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \cos \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi d_1 u \right) \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.93)$$

De acuerdo con la ecuación (4.93) la distribución de intensidad es

$$\begin{aligned} I_z(u, v) = & \left[ \cos^2[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \right] \left[ \frac{(E_0 I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \\ & \left( 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi d_1 u \right) \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2 \right] \end{aligned} \quad (4.94)$$

El análisis también se puede realizar tomando la parte imaginaria de la ecuación (4.92), esto es,

$$\begin{aligned} \text{Im}(G_z(u, v)) = & \left[ \text{sen}[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \right] \left[ \frac{E_0 I_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \\ & \left( 2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi d_1 u \right) \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

Luego, la distribución de intensidad de en base a la ecuación (4.95) queda definida en la forma siguiente

$$\begin{aligned} I_z(u, v) = & \left[ \text{sen}^2[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \right] \left[ \frac{(E_0 I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \\ & \left( 4 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi d_1 u \right) \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2 \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

De acuerdo a la ecuación (4.96), la distribución de intensidad del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, producido por una sola abertura cilíndrica, desplazada del origen de coordenadas  $X_0Y_0$  que se ha propagado una distancia  $[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]$ , hasta la zona divergente de la lente transformadora, está

escalado de acuerdo al factor  $\left[ \frac{(E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right]$ , además se puede visualizar como la

modulación de anillos concéntricos de interferencia definidos por la función Bessinc cuadrada, sobre las franjas de interferencia de tipo curvo definidas por la función seno cuadrada. Como se ha estipulado en casos anteriores, a falta de un criterio matemático, también se puede interpretar que, la función seno cuadrada modula a la función Bessinc cuadrada.

Otra forma de tratar el fenómeno de difracción de convolución de transformadas de Fourier, cuando la abertura cilíndrica como objeto difractor implementada en el arreglo óptico de la figura 3.1, permanece fuera del origen del plano  $X_0Y_0$  como lo ilustra la figura 4.5, desplazada en la cantidad  $l_l$ . El espectro de difracción se ha propagado hasta la zona divergente de la lente transformadora o región de Fresnel, situada a la distancia  $z$  de la lente referida dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ . Bajo las condiciones anteriores la ecuación (4.85) también puede ser escrita en la forma

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \cdot \quad (4.97)$$

$$\cdot \left[ (2\sqrt{i}) e^{-\frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}} \left[ e^{-i2\pi l_1 u} \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]$$

Se observa que el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier  $G_z(u, v)$  definido por la ecuación (4.97), es una función compleja, que puede ser escrita como

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \right] \left[ \frac{l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \left( 2e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \cdot \quad (4.98)$$

$$\cdot \left[ \cos \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ \cos(2\pi l_1 u) - i \operatorname{sen}(i2\pi l_1 u) \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}$$

La parte real de la ecuación (4.98) queda definida por la ecuación siguiente,

$$\begin{aligned} \text{Re}(G_z(u, v)) = & (-1) \left[ \cos[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \right] \left[ \frac{E_0 I_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \cdot \\ & \cdot \left[ \left( 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \cos\left( \frac{i\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \left[ \cos(2\pi d_1 u) \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

Mientras que la distribución de intensidad de acuerdo a la ecuación (4.99) es,

$$\begin{aligned} I_z(u, v) = & \left[ \cos[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \right] \left[ \frac{(E_0 I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \left( 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ & \cdot \left[ \cos^2\left( \frac{i\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \left[ \cos^2(2\pi d_1 u) \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.99)$$

Los primeros tres factores de la ecuación (4.99) indican la distancia de propagación, el escalamiento y el desfase del espectro de convolución de transformadas de Fourier, propagado hasta la zona divergente de la lente transformadora o región de Fresnel, mismo que se distribuye en el plano de frecuencias espaciales  $uv$  situado dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ . Mientras que los tres factores restantes de la ecuación (4.99) pueden ser interpretados como la modulación de funciones en formas diferentes, en base a no existir un

criterio matemático. Por ejemplo, se establece que, la función  $\cos^2\left(\frac{i\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right)$

module a las funciones  $[\cos^2(2\pi d_1 u)]$  y a la función  $\left(\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right)^2$ . También existe el caso en que la misma función antes referida, module a las funciones moduladas  $[\cos^2(2\pi d_1 u)] \left(\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right)^2$ , en este último caso puede ocurrir que la función  $[\cos^2(2\pi d_1 u)]$

module a la función  $\left(\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right)^2$  o viceversa. Entre otras posibilidades de modulación,

existe la posibilidad de que la función  $\left(\frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}\right)^2$  module a la función modulada

$\cos^2\left(\frac{i\pi d_1^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) [\cos^2(2\pi d_1 u)]$ . Para saber cuál es la modulación de funciones

apropiada en la ecuación (4.99), se debe recurrir a una etapa experimental o a una de simulación por computadora.

Si ahora se toma la parte imaginaria de la ecuación (4.98) se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Im}(G_z(u, v)) = & \left[ \text{sen}(ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \right] \left[ \frac{E_0 I_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \bullet \\ & \bullet \left( 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi d_1^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \left[ \text{sen}(2\pi d_1 u) \right] \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \quad (4.100) \end{aligned}$$

En tanto que la distribución de intensidad de acuerdo con la ecuación (4.100) es,

$$\begin{aligned} I_z(u, v) = & \left[ \text{sen}^2(k[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \right] \left[ \frac{(E_0 I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \bullet \\ & \bullet \left( 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \text{sen}^2\left(\frac{\pi d_1^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] \left[ \text{sen}^2(2\pi d_1 u) \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \quad (4.101) \end{aligned}$$

Se observa que, los primeros tres factores de la ecuación (4.101) indican la distancia de propagación, el escalamiento y el desfase del espectro de convolución de transformadas de Fourier, propagado hasta la zona divergente de la lente transformadora o región de Fresnel, mismo que se distribuye en el plano de frecuencias espaciales  $uv$  situado dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ . Mientras que el producto de las funciones siguientes

$$\text{sen}^2 \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \left[ \text{sen}^2(2\pi d_1 u) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right];$$

propician la interpretación de diferentes casos de modulación de funciones, entre otros ejemplos tenemos el siguiente: sea que la

función  $\text{sen}^2 \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right)$  module al producto de funciones

$$\left[ \text{sen}^2(2\pi d_1 u) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right];$$

que a su vez se puede interpretar como una modulación de funciones, en este caso, se tiene la posibilidad de establecer que la función  $\left[ \text{sen}^2(2\pi d_1 u) \right]$

modula a la función  $\left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)$  o bien que esta última función module a la anterior. Para

establecer cuál es la modulación apropiada, se debe recurrir a una etapa experimental o a una de simulación por computadora, ya que no existe un criterio matemático al respecto.

#### IV.12 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN EN ZONA DIVERGENTE DE LALENTE TRANSFORMADORA, DE UNA ABERTURA CILÍNDRICA EN EL ORIGEN DE COORDENADAS

Para el caso de difracción de convolución de transformadas de Fourier, producido por una abertura cilíndrica, cuyas circunferencias en sus partes extremas, tienen diámetro  $d_1$  y está situada en el origen del sistema de coordenadas o en el plano objeto  $X_0Y_0$  al ser implementada en el arreglo óptico de la figura 3.1, lo que implica que la cantidad  $l_1=0$ . Puesto que, el análisis se centra en la región divergente de la lente doblete acromática o transformadora, también conocida como región de Fresnel, ubicada en el intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ . Bajo las condiciones especificadas, se hace uso de la ecuación (4.97), la que queda reducida a la forma

$$G_z(u, v) = (-1) \left[ e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ \frac{2E_0 l_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right] \cdot \left[ \left( \sqrt{i} \right) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right] \right]. \quad (4.102)$$

De acuerdo a la ecuación (4.102), la distribución de amplitud compleja del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se ha propagado desde el plano

objeto  $X_0Y_0$  una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$ , está desfasado en  $\pi/4$  radianes, además está escalada por el factor  $\left[ \frac{2E_0I_z d_1^2}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right]$ . Mientras que su distribución de intensidad queda definida de acuerdo con la ecuación (4.102) a través de la siguiente expresión,

$$I_z(u, v) = \left[ \frac{(2E_0I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \left[ \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (4.103)$$

Luego, en base a la ecuación (4.103), la distribución de intensidad del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, propagado hasta la zona divergente definida dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ , consiste de una distribución de anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad definidos por la función Bessinc cuadrada, tal distribución, está escalada por el factor  $\left[ \frac{(2E_0I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right]$ , en el cual, solo  $z$  adquiere valores diferente y cuando  $z \rightarrow \infty$ , el cociente en el factor referido tiende a ser cero y la distribución del espectro de convolución o de el conjunto de anillos tienden hacerse pequeños.

#### IV.12.1 CONCLUSIÓN A LAS SECCIONES IV.10, 11 Y 12

La conclusión respecto a estas secciones es que: los modelos de difracción de convolución de transformadas de Fourier, producidos en la zona divergente de la lente transformadora, también conocida como región de Fresnel, aportan gran versatilidad para el análisis del fenómeno de difracción, ya que esta región es más extensa y es más apropiada para el caso de una etapa de análisis teórico, experimental o de simulación en computadora.

#### IV.13 ESPECTRO DE TRANSFORMADA EXACTA DE FORIER DE DOS ABERTURAS CILÍNDRICAS DESPLAZADAS DEL ORIGEN DE COORDENADAS CON DIÁMETROS DIFERENTES

Un caso que resulta muy importante de resolver, consiste en determinar el espectro de difracción de transformada exacta, así como los de convolución de transformadas de Fourier, tanto en la zona convergente como en la divergente de la lente doblete cementada, usada como transformadora. Por lo que, en el desarrollo que se documenta a continuación, se determinará el modelo matemático del espectro de difracción de transformada exacta, para lo cual se hace uso como objeto difractor, dos aberturas cilíndricas de igual altura  $l_z$  o espesor, con diámetros  $d_1$  y  $d_2$  de diferente magnitud en las circunferencias de sus aberturas en los extremos, como se ilustra en la figura 4.6. Se recuerda que tales aberturas pueden ser fabricadas en baquelita o cualquier otro tipo de material; mismas que son implementadas en el plano  $X_0Y_0$  e iluminadas con ondas planas, como se ilustra en el arreglo óptico coherente ilustrado en la figura 3.1.

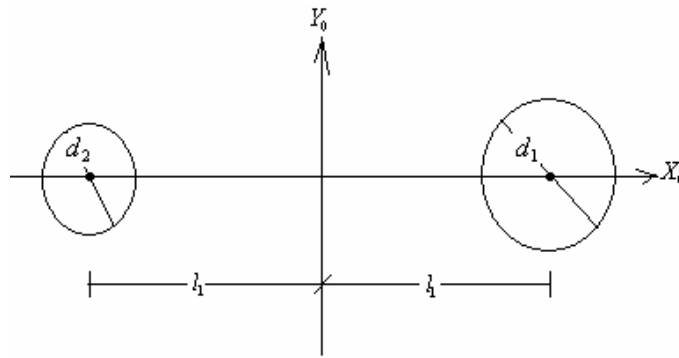


Figura 4.6 Aberturas cilíndricas de diámetros desiguales

Para este caso, la función de transmitancia queda definida de acuerdo a la ecuación (4.41) en la forma

$$t_0(x_0, y_0) = l_z \text{cyl} \left( \frac{r_0 - l_1}{d_1} \right) + l_z \text{cyl} \left( \frac{r_0 + l_1}{d_2} \right). \quad (4.104)$$

La transformada de Fourier de la ecuación (4.104), se obtiene haciendo uso del teorema de linealidad (A-1), el de escalamiento y desplazamiento (A-7), esto es,

$$\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} = l_z \left[ d_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) + d_2^2 e^{+i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right) \right]. \quad (4.105)$$



Haciendo uso de la ecuación (3.29) el espectro de transformada exacta de Fourier, de difracción de dos aberturas cilíndricas de diámetros desiguales, en sus aberturas circulares, se determina relacionando también la ecuación (4.105), quedando,

$$\begin{aligned}
 E_z(u, v) = & \frac{E_0 e^{ik[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{\lambda f_{LD}} \bullet \\
 & \bullet l_z \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \left[ (d_1^2) e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) + \right. \\
 & \left. + d_2^2 e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right) \right]. \tag{4.106}
 \end{aligned}$$

De la ecuación (4.106) se observa que la distribución de amplitud compleja, del espectro de difracción de transformada exacta de Fourier  $E_z(u, v)$ , se ha propagado desde el plano objeto  $X_0 Y_0$  una distancia  $[2f_{LD} + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]$  hasta distribuirse en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ ; de acuerdo al término  $\left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right)$  está desfasado en  $\pi/4$  radianes. Está compuesto por anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad, pero su forma geométrica no se define apropiadamente de acuerdo a la ecuación (4.106), por lo que se recurre a determinar la distribución de intensidad, y ver si se puede definir de forma más apropiada. La distribución de intensidad determinada en base a la ecuación (106) es,

$$\begin{aligned}
 I_z(u, v) = & \left( \frac{E_0 l_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \bullet \left[ (d_1^4) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 + \right. \\
 & + (d_1^2 d_2^2) \left[ e^{i4\pi l_1 u} + e^{-i4\pi l_1 u} \right] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \left( \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right) + \\
 & \left. + d_2^4 \left( \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right)^2 \right]. \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

De acuerdo con la siguiente identidad  $2\cos(4\pi d_1 u) = e^{i4\pi d_1 u} + e^{-i4\pi d_1 u}$ , se puede escribir la distribución de intensidad, en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left( \frac{E_0 I_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \bullet \left[ (d_1^4) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 + \right. \\
& + (d_1^2 d_2^2) [2\cos(i4\pi d_1 u)] \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \left( \frac{J_1^1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right) + \\
& \left. + d_2^4 \left( \frac{J_1^1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right)^2 \right]. \tag{4.108}
\end{aligned}$$

La dificultad que presentan las ecuaciones (107) y (4.108), es que debe conocerse de manera específica el producto de funciones Bessinc  $\left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \left( \frac{J_1^1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right)$ , para obtener una mejor idea de la distribución de intensidad, en el espectro de difracción de transformada exacta.

Lo anterior, se logra determinando primero el siguiente producto de funciones Bessel  $J_1(2\pi d_1 \omega) J_1^1(2\pi d_2 \omega)$ , haciendo uso de la ecuación D.10, la cual puede ser escrita considerando que  $x = 2\pi d_1 \omega$ , mientras que  $y = 2\pi d_2 \omega$ , y además después de despejar el producto de funciones Bessel  $J_1(2\pi d_1 \omega) J_1^1(2\pi d_2 \omega)$ , adquiere la siguiente estructura matemática

$$\begin{aligned}
J_1(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_2 \omega) = & \left[ \frac{(2\pi d_1 \omega)(2\pi d_2 \omega)}{2(2\pi d_1 \omega + 2\pi d_2 \omega)} \right] \bullet \\
& \bullet [2J_0(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_2 \omega) + 2J_1(2\pi d_1 \omega) J_0(2\pi d_2 \omega)] \\
& - \left[ \frac{(2\pi d_1 \omega)(2\pi d_2 \omega)}{2(2\pi d_1 \omega + 2\pi d_2 \omega)} \right] [J_1(2\pi d_1 \omega + 2\pi d_2 \omega)] - \\
& - \left[ \frac{(2\pi d_1 \omega)(2\pi d_2 \omega)}{2(2\pi d_1 \omega + 2\pi d_2 \omega)} \right] \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(2\pi d_1 \omega) J_{1+s}(2\pi d_2 \omega) + \\
& + J_{1+s}(2\pi d_1 \omega) J_s(2\pi d_2 \omega)]. \tag{4.109}
\end{aligned}$$

En la ecuación (D.10) también se tomó en cuenta que las funciones Bessel quedarán definidas en la forma siguiente,  $J_1(x) = J_1(2\pi d_1 \omega)$  y  $J_1(y) = J_1^1(2\pi d_2 \omega)$ ; como se documenta en la ecuación (4.109).

Considerando de manera drástica, que los productos de las funciones Bessel  $2J_0(2\pi d_1\omega)J_1(2\pi d_2\omega)+2J_1(2\pi d_1\omega)J_0(2\pi d_2\omega)$ ; así como la sumatoria de productos  $\sum_{s=2}^{s=\infty}(-1)^s [ J_s(2\pi d_1\omega)J_{1+s}(2\pi d_2\omega)+J_{1+s}(2\pi d_1\omega)J_s(2\pi d_2\omega) ]$  de funciones Bessel, no aportan nada a la distribución de intensidad, estos términos pueden no tomarse en cuenta. Así en base a estas consideraciones, la ecuación (4.109) queda reducida a la expresión siguiente:

$$J_1(2\pi d_1\omega)J_1(2\pi d_2\omega) = - \left[ \frac{(2\pi d_1\omega)(2\pi d_2\omega)}{2(2\pi d_1\omega + 2\pi d_2\omega)} \right] \bullet [J_1(2\pi d_1\omega + 2\pi d_2\omega)]. \quad (4.110)$$

Sustituyendo la ecuación (4.110) en la (4.108) se obtiene que la distribución de intensidad, queda definida de acuerdo a la siguiente ecuación,

$$I_z(u, v) = \left( \frac{E_0 I_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \bullet \left[ (d_1^4) \left( \frac{J_1(2\pi d_1\omega)}{\omega} \right)^2 + \right. \\ \left. - (d_1^2 d_2^2) [2 \cos(i4\pi d_1 u)] \left( \frac{1}{\omega} \right) \left( \frac{1}{\omega} \right) \left[ \frac{(2\pi d_1\omega)(2\pi d_2\omega)}{2(2\pi d_1\omega + 2\pi d_2\omega)} \right] \bullet \right. \\ \left. \bullet [J_1(2\pi d_1\omega + 2\pi d_2\omega)] + d_2^4 \left( \frac{J_1(2\pi d_2\omega)}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (4.111)$$

De acuerdo a la ecuación (4.111) el espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, producido por dos aberturas cilíndricas de circunferencias en sus extremos de diámetros diferentes, ya puede ser interpretado, en base a la suma de argumentos de la función  $[J_1(2\pi d_1\omega + 2\pi d_2\omega)]$ . Para esto, se realiza el siguiente análisis de los argumentos, para esto, basta recordar que la frecuencia espacial está definida como  $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$  esto implica que cada sumando del argumento de la función referida, puede ser definido en la forma siguiente,

$$\rho_1 = 2\pi d_1\omega = \sqrt{(2\pi d_1 u)^2 + (2\pi d_1 v)^2}, \quad (4.112)$$

$$\rho_2 = 2\pi d_2\omega = \sqrt{(2\pi d_2 u)^2 + (2\pi d_2 v)^2}. \quad (4.113)$$

Luego la suma de las ecuaciones (4.112) y (4.113) es,

$$\rho_1 + \rho_2 = \sqrt{(2\pi d_1 u)^2 + (2\pi d_1 v)^2} + \sqrt{(2\pi d_2 u)^2 + (2\pi d_2 v)^2} = 2b. \quad (4.114)$$

En la ecuación (4.114) la cantidad  $2b$  es una constante, y de acuerdo a la geometría analítica, la ecuación referida representa la geometría de una elipse. En base a esta ecuación, escribimos a la ecuación (4.111) en la forma

$$I_z(u, v) = \left( \frac{E_0 I_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \bullet \left[ (d_1^4) \left( \frac{J_1(\rho_1)}{\omega} \right)^2 - (\pi d_1^2 d_2^2) \left[ \frac{(d_1)(d_2)}{(d_1 + d_2)} \right] \bullet \right. \\ \left. \bullet \left[ 2 \cos(i4\pi d_1 u) \right] \left[ \frac{J_1(\rho_1 + \rho_2)}{\omega} \right] + d_2^4 \left( \frac{J_1(\rho_2)}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (4.115)$$

La forma de interpretar la ecuación (4.115) es, la distribución del espectro de difracción de transformada exacta, distribuido en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ , es un conjunto de anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad, cuya geometría es en forma de elipses definidas por la función Bessinc de suma de argumentos cuya expresión es  $\left[ \frac{J_1(\rho_1 + \rho_2)}{\omega} \right]$ , modulados por un patrón de interferencia de franjas de Young definidas a través de la función  $\cos(i4\pi d_1 u)$ , también de máxima y de mínima intensidad. Como consecuencia de no existir un criterio matemático, también existe la posibilidad de que Las franjas de interferencia de Young, modulen a la función Bessinc de suma de argumentos.

Ahora, si se considera que solo los productos de las funciones Bessel definidos por la suma  $\sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s \left[ J_s(2\pi d_1 \omega) J_{1+s}(2\pi d_2 \omega) + J_{1+s}(2\pi d_1 \omega) J_s(2\pi d_2 \omega) \right]$ , no aportan nada a la distribución de intensidad, esto implica que no se tomen en cuenta; de manera que la ecuación (4.109) bajo estas condiciones y de acuerdo con las ecuaciones (4.112) y (4.113), el miembro derecho queda reducido de manera simplificada a la expresión siguiente:

$$J_1(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_2 \omega) = \left[ \frac{\omega \pi (d_1)(d_2)}{2(d_1 + d_2)} \right] \bullet \\ \bullet \left[ J_0(\rho_1) J_1(\rho_2) + J_1(\rho_1) J_0(\rho_2) \right] \\ - \left[ \frac{\omega \pi (d_1)(d_2)}{(d_1 + d_2)} \right] \left[ J_1(\rho_1 + \rho_2) \right]. \quad (4.116)$$

Sustituyendo la ecuación (4.116) en la ecuación (4.108), se obtiene que la distribución de intensidad queda definida como

$$\begin{aligned}
 I_z(u, v) = & \left( \frac{E_0 I_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \bullet \left[ d_1^4 \left( \frac{J_1(\rho_1)}{\omega} \right)^2 + \right. \\
 & + (d_1^2 d_2^2) \left[ 2 \cos(i4\pi d_1 u) \right] \left[ \frac{\omega \pi (d_1)(d_2)}{2(d_1 + d_2)} \right] \bullet \\
 & \bullet \left[ J_0(\rho_1) J_1(\rho_2) + J_1(\rho_1) J_0(\rho_2) \right] - \\
 & \left. - \left[ \frac{\pi (d_1)(d_2)}{(d_1 + d_2)} \right] \left[ \frac{J_1(\rho_1 + \rho_2)}{\omega} \right] \right] + d_2^4 \left( \frac{J_1(\rho_2)}{\omega} \right)^2 \left. \right].
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

Se observa que la distribución de intensidad  $I_z(u, v)$  del espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, producido por dos aberturas cilíndricas, de diferentes diámetros en sus partes circulares de sus extremos, bajo las consideraciones hechas en el penúltimo párrafo, tiene diferentes aseveraciones respecto a la modulación de las funciones; algunas de ellas pueden ser que: Las franjas de interferencia de Young, de máxima y de mínima intensidad definidas por la función  $\cos(i4\pi d_1 u)$ , modulen a las franjas de interferencia en forma de anillos concéntricos definidos por la suma de productos de funciones de Bessel dadas por la expresión  $J_0(\rho_1) J_1(\rho_2) + J_1(\rho_1) J_0(\rho_2)$ ; y a la vez, que las franjas de Young modulen a las franjas de interferencia elípticas definidas por la función Bessinc de suma de argumentos, o sea  $\left[ \frac{J_1(\rho_1 + \rho_2)}{\omega} \right]$ . Lo opuesto también es válido, entre otras opciones y como consecuencia de no existir un criterio matemático.

#### IV.14 ESPECTRO DE TRANSFORMADA EXACTA DE FOURIER, DE DOS ABERTURAS CILÍNDRICAS DESPLAZADAS DEL ORIGEN DE COORDENADAS CON DIÁMETROS IGUALES

Otro caso que resulta muy importante de resolver con los modelos matemáticos de la sección IV.13, consiste en determinar el espectro de difracción de transformada exacta, y los de convolución de transformadas de Fourier, tanto en la zona convergente como en la divergente de la lente doblete cementada, usada como transformadora. Considerando que las aberturas cilíndricas de las cuales se da referencia en la sección anterior, ahora poseen el mismo diámetro  $d_1$  y  $d_2$  en magnitudes, es decir  $d_1=d_2$  en sus partes circulares en sus extremos, recordando que las dos aberturas cilíndricas tienen igual altura  $l_z$  o espesor, como se ilustra en la figura 4.3, y que pueden ser fabricadas en baquelita o cualquier otro tipo de material; mismas que son implementadas en el plano  $X_0Y_0$  e iluminadas con ondas planas. En base a lo antes propuesto, se tiene que  $J_1(2\pi d_1 \omega) = J_1^1(2\pi d_1 \omega)$ , por lo tanto el espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, queda definido de acuerdo a la ecuación (4.108) en la forma

$$I_z(u, v) = \left( \frac{E_0 l_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 (d_1^2)^2 [4 \cos^2(4\pi d_1 u)] \bullet \\ \bullet \left[ \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right]. \quad (4.118)$$

Para definir el producto de funciones de Bessel  $J_1(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_1 \omega)$ , se recurre a utilizar el teorema de adición (D.1) y la ecuación (D.15), en la que se ha considerado lo siguiente, que  $x = y$ , así como  $n = 1$ , además y la igualdad  $x = y = 2\pi d_1 \omega$ , entonces, la expansión en términos de productos de funciones Bessel será de acuerdo a (D.15) definida como

$$J_1(2[2\pi d_1 \omega]) = 4J_0(2\pi d_1 \omega)J_1(2\pi d_1 \omega) - \left( \frac{8}{2\pi d_1 \omega} \right) J_1^2(2\pi d_1 \omega) + \\ + 2 \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s J_s(2\pi d_1 \omega) J_{1+s}(2\pi d_1 \omega). \quad (4.119)$$

Despejando de esta ecuación  $J_1^2(2\pi d_1 \omega)$  se tiene

$$J_1^2(2\pi d_1 \omega) = \left( \frac{32}{2\pi d_1 \omega} \right) [J_0(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_1 \omega)] - \\ - \left( \frac{8}{2\pi d_1 \omega} \right) J_1(2[2\pi d_1 \omega]) + 2 \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s J_s(2\pi d_1 \omega) J_{1+s}(2\pi d_1 \omega). \quad (4.120)$$

Sustituyendo la ecuación (4.120) en la ecuación (4.118) se obtiene

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left( \frac{E_0 I_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 (d_1^2)^2 [4 \cos^2(4\pi d_1 u)] \bullet \\
& \bullet \left( \frac{32}{2\pi d_1 \omega} \right) [J_0(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_1 \omega)] - \\
& - \left( \frac{8}{2\pi d_1 \omega} \right) J_1(2[2\pi d_1 \omega]) + \\
& + 2 \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s J_s(2\pi d_1 \omega) J_{1+s}(2\pi d_1 \omega) ].
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Ahora, imponiendo la condición de que los productos de funciones de Bessel que provienen de la sumatoria, no aportan información significativa a la distribución de intensidad, la ecuación (4.121) queda reducida a la expresión

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left( \frac{E_0 I_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 (d_1^2)^2 \left[ - \left( \frac{8}{2\pi d_1 \omega} \right) \bullet \right. \\
& \bullet [4 \cos^2(4\pi d_1 u)] J_1 \left( \frac{2[2\pi d_1 \omega]}{\omega} \right) + \\
& \left. + \left( \frac{32}{2\pi d_1 \omega} \right) [4 \cos^2(4\pi d_1 u)] [J_0(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_1 \omega)] \right].
\end{aligned} \tag{4.122}$$

De acuerdo a la ecuación (4.122), se observa que la distribución de intensidad  $I_z(u, v)$  del espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, producido por dos aberturas cilíndricas, con diámetros de la misma magnitud de las partes circulares de sus extremos. Ahora, está compuesto por un término que contiene franjas de Young definidas por la función  $\cos^2(4\pi d_1 u)$ , que modula a las franjas de interferencia de anillos concéntricos de geometría circular, definidos por la función Bessinc definida por la función  $J_1 \left( \frac{2[2\pi d_1 \omega]}{\omega} \right)$ ;

además, existe otro término compuesto por el producto de funciones de Bessel dados por la siguiente expresión  $[J_0(2\pi d_1 \omega) J_1(2\pi d_1 \omega)]$ , que también es modulada por las franjas de interferencia de Young. Se recuerda que no existe un criterio matemático para establecer qué función en la ecuación (4.122) modula a las otras, esto propicia diferentes interpretaciones.

#### IV.15 ESPECTRO DE CONVOLUCIÓN DE DOS ABERTURAS CILÍNDRICAS CON DIÁMETROS DIFERENTES DESPLAZADAS DEL ORIGEN DE COORDENADAS

Para determinar el espectro de convolución de transformadas de Fourier, producido usando como objetos difractores dos aberturas cilíndricas fabricadas en la misma lámina digamos de baquelita, al ser implementadas en el arreglo óptico de la figura 3.1. En este caso las aberturas cilíndricas, están desplazadas del origen de coordenadas en el plano  $X_0Y_0$  cada una en la cantidad  $l_i$  como se ilustra en la figura 4.6, además, los diámetros de las circunferencias en sus aberturas circulares son de diferente magnitud, es decir  $d_1 \neq d_2$ . Entonces, de acuerdo a las ecuaciones (4.52), (4.105) y al propiedad conmutativa de la convolución, se puede describir el espectro de difracción para este caso a través de la ecuación siguiente

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \left[ E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ \frac{l_z f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \right] \right] \bullet \\
 & \bullet \left[ d_1^2 e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \otimes \left( e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) \right) \right] + \\
 & + d_2^2 e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \otimes \left( e^{i2\pi l_2 u} \left( \frac{J_1^1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right) \right) \left. \right].
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

La primera operación de convolución de la ecuación (4.123), se determina usando el resultado mostrado en la ecuación (4.64) en el que se consideró la ecuación de recurrencia  $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$  y la frecuencia espacial definida como  $u = \omega \cos \phi$ ; en la forma siguiente,

$$\begin{aligned}
 d_1^2 e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \otimes e^{i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right) &= 2d_1^2 \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} \bullet \\
 \bullet e^{\frac{i\pi l_1^2 (f_{LD} - z) (u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2}} \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega}.
 \end{aligned} \tag{4.124}$$

Mientras que la segunda operación de convolución en la ecuación (4.109), queda definida usando también la ecuación (4.64), como

$$\begin{aligned}
 d_2^2 e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \otimes e^{i2\pi l_2 u} \left( \frac{J_1^1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right) &= 2d_2^2 \sqrt{\frac{f_{LD} - z}{i\lambda f_{LD}^2}} \bullet \\
 \bullet e^{\frac{i\pi l_2^2 (f_{LD} - z) (u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2}} \frac{J_1^1(2\pi d_2 \omega)}{\omega}.
 \end{aligned} \tag{4.125}$$



Substituyendo las ecuaciones (4.124) y (4.125) en la ecuación (4.123) se obtiene la expresión

$$G_z(u, v) = \left[ e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ \frac{E_0 l_z f_{LD}}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \right] \cdot \left[ d_1^2 e^{-i2\pi d_1 u} \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} + d_2^2 e^{+i2\pi d_2 u} \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right]. \quad (4.126)$$

Como lo demuestra la ecuación (4.126), el espectro de difracción  $G_z(u, v)$  de convolución de transformadas de Fourier, producido por dos aberturas cilíndricas con aberturas circulares de diferente diámetro, es una función compleja. Dicho espectro se ha propagado la distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0 Y_0$  hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, situado en el intervalo  $0 < z < f_{LD}$  de la zona convergente de la lente doblete acromática cementada o transformadora, también conocida como región de Fresnel. En la ecuación referida se observa que, el espectro total posee un desfase de  $\pi/4$  radianes información que se obtiene del factor  $1/\sqrt{i}$ . La ecuación (4.112) también puede ser escrita como

$$G_z(u, v) = \left[ e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} \left[ \frac{E_0 l_z f_{LD}}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] \left( \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \right] \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi^2 (f_{LD} - z) (u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi^2 (f_{LD} - z) (u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] \cdot \left[ d_1^2 (\cos(2\pi d_1 u) + i \operatorname{sen}(2\pi d_1 u)) \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} + d_2^2 (\cos(2\pi d_2 u) - i \operatorname{sen}(2\pi d_2 u)) \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right]. \quad (4.127)$$

La parte real de la ecuación (4.127) es,

$$\operatorname{Re}(G_z(u, v)) = \left[ \cos(ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \right] \left[ \frac{E_0 l_z f_{LD}}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] \cdot \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \left[ \cos \left( \frac{\pi^2 (f_{LD} - z) (u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \right] (\cos(2\pi d_1 u)) \cdot \left[ d_1^2 \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} + d_2^2 \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right]. \quad (4.128)$$

En tanto, que la distribución de intensidad de acuerdo con la ecuación (4.128) queda descrita por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left[ \cos^2(ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \right] \left[ \frac{(E_0 I_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right] \bullet \\
& \bullet \left( \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \cos^2\left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \cos^2(2\pi d_1 u) \left[ (d_1^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2 \right]^2 + \quad (4.129) \\
& + 2d_1^2 d_2^2 \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \left[ \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right] + (d_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right]^2 \quad ].
\end{aligned}$$

Ahora, si se considera que solo los productos de las funciones Bessel definidos por la suma  $\sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [ J_s(2\pi d_1 \omega) J_{1+s}(2\pi d_2 \omega) + J_{1+s}(2\pi d_1 \omega) J_s(2\pi d_2 \omega) ]$ , no aportan información relevante a la distribución de intensidad, esto implica que la ecuación (4.116), se puede sustituir en la ecuación (4.129), además de considerar que  $\rho_1 = 2\pi d_1 \omega$  y  $\rho_2 = 2\pi d_2 \omega$ , obteniéndose:

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left[ \cos^2(ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \right] \left[ \frac{(E_0 I_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right] \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \bullet \\
& \bullet \cos^2\left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \cos^2(2\pi d_1 u) \left[ (d_1^2)^2 \left[ \frac{J_1(\rho_1)}{\omega} \right]^2 \right]^2 + \quad (4.130) \\
& + (d_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(\rho_2)}{\omega} \right]^2 + 2d_1^2 d_2^2 \left[ \frac{\omega \pi (d_1)(d_2)}{2(d_1 + d_2)} \right] \bullet [J_0(\rho_1) J_1(\rho_2) + J_1(\rho_1) J_0(\rho_2)] - \\
& - \left[ \frac{\omega \pi (d_1)(d_2)}{(d_1 + d_2)} \right] [J_1(\rho_1 + \rho_2)] \quad ].
\end{aligned}$$

La distribución de intensidad  $I_z(u, v)$  del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, definida por la ecuación (4.130), se observa que, cuando el objeto difractor es un par de aberturas cilíndricas de diferentes diámetros de sus partes circulares extremas, se ha propagado una distancia  $[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]$  desde el plano objeto  $X_0 Y_0$ , hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, ubicado en la zona convergente de la lente transformadora o zona de Fresnel, dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ , está desfasada en  $\pi/4$  radianes. Pero, a falta de un criterio matemático, entre otras posibilidades se puede dar las interpretaciones siguientes: La intensidad del espectro de difracción referido, es una modulación de funciones, por ejemplo, puede ocurrir

que la función  $\cos^2\left(\frac{\pi^2(f_{LD} - z)(u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right)$  module a las franjas de Young definidas por la función  $\cos^2(2\pi d_1 u)$ , así como a la función compuesta por la suma de funciones Bessel y Bessinc, siguientes  $\left[\frac{J_1(\rho_1)}{\omega}\right]^2 + (d_2^2)^2 \left[\frac{J_1(\rho_2)}{\omega}\right]^2$ , así como  $-\left[\frac{\omega\pi(d_1)(d_2)}{(d_1 + d_2)}\right][J_1(\rho_1 + \rho_2)]$  que representa franjas de interferencia de geometría elípticas, de máxima y de mínima intensidad, y también modula a la función  $2d_1^2 d_2^2 \left[\frac{\omega\pi(d_1)(d_2)}{2(d_1 + d_2)}\right] \bullet [J_0(\rho_1)J_1(\rho_2) + J_1(\rho_1)J_0(\rho_2)]$ . Esta situación de modulación de funciones, tal vez, se pueda resolver a través de un proceso experimenta o de simulación en computadora.

Ahora, si se toma la parte imaginaria de la ecuación (4. 127), se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Im}(G_z(u, v)) &= [\text{sen}(ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}])] \left[ \frac{E_0 I_z f_{LD}}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \right] \bullet \\ &\bullet \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi^2(f_{LD} - z)(u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \right] (\text{sen}(2\pi d_1 u)) \bullet \\ &\bullet \left[ -d_1^2 \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} + d_2^2 \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right]. \end{aligned} \quad (4.131)$$

En tanto que la distribución de intensidad de acuerdo a la ecuación (4.128) es,

$$\begin{aligned} I_z(u, v) &= [\text{sen}^2(ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}])] \left[ \frac{(E_0 I_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right] \bullet \\ &\bullet \left( \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi^2(f_{LD} - z)(u/\omega)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \left[ \text{sen}^2(2\pi d_1 u) \right] (d_1^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + \\ &- 2d_1^2 d_2^2 \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right] \left[ \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right] + (d_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi d_2 \omega)}{\omega} \right]^2 \quad (4.132) \end{aligned}$$

Imponiendo ahora que, solo los productos de las funciones Bessel definidos por la suma  $\sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(2\pi d_1 \omega) J_{1+s}(2\pi d_2 \omega) + J_{1+s}(2\pi d_1 \omega) J_s(2\pi d_2 \omega)]$ , no aportan información relevante a la distribución de intensidad, esto implica que la ecuación (4.116), se puede

sustituir en la ecuación (4.132) y además de considerar que  $\rho_1 = 2\pi d_1 \omega$  y  $\rho_2 = 2\pi d_2 \omega$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left[ \text{sen}^2(ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]) \right] \left[ \frac{(E_0 I_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right] \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \bullet \\
& \bullet \text{sen}^2\left(\frac{\pi d_1^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right) \left[ \text{sen}^2(2\pi d_1 u) \right] \left[ (d_1^2)^2 \left[ \frac{J_1(\rho_1)}{\omega} \right]^2 + \right. \\
& + (d_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(\rho_2)}{\omega} \right]^2 - 2d_1^2 d_2^2 \left[ \frac{\omega\pi(d_1)(d_2)}{2(d_1 + d_2)} \right] \bullet [J_0(\rho_1)J_1(\rho_2) + J_1(\rho_1)J_0(\rho_2)] + \\
& \left. + \left[ \frac{\omega\pi(d_1)(d_2)}{(d_1 + d_2)} \right] [J_1(\rho_1 + \rho_2)] \right].
\end{aligned} \tag{4.133}$$

La distribución de intensidad  $I_z(u, v)$  definida por la ecuación (4.133), se establece que, espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, producido por un par de aberturas cilíndricas de diferentes diámetros en sus partes circulares extremas, se ha propagado una distancia  $f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}$  desde el plano objeto  $X_0Y_0$ , hasta el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye, ubicado en la zona convergente de la lente transformadora o zona de Fresnel, dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ , está desfasada en  $\pi/4$  radianes. La intensidad del espectro de difracción referido, es una modulación de

funciones, por ejemplo, puede ocurrir que la función  $\cos^2\left(\frac{\pi d_1^2(f_{LD} - z)\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}{\lambda f_{LD}^2}\right)$  module a las

franjas de Young definidas por la función  $\text{sen}^2(2\pi d_1 u)$ , así como a la función compuesta por la suma de funciones Bessel y Bessinc, siguientes  $\left[ \frac{J_1(\rho_1)}{\omega} \right]^2 + (d_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(\rho_2)}{\omega} \right]^2$ , así

como  $\left[ \frac{\omega\pi(d_1)(d_2)}{(d_1 + d_2)} \right] [J_1(\rho_1 + \rho_2)]$  que representa franjas de interferencia de geometría elípticas, de máxima y de mínima intensidad, y también modula a la función  $-2d_1^2 d_2^2 \left[ \frac{\omega\pi(d_1)(d_2)}{2(d_1 + d_2)} \right] \bullet [J_0(\rho_1)J_1(\rho_2) + J_1(\rho_1)J_0(\rho_2)]$ . Esta situación de modulación de

funciones, tal vez, se pueda resolver a través de un proceso experimental o de simulación en computadora, a falta de un criterio matemático. Lo relevante en este desarrollo, es el poder interpretar la distribución de franjas de interferencia de Young con la función  $\text{sen}^2(2\pi d_1 u)$ .

#### IV. 15.1 CONCLUSIÓN A LAS SECCIONES IV.13.14 15

Para estas secciones se puede concluir lo siguiente: En base a introducir la función de adición de productos de funciones Bessel, para el caso de difracción de transformada exacta, como el de convolución de transformadas de Fourier en zona convergente de la lente transformadora, producido por dos aberturas cilíndricas de diámetros diferentes; ha surgido bajo las restricciones impuestas otros puntos de vista durante el proceso de solución, como se demuestra en el caso de la sección IV.14, en el que se consideró que los diámetros de las partes circulares en las aberturas cilíndricas sean de igual magnitud como lo demuestra la ecuación (4.122), que posee términos adicionales respecto a la ecuación (4.45) determinada para aberturas cilíndricas también de diámetros iguales.

