



INAOE

**Segmentación de Imágenes
Hiperespectrales usando
Memorias Asociativas
Morfológicas**

por

Juan Carlos Valdiviezo Navarro

Tesis sometida como requisito parcial para

obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica
y Electrónica**

Septiembre 2007

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Gonzalo J. Urcid Serrano, INAOE

©INAOE 2007

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad o
en partes de esta tesis



Abstract

The advances in image spectroscopy have been applied for Earth observation at different wavelengths of the electromagnetic spectrum using aircrafts or satellite systems. This new technology, known as hyperspectral remote sensing, has found many applications in agriculture, mineral exploration and environmental monitoring since images acquired by these devices register the constituent materials in hundred of spectral bands. Each pixel in the image contains the spectral information of the zone. However, processing these images can be a difficult task because the spatial resolution of each pixel is in the order of meters, an area of such size that can be composed of different materials. The following research presents an alternative methodology to detect pixels in the image that best represent the spectrum of one material with as little contamination of any other as possible. The detection of these pixels, also called endmembers, represents the first step for image segmentation and is based on morphological autoassociative memories and the property of strong lattice independence between patterns. Morphological associative memories and strong lattice independence are concepts based on lattice algebra. Our procedure subdivides a hyperspectral image into regions looking for sets of strong lattice independent pixels. These patterns will be identified as endmembers and will be used for the construction of abundance maps.

Prólogo

En el contexto de la *percepción remota* se han desarrollado dispositivos capaces de registrar imágenes en cientos de bandas espectrales para analizar los recursos naturales de la superficie terrestre a distancias considerables sobre ésta. Las imágenes que se obtienen con este tipo de instrumentos se denominan imágenes hiperespectrales y ofrecen el potencial para la identificación de los materiales que conforman una cierta zona geográfica. Sin embargo, la baja resolución espacial (relativamente) de estas imágenes hace difícil la asociación de los espectros registrados, con los espectros de referencia adquiridos a nivel de la superficie. Como consecuencia, lograr la segmentación de la imagen según los recursos presentes resulta una tarea que requiere de técnicas propias.

El objetivo del presente trabajo de tesis consiste en desarrollar diversos algoritmos para la segmentación de imágenes hiperespectrales basado en memorias asociativas morfológicas. Las memorias asociativas morfológicas constituyen una clase novedosa de redes neuronales artificiales, cuyas operaciones están basadas en el álgebra reticular minimax y se denominan asociativas debido a su capacidad de almacenar y recuperar asociaciones de patrones. La razón de utilizar estas memorias es identificar pixeles, denominados miembros finales, en la imagen que mejor representen a los materiales constituyentes en la escena. De esta forma, realizar la segmentación es equivalente a particionar dicha imagen de acuerdo a los materiales identificados. Se presenta un método autónomo para la determinación de miembros finales y en consecuencia la identificación de recursos naturales en una región determinada para aplicaciones en áreas como geología, agricultura y ecología, entre otros.

Es mi deseo agradecer al CONACYT por el apoyo brindado para realizar mis estudios de maestría, mediante la Beca No. 202551 y al INAOE por brindarme los conocimientos necesarios. Además, a lo largo de este periodo de estudios son muchas las personas que merecen mi más sincera gratitud. Mis sinodales, Dr. Alejandro Cornejo Rodríguez, Dr. Luis Raúl Berriel Valdós y Dr. Sergio Vázquez y Montiel por el tiempo dedicado en la revisión de este trabajo; al doctor Gonzalo Urcid Serrano por su paciencia, dedicación y constancia para realizar esta investigación. A mis padres, familiares y amigos porque sin su apoyo no hubiera sido posible cumplir con esta meta.

Juan Carlos Valdiviezo Navarro,

agosto 22 de 2007.

Dedicatorias

Al *Ser Supremo* que con su amor ilumina cada instante de mi vida y quien me ha dado la oportunidad de culminar este sueño.

A mis padres: *Rogelio Valdiviezo Román y Mercedes Navarro Martínez* que me han brindado su amor incondicional y me han enseñado a caminar por la vida.

A mis hermanos: *Rocío, Gloria Estefanía y Luis Enrique* porque son mi inspiración y la fuerza que me motiva a seguir adelante.

A mis abuelitos: *Estela, María de la Luz y Antero* porque su sabio caminar me ha enseñado que las metas se logran con voluntad.

A mis amigos, especialmente a los señores *Josefina, Rosario e Isidro* porque me abrieron su corazón en el momento en que más lo necesitaba.

“El éxito debe medirse no por la posición a que una persona ha llegado, sino por su esfuerzo por triunfar.”

Booker T. Washington

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Avances recientes	4
1.4. Objetivos de la tesis y propuesta de solución	5
1.5. Organización de la Tesis	6
2. Sensado Remoto Hiperespectral	8
2.1. Principios	8
2.1.1. El espectro electromagnético	9
2.1.2. Procesos de interacción entre materia y energía	10
2.2. Espectroscopía	12
2.2.1. Espectrómetros	14
2.2.2. Espectrómetros de imagen	15
2.3. Imágenes hiperespectrales y sensado remoto	16
2.3.1. Imágenes hiperespectrales	17
2.3.2. Resolución espacial y espectral	18
2.3.3. Sensado remoto hiperespectral de la Tierra	19
2.4. Procesamiento de imágenes hiperespectrales	21
2.4.1. Preprocesamiento de la información	22
2.4.2. Detección de miembros finales	24
2.4.3. Segmentación de la imagen	25

3. Memorias Asociativas Morfológicas	28
3.1. Redes Neuronales Artificiales	28
3.2. Base computacional de redes morfológicas	30
3.3. Memorias asociativas	32
3.4. Álgebra minimax	34
3.4.1. Operaciones matriciales	35
3.4.2. Propiedades	37
3.5. Memorias asociativas morfológicas	38
3.5.1. Memorias autoasociativas morfológicas	42
3.5.2. Resultados y aplicaciones	42
3.6. Definiciones	44
3.6.1. Independencia reticular y puntos fijos	44
3.6.2. Independencia reticular fuerte	47
4. Detección de Miembros Finales	49
4.1. Preliminares	49
4.2. Modelo de Separación Lineal	50
4.3. Métodos conocidos basados en MAMs	51
4.3.1. Detección por independencia morfológica	51
4.3.2. Detección mediante las columnas de W_{XX} o M_{XX}	52
4.4. Método propuesto basado en MAMs	54
4.4.1. Detección por independencia reticular fuerte	54
4.5. Algoritmos	55
5. Segmentación de Imágenes Hiperespectrales	61
5.1. El espectrómetro de imagen AVIRIS	61
5.2. Imágenes hiperespectrales empleadas	63
5.2.1. Cuprite	64
5.2.2. Moffett Field	65
5.3. Detección de miembros finales	66

5.3.1. Resultados en la zona de Cuprite	66
5.3.2. Resultados en la zona de Moffett Field	73
5.4. Mapas de abundancia de recursos naturales	75
6. Conclusiones	80
6.1. Conclusiones principales	80
6.2. Conclusiones adicionales	83
6.2.1. Aportaciones de esta investigación y trabajo futuro	83
6.2.2. Actividades derivadas de esta investigación	84

Índice de figuras

2.1. Onda electromagnética cuyos campos E y B oscilan perpendicularmente uno respecto del otro.	9
2.2. Espectro electromagnético.	10
2.3. Porción del espectro electromagnético utilizado en sensado remoto. La porción de reflectancia de la superficie terrestre abarca hasta las longitudes de onda de $2.5 \mu m$. <i>Imagen cortesía de la Dra. Joan Lurie.</i>	11
2.4. Procesos de interacción materia y energía; la dirección del frente de onda está representada mediante un rayo ortogonal a la onda electromagnética.	12
2.5. Espectros de emisión del hidrógeno y carbono	14
2.6. Elementos básicos de un espectrómetro.	15
2.7. Diagrama esquemático de un espectrómetro de imagen; cada elemento detector registra un determinado intervalo de longitudes de onda.	16
2.8. Concepto de sensado remoto hiperespectral; cada pixel que es colectado proporciona el espectro de los materiales constituyentes.	17
2.9. Cubo hiperespectral de la zona de Cuprite, Nevada; registrado con el espectrómetro de imagen AVIRIS (<i>Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer</i>).	18
2.10. Espectro de absorción en la vegetación debido a la clorofila; en vegetación verde se produce absorción máxima en las porciones del espectro correspondientes al rojo y azul, mientras que para vegetación seca la curva se desplaza produciéndose un máximo de reflectancia en el amarillo.	20
2.11. Etapas en el procesamiento de imágenes hiperespectrales.	22

3.1. Procesos fundamentales de una neurona biológica.	28
3.2. Esquema de una neurona artificial.	29
3.3. Descripción del funcionamiento de una memoria asociativa.	33
3.4. Ejemplo de una memoria heteroasociativa entre X e Y	34
4.1. Representación gráfica de miembros finales.	50
5.1. Imagen y diagrama de AVIRIS.	62
5.2. Izquierda, imagen RGB de Cuprite con bandas 32, 20, 9 que simulan color verdadero. Derecha, imagen RGB en color falso con bandas 194, 134, 32 que proporcionan información de algunas características geológicas en la zona.	65
5.3. Izquierda, imagen RGB de Moffett Field con bandas 32, 20, 9 que simulan color verdadero. Derecha, imagen RGB en color falso con bandas 49, 134, 32 que permiten diferenciar, en verde y naranja, los diferentes tipos de vegetación.	66
5.4. Gráfico del espectro de alunita 250c y miembro final determinado con algoritmo RGU.	68
5.5. Gráfico del espectro de alunita 250c y miembro final determinado con algoritmo VU.	68
5.6. Gráfico del espectro de calcita y miembro final determinado con algoritmo RGU.	69
5.7. Gráfico del espectro de calcita y miembro final determinado con algoritmo VU.	69
5.8. Gráfico del espectro de kaolinita y miembro final determinado con algoritmo RGU.	70
5.9. Gráfico del espectro de kaolinita y miembro final determinado con algoritmo VU.	70
5.10. Gráfico del espectro de muscovita y miembro final determinado con algoritmo RGU.	71
5.11. Gráfico del espectro de muscovita y miembro final determinado con algoritmo VU.	71
5.12. Gráfico de miembros finales detectados con el algoritmo VU en Moffett Field.	72
5.13. Gráfico del espectro de aspen y miembro final determinado con algoritmo VU.	72
5.14. Gráfico del espectro de concreto y miembro final determinado con algoritmo VU.	74
5.15. Distribución de recursos minerales en Cuprite, Nevada. La imagen ha sido tomada de la biblioteca espectral USGS (U.S. Geological Survey) y se encuentra ligeramente desplazada hacia la derecha respecto de la registrada por AVIRIS.	77

- 5.16. Mapa de abundancias de algunos minerales en la zona de Cuprite, como resultado del proceso de inversión utilizando cinco miembros finales obtenidos con el algoritmo VU. La clasificación de los minerales es como sigue: naranja corresponde con los diferentes tipos de alunita, rosa intenso con calcita, verde con kaolinita, azul con muscovita y rosa claro con buddingtonita. Los resultados de esta segmentación pueden ser verificados de acuerdo a la distribución de estos minerales indicada por la figura 5.15. 78
- 5.17. Mapa de abundancias de algunas regiones de interés en la sitio de Moffett Field, como resultado del proceso de inversión utilizando cinco miembros finales obtenidos con el algoritmo VU. Las regiones en color verde brillante indican la distribución de árboles de la familia aspen, el color café indica zonas de concreto, el color amarillo denota regiones con vegetación seca, el color verde opaco indica regiones de pasto y las zonas en celeste indican la presencia de agua de mar. En la figura en color RGB (fig. 5.3) se pueden distinguir algunas de estas zonas, lo que permite verificar el buen resultado de la segmentación de este mapa de abundancias. . . 79

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El término sensado remoto es utilizado para especificar el proceso de medición o adquisición de información de un objeto a distancia, utilizando los datos de un sensor que no está en contacto físico con el objeto [5, 10]. En base a ello se ha desarrollado la ciencia de la percepción remota cuyo objetivo es medir u observar la superficie de la Tierra. Los dispositivos utilizados en sensado remoto registran la energía electromagnética que ha interactuado con los materiales de la superficie.

La percepción remota tiene sus orígenes alrededor del siglo XIX cuando fue registrada la primera imagen aérea sobre la ciudad de París utilizando un globo aerostático [32]. Más adelante, se comenzaron a utilizar aviones para captar imágenes de ciudades y que eran utilizadas para la planeación urbana o con propósitos militares. Para el siglo XX, el lanzamiento de los primeros satélites artificiales constituyó una herramienta fundamental para realizar observaciones más precisas a lo largo de todo el planeta. De esta manera, la percepción remota se consolidó y sus áreas de aplicación se fueron ampliando.

Años más tarde, los conocimientos en espectroscopía y el desarrollo de la tecnología permitieron realizar mediciones de la superficie terrestre en diferentes porciones del espectro electromagnético, inclusive en aquellas que no son visibles al ojo humano. Debido a que cada material de la naturaleza absorbe o emite energía electromagnética de diferentes maneras, que

dependen de su composición, es posible distinguirlos de acuerdo a la energía que reflejan o absorben. Basados en este hecho, las imágenes satelitales fueron captadas utilizando filtros espectrales sensibles a un determinado intervalo de longitudes de onda, también conocido como banda espectral. Esta tecnología dio paso a los denominados satélites multiespectrales y que han encontrado muchas aplicaciones especialmente para diferenciar entre algunos materiales de la superficie terrestre. Un ejemplo de satélite multiespectral es la serie LANDSAT, cuyo primer satélite fue lanzado en 1972. Abordo de estos satélites se han colocado dos instrumentos multiespectrales: el barredor multiespectral (MSS, *Multispectral Scanner*) y el mapeador temático (TM, *Thematic Mapper*).

Las imágenes que son registradas por estos dispositivos se denominan multiespectrales y consisten en una serie de imágenes captadas en intervalos anchos de longitudes de onda que van desde el visible al infrarrojo cercano. Utilizando estas imágenes es posible diferenciar entre los materiales básicos que componen una escena debido a que cada uno refleja la energía electromagnética de diferentes maneras. Así por ejemplo, la vegetación verde tiene un máximo de energía reflejada en el infrarrojo cercano, mientras que la nieve presenta un máximo en el color azul del visible.

Aunque los dispositivos multiespectrales han encontrado diversas aplicaciones para determinar regiones cubiertas por vegetación verde, mantos acuíferos y calidad del suelo, su uso está limitado debido a su baja resolución espectral. Este hecho dió la pauta para dar un giro en los dispositivos empleados en percepción remota.

Alrededor de los años 80s, la evolución de la espectroscopía de imagen permitió el surgimiento de los dispositivos conocidos como hiperespectrales, que son el resultado de la unión entre la tecnología para formar imágenes y la espectroscopía. Los sensores hiperespectrales son capaces de formar la imagen de las características espectrales de una región determinada, en cientos de bandas con una alta resolución espectral (alrededor de 10 nm). Así, con la aplicación de estos dispositivos al sensado remoto surgió lo que actualmente conocemos como sensado remoto hiperespectral cuya instrumentación registra la energía reflejada (0.4 a 2.5 μm) o emitida por la superficie de la tierra en cientos de bandas.

Las imágenes que son registradas por un sensor hiperespectral consisten en un arreglo

tridimensional de datos: dos de tipo espacial y una de tipo espectral. De acuerdo con esto, cada pixel de la imagen contiene un muestreo fino del espectro que va desde el visible hasta el infrarrojo cercano [24]. Una vez que se han tomado en cuenta las características de absorción de la atmósfera, las condiciones de iluminación en el día y la hora donde fue captada la escena, así como la ganancia del sensor, las imágenes hiperespectrales representan una herramienta poderosa para determinar y diferenciar los diversos materiales que conforman la superficie del área remotamente sensada. Un ejemplo de un instrumento hiperespectral es el espectrómetro de imagen AVIRIS (*Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer*) desarrollado por NASA (National Aeronautics and Space Administration), cuya plataforma aérea es un avión ER-2.

1.2. Planteamiento del problema

Los dispositivos hiperespectrales más modernos son colocados en aviones o sistemas de satélites [32, 42]. En estos sistemas, el tamaño físico que ocupa cada pixel de la imagen (conocido como resolución espacial) está en función de la altura de vuelo de la plataforma aérea y de las características propias del sensor; en la mayoría de estos dispositivos la resolución espacial está en el orden de decenas de metros, un área de este tamaño puede contener diferentes tipos de materiales. Por tanto, la espectrometría de un pixel particular, en realidad corresponderá a la mezcla espectral de diversos materiales en esa área.

Por tal motivo, la problemática en el análisis y segmentación de imágenes hiperespectrales consiste en identificar pixeles en la imagen que mejor representen al espectro de un solo material con la menor contaminación de algún otro. A estos pixeles se les denominan *miembros finales*. Una vez determinados los miembros finales en la imagen es posible determinar la mezcla de cualquier otro pixel en la escena. Para algunas aplicaciones, los miembros finales son determinados utilizando el conocimiento de expertos (biólogos, geólogos) acerca de la abundancia de algún recurso en la zona donde se ha registrado la imagen. Sin embargo, para muchas otras aplicaciones de sensado remoto de la Tierra, ésto no es práctico por lo que es necesario determinar estos miembros finales directamente desde la escena. Lo anterior representa la problemática de la búsqueda autónoma de miembros finales.

1.3. Avances recientes

Se han desarrollado diferentes algoritmos para la determinación de miembros finales en imágenes hiperespectrales. Una clase de algoritmos está basada en comparar cada pixel de la imagen con un espectro modelo o de referencia que puede ser adquirido de una biblioteca espectral o en la zona de la escena (a nivel de superficie), utilizando un espectrómetro portátil [11, 41]. Sin embargo, este método resulta computacionalmente costoso debido al tiempo requerido para procesar la escena completa. Otro de los problemas que presenta esta metodología es que no proporciona un método autónomo para la determinación de miembros finales.

Un método reciente aplicado en la búsqueda autónoma de miembros finales consiste en el *análisis de conos convexos* (CCA, *Convex Cone Analysis*), el cual se cita en [25] y ha sido aplicado para la detección de blancos. Este método consiste en seleccionar los valores máximos de eigenvectores en igual número al de miembros finales. Estos eigenvectores definen la base de un cono convexo que cubre los datos de la imagen. Sin embargo, este método es computacionalmente costoso y requiere que se especifique a priori el número de miembros finales.

Una metodología particularmente diferente que se ha propuesto para la determinación de miembros finales en imágenes hiperespectrales se cita en [17, 18]. Este algoritmo utiliza memorias asociativas morfológicas para detectar una de las propiedades del álgebra reticular: la *independencia morfológica*. El proceso básicamente consiste en construir las memorias asociativas correspondientes a partir de un pixel o espectro considerado como patrón (elegido aleatoriamente), agregar ruido gaussiano a este espectro y enseguida intentar recuperarlo al utilizar una de las memorias. De esta manera, si el espectro recuperado es diferente al almacenado, éste es un espectro morfológicamente independiente y a su vez un miembro final, en caso contrario el espectro no es considerado un miembro final. Aunque el método es no supervisado y su procesamiento se realiza en un solo paso a través de la imagen, el número de miembros finales varía respecto a la cantidad de ruido gaussiano que se adhiere al espectro.

1.4. Objetivos de la tesis y propuesta de solución

Objetivo general

Desarrollar un algoritmo para determinar la abundancia de ciertos recursos naturales en imágenes hiperespectrales basado en memorias asociativas morfológicas.

Objetivos particulares

- Reproducir el algoritmo del método basado en independencia morfológica, reportado en [17, 18], para realizar una comparación en la búsqueda de miembros finales.
- Implementar el algoritmo para el método basado en las columnas de las memorias autoasociativas W_{XX} o M_{XX} y que ha sido recientemente propuesto en [34].
- Implementar un algoritmo alternativo para la búsqueda de miembros finales, que tomará de base la propiedad de independencia reticular fuerte entre vectores.
- Realizar una comparación entre los algoritmos anteriores para tener una idea precisa de sus ventajas y desventajas.
- Considerar el modelo de *mezcla lineal espectral* como la base matemática que describa las mezclas en cada pixel de la imagen para obtener los mapas de abundancia de los recursos naturales, mediante el proceso de inversión.
- Utilizar dos imágenes hiperespectrales, que han sido registradas por el espectrómetro de imagen AVIRIS en los sitios de Cuprite y Moffett Field, para verificar los resultados.

El siguiente trabajo de tesis expone una metodología un tanto diferente para determinar la abundancia de recursos naturales en imágenes hiperespectrales, que está basada en *memorias asociativas morfológicas* y la propiedad de *independencia reticular fuerte*. Las memorias asociativas son un caso particular de *redes neuronales artificiales* que tratan de imitar la capacidad del cerebro humano de recuperar información completa a partir de información parcial. Formalmente, dados un par de vectores patrón asociados (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , una memoria asociativa \mathcal{M} es un dispositivo capaz de recuperar el vector \mathbf{y} cuando se le presenta el vector \mathbf{x} , o

una versión distorsionada o incompleta de este patrón. Un caso particular de estas memorias se tiene cuando $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ para todas las asociaciones (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ; entonces la memoria se denomina *autoasociativa*.