#### IV.16 CONCLUSIÓN AL CAPÍTULO

Se pueden tener diferentes conclusiones, respecto de todo lo documentado a través de este capítulo, algunas de las más relevantes son: a) Se ha propiciado una forma de resolver el problema de convolución de transformadas de dos funciones específicas, pudiéndose generalizar a otros tipos de funciones. b) En algunos casos, en base a que la distribución de amplitud del espectro de difracción es una función compleja, fue necesario realizar un tratamiento con la parte real de la función o bien con su parte imaginaria, bajo este último concepto, se obtuvo la interpretación de las franjas de interferencia de Young, en términos de la función seno cuadrada, es decir  $\text{sen}^2(2\pi u)$ . c) Surgió en los modelos matemáticos de difracción, el producto de funciones lo que lleva al problema de modulación de funciones, que no se puede solucionar analíticamente de inmediato por falta de un criterio matemático; por lo que se propuso una etapa experimental o por simulación en computadora con métodos numéricos aproximados, que tal vez propicie una solución del problema referido.

d) Cuando se realizó el tratamiento de difracción usando aberturas cilíndricas de diámetros diferentes, permitió incluir la función Bessel de suma de argumentos y con ella surge información adicional. e) Como conclusión final, se establece que, para realizar un análisis respecto a la propagación del espectro de convolución de transformadas de Fourier, en la zona divergente de la lente transformadora, producido por dos aberturas cilíndricas fabricadas en la misma lámina digamos de aluminio del grupo 1100, entre otro tipo de material, al ser implementadas en el arreglo óptico de la figura 3.1. Se debe tomar en cuenta que el plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye el espectro referido, se localiza a la distancia  $z$  de la lente transformadora definida dentro del intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ .

## CAPÍTULO V

### LA FUNCIÓN DE TRANSMITANCIA Y SU RELACIÓN CON EL ESFUERZO MECÁNICO O TÉRMICO, FORMA ANALÍTICA

#### INTRODUCCIÓN

La transformación de materiales en dispositivos, componentes o estructuras útiles, requiere del diseño de un método de fabricación, en el que se haya seleccionado previamente el material, así como el tamaño del componente o estructura; además de conocer la magnitud del esfuerzo aplicado; Askeland y Phulé, (2008), propusieron que se puede calcular el tamaño máximo de la imperfección o abertura, que se puede tolerar en la estructura mecánica, a través de una técnica de ensayo no destructivo. En base a esto, en este trabajo de Tesis, se propuso desde la introducción capítulo I, como objetivos específicos catalogar el método óptico de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, con dos variantes, la primera es como técnica de evaluación no destructiva, cuando la estructura mecánica está sujeta a fuerza de tensión, mediante la cual se detecta cualquier abertura catalogada como imperfección en el material, de mayor o menor a un tamaño crítico predeterminado, información que puede ser de gran ayuda y a la vez permite establecer que la parte o componente funcionará con seguridad y auxiliará a seleccionar el proceso correcto de manufactura, para producir imperfecciones menores al tamaño crítico. La segunda variante del método de espectros de difracción, consiste en usarlo como una técnica de evaluación destructiva, en un ensayo de tenacidad a la fractura; en la que aplica a la estructura, una fuerza de magnitud conocida.

De manera general Askeland y Phulé, (2008) establecieron que, la ciencia e ingeniería de los materiales es un campo interdisciplinario, que se ocupa de investigar nuevos materiales y mejorar los ya conocidos, mediante el desarrollo de un conocimiento más profundo de las relaciones entre estructura que da referencia respecto de la descripción del arreglo atómico, misma que se puede examinar y describir en cinco niveles diferentes, clasificados como: macroestructura, microestructura, nanoestructura, arreglos atómicos de corto y largo alcance, estructura atómica, desde diferentes grados de detalle; la composición o constitución química del material, incluye a todos los átomos y sus arreglos que constituyen bloques estructurales de la materia y a partir de estos bloques estructurales emergen todos los nano, micro y macro niveles de estructura. Un examen detenido del arreglo atómico permite distinguir entre materiales que son cristalinos o amorfos, es decir materiales cuyos átomos y iones carecen de un orden de largo alcance, este tipo de materiales tienen arreglos atómicos de corto alcance; en tanto que en los materiales cristalinos, poseen átomos o iones que mantienen arreglos geométricos periódicos, y tienen arreglos de corto y largo alcance. Otro aspecto importante de considerar, es la síntesis, término que indica la manera de fabricar los materiales a partir de elementos naturales o hechos por el hombre y por último el procesamiento, que indica el modo en que se conforman los materiales en componentes útiles para causar cambios en las propiedades de otros materiales distintos. Otro aspecto de relevancia de este campo, se enfoca en el estudio entre las propiedades y el funcionamiento

para convertir o transformar los materiales en dispositivos con geometrías específicas o estructuras mecánicas útiles. Para lograr lo antes documentado la ciencia e ingeniería, propiciaron entre otras la siguiente clasificación de los materiales en los grupos principales: metales y aleaciones, cerámicos, vidrios y vitrocerámicos, polímeros (plásticos), semiconductores y materiales compuestos; cada uno de los grupos poseen distintas estructuras y propiedades.

En referencia al grupo de los metales y aleaciones que incluyen aceros, aluminio, magnesio, zinc, hierro colado, titanio, cobre y níquel; en general este grupo de materiales, poseen buena conductividad eléctrica y térmica; además tienen resistencia relativamente alta, gran rigidez, ductilidad y buena resistencia a los choques térmicos. El uso de metales puros y mezclas de metales o aleaciones, tienen gran utilidad en la aplicación de estructuras mecánicas o bajo fuerzas (cargas) dinámicas; sobresaliendo el uso de las aleaciones, ya que permiten mejorar las propiedades o mejores combinaciones de propiedades (Askeland y Phulé,2008).

En base a lo estipulado en los párrafos anteriores, este capítulo está dedicado a demostrar de forma analítica, el uso del método de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, como una técnica de evaluación destructiva y no destructiva de aberturas (fracturas), vistas como aberturas difractoras sujetas a deformaciones producidas por esfuerzo mecánico y térmico; centrandó la atención en las de tipo rectangular y cilíndricas definidas en el capítulo IV. Para lograr lo antes expuesto, y producir una mejor comprensión de los desarrollos hechos, el capítulo se dividió en siete secciones, de las que se documenta lo siguiente. En la sección V.1 se describe a través de modelos matemáticos los efectos de fuerzas mecánicas que actúan sobre un objeto. El análisis de un objeto sujeto a una fuerza de tensión sin contracción lateral, se realiza en la sección V.2. En tanto que en la sección V.3 se determina los modelos matemáticos de los efectos de deformaciones principales y laterales de un objeto sujeto a una fuerza de tensión. Por lo que respecta al esfuerzo térmico y sus efectos sobre un objeto, cuando éste está sujeto a transferencia de calor, es el tema de la sección V.4. Mientras que en la sección V.5, se presenta un análisis de la relación entre los modelos de esfuerzo mecánico y los de difracción cuando el objeto bajo estudio se sujeta a la acción de una fuerza mecánica sin deformaciones laterales. El análisis de un objeto sujeto a una fuerza con que produce deformaciones laterales, y la relación entre modelos de esfuerzo mecánico y los de difracción, se realiza en la sección V.6. Por último, en la sección V.7 se presenta la relación entre los modelos matemáticos de difracción y los de esfuerzo térmico.

## V. 1 FUERZAS MECÁNICAS DE TENSIÓN Y SU EFECTO SOBRE UN OBJETO

El campo de la mecánica abarca fundamentalmente las relaciones entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sólido hecho de cierto tipo de material, idealmente deformable. En contraste con esta, la resistencia de materiales, estudia y establece la relación entre la fuerza exterior aplicada a la superficie del objeto bajo estudio y el esfuerzo mecánico, así, como sus efectos en el interior del material, lo que lleva a la necesidad de estudiar los cambios de forma o deformación, que acompañan a un estado de fuerzas, que pueden producir esfuerzos mecánicos de tensión, compresión, de corte y flexión.

(Askeland y Phulé, 2008); así como Feynman *et al*, (1997) propusieron que, un bloque por ejemplo de aluminio, cuya forma geométrica es la de un paralelepípedo rectangular, sometido a fuerzas mecánicas tensión  $\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_y$  y  $\vec{F}_z$ , de magnitud  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  diferentes. Actúan en los ejes principales de un sistema de coordenadas rectangulares  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ; de manera uniforme y de forma perpendicular a cada sección transversal de área  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$ , como se ilustra en la figura 5.1. Los esfuerzos mecánicos principales de tensión denotados como  $\sigma_{xprin}$ ,  $\sigma_{yprin}$  y  $\sigma_{zprin}$ ; producen deformaciones unitarias principales e inducidas que propician que el bloque se contraiga en las direcciones transversales, que se determinan usando las ecuaciones siguientes,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_{xprin}}{\Omega} \quad \text{y} \quad \epsilon_{yxind} = \epsilon_{zxind} = -\eta \epsilon_x = -\eta \frac{\sigma_{xprin}}{\Omega} ; \quad (5.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_{yprin}}{\Omega} \quad \text{y} \quad \epsilon_{xyind} = \epsilon_{zyind} = -\eta \epsilon_y = -\eta \frac{\sigma_{yprin}}{\Omega} ; \quad (5.2)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_{zprin}}{\Omega} \quad \text{y} \quad \epsilon_{xzind} = \epsilon_{yzind} = -\eta \epsilon_z = -\eta \frac{\sigma_{zprin}}{\Omega} . \quad (5.3)$$

El bloque referido posee las longitudes originales  $l_x$  de ancho,  $l_y$  de altura y  $l_z$  de espesor ver figura 5.1, además el aluminio del que está hecho se considera un material isotrópico. En las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) las deformaciones unitarias principales también se definen como  $\epsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x}$ ,  $\epsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y}$ ,  $\epsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z}$ ; la constante  $\Omega$  es el módulo de Young y  $\eta$  es la constante de Poisson. Ahora, al relacionar las ecuaciones referidas se determina que la



deformaciones unitarias totales  $\epsilon_{xT}$ ,  $\epsilon_{yT}$ ,  $\epsilon_{zT}$ , en las direcciones de los ejes coordenados  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , quedan especificadas en la forma,

$$\epsilon_{xT} = \epsilon_x - (\epsilon_{xyind} + \epsilon_{xzind}) = \frac{\sigma_{xprin} - \eta(\sigma_{yprin} + \sigma_{zprin})}{\Omega}; \quad (5.4)$$

$$\epsilon_{yT} = \epsilon_y - (\epsilon_{xyind} + \epsilon_{yzind}) = \frac{\sigma_{yprin} - \eta(\sigma_{xprin} + \sigma_{zprin})}{\Omega}; \quad (5.59)$$

$$\epsilon_{zT} = \epsilon_z - (\epsilon_{zxind} + \epsilon_{zyind}) = \frac{\sigma_{zprin} - \eta(\sigma_{xprin} + \sigma_{yprin})}{\Omega}. \quad (5.6)$$

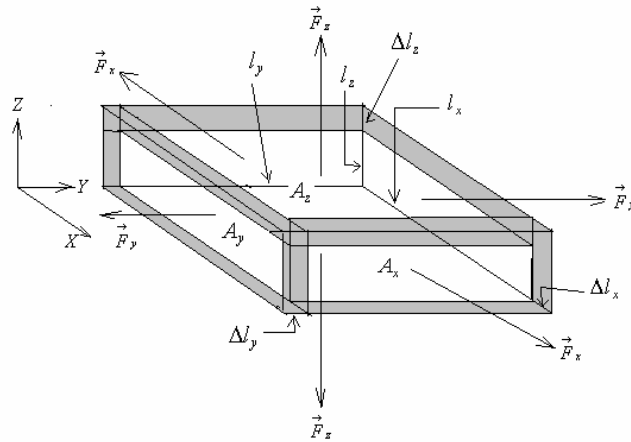


Figura 5.1. Objeto bajo fuerzas de tensión

## V.2 OBJETO SUJETO A UNA FUERZA DE TENSIÓN, SIN CONTRACCIÓN LATERAL

Feynman *et al*, (1997) también establecieron el siguiente problema: si los esfuerzos generados sobre el bloque por fuerzas de tensión, son uniformes en todo el material y se considera que, mientras que por ejemplo el bloque de la figura 5.1 se estira en una dirección seleccionada; al mismo tiempo se le impide de algún modo que no se produzca ninguna contracción lateral; es decir, deben existir fuerzas laterales que impidan cambiar de espesor, mismas que no se conocen de antemano pero que se pueden calcular tanto en dirección como en magnitud. De acuerdo a esta última condición, se supone ahora que las fuerzas de tensión  $\vec{F}_y$ ,  $\vec{F}_z$  transversales a la fuerza de tensión  $\vec{F}_x$ , en magnitud hacen que el ancho y la altura del bloque antes referido, permanezcan constantes, es decir  $\Delta l_y = \Delta l_z = 0$  esto implica que las deformaciones unitarias totales sean  $\epsilon_{yT} = \epsilon_{zT} = 0$ . Bajo

estas condiciones y de acuerdo con las ecuaciones (5.1) solo existe una deformación principal definida por la primera de ellas, y las deformaciones inducidas definidas por la segunda ecuación. Además, las condiciones antes impuestas aplicadas a las ecuaciones (5.5) y (5.6) permite determinar la relación entre las magnitudes de esfuerzos inducidos y el principal en la forma siguiente,

$$\sigma_{yind} = \eta(\sigma_{xprin} + \sigma_{zind}) ; \quad (5.7)$$

$$\sigma_{zind} = \eta(\sigma_{xprin} + \sigma_{yind}) . \quad (5.8)$$

Ahora, relacionando cada una de las ecuaciones (5.7) y (5.8), se obtiene,

$$\sigma_{yind} = \sigma_{zind} = \frac{\eta\sigma_{xprin}}{(1-\eta)} . \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) muestra de manera clara la dependencia de los esfuerzos mecánicos inducidos, respecto del esfuerzo principal  $\sigma_{xprin}$ ; además se ve que, son proporcionales a la constante de Poisson  $\eta$  e inversamente proporcionales con el factor  $(1-\eta)^{-1}$ . Puesto que, cada esfuerzo inducido se define en la forma siguiente  $\sigma_{yind} = \frac{F_{yind}}{A_y}$  y  $\sigma_{zind} = \frac{F_{zind}}{A_z}$ , y de acuerdo con la primera igualdad de la ecuación (4.9) se tiene,

$$\frac{F_{yind}}{A_y} = \frac{F_{zind}}{A_z} . \quad (5.10)$$

La igualdad en la ecuación (5.10) se cumple sí y sólo sí las magnitudes de las fuerzas inducidas son iguales, esto es  $F_{yind} = F_{zind}$  y además las secciones transversales en las que se aplican, deben poseer áreas iguales, es decir  $A_y = A_z$ . Entonces, cuando se aplica una fuerza de tensión en la dirección del eje  $X$  al bloque de aluminio de la figura 5.1 que se está estudiando, para evitar contracciones laterales de éste en las direcciones de los ejes  $Y, Z$ , agentes externos deben de aplicar fuerzas de tensión de la misma magnitud es decir  $F_{yaext}$  y  $F_{zaext}$  que cumplen la condición  $F_{yind} = F_{yaext}$  y  $F_{zind} = F_{zaext}$ , además de actuar sobre el objeto en dirección opuesta a las de compresión inducidas. Esto hace que el problema de aplicar fuerza tensión para evitar la contracción lateral, no sea nada sencillo de realizar. En base a esto, es mejor aplicar una fuerza de compresión  $-\vec{F}_x$  y de magnitud  $F_x$ , ya que

será más fácil evitar la expansión lateral inducida, cuando esto se realice en una etapa experimental, pues resulta mejor comprimir que expandir el objeto.

Ahora, de acuerdo a la definición de esfuerzos inducidos  $\sigma_{yind} = \frac{F_{yind}}{A_y}$  y  $\sigma_{zind} = \frac{F_{zind}}{A_z}$ , y al relacionar a estos con la ecuación (5.9) se obtienen las ecuaciones para determinar las fuerzas inducidas en término del esfuerzo principal  $\sigma_{xprin}$ , la razón de Poisson  $\eta$  y las áreas  $A_y$  y  $A_z$  descritas a continuación

$$F_{yind} = \frac{\eta\sigma_{xprin}}{(1+\eta)}A_y ; \quad (5.11)$$

$$F_{zind} = \frac{\eta\sigma_{xprin}}{(1+\eta)}A_z . \quad (5.12)$$

Ahora, como la deformación unitaria total hacia el eje  $X$ , en magnitud está definida como  $\epsilon_{xT} = \frac{\Delta l_{xT}}{l_x}$  esto implica que la ecuación (5.4) de acuerdo con la ecuación (5.9) pueda ser escrita como

$$\Delta l_{xT} = \frac{\sigma_{xprin}(1+\eta)(1-2\eta)}{(1-\eta)\Omega}l_x . \quad (5.13)$$

La deformación unitaria total  $\Delta l_{xT}$  definida por la ecuación (5.13), se identificará como elástica, si se desarrolla en forma instantánea; es decir, si se presenta tan pronto como se aplica la fuerza mecánica de tensión  $\vec{F}_x$ , permanece mientras se aplica el esfuerzo  $\sigma_{xprin}$  y desaparece tan pronto como se quita la fuerza. Por lo tanto, un material sujeto a deformación elástica, no muestra deformación permanente, es decir regresa a su forma original cuando se retira la fuerza o el esfuerzo. En muchos materiales, el esfuerzo y la deformación elásticos siguen una ley lineal; la pendiente en la porción lineal de la curva esfuerzo contra deformación unitaria de tensión, define el módulo de Young o de elasticidad  $\Omega$  del material bajo estudio (Askeland y Phulé, 2008). Pero como se ve en la ecuación (5.13) y bajo las condiciones impuestas el módulo de elasticidad  $\Omega$  para este caso en especial, no sigue la relación lineal que se hace mención anteriormente.

Recordando ahora, que el esfuerzo principal está definido como  $\sigma_{xprin} = \frac{F_x}{A_x}$ , entonces al sustituir esta expresión en la ecuación (5.13) se determina la ecuación para la magnitud de la fuerza de tensión

$$F_x = \frac{A_x(1-\eta)\Omega}{(1-\eta)(1-2\eta)l_x} \Delta l_{xT} . \quad (5.14)$$

Definiendo a  $k$  como una constante, en base a considerar que todos los parámetros del cociente en la ecuación (5.14) son constante; tal constante puede ser escrita como

$$k = \frac{A_x(1-\eta)}{(1+\eta)(1-2\eta)l_x} \Omega \quad . \quad (5.15)$$

La ecuación (4.15) permite escribir a la ecuación (5.14) para la fuerza elástica de tensión antes referida, una expresión denominada ley de Hooke, escrita en la forma siguiente:

$$F_x = k\Delta_{xT} \quad . \quad (5.16)$$

Entonces, el bloque referido cuando está sujeto a la acción de la fuerza elástica de tensión tipo Hooke definida por la ecuación (5.16), sufre una deformación  $\Delta_{xT}$  la cual es elástica o restaurable, si se presenta tan pronto como se aplica la fuerza en magnitud  $F_x$ , permanece mientras ésta dure y desaparece tan pronto cuando la magnitud de la fuerza  $F_x$ , de tensión se quita; además de que las fuerzas transversales a ésta, deben de evitar que el objeto se contraiga. En esta situación se dice que el material se sujetó a deformación elástica y no muestra deformación  $\Delta_{xT}$  permanente, es decir, regresa a su forma original cuando la fuerza  $F_x$  en magnitud se retire o que el agente externo deje de ejercer la fuerza de tensión referida.

De la misma ecuación (5.16) se observa que, si la magnitud de la fuerza continúa aumentando implica que la deformación  $\Delta_{xT}$  aumente y el material comienza a mostrar deformación tanto elástica como plástica; al final, la deformación es tal, que el material “cede” esto es, se rompe o fractura debido al esfuerzo aplicado o queda deforme permanentemente. De manera que, el valor crítico del esfuerzo necesario para iniciar la deformación plástica se reconoce como límite elástico. En el material metálico, normalmente este es el esfuerzo necesario para iniciar el movimiento de las dislocaciones o deslizamientos (Askeland y Phulé, 2002).

Otro aspecto relevante de comentar, es el concepto de límite de proporcionalidad, que se define como el valor del esfuerzo arriba del cual la relación entre esfuerzo y deformación ingenieriles no es lineal. En la mayoría de los materiales, el límite elástico y el de proporcionalidad están bastante cercanos; sin embargo no se pueden determinar con precisión. Los valores medidos dependen de la sensibilidad del equipo que se usa. En consecuencia se define un valor convencional de deformación plástica, normalmente entre 0.002 o el 0.2%, pero no siempre. A continuación se traza una recta comenzando en este valor desplazado, paralela a la parte lineal de la curva esfuerzo-deformación ingenieril. El valor que corresponde al cruce de esta recta y la curva esfuerzo deformación ingenieril, se define como la resistencia a la cedencia y el procedimiento descrito para determinarlo se conoce como criterio de deformación plástica convencional (Askeland y Phulé, 2008).

### V.3 OBJETO SUJETO A UNA FUERZA DE TENSIÓN, CON DEFORMACIONES LATERALES INDUCIDAS

Ahora, se considera el caso en el que, sobre el bloque en forma de paralelepípedo como el ilustrado en la figura 5.1, y actúa en la dirección del eje principal  $X$  solo la fuerza mecánica de tensión  $\vec{F}_x$  cuya magnitud en el sistema SI es diferente de cero o sea  $F_x \neq 0N$ . Mientras que las fuerzas  $\vec{F}_y, \vec{F}_z$  de tensión que actúan en los ejes transversales  $Y, Z$ , tienen magnitud igual a cero, es decir  $F_y = 0N, F_z = 0N$ . Bajo estas condiciones, se tiene que las deformaciones unitarias principales son  $\epsilon_y = 0, \epsilon_z = 0$ , y también implican que  $\sigma_{yprin} = 0, \sigma_{zprin} = 0$ . Por lo tanto de las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) se obtiene la deformación unitaria principal e inducidas definidas por las siguiente ecuaciones,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_{xprin}}{\Omega} ; \quad (5.17)$$

$$\epsilon_{yind} = \frac{-\eta\sigma_{xprin}}{\Omega} ; \quad (5.18)$$

$$\epsilon_{zind} = \frac{-\eta\sigma_{xprin}}{\Omega} . \quad (5.19)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas en la forma siguiente,

$$\Delta l_x = \frac{\sigma_{xprin}}{\Omega} l_x ; \quad \Delta l_{yind} = \frac{-\eta\sigma_{xprin}}{\Omega} l_y ; \quad \Delta l_{zind} = \frac{-\eta\sigma_{xprin}}{\Omega} l_z . \quad (5.20)$$

En base a que, el esfuerzo mecánico de tensión principal está definido como  $\sigma_{xprin} = \frac{F_x}{A_x}$ , la primera expresión de las ecuaciones (5.20) determina la fuerza de tensión principal tipo Hooke, es decir,

$$F_x = \frac{A_x\Omega}{l_x} \Delta l_x = k_1(\Delta l_x) . \quad (5.21)$$

Mientras que las deformaciones inducidas  $\Delta l_{yind}$  y  $\Delta l_{zind}$  hacia los ejes  $Y, Z$ , en términos de la fuerza principal o de Hooke definida en la ecuación (5.21) pueden ser escritas como

$$\Delta l_{yind} = \frac{-\eta F_x}{\Omega A_x} l_y ; \quad (5.22)$$

$$\Delta l_{zind} = \frac{-\eta F_x}{\Omega A_x} l_z . \quad (5.23)$$

En la ecuación (5.21),  $k_1$  se identifica como la constante elástica; en vista que en la ecuación referida, no existe restricción para la magnitud de la fuerza mecánica de tensión aplicada; se observa que, si la magnitud de la fuerza continúa aumentando implica que la deformación  $\Delta l_x$  aumente, así como las deformaciones inducidas definidas en las ecuaciones (5.22) y (5.23), esto implica que el material comienza a mostrar deformación tanto elástica como plástica; al final el material se rompe o fractura ya que “cede” a la magnitud de la fuerza misma que produce el esfuerzo mecánico aplicado. Nuevamente se tiene que, el valor crítico del esfuerzo necesario para iniciar la deformación plástica se reconoce como límite elástico (Askeland y Phulé, 2008).

#### V. 4 ESFUERZO TÉRMICO

Los cambios de temperatura provocan deformaciones en los cuerpos sólidos elásticos e isotrópicos. Así, por ejemplo si se considera nuevamente un bloque o una barra de aluminio 6061 que es isotrópico, cuya geometría es la forma de un paralelepípedo rectangular que posee las dimensiones siguientes:  $l_x$  de ancho,  $l_y$  de altura y  $l_z$  de espesor, y además está sujeto a transferencia de calor como se ilustra en la figura 5.3. En este caso se tiene que las deformaciones térmicas lineales  $\Delta l_{x\tau}$ ,  $\Delta l_{y\tau}$  y  $\Delta l_{z\tau}$ , causadas en el bloque referido por el aumentar de su temperatura  $\tau$  en la cantidad  $\Delta \tau$  se establece que, no se genera ningún esfuerzo térmico cuando el cuerpo tiene libertad para deformarse (Beer et al, 2004; Askeland y Poulé, 2008). De manera que, las deformaciones antes referidas se determinan a través de las siguientes ecuaciones:

$$\Delta l_{x\tau} = l_x \alpha \Delta \tau, \quad \Delta l_{y\tau} = l_y \alpha \Delta \tau, \quad \Delta l_{z\tau} = l_z \alpha \Delta \tau. \quad (5.24)$$

En las ecuaciones (5.24),  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica lineal,  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$ , definen la longitud inicial que posee el objeto; mientras que la variación de la temperatura es definida por la expresión  $\Delta \tau = \tau_f - \tau_i$ , es decir en términos de la temperatura final e inicial. Pero, existen una gran variedad de casos, en los que no es posible que las deformaciones térmicas estén total o parcialmente impedidas. Como resultado de ello, se produce fuerzas internas que contrarrestan también total o parcialmente las deformaciones referidas. Así, los esfuerzos originados por estas fuerzas se les identifica como esfuerzos de origen térmico o esfuerzos térmicos (Beer *et al*, 2004; Askeland y Poulé 2008).

Ahora, en el siguiente desarrollo, se obtienen las ecuaciones que permiten determinar el esfuerzo térmico al que está sujeta, por ejemplo la barra 1 de aluminio a la que se le hace transferencia de calor, como se ilustra 5.2a. Las partes sombreadas en la barra 1 de la figura referida juegan el papel de ser soportes o placas no conductoras, que impiden la deformación por dilatación de sus dimensiones lineales, en las direcciones de los ejes X, Y, Z. Ahora, como los lados A y B de la barra 1 están fijos; en estas condiciones solo la fuerza de gravedad ejerce diferentes esfuerzos sobre cada superficie del bloque, pero se consideran tan pequeños que se puede asegurar que no existe esfuerzo y deformación como condiciones iniciales. Luego, considerando que a la barra 1 se le ha hecho transferencia de

calor, que propicia se eleve su temperatura en una cantidad  $\Delta\tau$ , esto implica, que la barra se deforme o dilate en las siguientes cantidades  $\Delta l_{x\tau}$ ,  $\Delta l_{y\tau}$  y  $\Delta l_{z\tau}$  hacia cada uno de los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Puesto que no puede alargarse en ninguna dirección, por las restricciones impuestas por las placas no conductoras sobre cada superficie, esto implica que la deformación total sea cero.

Considerando que la barra 1 es homogénea y de secciones transversales uniformes; al elevarse su temperatura, existen fuerzas de tipo térmico, de manera que todos los extremos de la barra 1, empujan a los soportes o placas no conductoras con fuerzas térmicas en las direcciones de los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , representadas por los vectores siguiente  $\vec{F}_{x\tau 1}$ ,  $\vec{F}_{y\tau 1}$  y  $\vec{F}_{z\tau 1}$ , a su vez los soportes ejercerán fuerzas  $\vec{F}_{x1}$ ,  $\vec{F}_{y1}$  y  $\vec{F}_{z1}$  de la misma magnitud pero de dirección opuesta a las térmicas; por lo tanto, se crea un estado de Fuerzas y esfuerzos sin deformaciones correspondientes en el bloque. Ahora, con el fin de determinar los esfuerzos creados por el cambio de temperatura  $\Delta\tau$ , el análisis se realiza considerando el diagrama de fuerzas de la figura 5.2b, en el que se representa la forma de actuar las fuerzas referidas que actúan sobre la barra 1. En este caso se supone que las fuerzas térmicas  $\vec{F}_{x\tau 1}$ ,  $\vec{F}_{y\tau 1}$  y  $\vec{F}_{z\tau 1}$ , están dirigidas hacia las partes positivas de los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Mientras que el soporte ejerce las fuerzas mecánicas  $\vec{F}_{x1}$ ,  $\vec{F}_{y1}$  y  $\vec{F}_{z1}$ , son de la misma magnitud, cuyas componentes actúan en direcciones opuestas a las componentes térmicas, de acuerdo con la tercera ley de Newton hay una acción y reacción (Resnick *et al*, 2004).

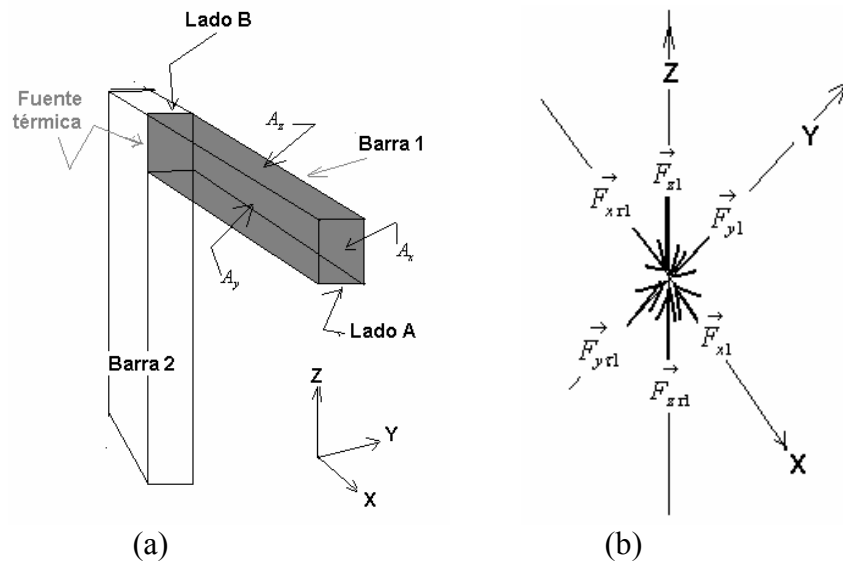


Figura 5.2. (a) Barra 1 sujeta a transferencia de calor, (b) Diagrama de fuerzas

Puesto que, el sistema barra 1 y soportes más barra 2 están en reposo; se cumple también la primera ley de Newton, lo que implica que la suma de fuerzas que actúan sobre el bloque debe ser cero (Resnick *et al*, 2004), es decir,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_\tau = \vec{0}. \quad (5.25)$$

En la ecuación (5.25) las fuerzas vectores  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_\tau$  están definidas en la forma siguiente

$$\vec{F}_1 = \hat{i}F_{x1} + \hat{j}F_{y1} + \hat{k}F_{z1} \quad \text{y} \quad \vec{F}_\tau = \hat{i}F_{x\tau} + \hat{j}F_{y\tau} + \hat{k}F_{z\tau}. \quad (5.26)$$

Las ecuaciones (5.26) permiten escribir a la ecuación (5.25) en términos de componentes vectoriales, esto es

$$\hat{i}(-F_{x1} + F_{x\tau1}) - \hat{j}(-F_{y1} + F_{y\tau1}) - \hat{k}(-F_{z1} + F_{z\tau1}) = \vec{0}. \quad (5.27)$$

En base a que, dos vectores son iguales sí y sólo sí sus componentes escalares son iguales; bajo este concepto, de la ecuación (5.27), se obtiene

$$(-F_{x1} + F_{x\tau1}) = 0, \quad (-F_{y1} + F_{y\tau1}) = 0, \quad (-F_{z1} + F_{z\tau1}) = 0. \quad (5.28)$$

De las ecuaciones (5.28), se generan las igualdades siguientes,

$$F_{x1} = F_{x\tau1}; \quad F_{y1} = F_{y\tau1}; \quad F_{z1} = F_{z\tau1}. \quad (5.29)$$

La magnitud de cada fuerza se puede escribir en términos del esfuerzo  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{y1}$ ,  $\sigma_{z1}$  y el área  $A_{x1}$ ,  $A_{y1}$ ,  $A_{z1}$  de la sección transversal sobre la que actúan; así como los esfuerzos térmicos  $\sigma_{x\tau1}$ ,  $\sigma_{y\tau1}$ ,  $\sigma_{z\tau1}$ , que también actúan de forma transversal sobre las mismas áreas antes especificadas. Bajo estas especificaciones se obtiene,

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x\tau1}, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y\tau1}, \quad \sigma_{z1} = \sigma_{z\tau1}. \quad (5.30)$$



Como cada esfuerzo mecánico  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{y1}$ ,  $\sigma_{z1}$ , es definido en términos de la deformación  $\Delta l_{x1}$ ,  $\Delta l_{y1}$  y  $\Delta l_{z1}$ , las longitudes iniciales  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$ , y el módulo de Young  $G$ . Pero como las deformaciones son consecuencia del aumento de la temperatura  $\Delta\tau$ , tales deformaciones pueden ser escritas como  $\Delta l_{x\tau}$ ,  $\Delta l_{y\tau}$  y  $\Delta l_{z\tau}$ ; luego, de la ecuación (5.30) se determina que los esfuerzos térmicos en términos de las deformaciones son descritos por las siguientes ecuaciones

$$\frac{\Delta l_{x\tau} \Omega}{l_x} = \sigma_{x\tau1}, \quad \frac{\Delta l_{y\tau} \Omega}{l_y} = \sigma_{y\tau1}, \quad \frac{\Delta l_{z\tau} \Omega}{l_z} = \sigma_{z\tau1}. \quad (5.31)$$

Pero la deformación, es consecuencia del aumento de temperatura en el cuerpo y pueden ser escritas de acuerdo con las ecuaciones (5.24) y (5.31) en la forma,

$$\alpha \Omega \Delta\tau = \sigma_{x\tau1}, \quad \alpha \Omega \Delta\tau = \sigma_{y\tau1}, \quad \alpha \Omega \Delta\tau = \sigma_{z\tau1}. \quad (5.32)$$

Las ecuaciones (5.32) son de gran importancia, lo mismo que el proceso de deducirlas, ya que en base a estos conceptos, para producir esfuerzos térmicos en una etapa experimental, solo basta impedir que el objeto se deforme térmicamente en sus extremos, con un dispositivo o estructura mecánica que aplique una fuerza mecánica en la dirección opuesta a la que ejerce el bloque referido como consecuencia de la deformación causada en él, al haber variado su temperatura en la cantidad  $\Delta\tau$  bajo transferencia de calor.

## V.5 RELACIÓN ENTRE ESFUERZO MECÁNICO Y EL ESPECTRO DE DIFRACCIÓN

Askeland y Phulé, (2008) propusieron, que se puede calcular el tamaño máximo de una imperfección o abertura, que puede tolerar una estructura mecánica bajo estudio, a través de una técnica de ensayo no destructivo. En base a esto, en este trabajo de Tesis, se realiza una segunda propuesta de uso del método óptico de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, como una técnica de ensayo destructivo de tenacidad a la fractura. En el que se aplica a la estructura o componente, una fuerza de tensión cuya magnitud produce un esfuerzo mecánico conocido sobre la estructura, misma que contiene una abertura o imperfección de tamaño y geometría conocidos. Por lo que, en el siguiente desarrollo se obtiene la nueva representación de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$ , que surge al relacionar la función referida asociada a una abertura de geometría específica, usada como objeto difractor, con el esfuerzo mecánico  $\sigma$  producido por la magnitud de la fuerza de tensión a la que esté sujeto.

Suponiendo entre otras opciones que, se considera para el estudio una abertura de geometría rectangular, cuyas especificaciones fueron proporcionadas en la sección 4.1, cuya imagen se ilustra en la figura 4.1a. En este caso se considerará que la abertura delgada referida se le asocia un ancho  $l_{x0}$ , un largo  $l_{y0}$  y un espesor  $l_z$ , el cual debe tomarse en cuenta; y fue construida en lámina de aluminio. Tal abertura se implementa en el plano  $X_0Y_0$  del arreglo óptico coherente ilustrado en la figura 5.3, que es una extensión del arreglo óptico de la figura 3.1.

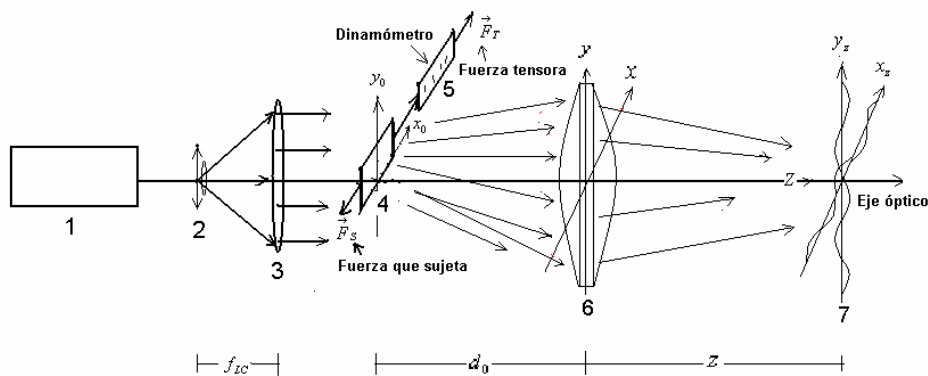


Figura 5.3. Arreglo teórico para producir modelos matemáticos de Difracción con fuerza de tensión: (1) laser de He-Ne, (2) filtro espacial, (3) colimador, (4) objeto bajo estudio sujeto a fuerza de tensión, (5) extensómetro con dinamómetro medidor de magnitud de fuerza de tensión (6) lente doblete cementada, (7) plano de distribución del campo o del espectro de difracción.

En este caso, se le asocia a la transmitancia la función de rectángulo descrita por la ecuación (4.5), misma que puede ser escrita en la forma

$$t_0(x_0, y_0) = l_z \left[ (l_{y_0}) \text{rect} \left( \frac{x_0}{l_{x_0}} \right) \right] \left[ (l_{x_0}) \text{rect} \left( \frac{y_0}{l_{y_0}} \right) \right]. \quad (5.33)$$

Se debe recordar que  $l_z$  es el espesor de la abertura rectangular, mientras que  $l_{y_0}$  es la altura de la función rectángulo de ancho  $l_{x_0}$ , vista desde el eje de las  $X_0$ . Mientras que si se ve a la función rectángulo desde el eje  $Y_0$ , el ancho de la función es  $l_{y_0}$ , en tanto que su altura es  $l_{x_0}$  no unitaria. Ahora, considerando que la lámina que contiene a la abertura rectangular o rendija antes referida, está sujeta a una fuerza de tensión  $\vec{F}_{x_0}$  que actúa en la dirección del eje  $X_0$ , de magnitud  $F_{x_0}$  y como consecuencia la abertura definida en ella, de alguna manera se evita que se deforme en las secciones laterales a la fuerza aplicada; también se debe considerar, que la magnitud de la fuerza aplicada se aumenta gradual y lentamente, de tal manera que la abertura como un sistema permanezca siempre en reposo.

Entonces, el problema se resolverá, haciendo uso de lo documentado en la sección V.2. Para esto, basta recordar que el esfuerzo de tensión generado sobre la abertura es uniforme en todo el material y se considera que, mientras que la lámina que contiene la abertura se estira en la dirección del eje  $X_0$ , al mismo tiempo se le impide de algún modo que no se produzca ninguna contracción lateral, es decir hacia los ejes  $Y_0, Z_0$ , es decir, deben existir fuerzas laterales que impidan cambiar de espesor. Esto implica que, las fuerzas de tensión  $\vec{F}_{y_0}, \vec{F}_{z_0}$  transversales a la fuerza de tensión  $\vec{F}_{x_0}$ , producidas por agentes externos, en magnitud hacen que el ancho y la altura permanezcan constantes, es decir las deformaciones principales son cero, esto es  $+\Delta l_{y_0} = +\Delta l_{z_0} = 0$  esto implica que las deformaciones totales sean  $\epsilon_{yT_0} = \epsilon_{zT_0} = 0$ . Bajo las condiciones expuestas en el párrafo anterior, y de acuerdo con las ecuaciones (5.1) solo existe una deformación principal definida por la primera, de tales ecuaciones, mientras que las deformaciones inducidas definidas por las segundas ecuaciones, se pueden especificar en términos del esfuerzo principal y la constante de Poisson  $\eta$ , en la forma,

$$\Delta l_{x_0} = \frac{\sigma_{x_0 \text{ prin}} (1 + \eta)(1 - 2\eta)}{(1 - \eta)\Omega} l_{x_0}; \quad (5.34)$$

$$\Delta l_{y_0 \text{ ind}} = \frac{-\eta \sigma_{x \text{ prin}}}{(1 - \eta)\Omega} l_{y_0}; \quad (5.35)$$

$$\Delta l_{z_0 \text{ ind}} = \frac{-\eta \sigma_{x \text{ prin}}}{(1 - \eta)\Omega} l_z. \quad (5.36)$$

Por lo tanto, la deformación  $\Delta l_{x_0}$  principal e inducida  $\Delta l_{y_0ind}$  por la magnitud de la fuerza de tensión  $F_{x_0}$  que actúa sobre la fractura referida, hace que la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  quede definida ahora como

$$t_0(x_0, y_0) = (l_z - \Delta l_z) \left[ (l_{y_0} - \Delta l_{y_0}) \text{rect} \left( \frac{x_0}{l_{x_0} + \Delta l_{x_0}} \right) \right] \bullet \left[ (l_{x_0} + \Delta l_{x_0}) \text{rect} \left( \frac{y_0}{l_{y_0} - \Delta l_{y_0}} \right) \right]. \quad (5.37)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.34) y (5.35) en la ecuación (5.37), se obtiene

$$t_0(x_0, y_0) = \left( l_z \left[ \frac{(1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0prin}}{(1-\eta)\Omega} \right] \right) \left( l_{y_0} \left( \frac{(1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0prin}}{(1-\eta)\Omega} \right) \right) \bullet \text{rect} \left( \frac{(1-\eta)\Omega x_0}{l_{x_0} \left( (1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0prin} (1+\eta)(1-2\eta) \right)} \right) \left[ \left( l_{x_0} \left( \frac{(1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0prin} (1+\eta)(1-2\eta)}{(1-\eta)\Omega} \right) \right) \text{rect} \left( \frac{(1-\eta)\Omega y_0}{l_{y_0} \left( (1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0prin} \right)} \right) \right]. \quad (5.38)$$

El espectro de difracción definido por la ecuación (2.30), requiere se determine la transformada de Fourier de la función de transmitancia ecuación (5.38); además de hacer uso del teorema de escalamiento, se obtiene,

$$\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} = l_z \left[ \frac{(1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0prin}}{(1-\eta)\Omega} \right] \bullet \left( l_{y_0} l_{x_0} \left( \frac{\left( (1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0prin} \right) \left( (1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0prin} (1+\eta)(1-2\eta) \right)}{\left( (1-\eta)\Omega \right)^2} \right) \right)^2 \bullet \sin c \left( \frac{(1-\eta)\Omega u}{l_{x_0} \left( (1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0prin} (1+\eta)(1-2\eta) \right)} \right) \bullet \left[ \sin c \left( \frac{(1-\eta)\Omega v}{l_{y_0} \left( (1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0prin} \right)} \right) \right]. \quad (5.39)$$

Ahora, el espectro de difracción de transformada exacta, cuando la fractura rectangular se somete a la acción de la fuerza de tensión  $\vec{F}_{x_0}$  de magnitud  $F_{x_0}$ , en términos del esfuerzo principal, de acuerdo con la ecuaciones (5.36) y (2.30), queda definido como:

$$\begin{aligned}
E_z(u, v) = & \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 l_z \left[ \frac{(1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0\text{prin}}}{(1-\eta)\Omega} \right] \bullet \\
& \left( l_{y_0} l_{x_0} \left( \frac{((1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x\text{prin}})((1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0\text{prin}}(1+\eta)(1-2\eta))}{((1-\eta)\Omega)^2} \right) \right)^2 \bullet \\
& \bullet \sin c \left( \frac{(1-\eta)\Omega u}{l_{x_0}((1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0\text{prin}}(1+\eta)(1-2\eta))} \right) \bullet \\
& \bullet \left[ \sin c \left( \frac{(1-\eta)\Omega v}{l_{y_0}((1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0\text{prin}})} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Mientras que el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, puede ser determinado, usando las ecuaciones (5.36) y (2.24) esto es,

$$\begin{aligned}
E_z(u, v) = & \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 l_z \left[ \frac{(1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0\text{prin}}}{(1-\eta)\Omega} \right] \bullet \\
& \left( l_{y_0} l_{x_0} \left( \frac{((1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x\text{prin}})((1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0\text{prin}}(1+\eta)(1-2\eta))}{((1-\eta)\Omega)^2} \right) \right)^2 \bullet \\
& \bullet \sin c \left( \frac{(1-\eta)\Omega u}{l_{x_0}((1-\eta)\Omega + \sigma_{x_0\text{prin}}(1+\eta)(1-2\eta))} \right) \bullet \\
& \bullet \left[ \sin c \left( \frac{(1-\eta)\Omega v}{l_{y_0}((1-\eta)\Omega - \eta\sigma_{x_0\text{prin}})} \right) \right] \otimes e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u^2+v^2)}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Para la validar la ecuación (5.41) en una etapa experimental, ha necesidad de definir la distribución de intensidad en términos de esta ecuación, es importante tener en cuenta que el esfuerzo principal de tensión generado sobre la abertura por la magnitud de la fuerza de tensión, así como los inducidos sean uniformes en todo el material en el que está construida la abertura referida. Además, se debe considerar que, mientras que la fractura se estira en la dirección del eje  $X_0$ ; al mismo tiempo se le debe de impedir de algún modo que no se produzca ninguna contracción lateral. Esto hace que el problema experimental, no sea tan sencillo de realizar.

## V. 6 OBJETO BAJO UNA FUERZA DE TENSIÓN

Continuando con la propuesta de uso del método óptico de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, como una técnica de ensayo destructivo de tenacidad a la fractura. Por lo que, el objetivo de esta sección, consiste en determinar la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada a una fractura o abertura, nuevamente en términos del esfuerzo mecánico bien sea de tensión  $\sigma$ , o de compresión  $-\sigma$ , bajo las condiciones que se documentan en el desarrollo siguiente:

Suponiendo que ahora la fractura o abertura de geometría rectangular de ancho  $l_{x0}$ , altura  $l_{y0}$ , y de espesor  $l_z$ , construida en lámina de aluminio de ancho  $L_1$ , altura  $L_2$  y  $l_z$  de espesor, que se muestra en la figura 4.3; y se implementa en el arreglo experimental de la figura 6.22 del capítulo VI, y cuando no existe fuerza aplicada sobre él, se le asocia la función de transmitancia definida por la ecuación (4.31). Ahora, considerando que la fractura referida se sujeta a una fuerza mecánica de tensión  $\vec{F}_{x0}$  ejercida por un agente externo, que actúa hacia el eje principal  $X_0$ , cuya magnitud  $F_{x0}$  se aumente gradual y lentamente, de tal manera que la fractura permanezca siempre en reposo. Mientras que las fuerzas  $\vec{F}_{y0}$  y  $\vec{F}_{z0}$  transversales a  $\vec{F}_{x0}$ , que actúan hacia los ejes  $Y_0, Z_0$ , tienen magnitud igual a cero, es decir  $|\vec{F}_{y0}| = 0$ ,  $|\vec{F}_{z0}| = 0$ . Bajo estas consideraciones solo existe la deformación principal, mientras que las otras son inducidas definidas por las ecuaciones (5.19) (Askeland y Phulé, 2008; Beer *et al*, 2004; Feynman *et al*, 1997). Además la función de transmitancia bajo estas deformaciones, queda escrita como se muestra en la ecuación (5.37) y al sustituir en esta ecuación, las ecuaciones (5.20), se obtiene

$$t_0(x_0, y_0) = \left( l_z \left( \frac{\Omega - \eta \sigma_{x0 \text{ prin}}}{\Omega} \right) \right) \left( l_{y0} \left( \frac{\Omega - \eta \sigma_{x0 \text{ prin}}}{\Omega} \right) \right) \bullet \quad (5.42)$$

$$\bullet \text{rect} \left( \frac{\Omega x_0}{l_{x0} (\Omega + \sigma_{x0 \text{ prin}})} \right) \left[ \left( l_{x0} \left( \frac{\Omega + \sigma_{x0 \text{ prin}}}{\Omega} \right) \right) \text{rect} \left( \frac{\Omega x_0}{l_{y0} (\Omega - \eta \sigma_{x0 \text{ prin}})} \right) \right].$$

La transformada de Fourier de la función de la ecuación (5.36); además de hacer uso del teorema de escalamiento, se obtiene,

$$\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} = \left( l_z \left( \frac{\Omega - \eta \sigma_{x0 \text{ prin}}}{\Omega} \right) \right) \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega - \eta \sigma_{x0 \text{ prin}})(\Omega + \sigma_{x0 \text{ prin}})}{\Omega^2} \right) \right)^2 \bullet \quad (5.43)$$

$$\bullet \sin c \left( \frac{l_{x0} (\Omega + \sigma_{x0 \text{ prin}}) u}{\Omega} \right) \left[ \sin c \left( \frac{l_{x0} (\Omega - \eta \sigma_{x0 \text{ prin}}) v}{\Omega} \right) \right].$$

Luego, cuando la fractura rectangular se somete a la acción de la fuerza de tensión  $\vec{F}_{x0}$  de magnitud  $F_{x0}$ , mientras que las magnitudes de las fuerzas transversales a la referida son cero, o sea  $|\vec{F}_{y0}| = 0N$ ,  $|\vec{F}_z| = 0N$ , el espectro de difracción de transformada exacta dado por la ecuación (2.30), de acuerdo con la ecuación (5.41) queda definido en la forma

$$\begin{aligned}
 E_z(u, v) = & \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 \left( l_z \left( \frac{\Omega - \eta\sigma_{x0prin}}{\Omega} \right) \right) \bullet \\
 & \bullet \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega - \eta\sigma_{xprin})(\Omega + \sigma_{x0prin})}{\Omega^2} \right) \right)^2 \bullet \\
 & \bullet \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})u}{\Omega} \right) \left[ \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega - \eta\sigma_{xprin})v}{\Omega} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Luego, la intensidad es,

$$\begin{aligned}
 I_z(u, v) = & \left( \frac{E_0 l_z}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \left( \frac{\Omega - \eta\sigma_{x0prin}}{\Omega} \right)^2 \bullet \\
 & \bullet \left( l_{y0} l_{x0} \right)^2 \left( \frac{(\Omega - \eta\sigma_{xprin})(\Omega + \sigma_{x0prin})}{\Omega^2} \right)^4 \bullet \\
 & \bullet \sin^2 c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})u}{\Omega} \right) \left[ \sin^2 c \left( \frac{l_{x0}(\Omega - \eta\sigma_{xprin})v}{\Omega} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Para comprender qué tanto se deforma el espectro, hace falta graficar la ecuación (5.45), usando un paquete adecuado; la otra forma, es realizar una etapa experimental, como se demuestra en la sección VI.18 del siguiente capítulo.

La misma ecuación (5.44), el teorema de convolución (A-9) y la propiedad conmutativa de ésta (A-11), permite escribir el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier como

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega - v\sigma_{x0prin})(\Omega + \sigma_{x0prin})}{\Omega^2} \right) \right)^2 \bullet \\
 & \bullet \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)} \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})(u - \beta)}{\Omega} \right) d\beta \bullet \\
 & \bullet \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\gamma^2)} \sin c \left( \frac{l_{y0}(\Omega - v\sigma_{x0prin})(v - \gamma)}{\Omega} \right) d\gamma.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Realizando una secuencia de integración similar a la desarrollada en la sección IV.2, permite determinar las operaciones integrales en la ecuación (5.46), esto es,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\beta^2)} \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})(u - \beta)}{\Omega} \right) d\beta = \\
 & \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})u}{\Omega} \right),
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

también

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(\gamma^2)} \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})(v - \gamma)}{\Omega} \right) d\gamma = \\
 & \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \sin c \left( \frac{l_{y0}(\Omega - v\sigma_{x0prin})v}{\Omega} \right).
 \end{aligned} \tag{5.48}$$



Sustituyendo las ecuaciones (5.47) y (5.48) en la ecuación (5.46) se obtiene

$$\begin{aligned}
 G_z(u, v) = & \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega - v\sigma_{xprin})(\Omega + \sigma_{x0prin})}{\Omega^2} \right) \right)^2 \bullet \\
 & \bullet \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})u}{\Omega} \right) \bullet \\
 & \bullet \left( \frac{2}{\sqrt{i}} \right) \left( \sqrt{\frac{(f_{LD} - z)}{\lambda f_{LD}^2}} \right) \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0prin})v}{\Omega} \right). \tag{5.49}
 \end{aligned}$$

Luego, para obtener evidencia experimental de las ecuaciones (5.46) y (5.49), es importante recordar que, cuando la abertura rectangular se somete a la acción de la fuerza mecánica de tensión  $\vec{F}_{x0}$  de magnitud  $F_{x0}$ , y las fuerzas transversales a ésta son de magnitud cero, esto

es  $\left| \vec{F}_{y0} \right| = 0N$ ,  $\left| \vec{F}_z \right| = 0N$ . La abertura referida sufre deformación principal e inducida:

estos aspectos deben de vigilarse en la etapa experimental; además de que se requiere un extensómetro y la sensibilidad del medidor de fuerza. Todo lo propuesto en esta sección, asegura que el método de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, sea más viable de implementar en una etapa experimental, y cumplir como una técnica de evaluación destructiva.

## V. 7 ESPECTRO DE DIFRACCIÓN Y EL ESFUERZO TÉRMICO

Como se estableció en la sección (IV.4), los cambios de temperatura  $\Delta\tau$  en un cuerpo sólido, elástico e isotrópico, produce deformaciones de expansión o de contracción. Suponiendo ahora que, se implementa una abertura de geometría rectangular, como la ilustrada en la figura 4.1a, de una manera similar como se describe el arreglo experimental de la figura 6.22, ver capítulo VI. A la abertura se le hace transferencia de calor, y para evitar deformaciones térmicas  $\Delta l_{x0\tau}$ , se sujetan ambos lados de su ancho orientados en el eje  $X_0$ , colocándolos entre soportes mecánicos. De manera similar se sujeta en ambos lados de su altura, orientada hacia el eje  $Y_0$ , colocándolos en otro soporte mecánico, para evitar la deformación térmica  $\Delta l_{y0\tau}$  en esa dirección. La fractura rectangular en condiciones iniciales de deformación mecánica y sin transferencia de calor, esto último implica que su temperatura no varío, entonces  $\Delta\tau = 0^\circ C$ . La abertura (fractura) referida posee las dimensiones iniciales siguientes: ancho  $l_{x0}$ , altura  $l_{y0}$ , y espesor  $l_z$ , está construida en lámina de aluminio de ancho  $L_1$ , altura  $L_2$  y  $l_z$  de espesor. En este caso, se le asocia a la transmitancia la función de rectángulo  $t_0(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right)$ , cuya gráfica se muestra en la figura 4.6. La representación matemática de esta función de transmitancia para este caso, quedó definida en la ecuación (5.31), cuando no está sujeta a transferencia de calor (Papuolis, 1968; Gaskill, 1978; Yu, 1983; Bracewel, 2002; Goodman, 2005).

La abertura rectangular referida, bajo transferencia de calor aumenta su temperatura en la cantidad  $\Delta\tau$ ; y como están sujetos entre soportes su ancho y su altura en las direcciones de los ejes  $X_0$ ,  $Y_0$  respectivamente, entonces existen deformaciones térmicas  $\Delta l_{x0\tau}$  y  $\Delta l_{y0\tau}$ ; que permite escribir la función de transmitancia como

$$t_0(x_0, y_0) = (l_{y0} + \Delta l_{y0\tau}) \text{rect}\left(\frac{x_0}{l_{x0} + \Delta l_{x0\tau}}\right) \left[ (l_{x0} + \Delta l_{x0\tau}) \text{rect}\left(\frac{y_0}{l_{y0} + \Delta l_{y0\tau}}\right) \right]. \quad (5.50)$$

En término del esfuerzo térmico, la función de transmitancia de la ecuación (5.50), de acuerdo a las ecuaciones (5.29) es,

$$t_0(x_0, y_0) = \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \sigma_{z0\tau}}{\Omega} \right] \right) l_{y0} \left( \frac{\Omega + \sigma_{y0\tau}}{\Omega} \right) \text{rect}\left(\frac{\Omega x_0}{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0\tau})}\right) \cdot \left[ l_{x0} \left( \frac{\Omega + \sigma_{x0\tau}}{\Omega} \right) \text{rect}\left(\frac{\Omega y_0}{l_{y0}(\Omega + \sigma_{y0\tau})}\right) \right]. \quad (5.51)$$

La transformada de Fourier de la ecuación (5.51) se determina haciendo uso del teorema de escalamiento (A-8), obteniendo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{t_0(x_0, y_0)\} &= \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \sigma_{z0\tau}}{\Omega} \right] \right) \left( l_{x0} l_{y0} \left( \frac{(\Omega + \sigma_{y0\tau})(\Omega + \sigma_{x0\tau})}{\Omega^2} \right) \right) \bullet \\ &\sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0\tau})}{\Omega} u \right) \sin c \left( \frac{l_{y0}(\Omega + \sigma_{y0\tau})}{\Omega} v \right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ahora el espectro de difracción de transformada de Fourier exacta, cuando la fractura rectangular está sujeta a variación de su temperatura  $\Delta\tau$ , como consecuencia de transferencia de calor hacia ella, queda definido de acuerdo a las ecuaciones (3.29) y (5.52) como

$$\begin{aligned} E_z(u, v) &= \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \sigma_{z0\tau}}{\Omega} \right] \right) \bullet \\ &\bullet \left( l_{x0} l_{y0} \left( \frac{(\Omega + \sigma_{y0\tau})(\Omega + \sigma_{x0\tau})}{\Omega^2} \right) \right) \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0\tau})}{\Omega} u \right) \sin c \left( \frac{l_{y0}(\Omega + \sigma_{y0\tau})}{\Omega} v \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Para el caso del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se define en base a las ecuaciones (5.40) y (5.53) en la forma

$$\begin{aligned} G_z(u, v) &= \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \sigma_{z0\tau}}{\Omega} \right] \right) \bullet \\ &\bullet \left( l_{x0} l_{y0} \left( \frac{(\Omega + \sigma_{y0\tau})(\Omega + \sigma_{x0\tau})}{\Omega^2} \right) \right) \bullet \sin c \left( \frac{l_{x0}(\Omega + \sigma_{x0\tau})}{\Omega} u \right) \bullet \\ &\bullet \sin c \left( \frac{l_{y0}(\Omega + \sigma_{y0\tau})}{\Omega} v \right) \otimes e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Los modelos de espectros de difracción definidos por las ecuaciones (5.52) y (5.54), pueden ser verificados en una etapa experimental; para esto, es importante recalcar que los extremos que componen el ancho y la altura de la fractura, deben colocarse entre soportes que eviten se deformen térmicamente.

## V.8 OBJETO SOMETIDO SIMULTÁNEAMENTE A ESFUERZO TÉRMICO Y MECÁNICO

Para este caso, se supone que la lámina que contiene la abertura rectangular, descrita en la sección V.5, a la cual se le asoció la función de transmitancia, cuando no está el objeto sometido tanto a fuerza de tensión ni a transferencia de calor, definida por la ecuación (5.33). Ahora, bajo la propuesta de que la lámina que contiene la abertura rectangular referida, se somete de manera simultánea a la acción de una fuerza de tensión que actúa como se describe en la sección VI; además al mismo tiempo se le hace transferencia de calor, que le propicia un aumento de temperatura y dilatación en sus dimensiones, como se documenta en la sección V.7. Bajo estas condiciones y al ser implementada en un arreglo óptico experimental como el descrito en la figura (6.22), al cual se le agregue la fuente térmica, el análisis teórico de su transmitancia y la distribución del espectro de difracción, se establece como sigue: La función de transmitancia asociada a la abertura rectangular, bajo la acción simultánea de la fuerza mecánica de tensión y el esfuerzo térmico puede ser escrita en términos de las ecuaciones (5.20) y (5.31) en la forma siguiente,

$$\begin{aligned}
 t_0(x_0, y_0) &= \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \Omega^2 \sigma_{z\tau 1} - \eta \sigma_{xprin}}{\Omega} \right] \right) \bullet \\
 &\bullet \left( l_{y0} \left( \frac{\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}}{\Omega} \right) \right) \text{rect} \left( \frac{\Omega x_0}{l_{x0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin})} \right) \bullet \\
 &\bullet \left[ \left( l_{x0} \left( \frac{\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}}{\Omega} \right) \right) \text{rect} \left( \frac{\Omega y_0}{l_{y0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin})} \right) \right] \bullet
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

La transformada de Fourier de la ecuación (5.54) de acuerdo al teorema de escalamiento (A-8), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} &= \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \Omega^2 \sigma_{z\tau 1} - \eta \sigma_{xprin}}{\Omega} \right] \right) \bullet \\
 &\bullet \left( l_{x0} l_{y0} \left( \frac{[\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}](\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin})}{\Omega^2} \right) \right) \bullet \\
 &\bullet \sin c \left( \frac{l_{x0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}) u}{\Omega} \right) \bullet \\
 &\bullet \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin})(\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin})}{\Omega^2} \right) \right) \bullet \\
 &\bullet \sin c \left( \frac{l_{y0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}) v}{\Omega} \right) \bullet
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Entonces la distribución de amplitud compleja en el plano de transformada exacta o de Fraunhofer queda descrito mediante la ecuación

$$\begin{aligned}
E_z(u, v) = & \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \Omega^2 \sigma_{z\tau 1} - \nu \sigma_{xprin}}{\Omega} \right] \right) \bullet \\
& \bullet \left( l_{x0} l_{y0} \left( \frac{[\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}][\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}]}{\Omega^2} \right) \right) \bullet \\
& \bullet \sin c \left( \frac{l_{x0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}) u}{\Omega} \right) \bullet \\
& \bullet \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin})(\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin})}{\eta^2} \right) \right) \bullet \\
& \bullet \sin c \left( \frac{l_{y0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}) v}{\Omega} \right).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Mientras que la intensidad del espectro de transformada exacta será

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left( \frac{E_0}{i\lambda f_{LD}} \right)^2 \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \Omega^2 \sigma_{z\tau 1} - \eta \sigma_{xprin}}{\Omega} \right] \right)^2 \bullet \\
& \bullet \left( l_{x0} l_{y0} \left( \frac{[\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}][\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}]}{\Omega^2} \right) \right)^2 \bullet \\
& \bullet \sin^2 c \left( \frac{l_{x0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}) u}{\Omega} \right) \bullet \\
& \bullet \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin})(\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin})}{G^2} \right) \right)^2 \bullet \\
& \bullet \sin^2 c \left( \frac{l_{y0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}) v}{\Omega} \right).
\end{aligned} \tag{5.58}$$

En tanto que el espectro de convolución de transformadas de Fourier, se determina con la ecuación siguiente

$$\begin{aligned}
G_z(u, v) = & \frac{e^{ik[2f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} E_0 \left( l_z \left[ \frac{\Omega + \Omega^2 \sigma_{z\tau 1} - \eta \sigma_{xprin}}{\Omega} \right] \right) \bullet \\
& \bullet \left( l_{x0} l_{y0} \left( \frac{[\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}][\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}]}{G^2} \right) \right) \bullet \\
& \bullet \sin c \left( \frac{l_{x0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin}) u}{\Omega} \right) \bullet \\
& \bullet \left( l_{y0} l_{x0} \left( \frac{(\Omega + \Omega^2 \sigma_{x0\tau 1} + \eta \sigma_{x0prin})(\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin})}{\Omega^2} \right) \right) \bullet \\
& \bullet \sin c \left( \frac{l_{y0} (\Omega + \Omega^2 \sigma_{y0\tau 1} - \eta \sigma_{x0prin}) v}{\Omega} \right) \otimes e^{-\frac{i\pi\lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} .
\end{aligned} \tag{5.59}$$

De acuerdo a lo desarrollado en esta sección, se sugiere una etapa experimental, considerando que la abertura difractora esté sujeta a las condiciones aquí estipuladas para corroborar la información teórica descrita.

## V.9 CONCLUSIONES

Los diferentes planteamientos presentados a través del desarrollo de este capítulo, han permitido lograr los objetivos, uno de los cuales fue, determinar la función transmitancia asociada al objeto difractor, en término del esfuerzo mecánico, así como en términos del esfuerzo térmico, las cuales se considerarán como nuevas funciones de transmitancia. Además de generar otra nueva función de transmitancia considerando que la abertura está sometida simultáneamente tanto al esfuerzo mecánico como al térmico; lo cual se logró de acuerdo a las ecuaciones (5.38) y (5.42) y (5.50) respectivamente. Conjuntamente con estos resultados, también se generan los nuevos modelos de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier; aunque, el tratamiento fue realizado considerando solo la función rectángulo como función de transmitancia asociada a una abertura rectangular, se puede generalizar el tratamiento a otro tipo de aberturas con geometrías diferentes a la descrita. Un aspecto que resalta en este desarrollo, es de la propuesta para una etapa experimental, referente a los casos de aplicar una fuerza de tensión con las siguientes variantes; que al objeto se le impida que se contraiga en forma lateral o perpendicular a la fuerza aplicada; así como el caso en el que no se impida la contracción lateral o perpendicular a la fuerza aplicada. Otra de las propuestas, consiste en aplicar una fuerza de compresión, en una sola dirección y realizar los aspectos antes comentados, para evitar la expansión perpendicular a la fuerza de compresión aplicada.

## CAPÍTULO VI

### DESARROLLO EXPERIMENTAL

#### INTRODUCCIÓN

Se utilizan espectros de frecuencia espacial o patrones de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, para estudiar a través de las franjas de interferencia que los definen, forma, deformación y variaciones en tamaño y espesor, de aberturas no sujetas a fuerza de tensión, e implementadas en el plano objeto  $X_0Y_0$  (6), en el arreglo experimental de la figura 6.1a como objetos difractores. Las aberturas están producidas en material laminado de acero, aluminio y baquelita, con diferentes dimensiones lineales y espesor. También se presentan aspectos sobresalientes de la deformación de franjas de interferencia que definen cada espectro de difracción, como consecuencia de someter la lámina que contiene la abertura bajo estudio, a la acción de una fuerza mecánica de magnitud  $\left| \vec{F}_{x_0} \right|$ , que le produce el esfuerzo mecánico  $\sigma_x$ . La fuerza aplicada actúa solo en la dirección del eje  $X_0$ .

#### VI.1 ARREGLO EXPERIMENTAL

En el arreglo experimental de la figura 6.1a, se usa una fuente de luz láser, que emite un haz de 20mw de potencia y longitud de onda ( $\lambda = 632.8nm$ ) proveniente de la cavidad (1), es propagado través de atenuador de intensidad de densidad variable (2); se cambia su trayectoria de propagación, reflejándolo en el espejo plano (3); es ampliado y filtrado de ruido óptico en (4) usando una lente objetivo de microscopio 40X y una abertura circular o pinhole de  $15\mu m$  de diámetro, generando de esta manera ondas monocromáticas esféricas divergentes, las cuales son colimadas usando la lente doblete acromática cementada (4) de distancia focal  $f_c=30cm$ . Las ondas monocromáticas planas iluminan el objeto difractor, abertura (5) bajo estudio. El campo o el espectro de ondas difractadas por el objeto referido, se propaga hasta incidir en la lente doblete cementada o transformadora (6) de distancia focal  $f_{LD}=25cm$ , dicha lente a su vez, los propaga hasta el plano (7) donde se distribuyen en intensidad, que es monitoreada con un sistema opto-electrónico compuesto por una cámara CCD, software y PC. Una mejor interpretación de la forma en que están implementados los componentes en el arreglo de la figura 6.1a, se ilustra en la figura 6.1b.

#### VI.2 DESCRIPCIÓN DE ABERTURAS ESTUDIADAS.

Se sometió a estudio dieciséis tipos de aberturas con diferentes geometrías, a las que en lo sucesivo también denominaremos objetos difractores. Seis de ellas poseen geometría rectangular cuyas dimensiones lineales se detallan en la tabla 6.1; están construidas en láminas de aluminio del grupo 1100, cuyas imágenes (A, B, C, D, E, F) se ilustran en la figura 6.2. Respecto al aluminio del grupo 1100 con pureza de 99.0%, es una aleación comúnmente usada para fabricación de lámina, utensilios, envases entre otros; pertenece a la familia de las aleaciones no tratables térmicamente, o sea aquellas que requieren un trabajo mecánico en frío para obtener sus propiedades de dureza y resistencia a la

corrosión. En tanto que, las imágenes 6.2 G y H, son las de dos y diez aberturas cilíndricas, producidas en lámina de baquelita.

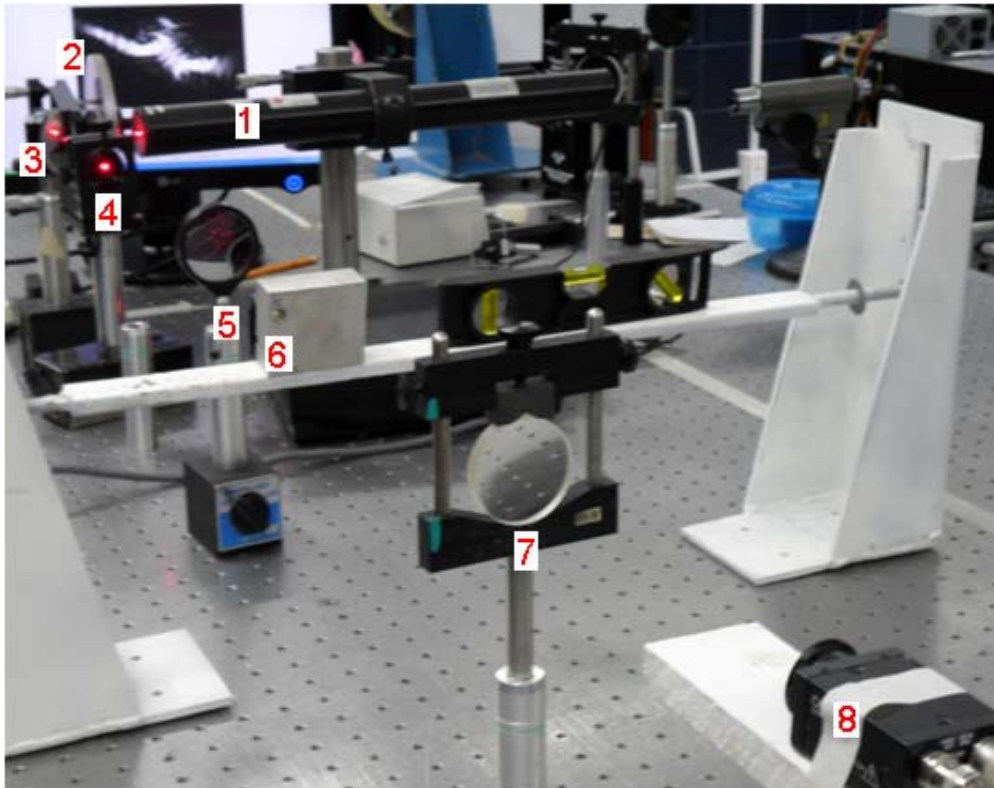


Figura 6.1a Arreglo experimental para estudiar aberturas sin fuerza de tensión aplicada: (1) láser de He-Ne, (2) atenuador de intensidad, (3) espejo plano, (4) filtro espacial, (5) colimador, (6) objeto bajo estudio, (7) lente transformadora, (8) cámara CCD conectada a una PC.

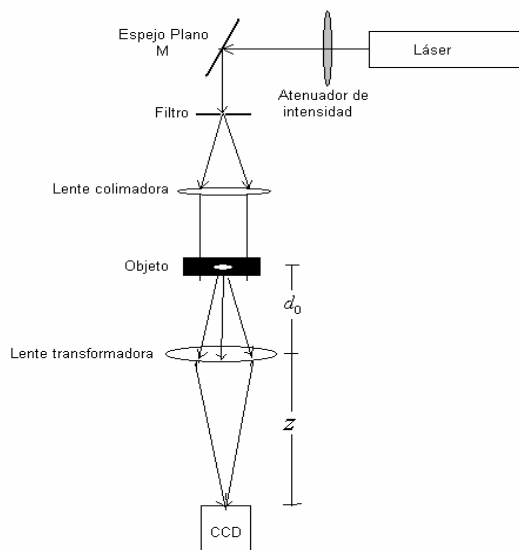


Figura 6.1b Esquema en que están dispuestos los componentes en la imagen de la figura 6.1a



Un grupo más de aberturas cilíndricas estudiadas son mostradas en las imágenes I, J, K, L de la figura 6.3, fueron construidas de manera comercial (en taller de torno) y en láminas de aluminio 6061 de diferente espesor cuyas magnitudes de acuerdo a las imágenes antes refridas, son  $l_z=22.0\text{mm}$ ,  $13.0\text{mm}$ ,  $6.0\text{mm}$  y  $2.0\text{mm}$ , cuyas partes circulares poseen un diámetro de  $1/16''$ , tales magnitudes se ratifican en la tabla 6.1. Cabe recordar que la abertura que cumple con el concepto de ser delgada es la que posee el espesor  $l_z=2.0\text{mm}$ ; mientras que las restantes son gruesas, y como consecuencia los espectros de difracción que ellas producen, no pueden ser explicados con los aspectos teóricos desarrollados en los capítulos II, III, y IV. Ahora, respecto al aluminio 6061, se considera como un material ligero, catalogado como una aleación no ferrosa, que contiene 1% de manganeso, 0.6% de silicio. Tiene propiedades a la tensión con una resistencia a ésta de  $45,000\text{psi}$ , relativamente baja comparada con la del acero. El aluminio 6061 suele presentar un límite de resistencia a la fatiga bien definido, es decir, un esfuerzo de fluencia de  $40,000\text{psi}$ , pero la falla puede ocurrir aún a esfuerzos más bajos. Las aleaciones de aluminio 6061 debido a su bajo punto de fusión, no se comportan bien a temperaturas elevadas, tiene escasa dureza, lo que origina poca resistencia al desgaste abrasivo en muchas condiciones de uso (Askeland y Phulé, 2008).

Otras aberturas estudiadas como la que se muestra en la figura 6.4M, la cual da referencia de su geometría hexagonal, producida en lámina de acero con recubrimiento de película de pintura mate. Mientras que las imágenes 6.4N, Ñ, O muestran las aberturas bajo estudio, producidas por corrosión y oxidación, en lámina de acero con recubrimiento de zinc o galvanizada. Para la fabricación de este tipo de lámina, se utiliza acero SAE1010 obtenido por el proceso de laminación en frío; de altura máxima  $1.83\text{m}$  y de  $10.50\text{m}$  de ancho. El recubrimiento de zinc metálico de alta pureza, es aplicado en un proceso continuo por inmersión en caliente con una capa G-90 equivalente a un mínimo de  $0.0275\text{ kg/m}^2$  por ambas caras de la lámina. Mediante este proceso de galvanizado se obtiene una solución efectiva contra la corrosión debido a que suministra una protección catódica, que evita el ataque al acero por las partículas del medio ambiente (<http://www.losacero.com.mx>). Cabe aclarar que las aberturas (fracturas) de las imágenes N y Ñ están contenidas en el mismo tramo de lámina, obviamente en zonas diferentes. Por otro lado, el proceso de corrosión consiste en el deterioro de un material metálico debido a una reacción con productos químicos presentes en el entorno. La corrosión electroquímica es la forma más común de ataque a los metales, se presenta cuando los átomos del metal pierden electrones y se convierten en iones; conforme el metal se consume gradualmente mediante este proceso, se forma normalmente un subproducto del proceso de corrosión (Askeland y Phulé, 2008).

### **VI.3 ESTUDIO DE ESPECTROS DE DIFRACCIÓN DE TRANSFORMADA EXACTA DE FOURIER**

Cada abertura de la figuras 6.2, 6.3 y 6.4 usadas como objeto difractor, fue implementada en el plano objeto (6) como se muestra en el arreglo experimental de la figura 6.1a, con su parte horizontal paralela al eje de coordenadas  $X_0$ , mientras su altura quedó orientada hacia el eje  $Y_0$  en el plano objeto  $X_0Y_0$ , y a la distancia focal frontal de la lente doblete acromática cementada usada como transformadora, es decir,  $d_0=f_{LD}=25\text{cm}$ , como se predice en la teoría del capítulo III y IV. Es importante recalcar que los objetos fueron iluminados con

ondas planas, y que en esta primera etapa experimental, no se les aplicó fuerza mecánica de tensión de forma externa, solo fueron sujetadas.

Las imágenes de la figura 6.5a, b, c, d, e, f, g, h, dan referencia de los espectros de difracción de transformada exacta de Fourier, producidos usando como objetos difractores, los que se muestran en la figura 6.2. Mientras que las imágenes de la figura 6.6i, j, k, l, muestran los espectros de transformada exacta de Fourier, usando los objetos descritos en la figura 6.3. En tanto que, los espectros también de transformada exacta de Fourier que se muestran en las figuras 6.7m, n, ñ, o, fueron obtenidos usando las aberturas de la figura 6.4. Cada imagen fueron grabadas a la distancia  $z$  de la lente transformadora, que es igual a la distancia focal posterior  $f_{LD}$  de la lente referida, es decir  $f_{LD} = z = 25\text{cm}$  como se predice también en los aspectos teóricos del capítulo III y IV. El grabado de cada imagen, fue realizado usando el método de fotografía, con cámara electrónica digital CCD tipo Sony, software y PC. Las imágenes referidas fueron procesadas digitalmente en una PC y se obtuvieron en un formato JPG para ser manipuladas en documentos Word.

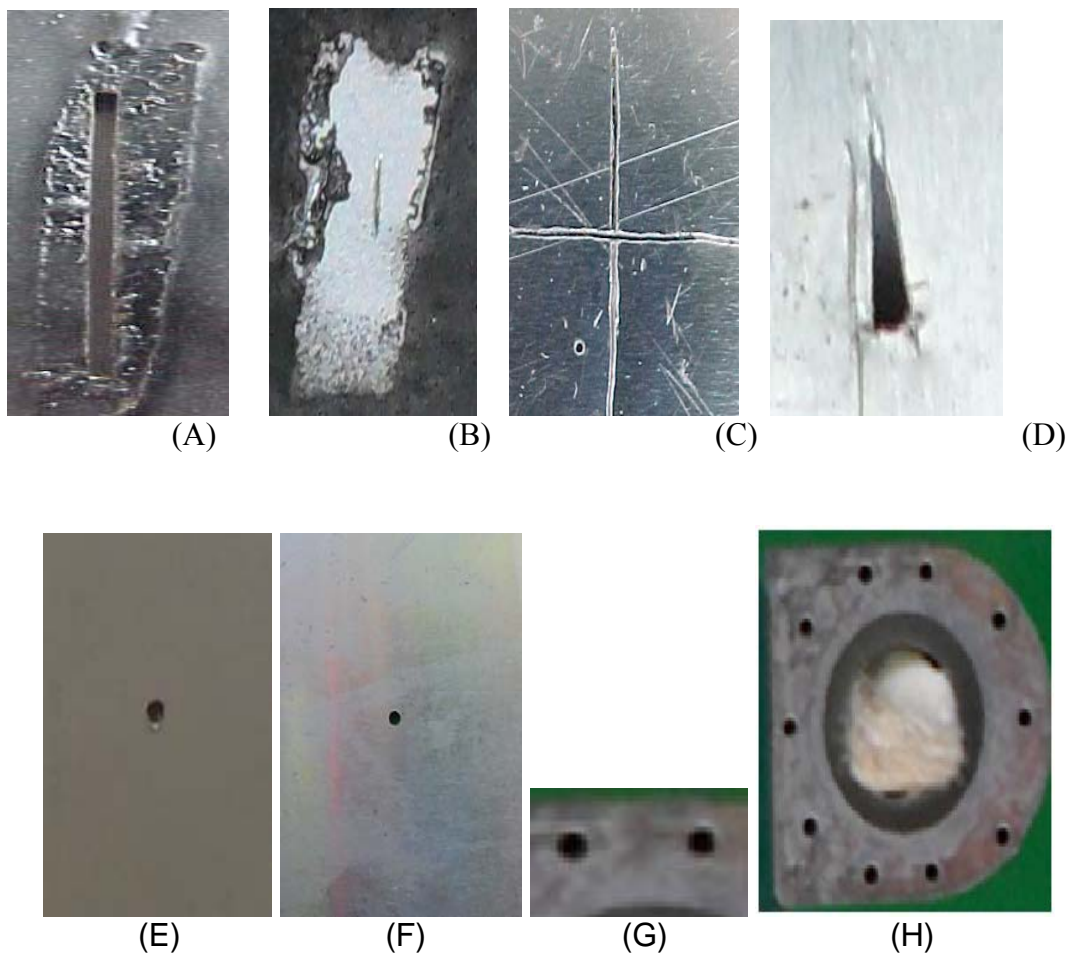


Figura 6.2. Aberturas construidas en láminas de aluminio del grupo 1100 y baquelita

#### VI.4 ANÁLISIS DE IMÁGENES DE PATRONES DE DIFRACCIÓN DE TRANSFORMADA EXACTA

En base a la imagen de la figura 6.5a en la que el espectro de difracción de transformada exacta, está mejor definido y distribuido hacia el eje de frecuencias espaciales  $v$ , y como consecuencia solo se le puede asociar a la transmitancia una función rectángulo unidimensional definida en la forma  $t_0(x_0, y_0) = \text{rect}(y_0/l_y)$ . Además debido al espesor  $l_z = 0.5\text{mm}$  de la lámina en la que está construida la abertura referida, el resultado del espectro de difracción aquí obtenido, presenta una distribución de intensidad muy parecida a los reportados en teoría de difracción clásica, en la que se hace uso de objetos rectangulares de espesor casi cero (Goodman, 2005; Hecht y Zajac, 1998; Yu, 1983). Por lo que respecta al espectro 6.5b, demuestra que, cuando la abertura rectangular poseen anchos y alturas en las direcciones de las eje  $X_0, Y_0$ , de menor magnitud que en el caso anterior, la distribución del espectro en intensidad se ensancha y queda mejor definido, en ambas direcciones del espacio de frecuencias espaciales  $u$  y  $v$ . La información respecto a la forma de la abertura, usando los máximos o los secundarios centrales, no definen apropiadamente su forma geométrica en estos casos.