Por otra parte, las memorias asociativas morfológicas constituyen un tipo particular de redes neuronales morfológicas, cuyas operaciones están basadas en el álgebra reticular minimax. En redes neuronales clásicas el sistema algebraico utilizado para realizar el cómputo neuronal está basado en el conjunto de los números reales, junto con las operaciones de suma y multiplicación; ésto es $(\mathbb{R}, +, \times)$. En el álgebra reticular, que es la base del cálculo neuronal en redes morfológicas, la suma de productos es reemplazada por el máximo o mínimo de sumas, por lo que la estructura algebraica de tipo reticular se denota como $(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +)$. Debido a que estas redes no involucran operaciones de multiplicación, proveen un cómputo más rápido que las redes clásicas.

Así mismo, un caso particular de memorias morfológicas son las *memorias autoasociativas morfológicas* que poseen características únicas, tales como: su capacidad de almacenamiento para un amplio número de patrones, convergencia en un solo paso, así como tolerancia a ciertos tipos de ruido. Para efectos de este trabajo de tesis, las memorias autoasociativas son utilizadas para determinar un conjunto de vectores reticularmente independientes en sentido fuerte relativos a los patrones de entrada. Estos vectores coinciden con los puntos extremos de un simplejo o simplex de alta dimensionalidad que envuelven a los demás datos y que se interpretan como posibles miembros finales para la imagen hiperespectral.

1.5. Organización de la Tesis

La estructura y organización de los capítulos siguientes se describe a continuación. El Capítulo 2 expone los fundamentos físicos que sustentan el proceso de adquisición de imágenes hiperespectrales. Así mismo se presenta, de manera sucinta, el desarrollo de los dispositivos que han dado origen a este tipo de imágenes y sus características más importantes. Finalmente, se describen las etapas en el procesamiento de imágenes hiperespectrales a partir de su calibración, extracción de la información, hasta llegar a la segmentación de la imagen para obtener

los mapas de abundancia de los recursos naturales. El Capítulo 3 presenta una introducción a las redes neuronales artificiales y expone la base matemática-computacional para el cálculo neuronal. Enseguida, se describe el proceso de asociación que ocurre en el cerebro biológico y que ha sido la base para el desarrollo de modelos de redes neuronales que actúen como memorias asociativas. Más adelante se introducen las operaciones y propiedades del álgebra minimax que constituye la base matemática para el cálculo en las redes morfológicas; asimismo se describen matemáticamente las memorias asociativas morfológicas en términos de sus capacidades, resultados obtenidos y aplicaciones. Para concluir este capítulo, la última sección presenta el tratamiento matemático de dos propiedades fundamentales para la determinación de miembros finales: la independencia reticular e independencia reticular fuerte.

En el Capítulo 4 se presenta el modelo de mezcla lineal y se expone, de manera detallada, el proceso de detección de miembros finales en imágenes hiperespectrales utilizando dos métodos reportados en la literatura: el método propuesto por M. Graña en [17] y un método recientemente propuesto por G.X. Ritter et al. en [34]. Además, se presenta un método novedoso que representa la base de la presente investigación. El Capítulo 5 presenta el modelo matemático de separación lineal para la segmentación de las imágenes hiperespectrales, así como un análisis comparativo de los miembros finales determinados con las metodologías descritas en el capítulo 4. Para cerrar este capítulo se presentan los mapas de abundancia obtenidos con la segmentación de las imágenes de Cuprite Nevada y Moffett Field, respectivamente. El Capítulo 6 expone una discusión de los resultados y las conclusiones pertinentes obtenidas con la realización de este trabajo de investigación. Finalmente, se presentan algunas de las aportaciones en el área de esta investigación, así como otras que han sido reportadas en la literatura.

Capítulo 2

Sensado Remoto Hiperespectral

2.1. Principios

El término sensado remoto se refiere a la extracción de información de un objeto a distancia, utilizando los datos adquiridos por un sensor que no está en contacto físico con el objeto. En sus primeros inicios, el sensado remoto fue realizado utilizando globos aerostáticos o aviones para tomar fotografías de ciudades. Las imágenes aéreas eran captadas utilizando la luz del sol como fuente de iluminación [41]. Sin embargo, la energía proveniente del sol corresponde a una pequeña porción de la energía electromagnética.

Con el avance de la tecnología se pusieron en órbita los primeros satélites artificiales para tomar fotografías aéreas cuyo uso estaba restringido por los gobiernos para aplicaciones militares. Años más tarde, estos avances fueron complementados con la colocación de espectrómetros en plataformas satelitales [3].

Para 1990, la política del gobierno de los Estados Unidos permitió el uso de satélites con fines comerciales y con ello surgieron las industrias de sensado remoto. De esta manera, el sensado remoto comenzó a aplicarse en la agricultura, geología, planeación urbana y arqueología entre otros.

En los últimos años, el sensado remoto se ha realizado empleando sensores capaces de registrar las características espectrales de una región determinada. Esta tecnología se ha denominado *sensado remoto hiperespectral*.

2.1.1. El espectro electromagnético

La radiación que es captada por los sensores remotos se conoce como radiación electromagnética. Esta radiación se comporta como una onda de energía compuesta por un campo eléctrico \mathbf{E} y otro magnético \mathbf{B} , ambos oscilando en direcciones perpendiculares uno del otro. Existen algunas propiedades generales que comparten todas las formas de radiación electromagnética. Una onda electromagnética se propaga en el espacio libre a una velocidad c igual a 300,000 km/s; a su vez, cada onda electromagnética tiene asociada una longitud (λ) y una frecuencia (ν). La *longitud de onda* se refiere a la distancia entre dos picos o dos valles sucesivos. La *frecuencia* de la onda se refiere al número de veces que una onda completa pasa por un punto determinado en un segundo. La longitud de onda y la frecuencia están relacionadas por $\lambda\nu = c$. Es fácil observar que, conforme aumenta la longitud de onda, disminuye la frecuencia o energía. La figura 2.1 ilustra una onda electromagnética.

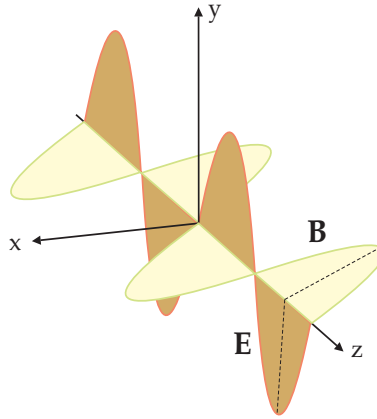


Figura 2.1: Onda electromagnética cuyos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} oscilan perpendicularmente uno respecto del otro.

Las ondas electromagnéticas se han clasificado en base a su longitud de onda y frecuencia en lo que se conoce como espectro electromagnético. La luz visible corresponde a una pequeña porción de este espectro cuyas longitudes de onda van desde 400 nm a 700 nm. En la figura 2.2 se muestra la distribución del espectro electromagnético en orden decreciente de frecuencia (energía), el cual es el siguiente: rayos gamma, rayos X, ultravioleta (UV), visible, infrarrojo (IR), micro ondas, ondas de radio. Para propósitos de sensado remoto de la Tierra se utiliza

una pequeña porción del espectro electromagnético que va desde $0.3 \mu\text{m}$ hasta $14 \mu\text{m} = 14000 \text{ nm}$, abarcando una pequeña porción del ultravioleta, pasando por el infrarrojo de ondas cortas (SWIR, *short wave infrared*), infrarrojo medio (MWIR, *medium wave infrared*), hasta el infrarrojo de ondas largas (LWIR, *long wave infrared*) (ver fig. 2.3).

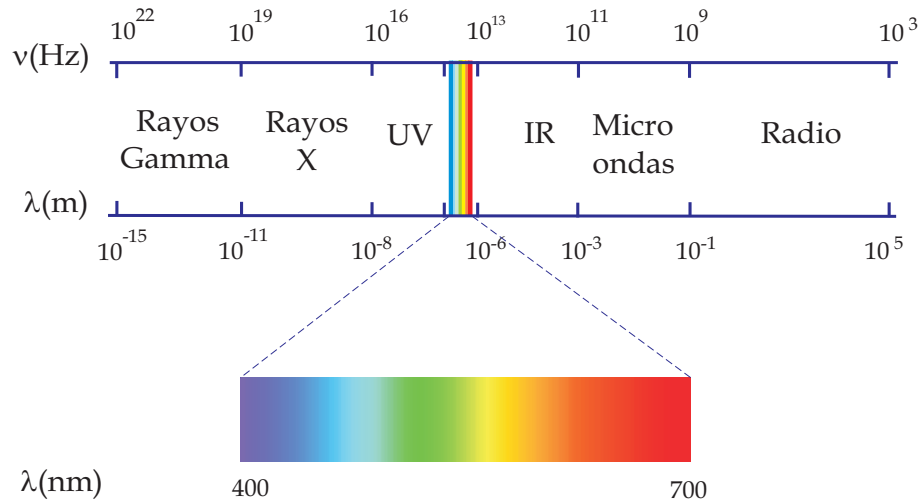


Figura 2.2: Espectro electromagnético.

2.1.2. Procesos de interacción entre materia y energía

La energía electromagnética que interactúa con la materia puede sufrir alteraciones en su dirección, intensidad, o polarización. Estos cambios dependen de la constitución química y la estructura física de los materiales que han sido expuestos a la radiación electromagnética [42]. Para una onda electromagnética que viaja en el espacio libre y se encuentra en la frontera con un medio diferente, una parte de ella se transmite al medio y otra parte se refleja dependiendo del tipo de material. Los procesos de interacción materia-energía tales como transmisión, reflexión, absorción y emisión se describen a continuación.

- *Transmisión*- La parte de la onda que se transmite al medio sufre un cambio en su dirección debido a que la velocidad de la onda disminuye al entrar en un medio más denso. La figura 2.4a ilustra a la onda electromagnética y su interacción con un medio.

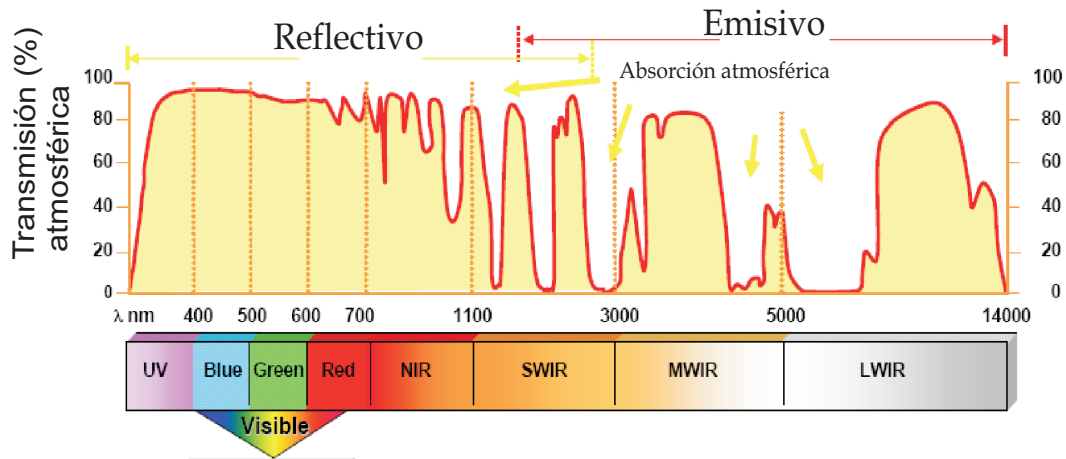


Figura 2.3: Porción del espectro electromagnético utilizado en sensado remoto. La porción de reflectancia de la superficie terrestre abarca hasta las longitudes de onda de $2.5 \mu\text{m}$. *Imagen cortesía de la Dra. Joan Lurie.*

- *Absorción*- La radiación electromagnética que se ha transmitido a un medio puede ser absorbida por las moléculas del material dependiendo de la longitud de onda (ver fig. 2.4b); es decir, el material puede absorber mayor energía en una determinada longitud de onda que en otra.
- *Emisión*- La energía electromagnética que es absorbida se transforma en energía calórica que aumenta la temperatura del material y que después puede ser emitida en forma de radiación electromagnética (ver fig. 2.4b). Esta radiación dependerá de la temperatura del material: a menor temperatura, el material emitirá energía con mayor longitud de onda.
- *Reflexión*- La dirección de la radiación electromagnética que se refleja en la frontera entre los dos medios dependerá del ángulo de incidencia de la onda así como de la superficie. Si la superficie es suave comparada con la longitud de onda incidente, la radiación se reflejará de manera especular (ver fig. 2.4c); es decir, en un ángulo igual al ángulo de incidencia. Si la superficie es rugosa, la energía electromagnética será esparcida en todas direcciones (ver fig 2.4d).

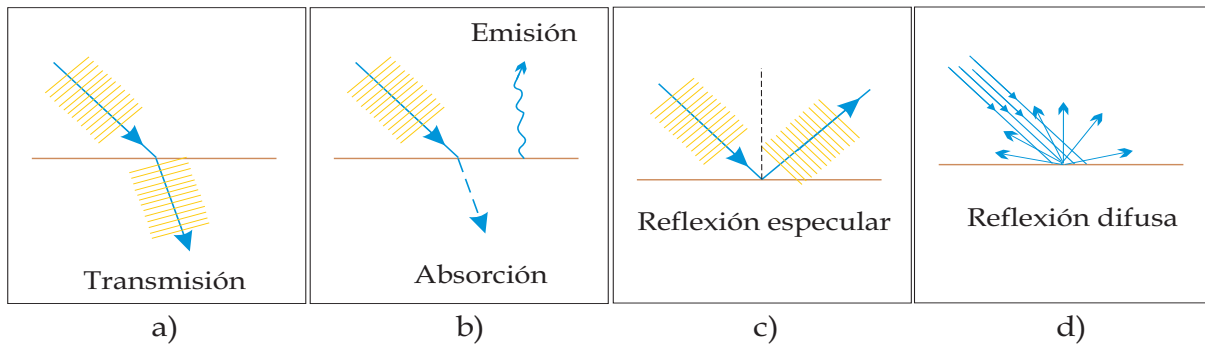


Figura 2.4: Procesos de interacción materia y energía; la dirección del frente de onda está representada mediante un rayo ortogonal a la onda electromagnética.

Los fenómenos de interacción materia y energía descritos anteriormente son parte fundamental en el proceso de adquisición de imágenes de sensado remoto. Estos procesos ocurren con la radiación solar que llega a la superficie. La radiación electromagnética proveniente del sol está compuesta por muchas longitudes de onda; al pasar a través de la atmósfera, las partículas de gas dispersan parte de la energía incidente en todas direcciones. Las longitudes de onda corta (azul) se dispersan más que las longitudes de onda largas (rojo). La luz que se transmite a través de la atmósfera llega a la superficie de la Tierra que está cubierta por diferentes materiales. Parte de esta energía es absorbida por los materiales en determinadas longitudes de onda. La radiación que no es absorbida es reflejada difusamente en todas direcciones. Finalmente, el calentamiento solar provoca la emisión de energía por los materiales que cubren la superficie terrestre.

2.2. Espectroscopía

La ciencia de la espectroscopía se encarga del estudio de la energía reflejada o emitida por un material y su variación con la longitud de onda [41]. Debido a que todos los materiales de la naturaleza absorben o emiten energía electromagnética de diferentes maneras que dependen de su composición, la espectroscopía nos permite caracterizar e identificar los distintos materiales que existen en la naturaleza.

Los antecedentes de la espectroscopía datan del siglo XVII cuando Newton descubrió que la

luz blanca se dispersa en los siete colores del arcoiris al pasar a través de un prisma. Más tarde, se descubrió que un conjunto de alambres delgados igualmente espaciados también dispersan la luz. Estos descubrimientos, así como la teoría de difracción desarrollada por Fraunhofer condujeron al desarrollo de los instrumentos denominados espectrómetros.

Aunque se tenía la tecnología para observar espectros de energía desde el siglo XIX, no se tenía una clara explicación de como eran producidos. Fue hasta el siglo XX cuando Niels Bohr a través de su *modelo del átomo* brindó una explicación acerca del fenómeno de emisión y absorción de energía. En el modelo del átomo propuesto por Bohr, cada átomo contiene en el núcleo igual número de protones con carga positiva y neutrones cuya carga es neutra. Alrededor del núcleo se encuentran orbitando los electrones con carga negativa, en niveles bien definidos. Por lo tanto, al hacer incidir cierta cantidad de energía sobre un electrón, éste cambiará de nivel como resultado de una absorción o emisión de una cierta cantidad de energía, lo que produce un espectro. Debido a que cada átomo de la naturaleza tienen un número bien definido de electrones orbitando en ciertos niveles, ellos producen un patrón de líneas de emisión o absorción que es único.

En base a los postulados de Max Planck acerca de que la energía emitida o absorbida por una molécula está cuantizada en paquetes de energía, se ha comprobado experimentalmente que el cambio de energía para una molécula entre dos niveles E_1 y E_2 puede ocurrir suministrando la energía apropiada, $\Delta E = E_1 - E_2$ que puede ser emitida o absorbida. Además, Planck sugiere que cada absorción o emisión puede tomar la forma de radiación electromagnética y que la frecuencia de la radiación viene dada por

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad (2.1)$$

donde el cambio de energía ΔE está dado en Julios (J), y h es la constante de Planck cuyo valor es $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J-s [4]. Lo anterior explica que si tenemos una molécula que se encuentra en el estado 1 y recibe radiación electromagnética de una determinada frecuencia ν , la energía correspondiente será absorbida y la molécula pasará al estado 2. De esta manera, al conjunto de líneas de energía emitidas o absorbidas por una molécula en función de la longitud de

onda se conoce como *espectro característico*. En base a esto, el espectro de un material puede consistir en líneas brillantes en determinadas longitudes de onda conocidas como líneas de emisión, o bandas oscuras a ciertas longitudes de onda denominadas de absorción. La figura 2.5 presenta los espectros de emisión del hidrógeno y del carbono. La emisión de energía está representada por las líneas, cuyo ancho y brillo representan la cantidad de energía emitida.



Figura 2.5: Espectros de emisión del hidrógeno y carbono

Otra forma de representar el espectro característico de un material es realizando una gráfica de la energía emitida o reflejada en función de la longitud de onda.

2.2.1. Espectrómetros

Los instrumentos utilizados para realizar mediciones de luz reflejada por un material se denominan espectrómetros. Los elementos básicos de un espectrómetro se ilustran en la figura 2.6. El funcionamiento de estos instrumentos es descrito como sigue. La radiación de la fuente de luz se enfoca hacia una rendija estrecha utilizando una lente. Enseguida los rayos son colimados por medio de una segunda lente (colimador) y son dispersados en las diferentes longitudes de onda al pasar a través de un elemento dispersor como puede ser un prisma o una rejilla. Por último, la energía es enfocada por otra lente y es registrada por un detector. El espectro consiste en una serie de imágenes monocromáticas de la rendija de entrada.

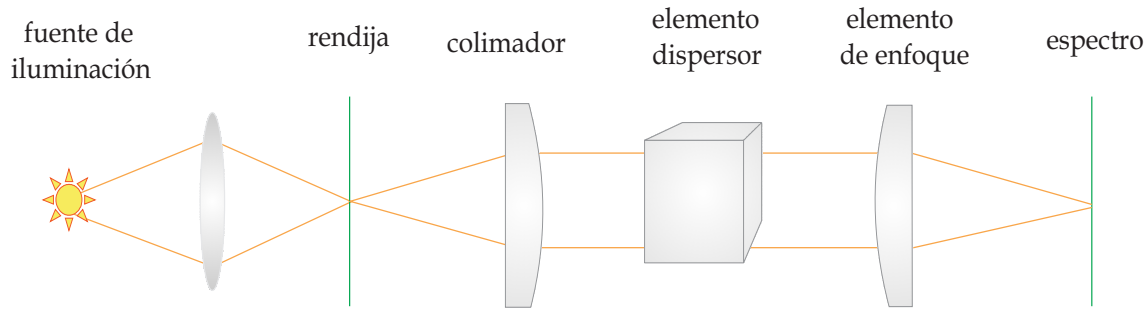


Figura 2.6: Elementos básicos de un espectrómetro.

2.2.2. Espectrómetros de imagen

El desarrollo de la ciencia de la espectroscopía ha permitido la realización de instrumentos conocidos como espectrómetros de imagen. Estos instrumentos forman la imagen de las características espectrales de un objeto en cada elemento de la imagen (pixel) [30]. Este tipo de instrumentos están constituidos por los siguientes elementos: espectrómetros, óptica para coleccionar luz y un mecanismo de barrido para captar la luz sobre el campo de visión en una escena. Estos sistemas tienen amplias aplicaciones que van desde la medicina hasta el sensado remoto de la Tierra.