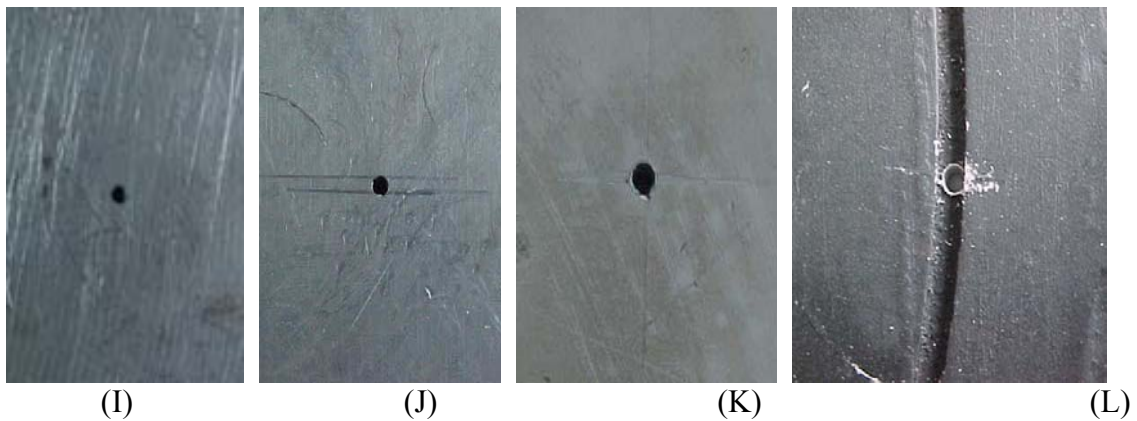


Figura 6.3. Aberturas construidas en láminas de aluminio 6061

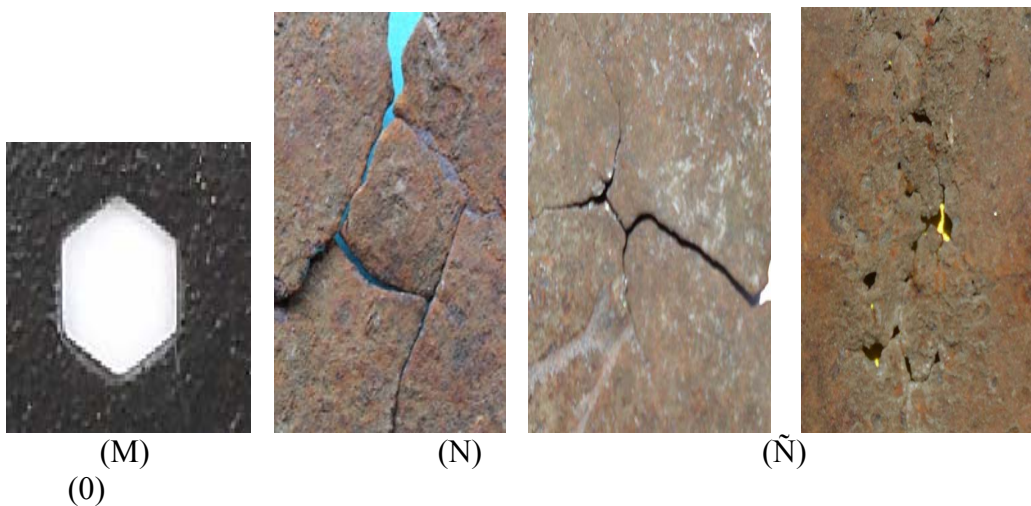


Figura 6.4. Aberturas construidas en láminas de acero

<b>Objetos o Fracturas y número</b>	<b>Material</b>	<b>Geometría</b>	<b>Ancho (mm)</b>	<b>Altura (mm)</b>	<b>Espesor (mm)</b>	<b>Diámetro (mm)</b>
<b>A</b>	<b>Aluminio grupo 1100</b>	<b>Rectangular</b>	<b>0.5</b>	<b>15.0</b>	<b>0.5</b>	<b>-----</b>
<b>B</b>	<b>Aluminio grupo 1100</b>	<b>Rectangular</b>	<b>0.25</b>	<b>3.0</b>	<b>0.5</b>	<b>-----</b>
<b>C</b>	<b>Aluminio grupo 1100</b>	<b>Rectangular y circular</b>	<b>0.25; 0.25</b>	<b>9.0; 10.0</b>	<b>0.5; 0.5</b>	<b>0.5</b>
<b>D</b>	<b>Aluminio grupo 1100</b>	<b>Triangular</b>	<b>1.0</b>	<b>3.0</b>	<b>0.5</b>	<b>-----</b>
<b>E</b>	<b>Aluminio grupo 1100</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>1.0</b>	<b>2.0</b>
<b>F</b>	<b>Aluminio grupo 1100</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>0.5</b>	<b>2.0</b>
<b>G, dos</b>	<b>Baquelita</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>2.0</b>	<b>0.25, c/una</b>
<b>H, diez</b>	<b>Baquelita</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>2.0</b>	<b>0.25 c/una</b>
<b>I</b>	<b>Aluminio 6061</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>22.0</b>	<b>2.0</b>
<b>J</b>	<b>Aluminio 6061</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>13.0</b>	<b>2.0</b>
<b>K</b>	<b>Aluminio 6061</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>6.0</b>	<b>2.0</b>
<b>L</b>	<b>Aluminio 6061</b>	<b>Cilíndrica</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>2.0</b>	<b>2.0</b>
<b>M</b>	<b>Acero con película de zinc y negro mate</b>	<b>Hexagonal</b>	<b>3.0mm por lado</b>	<b>5.0</b>	<b>1.0</b>	<b>-----</b>
<b>N</b>	<b>Acero con película de zinc</b>	<b>De geometría variable</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>0.5</b>	<b>-----</b>
<b>Ñ</b>	<b>Acero con película de zinc</b>	<b>De geometría variable</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>0.5</b>	<b>-----</b>
<b>O</b>	<b>Acero con película de zinc</b>	<b>De geometría variable</b>	<b>-----</b>	<b>-----</b>	<b>0.5</b>	<b>-----</b>

Tabla 6.1 Características y dimensiones lineales de aberturas referidas en las imágenes 6.2, 6.3 y 6.4.

Ahora cuando la geometría de la abertura es variable e irregular y además existe en forma separada en la lámina de aluminio que las contiene, como lo ilustra la imagen de la figura 6.3C; el espectro de difracción de transformada exacta total, es superpuesto en el plano de Fraunhofer, a causa de que cada parte geométrica de la abertura, produce su propio espectro de frecuencia espacial, esto implica que al superponerse, produzcan una distribución de intensidad, que no puede ser interpretada por una función correctamente definida; además tampoco permite investigar la forma geométrica de las aberturas, como lo demuestra la imagen del espectro de transformada exacta referido, ver imágenes en la figura 6.5c, que corroboran lo expuesto

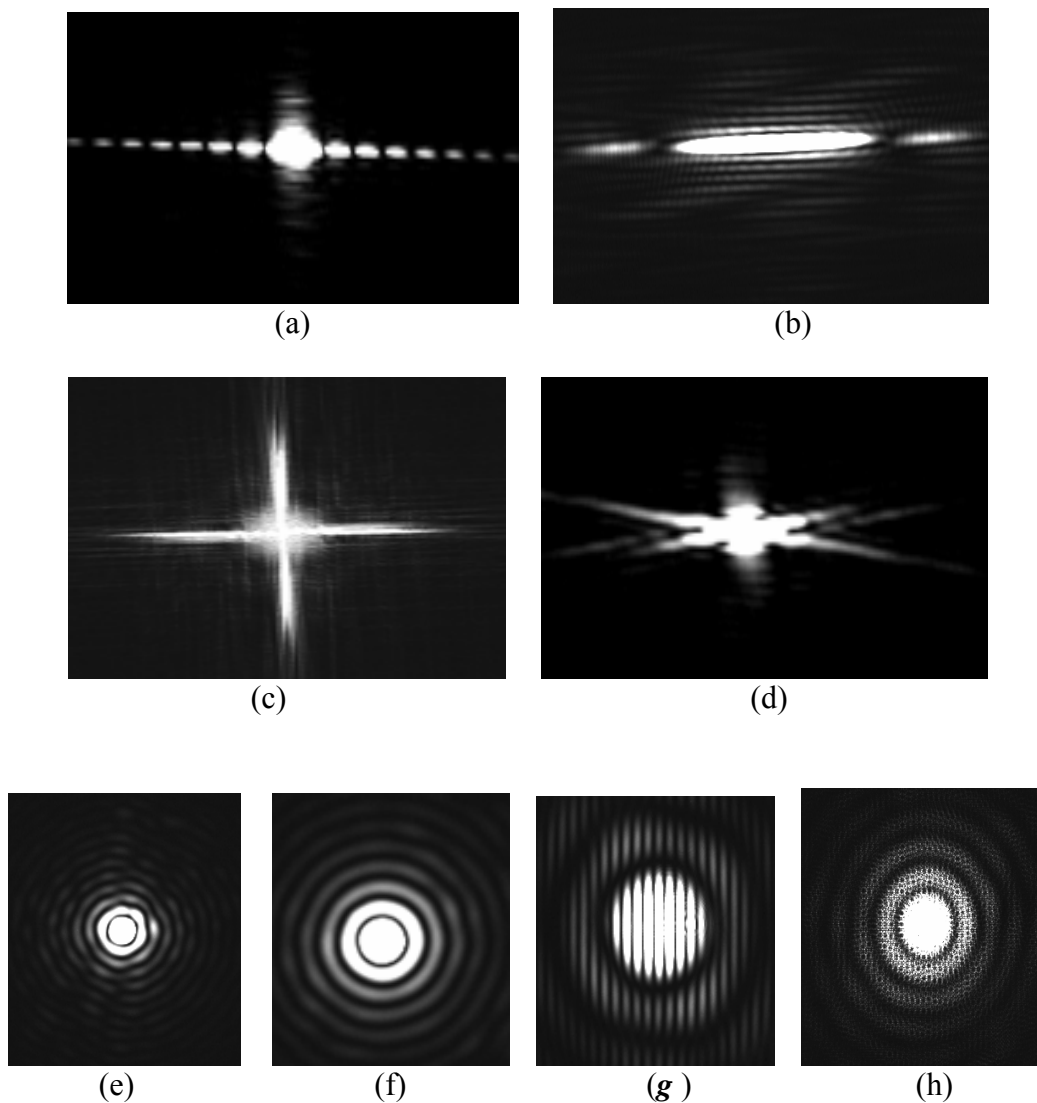


Figura 6.5. Espectros de transformada exacta de Fourier, de aberturas 6.2

En lo que respecta a la imagen del espectro de frecuencias espaciales o patrón de difracción de transformada exacta de la figura 6.5d, se ve que su distribución de intensidad, es propia de este tipo de aberturas como lo documentaron (Hecht y Zajac, 1998, Malacara, 2004). Pero en el plano de Fraunhofer, la distribución del espectro referido, no propicia una identificación clara de la geometría de la abertura que se estudia; ya que la distribución de intensidad del espectro, parece indicar la existencia de aberturas rectangulares, y no en forma triangular como lo demuestra la figura 6.3D. También se observa que en la imagen del espectro de difracción que se documenta, no existen máximos y mínimos de interferencia bien definidos, debido posiblemente a que las partes geométricas que definen la abertura tienden a estar separadas entre si, o existe la posibilidad de que las partes referidas no posean una geometría lineal perfecta de acuerdo a la geometría analítica; a pesar de que la abertura está construida en placa de lámina de  $l_z=0.5mm$  de espesor.

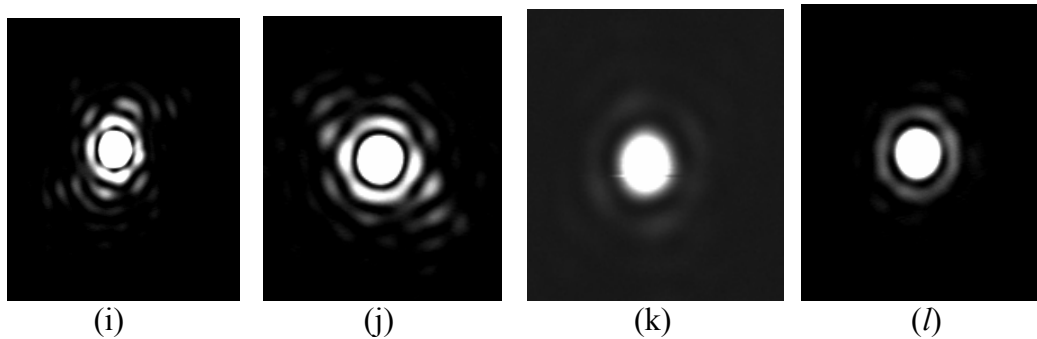


Figura 6.6. Espectros de transformada exacta de Fourier, de aberturas 6.3

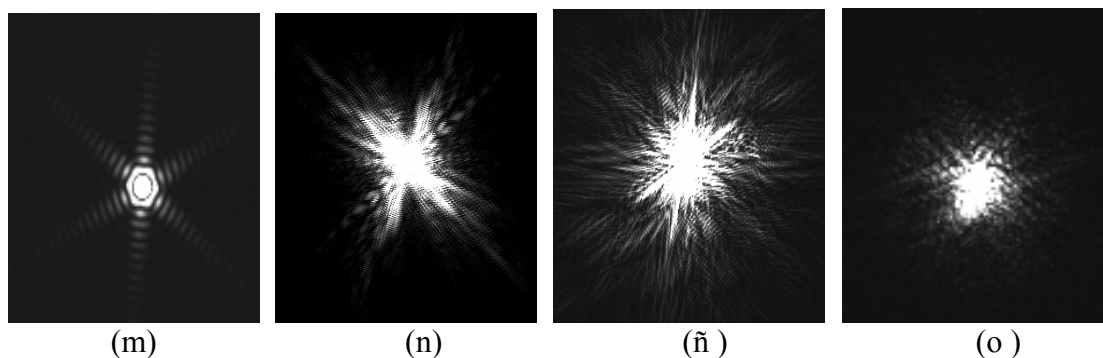


Figura 6.7. Espectros de transformada exacta de Fourier, de aberturas 6.4

En referencia a los patrones de difracción de las figuras 6.5e, f, mismos que fueron producidos por aberturas cilíndricas con circunferencias en su parte posterior y anterior de  $1/16''$  de diámetro, construidas en taller de torno con taladro eléctrico vertical, en láminas de aluminio del grupo 1100, de espesores  $l_z=1.0mm, 0.5mm$ . El espectro de difracción que se propaga hasta la lente transformadora, proviene de la abertura circular anterior que fue colocada en el plano objeto  $X_0Y_0$  como se ilustra en la figura 6.1a. Se observa una forma circular bien definida, en los anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad producidos por la abertura de  $l_z= 0.5mm$  de espesor; es decir conforme la fractura cilíndrica tiende a tener un espesor casi pero no cero, el espectro de difracción será igual a los que se reportan en teoría de difracción clásica o por simulación perfectamente circulares. Otro aspecto que influye en la deformación de los anillos concéntricos, es que la lámina en las que están construidas las aberturas cilíndricas no se consideran perfectamente planas. Esta afirmación lleva a considerar que el método de transformada exacta de Fourier, a la vez como una técnica en el estudio en el análisis de superficies respecto a su planaridad, que se puede extender a objetos de diferente tipo de material, al aquí referido.

En lo que respecta a los espectros de las figuras 6.5g, h, producidos por aberturas cilíndricas y las circunferencias en su parte posterior y anterior de cada abertura es de  $0.25mm$  de diámetro, además están construidas en láminas de baquelita, de espesores  $l_z=2.0mm$ . El espectro de difracción que se propaga hasta la lente transformadora, proviene de la abertura circular anterior que fue colocada en el plano objeto  $X_0Y_0$  como se ilustra en el arreglo experimental de la figura 6.1.

Un aspecto importante que se debe hacer notar respecto a la imagen del espectro de difracción de la figura 6.5g, es que propicia la solución en lo que respecta al problema de modulación de funciones. En la figura referida, se ve que las franjas de interferencia de Young de máxima y de mínima intensidad, con distribución definida por la función  $\cos^2(2\pi l_1 u)$ , y de acuerdo al argumento  $(2\pi l_1 u)$  de la ecuación referida, las franjas son líneas rectas perfectas justificadas por la geometría analítica, ver ecuación (4.46). Como en la imagen referida, se observa que las franjas de Young son líneas rectas completas o no discontinuas, que además están sobre la distribución de franjas de interferencia circulares de máxima y de mínima intensidad, definidas por el argumento de la función Bessinc

cuadrada siguiente  $\left(\frac{J_1(2\pi l_1 \omega)}{\omega}\right)^2$ ; de aquí se concluye categóricamente que la función

$\cos^2(2\pi l_1 u)$  modula a la función Bessinc cuadrada antes descrita. Esta afirmación y la evidencia experimental aquí presentada aporta la solución al caso de modulación de funciones, presentado en la parte teórica del capítulo IV ecuación (4.46), y debe ser este criterio experimental el sustituto de un criterio matemático que no existe al respecto.

Para el caso del espectro de difracción de transformada exactas producido con 10 aberturas cilíndricas del mismo espesor y posiblemente de diámetros iguales en la circunferencia de sus aberturas posterior y anterior: De acuerdo a la imagen de la figura 6.5h se observa que los anillos concéntricos no son tan circulares, sino elípticos debido a que todas las aberturas

posteriores y anteriores no son verdaderamente circunferencias perfectas, sino elípticas y es la forma geométrica que domina en la superposición en el plano de Fraunhofer. Además en la parte central de la distribución de intensidad en la imagen referida, existe información del conjunto de franjas de Young que producen cada par de aberturas, pero por la alta intensidad si se presenta la imagen de ellas, se pierde la información de los anillos Bessinc, por lo que se incluirán las dos imágenes.

Referente a los espectros de difracción de frecuencias espaciales de transformada exacta de Fourier mostrados en las figura 6.6*i*, *j*, *k* y *l* que fueron producidos por aberturas cilíndricas construidas en láminas de aluminio 6061 de diferente espesor como se detalla en la tabla 6.1, cabe recordar que las partes circulares de tales aberturas poseen un diámetro de 1/16'' y fueron fabricadas de manera comercial, en taller de torno. De acuerdo a las imágenes de los patrones de difracción de la figura 6.6, la forma geométrica de la abertura se define solo considerando el máximo y el mínimo central de interferencia. En vista de que cada espectro de difracción referido, fue producido por aberturas cilíndricas gruesas, no existe soporte teórico para poderle asociar una función específica a su distribución de intensidad. Pero de acuerdo a las imágenes de la figura 6.6, tal parece que la lente transformadora "ve" solo una abertura circular, de la cual provienen ondas difractadas y que en principio bajo esta condición la lente referida produce un patrón de difracción de transformada de Fourier exacta, cuyos anillos de máxima y de mínima intensidad centrales, pueden ser definidos por la ecuación (4.52) y deben ser anillos circulares y concéntricos perfectos, definidos por el argumento de la función Bessinc cuadrada, esto es  $(2\pi d_1 \omega) = \sqrt{(2\pi d_1 u)^2 + (2\pi d_1 v)^2}$ . Ahora, en base a que en las imágenes de los espectros de las figura 6.6 se observa muy poca perfección circular en cada anillo; esta situación permite establecer que: Posiblemente el método o técnica de perforado para construir la aberturas no fue el apropiado, además de que influye el espesor de la lámina, en lo que respecta a la distribución de los máximos y mínimos restantes.

Para el caso del espectro de difracción de transformada exactas producido con 10 aberturas cilíndricas de espesor  $l_z = 2.0mm$  y posiblemente con los mismos diámetros en la circunferencias de sus aberturas posterior y anterior, de acuerdo a la imagen de la figura 6.5h se observa que los anillos concéntricos no son circulares, sino elípticos. En principio, la forma elíptica de los anillos, de acuerdo a la sección IV.13 y la ecuación (4.115), se debe a que existen partes circulares de las aberturas referidas, con diámetros diferentes a las restantes, que en este caso, su variación es tan pequeña, que propician que la elipticidad de las franjas también sea pequeña. Cabe recordar que cada par de aberturas cilíndricas, generan un patrón de franjas de interferencia de Young y que en principio se debe tener cinco patrones de este tipo de franjas; esto hace que entre ellas interaccionan y forman una distribución nada sencilla de interpretar, cuya definición se pierde a causa de existir mucha intensidad, la cual fue atenuada para obtener información de las franjas concéntricas elípticas modulada por el grupo de franjas de Young.



Respecto a los patrones de difracción de transformada exacta de las figuras 6.7m, n, ñ y o, que fueron obtenidos usando aberturas de geometría variable hechas en láminas de acero con recubrimiento de pintura mate negra y de zinc. La abertura del objeto de cuya imagen es la figura 6.4M; fue producida mediante una técnica de perforado especial que no se conoce. En tanto que, por corrosión y oxidación se produjeron las aberturas mostradas en las imágenes 6.4N, Ñ y O.

Ahora, se tiene que, si la geometría de las partes que dan forma a la abertura, es variable y bien definidas en base nuevamente a la geometría analítica, ver figura 6.4M; el espectro de transformada exacta, también se produce bien definido y se puede interpretar apropiadamente la forma de la abertura, en base a la distribución de los máximos y mínimos centrales en intensidad de las franjas de interferencia, que definen los espectros de frecuencias espaciales referidos, como se observa en la imagen 6.7m. Se debe aclarar, que esta imagen se obtuvo intercalando cuatro atenuadores de intensidad en el arreglo óptico mostrado en la figura 6.1; de no haberse realizado de esta manera, existe exceso de intensidad que indefine la información, o que hace que no esté contrastada.

En lo que respecta a los espectros de frecuencias espaciales de transformada exacta, mostrados en las figuras 6.7n, ñ y o, en ellos se ve que la distribución de intensidad en cada espectro no propicia identificar la forma geométrica de la abertura. En estos casos, se propone que la abertura se analice por partes, lo que implicaría entender cómo difractan las ondas monocromáticas y el espectro que producen.

## VI.5 ESTUDIO DE PATRONES DE DIFRACCIÓN DE CONVOLUCIÓN DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Se generaron y grabaron una variedad de espectros de difracción de frecuencias espaciales, de convolución de transformadas de Fourier, de cada abertura u objeto difractor cuyas imágenes se muestran en las figuras 6.2, 6.3 y 6.4. Para esto, se aprovechó la posición fija que mantuvo cada objeto en el plano objeto  $X_0Y_0$  (6), en la etapa experimental anterior, a la distancia  $f_{LD}=d_0=25cm$  de la lente transformadora, como se hace ver en el arreglo experimental de la figura 6.1a; además continuó siendo iluminado con ondas planas, y no se le aplicó fuerza mecánica de tensión.

Las imágenes de los espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier que se reportan a continuación, fueron grabadas tanto en la zona convergente como en la divergente de la lente doblete acromática cementada usada como transformadora. La distancia  $z$  de la lente referida al plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye cada espectro, cae dentro del intervalo  $0 < z < f_{LD}$ , y será conocida como zona convergente de la lente referida; o bien se distribuye en el plano  $uv$  frecuencias espaciales situado ahora en la zona divergente de la misma lente, situado en el intervalo  $f_{LD} < z < \infty$ ; ambas zonas son conocidas como regiones de Fresnel. Para el grabado de las imágenes de los espectros de difracción en intensidad, se usó nuevamente el método de fotografía con cámara electrónica digital CCD tipo Sony, software y PC; además, fueron procesadas digitalmente obteniéndose en formato JPG para ser manipuladas en documentos Word.

### VI.5.1 PATRONES DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LAS ABERTURAS DE LAS FIGURAS 6.2A, B, C y D

Las imágenes 6.8.1 y 2, corresponden al espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, su registro se realizó en zona de Fresnel o región convergente de la lente transformadora, a la distancia  $z=20cm$ . En tanto que la imagen 6.8.3 se grabó la distancia  $z=31cm$  de la lente antes referida, pero en la zona divergente que corresponde a la otra región de Fresnel, de acuerdo a los aspectos teóricos del capítulo IV. Otro espectro que fue grabado en ésta última región, pero a la distancia  $z=35cm$ , cuya imagen se muestra en la figura 6.8.4. Se recuerda que los objetos difractores, fueron los A, B, C y D, de la figura 5.2, ya referida.

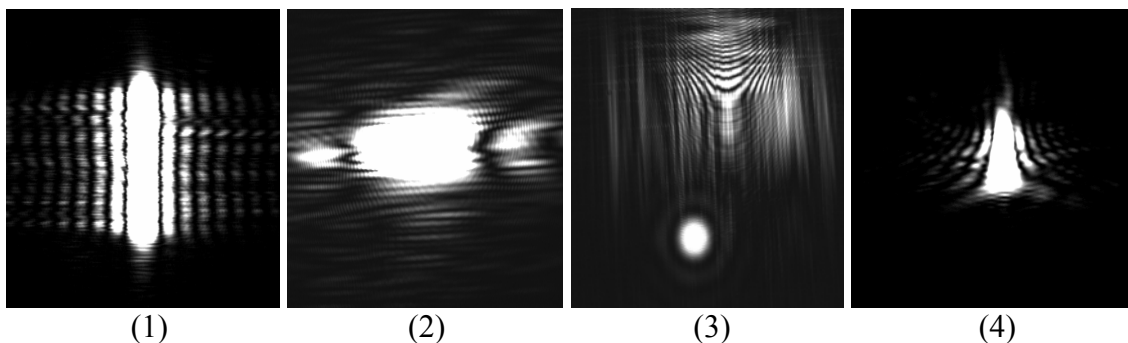


Figura 6.8. Espectros de convolución, de aberturas 6.2

## VI.5.2 ANÁLISIS Y OBSERVACIONES

La imagen del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier de la figura 6.8.1, propicia una mejor interpretación de la forma geométrica de la abertura; que de acuerdo a la ecuación (4.34) la distribución de intensidad de las franjas de interferencia que definen el espectro referido, en la zona convergente de la lente transformadora, está

definida a través de la siguiente ecuación  $\sin^2(l_y, v) = \left[ \frac{\text{sen}(\pi l_y v)}{\pi l_y v} \right]^2$ ; mientras que su

argumento nos dice que deben ser líneas rectas perfectas, de máxima y de mínima intensidad, de acuerdo a la geometría analítica. Así, si se usa para nuestro análisis solo los máximos y mínimos de interferencia centrales; en la imagen referida, se ve que tales líneas no son rectas perfectas, ya que poseen deformaciones. Esto permite establecer que los lados de la abertura paralelos al eje  $Y_0$  en el plano objeto, son casi rectos y que las deformaciones que poseen, posiblemente se deben a la técnica de fabricación de la abertura, o que ha sido sometida a algún tipo de esfuerzo, que le ha producido una deformación permanente en las zonas que se demuestran en la imagen del espectro ya referido. Otra información que proporciona, es que la abertura que en la imagen 6.2A se ve como rectangular, posee dos lados que no tienen geometría de una recta, esto confirma la razón, del por qué no se le puede asociar una función rectángulo a la transmitancia del objeto estudiado en el eje  $X_0$  en el plano objeto, sino otra función; además la altura hacia el eje  $Y_0$ , hace que el espectro de difracción no se defina apropiadamente.

El espectro de difracción de transformadas de Fourier, cuya imagen es mostrada en la figura 6.8.2, grabada en la zona convergente de la lente transformadora, no define apropiadamente la forma del objeto, que como se demuestra en la figura 6.2B, posee una forma externa rectangular. Aunque el espesor de la lámina en que está construida es  $l_z=0.5mm$ , es suficiente para establecer que, en la parte interna de tal abertura existen deformaciones debido al proceso y la técnica de fabricación. Esto hace que la imagen del espectro se vea poco definida.

En referencia a la imagen del patrón de difracción de convolución de transformadas de Fourier, definido por la imagen de la figura 6.8.3, grabado en la zona divergente o de Fresnel de la lente transformadora. Una parte de la distribución del espectro en intensidad no permite identificar la forma geométrica de las aberturas rectangulares mostradas en la figura 6.2C, ya que existe deformidad en las franjas de interferencia de máxima y mínima intensidad. Esto se debe a que la geometría de las aberturas que se consideran como rectas no son perfectas de acuerdo a la geometría analítica, es decir poseen deformidades. Lo anterior, asegura que la técnica para producir la abertura no es correcta, o también se puede establecer que las deformaciones son a causa de los esfuerzos de algún tipo que intervinieron en el fracturado del material produciéndole la forma de la abertura estudiada. En este caso, se obtiene mejor idea de la forma geométrica de la abertura mediante el espectro de difracción de transformada exacta de Fourier, que del patrón de difracción convolutivo.

Un resultado no esperado es el mostrado en la figura 6.8.3, dicha imagen muestra tanto el espectro de convolución de transformadas de Fourier, debido a las aberturas rectangulares y perpendiculares una respecto de la otra que fue documentado en el párrafo anterior. Así

como el registro del espectro de difracción de convolución, de una abertura cilíndrica. Lo que sorprende de este espectro, es la perfección en la geometría circular, respecto a la distribución del máximo y mínimo central de interferencia. Basta recordar que la abertura circular quedó desplazada del origen de coordenadas del plano objeto  $X_0Y_0$ , ya que durante la etapa experimental, se consideró que las aberturas perpendiculares antes referidas, se localizaban en el origen del sistema de coordenadas en el plano objeto. De acuerdo con la sección IV.11, el análisis de la distribución de intensidad se puede realizar a través de las siguientes ecuaciones (4.94), (4.96), (4.99) y (4.101). Ahora, si selecciona la ecuación (4.96), cuya estructura matemática es:

$$I_z(u, v) = \left[ \text{sen}^2 [f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}] \right] \left[ \frac{(E_0 I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \left( 4 \text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi d_1 u \right) \left[ \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right]^2 \right]. \quad (4.96)$$

Entonces, el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, en la zona divergente, de acuerdo a la ecuación (4.96), producido por la abertura cilíndrica desplazada del origen de coordenadas en el plano objeto  $X_0Y_0$ , son anillos circulares de máxima y de mínima intensidad definidos por la función  $\left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2$  Bessinc cuadrada, modulados por

la función  $\text{sen}^2 \left( \frac{\pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} + 2\pi d_1 u \right)$ . Esta afirmación se corrobora a través del

siguiente desarrollo experimental. Debe recordarse que, después del plano de la transformada exacta, existen diferentes distancias  $z$  a las que se puede grabar el espectro de convolución referido, pero el espectro grabado a la distancia  $z=35\text{cm}$  de la lente transformadora, se consideró el más representativo para ilustrar el fenómeno.

### VI.5.3 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA CILÍNDRICA DE LA FIGURA 6.2C

El resultado comentado en el párrafo anterior, propició que se investigara solo el espectro de difracción producido por la fractura circular contenida en el objeto de la figura 6.2C. Esto se logró evitando que el haz de ondas planas iluminara las aberturas rectangulares, el objeto difractor permaneció en el mismo plano desde la etapa experimental anterior. Ahora, para este caso y en esta parte de la etapa experimental, se produjeron los espectros de difracción y fueron grabadas seis imágenes con el método opto-electrónico descrito anteriormente, mismas que se muestran en la figura 6.9. En lo que respecta a la imagen de la figura 6.9.1 fue grabada a  $z=25cm$ ; la 6.9.2 en  $z=34cm$ ; mientras que la imagen 6.9.3 se registró a la distancia  $z=56cm$ ; por lo que respecta a la imagen de la figura 6.9.4 se registró a  $z=64cm$ ; la imagen 6.9.5 se registró a  $z=84cm$ . Finalmente la imagen 6.9.6 se grabó a la distancia  $z=145cm$ . Lo que sorprende de todo este proceso de grabado, es que a la última distancia referida, se obtiene un mínimo de intensidad en la zona central de la distribución Bessinc cuadrada; además siguiendo la historia de las imágenes referidas, se observa como la distribución de intensidad se va haciendo más pequeña, desde el plano de la transformada exacta, hasta que se produce el mínimo de intensidad, a este fenómeno en este trabajo de Tesis, se definirá con nombre de AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO, y es un resultado no esperado que proviene del trabajo experimental, por lo que se buscará alguna publicación en la que esté reportado y si existe un nombre específico. Dicho fenómeno óptico, se presenta en la zona divergente de la lente transformadora; además se debe considerar que las partes circulares de la abertura cilíndrica en este caso tiene un diámetro  $d_1=0.5mm$  y está fabricada en lámina de aluminio del grupo 1100, con espesor de  $l_2=0.5mm$ .

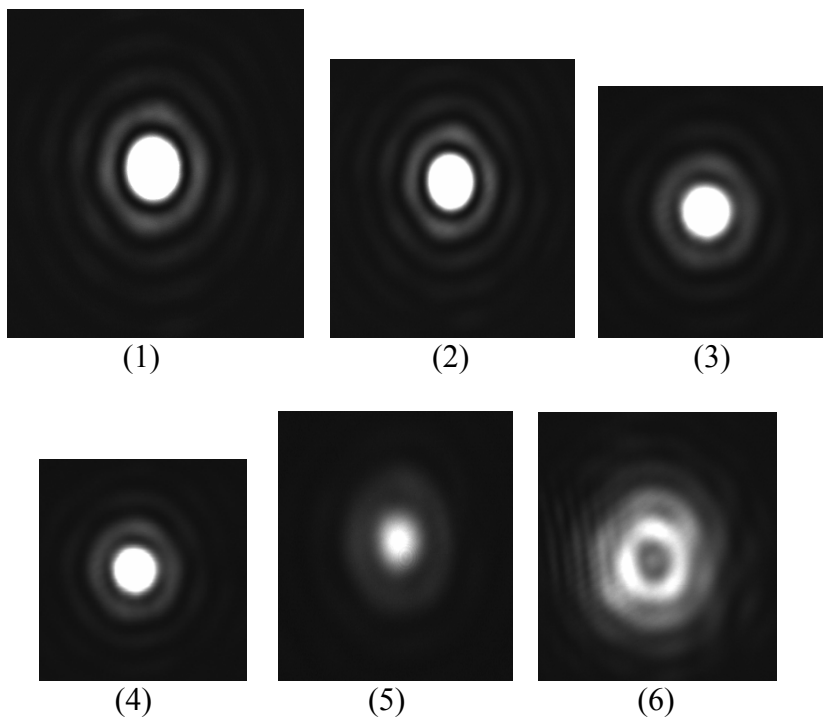


Figura 6.9. Espectros de convolución, de abertura cilíndrica 6.2C

#### VI.5.4 EL AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO Y SU POSIBLE EXPLICACIÓN

Como se estableció en la sección VI.5.3 existen las siguientes ecuaciones teóricas (4.94), (4.96), (4.99) y (4.101) desarrolladas en el capítulo IV, con las que se puede explicar posiblemente el fenómeno de AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO. Pero también se consideró en la sección referida, que sería más apropiado explicarlo con la ecuación (4.96), considerando como se propuso que la función seno cuadrada modula a la función Bessinc cuadrada. Bajo esta afirmación se tendrá que el máximo de interferencia central, va variando su tamaño en base a la modulación que la función seno cuadrado ejerce, pero lo hace lentamente y esto propicia que la distribución de intensidad sea cero a la distancia antes referida.

Hasta ahora, se ha observado que el fenómeno de AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO, solo se produce para una abertura (fractura) cilíndrica de espesor a  $l_z=0.5mm$ , pero que posea aberturas circulares en sus extremos cuyos sean iguales en magnitud, es decir de valor igual a  $d=0.5mm$ . Luego entonces, surge la propuesta de que los diámetros de las partes circulares en las aberturas cilíndricas deben cumplir con la condición establecida en la desigualdad siguiente  $d \leq 0.5mm$ . Entonces se propone que, para producir un resultado similar con otra fractura cilíndrica, en principio debe de estar fabricada en lámina de cualquier otro tipo de material disponible del mismo espesor, pero también se debe investigar para un espesor un poco mayor y menor al referido y se debe de imponer como condición que las aberturas circulares, sean de diámetro antes especificado. Además se recomienda que la abertura referida como objeto difractor esté fuera del origen de coordenadas en el plano objeto  $X_0Y_0$ . Definitivamente, para estudiar más ampliamente el fenómeno de AUTOENFOQUE DE CONVOLUCIÓN, se sugiere realizarlo en la zona divergente o región de Fresnel de la lente transformadora, ya que es más amplia; además también se propone investigarlo con lentes sencillas y dobletes acromáticas cementadas y separadas. Otro aspecto importante, es realizar un proceso de simulación en computadora, que permita discernir cuál de los modelos matemáticos definidos por las ecuaciones referidas, o determinar el modelo matemático apropiado para poder explicar correctamente el fenómeno de AUTOENFOQUE. Para evitar confusión las imágenes de la figura 6.9, solo fueron cortadas de la imagen total que proporciona el sistema opto-electrónico compuesto por cámara CCD, software y PC.

En lo que se refiere a la imagen del espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier de la figura 6.9.4, se observa que propicia una identificación de la forma geométrica de la abertura bajo estudio, que en este caso es triangular. En esta parte del proceso, se plantea la siguiente observación: solo se ha encontrado documentada la distribución de intensidad del espectro de transformada de Fourier una abertura triangular, en libros de óptica de (Hech y Zajac, 1998; Malacara, 2004), pero no se ha localizado reportes de la convolución de transformadas de Fourier como se documenta en este trabajo de Tesis, sobretodo grabarlo en la región divergente de la lente transformadora.

## VI.6. ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA DE LA FIGURA 6.2E, Y COMENTARIOS

El grupo de imágenes de espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier que se documentan en las figuras 5.10.1, 2, 3 y 4, fueron producidos usando como objeto difractor, la abertura cilíndrica cuya imagen es la 6.2E, de espesor  $l_z=1mm$ , producida en lámina de aluminio del grupo 1100. Las aberturas circulares en sus extremos poseen un diámetro de  $1/16''$ ; en tanto que las distancias  $z$  de la lente transformadora al plano de frecuencias espaciales  $uv$  en el que se distribuye cada espectro y a la que fueron grabados son:  $z=25cm$ ,  $z=28cm$ ,  $z=33cm$  y  $z=37cm$ , y las imágenes de la figura 6.10 dan referencia de cada espectro referido. En ellas, se observa que el AUTOENFOQUE DE CONVOLUCIÓN, se produce desde el plano de la transformada exacta de Fourier situado a  $z=25cm$  de la lente referida, hasta los 37cm distancia a la que se produce el mínimo de interferencia en la zona central. En este caso se observa que el espesor de 1mm, aún sigue afectando la distribución del espectro de difracción, pero va haciéndose mejor definido. Por lo que se propone asociarle la distribución de intensidad definida por la ecuación (4.96) documentada en la sección anterior, lo que permite establecer que, la función Bessinc cuadrada de la función referida, sea modulada por la función seno cuadrado.

Una observación que se hace respecto a este problema, es la siguiente: en esta etapa experimental, se consideró que la abertura cilíndrica difractora permaneció en el origen del sistema de coordenadas en el plano  $X_0Y_0$ . Bajo este concepto de acuerdo a la teoría desarrollada en la sección IV.12 y la ecuación (4.103), solo se debería tener anillos concéntricos de máxima y de mínima intensidad definidos por la función Bessinc cuadrada, como lo muestra la siguiente estructura matemática de la función referida

$$I_z(u, v) = \left[ \frac{(2E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \left[ \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \right] . \quad (4.103)$$

Se observa en la ecuación (4.103) que no existe otra función que permita asegurar la modulación de la función Bessinc cuadrada y como consecuencia justificar el AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO. Ahora, si se piensa que no se tuvo control para colocar la abertura en el origen verdadero del plano de coordenadas en el plano objeto ya referida, entonces, la abertura cilíndrica esta fuera del origen y, debido a este hecho se presenta la distribución de intensidad documentada en la figura 6.10, que puede ser mejor explicada a través de la ecuación (4.96). Luego entonces, existe el problema de control del origen de coordenadas.

## VI.7 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA CILÍNDRICA FIGURA 6.2F

Una nueva serie de espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se presentan a continuación. La producción de los espectros se ha hecho mediante el uso de la abertura cilíndrica cuya imagen se muestra en la figura 6.2F, que posee un espesor de  $l_z=0.5mm$ , de la lámina de aluminio del grupo 1100 en que fue construida. La imagen del espectro de convolución mostrada en la figura 6.11.1, fue grabada a  $z=35cm$  de la lente transformadora. Mientras que las imágenes 6.11.2, 6.12.3 y 6.12.4, fueron grabadas a las distancias  $z=37cm$ ,  $z=44cm$  y  $z=47cm$  respectivamente de la lente referida.