Los espectrómetros de imagen se clasifican en multiespectrales o hiperespectrales dependiendo del ancho espectral de cada banda y del número de bandas coleccionadas, entendiéndose por banda a un intervalo de longitudes de onda. De esta manera, si el espectro coleccionado consiste en múltiples bandas espectralmente anchas y separadas, los datos se denominan *multiespectrales* (no. de bandas en el orden de “decenas”). Por otra parte, si el espectro coleccionado consiste en bandas cuasi continuas y espectralmente estrechas, entonces los datos se denominan *hiperespectrales* (no. de bandas en el orden de “centenas”).

Para las aplicaciones en sensado remoto de la Tierra es necesario que estos instrumentos sean colocados en una plataforma aérea. Así, el movimiento de la plataforma es utilizado como parte del mecanismo de barrido a lo largo de la escena. Existen dos tipos fundamentales para este barrido. Si la óptica forma la imagen de una rendija paralela al movimiento de la plataforma, y el sistema de barrido está en dirección opuesta al movimiento, este sistema se denomina *escobilla giratoria* (“whiskbroom”). Por otro lado, si la óptica forma la imagen de una

rendija larga sin ningún otro mecanismo de barrido más que el movimiento de la plataforma, el sistema se denomina *escobilla de empuje* (“pushbroom”). La figura 2.7 presenta un diagrama de los elementos que constituyen un espectrómetro de imagen.

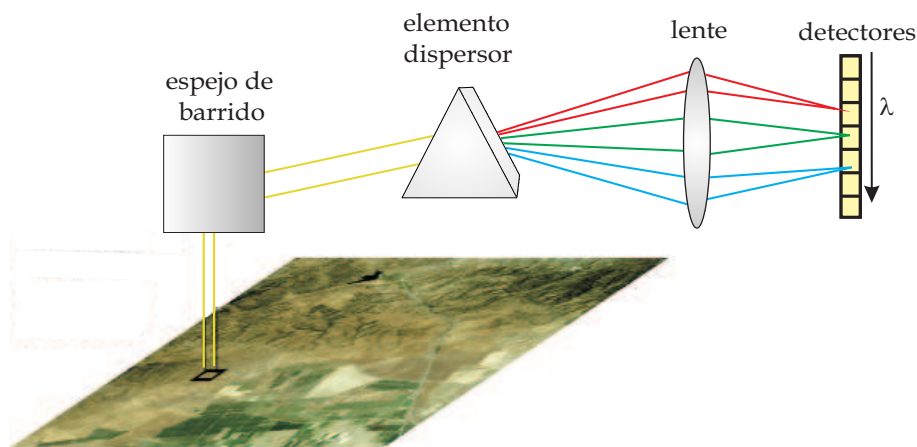


Figura 2.7: Diagrama esquemático de un espectrómetro de imagen; cada elemento detector registra un determinado intervalo de longitudes de onda.

Existe otro tipo de espectrómetros de imagen que utilizan un filtro espectral lineal variable colocado en un arreglo bidimensional de fotodetectores. De esta manera, cada imagen formada corresponderá a una banda espectral diferente.

2.3. Imágenes hiperespectrales y sensedo remoto

El sensedo remoto hiperespectral es el resultado de la unión entre la tecnología para formar imágenes y la espectroscopía [11]. Estos sistemas registran el rango de longitud de onda reflejada (0.4 a $2.5 \mu m$) o emitida (0.3 a $14 \mu m$) por la superficie de la Tierra en cientos de imágenes cuasi continuas y espectralmente estrechas. Una vez que los datos son adecuados tomando en cuenta la ganancia del sensor, esparcimiento debido a la atmósfera y condiciones de iluminación, estos datos hiperespectrales ofrecen el potencial para la determinación de los diferentes materiales constituyentes de la superficie terrestre. Como consecuencia, los sensores hiperespectrales ofrecen datos más detallados que cualquier otro sistema en sensedo remoto.

Los dispositivos hiperespectrales fueron desarrollados a inicios de los años 80s, pero su uso estaba muy limitado debido a la cantidad de memoria necesaria para registrar una sola escena. El desarrollo de computadoras más veloces y con mejores características de almacenamiento ha permitido un mayor uso de los datos hiperespectrales que han encontrado muchas aplicaciones en áreas diversas. La figura 2.8 ilustra el concepto de sensado remoto hiperespectral.

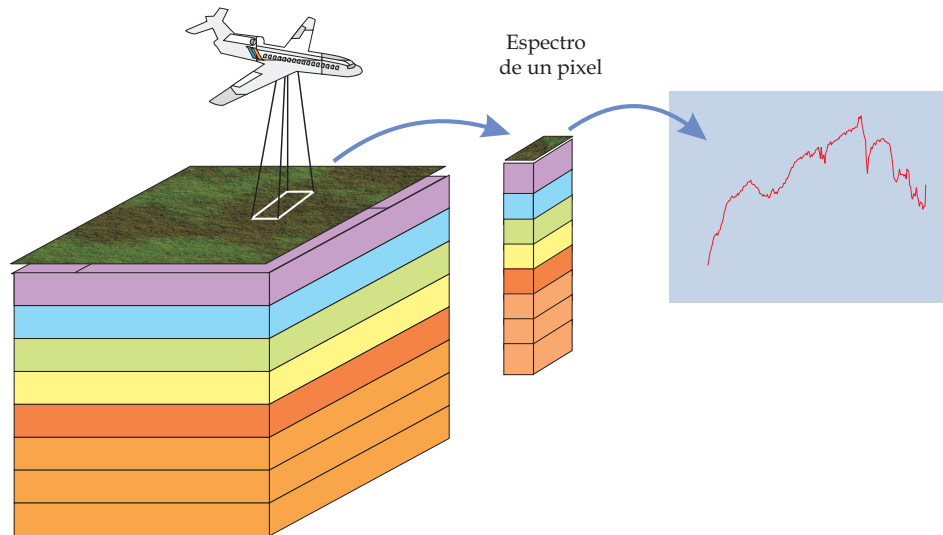


Figura 2.8: Concepto de sensado remoto hiperespectral; cada pixel que es colectado proporciona el espectro de los materiales constituyentes.

2.3.1. Imágenes hiperespectrales

Básicamente, un sistema hiperespectral consiste en un espectrómetro de imagen con un número determinado de foto detectores, cada uno sensible a un intervalo de longitudes de onda. Estos foto detectores registran la luz solar reflejada desde la superficie de la Tierra, denominada radiancia. Así, el número de bandas de una imagen hiperespectral dependerá del número de foto detectores en el sistema. El volumen de datos registrados por un dispositivo hiperespectral consiste en un arreglo tridimensional con dos dimensiones espaciales y la tercera de tipo espectral. Así, estos datos forman un cubo de imágenes como se muestra en la figura 2.9, cuya imagen frontal corresponde a $\lambda = 460\text{nm}$. Por tanto, una imagen hiperespectral es

un tipo especial de imagen en la que cada pixel contiene un muestreo fino del espectro que abarca desde el visible al infrarrojo cercano [18].

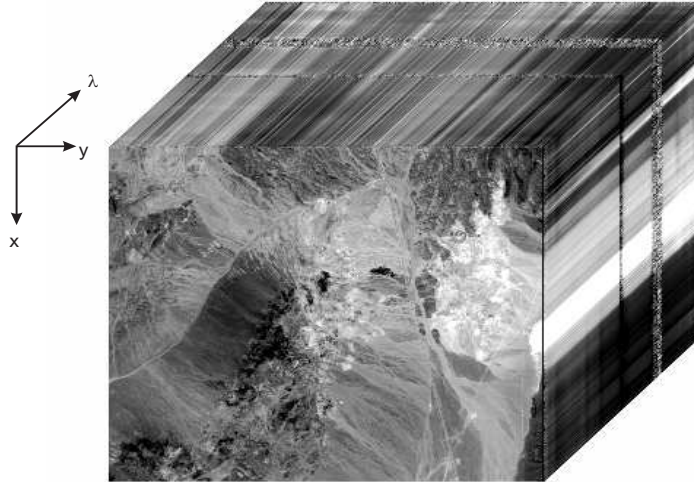


Figura 2.9: Cubo hiperespectral de la zona de Cuprite, Nevada; registrado con el espectrómetro de imagen AVIRIS (*Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer*).

La adquisición de este tipo de imágenes se realiza sobre intervalos de longitudes de onda en las cuales la atmósfera presenta menor absorción, conocidos como *ventanas atmosféricas*. Estas ventanas se encuentran distribuidas entre el rango de luz visible y el infrarrojo. De esta manera, cada una de las imágenes del cubo hiperespectral corresponde a una determinada longitud de onda en este intervalo del espectro electromagnético (0.4 a $2.5 \mu m$). La resolución espacial y espectral son parámetros con los que cuentan las imágenes hiperespectrales y ambos son muy importantes porque nos brindan información de las limitaciones de un sistema de este tipo.

2.3.2. Resolución espacial y espectral

La resolución espacial es una medida del detalle en la superficie que puede ser captado por un sensor remoto [42]. Este tipo de resolución depende de las características propias del sensor, así como de la altitud a la que éste capta las imágenes. Para imágenes digitales, la resolución espacial consiste en el área terrestre que ocupa un píxel de la imagen. De esta manera, mientras

menor sea el área terrestre de cada píxel, mayor será la resolución espacial de la imagen. Para aplicaciones de sensado remoto de la Tierra, debido a que los dispositivos hiperespectrales son colocados en una plataforma aérea, la resolución espacial en imágenes hiperespectrales está en el orden de decenas de metros. Por ejemplo, en el caso del espectrómetro de imagen AVIRIS, cada píxel de la imagen tiene una resolución espacial de $20 \text{ m} \times 20 \text{ m} = 400 \text{ m}^2$ [3]. Por otra parte, la resolución espectral consiste en el número de bandas que un sensor remoto puede registrar, así como el ancho de estas bandas [24]. Los sensores hiperespectrales pueden registrar entre 60 y 256 bandas y la resolución espectral puede ser tan fina como $0.01 \mu\text{m}$ equivalente a 10 nm [3].

2.3.3. Sensado remoto hiperespectral de la Tierra

Las aplicaciones de sensado remoto hiperespectral de la Tierra se enfocaron primeramente en geología debido a que los minerales tienen características de absorción únicas. Poco a poco se han ido desarrollando aplicaciones en diversas áreas que van desde la ecología hasta aplicaciones militares. A continuación se presentan algunas áreas de aplicación de este tipo de percepción remota.

Geología- La información que presentan las imágenes hiperespectrales en la región del infrarrojo cercano ha hecho posible la identificación de minerales que están constituidos por hierro. La determinación de estos minerales ha sido utilizada para detectar terrenos alterados hidrotérmicamente que pudieran ser propensos a movimientos terrestres. Otras aplicaciones en geología consisten en la exploración de minas abandonadas, así como el monitoreo de volcanes activos.

Vegetación y medio ambiente- La identificación de diversas especies vegetales, así como la medición de la sequía de las plantas ha sido posible utilizando sensores hiperespectrales. La falta de agua en la vegetación produce una disminución en la producción de clorofila y consecuentemente puede provocar enfermedades en las plantas o incendios. En las plantas verdes, la clorofila es la responsable de fuertes absorciones en las longitudes de onda del azul y el rojo, con reflectancia en $0.55 \mu\text{m}$. En el borde del rojo e infrarrojo cercano la reflectancia de la vegetación verde es máxima con ligeras bandas de absorción debido a la presencia de

agua en 0.97, 1.45, 1.93 y 2.50 μm como se aprecia en la figura 2.10.

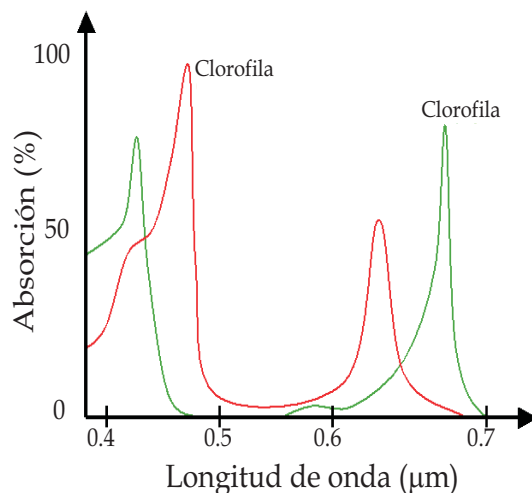


Figura 2.10: Espectro de absorción en la vegetación debido a la clorofila; en vegetación verde se produce absorción máxima en las porciones del espectro correspondientes al rojo y azul, mientras que para vegetación seca la curva se desplaza produciéndose un máximo de reflectancia en el amarillo.

Utilizando datos hiperespectrales también es posible determinar la cantidad de agua presente en las hojas de las plantas, lo que hace posible caracterizar terrenos con madera. Otra de las aplicaciones importantes en esta área ha sido en la identificación de regiones cubiertas por nieve debido a que la nieve posee un espectro de reflectancia máximo en el azul. En la agricultura ha sido posible realizar mediciones hiperespectrales para identificar la calidad de la tierra, predicción de las cosechas y para determinar la salud agro-ambiental.

Aplicaciones militares- El sensado remoto hiperespectral ha encontrado múltiples aplicaciones militares. Las actividades que se han desarrollado con mayor interés son aquellas que involucran la identificación y caracterización de materiales sobre la superficie terrestre, como por ejemplo:

- extracción y análisis de las características de un terreno para crear mapas y detectar cambios en los mismos,.
- identificación de materiales sobre la superficie terrestre para detectar líneas de comunicación (carreteras) y zonas de aterrizaje de aviones,

- evaluación de desastres naturales,
- apoyo en plan de contingencia: análisis de la zona de aterrizaje, planeación de operaciones anfibas, operaciones de evacuación y evaluación de riesgos en el medio ambiente,
- planeación de misiones,
- apoyo en la identificación y seguimiento de blancos, así como evaluación del daño causado por bombas,
- apoyo para contrarrestar operaciones relacionadas con narcóticos,
- monitoreo del cumplimiento de tratados internacionales, tales como el tratado de reducción de armas (START, *Strategic Arms Reduction Treaty*) y el control de armas nucleares,
- caracterización de la vegetación para detectar contaminación por productos químicos o biológicos.

2.4. Procesamiento de imágenes hiperespectrales

Una vez que se ha registrado una escena en cientos de bandas, utilizando un dispositivo hiperespectral, es necesario realizar el procesamiento de estos datos para identificar los materiales que conforman dicha escena y así construir mapas de la distribución de estos recursos. Sin embargo, debido a la gran cantidad de información que se obtiene con estos dispositivos, su análisis puede resultar un tanto complejo por lo que es necesario dividir el procesamiento en las siguientes etapas: preprocesamiento de los datos, detección de miembros finales y segmentación de la imagen.

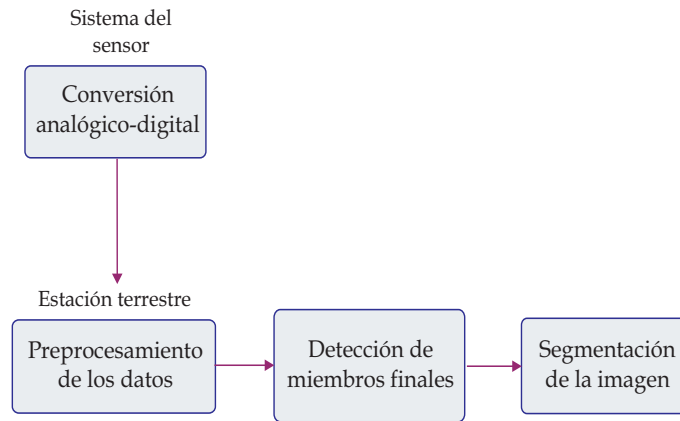


Figura 2.11: Etapas en el procesamiento de imágenes hiperespectrales.

2.4.1. Preprocesamiento de la información

Para poder comparar el espectro de cada pixel de una imagen hiperespectral con el espectro característico de un material determinado, *los datos deben estar dados en cantidades de reflectancia*; es decir, la razón de la intensidad de luz reflejada sobre la intensidad de luz incidente en función de la longitud de onda. Sin embargo, la luz que es captada por la apertura de un sensor hiperespectral consiste únicamente en la energía reflejada por cada banda espectral denominada radiancia. Por lo tanto, la etapa de preprocesamiento consiste en convertir los datos de radiancia a reflectancia. Una conversión global debe considerar las siguientes características: la fuente solar, los efectos de iluminación debidos al ángulo del sol, la transmisión atmosférica y la ganancia del sensor. De esta manera, la reflectancia del terreno debe ser multiplicada por estos factores para obtener el espectro de radiancia medida.

- **Factores de iluminación-** La energía solar que llega a la superficie de la Tierra varía en función de la longitud de onda con un máximo en la región del visible. Además, la luz reflejada por la superficie varía durante la hora del día y estación del año en relación al coseno del ángulo de incidencia. Por lo tanto, es necesario conocer o derivar el espectro de la energía solar entrante en la hora del día en que se captaron las imágenes para remover el nivel de energía solar de fondo.

- **Factores atmosféricos-** Una atmósfera relativamente clara limita, para algunas longitudes de onda, la cantidad de energía que llega a la superficie terrestre o la cantidad de energía que capta el sensor. Por lo tanto, es necesario compensar los efectos de absorción y esparcimiento debidos a la atmósfera. [10, 42]. En la porción del espectro electromagnético que abarca el visible e infrarrojo cercano, existen siete elementos constituyentes de la atmósfera con características importantes de absorción: vapor de agua, dióxido de carbono, ozono, oxígeno, óxido nitroso, monóxido de carbono y metano. Además, la energía solar que llega a la superficie es limitada por el esparcimiento molecular, comúnmente denominado esparcimiento de Rayleigh, y el causado por gases de aerosol, denominado esparcimiento de Mie. Ambos se presentan con mayor intensidad en la región del azul pero decrecen rápidamente conforme incrementa la longitud de onda; cerca de $1 \mu m$ su efecto es despreciable.

Para remover los efectos solares y atmosféricos de imágenes hiperespectrales existen tres métodos principales que derivan la reflectancia de la superficie. Estos métodos se describen brevemente a continuación.

Conversión de campo plano- Este método está basado en imágenes y requiere que éstas incluyan regiones uniformes con espectros de reflectancia relativamente planas. Este tipo de espectros planos pueden encontrarse en zonas desérticas, lagos secos o en superficies de asfalto. De esta manera, cualquier absorción que se presente en el espectro de reflectancia de estas regiones será debido a la contribución de cualquiera de los efectos anteriormente mencionados. Una vez conocidos estos efectos de absorción pueden ser eliminados para toda la imagen.

Método lineal empírico- Este método está basado en realizar mediciones de reflectancia en la zona donde se han obtenido las imágenes hiperespectrales. Para ello, se eligen dos regiones suficientemente grandes que puedan ser identificadas desde la imagen y que tengan diferencias grandes de brillo. Una vez realizadas estas mediciones, se puede obtener una ecuación lineal para cada banda que relacione los valores de radiancia de la imagen con los valores de reflectancia medidos. De esta manera, al graficar reflectancia versus radiancia, la pendiente de la recta representará la ganancia para los factores de radiancia, mientras que la intersección

con los ejes representará el componente aditivo. Así, estos valores son utilizados para convertir cada banda de la imagen al valor correspondiente de reflectancia. Estos valores de reflectancia deben ser considerados de reflectancia aparente, ya que en este modelo no son considerados las diferencias en sombra dentro de la escena y la longitud de la trayectoria atmosférica.

Método de modelos- Este método consiste en modelar los factores que intervienen en la adquisición de la radiancia en la escena. Se comienza por obtener la espectrometría de la irradiancia solar, entonces se calculan los efectos de radiancia solar del día y la hora en la escena, así como la dispersión y absorción atmosféricas. En la ausencia de mediciones de las condiciones actuales de la atmósfera, es posible estimar la cantidad y distribución de los agentes de dispersión en la escena. Además, los efectos de absorción causados por bióxido de carbono y oxígeno se asumen uniformes mientras que los causados por vapor de agua pueden ser estimados usando porciones del espectro que incluyan su absorción y entonces corregirlos para cada píxel en la imagen.

La *radiancia en la superficie* L_s a cualquier longitud de onda λ puede ser expresada como sigue:

$$L_s(\lambda) = \frac{1}{\pi}(E\rho + M_T)\tau_\theta + L_u \quad (2.2)$$

donde, E es la irradiancia en la superficie de la Tierra, ρ es la reflectancia de la superficie, M_T es la excitancia radiante espectral de la superficie a temperatura T , τ_θ es la transmitancia de la atmósfera al ángulo zenith θ , y L_u es la radiancia de trayectoria de la atmósfera [11].

2.4.2. Detección de miembros finales

Una vez que los datos hiperespectrales han sido calibrados a valores de reflectancia espectral es posible comparar el espectro de cada píxel de la imagen con el espectro de algún material determinado. Para ello es necesario tener un conocimiento previo de los materiales que conforman dicha escena. De esta manera, al conjunto de espectros que representan a los materiales que componen una escena hiperespectral se denominan *miembros finales*. Para algunas aplicaciones los miembros finales son determinados utilizando el conocimiento de ex-

pertos en la zona o realizando mediciones de campo directamente en el lugar de la escena. Sin embargo, para la mayoría de las aplicaciones de sensado remoto ésto no es práctico, por lo que es necesario determinarlos directamente desde la imagen. Por tanto, la búsqueda de miembros finales en una imagen hiperespectral se convierte en la búsqueda de pixeles casi puros que representen a un solo material con la menor contaminación de otro como sea posible.

En efecto, se han desarrollado métodos autónomos para la detección de miembros finales. Estos métodos son tratados con detalle en el capítulo 4. Una vez determinados los miembros finales es posible segmentar dicha imagen con el propósito de realizar mapas de abundancia de los recursos naturales.

2.4.3. Segmentación de la imagen

La última etapa en el procesamiento de imágenes hiperespectrales consiste en la segmentación. Mediante este procedimiento, se construyen mapas de abundancia que consisten en imágenes codificadas en color falso que indican la distribución de los materiales constituyentes de una escena.

El término segmentación es utilizado en el área de procesamiento digital de imágenes y se refiere al proceso que particiona o subdivide a una imagen digital en regiones [15]. Para este efecto, los algoritmos de segmentación están basados en una de las dos propiedades básicas de los valores de intensidad de las imágenes: discontinuidad y similitud. Tomando en cuenta la primera propiedad se particiona una imagen de acuerdo a cambios abruptos en intensidad, tales como bordes en una imagen. Utilizando la segunda propiedad se particiona una imagen en regiones que son similares de acuerdo a un criterio previamente establecido. Aunque el proceso de segmentación es aplicado a imágenes digitales en dos dimensiones, es posible trasladar este concepto a imágenes hiperespectrales. Lo anterior es posible si tomamos en cuenta las características espectrales de cada pixel, en vez de tomar los valores de intensidad, como un criterio de segmentación. De esta manera, al segmentar una imagen hiperespectral, vamos a subdividir en regiones con características espectrales similares. Los algoritmos desarrollados para segmentar imágenes hiperespectrales están basados en alguno de los métodos citados a continuación.

Igualación espectral- Este método consiste en comparar el espectro de cada pixel en la imagen hiperespectral, con un espectro o grupo de espectros de referencia y se aplica alguna medida de similitud. El espectro de referencia puede ser obtenido desde el lugar donde ha sido registrada la escena utilizando un espectrómetro portátil o una muestra en el laboratorio. De esta manera, una medida de similitud frecuentemente utilizada es el modelo denominado *mapeador de ángulo espectral* (SAM, *Spectral Angle Mapper*), que calcula el ángulo θ entre el espectro de un pixel \mathbf{t} y el espectro de referencia \mathbf{r} , i.e. [41],

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{t} * \mathbf{r}}{\|\mathbf{t}\| * \|\mathbf{r}\|} \right). \quad (2.3)$$

SAM es un modelo que determina la similitud basado sólo en las forma de los espectros. De esta manera, conforme menor sea el ángulo θ , los espectros serán más similares. Una aproximación para este método consiste en comparar únicamente las características de absorción entre el espectro de un pixel y el espectro de referencia. Por lo tanto, no es necesario buscar la similitud completa en la forma de ambos.

Modelo de mezclado lineal espectral (LMM, *Linear Mixing Model*)- Como se mencionó anteriormente, debido a que los dispositivos hiperespectrales son colocados en plataformas aéreas, la resolución espacial de cada pixel de la imagen está dada en el orden de decenas de metros. En un área de este tamaño se encuentran mezclados diversos materiales y el espectro medido por un sensor corresponderá al espectro de la mezcla de esos materiales. El modelo de análisis de mezcla espectral está basado en este hecho y considera que el espectro medido en cada pixel de la imagen corresponde a una *combinación lineal* de espectros. De esta manera, el objetivo de este modelo es determinar la abundancia fraccional de cada miembro final de modo que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^K a_i \mathbf{s}_i + \mathbf{n} = \mathbf{S} \mathbf{a} + \mathbf{n} \quad (2.4)$$

donde, \mathbf{x} es el espectro de reflectancia de un pixel observado, \mathbf{a} es el vector de abundancias de los materiales correspondientes a miembros finales, \mathbf{S} es la matriz cuyas columnas son los

miembros finales y \mathbf{n} es el vector de residuos entre las reflectancias modeladas y medidas [11, 26]. El análisis de mezcla espectral está sujeto a dos condiciones:

1. Las abundancias deben ser no negativas, ésto es,

$$a_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots K. \quad (2.5)$$

2. Las abundancias fraccionales para un determinado pixel deben sumar la unidad [18], i.e.,

$$\sum_{i=1}^K a_i = 1. \quad (2.6)$$

Capítulo 3

Memorias Asociativas Morfológicas

3.1. Redes Neuronales Artificiales

Una *red neuronal artificial* (ANN, *Artificial Neural Network*) es un sistema de procesamiento de información inspirado en las redes neuronales biológicas. Una red de este tipo consta de un número de elementos de procesamiento conocidos como neuronas artificiales o nodos. Las neuronas están interconectadas a través de una conexión neuronal o sinapsis, cada una con un peso asociado. Estos pesos representan la información que va a hacer usada por la red para resolver un problema.

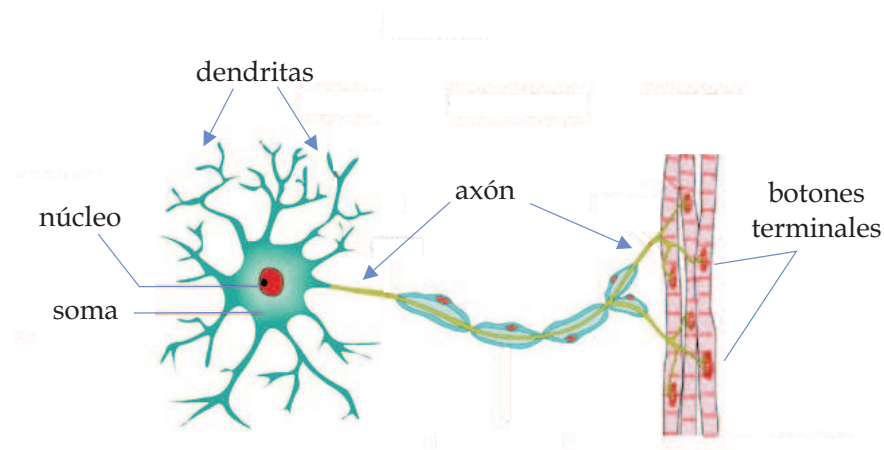


Figura 3.1: Procesos fundamentales de una neurona biológica.

Es importante conocer la fisiología de las neuronas biológicas para comprender la base matemática de estas redes. Una neurona biológica consta de tres componentes que son de particular interés: *soma* o *cuerpo de la célula*, *axón* y *dendritas* (ver figura 3.1). Las múltiples dendritas que forman parte de la neurona reciben señales o impulsos eléctricos, provenientes de otras neuronas, por medio de transmisores mediante un proceso químico. La acción de los transmisores químicos modifica a la señal de entrada escalando su frecuencia. El cuerpo se encarga de sumar las señales de entrada. Cuando se reciben suficientes entradas la neurona se activa de acuerdo a un umbral; ésto es, transmite una señal que recorre el axón y se transmite a otra neurona a través de las sinapsis. De esta manera se considera que una neurona puede o no dispararse, por lo que la señal transmitida se puede codificar en forma binaria.

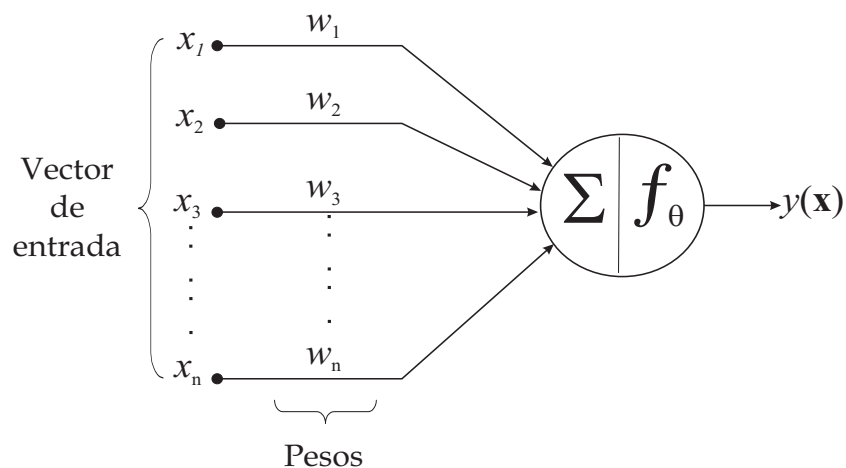


Figura 3.2: Esquema de una neurona artificial.

Las neuronas artificiales han sido desarrolladas a partir de modelos matemáticos que tratan de imitar la actividad funcional anteriormente descrita. Por tanto, las componentes de una neurona artificial son las siguientes:

1. La neurona que recibe en paralelo un conjunto de entradas o estímulos x_i ; $i = 1 \dots n$ proveniente de otras neuronas.
2. Un conjunto finito de axones o conexiones neuronales. Cada conexión tiene asociada un peso de interconexión w_i . Si el peso es positivo la conexión se denomina excitatoria; si es negativo se denomina inhibitoria.

3. Una función de propagación que consiste en una suma ponderada de cada una de las entradas multiplicada por su peso de interconexión.
4. Una función de activación que se aplica al valor devuelto por la función de propagación y que decide, en base a un umbral θ , si la neurona se dispara o no. Se utiliza para acotar la salida de la neurona. Algunas funciones muy utilizadas son: la sigmoide, para obtener valores en el intervalo $[0,1]$, y la hiperbólica-tangente cuyos valores están en el intervalo $[-1, 1]$.

Existen diferentes tipos de redes neuronales, cada una caracterizada de acuerdo a su *topología* (conexiones entre las neuronas), *entrenamiento o aprendizaje* (el método para determinar los pesos en las conexiones) y sus *funciones de activación*. De acuerdo a la topología, las redes neuronales pueden ser monocapa, multicapa, recurrentes y de propagación hacia delante. En base al aprendizaje de reglas, las redes artificiales pueden ser de aprendizaje supervisado, no supervisado y redes híbridas. Las redes neuronales artificiales pueden aplicarse a una gran variedad de problemas relacionados con el almacenamiento y recuperación de datos (para estas aplicaciones los datos de entrada se denominan *patrones*), clasificación de patrones y procesamiento de señales digitales; siendo el procesamiento digital de imágenes un caso particular de esta área. Además, las redes neuronales artificiales han sido aplicadas con éxito a problemas de control, producción, reconocimiento de voz e incluso medicina [12].

3.2. Base computacional de redes morfológicas

En las redes neuronales previamente descritas, el cómputo de la respuesta de las neuronas en la red depende de las funciones de propagación y activación. La ecuación que modela a la función de propagación viene dada por:

$$\tau_i(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \cdot w_{ij}, \quad (3.1)$$

donde a_j denota el valor de la j -ésima neurona en el tiempo t , n representa el número de

neuronas en la red y w_{ij} representa el valor de la conexión sináptica entre la i -ésima y j -ésima neuronas. Por otra parte, la función de activación toma a τ como entrada y produce el estado siguiente de la neurona, dada por

$$a_i(t + 1) = f(\tau_i(t) - \theta_i), \quad (3.2)$$

donde θ_i es un valor de umbral. Puede observarse que, la función de activación f introduce una no linealidad en la operación de la red. Aunque no todas las topologías de red son descritas por estas ecuaciones, pueden verse como una variación de ésta. El sistema algebraico utilizado consiste en el conjunto de números reales \mathbb{R} junto con las operaciones de suma y multiplicación, que se denota como $(\mathbb{R}, +, \times)$.

En cambio, en las *redes neuronales morfológicas* (MNN, *Morphological Neural Networks*), el cálculo neuronal está basado en la estructura algebraica de tipo reticular $(\mathbb{R}, \vee, \wedge, +)$, donde los símbolos \vee y \wedge denotan las operaciones binarias de máximo y mínimo, respectivamente. En esta estructura reticular la suma de productos es reemplazada por las operaciones de *máximo o mínimo de sumas*. La definición formal de estas operaciones se presentará en la sección 3.4. Por tanto, si tomamos la ecuación (3.1) y reemplazamos la operación de multiplicación por el máximo (o mínimo) de sumas tenemos:

$$\tau_i(t) = \bigvee_{j=1}^n [a_j(t) + w_{ij}] \quad \text{o} \quad \tau_i(t) = \bigwedge_{j=1}^n [a_j(t) + w_{ij}]. \quad (3.3)$$

El cálculo del estado siguiente dado por la ec. (3.2) es similar salvo que $\theta_i = 0 \forall i$ permanece igual. Como puede apreciarse, la diferencia entre el modelo clásico y el modelo morfológico reside en el cómputo realizado en la i -ésima neurona. De esta manera, el valor del estado siguiente de una neurona se obtiene a partir de un máximo (o mínimo) ponderado aditivamente de entradas neuronales vecinas conectadas a la neurona en cuestión y el valor resultante queda sujeto a una función de activación. Por tanto, a las redes neuronales que están basadas en este modelo computacional se les denomina redes neuronales morfológicas. Debido a que estas redes no involucran operaciones de multiplicación, proveen un cómputo más rápido. Como se verá mas adelante, algunos investigadores han desarrollados modelos de redes neuronales

morfológicas que actúan como *memorias asociativas*, a dichos modelos se les ha denominado *memorias asociativas morfológicas* (MAM, Morphological Associative Memory) [35, 36].

3.3. Memorias asociativas

El término “asociación”, de manera general, se refiere a establecer relación entre personas, ideas u objetos. Los organismos superiores poseen la capacidad de establecer una conexión mental entre ideas e imágenes de acuerdo a su relación. Un cerebro orgánico funciona en base a estas asociaciones, de tal manera que relaciona imágenes, sonidos u otros estímulos físicos. Existen muchos ejemplos de las asociaciones que realiza un cerebro. Por ejemplo, en nuestro caso cuando escuchamos el nombre de una persona nuestro cerebro la asocia con el rostro de la persona. Así mismo, al escuchar una melodía la relacionamos con cierta clase de instrumentos o voces. El papel de las asociaciones confiere la capacidad de “recordar”.

La capacidad de los cerebros orgánicos para realizar estas “asociaciones” ha sido objeto de múltiples investigaciones para desarrollar modelos de redes neuronales artificiales que actúen como memorias asociativas. La diferencia entre una memoria como un dispositivo electrónico-digital y una memoria asociativa consiste en que en la primera los datos que se almacenan pueden recuperarse a través de una dirección determinada. Esta dirección es un valor numérico específico que se agrega al registro de datos correspondiente y reciben nombres tales como “índice”, “clave”, “llave” o “código”; estas *memorias indizadas* (artificiales) se conocen como *memorias direccionadas por clave*. Por otra parte, una memoria asociativa (orgánica o artificial) es un sistema capaz de almacenar asociaciones de datos y recuperarlos a partir de la similitud con datos de entrada, por lo que también se conocen como *memorias direccionadas por contenido* (CAM, *Content Addressable Memory*).

Las memorias asociativas artificiales imitan la capacidad de un cerebro orgánico de recuperar información completa o casi completa a partir de información parcial. Por tanto, esta clase de memorias poseen la característica de ser tolerantes a errores y distorsiones, siendo capaces de recuperar información inclusive cuando se les presentan datos incompletos. La figura 3.3 describe el funcionamiento de una memoria asociativa a la que se le ha introducido una

versión distorsionada de un dato almacenado. La memoria es capaz de asociar la información y recuperar el dato correcto.

En el lenguaje matemático-computacional, la forma de realizar estas asociaciones es a través de pares de vectores asociados. Para este efecto, dado un conjunto de vectores de entrada $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ y un conjunto de vectores de salida $Y = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k)$ con una asociación dada por $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$ con $\xi = 1, \dots, k$ se define el par matricial (X, Y) que representa las asociaciones entre vectores.

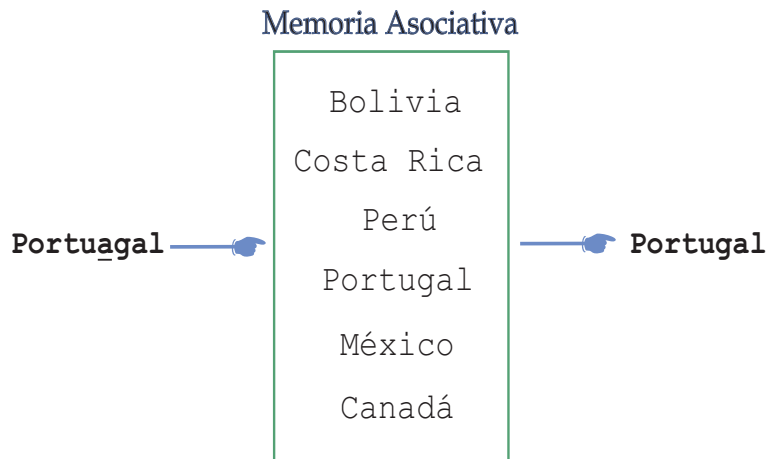


Figura 3.3: Descripción del funcionamiento de una memoria asociativa.

Las memorias asociativas se clasifican en *autoasociativas* y *heteroasociativas*. Una *memoria autoasociativa* es aquella que recupera un patrón \mathbf{y} , previamente almacenado, cuando se le presenta un patrón similar \mathbf{x} ; de tal manera que el patrón de entrada \mathbf{x} pertenece al mismo conjunto que el patrón de salida \mathbf{y} . Por ejemplo, cuando se almacenan en una memoria imágenes ejemplares y se desea recuperarlas a partir de imágenes con cierta distorsión.

Por otra parte, una *memoria heteroasociativa* recupera un patrón \mathbf{y} cuando se le presenta un patrón de entrada \mathbf{x} tal que los patrones de entrada y salida pertenecen a dos conjuntos diferentes. De esta manera, un ejemplo de esta memoria resulta de asociar un semblante con una palabra como se ilustra en la figura 3.4.

De las redes neuronales artificiales que se han utilizado como memorias asociativas, la más conocida y que ha sido objeto de múltiples investigaciones es la red de Hopfield [23].

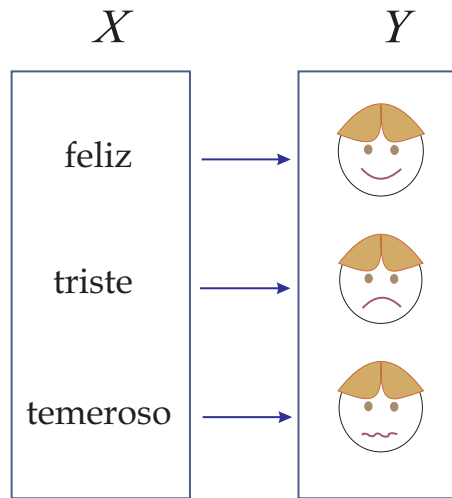


Figura 3.4: Ejemplo de una memoria heteroasociativa entre X e Y .

Actualmente se han desarrollado modelos de redes neuronales morfológicas, entre las cuales se encuentran las memorias asociativas y los perceptrones con capacidad dendrítica [35].

3.4. Álgebra minimax

En años recientes las operaciones matriciales basadas en el álgebra reticular han encontrado muchas aplicaciones en áreas diversas de la ingeniería industrial, ciencias de la computación y en el área de procesamiento digital de imágenes [33]. En estas aplicaciones las operaciones matriciales de suma y multiplicación del álgebra lineal son reemplazadas por las operaciones correspondientes del álgebra reticular.

El concepto de retículo fue creado con el objeto de generalizar y unificar las relaciones de orden existentes entre subconjuntos de un conjunto dado, entre subestructuras de una estructura algebraica, tales como grupos, y entre estructuras geométricas, tales como espacios topológicos. Aunque estas ideas surgieron en el siglo XIX, fue Garret Birkhoff quien desarrolló la teoría de retículos algebraicos como una rama de las matemáticas abstractas [33].

En la teoría del álgebra reticular se define a un retículo como: un conjunto parcialmente ordenado L cuyos elementos x, y tienen una cota inferior máxima (*greatest lower bound*) o supremo denotado como $x \wedge y$, y una cota superior mínima (*least upper bound*) o ínfimo

denotado como $x \vee y$. Algunos ejemplos de retículos son: el conjunto de los números reales \mathbb{R} , junto con las relaciones de menor o igual que (\leq), es un conjunto *totalmente ordenado*. Por ejemplo, dado cualquier par $x, y \in \mathbb{R}$, entonces puede ocurrir tanto $x \leq y$ o $y \leq x$. Si $x \vee y = \max\{x, y\}$ y $x \wedge y = \min\{x, y\} \forall x, y \in \mathbb{R}$, entonces \mathbb{R} junto con las operaciones de \vee y \wedge es un retículo totalmente ordenado que denotamos como $(\mathbb{R}, \vee, \wedge)$. Sea $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ el conjunto de números reales con los símbolos $-\infty$ y ∞ adjuntos. Se define $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge)$ es un retículo completo con ∞ como elemento máximo y $-\infty$ como elemento mínimo.