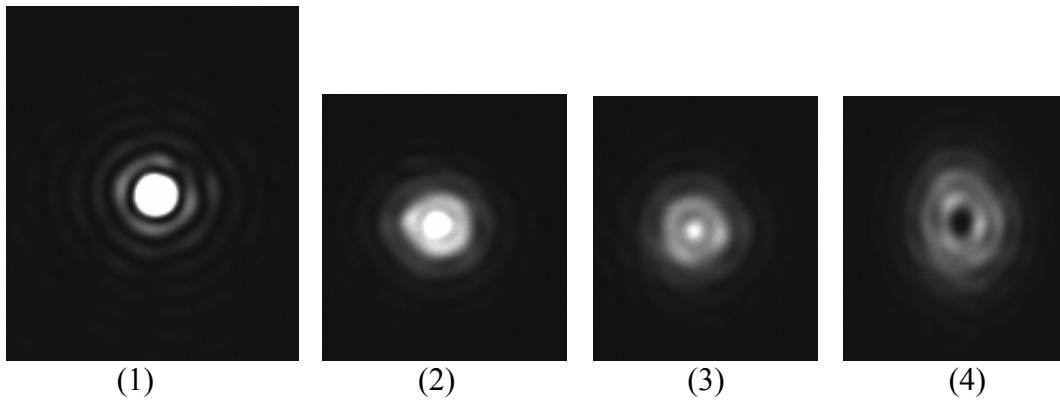


Figura 6.10. Espectros de convolución, de abertura 6.2E

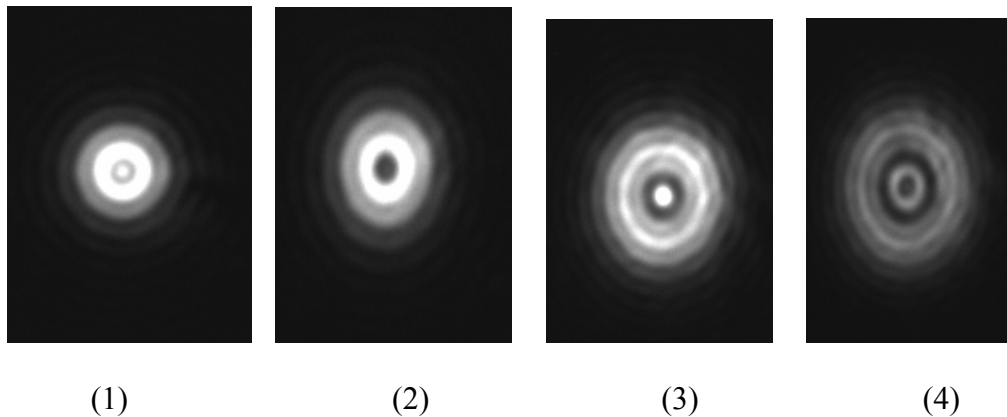


Figura 6.11. Espectros de convolución, de abertura 6.2F

### VI.7.1 ANÁLISIS Y OBSERVACIONES

Como se observa en las imágenes de los espectros de convolución de transformadas de Fourier de la figura 6.11, grabados en la zona divergente de la lente transformadora, solo pueden ser explicados mediante una modulación de funciones, como se ha documentado en la sección anterior VI.6. Es decir, de acuerdo a la ecuación (4.96) la función seno cuadrado modula a la función Bessinc cuadrada. Ya que, de acuerdo a la ecuación (4.103) que define



la distribución de intensidad cuando la abertura está en el origen de coordenadas en el espacio objeto, no permite explicar el fenómeno descrito por las imágenes de la figura 6.11. Esto indica que no se tiene el control del origen de coordenadas del espacio objeto.

Los espectros de convolución de transformadas de Fourier descritos por las figuras 6.10 y 6.11, como se documentó, fueron producidos por aberturas cilíndricas de diferente espesor, es decir  $l_z=1.0mm$  y  $0.5mm$ , por las partes circulares de ellas con el mismo diámetro  $d=1/16''$ . Como se ve en las imágenes ya referidas, el espesor si afecta la distribución del espectro de difracción.

Ahora, si en verdad la abertura cilíndrica se colocó en el origen del plano objeto, entonces el fenómeno de AUTOENFOQUE DE CONVOLUCIÓN debe tratarse en forma alternativa explorando alguna otra propuesta de análisis quizás como lo sugiere la sección IV.14 o considerar una función de transmitancia alternativa.

### VI.8 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA FIGURA 6.2G

En la región de convergente de Fresnel, y a la distancia  $z=16cm$  y  $z=20cm$  a la lente transformadora respectivamente, fueron grabados los espectros de convolución de transformadas de Fourier, los cuales son exhibidos en las imágenes 6.12.1 y 2. En tanto, que la imagen 6.12.3 corresponde al espectro de convolución grabado a la distancia  $z=28cm$  de la lente referida; mientras que las imágenes 6.12.4 y 6.12.5 corresponden a los espectros de convolución, registrados a las distancia respectivas de  $z=30cm$  y  $z=79cm$ . Estas últimas tres imágenes, fueron grabados en la zona divergente de la lente transformadora o de región de Fresnel.

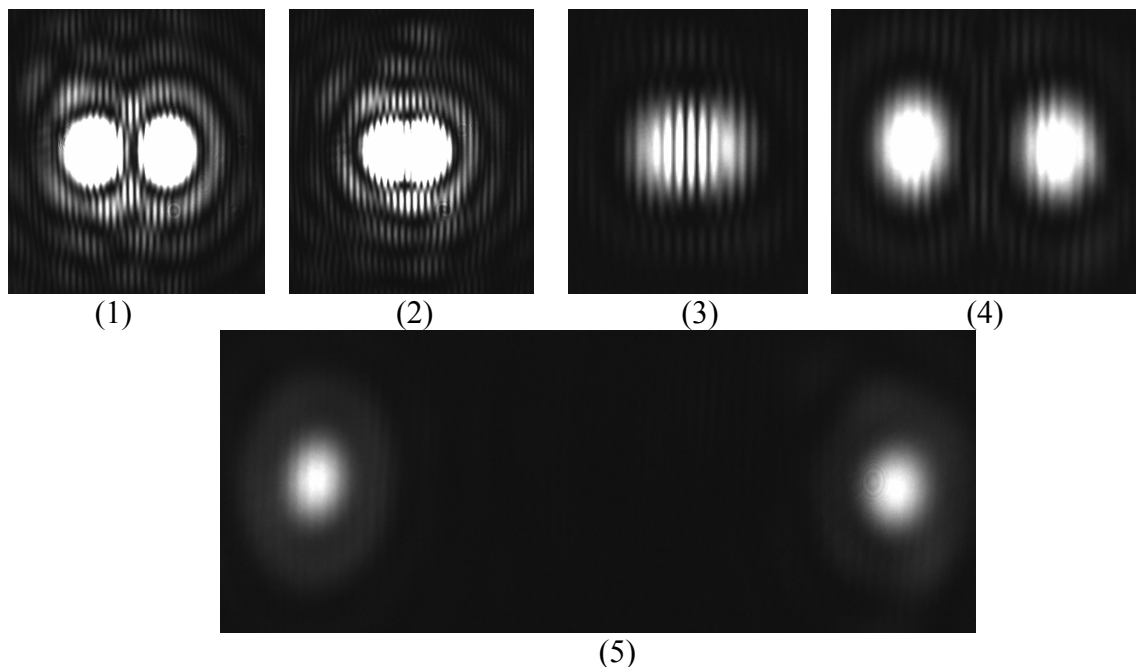


Figura 6.12. Espectros de convolución, de abertura 6.2G

## VI.8.1 ANÁLISIS Y OBSERVACIONES

Un detalle que se observa tanto en la zona convergente como la divergente de la lente transformadora, es que existen imágenes de espectros Bessinc cuadrada separados, cuando las aberturas en el objeto están separadas, y tales imágenes solo se reúnen en el plano de Fraunhofer o de la transformada exacta de Fourier, en el que se comparan entre si cada distribución de intensidad, definiendo solo una sola función Bessinc cuadrada. Pero en la zona convergente de la lente los espectros existen separados como funciones Bessinc cuadradas individuales moduladas por las franjas de Young. Algo similar a lo anterior existe se presenta en la zona divergente de la lente, en la que se intercambian de lugar los espectros en intensidad. Los espectros definidos por la función Bessinc cuadrada, en la zona convergente cerca de la lente transformadora, existen en forma separada, modulados por las franjas de Young; conforme se propagan y se acercan al plano de Fraunhofer, hay una interacción entre ambos y las franjas de Young, que algunas veces éstas son las que prevalecen como lo ilustra la figuras 6.12.1, 2 y 3. Después del plano de la transformada exacta de Fourier, se presenta distribuciones similares a la antes comentada, solo que en la región divergente de la lente transformadora, hasta que cada espectro producido por cada abertura cilíndrica se va separando y divergiendo, ver figuras 6.12.4 y 5.

De acuerdo a las imágenes 6.12.4 y 5, se está presentando el fenómeno de AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO, ya que se observan que la distribución de los máximos centrales, van disminuyendo en tamaño, hasta que se presente el mínimo de intensidad central. Es importante comentar que los diámetros de las partes circulares de las aberturas cilíndricas, tenían la magnitud  $d = 0.25mm$ .

Como se ha documentado, después del plano de Fraunhofer, los espectros se van separando continúan las Bessinc moduladas por las franjas de Young; pero como va variando el tamaño del máximo central, implica que debe de existir otra función que también modula a las Bessinc. Ahora, bajo el supuesto de que los diámetros de las aberturas circulares son iguales, de acuerdo a la sección IV.10, existe la ecuación (4.90) entre otras, para explicar lo documentado en el párrafo anterior, lo cual se considera que no es suficiente para tal efecto, ya que en la ecuación referida, solo existe una función Bessinc cuadrada modulada por franjas de Young y por la función seno cuadrada, que tal vez es la responsable de que ocurran máximos y mínimos en la zona central de la distribución de intensidad de los espectros, pero no justifica la presencia de los dos espectros separados modulados por franjas de Young. Se propone visualizar el problema desde otra perspectiva.

$$I_z(u, v) = \left[ \text{sen}^2 \left[ f_{LD} + z + n_{L1} \Delta_{L1} + n_{L2} \Delta_{L2} \right] \right] \left[ \frac{(E_0 I_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ \left( 16 \text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) \text{sen}^2 \left( \frac{i \pi d_1^2 (f_{LD} - z) \left( \frac{u}{\omega} \right)^2}{\lambda f_{LD}^2} \right) \left[ \cos^2(2\pi d_1 u) \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \right] \right] \quad (4.90)$$

## **VI.9. ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA FIGURA 6.2H**

Nuevamente, en referencia a las regiones convergente y de divergencia o de Fresnel de la lente transformadora, también conocidas como zonas de convolución de transformadas de Fourier. Se produjeron espectros de difracción de convolución, usando como objeto difractor el que se ilustra en la figura 6.2H. Las imágenes de los espectros referidos se presentan en la figura 6.13. A las distancias  $z_1=16cm$ ;  $z_2=21cm$  y  $z_3=23cm$ , fueron grabadas las imágenes de los espectros mostrados en las figuras 6.13.1, 2 y 3. Mientras que las imágenes de los espectros de convolución, representados por las figuras 6.13.4, 5 y 6 fueron grabadas a las distancias  $z_4=27cm$ ;  $z_5=28cm$  y  $z_6=37cm$ , respectivamente de la lente transformadora.

Es de importancia recalcar que los espectros documentados en la figura 6.13, se produjeron con cada abertura circular de diez aberturas cilíndricas cada una con un espesor de  $l_z=2mm$  de la lámina de baquelita en las que están construidas, ver figura 6.2M. Además el diámetro  $D$  de cada abertura circular, en principio es de  $D=0.25mm$ .

En base a los aspectos teóricos desarrollados en el capítulo IV, la luz difractada por cada par de aberturas circulares que forman parte de dos fracturas cilíndricas, produce franjas de interferencia de tipo Young, que son líneas rectas. Ahora, debido a la forma en que están distribuidas en la lámina ver figura 6.2M el total de las diez aberturas cilíndricas, esto implica que las franjas de Young también sufren un cambio de orientación, esto se pone de manifiesto en cada una de las imágenes de la figura 6.13.

### **VI.9.1 OBSERVACIONES Y COMENTARIOS**

Como se observa en las imágenes 6.13.2, 3, 4 y 5, la atención en el grabado de ellas, se centró en la zona central y mediante la atenuación de intensidad, se grabaron los espectros de difracción referidos. Debido al diámetro  $D=0.25mm$  de las partes circulares de cada una de las diez aberturas cilíndricas, el espectro de difracción de convolución de transformadas de Fourier, a la distancia  $z=37cm$  a la lente transformadora; en cada espectro de difracción referido se está manifestando lo que se ha denominado en este trabajo de Tesis, el fenómeno de AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO, y a la distancia referida, aún no ha ocurrido el mínimo de interferencia, como se demuestra en la imagen de la figura 6.13.6. Otro aspecto relevante de esta imagen, es la forma en que se ven distribuidas las franjas de Young, que continúan modulando a los anillos de máxima y de mínima intensidad definidos por la Bessinc cuadrada.

Ahora, en base a que las aberturas, poseen diámetros semejantes y están en el rango  $D \leq 0.5mm$  propuesto en la sección VI.5.3. Cada espectro separado tiende a producir AUTOENFOQUE DE CONVOLUCIÓN; la imagen de la figura 6.13.6 muestra que el diámetro de cada zona central del espectro anular de difracción, se ha reducido, respecto al diámetro que poseía en el plano de la transformada exacta de Fourier, ver imagen 6.5h; entonces, por un lado en forma individual los máximos de interferencia van disminuyendo su diámetro, mientras que el conjunto de espectros van separándose conforme se propaguen

en la zona divergente de la lente transformadora. Otro aspecto es que, cada espectro de difracción es modulado por franjas de interferencia de Young, con orientación diferente por lo que, es importante en este caso, se propone que, se realice una etapa experimental con cada par de fractura para entender cómo se orientan las franjas de Young; así como con un número impar de las aberturas referidas.

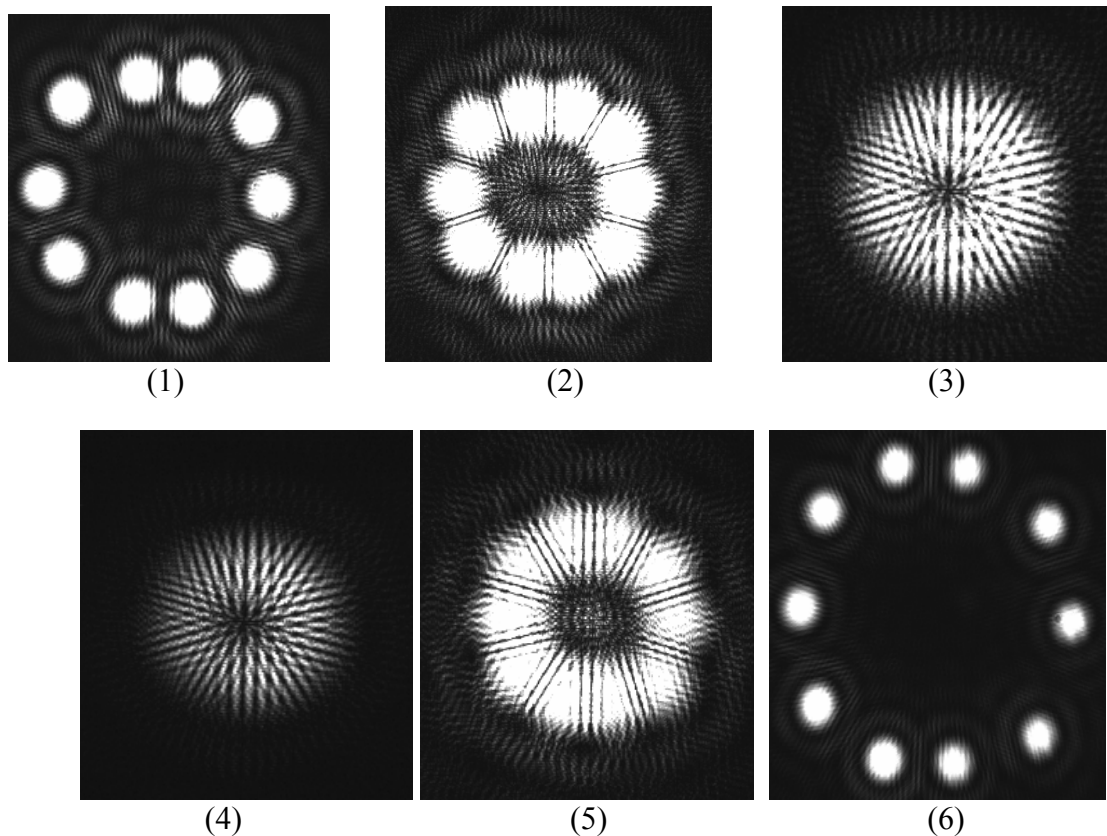


Figura 6.13. Espectros de convolución, de abertura 6.2H

## VI.10 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR EL OBJETO DE LA FIGURA 6.3I

Otros objetos estudiados a través de sus espectros de frecuencias espaciales o patrones de difracción de convolución de transformadas de Fourier, fueron aberturas cilíndricas producidas de manera comercial (en taller de torno), en láminas de aluminio 6061. Como ya se estableció, solo la abertura cilíndrica de  $l_z=2.0mm$  espesor, se consideró como delgada; mientras que las aberturas restantes de espesores  $l_z=22.0mm$ ,  $13.mm$  y  $6.0mm$  fueron catalogadas como gruesas; recordando también, que las partes circulares de cada abertura cilíndrica fueron fabricadas con broca de  $1/16''$  usando taladro eléctrico vertical; de cuales se da referencia en las figuras 6.3I, J, K, L. Es importante recordar que el objetivo de esta etapa experimental: es el de establecer la forma de cómo se afecta la distribución del espectro de difracción en base al espesor de las láminas en las que se

fabricaron las aberturas cilíndricas. Nuevamente se tiene que recordar que se está tratando con tres objetos gruesos y no de espesor casi cero, donde la teoría de difracción clásica funciona adecuadamente en la predicción tanto matemática como experimental, inclusive mediante programación por computadora, para explicar la distribución de intensidad que producen objetos con estas últimas características.

Las imágenes de los espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier que se muestran en la figura 6.14.1, 2, 3, fueron grabadas tanto en la zona divergente de la lente transformadora o región de Fresnel, a las distancias  $z=29cm$ ,  $z=36cm$  y  $z=42cm$  respectivamente de la lente transformadora, en la región convergente y divergente de Fresnel. Mientras que la imagen del espectro de transformada exacta que se muestra en la figura 6.14i, solo se usa como una referencia, respecto a lo que se documente.

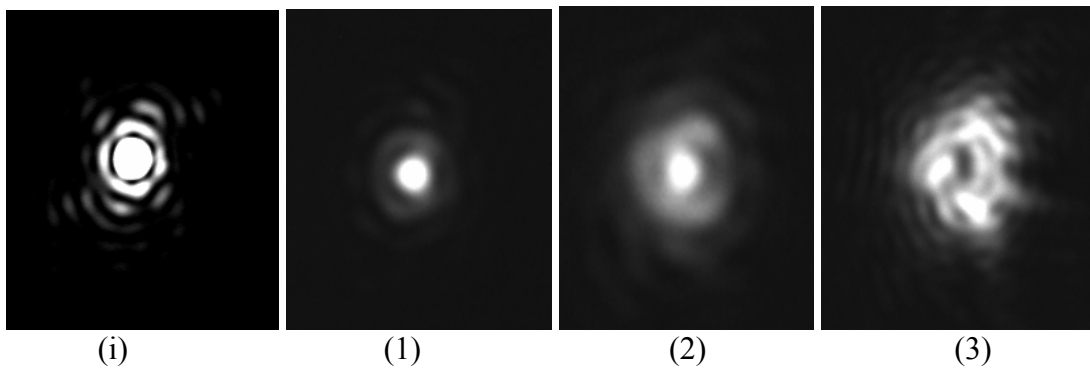


Figura 6.14. Espectros de convolución, de abertura 6.3I

Como se ve en la imagen de la figura 6.14i, el espectro de difracción de transformada exacta, queda definido en su máximo y mínimo central, que en principio deben ser definidos por la función Bessinc cuadrada; pero no los máximos y mínimos secundarios que deberían ser anillo también concéntricos, están deformados y no cumplen con lo predice la geometría analítica, respecto a que deeben ser perfectamente circulares; es decir el espesor afecta la distribución del espectro de difracción. Como en este caso se consideró que la abertura no es delgada, ya que tiene un espesor  $l_z=22mm$ , la distribución de intensidad no puede ser descrita por la ecuación (4.52) de la cual se establece que, en el plano de Frunhofer o de la transformada exacta los anillos deben de ser círculos perfectos.

$$I_z(u, v) = \left( \frac{E_0 l_z d_1^2}{\lambda f_{LD}} \right)^2 \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \quad (4.52)$$

Observando las imágenes de los espectros de difracción mostrados en las figuras 6.14.1, 2 y 3 grabadas en la zona divergente de la lente transformadora. Solo se puede argumentar que se debe producir el modelo matemático que permita interpretar su distribución de intensidad, lo que sale de las expectativas de este trabajo de Tesis; y no se debe de usar la ecuación (4.103) para definir las. Tampoco es válido argumentar que, si la abertura referida

se situó en el origen de coordenadas en el plano objeto  $X_0Y_0$ , entonces la distribución de intensidad debería ser descrita por la ecuación (4.52) referida. Pero, en base a las imágenes comentadas, tampoco se debe hacer el análisis siguiente, suponiendo que lo anterior no es verdad.

$$I_z(u, v) = \left[ \frac{(2E_0 l_z d_1^2)^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \left[ \left( \frac{J_1(2\pi d_1 \omega)}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (4.103)$$

No se debe creer que las imágenes 6.14.1, 2 y 3 de los espectros de convolución también se pueden explicar con la ecuación (4.103). Menos se debe recurrir a explicarlas a través de la ecuación (4.78), que fue determinada para una abertura cilíndrica usada como objeto difractor desplazada del origen de coordenadas en el plano objeto. Se recuerda que el objeto es grueso y como consecuencia no se ha determinado el modelo matemático de difracción que defina los espectros presentados en las imágenes referidas.

De acuerdo a las imágenes comentadas, solo la imagen del espectro de difracción de transformada exacta de la figura 6.14i, permite realizar algunas observaciones: Los anillos no poseen geometría circular perfecta y no son anillos concéntricos. Esto se debe principalmente al espesor de la lámina en la que está construida la abertura cilíndrica, que propicia el deterioro en la distribución del espectro. En la etapa experimental, siempre se pensó que el objeto estaba en el origen de coordenadas, de acuerdo a los resultados tal parece que no es así; aunque considerando el espesor de la lámina de  $l_z = 22.0mm$ , propicia que no se visualice la respuesta correcta, aunque nuevamente se presenta el fenómeno de AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO. La información vertida, permite establecer que, para objetos difractores gruesos, se sugiere no utilizar los espectros de convolución para determinar la forma de la abertura. También existe la posibilidad que el espectro se deteriore por no haber sido fabricada la abertura cilíndrica con la técnica correcta, en la lámina de aluminio referida. Al considerar que el espesor influye en la producción del espectro de difracción, entonces el objeto es grueso y no son aplicables la teoría y ecuaciones documentadas a través de los capítulos II, III y IV.

## VI.11 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA DE LA FIGURA 6.3J

Las imágenes de los espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier figuras 6.15.1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, fueron grabados en la zona divergente de la lente transformadora o de Fresnel, a las distancias  $z=31\text{cm}$ ,  $z=33\text{cm}$ ,  $z=39\text{cm}$ ,  $z=42\text{cm}$ ,  $z=47\text{cm}$ ,  $z=50\text{cm}$ ,  $z=53\text{cm}$ ,  $z=59\text{cm}$ ,  $z=63\text{cm}$ ,  $z=67\text{cm}$ ,  $z=74$  y  $80\text{cm}$  respectivamente. Como se observa en las imágenes referidas, el espectro de difracción pasa por facetas diferentes de máxima intensidad en la zona central, hasta zonas de mínimos de intensidad en la parte central. A mayores distancias dentro de la zona divergente de la lente el espectro adquiere una distribución de intensidad, que no es posible identificar la función que lo define.

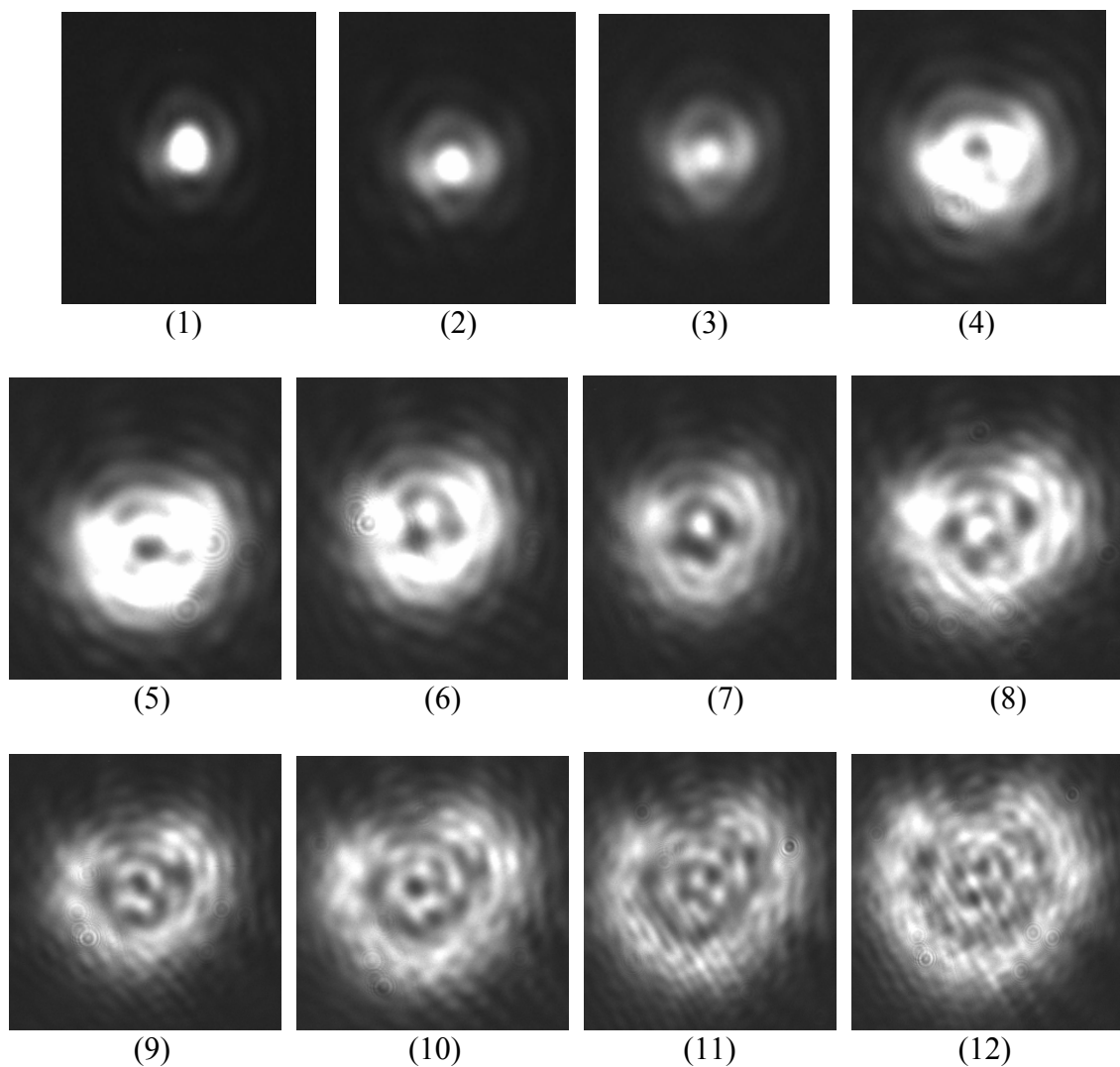


Figura 6.15. Espectros de convolución, de abertura 6.3J

Cabe aclarar que los espectros de difracción presentados en la figura 6.15, la atención se centró en la zona central de ellos, para lo cual se tuvo que atenuar la intensidad. Si lo anterior no se hubiera obtenido las imágenes que se documentan, ya que la información se pierde por la alta intensidad. En este caso el espesor de la lámina de aluminio 6061 en la que está producida la abertura cilíndrica fue de  $l_z=13.0mm$ , que también influye en la distribución de intensidad del espectro, lo que implica no poderle asociar una función Bessinc cuadrada. Nuevamente, puesto que la abertura está contenida en una pantalla gruesa no se le puede aplicar la teoría desarrollada para aberturas delgadas en los capítulos II, III y IV; por lo que se tiene que desarrollar los modelos apropiados para describir el fenómeno de difracción de aberturas gruesas. Aunque las imágenes documentadas muestran un adelanto de tipo experimental. Los aspectos teóricos, de momento salen de las expectativas de este trabajo de Tesis. Es recomendable usar la información experimental, tal vez para definir la geometría de la abertura que se analiza. También, es posible que el espectro se deteriore por no haber sido fabricada la abertura cilíndrica con la técnica correcta, en la lámina de aluminio referida.



## VI.12 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA CILÍNDRICA FIGURA 6.3K

Otra abertura definida por la figura 6.3K estudiada y de la cual se obtuvieron los espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier, cuyas imágenes son mostradas en las figuras 6.16.1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, mismas que fueron grabados en la zona divergente de la lente transformadora o de Fresnel, a la distancias  $z=28cm$ ,  $z=35cm$ ,  $z=40cm$ ,  $z=46cm$ ,  $z=62cm$ ,  $z=69cm$  y  $z=86cm$ . Basta recordar que la abertura (fractura) cilíndrica de la figura 6.3K posee un espesor de  $l_z=6mm$  y está construida en lámina de aluminio 6061, además sus partes circulares tienen un diámetro de  $1/16''$ . El total de espectros no se le puede asociar función por ejemplo Bessinc cuadrada para describir la distribución de intensidad; ya que en este caso la abertura se considera como gruesa, y como se ha documentado, aún no existe soporte teórico que permita describir la distribución de intensidad de los espectros de la figura 6.16.

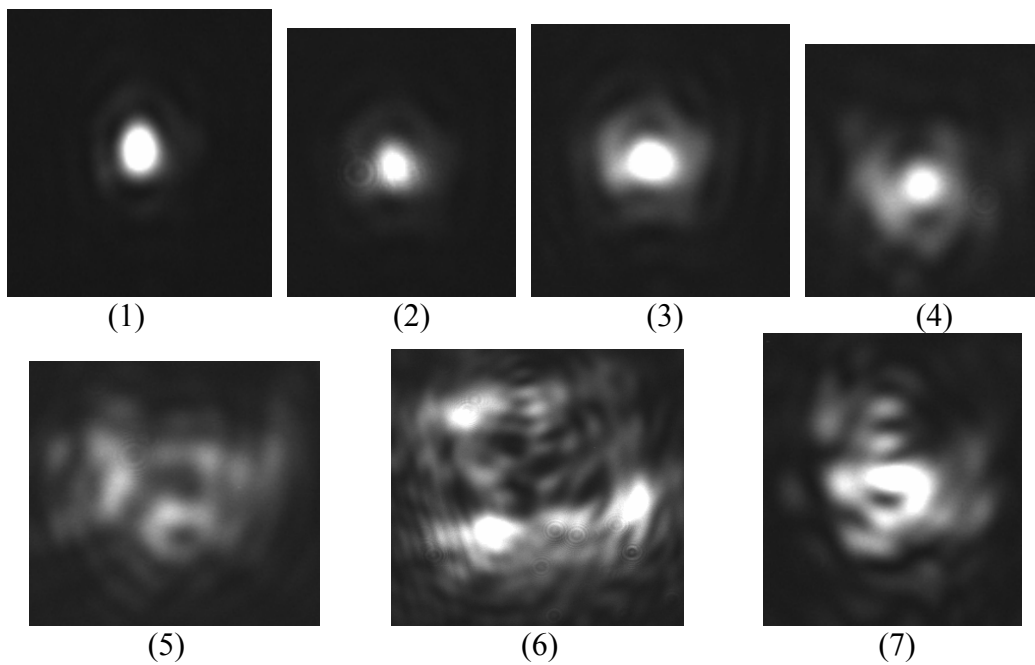


Figura 6.16. Espectros de convolución, de abertura 6.3K

### VI.12.1 ANÁLISIS Y OBSERVACIONES

De acuerdo a las imágenes de la figura 6.16, el espectro de difracción de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se propagan hasta producir el efecto de AUTOENFOQUE CONVOLUTIVO, el ocurre en una distancia que está en el intervalo espacial entre  $z=46cm$  y  $z=62cm$ , como lo justifican las imágenes 6.16.4 y 5; en esta última imagen el mínimo de interferencia es poco perceptible.

A partir de la distancia  $z=62cm$  a la lente transformadora, el espectro de convolución de transformadas de Fourier, presenta una distribución de intensidad, que a priori no se le puede asociar una función matemática que lo identifique; esto implica que se debe trabajar con el aspecto teórico para poder establecer el modelo matemático de difracción que justifique la distribución de intensidad del espectro referido, en base a que la abertura es gruesa.

### VI.13 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA CILÍNDRICA FIGURA 6.3L

Los espectros de convolución de transformadas de Fourier se muestran en las imágenes de la figura 6.17.1, 2, 3 y 4, también fueron grabadas en la zona divergente de la lente transformadora o región de Fresnel, a las distancias  $z=31cm$ ,  $z=36cm$ ,  $z=38cm$  y  $z=52cm$  respectivamente de la lente transformadora. Para este caso, es importante recordar que la abertura cilíndrica de la figura 6.3L posee un espesor de  $l_z=2mm$  y está construida en lámina de aluminio 6061, además sus partes circulares tienen un diámetro de  $1/16''$ .

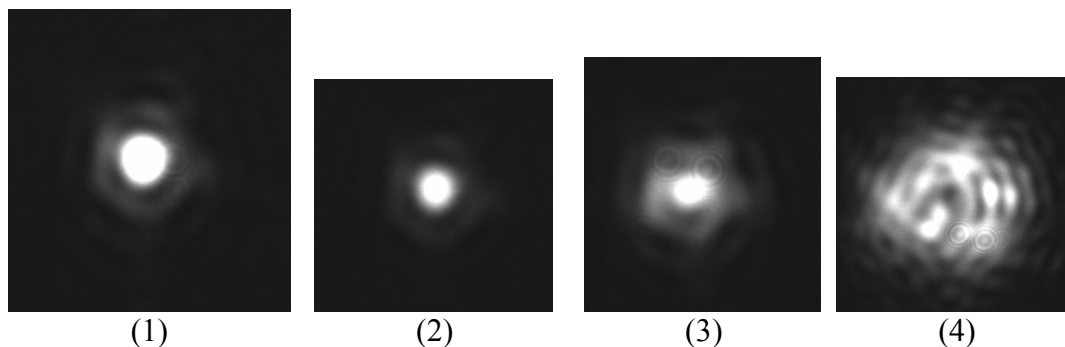


Figura 6.17. Espectros de convolución, de abertura 6.3L

Se observa que el espectro de convolución exhibe el efecto de AUTOENFOCAMIENTO CONVOLUTIVO, de tal manera que las ondas que la forman producen un mínimo de interferencia en su zona central. Esto, hace suponer que el espectro de convolución después del plano de la transformada exacta está compuesto por tipos de ondas cuya forma funcional no está definida a priori, se tratará de explicar teóricamente. Para este caso, tal parece que el espesor  $l_z=2mm$  en esta parte de la lámina no es suficiente para que el la abertura cilíndrica se comporte como un objeto difractor delgado, y produzca una mejor distribución del espectro de difracción. Otra razón, posiblemente sea que la parte circular anterior de la cual provienen las ondas difractadas, está construida dentro de la grieta semicircular, ver imagen 6.3L.

## VI.14 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA HEXAGONAL FIGURA 6.4M

Las imágenes de la figura 6.18.1, 2, 3 y 4, fueron grabadas en la zona convergente de Fresnel a la distancia  $z=21cm$  de la lente transformadora. La primera y la segunda de ellas, muestran que existe información en el espectro de difracción de convolución de las transformadas de Fourier, en lo que denominaremos la región interna del espectro; información que se va perdiendo conforme se aumenta la intensidad de los haces difractados, lo que se demuestra con las imágenes de los espectros 6.18.3 y 4. La imagen del espectro de difracción convolutivo 6.18.4, revela que conforme se pierde información en la parte central del espectro debido a la intensidad, existe información que se considera externa y se hace más relevante a mayor intensidad. Toda la información y distribución a base de las franjas de interferencia de los espectros de convolución, que forman las imágenes de la figura 6.18, difieren mucho de la distribución respecto de la que produce del mismo objeto 6.4M en el plano de la transformada exacta o de Fraunhofer, ver imagen 6.7m.

Un aspecto importante de resaltar es que: Los espectros de difracción, figura 6.18, producidos por la abertura 6.4M, de geometría variable, da origen al nacimiento de nuevos problemas tanto en el plano de la transformada exacta, como en la zona convergente y divergente de Fresnel o de convolución de las transformadas de Fourier. Además se debe tener en cuenta que el objeto referido posee un espesor  $l_z=2.0mm$ , y no es infinitamente delgado, o de espesor cero, como lo supone la teoría de difracción tradicional (Ersoy, 2007; Goodman, 2005; Bracewel, 2002; Yu, 1989, Gaskil 1978).

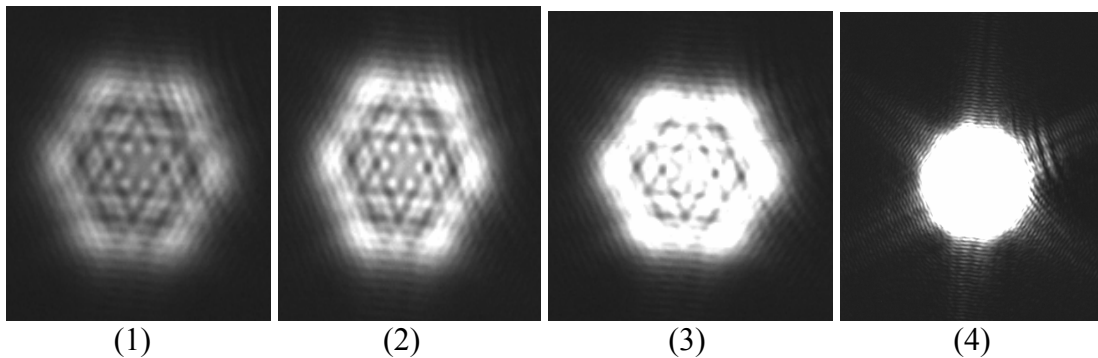


Figura 6.18. Espectros de convolución, de abertura 6.4M

Además, los espectros de difracción referidos, tanto de transformada exacta, como de convolución de transformadas de Fourier, figuras 6.7m y 6.18, permiten afirmar que, en aberturas de geometría variable, con lados que lados bien definidos geoméricamente, los espectro como los antes documentados también presentan distribución de franjas de interferencia de geometría bien definida; aunque el experimentador no pueda de momento dar una explicación matemática a priori, de éstas últimas.

## VI.15 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA FIGURA 6.4N

En esta etapa experimental, el grabado de los espectros de difracción de de convolución de transformadas de Fourier, se realizó tanto en las regiones de convergente y divergente de Fresnel, Las imágenes de los espectros, son mostradas en las figuras 6.19; en este caso se usó como objeto difractor la abertura de geometría variable, producida por corrosión y oxidación en lámina de acero con película de zinc mostrada en la figura 6.4N. El espectro de difracción de la figura 6.19.1, se grabó a la distancia de  $z_1=20cm$  dentro de la zona convergente de la lente transformadora o región de Fresnel; mientras que el de la figura 6.19.2, fue grabado a  $z_2=29cm$ , en la zona de divergencia de la lente referida, que corresponde a la otra región de Fresnel.

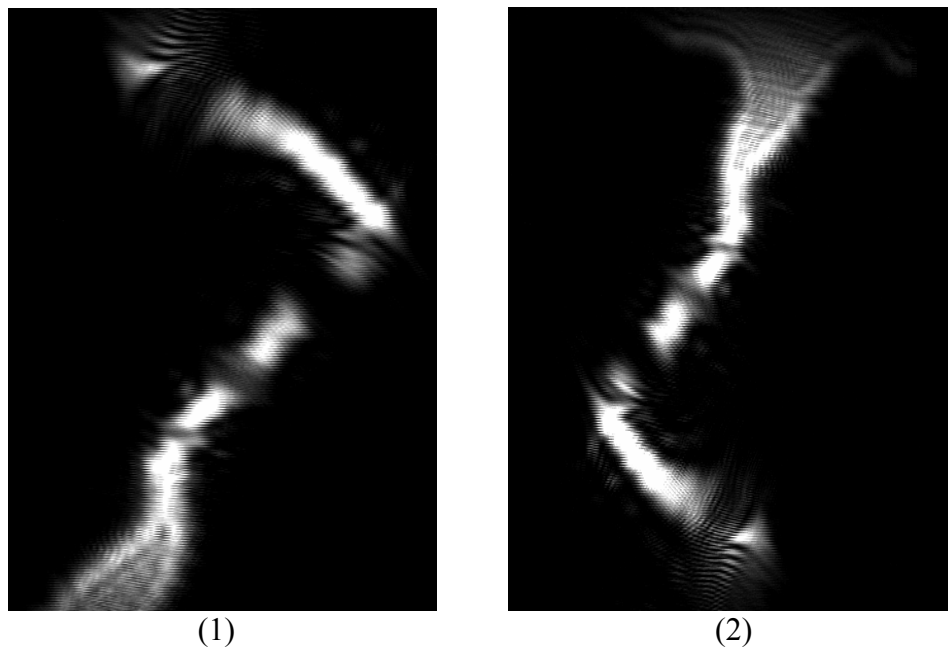


Figura 6.19. Espectros de convolución, de abertura 6.4N

Como se documentó en el capítulo IV, la característica principal de los espectros de difracción de convolución, es que en la región convergente de la lente transformadora, la distribución de intensidad del espectro referido y la orientación de las franjas de interferencia que lo forman, se producen en la que se denominó zona horizontal y vertical derecha. Mientras que en el espectro de difracción que se produce en la zona de divergencia de la lente referida, la distribución de intensidad y la orientación de las franjas de interferencia que definen al espectro de difracción, se producen en la zona horizontal y vertical izquierda; las imágenes 6.19.1 y 2, dan evidencia de lo que se afirma.