Como un complemento a la teoría de retículos, Cuninghame-Green desarrolló un novedoso cálculo matricial basado en la *suma min* y la *suma max* como una extensión del álgebra reticular a vectores y matrices; a este conjunto de operaciones se le ha denominado *álgebra minimax*. Si realizamos una comparación con las operaciones matriciales del álgebra lineal, las operaciones de suma y multiplicación son reemplazadas, en el álgebra minimax, por las correspondientes operaciones de retículos. En la siguiente subsección definiremos las operaciones matriciales del álgebra minimax basadas en el retículo $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +)$. Antes de ello es necesario tener en cuenta la siguiente definición del conjugado aditivo. Para cualquier número real r definimos su *conjugado aditivo* r^* como $r^* = -r$. Por lo que:

$$(r^*)^* = r \quad \text{y} \quad r \wedge u = (r^* \vee u^*)^* \quad \forall r, u \in \mathbb{R}.$$

3.4.1. Operaciones matriciales

- Dadas dos matrices: $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de tamaño $m \times n$, con entradas en $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ se define el *máximo*, $A \vee B$, de A y B como la matriz C de $m \times n$ definida por $A \vee B = C$, donde

$$c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}. \tag{3.4}$$

- De manera similar, el *mínimo* entre dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de $m \times n$, denotado por $A \wedge B$, se define como la matriz C definida por $A \wedge B = C$, donde

$$c_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}. \quad (3.5)$$

Ejemplo 1. Considere las siguientes dos matrices y el operador máximo entre ellas que está dado por:

$$\begin{bmatrix} -\infty & 4 & 10 & -1 \\ 7 & 2 & 6 & -5 \\ 2 & \infty & 5 & -4 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 14 & 6 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & \infty & 5 \\ 9 & -16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 10 & 12 \\ 7 & 2 & \infty & 5 \\ 9 & \infty & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para una matriz A de $m \times p$ y una matriz B de $p \times n$ con entradas de \mathbb{R} , se define la *suma max* de A y B como la matriz $C = A \boxplus B$, donde

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^p (a_{ik} + b_{kj}) = (a_{i1} + b_{1j}) \vee (a_{i2} + b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ip} + b_{pj}) \quad (3.6)$$

- De manera similar, dadas las matrices A de $m \times p$ y B de $p \times n$, se define la *suma min* como la matriz $C = A \boxminus B$, donde

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (a_{ik} + b_{kj}) = (a_{i1} + b_{1j}) \wedge (a_{i2} + b_{2j}) \wedge \dots \wedge (a_{ip} + b_{pj}) \quad (3.7)$$

Nótese que estas operaciones matriciales del álgebra minimax son similares al producto matricial del álgebra lineal, con la diferencia de que la suma y multiplicación son reemplazados por las operaciones de máximo (o mínimo) de sumas, respectivamente.

Ejemplo 2. Considere la matriz A de 5×4 y la matriz B de 4×3 definidas a continuación. La suma max de A y B está dada como:

$$A = \begin{bmatrix} -\infty & 6 & -2 & 2 \\ 7 & -5 & 10 & -4 \\ 8 & 4 & 11 & 9 \\ -3 & \infty & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\infty & 6 & -2 \\ 7 & -5 & 10 \\ 8 & 4 & 11 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = A \boxtimes B = \begin{bmatrix} 13 & 3 & 16 \\ 18 & 14 & 21 \\ 19 & 15 & 22 \\ \infty & \infty & \infty \\ 8 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

- Si $A = a_{ij}$ es una matriz de $m \times n$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$, entonces la *matriz conjugada* A^* de A es la matriz $A^* = [a_{ji}]^*$ de $n \times m$, donde $[a_{ji}]^*$ es el conjugado aditivo de a_{ji} . Por lo tanto:

$$A \wedge B = (A^* \vee B^*)^* \tag{3.8}$$

y

$$A \boxtimes B = (B^* \boxtimes A^*)^* \tag{3.9}$$

3.4.2. Propiedades

1. Multiplicación escalar de una matriz A por un elemento λ :

$$(a_{ij})\lambda = (a_{ij}\lambda)$$

2. Para toda matriz A de $m \times n$, B, C de $p \times n$ y un escalar λ :

$$A(B \vee C) = (AB) \vee (AC) \quad ; \quad A(B\lambda) = (AB)\lambda.$$

3. Se dice que, dadas las matrices A y B , $A \geq B$ o $A \leq B$ si para cada elemento se cumple que:

$$A \geq B \Leftrightarrow a_{ij} \geq b_{ij} \quad ; \quad A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}$$

4. Se dice que $A < B$ o que $A > B$ si y solo si para cada elemento se tiene:

$$A < B \Leftrightarrow a_{ij} < b_{ij} \quad ; \quad A > B \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij}$$

3.5. Memorias asociativas morfológicas

En la teoría clásica de redes neuronales, dado un conjunto de vectores patrón $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)'$ y $Y = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k)'$ con una asociación dada por $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$ para $\xi = 1, \dots, k$, una memoria asociativa \mathcal{M} debe ser capaz de recuperar un patrón de salida \mathbf{y}^ξ cuando se le presente un patrón de entrada \mathbf{x}^ξ , o más aún, una versión corrupta de \mathbf{x}^ξ . Anderson y Kohonen propusieron una de las primeras memorias asociativas basadas en modelos de redes neuronales lineales. En estos modelos, una memoria \mathcal{M} se construye a partir de la suma del producto externo de los patrones asociados \mathbf{y}^ξ con \mathbf{x}^ξ transpuesto.

$$\mathcal{M} = \sum_{\xi=1}^k \mathbf{y}^\xi (\mathbf{x}^\xi)' = \sum_{\xi=1}^k \begin{pmatrix} y_1^\xi x_1^\xi & \dots & y_1^\xi x_n^\xi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m^\xi x_1^\xi & \dots & y_m^\xi x_n^\xi \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

En este caso, la entrada (i, j) -ésima de \mathcal{M} está dada por $\mu_{i,j} = \sum_{\xi=1}^k y_i^\xi x_j^\xi$. Si los patrones de entrada $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ son ortonormales, ésto es

$$(\mathbf{x}^j)' \cdot \mathbf{x}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.11)$$

entonces, la recuperación de los patrones de salida $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k$ es perfecta, ya que

$$\mathcal{M} \mathbf{x}^i = \sum_{j \neq i} [\mathbf{y}^j (\mathbf{x}^j)'] \mathbf{x}^i + [\mathbf{y}^i (\mathbf{x}^i)'] \mathbf{x}^i = \sum_{j \neq i} \mathbf{y}^j [(\mathbf{x}^j)' \cdot \mathbf{x}^i] + \mathbf{y}^i [(\mathbf{x}^i)' \cdot \mathbf{x}^i] = \mathbf{y}^i. \quad (3.12)$$

Desafortunadamente en la mayoría de los casos de aplicación, los patrones $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ no son ortonormales, por lo que es necesario realizar procesos de ortonormalización o filtrado usando funciones de activación para recuperar los patrones deseados [34].

Las memorias asociativas morfológicas son similares a las memorias clásicas con la diferencia de que están basadas en las operaciones del álgebra minimax. Supongamos que tenemos un par de vectores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)' \in \mathbb{R}^m$, una *memoria asociativa morfológica* capaz de recuperar el vector \mathbf{y} cuando se le presente el vector \mathbf{x} está definida de la siguiente manera:

$$W = \mathbf{y} \boxtimes \mathbf{x}^* = \mathbf{y} \boxtimes (-\mathbf{x})' = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 & \dots & y_1 - x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m - x_1 & \dots & y_m - x_n \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Nótese que el asterisco (*) denota el conjugado aditivo. Para verificar que W es capaz de recuperar al vector \mathbf{y} , entonces utilizamos la ecuación $W \boxtimes \mathbf{x} = \mathbf{y}$, que puede verificarse así

$$W \boxtimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \bigvee_{i=1}^n (y_1 - x_i + x_i) \\ \vdots \\ \bigvee_{i=1}^n (y_m - x_i + x_i) \end{pmatrix} = \mathbf{y}. \quad (3.14)$$

En efecto, la similitud entre la ec. (3.10) y la ec. (3.13) es evidente cuando $k = 1$. De esta manera, podemos extender este concepto para un conjunto de vectores asociados $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$, con $\xi = 1, \dots, k$ y definir las memorias que almacenen al par de asociaciones. Para ello reemplazamos al producto externo con su equivalente en el álgebra minimax:

$$\mathbf{y}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^* = \mathbf{y}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^* = \mathbf{y}^\xi \boxplus (\mathbf{x}^\xi)^*. \quad (3.15)$$

Por lo tanto, definimos dos memorias asociativas morfológicas conocidas como *memoria-min asociativa*, denotada como W_{XY} y *memoria-max asociativa*, denotada como M_{XY} ambas de tamaño $m \times n$ y que están expresadas como:

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^k [\mathbf{y}^{\xi} \boxplus (\mathbf{x}^{\xi})^*]; \quad M_{XY} = \bigvee_{\xi=1}^k [\mathbf{y}^{\xi} \boxplus (\mathbf{x}^{\xi})^*]. \quad (3.16)$$

De esta manera la entrada (i, j) de W_{XY} y M_{XY} está dada por

$$w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k (y_i^{\xi} - x_j^{\xi}) \quad y \quad m_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^k (y_i^{\xi} - x_j^{\xi}) \quad (3.17)$$

donde k representa el número de patrones almacenados en la memoria, y las diferencias $y_i^{\xi} - x_j^{\xi}$ representan la magnitud de la interconexión entre la i -ésima y j -ésima neuronas con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$.

Las memorias W_{XY} y M_{XY} definidas para conjuntos de patrones $X \neq Y$ se denominan *memorias morfológicas heteroasociativas*. Por otra parte, si $X = Y$ entonces W_{XX} y M_{XX} se denominan *memorias morfológicas autoasociativas*.

Para recuperar un patrón de salida \mathbf{y}^{ξ} dado un patrón de entrada \mathbf{x}^{ξ} se hace uso de las operaciones *suma max* o *suma min* que se definieron en la sección anterior. Para una memoria W , el patrón es recuperado con la suma max, mientras que para la memoria M es recuperado con la suma min.

$$\mathbf{y}^{\xi} = W_{XY} \boxminus \mathbf{x}^{\xi}; \quad \mathbf{y}^{\xi} = M_{XY} \boxminus \mathbf{x}^{\xi} \quad (3.18)$$

Ejemplo 3. A partir de los vectores asociados $(\mathbf{x}^{\xi}, \mathbf{y}^{\xi})$ con $\xi = 1, 2, 3$ vamos a construir las memorias W_{XY} y M_{XY} .

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la memoria M_{XY} utilizamos la expresión: $M_{XY} = \bigvee_{\xi=1}^3 [\mathbf{y}^\xi \boxplus (-\mathbf{x}^\xi)']$ y obtenemos:

$$M_{XY} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para calcular W_{XY} hacemos uso de la expresión $W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^k [\mathbf{y}^\xi \boxplus (-\mathbf{x}^\xi)']$, de forma que

$$W_{XY} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora es posible verificar que la condición $W_{XY} \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi = M_{XY} \boxtimes \mathbf{x}^\xi$ se cumple para la recuperación de los patrones \mathbf{y}^ξ . Por ejemplo, para $\xi = 1, 2$ se obtiene recuperación perfecta con M_{XY} ya que

$$M_{XY} \boxtimes \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^1$$

$$M_{XY} \boxtimes \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^2$$

y para $\xi = 3$ se obtiene recuperación perfecta utilizando la memoria W_{XY} , pues

$$W_{XY} \boxtimes \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^3.$$

3.5.1. Memorias autoasociativas morfológicas

Una memoria autoasociativa morfológica es un dispositivo que es capaz de almacenar un número de patrones \mathbf{x}^ξ y recuperarlos cuando se le presente un patrón similar $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ que puede estar incompleto o ha sido resultado de contaminación por ruido. Siendo $X = Y$ y en base a la ecuación 3.17 las memorias min- y max-autoasociativas están definidas por

$$W_{XX} = \bigwedge_{\xi=1}^k [\mathbf{x}^\xi \boxplus (\mathbf{x}^\xi)^*]; \quad w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k (x_i^\xi - x_j^\xi), \quad (3.19)$$

$$M_{XX} = \bigvee_{\xi=1}^k [\mathbf{x}^\xi \boxplus (\mathbf{x}^\xi)^*]; \quad m_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^k (x_i^\xi - x_j^\xi). \quad (3.20)$$

En la siguiente sección se discutirán brevemente algunos de los resultados que se han obtenido con la aplicación de las MAMs en el área del reconocimiento de patrones. Así mismo se enuncian las condiciones para la recuperación perfecta y la capacidad de almacenamiento de estas memorias.

3.5.2. Resultados y aplicaciones

Las memorias autoasociativas morfológicas cuentan con propiedades únicas que brindan ventajas importantes sobre las memorias asociativas clásicas como la red de Hopfield o la memoria de correlación lineal de Anderson y Kohonen.

Condiciones para recuperación perfecta

Resulta de gran importancia conocer las condiciones que deben cumplir las memorias asociativas morfológicas para lograr la recuperación perfecta de un conjunto de patrones asociados

(X, Y) . El siguiente teorema enuncia estas condiciones. La prueba de este teorema aparece en [35].

Teorema 3.1. W_{XY} es una memoria para la recuperación perfecta de (X, Y) y solo si para cada $\xi = 1, \dots, k$ cada fila de la matriz $[\mathbf{y}^\xi \boxplus (\mathbf{x}^\xi)^*] - W_{XY}$ contiene una entrada cero. Similarmente, M_{XY} es una memoria de recuperación perfecta para estos patrones asociados si y solo si para cada $\xi = 1, \dots, k$, cada fila de la matriz $M_{XY} - [\mathbf{y}^\xi \boxplus (\mathbf{x}^\xi)^*]$ contiene una entrada cero.

En el caso de las memorias autoasociativas W_{XX} y M_{XX} , debido a su definición, la diagonal de estas memorias consistirá enteramente de ceros

$$w_{ii} = \bigwedge_{\xi=1}^k (x_i^\xi - x_i^\xi) = 0 = \bigvee_{\xi=1}^k (x_i^\xi - x_i^\xi) = m_{ii}. \quad (3.21)$$

De tal forma que las condiciones anteriores se satisfacen y la siguiente relación es válida para cualquier patrón \mathbf{x} .

$$W_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \mathbf{x} = M_{XX} \boxtimes \mathbf{x}. \quad (3.22)$$

Es importante observar que esta última ecuación no pone restricciones en el número de patrones almacenados en la memoria o en la ortonormalidad entre ellos. De esta forma, estas memorias proporcionan perfecta recuperación para un número de patrones tan grande como se desee. Además, estas memorias convergen en un solo paso para cualquier patrón de entrada, que es una ventaja sobre otro tipo de memorias asociativas como las anteriormente mencionadas.

Las **MAMs** han sido utilizadas para diversas aplicaciones, siendo el procesamiento de imágenes y el reconocimiento de patrones las áreas de mayor interés. En estas áreas se ha comprobado y delimitado la capacidad de W_{XX} y M_{XX} para la recuperación perfecta de un patrón \mathbf{x}^ξ previamente almacenado, cuando se le presenta una versión distorsionada $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ de ese patrón. Para este efecto se han definido dos posibles distorsiones en el patrón \mathbf{x}^ξ . Se dice que el patrón \mathbf{x}^ξ ha sufrido un cambio *erosivo* (ruido erosivo) si $\tilde{\mathbf{x}}^\xi \leq \mathbf{x}^\xi$. Por otra parte, el patrón \mathbf{x}^ξ ha sido sufrido un cambio *dilatativo* (ruido dilatativo) si $\tilde{\mathbf{x}}^\xi \geq \mathbf{x}^\xi$. El desempeño

de la memoria W_{XX} ante patrones afectados con ruido erosivo es excelente, mientras que la memoria M_{XX} es robusta a cambios dilatativos. El problema con estas memorias es que W_{XX} es incapaz de recuperar patrones afectados con ruido dilatativo y M_{XX} es incapaz de recuperar un patrón que ha sufrido cambios erosivos. Basados en este hecho Ritter et al. han desarrollado una técnica, conocida como técnica de núcleos, para recuperar un conjunto de patrones afectado con ruido aleatorio. En términos generales, la técnica de núcleos consiste en construir una memoria morfológica M capaz de asociar cada patrón de entrada \mathbf{x}^ξ con un patrón intermedio \mathbf{z}^ξ , denominado núcleo. Enseguida, se construye otra memoria morfológica W que asocie cada patrón \mathbf{z}^ξ con el correspondiente patrón de salida \mathbf{y}^ξ [35, 36]. Las condiciones que debe cumplir \mathbf{z}^ξ para ser un núcleo son inherentes a los conceptos de independencia morfológica e independencia morfológica fuerte. Aunque estos conceptos surgen a partir de la técnica de núcleos, su importancia es relevante porque forman la base matemática de los algoritmos desarrollados para la detección de miembros finales.

3.6. Definiciones

Las ideas de independencia reticular e independencia reticular fuerte de un conjunto de vectores son propiedades matemáticas fundamentales para aplicaciones en reconocimiento de patrones basadas en el álgebra reticular; específicamente, estas ideas se han utilizado para la construcción de memorias asociativas reticulares robustas a ruido aleatorio [35], y más recientemente para la determinación de miembros finales en imágenes hiperespectrales [16, 17]. En las siguientes subsecciones se presentarán las definiciones, así como el tratamiento matemático de ambos conceptos que resultan fundamentales para la discusión del capítulo siguiente.

3.6.1. Independencia reticular y puntos fijos

El concepto de dependencia reticular es el análogo del concepto de dependencia lineal en los espacios vectoriales del álgebra lineal. Resulta necesario definir primero el concepto de *suma escalar* en el álgebra minimax. De esta forma, si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$, entonces

la *suma escalar* se define como $a + \mathbf{x} = (a + x_1, \dots, a + x_n)'$.

Definición 3.1. Si $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces una *combinación minimax* de este subconjunto, denotada como $\mathfrak{S}(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$, es cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^n$ que puede ser escrito en cualquiera de las dos expresiones duales siguientes:

$$\mathbf{x} = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{\xi=1}^k (a_{\xi j} + \mathbf{x}^\xi) \quad ; \quad \mathbf{x} = \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{\xi=1}^k (b_{\xi i} + \mathbf{x}^\xi) \quad (3.23)$$

donde I, J son conjuntos finitos de índices y $a_{\xi j}, b_{\xi i} \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$ son familias finitas de escalares.

A la combinación minimax de vectores también se le conoce como *suma minimax* y cuya similitud con la combinación lineal de vectores $\sum_{\xi=1}^k a_{\xi} \mathbf{x}^\xi$ es obvia. De esta manera, cualquier combinación finita que involucre los operadores de máximo y mínimo y los vectores de la forma $a + \mathbf{x}^\xi, b + \mathbf{x}^\xi$ donde $a, b \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$ y $\mathbf{x}^\xi \in X$, es una suma minimax.

Definición 3.2. Un patrón $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es *dependiente reticular* en $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathfrak{S}(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$, es decir, \mathbf{x} es una suma minimax formada con los patrones de X . Un patrón es *independiente reticular* si y solo si no es dependiente reticular.

Resulta importante remarcar que independencia reticular entre vectores implica que \mathbf{x} no puede ser escrito como una combinación minimax, lo que se traduce en que dicho vector no cumplirá con cualesquiera de las dos igualdades expresadas en la ec.(3.23) para conjuntos de índices arbitrarios y escalares correspondientes. De todas las posibles combinaciones minimax es posible derivar un criterio específico para evaluar independencia reticular dado un conjunto finito de vectores. La forma más simple se tiene haciendo $a_{\xi j} = 0 = b_{\xi i}$ para todo $i \in I, j \in J$ y para todo $\xi \in \{1, \dots, k\}$, como ha sido demostrado en [44]. Por tanto, dos casos particulares y que han sido utilizados en la literatura surgen como criterios de independencia reticular:

1. Un conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ es *reticularmente independiente* si y solo si para todo $\eta = 1, \dots, k$ existe un índice de fila $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j^\eta > \bigvee_{\xi \neq \eta} x_j^\xi \quad \forall \xi \neq \eta$; equivalentemente, si $\mathbf{x}^\eta \not\leq \bigvee_{\xi \neq \eta} \mathbf{x}^\xi$.

2. Un conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ es *reticularmente independiente* si y solo si para todo $\eta = 1, \dots, k$ existe un índice de fila $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j^\eta < \bigwedge_{\xi \neq \eta} x_j^\xi \forall \xi \neq \eta$; equivalentemente, si $\mathbf{x}^\eta \not\leq \bigwedge_{\xi \neq \eta} \mathbf{x}^\xi$.

Cualquiera de estos dos criterios puede ser utilizado para evaluar la propiedad de independencia reticular de un conjunto de vectores. El criterio 1 se conoce también como *independencia morfológica* y ha sido utilizado como la base matemática de la técnica de núcleos [36]. Asimismo, para aplicaciones en reconocimiento de patrones, Graña et al. han definido a ambos criterios como condiciones de *independencia morfológica* en sentidos *erosivo* y *dilatativo*, respectivamente.

Ejemplo 4. Supongamos el conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)$ siendo

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de acuerdo con el criterio 1 debe cumplirse que $\mathbf{x}^\eta \not\leq \mathbf{x}^\xi \forall \xi \neq \eta$, pero cuando $\eta = 3$ la relación no se cumple y $\mathbf{x}^3 \leq \bigvee_{\xi=1}^2 \mathbf{x}^\xi$, por lo que los patrones no son reticularmente independientes.

Definición 3.3. Dados un conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ y sus memorias autoasociativas morfológicas W_{XX} y M_{XX} , se denominan puntos fijos al conjunto de patrones \mathbf{x} para los cuales se obtiene $W_{XX} \boxtimes \mathbf{x} = \mathbf{x} = M_{XX} \boxtimes \mathbf{x}$. Esta condición se garantiza para todo $\mathbf{x} \in X$.

Ritter y Gader comprobaron que W_{XX} y M_{XX} comparten el mismo conjunto de puntos fijos denotado como $F(X)$ [34]. Por lo tanto, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto fijo de W_{XX} si y solo si \mathbf{x} es dependiente reticular en X . La proposición anterior nos proporciona un criterio para determinar que un patrón \mathbf{x} es dependiente reticular de X si \mathbf{x} es un punto fijo. De esta manera, lo único que se requiere es construir una de las memorias, W_{XX} ó M_{XX} y tratar de reconstruir el patrón $\mathbf{x} \notin X$ a partir de la suma máxima (o mínima). Si $\mathbf{x} \neq W_{XX} \boxtimes \mathbf{x}$, entonces \mathbf{x} no es un punto fijo y por tanto es independiente reticular en X .

3.6.2. Independencia reticular fuerte

Definition 3.4 Un conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *max-dominante*, si y solo si para cada $\eta \in \{1, \dots, k\}$, existe un índice $j_\eta \in \{1, \dots, n\}$ tal que, la siguiente igualdad se satisface

$$x_{j_\eta}^\eta - x_i^\eta = \bigvee_{\xi=1}^k (x_{j_\eta}^\xi - x_i^\xi) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.24)$$

Definition 3.5 Un conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *min-dominante*, si y solo si para cada $\eta \in \{1, \dots, k\}$, existe un índice $j_\eta \in \{1, \dots, n\}$ tal que, la siguiente igualdad se satisface

$$x_{j_\eta}^\eta - x_i^\eta = \bigwedge_{\xi=1}^k (x_{j_\eta}^\xi - x_i^\xi) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.25)$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, max-dominancia implica que, para cada vector $\eta \in \{1, \dots, k\}$, debe existir un índice j , dependiendo de η , tal que $x_j^\eta - x_i^\eta \geq x_j^\xi - x_i^\xi$, equivalentemente $x_j^\eta - x_j^\xi \geq x_i^\eta - x_i^\xi$. De manera similar, min-dominancia implica que, para cada vector $\eta \in \{1, \dots, k\}$, debe existir un índice j tal que $x_j^\eta - x_i^\eta \leq x_j^\xi - x_i^\xi$, equivalentemente $x_j^\eta - x_j^\xi \leq x_i^\eta - x_i^\xi$.

Definición 3.6. Un conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ posee la característica de *independencia reticular fuerte* (SLI, *Strong Lattice Independence*) si y solo si las siguientes dos condiciones son satisfechas: el conjunto X es reticularmente independiente y X es *max dominante* o *min dominante*.

Es importante mencionar que independencia reticular no implica independencia reticular fuerte, lo cual ha sido comprobado en [36]. El siguiente ejemplo expone de manera ilustrativa la propiedad de SLI para un conjunto de vectores.

Ejemplo 5. Considere el conjunto de vectores $X = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)$ reticularmente independientes

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si tomamos $\eta = 1$, $\xi = 2$, $i = 1$, $j = 4$, tenemos que

$$x_4^1 - x_4^2 \geq x_1^1 - x_1^2 = 10 - 4 \geq 4 - 1 = 6 \geq 3.$$

Ahora tomamos $\eta = 2$, $\xi = 1$, $i = 2$, $j = 3$, entonces

$$x_3^2 - x_3^1 \geq x_2^2 - x_2^1 = 8 - 5 \geq 3 - 2 = 3 \geq 1.$$

De esta manera, para $\eta = 1, 2, 3$ existe un índice $j = 4, 3, 2$ respectivamente, tal que la diferencia $x_j^\eta - x_j^\xi \geq x_i^\eta - x_i^\xi$ se cumple para $i = 1, 2, 3, 4$, por lo que estos vectores tienen la característica de *independencia reticular fuerte*.

Por ejemplo, el conjunto de vectores W formado por las columnas de la memoria autoasociativa W_{XX} es siempre max dominante. Del mismo modo el conjunto de vectores M formado por las columnas de M_{XX} es siempre min dominante. El siguiente teorema establece que un conjunto de vectores con independencia reticular fuerte puede ser construido a partir de W (o M).

Teorema 3.2. Sea $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ un subconjunto de \mathbb{R}^n y sea W el conjunto de vectores que conforman las columnas de la matriz W_{XX} , entonces existe V subconjunto de W , con $V \neq \emptyset$, tal que V es independiente reticular fuerte y $W_{VV} = W_{XX}$.

A partir de la demostración de este teorema surge un método para derivar una base independiente reticular fuerte para cualquier conjunto de patrones X y que ha sido teóricamente descrito en [34]. El procedimiento consiste en construir la memoria W_{XX} , y formar el conjunto W a partir de las columnas de W_{XX} . Entonces remover cualquier conjunto de patrones dependientes reticulares de W usando el método antes descrito y así obtener el conjunto de patrones V con independencia reticular fuerte.

Capítulo 4

Detección de Miembros Finales

4.1. Preliminares

Se denominan *miembros finales* (endmembers) a los espectros de los materiales que conforman un píxel mezclado en una escena hiperespectral. Idealmente un miembro final debería corresponder a píxeles puros que representen el espectro de un solo material. Sin embargo, como se planteó en el Capítulo 1 debido a la resolución espacial de los dispositivos hiperespectrales, en un solo píxel de la imagen pueden encontrarse mezclados diferentes materiales. Por tal motivo, en el modelo de *mezclado lineal* identificar miembros finales consistirá en la búsqueda de píxeles en la imagen que contengan la máxima abundancia de un sólo material, con la menor contaminación de otro.

Algunas técnicas geométricas para determinar miembros finales emplean el paralelismo existente entre el modelo de mezclado lineal y la orientación geométrica de los datos hiperespectrales en espacios multidimensionales. De esta manera, su principal suposición consiste en que los miembros finales residen en las extremidades del volumen ocupado por los píxeles en la escena. Así, los miembros finales pueden ser extraídos de un simplex (volumen convexo con $d + 1$ vértices, donde d es igual a la dimensionalidad de los datos) que encierra el conjunto de datos en una escena [26]. La figura 4.1 representa una gráfica en la que se han tomado dos bandas espectrales. Los puntos extremos marcados como A , B y C consisten en los miembros finales que envuelven a los demás píxeles en la imagen.

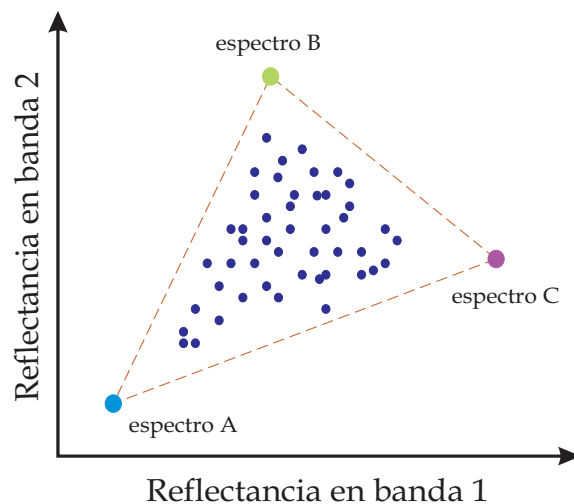


Figura 4.1: Representación gráfica de miembros finales.

Los métodos basados en memorias asociativas morfológicas que a continuación se describirán, tienen por objetivo determinar miembros finales en imágenes hiperespectrales. La aproximación que toman dichos métodos consiste en considerar que todos los datos en la imagen se encuentran dentro de una región convexa. Los puntos extremos de esta región convexa son identificados como vértices y, por tanto, como miembros finales.

4.2. Modelo de Separación Lineal

En el Capítulo 2 se hizo referencia al hecho de que el espectro captado en cada píxel de la imagen puede considerarse como una combinación lineal de un número relativamente pequeño de materiales fundamentales, conocido como modelo de mezclado lineal y está definido por la ec.(2.4), que se repite por conveniencia, $\mathbf{x} = S\mathbf{a} + \mathbf{n}$.

La técnica de *separación espectral lineal* (Spectral Unmixing) se emplea para separar estas mezclas espectrales una vez que los miembros finales son determinados. Por tanto, esta técnica consiste en el cómputo de la matriz inversa que provee las abundancias fraccionales de cada miembro final en cada espectro de los píxeles de la imagen. Específicamente, dados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, que corresponde a un píxel de la imagen hiperespectral y S la matriz de dimensión $d \times K$ cuyas columnas son los miembros finales, siendo la meta encontrar el vector de abundancias

fraccionales $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^K$ cuyo error cuadrático $\|\mathbf{x} - S\mathbf{a}\|^2 = \|n\|^2$ sea mínimo. Para este efecto la aproximación más sencilla es la estimación por cuadrados mínimos [26, 27], expresada por

$$\mathbf{a} = S^+ \mathbf{x} = (S'S)^{-1} S' \mathbf{x}, \quad (4.1)$$

donde S^+ denota la matriz pseudo inversa o de Moore-Penrose. Esta estimación existe cuando hay un mayor número de bandas que columnas, lo cual se cumple para el caso hiperespectral. Debido a que este cálculo no está sujeto a restricciones adicionales, el vector de coeficientes resultantes \mathbf{a} no necesariamente satisface las condiciones dadas por las ecuaciones (2.5) y (2.6) correspondientes al análisis de mezclado lineal espectral. Una segunda y mejor aproximación estriba en satisfacer una de estas condiciones pero no ambas a la vez.

En efecto, la estimación anterior puede ser modificada para cumplir con la condición de aditividad completa dada por la ecuación (2.5). La solución general para la estimación por cuadrados mínimos con restricciones lineales de la forma $Z\mathbf{a} = b$ se obtiene utilizando el método de *multiplicadores de Lagrange* que se expresa como

$$\mathbf{a}^L = \mathbf{a} - (S'S)^{-1} Z' [Z(S'S)^{-1} Z']^{-1} (Z\mathbf{a} - b). \quad (4.2)$$

La condición de aditividad se cumple cuando Z es un vector fila de $1 \times K$ cuyos elementos son igual con 1 y $b=1$ [26, 27]. El análisis detallado de \mathbf{a}^L indica que esta solución consiste en la estimación por cuadrados mínimos sin restricciones, expresada por \mathbf{a} , con un término de corrección aditivo que depende de la matriz de miembros finales S y el error incurrido por \mathbf{a}^L al satisfacer esta condición.

4.3. Métodos conocidos basados en MAMs

4.3.1. Detección por independencia morfológica

El método basado en la propiedad de *independencia morfológica* ha sido desarrollado por Graña et al. en [16, 17]. En esencia, este método consiste en utilizar las memorias canónicas W_{XX} y M_{XX} como detectores de independencia morfológica para un conjunto de vectores.

De esta manera, se caracteriza el conjunto de vectores espectrales por una región convexa que encierra a todos los datos o la mayoría de ellos. Cada uno de los vértices de esta región convexa corresponde a patrones morfológicamente independientes que envuelven a los demás datos.

El procedimiento utilizado para detectar vectores independientes morfológicos es el siguiente. Dada una imagen hiperespectral $\mathbf{f}(i, j)$ cuyos pixeles corresponden a vectores espectrales, $\{\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^k\}$, el primer paso consiste en inicializar la matriz de miembros finales E con un vector \mathbf{f}^η elegido aleatoriamente de la imagen. La binarización de este vector permitirá inicializar el conjunto X de signaturas binarias. Tomando esta signatura binaria se construyen las memorias W_{XX} y M_{XX} respectivamente. El siguiente paso consiste en sumar y restar ruido gaussiano al vector \mathbf{f}^η para construir los vectores binarios $\mathbf{f}^{\eta+}$ y $\mathbf{f}^{\eta-}$ respectivamente; el objetivo es determinar la respuesta de las memorias ante esta adición y sustracción de ruido. De esta manera, si se cumple que $W_{XX} \boxtimes \mathbf{f}^{\eta-} \notin X$ entonces \mathbf{f}^η es morfológicamente independiente de X en el sentido *erosivo*. Por otra parte, si se cumple la relación $M_{XX} \boxtimes \mathbf{f}^{\eta+} \notin X$ entonces \mathbf{f}^η es morfológicamente independiente de X en sentido *dilatativo*. Si se cumplen ambas condiciones de independencia, entonces el vector \mathbf{f}^η consistirá en un miembro final del conjunto E .

En este esquema se considera que la región del espacio encerrada por un conjunto de vectores que son simultáneamente independientes morfológicos en sentidos erosivo y dilatativo, corresponden a un hipercubo de alta dimensionalidad que aproxima a un simplex que encierra a estos puntos. Por lo tanto, cualquier patrón de entrada cuya salida recuperada no corresponde a uno de los patrones almacenados en ambas memorias es un nuevo vértice de la región convexa que encierra los datos. Por otro lado, si corresponde a uno de estos patrones, entonces permanece dentro de esta región convexa. Finalmente, la cantidad de ruido gaussiano que se agrega o sustrae del vector \mathbf{f}^η está controlado por el parámetro α y a su vez éste regula el número de miembros finales que se obtienen a la salida del conjunto E .

4.3.2. Detección mediante las columnas de W_{XX} o M_{XX}

El método descrito a continuación consiste en un procedimiento para derivar un conjunto de vectores con la propiedad de independencia reticular fuerte a partir de las columnas de las memorias W_{XX} o M_{XX} propuesto por G.X. Ritter [34, 31]. El fundamento matemático de

este método lo constituye el Teorema 3.2 de la subsección “Independencia reticular fuerte” y el hecho de que las columnas de W se toman como punto de partida para extraer un conjunto de vectores con dicha característica. Por tanto, en imágenes hiperespectrales la búsqueda de miembros finales se traducirá en la búsqueda de vectores con la propiedad de SLI. En las siguientes líneas se describe esta técnica.

Dada una imagen hiperespectral X (reformada) de tamaño $d \times k$ (d igual al número de bandas espectrales y $k = n \times m$ pixeles) cuyos pixeles corresponden a vectores espectrales definidos como $X = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$, el primer paso es construir la memoria W_{XX} a partir del conjunto de entrada X . En el segundo paso se debe construir una secuencia finita V_1, \dots, V_d , donde V_i es un subconjunto de las columnas de $W_{XX} = W = (\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^d)$. Se remueve la primera columna, \mathbf{w}^1 , de forma que se obtenga el subconjunto $W_1 = W \setminus \{\mathbf{w}^1\}$. Enseguida se construye la nueva memoria $W_{W_1W_1}$ y se verifica que esta memoria sea igual a la original; es decir, $W_{W_1W_1} = W$. Si ambas memorias son iguales entonces $V_1 = W_1$ de lo contrario $V_1 = W$. El proceso continua con la construcción de V_2 a partir de V_1 . Para ello debe removerse \mathbf{w}^2 del conjunto V_1 ; de esta forma, $V_2 = V_1 \setminus \{\mathbf{w}^2\}$ si se cumple que $W_{V_2V_2} = W$, de lo contrario $V_2 = V_1$. Continuar con este proceso hasta el d -ésimo vector de manera que se construya $V_d = V_{d-1} \setminus \{\mathbf{w}^d\}$ si se cumple con $W_{V_dV_d} = W$, de lo contrario $V_d = V_{d-1}$.

El conjunto $V_d = V$ de vectores con independencia reticular fuerte derivados a partir de las columnas de W_{XX} o M_{XX} coinciden con algún vector del conjunto de entrada $X = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$ haciendo un escalamiento de los valores del conjunto V . Para ello, se definen a $\hat{\mathbf{w}}^i$ y $\hat{\mathbf{m}}^i$ con $i = 1, \dots, d$ como las columnas de W_{XX} y M_{XX} respectivamente, que cumplen con la propiedad de SLI. Asimismo, se define el vector cota superior $\mathbf{u} = \max\{\mathbf{x}^\xi\}$ y el vector cota inferior $\mathbf{v} = \min\{\mathbf{x}^\xi\}$ para $\xi = 1, \dots, k$ como los vectores que contienen al máximo o mínimo tomado sobre todos los pixeles en cada banda espectral. De esta manera, los vectores escalados son

$$\hat{\mathbf{w}}^i = u_i + \mathbf{w}^i \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{m}}^i = v_i + \mathbf{m}^i, \quad (4.3)$$

los cuales aún conservan la propiedad de independencia reticular fuerte y pueden ser considerados como candidatos a miembros finales [34].

4.4. Método propuesto basado en MAMs

4.4.1. Detección por independencia reticular fuerte

Un método novedoso y alternativo que se propone a continuación se basa directamente en la definición de independencia reticular fuerte (SLI), concepto introducido en el Capítulo 3. La principal suposición de este procedimiento es que los vectores espectrales que satisfacen la propiedad de SLI residen en los vértices de un simplex que envuelve los datos hiperspectrales y, por tanto, son identificados como miembros finales; de otra manera, éstos corresponden a pixeles mezclados que permanecen dentro de esta región convexa. En las siguientes líneas se presentan detalles importantes del método propuesto.

De acuerdo con la definición, la condición 1 de independencia reticular fuerte indica que un conjunto $X = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$ debe ser reticularmente independiente; es decir, para todo vector $\eta \in \{1, \dots, k\}$ debe existir un índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j^\eta > \bigvee_{\xi \neq \eta} x_j^\xi$. Por lo tanto, la primera parte del método consistirá en derivar un subconjunto de X con esta propiedad.

La condición 2 establece que un conjunto de vectores reticularmente independientes debe ser max-dominante o min-dominante. Específicamente, la condición de max-dominancia implica que, para cada vector $\eta \in \{1, \dots, k\}$, debe existir un índice $j \in \{1, \dots, n\}$, que depende de η , tal que $x_j^\eta - x_i^\eta \geq x_j^\xi - x_i^\xi$, lo cual puede ser reescrito como $x_j^\eta - x_j^\xi \geq x_i^\eta - x_i^\xi$ para toda $i = 1, \dots, n$. Esta condición requiere que la diferencia, $x_j^\eta - x_j^\xi$ sea lo suficientemente dominante y por consiguiente, igual al máximo de las diferencias restantes, es decir, $x_j^\eta - x_j^\xi = \bigvee_{i=1}^n (x_i^\eta - x_i^\xi)$. La expresión anterior es la base de esta técnica y consistirá en la búsqueda de vectores \mathbf{x}^η en los que exista un índice de fila $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que la diferencia con cualquier otro vector $\xi \neq \eta$, en la misma fila, domine todas las demás diferencias de fila entre estos vectores. Es importante observar que cuando $\xi = \eta$ esta condición se satisface automáticamente para todo j , por lo que solo es necesario considerar vectores $\xi \neq \eta$ evitando repeticiones. El Algoritmo VU presenta el procedimiento realizado para obtener un conjunto de vectores con independencia reticular fuerte, a partir de un conjunto X de entrada.

Al aplicar el procedimiento básico mencionado anteriormente al caso de una imagen hiperspectral se propone también una estrategia particular para mejorar el desempeño en la búsqueda

de vectores con SLI que sean considerados como candidatos a miembros finales. Dada una imagen hiperespectral de tamaño $d \times n \times m$, (con d igual al número de bandas espectrales), el primer paso consiste en subdividir esta imagen en subparalelepíedros de base $p \times p$ píxeles, donde la elección del valor de p debe ser un divisor de la dimensión espacial de la imagen y debe tomar en cuenta un número razonable de espectros que puedan estar correlacionados espectralmente en forma local. El segundo paso consiste en la búsqueda de vectores con la propiedad de SLI en cada subparalelepípedo de la imagen utilizando el Algoritmo VU. Los vectores que cumplan con esta propiedad serán almacenados en la matriz E y una vez concluido este procedimiento para todos los subparalelepíedros es necesario determinar el número de vectores almacenados en E . Si el número de vectores almacenados es superior a $d + 1$ resultará necesario realizar una nueva búsqueda. De esta manera, el siguiente paso consistirá en tomar la matriz E y realizar una segunda subdivisión en grupos con un número menor de vectores. Por último, se aplica el algoritmo a cada uno de estos grupos y se almacenan los vectores que cumplan con independencia reticular fuerte en la matriz E_c y además serán candidatos a miembros finales.