Otro aspecto que se resalta de esta etapa experimental, es que: Cuando la abertura bajo estudio con espectros de difracción de transformada exacta o de convolución de transformadas de Fourier, posee una forma geométrica de segmentos bien sea de línea o curvas definidas, se le puede asociar una función matemática también definida. Esto

implica que, la transformada exacta o convolución de las transformadas de Fourier, pueden ser obtenidas a priori y ser correctamente interpretada su forma funcional. Sin embargo, cuando la abertura está compuesta de una geometría variable con segmentos no bien definidos, esto implica que la forma funcional no es tan evidente de inmediato, se observa que los espectros de transformada exacta poseen una distribución de intensidad, cuyas franjas de interferencia poseen una distribución en el plano de frecuencias espaciales  $uv$  muy complicada matemáticamente (ver imágenes 6.7n, ñ y o) y su forma funcional a priori no es tan evidente. Por lo que es más recomendable hacer un análisis en las zonas convergente y divergente de la lente transformadora. Luego entonces, las aberturas definidas en la imagen 6.4N, que actúan como objetos difractors, dan nacimiento a nuevos problemas, tanto desde el punto de vista de la óptica física, como de la matemática aplicada y posiblemente de la simulación en computadora.

### VI.16 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR LA ABERTURA DE LA FIGURA 6.4Ñ

En referencia a las imágenes de las figuras 6.20.1 y 2, ellas fueron grabadas a las distancias  $z_1=19cm$  y  $z_2= 31cm$  respectivamente de la lente transformadora; en la región convergente y divergente de Fresnel; ambas imágenes representan el espectro de convolución de transformadas de Fourier, y propician más información respecto a la forma de la abertura estudiada; además, como se ve en las imágenes referidas, existen zonas de máximos y mínimos de interferencia, cuya interpretación matemática no es tan evidente de forma inmediata; nuevamente esta información, da surgimiento a nuevos problemas para la matemática y la óptica física, así como simulación en computadora.

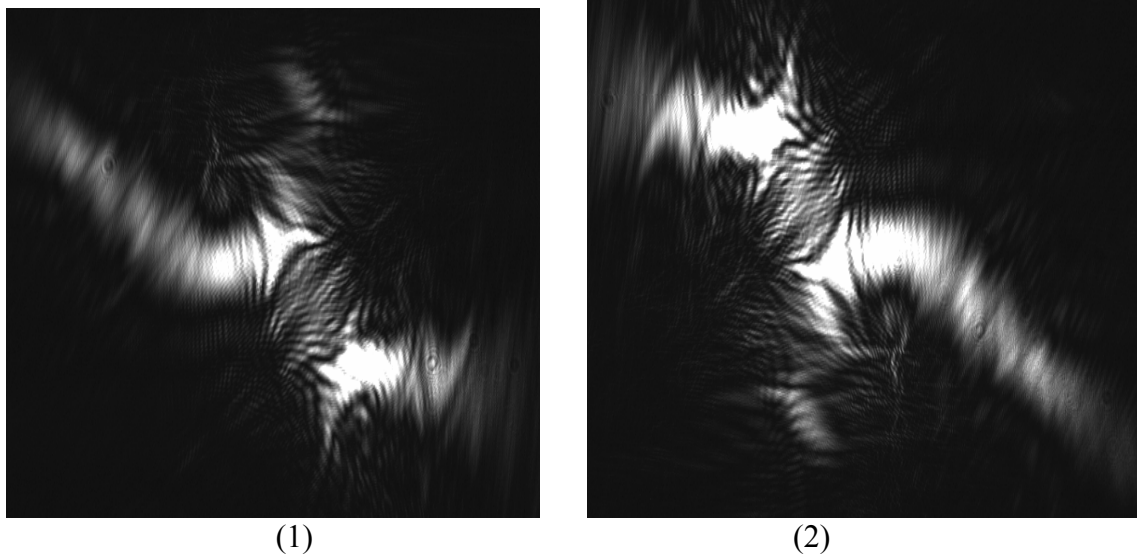


Figura 6.20. Espectros de convolución, de abertura 6.4Ñ

Las imágenes de la figura 6.20, justifican que para investigar aberturas de geometría variable, a la cual no se le puede asociar fácilmente una función específica, que además posee un espectro de transformada exacta poco definido y complicado al cual tampoco se le puede asignar una función matemática; se sugiere analizar la forma de la abertura bajo estudio con las características antes impuestas, con espectros de convolución de transformadas de Fourier. Cabe recalcar que esto da origen a nuevos problemas, tanto matemáticos, así como desde el punto de vista de la óptica física y de la simulación por computadora.

#### VI.17 ESPECTROS DE CONVOLUCIÓN PRODUCIDOS POR EL OBJETO DE LA FIGURA 6.40

Otro objeto que se estudió a través de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, fue el de aberturas múltiples producidas por corrosión y oxidación en lámina de acero con película de zinc o galvanizada, el cual se ilustra en la imagen de la figura 6.40. Su espectro de transformada exacta de Fourier, fue documentado en la figura 6.70. La imagen de dicho espectro se ve poco definida a tal grado de no poder asignarle una función definida; por lo que se requiere de los espectros de convolución de transformada de Fourier. Como se observa en las imágenes de la figura 6.21.1 y 2, los espectros de convolución antes referidos, fueron grabadas a las distancias  $z_1=20cm$  y  $z_2=29cm$  respectivamente de la lente transformadora, y en la zona convergente y divergente o regiones de Fresnel. Aunque dichos espectros propician la forma de la abertura, su forma funcional no es tan evidente y continúa siendo un problema nuevo, a la vez constituye un reto para la matemática y la óptica física, así como para la simulación por computadora, para definir la forma funcional que clarifique más apropiadamente el problema.

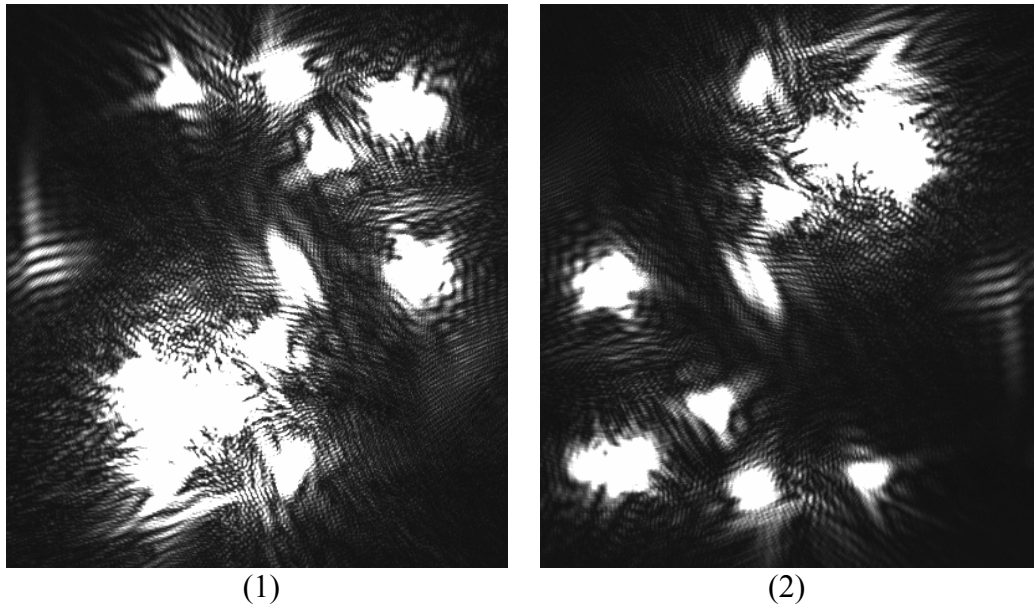


Figura 6.21. Espectros de convolución, de abertura 6.40

## VI.18 ESPECTROS DE DIFRACCIÓN DE ABERTURAS SUJETAS A FUERZA MECÁNICA DE TENSIÓN

A partir de esta sección se dará evidencia experimental a través de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Foutrier, de la variación que sufren las franjas de interferencia que los definen, cuando la pantalla que contiene a la abertura difractora, está sujeta a una fuerza  $\vec{F}_{x0}$  de tensión, cuya magnitud  $\left| \vec{F}_{x0} \right|$  produce lo que se denominará el esfuerzo principal  $\sigma_{x0prin}$ . Aclarando que la fuerza actúa solo en la dirección del eje  $X_0$  del plano objeto  $X_0Y_0$ , y será ejercida por el extensómetro que contiene un dinamómetro (7) para medir la magnitud de la fuerza aplicada al objeto (6) en Kilogramos fuerza o kilopondios (Kg) (Sears y Zemansky, 1976), como se ilustra en el arreglo experimental de la figura 6.22a, que es un arreglo similar al descrito en la figura 6.1a, al que se le implementó el extensómetro referido en el que queda sujeta la abertura bajo estudio; además propicia siempre un estado de equilibrio mecánico.

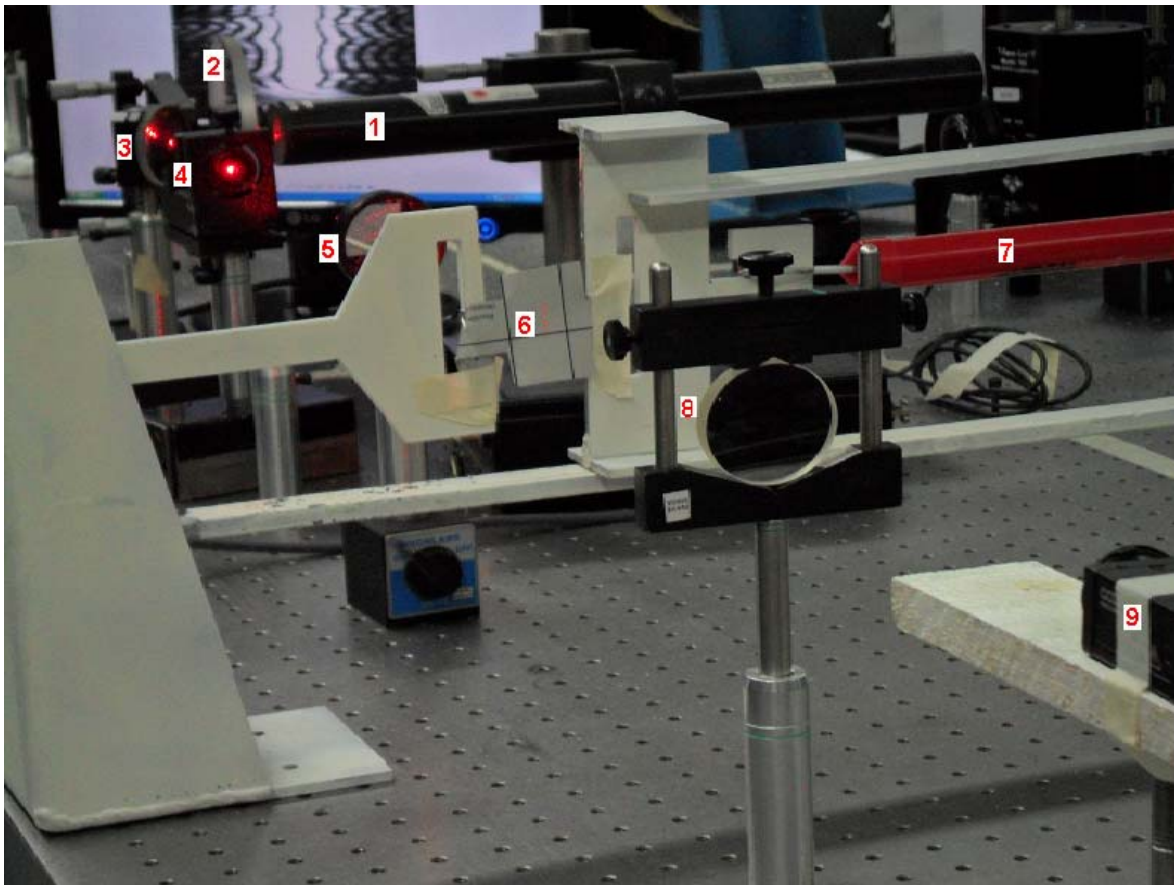


Figura 6.22a Arreglo experimental para estudiar aberturas sometidas a fuerza mecánica de tensión: (1) láser de He-Ne, (2) atenuador de intensidad, (3) espejo plano, (4) filtro espacial, (5) colimador, (6) objeto bajo fuerza de tensión, (7) extensómetro y sensor de fuerza (dinamómetro), (8) lente transformadora, (9) cámara CCD, software y computadora.

La figura 6.22b es el esquema del arreglo experimental de la figura 6.22a, en el que se da referencia de la forma en quedó implementado el material y equipo.

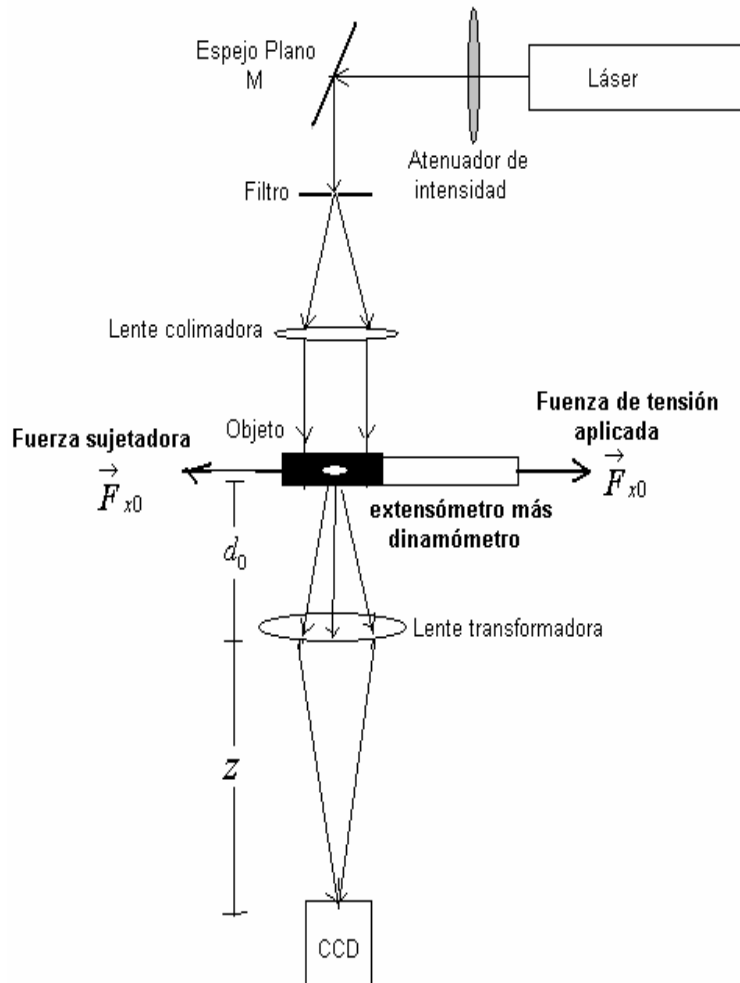


Figura 6.22b Bosquejo del arreglo experimental de la figura 6.22a

Para corroborar parte de los resultados teóricos de la sección V.5. En este caso, se consideró como objeto difractor la abertura producida en lámina de aluminio del grupo 1100, de espesor  $l_z=0.5mm$  que, bajo condiciones iniciales de fuerza aplicada con magnitud de cero kilogramos-fuerza(kgf), es decir  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = 0kgf$ , en el sistema Técnico (Sears y Zemansky, 1976), mantiene la geometría que se muestra en la imagen de la figura 6.23.1, en la que a su vez, se proporcionan medidas de longitud de algunas zonas seleccionadas de la abertura referida. Cuando la magnitud de la fuerza aplicada aumentó a la cantidad  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (0.6 \pm 0.05)kgf$ , la deformación de la abertura antes referida, se hizo evidente y de ello da referencia la figura 6.23.2. Bajo los aumentos en magnitud de la



fuerza aplicada, dados por los valores siguientes  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (1.0 \pm 0.05) \text{kgf}$  y  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (2.0 \pm 0.05) \text{kgf}$ ; la abertura bajo estudio sufrió deformaciones como se ilustra en la figuras 6.23.3 y 4; en las que también se da referencia del valor aproximado que tienen las dimensiones lineales en las mismas zonas seleccionadas, bajo las magnitudes de las fuerzas ejercidas.

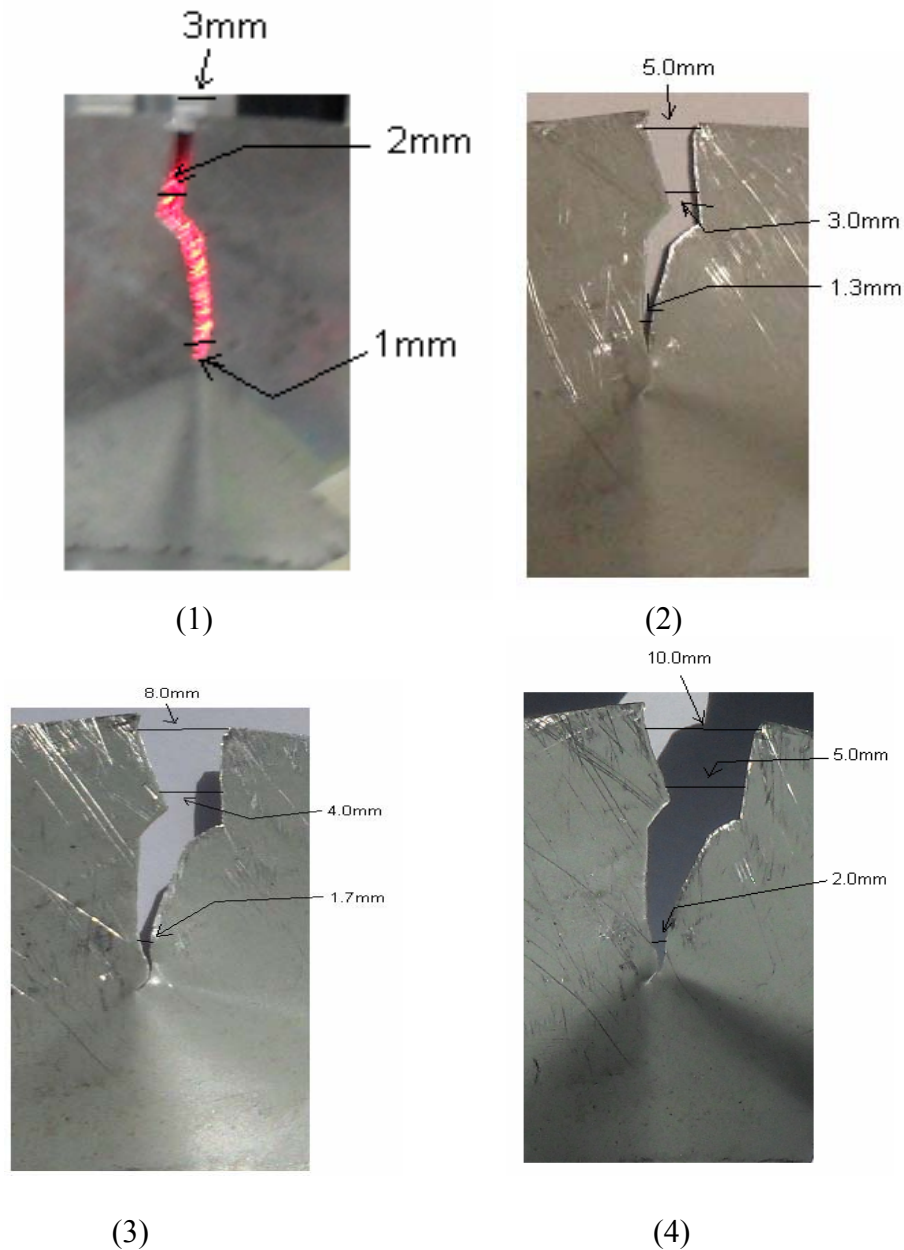


Figura 6.23. Aberturas bajo la acción de una fuerza de diferente magnitud De acuerdo a las imágenes de las figuras 6.23.2, 3, existe deformaciones en la lámina que contiene a la abertura, así como un avance en la fractura (abertura), ocasionada por los

esfuerzos inducidos actuando en forma perpendicular a como se ejerce el esfuerzo principal; es decir hacia los ejes  $Y_0$  y  $Z$ .

### VI.19 ESPECTROS DE TRANSFORMADA EXACTA Y DE CONVOLUCIÓN DE ABERTURA SUJETA A FUERZA MECÁNICA DE TENSION

En la figura 6.24 se muestran las imágenes de los espectros de transformada exacta de Fourier, grabados a la distancia  $z=25\text{cm}$  de la lente transformadora, mediante el sistema opto-electrónico compuesto por la cámara CCD, un software y la PC referido anteriormente. Cada imagen de la figura 6.24, fue grabada cuando la abertura estuvo sujeta a fuerza de tensión con las magnitudes antes comentadas; que en el Sistema Internacional (SI) (Resnik *et al*, 1980) quedan definidas en la forma siguiente:  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (0 \pm 0.49)N$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (5.88 \pm 0.49)N$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (9.8 \pm 0.49)N$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (19.6 \pm 0.49)N$ ; además fueron deformadas como se ilustra en las imágenes de la figura 6.23.

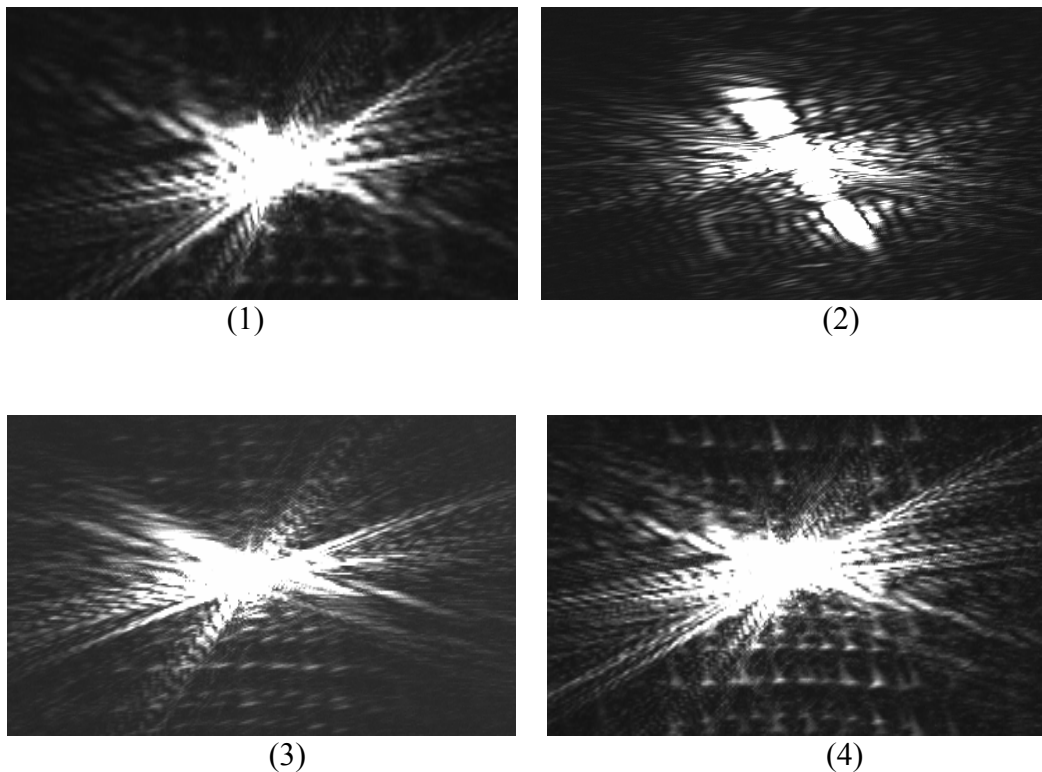


Figura 6.24. Espectros de transformada exacta, objeto bajo fuerza de tensión

Como se observa en las imágenes de los espectros de la figura 6.24, aunque se observan variaciones en la distribución de intensidad, la franjas de interferencia que define cada espectro de difracción, no proporcionan información respecto a la forma geométrica de la abertura bajo estudio, en base a que la distribución de intensidad; tampoco se le puede asociar una función matemática específica, esto es consecuencia de la geométrica variable en la abertura que se estudia. Por lo que se recurre al método de espectros de convolución, como se documenta a continuación.

Los espectros de difracción de convolución de las transformadas de Fourier, como los que se muestran en las imágenes de la figura 6.25.1, 2, 3 y 4. Respecto a la imagen 6.25.1, fue grabada a la distancia de  $z=34cm$ , cuando el objeto estaba en condiciones de fuerza mecánica aplicada de magnitud  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (0 \pm 0.49)N$ , de acuerdo al sistema SI; mientras que las imágenes 6.25.2, 3 y 4 fueron grabadas a las distancias de  $z=34cm$ ,  $29cm$  y  $29cm$ ; y con fuerza aplicada de magnitud  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (5.88 \pm 0.49)N$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (9.8 \pm 0.49)N$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (19.6 \pm 0.49)N$  respectivamente.

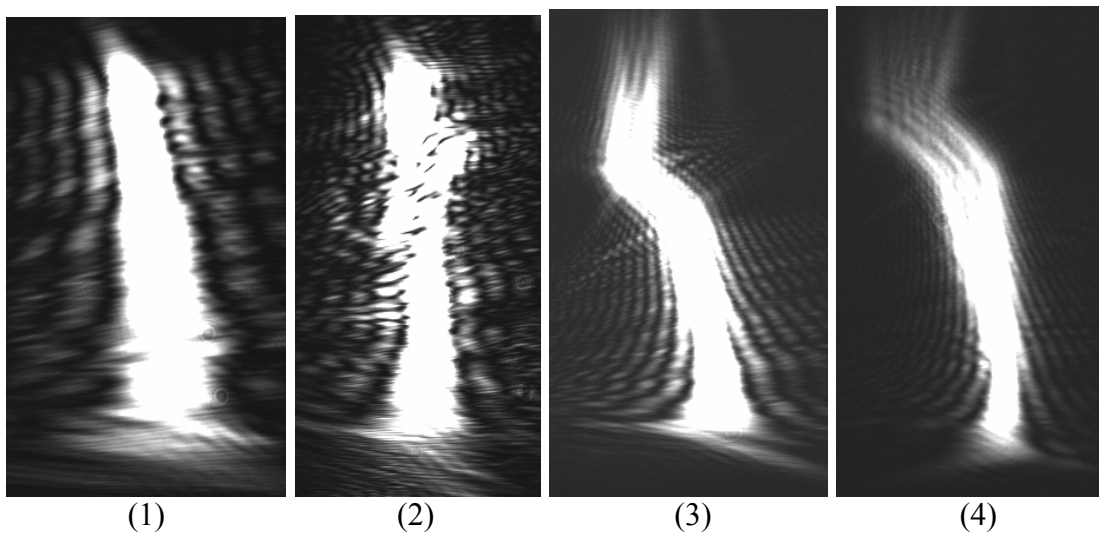


Figura 6.25. Espectros de convolución, objeto bajo fuerza de tensión

Este tipo de espectros de convolución de transformadas de Fourier, proporcionan más idea de la forma de la abertura, que en este caso es de geometría variable ver figuras 6.25.3 y 4 dan más idea de la abertura a través de la distribución de las franjas de interferencia que los definen; además la variación en la distribución de intensidad en ellos, indican que el objeto abertura, amplió sus dimensiones lineales, en la dirección de la fuerza aplicada, esto propicia que el espectro se haga más angosto hacia el eje de frecuencias  $u$  y mejor definido, como se ve en los espectros referidos. Además, en los espectros de convolución referido, se observa que, en la zona en que hay un avance en la abertura, es decir continúa fracturándose por causa de la fuerza en magnitud, la distribución de franjas de interferencia

ha cambiado quedando mejor definidas. Luego entonces, el método de espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier, se propone como el más apropiado para estudiar el avance de fracturas en las aberturas.

## VI.20 ESPECTROS DE ABERTURA RECTANGULAR SUJETA A FUERZA MECÁNICA DE TENSIÓN

Se sometió una abertura de geometría rectangular, construida en lámina de aluminio del grupo 1100 de espesor  $l_z=0.5mm$ , a la acción de una fuerza de tensión de magnitud variable, con lo que se corrobora nuevamente parte de los resultados teóricos de la sección V.5. En este caso, la abertura referida posee las siguientes dimensiones lineales  $l_{x0}=0.5mm$  de ancho,  $l_{y0}=20mm$  de altura y  $l_{z0}=0.5mm$  de espesor. La imagen de la abertura para cada etapa de fuerza aplicada en magnitud se muestra en la figura 6.26.1, 2, 3 y 4. Para la condición inicial de fuerza con magnitud cero kgf, es decir  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (0 \pm 0.05)kgf$ , se muestra en la imagen 6.26.1, en tanto que las imágenes de la abertura sujeta a la acción de fuerza aplicada con magnitud variable de valores  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (1.5 \pm 0.05)kgf$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (2.5 \pm 0.05)kgf$  y  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (3.5 \pm 0.05)kgf$ , se da referencia de ellas en las figuras 6.26.2, 3 y 4.

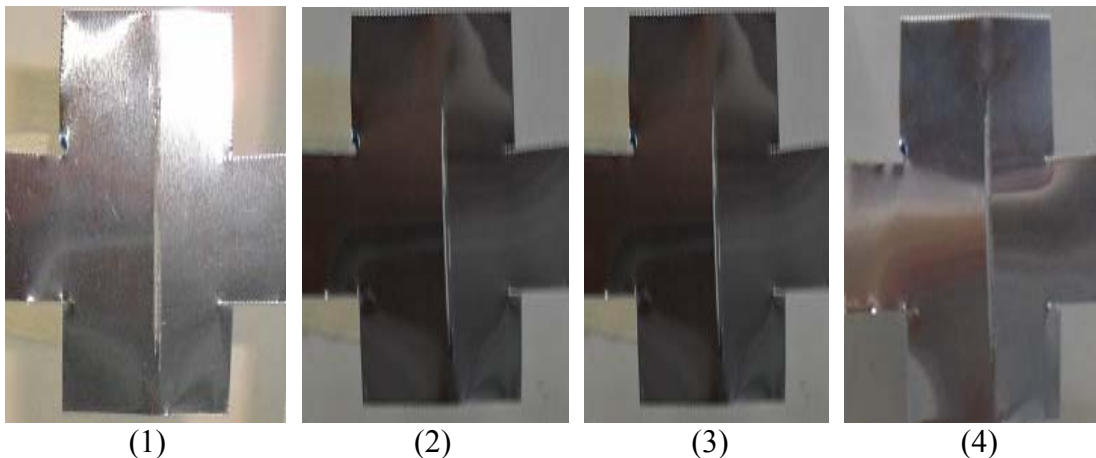


Figura 6.26. Abertura rectangular en lámina de aluminio del grupo 1100, bajo fuerza de tensión

Los espectros de difracción de transformada exacta de Fourier que se muestran en las imágenes 6.27.1, 2, 3 y 4 fueron grabados en el plano de Fraunhofer situado a la distancia  $z=25cm$  de la lente transformadora. En cada caso la abertura rectangular, estuvo sujeta a la acción de una fuerza de tensión en la dirección del eje de coordenadas  $X_0$ , cuyas magnitudes medidas, ahora definidas en el Sistema Internacional (SI) (Resnik *et al*, 1980),

fueron  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (0 \pm 0.49)N$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (14.47 \pm 0.49)N$ ,  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (24.5 \pm 0.49)N$  y

$\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (63.4 \pm 0.49)N$ . Como se observa en cada imagen de la figura 6.27, la distribución de intensidad en cada espectro de difracción fue variando en lo ancho y en su altura, como consecuencia del efecto de deformación que produjo sobre la abertura rectangular la fuerza en magnitud.

Como se observa en cada imagen de la figura 6.27 la distribución de intensidad de cada espectro de transformada exacta, va variando conforme aumenta la magnitud de la fuerza aplicada a la abertura rectangular, propiciando que ella se deforme

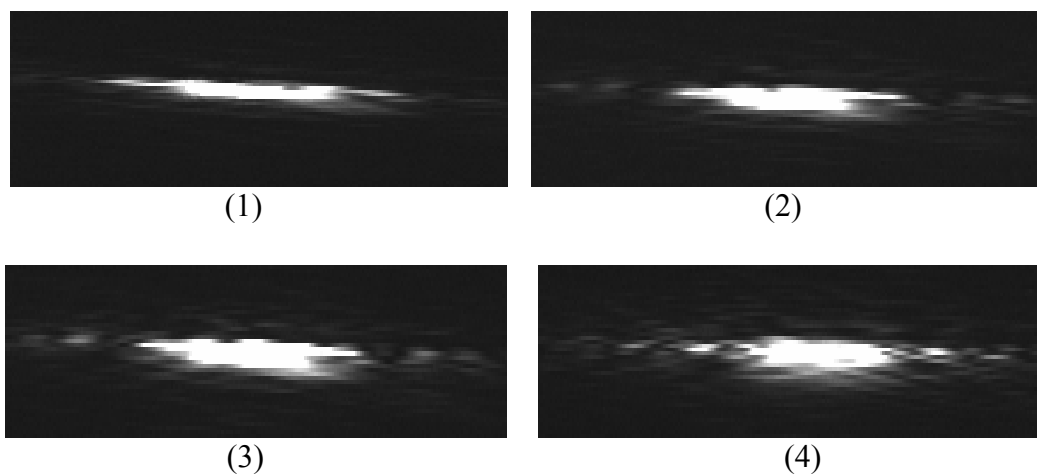


Figura 6.27. Espectros de transformada exacta, objeto bajo fuerza de tensión

Nuevamente, de los espectros de difracción de transformada exacta de Fourier como los mostrados en la figura 6.27, no se obtiene información respecto a la forma de la abertura que los produce. En este caso, se ve que las imágenes de los espectros de esta figura 6.27, se ven muy indefinidos; ya que al observar detalladamente la abertura cuya imagen es la 6.26.1, se observó que en el interior de la abertura, existían bordes producidos el método de fracturado, esto propició que el espectro no se definiera apropiadamente. En base a este comentario, se puede proponer que el método de difracción de transformada de Fourier exacta, permita establecer que la técnica de fracturado, no fue la apropiada.

A continuación, en la figura 6.28 se presentan las imágenes de los espectros de difracción de convolución de transformadas de Fourier. Es bueno comentar que las imágenes de tales espectros fueron grabados a la distancia  $z= 21cm$  y  $z=29cm$  respectivamente de la lente transformadora, con esto se impide deformaciones por amplificación, cuando el grabado se hace a diferentes distancias a las referidas. Además cada espectro fue grabado cuando la abertura rectangular estuvo sujeta a una fuerza de tensión con las magnitudes antes referidas. En las figuras 6.28.1, 2, 3 y 4, las imágenes corresponden a los espectros de difracción grabados a la distancia  $z= 21cm$  en la zona convergente de la lente

transformadora o región de Fresnel; mientras que las imágenes de los espectros de las figuras 6.28.5, 6, 7 y 8 fueron grabados a la distancia  $z=29\text{cm}$  en la zona divergente de la lente referida y en la otra región de Fresnel, por supuesto cuando la abertura rectangular estuvo sujeta a las magnitudes de la fuerza mecánica de tensión antes referidas. Las imágenes de los espectros de difracción mostrados en la figura 6.28, son una evidencia o demostración experimental de la ecuación (5.49), así una confirmación de lo documentado en la sección V.6 del capítulo anterior.

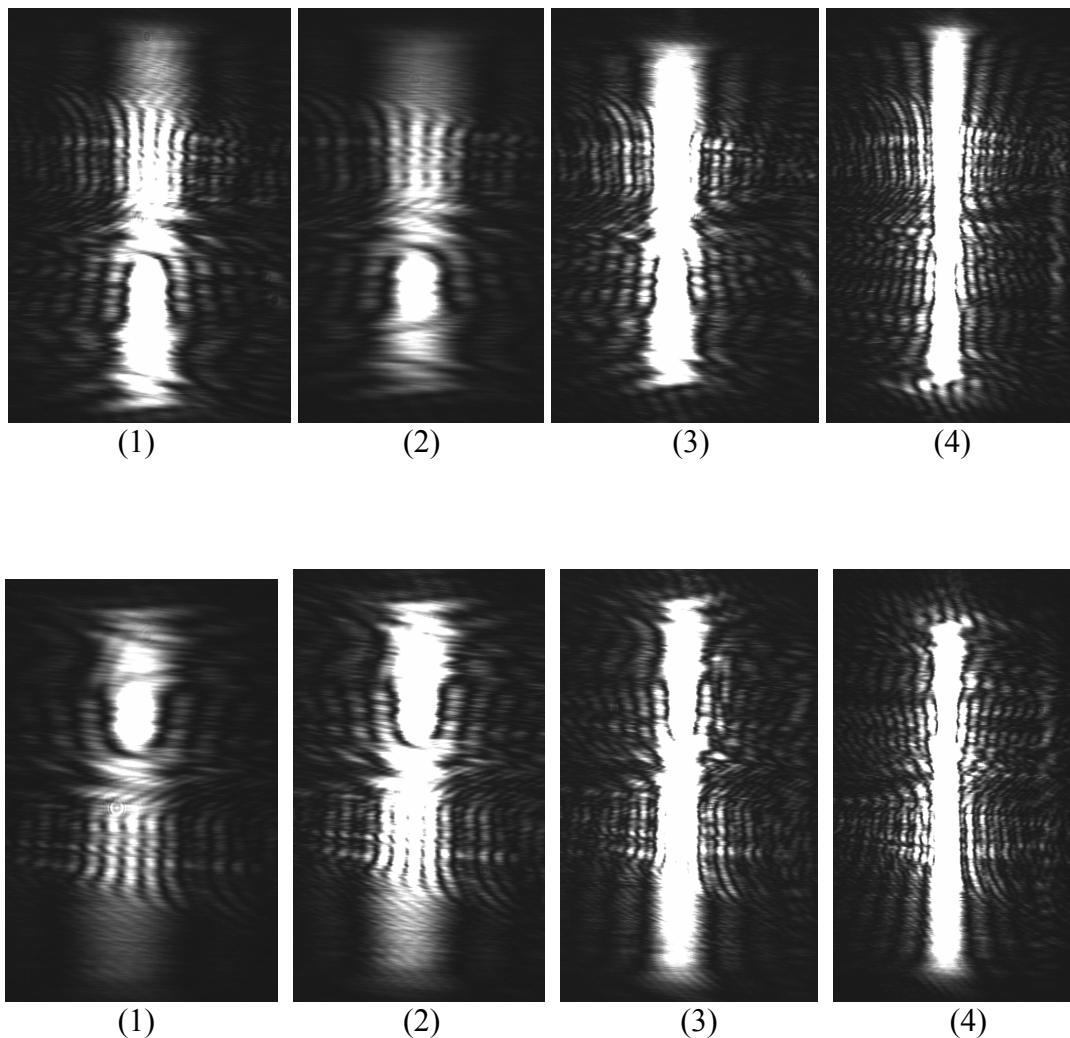


Figura 6.28. Espectros de convolución, objeto bajo fuerza de tensión

Se observa en las imágenes de los espectros de convolución de transformadas de Fourier, que existe una variación en la distribución de franjas de interferencia que define a cada espectro y que es producido por la magnitud de la fuerza aplicada al objeto, lo que implica que el método de espectros de frecuencias espaciales o patrones de difracción de

convolución de transformadas de Fourier, si permite estudiar en forma cualitativa y cuantitativa variaciones que posea el objeto bajo estudio.

Se hace notar que, en este caso se hizo referencia a una abertura rectangular, en base a esto, se le puede asociar una función rectángulo para definir la transmitancia como se especifica en la ecuación (5.33). Pero una abertura rectangular bajo la acción de una fuerza de magnitud cero, debe producir una distribución del espectro en intensidad que ella difracta, muy parecido al espectro de difracción de transformada exacta mostrado en la figura 6.5b o el de la figura 6.5a, que produjeron las aberturas rectangulares mostradas en las imágenes de las figuras 6.2B y A. Más no producir espectros de transformada exacta como los exhibidos en las imágenes de la figura 6.27; esto implica que la abertura que los produjo no se defina su transmitancia mediante una función rectángulo. También se hace notar que, al aumentar la magnitud de la fuerza de tensión sobre la abertura referida, después del valor de  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (3.5 \pm 0.05) \text{kgf}$ , o bien de magnitud  $\left| \vec{F}_{x_0} \right| = (63.4 \pm 0.49) \text{N}$  tal abertura fue fracturada o se rompió de forma total que se separó en dos partes, perdiendo su calidad de abertura rectangular.

## VI.21 CONCLUSIONES AL CAPÍTULO

La información de tipo experimental cualitativa a base de patrones de difracción, y la parcialmente cuantitativa, que se ha obtenido en base del análisis de los diferentes espectros de difracción, producidos por las aberturas difractoras sujetas a estudio. Por un lado, permite afirmar que el método de análisis de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, cumple el objetivo de ser clasificada como una técnica de evaluación cualitativa no destructiva, ya que permite determinar forma, tamaño y posibles deformaciones producidas por esfuerzos inducidos, que posea la abertura en estudio. Además, el método referido, también puede ser usado para estudiar zonas geoméricamente planas circundantes a una abertura cilíndrica contenida en una lámina, si así se requiere; otro aspecto de uso de este método consiste en que, a través de la perfección geométrica de las franjas de interferencia que definen cada espectro de difracción, obtener conclusiones respecto a la calidad del método o técnica de fractura para producir la abertura en la lámina bajo estudio.

En referencia a clasificar el método referido, también como una técnica de evaluación destructiva, como se demostró en la sección VI.18, cumple el cometido, para este caso, se requiere que el extensómetro o galga extensiométrica sea de mejor calidad y automatizar gran parte del arreglo óptico.

Otras conclusiones que se aportan de la información obtenida, son las dificultades que se han tenido para interpretar sobre todo los espectros producidos por las partes circulares de aberturas cilíndricas. En especial en las zonas convergente y divergente de la lente transformadora, en ellas se presenta una confusión en su interpretación, ya que tal parece que los resultados de tipo experimental, no concuerdan con el análisis teórico documentado en el capítulo IV.