4.5. Algoritmos

Los algoritmos que a continuación se describen, que se emplean para detectar un conjunto de miembros finales, se han implementado utilizando la versión 7.0 de Matlab en una computadora cuyo procesador es Centrino Duo a 1.83 Ghz, con una memoria RAM de 1 Gbyte. Se ha elegido este software debido a su capacidad para procesar los datos de una imagen hiperespectral que ocupa aproximadamente 140 Mbytes (caso del formato AVIRIS), así como la disponibilidad de herramientas para el procesamiento de imágenes. En lo siguiente se presentan algunos datos importantes acerca de la implementación de cada algoritmo. Los resultados, para cada caso, serán presentados en el capítulo 5.

Denotamos por $\mathbf{f}(i, j) \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$ una imagen hiperespectral con d bandas, la matriz reformada de $\mathbf{f}(i, j)$ consiste en el conjunto $\{\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^k\}$ ($k = n \times m$), $\vec{\mu}$ y $\vec{\sigma}$ los vectores de media y desviación estándar de cada banda calculados sobre la imagen, α el

factor de corrección de ruido gaussiano, $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^K)$ el conjunto de firmas binarias asociadas a E , $E = (\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^K)$ el conjunto de miembros finales descubiertos y la función $\arg(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ regresa el índice de columna.

ALGORITMO 4.1 DETECCIÓN POR INDEPENDENCIA MORFOLÓGICA (GG).

P1. **Para** $i = 1, \dots, n$

Para $j = 1, \dots, m$

$$\mathbf{f}(i, j) \leftarrow \mathbf{f}(i, j) - \bar{\mu}.$$

[Calcular la media cero de la imagen].

P2. **Sean** $\eta \leftarrow \text{rnd}(k)$, $\mathbf{f} \leftarrow \mathbf{f}^\eta$, $E \leftarrow \mathbf{f}$, $X \leftarrow \emptyset$

[Inicializar el conjunto E con el espectro de un pixel elegido aleatoriamente de la imagen].

P3. **Para** $l = 1, \dots, d$

$$e_l \leftarrow \mathbf{Sii}(f_l > 0, 1, 0).$$

$$X \leftarrow X \cup \{\mathbf{e}\}.$$

[Construir la matriz de firmas binarias morfológicamente independientes X].

P4. **Sean** $W \leftarrow W_{XX}$ y $M \leftarrow M_{XX}$

[Construir las memorias W y M en base a las firmas binarias].

P5. **Para** $i = 1, \dots, n$

Para $j = 1, \dots, m$

$$\mathbf{f}^+(i, j) \leftarrow \mathbf{Sii}(\mathbf{f}(i, j) + \alpha \bar{\sigma} > 0, 1, 0).$$

$$\mathbf{f}^-(i, j) \leftarrow \mathbf{Sii}(\mathbf{f}(i, j) - \alpha \bar{\sigma} < 0, 1, 0).$$

[Calcular el vector de signos de la corrección de ruido gaussiano].

$$\mathbf{y}^+ = M_{XX} \boxtimes \mathbf{f}^+(i, j) \quad ; \quad \mathbf{y}^- = W_{XX} \boxtimes \mathbf{f}^-(i, j)$$

[Calcular la respuesta de las memorias dilatativa y erosiva].

$$\mathbf{Si} \mathbf{y}^+ \notin X \text{ AND } \mathbf{y}^- \notin X, \text{ entonces } E \leftarrow E \cup \{\mathbf{f}(i, j)\};$$

Ir a P3

[\mathbf{f} es un nuevo miembro final agregado a E . Ir al paso 3 y continuar con la exploración].

$$p \leftarrow \arg(\mathbf{y}^+)$$

$$\mathbf{Si} \mathbf{y}^+ \in X \text{ AND } \mathbf{f}(i, j) > \mathbf{e}^p, \text{ entonces } \mathbf{e}^p \leftarrow \mathbf{f}(i, j).$$

[Sustituir miembro final almacenado por un espectro más extremo].

$$p \leftarrow \arg(\mathbf{y}^-)$$

Si $\mathbf{y}^- \in X$ AND $\mathbf{f}(i, j) < \mathbf{e}^p$, entonces $\mathbf{e}^p \leftarrow \mathbf{f}(i, j)$.

[Sustituir miembro final almacenado por un espectro menos extremo].

P6. Salida E ; PARAR.

Es importante mencionar que M. Graña tuvo la cortesía de proporcionarnos la versión que él mismo implementó de su algoritmo. Aunque esta implementación funciona de manera similar a como se describe en el Algoritmo (GG), no hace uso explícito de las memorias W y M sino que utiliza criterios estadísticos para reemplazarlas; estos criterios no han sido estudiados porque no están dentro del alcance de este trabajo. En esta implementación, el parámetro α regula la cantidad de miembros finales que se obtienen a la salida. Por tanto, el valor de α óptimo está entre 1 y 2 resultando en un máximo de 20 miembros finales descubiertos. Por ejemplo, para una imagen hiperespectral de tamaño $256 \times 256 \times 224$, el tiempo de procesamiento es mayor o igual a 40 segundos utilizando el procesador previamente mencionado.

Para los propósitos de este trabajo de tesis fue necesario implementar una versión propia del algoritmo con el objetivo de poder evaluar la utilidad de las memorias W y M como detectores de independencia morfológica. De esta manera, en nuestra implementación el valor típico de α está entre 2 y 2.6, lo que permite descubrir un máximo de 30 miembros finales. Para la imagen hiperespectral anterior y utilizando las mismas características de procesador, el tiempo de procesamiento es mayor o igual a 270 segundos. La diferencia en tiempo de procesamiento se debe a que, en el algoritmo de M. Graña, no se calculan las memorias canónicas, mientras que en nuestra implementación deben ser calculadas en diversas ocasiones de acuerdo a lo descrito en el Algoritmo (GG).

Se define a $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) \in \mathbb{R}^{d \times k}$ la matriz de vectores hiperespectrales de dimensionalidad $d \times k$, con d igual al número de bandas. V consiste en el conjunto que contiene las columnas de W_{XX} o M_{XX} que poseen la propiedad de SLI y que a la vez son candidatos a miembros finales.

ALGORITMO 4.2 DETECCIÓN POR LAS COLUMNAS DE W O M (RSU).

P1. **Sean** $n \leftarrow \text{rows}(X)$; $m \leftarrow \text{cols}(X)$.

P2. **Si** $t=0$, **entonces** $E \leftarrow W_{XX}$; $\mathbf{b} \leftarrow \max(\mathbf{x}^\xi : \xi = 1 \dots k)$
 de otro modo $E \leftarrow M_{XX}$; $\mathbf{b} \leftarrow \min(\mathbf{x}^\xi : \xi = 1 \dots k)$

[Selección y construcción de la memoria a utilizar y cálculo de la cota máxima o mínima].

P3. **Sean** $k \leftarrow \text{cols}(E)$, $j \leftarrow 1$ y $c \leftarrow 1$.

[Inicializar el índice de columna j y el contador de desplazamiento de columna c].

P4. **Sea** $V \leftarrow E$.

[Se inicializa a V como el conjunto de las columnas de E].

P5. **Para** $s = 1, \dots, k$

$Vp \leftarrow \text{eliminarcolumna}(V, j)$
 $B \leftarrow \text{Sii } (t = 0, W_{VpVp}, M_{VpVp})$.

[Extraer la columna indicada por j a la matriz V y construir la memoria correspondiente].

Si $B = E$, **entonces** $V \leftarrow Vp$ y $j \leftarrow c$

[la columna del conjunto V que debe ser eliminada permanece en la misma última posición].

de otro modo $j \leftarrow j + 1$ y $c \leftarrow j$

[eliminar la siguiente columna; el indicador de desplazamiento será igual a la última columna no eliminada más uno].

P6. **Para** $i = 1, \dots, n$

$V^i \leftarrow b_i + V^i$

[Realiza el escalamiento de las columnas del conjunto de salida V].

P7. **Salida** V ; PARAR.

La implementación realizada para este algoritmo permite seleccionar entre las memorias W y M para la búsqueda de miembros finales. De esta manera, no es necesario utilizar ambas memorias ya que ambas producen resultados semejantes. Respecto al tiempo de procesamiento para una imagen hiperespectral de tamaño $256 \times 256 \times 224$, este algoritmo tarda al menos 65 segundos, siendo P5 la etapa que requiere mayor tiempo de procesamiento.

Se define a $X = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) \in \mathbb{R}^{d \times k}$ la matriz de vectores hiperespectrales de dimensionalidad $d \times k$, con d igual al número de bandas y k igual al número de vectores espectrales. En el siguiente algoritmo, los pasos P1 y P2 se utilizan para derivar un conjunto V de vectores con independencia reticular, mientras que los pasos P3 a P5 se utilizan para verificar la condición 2 de independencia reticular fuerte. Por último, la función módulo es utilizada para obtener el índice de columna para $\xi \neq \eta$.

ALGORITMO 4.3. DETECCIÓN POR SLI (VU).

P1 Sean $V \leftarrow \emptyset$, $E \leftarrow \emptyset$

[Inicializar V como la matriz de vectores reticularmente independientes].

P2 Para $\gamma \leftarrow 1 \dots k$

[Barrer todos los vectores en X].

Para $i \leftarrow 1, \dots, n$

$r_i \leftarrow 0$

$m_i \leftarrow -\infty$

[Inicializar filas con un mínimo valor].

Para $\xi = 1, \dots, k$

$\mathbf{m} \leftarrow \max(\mathbf{m}, \mathbf{x}^\xi)$ **si** $\xi \neq \gamma$

[Barrer los vectores en X^ξ y calcular su máximo valor].

Para $i = 1, \dots, n$

$r_i \leftarrow 1$ **si** $x_i^\gamma > m_i$

[Verificar independencia reticular en filas de X^γ].

Si $\max(\mathbf{r}) = 1$ **entonces**

$V \leftarrow V \cup \{\mathbf{x}^\gamma\}$

[Vector actual satisface condición 1 y será añadido al conjunto V].

P3. **Sea** $k \leftarrow \text{cols}(V)$

[Obtener número de filas y columnas de V].

P4. **Para** $\eta \leftarrow 1, \dots, k$

$s \leftarrow 0$

[Inicializar el contador s]

Para $\xi \leftarrow 1, \dots, k - 1$

$c \leftarrow \text{mod}(\eta + \xi - 1, k) + 1$

$\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{x}^\eta - \mathbf{x}^c$; $m \leftarrow \max(\mathbf{a})$

[Calcular la diferencia entre vectores $\xi \neq \eta$ y su valor máximo].

$\mathbf{s} \leftarrow \mathbf{s} + \lfloor \mathbf{a}/m \rfloor$

[\mathbf{s} es un contador binario sobre las diferencias normalizadas].

$\mu \leftarrow \max(\mathbf{s})$

Si $\mu = (k - 1)$ **entonces** $E \leftarrow E \cup \{\mathbf{x}^\eta\}$

[Existe un 1 en la misma posición de fila para todo $\xi \neq \eta$, por lo que $\max(\mathbf{s}) = k - 1$ y se agrega como nuevo candidato].

P5. **Salida** E ; **PARAR**.

Debido a que la búsqueda de vectores con SLI se debe realizar para subparalelepípedos de la imagen, la implementación realizada para este algoritmo permite elegir el tamaño de éstos; en particular, tamaños de 4×4 , 8×8 y 16×16 píxeles y con ello elegir los vectores con independencia reticular fuerte. De esta manera, el tiempo para el procesamiento de la misma imagen hiperespectral es de al menos 120 segundos.

Capítulo 5

Segmentación de Imágenes Hiperespectrales

5.1. El espectrómetro de imagen AVIRIS

El espectrómetro de imagen AVIRIS, de las siglas *Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer*, constituye el primer dispositivo en el contexto del sensado remoto de la Tierra cuya instrumentación óptica es capaz de registrar la energía solar reflejada, transmitida y esparcida por la superficie terrestre y la atmósfera en 224 bandas espectrales en el intervalo de 0.4 a 2.5 μm . Este instrumento ha sido desarrollado y operado por NASA desde principios de 1980 con los objetivos de identificar, medir y monitorear los materiales constituyentes de la Tierra y la atmósfera basados en la absorción molecular y el esparcimiento por partículas; de esta manera, con una apropiada corrección de los efectos atmosféricos es posible convertir los valores de radiancia, registrados por el sensor, a reflectancia y con ello identificar los materiales de una escena remotamente sensada [28].

En cuanto a la instrumentación, AVIRIS está conformado por cuatro espectrómetros de rejillas (A, B, C y D) que dividen la región de longitudes de onda de 0.4 a 2.45 μm en cuatro segmentos espectrales: 0.41-0.7 μm , 0.68-1.27 μm , 1.25-1.86 μm y 1.84-2.45 μm , respectivamente, con un pequeño traslape entre espectrómetros adyacentes. El ancho de banda espectral para los dispositivos A y B es de 9.4 nm y 9.7 nm para C y D, con un total de 224 elementos

5.1. EL ESPECTRÓMETRO DE IMAGEN AVIRIS

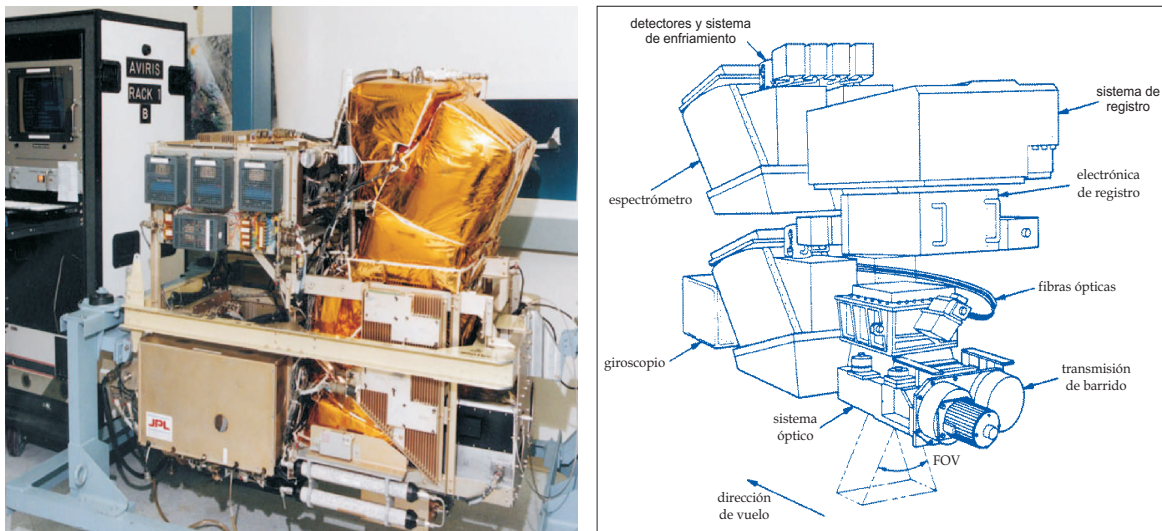


Figura 5.1: Imagen y diagrama de AVIRIS.

detectores. El sistema de barrido para colectar la luz reflejada desde la superficie consiste en un espejo acoplado a un sistema mecánico cuyo movimiento permite colectar 667 píxeles. La tabla 5.1 expone características importantes de algunos componentes de este instrumento.

El modo de operación de AVIRIS se describe a continuación. El sistema ópto-mecánico es utilizado para colectar la energía solar, que se separa en diferentes intervalos de longitudes de onda al pasar a través de los cuatro espectrómetros. Las diferentes longitudes de onda se registran utilizando un arreglo lineal de 32 detectores para el espectrómetro A y de 64 detectores para los B, C y D. De esta manera, una escena se construye a partir del movimiento del sistema colector, perpendicular a la dirección del avión (“whiskbroom”), el cual registra cada línea de la imagen con un ancho de 677 píxeles en 224 bandas espectrales simultáneamente; a su vez, el movimiento del avión determina la longitud de la imagen.

En relación a las plataformas aéreas, el sensor ha sido colocado en cuatro plataformas aéreas: los aviones ER-2 y WB-57 de NASA, el turbopropulsor internacional *Twin Otter* y el avión *Scaled Composite's Proteus*. Así, cuando éste se coloca en el avión ER-2, que vuela a aproximadamente 20 km sobre el nivel del mar a una velocidad de 734 km/h, cada píxel registrado cubre un área terrestre de 20 m por lado, lo que cubre un ancho en el terreno de 10.5 km. Por otra parte, cuando el sensor se coloca en el avión *Twin Otter*, que vuela a una

PARÁMETRO	VALOR
Rejilla en espectrómetro A	117.65 líneas/mm
Rejilla en espectrómetro B	128.2 líneas/mm
Rejilla en espectrómetro C	124.2 líneas/mm
Rejilla en espectrómetro D	128.6 líneas/mm
Diámetro de la pupila	200 mm
Diámetro de los espejos	200 mm
Longitud focal efectiva	19.76 cm
Campo de visión (FOV)	34
Campo de visión instantáneo (IFOV)	1 mrad
Alimentación	28 VCD, 4 A

Tabla 5.1: Parámetros del instrumento AVIRIS

altura de 4 km sobre el nivel de la superficie a una velocidad de 130 km/h, el tamaño físico de cada pixel es de 4 km², cubriendo un ancho de barrido de 2 km.

Los datos registrados por AVIRIS son almacenados a bordo del avión en un disco propio del instrumento cuya capacidad de almacenamiento es de 76 Gbytes. Para después, en una estación terrestre convertir los datos a valores de reflectancia y almacenarlos. Cuando estos datos son almacenados en un archivo, una escena única consta de 512 líneas por 614 pixeles, con 224 bandas espectrales con una resolución espectral de 10 nm. Por tanto, una escena de este instrumento ocupa un espacio en bits de aproximadamente 140 Megabytes.

5.2. Imágenes hiperespectrales empleadas

La eficiencia de los algoritmos para la detección de miembros finales, descritos en el capítulo 4, ha sido probada utilizando dos imágenes hiperespectrales provenientes del sensor AVIRIS y que han sido registradas en las zonas de Cuprite, Nevada y Moffett Field, California, respectivamente. Los archivos de datos de ambas imágenes están disponibles en el sitio del instrumento para fines de investigación, cuyo formato (*.rfl) consiste en caracteres enteros binarios de 16

bits con signo [1]. De acuerdo con el modo en que el sensor registra una escena, cada archivo consiste en un arreglo de caracteres distribuidos como sigue: **224 bandas** \times **2 bytes** \times **614 pixeles** \times **512 líneas**.

Por tanto, el procedimiento realizado para extraer la imagen de una banda espectral en particular consiste en lo siguiente. El primer paso consiste en abrir el archivo de datos y colocar el apuntador en posición para leer los caracteres que corresponden al primer pixel en la banda seleccionada. El siguiente paso consiste en leer dos bytes por separado, en la posición indicada por el apuntador, invertirlos y enseguida convertir dicho valor a decimal para colocarlo como el primer elemento de la imagen. El procedimiento anterior se repite hasta leer los 614 pixeles de las 512 líneas en la banda seleccionada y escribirlos en la posición correspondiente a cada pixel en la imagen. Una vez que el proceso se ha concluido resulta necesario cerrar el archivo de datos; los valores almacenados consistirán en valores de reflectancia multiplicados por 10000. Sin embargo, para visualizar la imagen resulta necesario normalizar los valores en el intervalo $[0,1]$, así como realizar un escalamiento lineal para que éstos correspondan con el rango dinámico $[0,255]$ de imágenes digitales en tonos de gris.

5.2.1. Cuprite

El sitio de Cuprite es una región que se encuentra constituida por dos centros de alteración hidrotérmica de ácido sulfúrico y en la que predominan cadenas de rocas montañosas con escasa vegetación que abarcan la carretera 95, al suroeste de Nevada; con esta alteración se encuentran rocas terciarias localizadas en la porción central del este, así como rocas metasedimentarias en la parte central del poniente. Este sitio se caracteriza por ser una zona donde se localizan 18 tipos de minerales: sericita, kaolinita, Na-alunita, k-alunita, muscovita y calcita, entre otros. En 1997 el espectrómetro AVIRIS registró cinco escenas hiperespectrales de esta zona, que cubren un ancho de 11 km y una longitud total de 220 km. La figura 5.2 presenta dos imágenes RGB (Red, Green, Blue) realizadas con la combinación de tres bandas hiperespectrales de la escena 4. La imagen de la izquierda está conformada por las bandas R-32, G-20 y B-6 ($\lambda=0.69, 0.58$ y $0.47 \mu m$ respectivamente) cuya combinación simula color verdadero; mientras que la imagen de la derecha, formada por R-194, G-134 y B-32 ($\lambda=2.21, 1.65$ y $0.69 \mu m$ respectivamente),

proporciona información para el análisis visual de la presencia de algún tipo de mineral en celeste.