Desde el punto de vista de la óptica física y de la matemática, existen espectros de difracción en distribución de intensidad, tanto de transformada exacta como los de convolución de transformadas de Fourier, a los cuales no es tan sencillo interpretarlos por una función específica bien definida, ya que fueron producidos por aberturas difractoras con geometría variable; lo que da nacimiento a nuevos problemas y a la vez implica trabajo a futuro, complementando su solución con un proceso de simulación en computadora.



## CAPÍTULO VII

### CONCLUSIONES GENERALES

Los resultados teóricos y experimentales generados en este trabajo de Tesis, permiten establecer las siguientes conclusiones:

- a) Desde un punto de vista muy particular, sin el uso de lentes, se realizó una descripción de forma escalar, de la propagación del espectro angular en término de una superposición de ondas planas, lo que permitió determinar una función en términos del espectro no propagado y una función de transferencia. Adicionalmente se obtuvo a través de un proceso de transformada de Fourier inversa, el modelo de difracción cuya estructura matemática es la convolución del campo no propagado con un término de propagación (ecuación (2.48)); misma que fue fundamental durante el desarrollo de este trabajo de Tesis.
  
- b) Se produjeron los modelos teóricos de difracción de convolución de transformadas de Fourier; y como un caso especial de convolución, se determinó el de transformada exacta de Fourier; a través de un arreglo óptico coherente, haciendo énfasis en el uso de una lente doblete acromática cementada como lente transformadora, e iluminación del objeto bajo estudio con ondas planas de luz de láser de Helio-Neón.
  
- c) Los modelos de difracción determinados, dan preámbulo para un análisis de funciones definidas específicamente, como fueron la función rectángulo y la función cilindro, las cuales se asociaron a la transmitancias de las aberturas de los objetos difractores bajo estudio. [El amplio tratamiento realizado en la zonas convergente y divergente de la lente transformadora, ha generado modelos matemáticos de convolución de transformadas de Fourier, así como la interpretación de franjas de interferencia de Young con distribución senoidal, resultados que se consideran poco documentados en la literatura (Ersoy, 2007; Goodman, 2005; Yu, 1983, Gaskill,1978; Papoulis, 1968) y se consideran únicos de este trabajo de Tesis.]

- d) Relacionando conceptos de la teoría de difracción de ondas electromagnéticas, con los de mecánica y transferencia de calor; se determinaron nuevas funciones de transmitancia asociada al objeto difractor, en términos del esfuerzo mecánico de tensión o del esfuerzo térmico; así como una función de transmitancia cuando la abertura está sujeta simultáneamente a los dos tipos de esfuerzos referidos. El tratamiento se realizó considerando solo a la abertura rectangular, pudiéndose generalizar a otras aberturas con geometrías diferentes. Los modelos de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, generados en base a las nuevas funciones de transmitancia antes referidas, también se consideran como resultados únicos de este trabajo de Tesis.
- e) Se confirmó a través de resultados de tipo experimental, que el método de espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, cumplen las expectativas de considerarse como técnicas de evaluación no destructiva, y destructiva; por lo que se recomienda su uso en una etapa de selección de material con defectos, ya que permite una inspección y cuantificación de pequeñas fracturas, catalogadas como aberturas. También se recomienda al método de espectros de difracción ya referido, como una técnica de análisis en un ensayo de tenacidad a la fractura, en la que existe una fractura o abertura de tamaño y forma definida, practicada en el material que se selecciona y que se sujeta a una fuerza de tensión cuya magnitud produce un esfuerzo conocido.
- f) Otra conclusión que se deriva de la información experimental, es que, en base a la distribución de intensidad de los espectros de transformada de Fourier y los de convolución de transformadas de Fourier, existen zonas de máxima y de mínima intensidad, en lo que se denominará la parte interna del espectro y la externa a él, algunos producidos en el plano de Frunhofer y otros en los planos de Fresnel; a causa de geometrías múltiples que definen a cada abertura. Esto da lugar a nuevos problemas y su explicación constituye un reto tanto para la óptica física como para la matemática y la simulación en computadora.

## VII.1 TRABAJO FUTURO

- g) Con aberturas cilíndricas cuyas partes circulares cumplen la condición de poseer un diámetro  $D$ , con la condición de que su magnitud sea  $D \leq 0.5 \text{ mm}$ , se tiene el efecto o fenómeno que se ha denominado AUTOENFOQUE DE CONVOLUCIÓN, en el que, a partir del plano de la transformada exacta de Fourier o de Fraunhofer, la distribución del máximo central, que en ese plano posee un diámetro, conforme el espectro se propaga del plano referido, hasta la región divergente de la lente transformadora el máximo referido va disminuyendo su diámetro hasta distribuirse en un plano de Fresnel, en el que en lugar de máximo existe un mínimo de

intensidad en la zona central. Explicar este fenómeno se considerará como trabajo a futuro.

- h) Los desarrollos teóricos y los resultados de tipo experimental documentados a través de este trabajo de Tesis abren pauta a nuevas líneas de investigación como las siguientes: realizar un trabajo de tipo experimental realizando transferencia de calor a la abertura difractante; generar un programa de simulación en computadora usando algún software apropiado. Solucionar matemáticamente los problemas de los cuales se obtuvo evidencia experimental. Trabajar teórica y experimentalmente con otro tipo de materiales y aberturas, sujetas a fuerza de tensión o compresión. Realizar una etapa experimental en la que la abertura como objeto difractor esté sujeta simultáneamente a esfuerzo mecánico de tensión o compresión y a esfuerzo térmico. Realizar otra etapa experimental, en la que el objeto difractor esté sujeto solo a transferencia de calor.
- i) Abrir una línea de investigación para tratar los problemas de difracción de aberturas gruesas contenidas en pantallas de lámina de aluminio 6061, mostradas en la figura 6.3. Como se documentó en la sección en la sección VI.2, VI.3, VI.6, 7, 8 y 9 se obtuvo evidencia experimental respecto a espectros de difracción de transformada exacta y de convolución de transformadas de Fourier, sin un soporte teórico.

## ANEXO A

### DEFINICIONES Y TEOREMAS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Se presentan algunas definiciones y teoremas de transformadas de Fourier, mismos que se utilizan a través de la redacción de este Trabajo de Tesis. En los teoremas que se documentan a continuación, no se proporciona la forma de deducirlos, ya que sale de las expectativas del trabajo referido.

Algunos conceptos: La transformada de Fourier unidimensional de una función  $F(x)$ , se define a través de la integral

$$\mathfrak{F}\{F(x)\} = g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i2\pi ux} dx, \quad (\text{A-1})$$

y puede ser interpretada como una transformación lineal, que mapea al conjunto de valores en general complejos, dados por  $F(x)$  en otro conjunto de números, también complejos en general, dados por  $g(u)$ . Las variables  $x$  y  $u$  que aparecen en la definición de la ecuación a-1, reciben el nombre de variables conjugadas. Si la integral A-1 existe para todo valor real de  $u$ , esto define a la función  $F(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{g(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i2\pi ux} du$  que se conoce como la transformada Fourier inversa. La condición para que  $g(u)$  exista, generalmente se da si  $F(x)$  es absolutamente integrable en el sentido de que (Spiegel, 1980; Gaskill, 1978):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx < \infty. \quad (\text{A-2})$$

Se observa que la función (A-2) es una condición suficiente, pero no necesaria para la existencia de  $g(u)$ , puesto que hay funciones que no son absolutamente integrables y pueden tener transformada de Fourier, como ejemplo se tiene la función de onda plana definida como  $e^{im_0 x}$ , que no es de cuadrado integrable, pero su transformada de Fourier es la función delta de Dirac  $\delta(u_0 - u)$ .

La extensión de la transformada de Fourier definida en la ecuación A-1, al caso de una función de valores complejos de dos variables, digamos  $F(x, y)$ , se representa como  $\mathfrak{F}\{F(x, y)\}$ , y se define en la forma

$$g(u, v) = \mathfrak{F}\{F(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy. \quad (\text{A-3})$$

Similarmente la transformada de Fourier inversa de la función  $g(u, v)$  se representa por la expresión  $\mathfrak{T}^{-1}\{g(u, v)\}$  y se define como

$$F(x, y) = \mathfrak{T}^{-1}\{g(u, v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) e^{i2\pi(xu+yv)} du dv. \quad (\text{A-4})$$

Es posible que se pueda obtener un conjunto de condiciones suficientes para la existencia de la ecuación (A-3), pero el conjunto más común es el siguiente:

1.  $F(x)$  tiene que ser absolutamente integrable sobre todo el plano infinito  $XY$ .
2.  $F(x)$  debe tener solo un número finito de discontinuidades, y un número finito de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito.
3.  $F(x)$  No debe tener alguna discontinuidad infinita-

Bajo las condiciones antes impuestas, se enuncian los siguientes teoremas y definiciones, considerando solo una dimensión espacial  $x$  y una de frecuencia espacial  $u$ , como se documenta a continuación:

### 1.- TEOREMA DE LINEALIDAD

El teorema de linealidad establece que, si  $F(x)$  y  $H(x)$  tienen como transformada de Fourier a  $g(u)$  y  $h(u)$  respectivamente, y si  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , entonces la transformada de Fourier de la suma  $[a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + \dots + a_nF_n(x)]$  queda definida a través de la siguiente expresión.

$$\mathfrak{T}\{a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + \dots + a_nF_n(x)\} = a_1g_1(u) + a_2g_2(u) + \dots + a_ng_n(u). \quad (\text{A-5})$$

### 2.- TEOREMAS FUNDAMENTALES DE FOURIER O FÓRMULAS DE INVERSIÓN

La siguiente fórmula de inversión establece que, la transformada de Fourier inversa de una transformada de Fourier, produce la función original, esto es,

$$\mathfrak{T}^{-1}\{ \mathfrak{T} \{ F(x) \} \} = F(x). \quad (\text{A-6})$$

Otra fórmula de inversión establece que, la transformada de Fourier de una transformada de Fourier inversa, también reproduce la función original, es decir,

$$\mathfrak{T} \{ \mathfrak{T}^{-1}\{ g(u) \} \} = g(u) \quad (\text{A-7})$$

### 3.- TEOREMA DE DESPLAZAMIENTO Y ESCALAMIENTO

Si la función  $F(x)$  tiene como transformada de Fourier a  $g(u)$ , y si  $a, b$  son constantes reales y no cero, entonces, el teorema de desplazamiento y escalamiento establece que:

$$\mathfrak{T}\{F(ax-b)\} = \mathfrak{T}\left\{F\left(a\left[x-\frac{b}{a}\right]\right)\right\} = \frac{1}{|a|} e^{-i2\pi\frac{b}{a}u} g\left(\frac{u}{a}\right) \quad (\text{A-8})$$

### 4.- TEOREMA DE LA TRANSFORMADA DE UNA CONVOLUCIÓN DE FUNCIONES

Sea  $F(x)$  y  $H(x)$  dos funciones definidas y que existen, cuyas transformada de Fourier son  $\mathfrak{T}\{F(x)\} = g(u)$  y  $\mathfrak{T}\{H(x)\} = h(u)$ , entonces se tiene, que la transformada de Fourier de la convolución de las funciones referidas, es

$$\mathfrak{T}\{F(x) \otimes H(x)\} = \mathfrak{T}\{F(x)\} \mathfrak{T}\{H(x)\} = g(u)h(u), \quad (\text{A-9})$$

donde el símbolo  $\otimes$  significa la operación matemática de convolución.

### 5.- DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN DE FUNCIONES

Sea  $F(x)$  y  $H(x)$  dos funciones definidas, entonces la convolución de tales funciones se define en la forma

$$C(x) = F(x) \otimes H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta)H(x-\beta)d\beta. \quad (\text{A-10})$$

Algunas de las propiedades que posee la convolución de funciones, son: la propiedad conmutativa

$$C(x) = F(x) \otimes H(x) = H(x) \otimes F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\beta)F(x-\beta)d\beta. \quad (\text{A-11})$$

Otra propiedad de la convolución de funciones, es la distributiva que se describe de la forma siguiente: Con  $a$  y  $b$  constantes arbitrarias, se establece que,

$$[aV(x) + bH(x)] \otimes F(x) = a[V(x) \otimes F(x)] + b[H(x) \otimes F(x)]. \quad (\text{A-12})$$

La propiedad de convolución de una función delta de Dirac o función impulso, establece lo siguiente

$$F(x) = F(x) \otimes \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\delta(x-\alpha)d\alpha. \quad (\text{A-13})$$

Como la función delta de Dirac es una función par, también se puede escribir

$$F(x) = F(x) \otimes \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \delta(\alpha - x) d\alpha \quad (\text{A-14})$$

La convolución de varias funciones, para esto, supóngase por ejemplo que la función  $F(x)$  es la convolución de funciones definida como

$$F(x) = P(x) \otimes H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) H(x - \alpha) d\alpha ; \quad (\text{A-15})$$

entonces, la convolución de  $G(x) = F(x) \otimes V(h)$ , queda definida en la forma siguiente

$$\begin{aligned} G(x) &= [P(x) \otimes H(x)] \otimes V(h) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) H(x - \alpha) d\alpha \right] \otimes V(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P(\beta) H(\beta - \alpha) d\alpha \right] V(x - \beta) d\beta. \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

La propiedad asociativa de la convolución, haciendo uso de la propiedad conmutativa, se visualizar a través de la siguiente expresión

$$\begin{aligned} [P(x) \otimes H(x)] \otimes V(h) &= P(x) \otimes H(x) \otimes V(h) = \\ &= P(x) \otimes V(x) \otimes H(h) = H(x) \otimes P(x) \otimes V(h), \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

## 6.- TEOREMA DE LA TRANSFORMADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

El teorema de la transformada de un producto de funciones, es igual a la convolución de sus transformadas de Fourier individuales, o sea,

$$\mathfrak{F}\{F(x)H(x)\} = \mathfrak{F}\{F(x)\} \otimes \mathfrak{F}\{H(x)\} = g(u) \otimes h(u), \quad (\text{A-18})$$

donde  $\mathfrak{F}\{F(x)\} = g(u)$  es la transformada de de Fourier de la función  $F(x)$  y  $\mathfrak{F}\{H(x)\} = h(u)$  será la transformada de Fourier de la función  $H(x)$ .

## 7.- TEOREMA DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

El teorema de la transformada de Fourier inversa de un producto de funciones, es igual a la convolución de sus transformadas de Fourier inversas individuales, o sea,

$$\mathfrak{F}^{-1}\{g(u)h(u)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{g(u)\} \otimes \mathfrak{F}^{-1}\{h(u)\} = F(x) \otimes H(x), \quad (\text{A-19})$$

en este caso  $\mathfrak{F}^{-1}\{g(u)\} = F(x)$  es la transformada de de Fourier inversa de la función  $g(u)$  y  $\mathfrak{F}^{-1}\{h(u)\} = H(x)$  será la transformada de Fourier inversa de la función  $h(u)$ .

## 8.- DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC EN EL ESPACIO DE COORDENADAS

En el espacio de coordenadas  $x$ , se define a la función delta de Dirac, también conocida como la función impulso, en la forma siguiente:

$$\delta(x - \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi[x-\beta]u} du . \quad (\text{A-20})$$

## 9.- PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC O IMPULSO EN EL ESPACIO DE COORDENADAS

Una propiedad de la delta de Dirac, es la de cernimiento y queda definida mediante la siguiente expresión

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta)\delta(x - \beta)d\beta . \quad (\text{A-21})$$

Otras propiedad de la delta de Dirac es la de desplazamiento definida como

$$F(x_0) = \int_{x_1}^{x_2} F(\alpha)\delta(\alpha - x_0)d\alpha , \quad x_1 < x_0 < x_2 ; \quad (\text{A-22})$$

también

$$\delta(\alpha - x_0) = 0 , \quad x \neq x_0 . \quad (\text{A-23})$$

Las propiedades de escalamiento de la función delta de Dirac son las que se enuncian a continuación,

$$\delta\left(\frac{x - x_0}{b}\right) = |b|\delta(x - x_0) \quad \text{y} \quad \delta(ax - x_0) = \left(\frac{1}{|a|}\right)\delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right), \quad (\text{A-24})$$

$$\delta(-x + x_0) = \delta(x - x_0) \quad \text{y} \quad \delta(-x) = \delta(x). \quad (\text{A.25})$$

## 10.- DEFINICIÓN DE LA FRUNCIÓN DELTA DE DIRAC EN EL ESPACIO DE FRECUENCIAS ESPACIALES

Es posible definir una función impulso o delta de Dirac en el espacio de frecuencias espaciales  $u$ , de acuerdo con la siguiente expresión

$$\delta(\alpha - u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi[\alpha-u]x} dx . \quad (\text{A-26})$$

Mientras que la propiedad de cernimiento de la función delta de Dirac en el espacio de frecuencias espaciales es,

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\delta(\alpha - u)d\alpha . \quad (\text{A-27})$$



## ANEXO B

### LENTE DOBLETE CEMENTADA

#### B.1.- GENERALIDADES Y ASPECTOS TEÓRICOS

La redacción del cuerpo principal de este trabajo de Tesis, en su capítulo II, fue desarrollado tomando en cuenta una lente doblete acromática cementada como transformadora. En la propagación del espectro de difracción desde el plano objeto y a través de la lente referida, existen diferentes condiciones para los parámetros distancia objeto  $d_0$ , distancia  $z$  al plano de distribución del espectro referido y distancia focal  $f_{LD}$  medidas respecto de la lente transformadora, involucrados en la ecuación paraxial que la rige. Por lo que el objetivo del siguiente desarrollo, consiste en presentar diferentes aspectos y las otras condiciones que deben cumplir los parámetros antes descritos, como se documenta a continuación.

#### B.2.- ECUACIÓN PARAXIAL DE UNA LENDE DOBLETE CEMENTADA

La configuración de una lente doblete cementada, depende de los tipos de vidrio escogidos; entre otros tipos, la lente doblete acromático cementado tipo Fraunhofer es el sistema óptico más comúnmente usado, está formada por una lente biconvexa de vidrio Crown, en contacto con lente cóncava casi plana de vidrio Flint. La forma global de este tipo de lente, es muy parecida a una lente plano convexa ( Newport, 1993; Hecht y Zajac, 1998).

Un proceso para determinar la ecuación paraxial de la lente doblete cementada se determina, se realiza haciendo uso de conceptos de óptica geométrica y del bosquejo de la figura B.1, que es un sistema compuesto de dos lentes delgadas  $L_1$  y  $L_2$  sumergido en aire. Cada lente está formada de vidrios ópticos de índices de refracción  $n_{l_1}$  y  $n_{l_2}$  diferentes, que conjuntamente con el aire poseen las propiedades de ser isotrópicos, lineales, transparentes, no absorbentes, dieléctricos y no conductores.

Hech y Zajac, (1998) establecieron que cada lente delgada del sistema de la figura B.1, los parámetros de distancia focal, objeto e imagen, se pueden relacionar a través de las ecuaciones paraxiales siguientes:

$$\frac{1}{S_{01}} + \frac{1}{S_{i1}} = (n_{l_1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad R_2 < 0 ; \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{1}{S_{02}} + \frac{1}{S_{i2}} = (n_{l_2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right), \quad R_4 < 0 . \quad (\text{B.2})$$

Sumando las ecuaciones (B.1) y (B.2), se obtiene

$$\frac{1}{S_{01}} + \frac{1}{S_{i1}} + \frac{1}{S_{02}} + \frac{1}{S_{i2}} = (n_{l_1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l_2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right). \quad (\text{B.3})$$

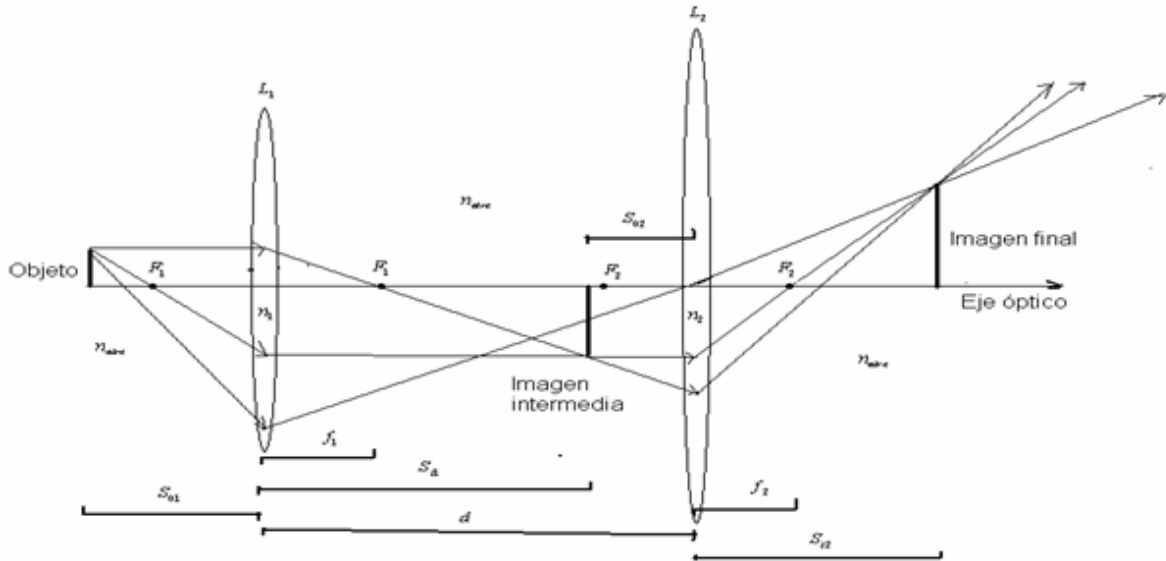


Figura B.1. Esquema de una lente doblete separada

De la figura B.1 se tiene que  $S_{i1} = d - S_{02}$ , lo que permite escribir a la ecuación (B.3) como

$$\frac{1}{S_{01}} + \frac{1}{S_{i2}} = (n_{l_1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l_2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) - \frac{d}{(d - S_{02})S_{02}}. \quad (\text{B.4})$$

Para el caso en que la distancia de separación entre las lentes  $L_1$  y  $L_2$  es  $d = 0$ , la ecuación (B.4) se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{1}{S_{0LD}} + \frac{1}{S_{iLD}} = (n_{l_1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l_2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right). \quad (\text{B.5})$$

La ecuación (B.5) será identificada como la ecuación paraxial de la lente doblete cementada “delgada” que relaciona el recíproco de los parámetros distancia objeto y distancia imagen designadas como  $S_{0LD}$  y  $S_{iLD}$ , con los parámetros de los índices de refracción  $n_{L_1}$  y  $n_{L_2}$  asociados al material del que están fabricadas las lentes involucradas, así como con los

recíprocos de los radios de curvatura  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  de las superficies esféricas que las forman, siempre y cuando la lente doblete actúe o esté sumergida en aire de índice de refracción  $n_{aire} \cong 1$ . La forma de la lente doblete cementada queda ilustrada en la figura 2.2.

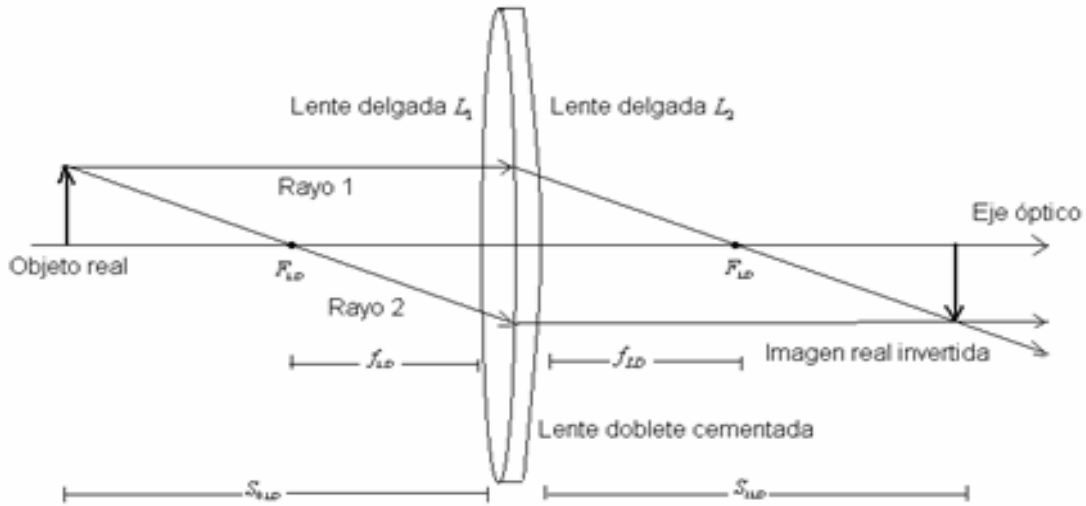


Figura B.2. Configuración de una lente doblete cementada y sus parámetros

### B.3.- DEFINICIÓN DE DISTANCIA FOCAL Y SU RELACIÓN CON LA ECUACIÓN PARAXIAL

Existen otros parámetros que se le debe asociar a la lente doblete cementada, los cuales se obtendrán mediante un proceso de límite como se documenta a continuación. Primeramente se obtiene la distancia focal posterior, que será designada como  $d.f.p$ ; para esto, se determina el límite de la ecuación (B.5) cuando  $S_{01} \rightarrow \infty$  y si además se considera que

$\lim_{S_{01} \rightarrow \infty} S_{i2} = d.f.p$ , esto es,

$$\lim_{S_{01} \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{S_{01}} + \frac{1}{S_{i2}} \right) = \lim_{S_{01} \rightarrow \infty} \left[ (n_{l1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) \right]. \quad (B.6)$$

Después de simplificar queda la ecuación siguiente

$$\frac{1}{\lim_{S_{01} \rightarrow \infty} S_{i2}} = \frac{1}{d.f.p} = (n_{l1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right). \quad (B.7)$$

De una manera similar se obtiene ahora el límite de la ecuación (B.5) cuando  $S_{i2} \rightarrow \infty$  y considerando que  $\lim_{S_{i2} \rightarrow \infty} S_{o1} = d.f.f$ , es decir se determina la distancia focal frontal designada como  $d.f.f$ , esto es,

$$\lim_{S_{i2} \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{S_{o1}} + \frac{1}{S_{i2}} \right) = \lim_{S_{i2} \rightarrow \infty} \left[ (n_{l1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) \right]. \quad (B.8)$$

Al operar y simplificar, se obtiene

$$\frac{1}{\lim_{S_{i2} \rightarrow \infty} S_{o1}} = \frac{1}{d.f.f} = (n_{l1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right). \quad (B.9)$$

Como se observa que las ecuaciones (B.7) y (B.9) son iguales, lo que permite escribir que

$$d.f.p = d.f.f = f_{LD}. \quad (B.10)$$

En la ecuación (B.10) destaca que una lente doblete cementada posee la misma distancia focal posterior como la frontal, bajo este concepto es indistinto sobre qué superficie se le hace incidir luz, cuando la lente referida sea usada en una etapa experimental. Luego entonces, en base a la ecuación (B.10) se puede escribir la ecuación paraxial de la lente delgada, que asocia la distancia focal  $f_{LD}$  asociada a la lente referida con la distancia objeto e imagen, es decir,

$$\frac{1}{f_{LD}} = (n_{l1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right). \quad (B.11)$$

La ecuación (B.11) también se puede escribir de acuerdo a la ecuación (B.5) en la forma

$$\frac{1}{f_{LD}} = \frac{1}{S_{oLD}} + \frac{1}{S_{iLD}} = (n_{l1} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{l2} - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right). \quad (B.12)$$

Una ecuación similar a la ecuación (B.11) fue deducida por otro método por Hecht y Zajac, (1998). Además, los casos límite discutidos, llevan a tratar de predecir la forma de cómo produce la lente doblete cementada la imagen de un objeto, como se ilustra en la figura B.2. Como se ve la óptica geométrica limita la información respecto a la imagen que produce la lente doblete cementada, ya que no existe información respecto a la distribución de la fase de las ondas que producen la imagen del objeto bajo estudio.

#### B.4.- LA AMPLIFICACIÓN TRANSVERSAL

Otro parámetro de importancia que se le asocia a una lente doblete cementada es la amplificación transversal  $M_T$ . Para esto, basta recordar que Hecht y Zajac, ( 1998) establecieron que la amplificación transversal para una lente doblete, es igual al producto de las amplificaciones individuales de cada lente que la componen, esto es:

$$M_T = M_{TL1}M_{TL2} = \left( -\frac{S_{i1}}{S_{o1}} \right) \left( -\frac{S_{i2}}{S_{o2}} \right) . \quad (\text{B.13})$$

Nuevamente de la figura B.1, se tiene que  $S_{i1} = d - S_{o2}$ , entonces la ecuación (B.13) se escribe como

$$M_T = \left( -\frac{d - S_{o2}}{S_{o1}} \right) \left( -\frac{S_{i2}}{S_{o2}} \right) . \quad (\text{B.14})$$

Ahora, para el caso de que una lente doblete cementada, implica que  $d \rightarrow 0$  y entonces la expresión para la amplificación será

$$M_T = \left( -\frac{S_{iLD}}{S_{oLD}} \right) . \quad (\text{B.15})$$

Es decir, la amplificación transversal  $M_T$  asociada a la lente doblete cementada, está en términos de la razón, entre la distancia a la imagen  $S_{iLD}$ , medida desde la última superficie de la lente, a la distancia al objeto  $S_{oLD}$ , medida desde éste hasta la primera superficie de la lente doblete cementada.

#### B.5.- VARIACIÓN DE LA FASE DE UNA ONDA MONOCROMÁTICA Y LA FUNCIÓN DE TRANSMITANCIA

Se determinará el modelo matemático de la variación de fase que sufre las ondas difractadas propagándose a través de una lente doblete cementada, se retoman las afirmaciones hechas por Goodman, (2005) y Yu (1983) quienes propusieron en su libros, que la variación de fase que sufre una onda monocromática, al propagarse por la lente esférica delgada hecha de vidrio de índice refracción  $n_{L1}$  y que forma la lente doblete cementada como la esquematizada en la figura B.2, sufre una variación que puede ser expresada a través de la siguiente ecuación:

$$\Delta\Phi_{L1}(x, y) = n_{L1}\Delta_{oL1} - \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] (n_{L1} - 1) . \quad (\text{B.16})$$

En la ecuación (B-16) el término  $\Delta_{0L1}$  es el espesor de la lente delgada  $L_1$  en su parte central, en tanto que  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura asociados a las superficies que la forman, mientras que  $n_{L1}$  es el índice de refracción del tipo de vidrio que la forma.

Ahora, la variación de fase de la onda monocromática que se propaga a través de la segunda lente esférica delgada designada por  $L_2$ , ver figura B.2, que está hecha con vidrio de índice de refracción  $n_{L2}$ , recordando que los índices de refracción de las dos lentes delgadas que forman el doblete cementado deben de cumplir la condición  $n_{L1} \neq n_{L2}$ ; tiene la siguiente forma funcional,

$$\Delta\Phi_{L2}(x,y) = n_{L2}\Delta_{0L2} - \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \left[ \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right] (n_{L2} - 1) . \quad (\text{B.17})$$

Por lo tanto, la variación total en la fase  $\Delta\Phi(x,y)$  de las ondas monocromáticas que se propaga a través de la lente doblete cementada, la propuesta en este trabajo de Tesis, es que sea igual a la suma de las variaciones en la fase que sufren las ondas referidas al propagarse en cada lente, es decir

$$\Delta\Phi(x,y) = \Delta\Phi_{L1}(x,y) + \Delta\Phi_{L2}(x,y) . \quad (\text{B.18})$$

La ecuación (B.18) puede ser escrita en base a las ecuaciones (B.16) y (B.17) en la forma siguiente.

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(x,y) = & (n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2}) - (n_{L1} - 1) \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \\ & - (n_{L2} - 1) \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \left[ \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Ahora, la forma funcional de la transmitancia asociada a lente doblete cementada, se define como

$$t_t(x,y) = P(x,y) \exp\{ik\Delta\Phi(x,y)\} . \quad (\text{B.20})$$

En la ecuación (B.20) la función  $P(x,y)$  es conocida como la función de pupila, cuya forma funcional es,

$$P(x,y) = \text{cir} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \exp\{-ikW(x,y)\} . \quad (\text{B.21})$$

Es decir, la función de pupila queda definida como el producto de la función círculo

$cir\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$  misma que es definida en la siguiente forma (Goodman, 2005)

$$cir\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = \begin{cases} 1, \dots si & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0, \dots si & \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases} \quad (B.22)$$

Mientras que la función  $W(x,y)$  en la exponencial de la ecuación (B.21), se conoce como la función de aberración del frente de onda que le produce la lente al propagarse en ella (Welford, 1991). Esta función depende del tipo de aberración más sobresaliente que esté presente en la lente doblete cementada. En base a (B.21) y (B.22), la función de transmitancia asociada a la lente doblete cementada es:

$$t_l(x,y) = cir\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \exp\{-ikW(x,y)\} \exp\{ik\Delta\Phi(x,y)\} \quad (B.23)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (B.19) en la ecuación (B.23), se tiene la función de transmitancia es expresada como

$$t_l(x,y) = cir\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \exp\{-ikW(x,y)\} \exp\{ik[ (n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2}) - (n_{L1}-1)\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] - (n_{L2}-1)\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\left[\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right] ]\} \quad (B.24)$$

De acuerdo a la ecuación (B.12), la ecuación (B.24) queda reducida a la siguiente expresión,

$$t_l(x,y) = cir\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \exp\{-ikW(x,y)\} \bullet \exp\{ik(n_{L1}\Delta_{0L1} + n_{L2}\Delta_{0L2})\} \exp\left\{-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2f_{LD}}\right)\right\} \quad (B.25)$$

## ANEXO C

### VIÑETEADO Y FRECUENCIAS ESPACIALES

#### C.1.- FRECUENCIA ESPACIAL MÁXIMA

Cuando un objeto difractor extendido se sitúa a una distancia  $d_o$  de una lente convergente doblete cementada, como se ilustra en la figura 3.1, uno de los principales problemas que surge en la propagación del campo de difracción producido por el objeto extendido y que incide sobre la lente referida es el efecto de viñeteado y la captación de una frecuencia espacial máxima asociada al espectro de difracción Goodman, (2005) y Hecht y Zajac, (1998). Esto se debe tanto a las dimensiones lineales del objeto extendido, como a las limitaciones que impone la abertura finita de la pupila asociada a la lente transformadora.

El objetivo de este anexo, es el de presentar los matemáticos deducidos respecto al efecto de la abertura finita de una lente convergente usada como transformadora, en la evolución del espectro angular interpretado como un campo de *difracción convolutivo* de ondas monocromáticas, así como los resultados respecto a la disminución significativa del efecto de viñeteado y de la propagación de una máxima frecuencia espacial.

El análisis se centra en las ondas difractadas por una transparencia rectangular de ancho  $l_1$  y de altura  $l_2$ , a la que se le asocia la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$ , situada en el plano  $x_0y_0$ , además suponemos que dicho objeto se encuentra a la distancia focal frontal de la lente transformadora, es decir, cumple la condición  $d_o=f_{LT}$  y es iluminado con ondas planas monocromáticas de amplitud constante  $E_0$ . La distribución del campo difractado por el objeto será  $E_1(x_0, y_0)$  que fue definido mediante la ecuación (3.1); Mientras que el campo propagado del plano  $x_0y_0$  hasta el plano  $xy$ , que incide sobre la lente, posee la distribución de amplitud compleja siguiente definida a través de la ecuación (3.3). El cuales interpretado como el espectro de difracción (3.5), a través de las frecuencias espaciales definidas por la ecuaciones (3.4).

Como ya se comentó, tanto Goodman, (2005) y Hecht y Zajac, (1998), argumentaron que el viñeteado y la aceptación de una máxima frecuencia espacial es el efecto que produce la limitación de la sección eficaz impuesta por la abertura finita de una lente esférica. Esto lleva a realizar un análisis de la relación que existe entre la frecuencia espacial máxima, el ancho  $l_1$ , el largo  $l_2$  del objeto difractor y el radio  $a$  de la pupila asociada a la lente transformadora. Para investigar esta relación, las frecuencias espaciales  $u_1$  y  $v_1$  de las ecuaciones (3.4), se redefinen considerando los triángulos AOQ y AOE de las figuras C.1 y C.2 respectivamente, obteniéndose las fórmulas

$$u_1 = \frac{\theta_1}{\lambda}; \quad \text{y} \quad v_1 = \frac{\theta_2}{\lambda}; \quad (\text{C-1})$$



cuyas unidades son *lin/mm*. Pero además si los parámetros  $x_l$ ,  $y_l$ ,  $l_1$  y  $l_2$  son de pequeña magnitud con respecto a la distancia  $d_0$  del objeto a la lente, entonces

$$\tan \theta_1 \approx \theta_1 = \frac{x}{d_0} = \frac{x_1 + l_1/2}{d_0} \quad \text{y} \quad \tan \theta_2 \approx \theta_2 = \frac{y}{d_0} = \frac{y_1 + l_2/2}{d_0} \quad (\text{C-2})$$

siempre que los parámetros  $x_l$ ,  $y_l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  sean de pequeña magnitud, con respecto a la distancia  $d_0$  del objeto a la lente referida.

Ahora, si definimos las frecuencias espaciales máximas o no paraxiales, en términos de los cosenos directores Goodman, (2005), esto es:

$$u_{\max} = \frac{\cos \theta_{x_0}}{\lambda} \quad \text{y} \quad v_{\max} = \frac{\cos \theta_{y_0}}{\lambda} . \quad (\text{C-3})$$

Donde  $\theta_{x_0}$  y  $\theta_{y_0}$  en las ecuaciones (C-3) son los ángulos que forman los rayos provenientes del objeto e inciden en el límite de la pupila, respecto a cada uno de los ejes coordenados  $x_0$ ,  $y_0$ , respectivamente. Los ángulos mencionados, sin embargo, se pueden relacionar con los ángulos  $\varphi$  y  $\sigma$  a través de una identidad trigonométrica; por lo tanto, de las figuras C.3 y C.4, considerando los triángulos AOR y AOF, respectivamente, las frecuencias espaciales máximas dadas por las ecuaciones (C.3) pueden ser escritas como:

$$u_{\max} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\lambda} = \frac{\text{sen} \varphi}{\lambda} = \frac{x + x_2}{\lambda \sqrt{(x + x_2)^2 + d_0^2}} = \frac{a}{\lambda \sqrt{a^2 + d_0^2}} ; \quad (\text{C-4})$$

$$v_{\max} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)}{\lambda} = \frac{\text{sen} \sigma}{\lambda} = \frac{y + y_2}{\lambda \sqrt{(y + y_2)^2 + d_0^2}} = \frac{a}{\lambda \sqrt{a^2 + d_0^2}} . \quad (\text{C-5})$$

En la ecuación (C-4) y (C-5) se supone que los ángulos  $\varphi$  y  $\sigma$  no son pequeños, esto implica que las frecuencias espaciales máximas  $u_{\max}$  y  $v_{\max}$  son no paraxiales,

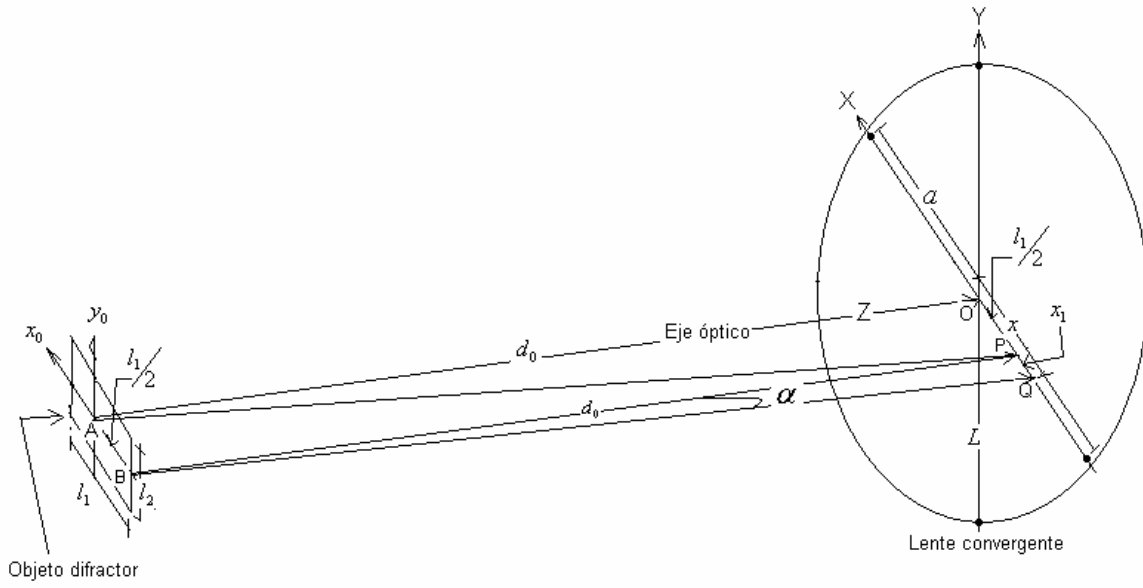


Figura C.1. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial  $u_1$

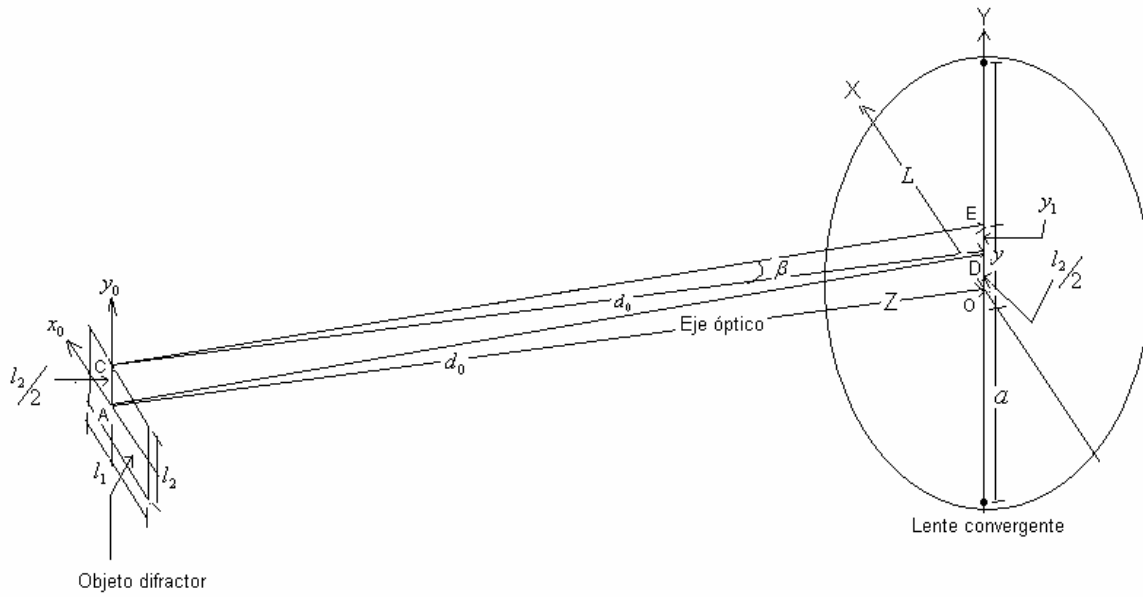


Figura C.2. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial  $v_1$

## C.2. Algunos Resultados

Como ya se documentó al inicio, en el libro de Goodman, (2005) se menciona el efecto de viñeteo, sin una demostración cuantitativa de las relaciones entre la abertura difractora, la pupila y la lente. En los siguientes incisos se hace un análisis cuantitativo, del problema del viñeteo y de las frecuencias espaciales paraxiales y máximas permitidas en la lente doblete cementada.

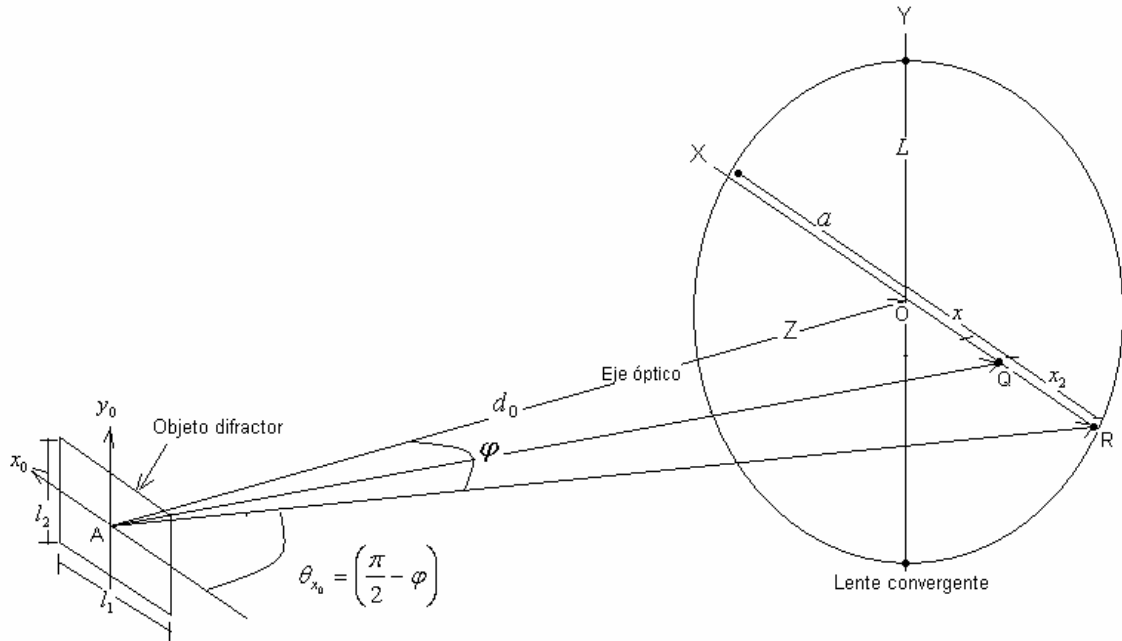


Figura C.3. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial  $u_{\max}$

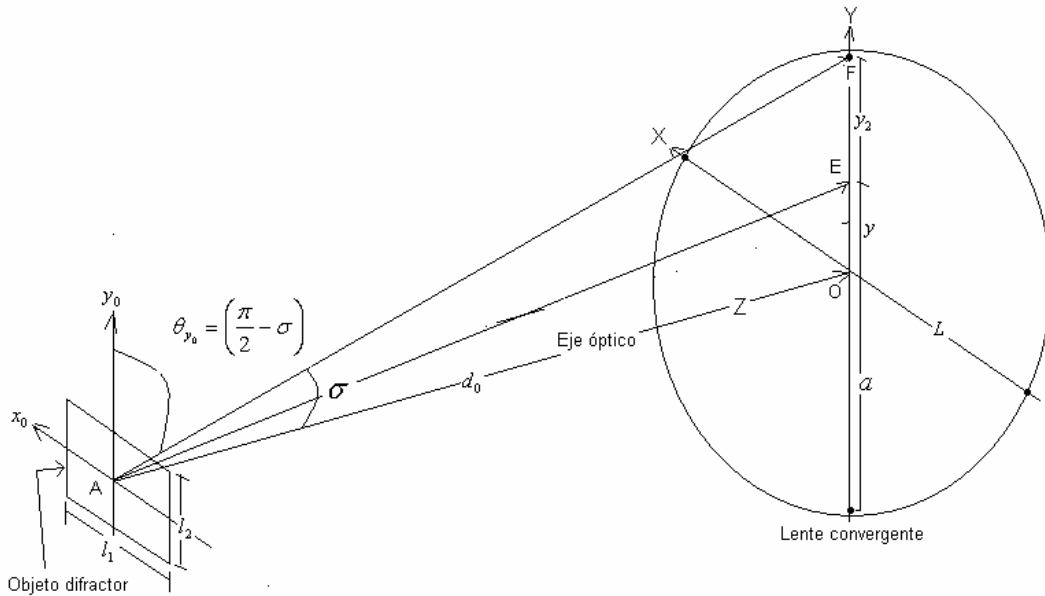


Figura C.4. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial  $v_{\max}$

### C.2.1 Frecuencias paraxiales

Un resultado de este trabajo radica en poder calcular las frecuencias espaciales paraxiales,  $u_1$  y  $v_1$  definidas por la ecuación (C-1), empleando las ecuaciones (C-2) y (C-3), de la forma siguiente

$$u_1 = \frac{l_1/2}{\lambda d_0} + \frac{x_1}{\lambda d_0} = u_2 + u_3 ; \quad v_1 = \frac{l_2/2}{\lambda d_0} + \frac{y_1}{\lambda d_0} = v_2 + v_3 \quad (C.6)$$

donde los parámetros  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $l_1$  y  $l_2$ , son de magnitud pequeña respecto de la distancia  $d_0$  del objeto a la lente, lo cual implica que las frecuencias  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  son necesariamente de pequeña magnitud. Luego, las frecuencias espaciales

$$u_2 = \frac{l_1/2}{\lambda d_0} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{l_2/2}{\lambda d_0} \quad (C.7)$$

se determinan usando los triángulos AOP y AOE de las Figs. C.1 y C.2. Mientras que para determinar las frecuencias espaciales,

$$u_3 = \frac{x_1}{\lambda d_0} = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{y} \quad v_3 = \frac{y_1}{\lambda d_0} = \frac{\beta}{\lambda} \quad (C.8)$$

Surge la necesidad de ponerlas en función de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  definidos en los triángulos BPQ y CDE de las figuras C.1 y C.2 respectivamente. Como ejemplo numérico, si consideramos al objeto difractor con lados  $l_1 = 2\text{mm}$  y  $l_2 = 1\text{mm}$ , respectivamente, la distancia al objeto cumple que  $d_0 = f_{LD} = 250\text{ mm}$ . Considerando un láser de Helio-Neón ( $\lambda = 632\text{ nm}$ ), al sustituir estos valores en las ecuaciones (C-7) se obtienen los valores de las frecuencias espaciales:  $u_2 = 6.3\text{ lín/mm}$  y  $v_2 = 3.2\text{ lín/mm}$ . Mientras que las magnitudes de las frecuencias espaciales  $u_3 = \theta_4/\lambda$  y  $v_3 = \theta_{10}/\lambda$  fueron determinadas, proponiendo que el ángulo que las definen cumpla la condición de ser  $\alpha \leq 4^\circ$  y  $\beta \leq 4^\circ$ ; se obtiene que  $u_3 = 110.62\text{ lín/mm}$  y  $v_3 = 110.62\text{ lín/mm}$ . Luego, la suma de las frecuencias espaciales  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $u_3$ ,  $v_3$  de acuerdo con las ecuaciones (C-6) permiten determinar el valor numérico de las frecuencias espaciales paraxiales, es decir  $u_1 = 116.92\text{ lín/mm}$  y  $v_1 = 113.82\text{ lín/mm}$ .

### C.2.2 Espectro no paraxial

Despejando  $x, y$  de las ecuación (C-4) y de la ecuación (C-5), de acuerdo con las frecuencias máximas definidas por estas mismas ecuaciones, permiten reescribir la ecuación (3.3) propiciando que el campo de difracción se interprete en la forma siguiente:

$$E_{d_0, \max}(x, y) = \frac{E_0 e^{ik(d_0)}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2} \left( \frac{[\lambda u_{\max} d_0 - x_2 \sqrt{1 - (\lambda u_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda u_{\max})^2} + \frac{[\lambda v_{\max} d_0 - y_2 \sqrt{1 - (\lambda v_{\max})^2}]^2}{1 - (\lambda v_{\max})^2} \right)} \left( \frac{1}{d_0} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i2\pi \left( \frac{x+x_2}{\lambda \sqrt{(x+x_2)^2 + d_0^2}} x_0 + \frac{y+y_2}{\lambda \sqrt{(y+y_2)^2 + d_0^2}} y_0 \right)} dx_0 dy_0 \quad (B-9)$$

Puesto que de la forma funcional de la (C-9) no es evidente la interpretación del campo eléctrico asociado a las ondas difractadas y propagadas, se recurre a definirla como el espectro de difracción, con solo sustituir en ella las frecuencias máximas espaciales  $u_{max}$  y  $v_{max}$  dadas por las ecuaciones (C-4) y (C-5) obteniéndose la siguiente expresión,

$$G_I(u_1, v_1) = \frac{E_0 e^{ik(d_0)}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2} \left( \frac{[\lambda u_{max} d_0 - x_2 \sqrt{1 - (\lambda u_{max})^2}]^2}{1 - (\lambda u_{max})^2} + \frac{[\lambda v_{max} d_0 - y_2 \sqrt{1 - (\lambda v_{max})^2}]^2}{1 - (\lambda v_{max})^2} \right)} \left( \frac{1}{d_0} \right) \cdot \mathfrak{T} \left\{ t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)} \right\}_{u_{max}, v_{max}} \quad (C-10)$$

De acuerdo al teorema de la transformada de Fourier A-16 de un producto de funciones, la ecuación (C-10) es la convolución de las transformadas de Fourier de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada al objeto difractor con la función  $\exp\{i(k\lambda d_0/2)(u_0^2 + v_0^2)\}$ , es decir,

$$G_{max}(u_{max}, v_{max}) = \frac{E_0 e^{ik(d_0)}}{i\lambda d_0} e^{\frac{ik}{2} \left( \frac{[\lambda u_{max} d_0 - x_2 \sqrt{1 - (\lambda u_{max})^2}]^2}{1 - (\lambda u_{max})^2} + \frac{[\lambda v_{max} d_0 - y_2 \sqrt{1 - (\lambda v_{max})^2}]^2}{1 - (\lambda v_{max})^2} \right)} \left( \frac{1}{d_0} \right) \cdot \left[ \mathfrak{T}\{t_0(x_0, y_0)\} \otimes \mathfrak{T}\left\{e^{\frac{ik}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)}\right\} \right]_{u_{max}, v_{max}} \quad (C-11)$$

La ecuación (B-11) permite establecer que el espectro de difracción incidente en la lente convergente es una función de las frecuencias espaciales máximas  $u_{max}, v_{max}$  no paraxiales. Es la convolución de las transformadas de Fourier de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  asociada al objeto difractor, con la exponencial  $\exp\{i(k/2d_0)(u_0^2 + v_0^2)\}$ . El espectro se ha propagado desde el objeto a una distancia  $d_0$  y está desfasado en  $\pi/2$ , información que se obtiene de los factores  $\exp\{i(kd_0)\}$  e  $i^{-1}$ , respectivamente. Del segundo factor exponencial se deduce que la fase del espectro se distribuye en una curva cuya forma funcional no es de fácil interpretación, más no se distribuye en el plano  $u_{max}v_{max}$ .

Se debe de hacer énfasis que el espectro de difracción dado por la ecuación (C-11) existe, siempre que el diámetro de la pupila asociada a lente sea de mayor tamaño a los lados  $l_1$  y  $l_2$  del objeto difractor, es decir  $2a > l_1$  y  $2a > l_2$ . Para esto, basta recordar que el radio  $a$  de la pupila satisface la igualdad siguiente  $a = x + x_2 = x_1 + l_1/2 + x_2$  y por simetría se ve que  $a = y + y_2 = y_1 + l_2/2 + y_2$ , lo que confirma nuestra aseveración. Bajo esta condición la lente convergente aceptará y propagará las ondas difractadas con frecuencias espaciales máximas  $u_{max}$  y  $v_{max}$  respectivamente, y solo parte de la información proveniente de los puntos de la periferia del objeto incide en la lente, con esto se asevera la reducción del efecto de viñeteado. Respecto a las frecuencias máximas Hecht y Zajac [2], en la página 496, solo

hacen mención de ellas sin demostración alguna respecto a la relación entre el diámetro de la pupila  $2a$  y  $l_1$ ,  $l_2$ , como aquí se ha demostrado; en tanto que, Goodman [1] en las páginas 106-107 solo mencionó aspectos cualitativos respecto a la propagación del espectro angular de frecuencias paraxiales a través de una lente delgada, más no hace alusión al espectro de frecuencias máximas y tampoco hace referencia al efecto de viñeteo analíticamente.

### C.2.3 Frecuencias espaciales máximas

Otro resultado, se obtiene de las ecuaciones (C-4) y (C-5), de donde se puede determinar que las frecuencias máximas  $u_{\max}$  y  $v_{\max}$  poseen la misma magnitud, como consecuencia del radio  $a$  de la pupila y la simetría de lente transformadora, para confirmar esta aseveración, basta considerar las siguientes igualdades.

$$u_{\max} = \frac{a}{\lambda\sqrt{a^2 + d_0^2}} \quad ; \quad v_{\max} = \frac{a}{\lambda\sqrt{a^2 + d_0^2}} \quad (\text{C-12})$$

El cálculo numérico de las frecuencias máximas  $u_{\max}$  y  $v_{\max}$ , respectivamente, se determinan al considerar una lente con radio de pupila  $a = 25$  mm que posee una distancia focal que cumple la condición de ser igual a la distancia al objeto de la lente referida, esto es  $f_{LT} = d_0 = 250$  mm. Si consideramos un láser de Helio-Neón ( $\lambda = 632$  nm), al sustituir estos valores en las ecuaciones (C-12) se obtienen que  $u_{\max} = 157.5$  lin/mm y  $v_{\max} = 157.5$  lin/mm.

### C.2.4 Relación entre la frecuencia angular máxima y paraxial.

Un resultado más se puede derivar considerando que el diámetro  $L$  de la lente convergente también sea más grande en magnitud a las dimensiones  $l_1$  y  $l_2$  del objeto difractor. Con esta condición, es posible aseverar que el efecto de viñeteado se puede reducir de forma más significativa. Para corroborar esta afirmación, las ecuaciones (C-4) y (C-5) las escribimos ahora como

$$u_{\max} = \frac{x}{\lambda\sqrt{(x + x_2)^2 + d_0^2}} + \frac{x_2}{\lambda\sqrt{(x + x_2)^2 + d_0^2}}, \quad (\text{C-13})$$

$$v_{\max} = \frac{y}{\lambda\sqrt{(y + y_2)^2 + d_0^2}} + \frac{y_2}{\lambda\sqrt{(y + y_2)^2 + d_0^2}}. \quad (\text{C-14})$$

Si suponemos que  $(x+x_2) \ll d_0$  y  $(y+y_2) \ll d_0$ , las ecuaciones (C-13) y (C-14), pueden ser escritas de acuerdo con las ecuaciones (C-1) en la forma siguiente,

$$u_{\max} = u_1 + \frac{x_2}{\lambda d_0} \quad (\text{C-15})$$

$$v_{\max} = v_1 + \frac{y_2}{\lambda d_0} \quad (\text{C-16})$$

Es decir, las ecuaciones (B-15) y (B-16) proporcionan un resultado de gran importancia, ya que permiten establecer que las frecuencias espaciales máximas  $u_{\max}$  y  $v_{\max}$ , están compuestas por las frecuencias espaciales paraxiales  $u_1$  y  $v_1$ , más las frecuencias espaciales no paraxiales, que dependen de los parámetros  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $\lambda$ , y  $d_0$  antes descritos. Además, los límites cuando  $x_2 \rightarrow 0$  y de igual manera cuando  $y_2 \rightarrow 0$ , se obtienen las frecuencias espaciales paraxiales  $u_1$  y  $v_1$ , como era de esperarse.

### C.2.5 Cálculo alternativo de las frecuencias espaciales máximas

Un resultado más general y alternativo consiste en incluir como parámetro la pupila de entrada de la lente y determinar las frecuencias espaciales máximas  $u_{\max}$  y  $v_{\max}$ . Este análisis se basa en la forma de cómo se difracta “angularmente el espectro dentro y en los límites del objeto difractor.” Para esto, se considera la simetría que posee la lente y que las frecuencias paraxiales en los triángulos AOM y LMN de la figura C.5 son conocidas; así como las contenidas en los triángulos AOH y GHI ver figura C.6. De acuerdo a los parámetros de los triángulos LMN y GHJ de las mismas figuras, se determina que las ecuaciones para las frecuencias máximas son,

$$u_{\max} = \frac{l_1/2}{\lambda d_0} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_6\right)}{\lambda} = \frac{l_1/2}{\lambda d_0} + \frac{x_1 + x_2}{\lambda \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + d_0^2}}; \quad (\text{C-17})$$

$$v_{\max} = \frac{l_2/2}{\lambda d_0} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{11}\right)}{\lambda} = \frac{l_2/2}{\lambda d_0} + \frac{y_1 + y_2}{\lambda \sqrt{(y_1 + y_2)^2 + d_0^2}}. \quad (\text{C-18})$$

En las ecuaciones (C-17) y (C-18),  $\theta_{x_{01}}$  y  $\theta_{y_{01}}$  que forman los rayos con los ejes de coordenadas  $x_0$ ,  $y_0$  se pueden relacionar con los ángulos  $\gamma$  y  $\chi$  a través del coseno director y una identidad trigonométrica, como se hizo en la sección 2.

Existen tres problemas a ser resueltos, uno de ellos es el de determinar los resultados aquí presentados, usando los modelo matemático dados por las ecuaciones (C-17) y (B-18). Los otros dos problemas restantes consisten en realizar la propagación del espectro difractado tanto en frecuencias espaciales máximas así como de frecuencias espaciales paraxiales a través de una lente delgada o doblete cementada y de aquí hasta las diferentes regiones y planos de distribución.

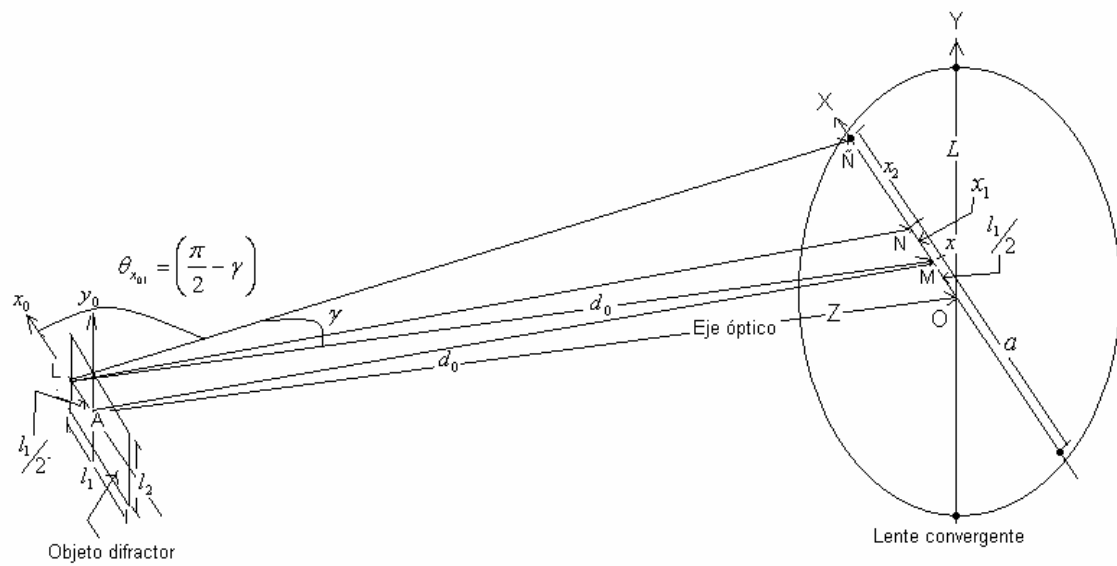


Figura C.5. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial  $u_{\max}$



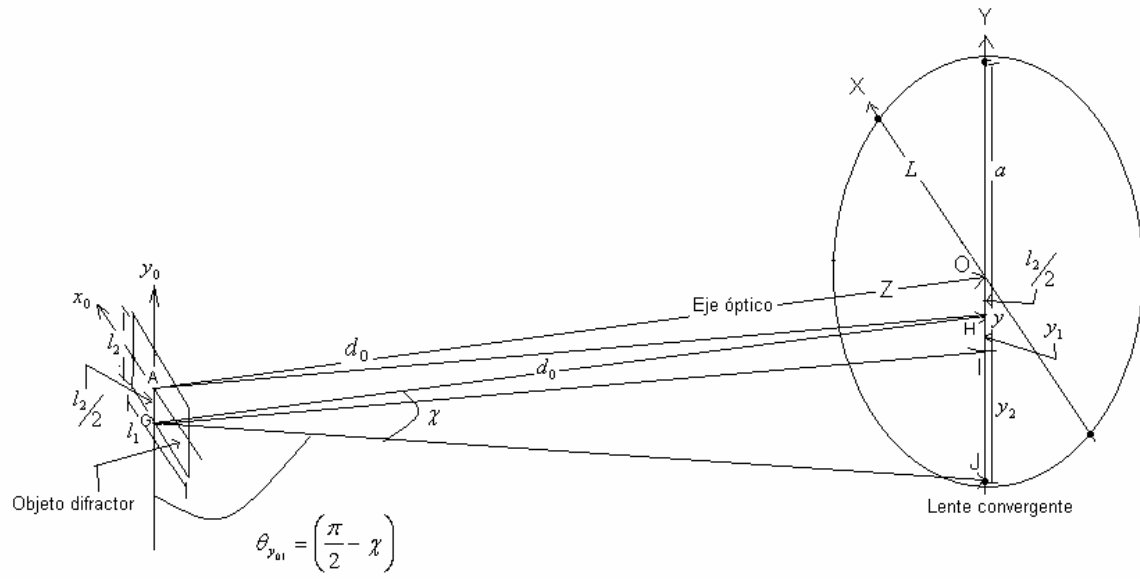


Figura C.6. Geometría y parámetros para determinar la frecuencia espacial  $\nu_{\max}$

## ANEXO D

### TRANSFORMADA DE FOURIER BESSEL Y FÓRMULAS DE RECURRENCIA

La recopilación de los conceptos y temas que se realiza a través de este documento, resultará esencial para el desarrollo del trabajo de Tesis que se realiza. De manera que, lo que se presenta a través de este anexo, consistirá en proporcionar algunas definiciones, fórmulas de recurrencia, así como la forma de determinar la expresión matemática de la transformada de Fourier- Bessel, de una manera no rigurosa, se recuerda que gran parte de este material ya existe en la bibliografía como la que se enuncia a continuación (Watson, 1996; Gaskill, 1978; Papoulis, 1968). Pero esta manera de reunir la información, propicia una fluidez en la redacción de trabajo referido.

#### D.1.- DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE BESSEL

Dentro de la literatura citada, la definición de la función de Bessel de  $n$  é-simo orden, está definida a través de la siguiente ecuación

$$J_n(z) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz[\cos(\theta-\varphi)-n(\theta-\varphi)]} d\theta \quad (D-1)$$

Para el caso en que  $n = 0$  se obtiene la función de Beesel de orden cero, esto es

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz[\cos(\theta-\varphi)]} d\theta \quad (D-2)$$

En la ecuación (D-2) la variable de integración es  $\theta$  y el término  $\varphi$  es una constante de desfaseamiento. Papoulis, (1968) estableció que la función real de Bessel de  $n$ -ésimo orden, se puede determinar a través de la ecuación siguiente:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen}\theta) d\theta \quad (D-3)$$

#### D.2.- TRANSFORMADA DE FOURIER-BESSEL.

En el anexo A, se planteo la definición de la transformada de Fourier bidimensional, en el sistema de coordenadas rectangulares, que de acuerdo a la definición (A-3) tiene la siguiente representación,

$$g(u, v) = \mathfrak{F}\{F(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (A-3)$$

La transformada de Fourier en el espacio de coordenadas rectangulares, es muy complicada de tratar cuando se aplica a problemas de dos variables, con simetría circular,

por esto, las funciones de Bessel son más apropiadas para la solución de este tipo de problemas, ya que son funciones separables en coordenadas polares.

Así, una función de dos variables independientes, se llama “separable” con respecto a un sistema de coordenadas específico, si se puede escribir como el producto de dos funciones, solo que cada función dependerá de una sola variable (Vázquez, 2000). Como ejemplos se tiene los siguientes:

D.2.1 En coordenadas rectangulares, la separación de variables de la función  $P(x, y)$  es,

$$P(x, y) = P_x(x)P_y(y) \quad (D-4)$$

D.2.2 En coordenadas polares, la separación de variables de la función  $G(r, \theta)$  es,

$$g(r, \theta) = P_r(r)P_\theta(\theta) \quad (D-5)$$

Ahora, se determina la transformada de Fourier-Bessel, para lo cual se considera un sistema óptico, que está siendo iluminado por ondas monocromáticas, de manera que en la pupila de la lente situada en el plano  $XY$ , se consideran los siguientes cambios de variables.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad x = r \cos \theta \quad (D-6)$$

Mientras que en el plano focal de la lente referida y en el espacio de frecuencias espaciales  $uv$ , se tiene los siguientes cambios

$$\omega = \sqrt{u^2 + v^2} \quad ; \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{v}{u} \quad , \quad u = \omega \cos \varphi \quad ; \quad v = \omega \operatorname{sen} \varphi \quad (D-7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (D-6) en la ecuación (A-3), la integral de Fourier, queda definida como

$$G(\omega, \varphi) = \mathfrak{F}\{g(r, \theta)\} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) e^{-i2\pi\omega r \cos(\theta-\varphi)} \Gamma dr d\theta \quad (D-8)$$

En la ecuación (D-8) el término  $\Gamma$  será el Jacobiano de transformación, que se define en la forma

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad (D-9)$$

Para simetría circular, se tiene que

$$g(r, \theta) = g(r) \quad (\text{D-10})$$

Entonces,

$$G(\omega, \varphi) = \mathfrak{T}\{g(r, \theta)\} = \int_0^{\infty} g(r) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(r, \theta) e^{-i2\pi\omega r \cos(\theta-\varphi)} r dr d\theta \right] \quad (\text{D-11})$$

De acuerdo a la ecuación (D-3), la ecuación (D-10) se reduce a la expresión

$$G_{\omega}(\omega) = B\{g_r(r)\} = 2\pi \int_0^{\infty} g_r(r) J_0(2\pi\omega r) r dr \quad (\text{D-12})$$

La ecuación (D-12) es conocida como transformada de Fourier-Bessel o de Hankel de orden cero. Mientras que la transformada de Fourier-Bessel inversa se define en la forma siguiente,

$$g_r(r) = B^{-1}\{G_{\omega}(\omega)\} = 2\pi \int_0^{\infty} G_{\omega}(\omega) J_0(2\pi\omega r) \omega d\omega \quad (\text{D-13})$$

### D.3.- FÓRMULAS DE RECURRENCIA

Algunas fórmulas de recurrencia de las funciones de Bessel, son como las que se describen a continuación

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (D-14)$$

$$\left(\frac{2n}{x}\right) J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \quad (D-15)$$

$$J_{n-1}(x) = \left(\frac{n}{x}\right) J_n(x) + J'_n(x) \quad (D-16)$$

$$J_{n+1}(x) = \left(\frac{n}{x}\right) J_n(x) - J'_n(x) \quad (D-17)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (D-18)$$

$$x^n J_n(x) = \int x^n J_{n-1}(x) dx \quad (D-16)$$

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (D-17)$$

### D.4.- SUMATORIA Y PRODUCTOS DE FUNCIONES BESSEL

Arken y Weber, (2001); Hayek, (2001); Papoulis, (1968); determinaron que el problema de adición de productos de funciones Bessel establece que:

$$J_n(x+y) = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} J_s(x) J_{n-s}(y) = \sum_{s=0}^n J_s(x) J_{n-s}(y) + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(x) J_{n+s}(y) + J_{n+s}(x) J_s(y)] \quad (D-18)$$

Considerando el caso en que  $n = 1$  se tiene que,

$$J_1(x+y) = \sum_{s=0}^{n=1} J_s(x) J_{1-s}(y) + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(x) J_{1+s}(y) + J_{1+s}(x) J_s(y)] \quad (D-19)$$

Desarrollando las sumatorias para  $s = 0, 1$  se obtiene

$$J_1(x+y) = J_0(x) J_1(y) + J_1(x) J_0(y) - J_1(x) J_2(y) - J_2(x) J_1(y) + \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(x) J_{1+s}(y) + J_{1+s}(x) J_s(y)] \quad (D-20)$$

Otras fórmulas de recurrencia establecen que

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) J_n(x) \quad (\text{D-21})$$

$$J_{n-1}(y) + J_{n+1}(y) = \left(\frac{2n}{y}\right) J_n(y) \quad (\text{D-22})$$

Con  $n = 1$  en las fórmulas (D-21) y (D-22) se obtiene

$$J_2(x) = \left(\frac{2}{x}\right) J_1(x) - J_0(x) \quad (\text{D-23})$$

$$J_2(y) = \left(\frac{2}{y}\right) J_1(y) - J_0(y) \quad (\text{D-24})$$

Sustituyendo las ecuaciones (D-23) y (D-24) en la ecuación (D-20) resulta

$$\begin{aligned} J_1(x+y) &= J_0(x)J_1(y) + J_1(x)J_0(y) - \\ &- J_1(x) \left[ \left(\frac{2}{y}\right) J_1(y) - J_0(y) \right] - \left[ \left(\frac{2}{x}\right) J_1(x) - J_0(x) \right] J_1(y) + \\ &+ \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(x)J_{1+s}(y) + J_{1+s}(x)J_s(y)] \end{aligned} \quad (\text{D-25})$$

Simplificando la ecuación (D-24) se tiene

$$\begin{aligned} J_1(x+y) &= 2J_0(x)J_1(y) + 2J_1(x)J_0(y) - \\ &- \left(\frac{2}{y}\right) J_1(x)J_1(y) - \left(\frac{2}{x}\right) J_1(x)J_1(y) + \\ &+ \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(x)J_{1+s}(y) + J_{1+s}(x)J_s(y)] \end{aligned} \quad (\text{D-26})$$

La ecuación (D-26) también puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned}
 J_1(x+y) &= 2J_0(x)J_1(y) + 2J_1(x)J_0(y) - \\
 &- 2J_1(x)J_1(y) \left[ \frac{x+y}{xy} \right] \\
 &+ \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(x)J_{1+s}(y) + J_{1+s}(x)J_s(y)]
 \end{aligned} \tag{D-27}$$

Un caso especial de la forma del teorema de adición dado por la ecuación (D-18) puede ser utilizada para el caso en que  $x = y$ , entonces, la expansión en términos de productos de funciones Bessel será

$$\begin{aligned}
 J_n(2x) &= \sum_{s=0}^n J_s(x)J_{n-s}(x) + \\
 &+ 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s J_s(x)J_{n+s}(x)
 \end{aligned} \tag{D-28}$$

En el caso de que  $n = 1$ , entonces la ecuación (D-28) es escrita en la forma

$$\begin{aligned}
 J_1(2x) &= \sum_{s=0}^{n=1} J_s(x)J_{1-s}(x) + \\
 &+ 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s J_s(x)J_{1+s}(x)
 \end{aligned} \tag{D-29}$$

Desarrollando las sumatorias de la ecuación (D.29), considerando los casos en que  $s = 0, 1$ , se determina

$$\begin{aligned}
 J_1(2x) &= J_0(x)J_1(x) + J_1(x)J_0(x) - \\
 &- 2J_1(x)J_2(x) + 2 \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s J_s(x)J_{1+s}(x)
 \end{aligned} \tag{D-30}$$

Sustituyendo en la ecuación (D-30), la ecuación (D-23), se obtiene

$$J_1(2x) = J_0(x)J_1(x) + J_1(x)J_0(x) - 2J_1(x) \left[ \left( \frac{2}{x} \right) J_1(x) - J_0(x) \right] + 2 \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s J_s(x) J_{1+s}(x) \quad (D-31)$$

Simplificando, la ecuación (D-31) queda reducida a la forma

$$J_1(2x) = 4J_0(x)J_1(x) - 4 \left( \frac{2}{x} \right) J_1^2(x) + 2 \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s J_s(x) J_{1+s}(x) \quad (D-32)$$

#### D.5.- PROBLEMA:

Demostrar que la transformada de Fourier-Bessel de la función  $\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right)$ , puede ser escrita en la forma  $B\left\{\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = \frac{a}{\omega} J_1(2\pi a \omega)$ .

#### SOLUCIÓN:

Haciendo uso de la definición de transformada de Fourier-Bessel (D-12), esto es

$$G_\omega(\omega) = B\{g_r(r)\} = 2\pi \int_0^\infty g_r(r) J_0(2\pi\omega r) r dr \quad (D-12)$$

Entonces, la transformada de Fourier-Bessel  $\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right)$  queda definida en la forma

$$G_\omega(\omega) = B\left\{\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = 2\pi \int_0^\infty \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) J_0(2\pi\omega r) r dr \quad (D-33)$$

De acuerdo al teorema de escalamiento, se tiene

$$B\left\{\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = a^2 \left[ 2\pi \int_0^\infty \text{circ}(r) J_0(2\pi\omega r) r dr \right] \quad (D-34)$$



Como la función  $circ(r)$  está definida como

$$circ(r) = \begin{cases} 1, \dots si \dots r < 1 \\ 0, \dots si \dots r > 1 \end{cases} \quad (D-35)$$

Bajo la definición (D-35), la ecuación (D-34) se reescribe de acuerdo a la expresión siguiente

$$B \left\{ circ \left( \frac{r}{a} \right) \right\} = a^2 \left[ 2\pi \int_0^1 (1) J_0(2\pi\omega r) r dr \right] \quad (D-36)$$

Considerando los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} x = 2\pi\omega r, \dots r = \frac{x}{2\pi\omega}, \dots dr_0 = \frac{dx}{2\pi\omega}, \dots con \dots r_0 \rightarrow 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \rightarrow 2\pi\omega \dots y \dots con \dots r_0 \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (D-37)$$

De acuerdo con las expresiones (D-37), la ecuación (D-36) queda reducida, es decir

$$B \left\{ circ \left( \frac{r}{a} \right) \right\} = \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^1 J_0(x) x dx \quad (D-38)$$

Ahora, haciendo uso de la siguiente relación de recurrencia, esto es:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (D-39)$$

Para el caso en que  $n=1$  la expresión (D-39) es escrita como

$$\frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = xJ_0(x) \quad (D-40)$$

Después de integrar, la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión

$$xJ_1(x) = \int xJ_0(x) dx \quad (D-41)$$

En base a esta ecuación la ecuación (D-38) queda reducida a la forma

$$B\left\{circ\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi\omega^2} xJ_1(x) \Big|_0^{2\pi a\omega} \quad (D-42)$$

De manera que al evaluar la ecuación (D-42) finalmente se obtiene que

$$B\left\{circ\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = \frac{a}{\omega} J_1(2\pi a\omega) \quad (D-43)$$

Lo que se quería demostrar y da solución al problema

## BIBLIOGRAFÍA

- [[1] R. F. Lutomirski, H. T. Yura, Propagation of finite optical beam in an inhomogeneous medium *Applied Optics* **10** 7 (1971) 1652-1658.
- [2] Kear Singh, P. Senthilhumanan, R. K. Singh, Influence of astigmatism and defocusing on the focusing of a singular beam, *Opt. Comm.* **270** 2 (2006) 128-138.
- [3] Hsu Wenyue, Richard Bakarar, Stratton –Chu vectorial diffraction of electromagnetic fields by apertures with applications to small Fresnel numbers systems, *Opt. Soc. Am.* **11** 2 (1994) 623-629.
- [4] Sheppard C. J. R., M. Hrynevych, Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction Theory, *J. Opt. Soc. Am.* **9** 2 (1992) 274-281.
- [5] Goodman J. W., Introduction to Fourier Optics, 3<sup>a</sup> edition, McGraw Hill, 2005.
- [6] Martínez Niconoff Gabriel, Javier Muñoz López, Edgar Méndez Martínez, Description of phase singularities and their application to focusing design, *J. Opt. Soc. Am.* **18** 2 (2001) 2089-2094.
- [7] Nikolski V. V. Electrodinámica y propagación de ondas de radio, Mir Moscú, 1985.
- [8] Fiódorov N. N., Fundamentos de electrodinámica, Mir (Moscú), 1982.
- [9] Askeland D. R., Pradeep P. P., Ciencia e ingeniería de los materiales cuarta edición, CENCAGE learning (México), 2008.
- [10] Beer Ferdinand P., E. Russel Johnston, Jr., John T. Dewolf, Mecánica de materiales 3<sup>a</sup> edición, McGraw-Hill Interamericana, 2004.
- [11] Zárate E. A., Custodio E. G., Treviño C. G. P., Rodríguez V. R, Puga H. J. S., Defect detection in metals using electronic speckle pattern interferometry, *Solar energy materials & solar cells* **88**, (2005) pp 217-225.

- [12] Rapjal S. S., Spekle interferometry, contemporary physics 43:3, (2002) pp 161-180.
- [13] Erf R. K., Holography non destructive, Chapter 4, Academic Press Inc, (London), 1974
- [14] Yao X. F., H. Y. Yeh, W. Xu, Fracture investigation at V-notch trip using coherent gradient sensing, *International Journal Solids and Structures*, **43** (2006), pp 1189-1200.
- [15] Okan K. Ersoy, Diffraction, Fourier optics and imaging , John Wiley & Sons, 2007.
- [16] Hecht Eugene and Alfred Zajac, Óptica, Addison Wesley Longman, 1998.
- [17] Malacara Daniel, Óptica básica, SEP-FCE, 2004.
- [18] Mandel Leonard, Emil Wolf, Optical coherence and quantum optics, Cambridge, 2008.
- [19] Max Born, Emil Wolf, Principles of optics, 7<sup>a</sup> edition, 2005.
- [20] Arfken George B., Hans J. Weber, Mathematical methods for physicists, fifth edition, Academic Press, 2001.
- [21] Zill Dennis G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado 6<sup>a</sup> ed., International Thompson Editores, 1997.
- [22] Spiegel Murray R., Cálculo superior, McGraw Hill, 1980.
- [23] Gaskill Jack D., Linear systems of Fourier transforms and Optics, John Wiley and Sons, 1978.
- [24] Newport, Catalog, 1990.

[25] Bracewell Ronal N., The Fourier transforms and its applications, McGraw Hill, 2002.

[26] Yu Francis T. S., Optical information processing, Jhon Wiley and Sons, 1983.

[27] Papoulis Athanasious, Systems and transforms with application in optics, McGraw Hill, 1968.

[28] Feynman Richard P., Robert B. Leighton, Matthew Sans, Física volumen II, electromagnetismo y materia, Addison Wesley, 1997.

[29] Resnick Robert, David Halliday, Física parte 1, Compañía editorial continental, S. A. México, 1980.

[30] Welford W. T., Aberrations of optical sistems, Adam Hilger series on optics and optoelectronics, 1991.

[31] Sears Francis W. Mark W. Zemansky, Física, Aguilar, 1975.

[32] Watson G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambrige second edition, 1996.

[33] Vázquez V. Laurencio, Transformada de Fourier Bessel y la ecuación de Sonine, DACB-UJAT, 2000.

[34] Hayek S. I., Advanced mathematical methods in science and engineering Weber, Marcel Dekker, 2001.