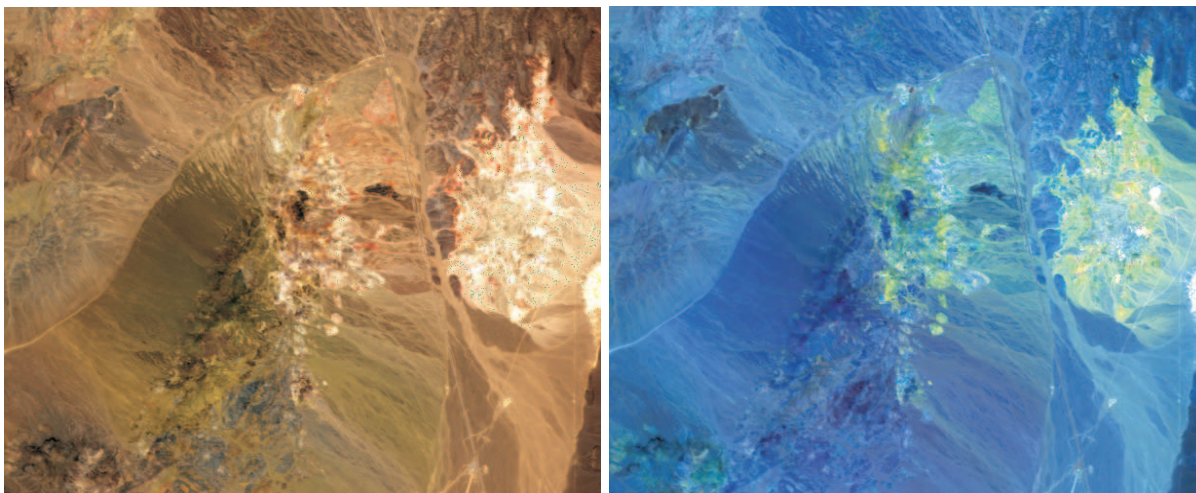


Figura 5.2: Izquierda, imagen RGB de Cuprite con bandas 32, 20, 9 que simulan color verdadero. Derecha, imagen RGB en color falso con bandas 194, 134, 32 que proporcionan información de algunas características geológicas en la zona.

5.2.2. Moffett Field

Localizado a 5 km al norte de la ciudad de Mountain View en California, Moffett Field es el nombre del sitio donde se encuentra el campo de aviación federal Moffett, cerca de la Bahía de San Francisco, al norte de San José, entre Mountain View y Sunnyvale. Esta base aérea comenzó a funcionar en abril de 1933 a cargo de la marina de los Estados Unidos; a partir de septiembre de este mismo año el sitio fue denominado estación naval Moffett Field (NAS Moffett Field, *Naval Air Station Moffett Field*) en honor al almirante William A. Moffett, a quien se debe la creación del sitio. Actualmente el campo de aviación forma parte de la marina de guerra de los Estados Unidos y es operado por el Centro de Investigaciones de NASA (NASA Armes Research Center).

En el sitio que ocupa Moffett Field se pueden apreciar campos de cultivo ya que la agricultura era la principal actividad en esta zona, bancos de sal, así como los hangares No. 1,

No. 2 y No. 3 que actualmente fungen como museos. En 1997 AVIRIS registró cuatro escenas hiperespectrales en esta zona, abarcando una amplia zona urbana, parte de la bahía, así como el campo de aviación. La figura 5.3 presenta dos imágenes RGB realizadas con la combinación de 3 bandas espectrales de la escena 3. La imagen de la izquierda está conformada por las bandas R-32, G-20 y B-6 ($\lambda=0.69, 0.58$ y $0.47 \mu m$ respectivamente) cuya combinación simula color verdadero, lo que permite observar la base aérea; a su vez, la imagen de la derecha, formada por R-49, G-134 y B-32 ($\lambda=0.85, 1.65$ y $0.69 \mu m$ respectivamente) permite diferenciar los diferentes tipos de vegetación en colores naranja y verde claro.



Figura 5.3: Izquierda, imagen RGB de Moffett Field con bandas 32, 20, 9 que simulan color verdadero. Derecha, imagen RGB en color falso con bandas 49, 134, 32 que permiten diferenciar, en verde y naranja, los diferentes tipos de vegetación.

5.3. Detección de miembros finales

5.3.1. Resultados en la zona de Cuprite

El desempeño de los algoritmos para la detección de miembros finales ha sido probado utilizando la escena 4 de la zona de Cuprite, Nevada, cuya imagen comprende 512×614 píxeles con $d = 50$ bandas espectrales que abarcan la porción de 2 a $2.5 \mu m$. La elección del

5.3. DETECCIÓN DE MIEMBROS FINALES

número de bandas utilizadas se hizo en función de que en el sitio predominan minerales, los cuales presentan sus características de absorción en este intervalo de longitudes de onda. De esta manera, el algoritmo GG fue empleado con el valor de $\alpha=1.5$, con lo cual se obtuvieron 18 miembros finales. Para el caso del algoritmo RGU se utilizó primeramente la memoria autoasociativa W y enseguida la memoria dual M . En ambos casos se obtuvo un total de 50 miembros finales cuyos espectros son similares. La tabla 5.2 resume algunos datos importantes, tales como número de miembros finales identificados y tiempo de procesamiento obtenidos con ambos métodos.

ALGORITMO	MIEMBROS FINALES	NO. DE MIEMBROS IDENTIFICADOS	TIEMPO DE PROCESAMIENTO (s)
GG	18	2	150
RGU	50	4	130

Tabla 5.2: Resultados obtenidos para los algoritmos GG y RGU

Respecto al algoritmo VU, que es el propuesto en este trabajo, se realizaron pruebas con subdivisiones diferentes de tamaño $p \times p$ a lo largo de la imagen; ésto con la finalidad de identificar la vecindad que produjera los mejores resultados en cuanto a grado de similitud de los miembros finales, así como el tiempo de procesamiento. La tabla 5.3 presenta los resultados obtenidos con este algoritmo para vecindades de diferentes tamaños. Las figuras 5.4 a la 5.11 presentan los gráficos que corresponden a algunos miembros finales obtenidos y los espectros de minerales que han sido identificados con éstos. Los espectros de referencia han sido tomados de la biblioteca espectral USGS (*US Geological Survey*) [14]. Además es importante mencionar que, para fines prácticos, únicamente se presentarán los miembros finales obtenidos con los algoritmos RGU y VU (en vecindades de 32×32) ya que ambos son los que presentan el mayor grado de similitud respecto a los espectros de referencia; las tablas 5.4 y 5.5 presentan el valor del ángulo espectral SAM entre el espectro de referencia y el miembro final determinado con ambos algoritmos.

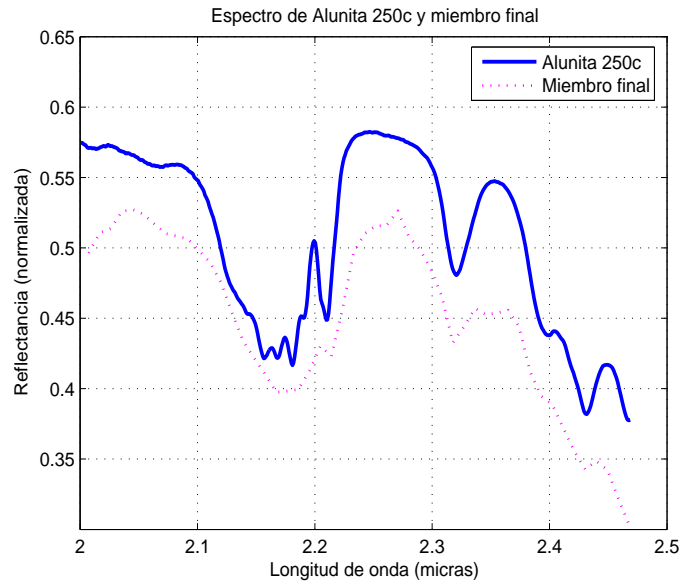


Figura 5.4: Gráfico del espectro de alunita 250c y miembro final determinado con algoritmo RGU.

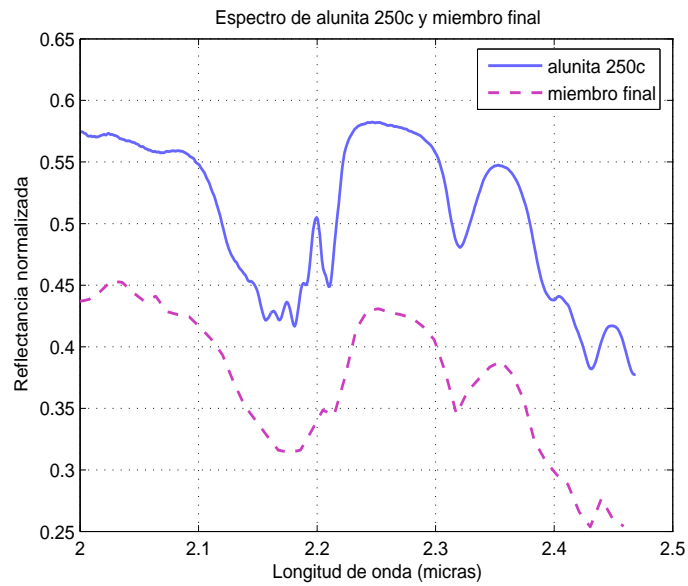


Figura 5.5: Gráfico del espectro de alunita 250c y miembro final determinado con algoritmo VU.

5.3. DETECCIÓN DE MIEMBROS FINALES

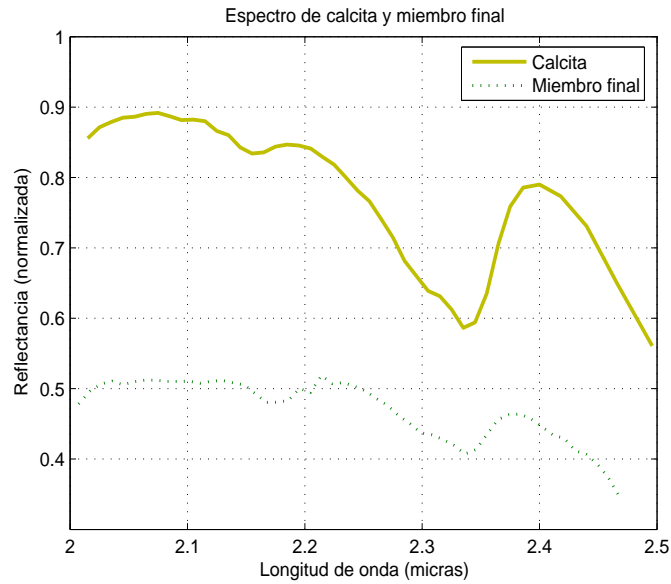


Figura 5.6: Gráfico del espectro de calcita y miembro final determinado con algoritmo RGU.

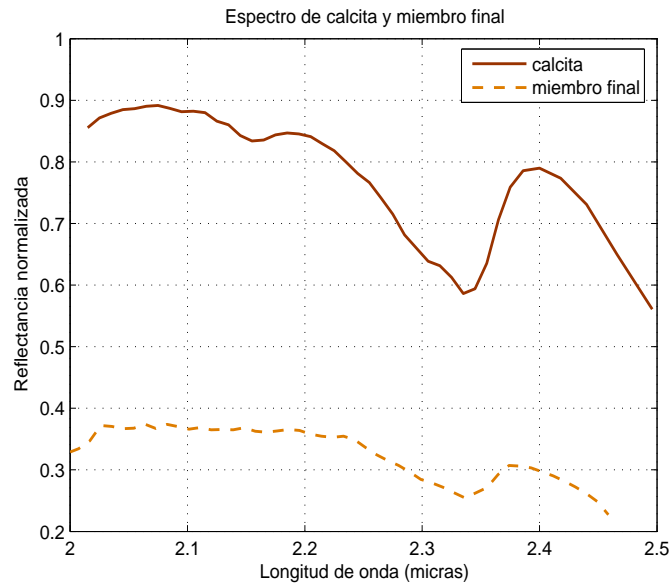


Figura 5.7: Gráfico del espectro de calcita y miembro final determinado con algoritmo VU.

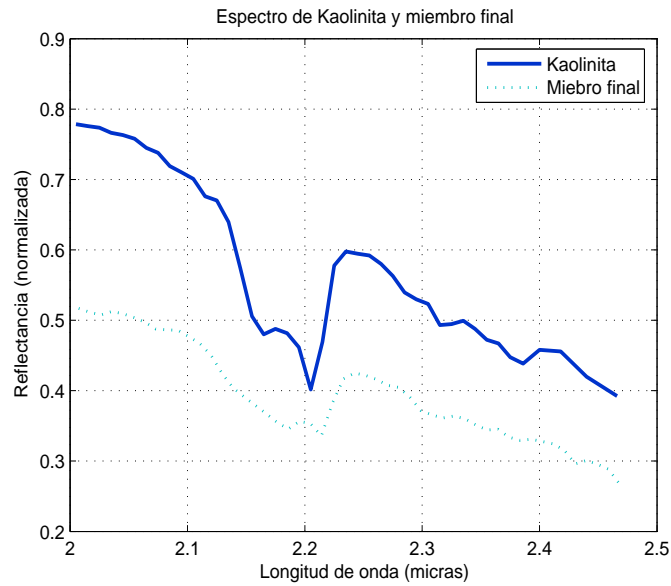


Figura 5.8: Gráfico del espectro de kaolinita y miembro final determinado con algoritmo RGU.

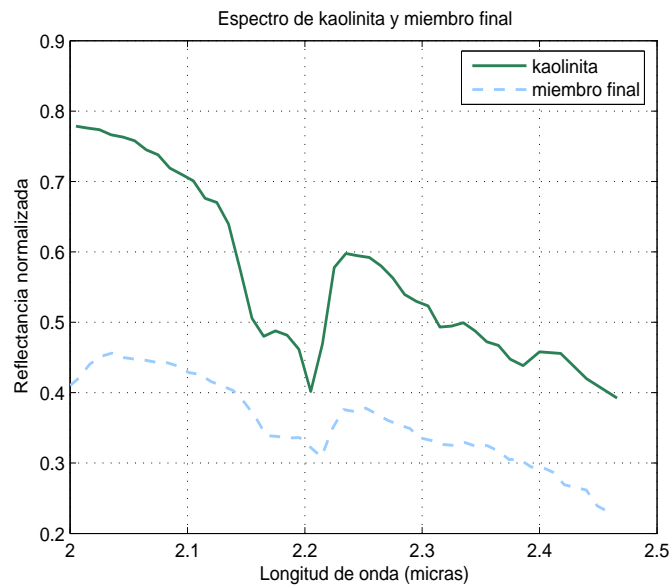


Figura 5.9: Gráfico del espectro de kaolinita y miembro final determinado con algoritmo VU.

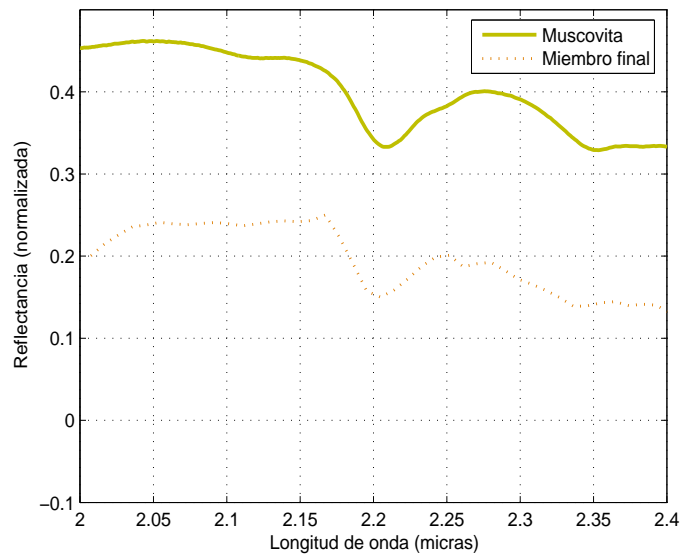


Figura 5.10: Gráfico del espectro de muscovita y miembro final determinado con algoritmo RGU.

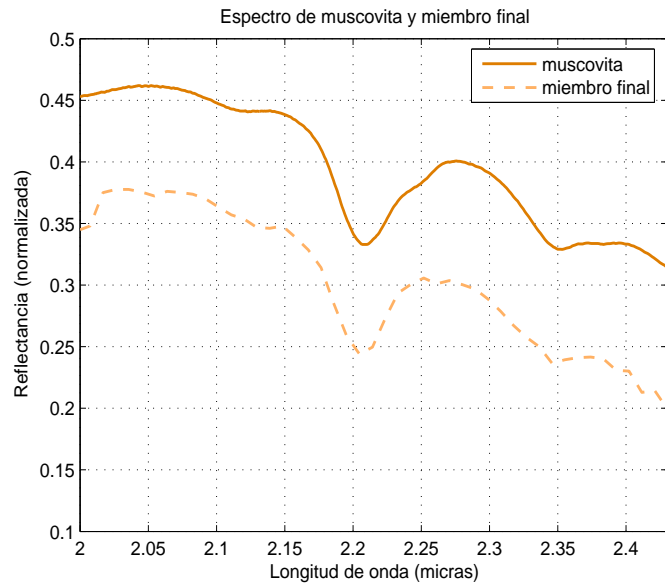


Figura 5.11: Gráfico del espectro de muscovita y miembro final determinado con algoritmo VU.

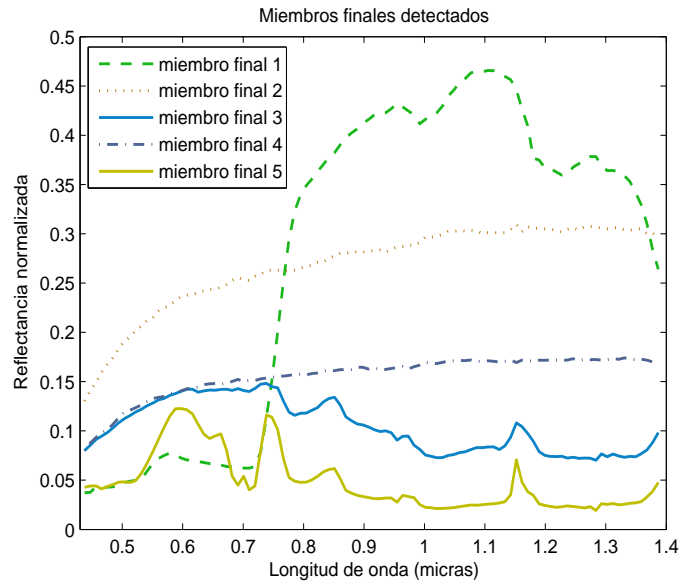


Figura 5.12: Gráfico de miembros finales detectados con el algoritmo VU en Moffett Field.

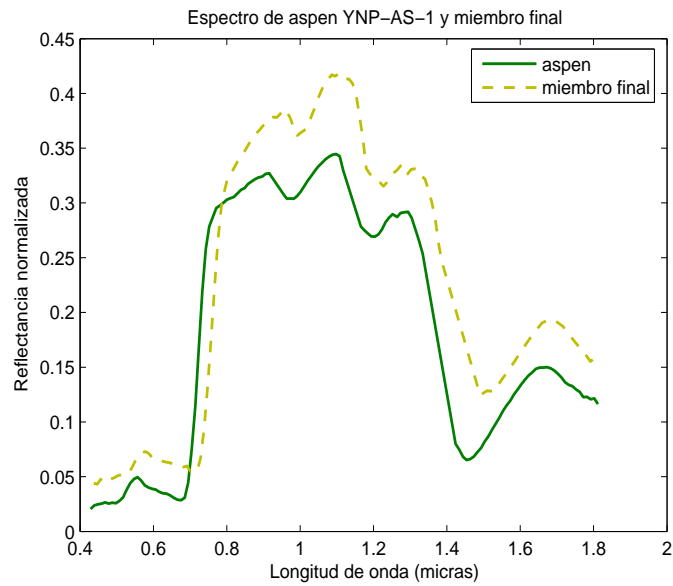


Figura 5.13: Gráfico del espectro de aspen y miembro final determinado con algoritmo VU.

5.3. DETECCIÓN DE MIEMBROS FINALES

VECINDADES (píxeles)	MIEMBROS FINALES	NO. DE MIEMBROS IDENTIFICADOS	TIEMPO DE PROCESAMIENTO (s)
8×8	1240	5	48
16×16	541	5	90
32×32	172	5	260
48×48	60	5	540
64×64	46	5	820

Tabla 5.3: Resultados obtenidos para el algoritmo VU

ESPECTROS	SIMILITUD (rad)
Alunita 250c	0.0611
Calcita	0.1005
Kaolinita	0.0921
Muscovita	0.0684

Tabla 5.4: Grado de similitud entre el espectro de referencia y miembro final con el algoritmo RGU.

5.3.2. Resultados en la zona de Moffett Field

Una vez que se ha verificado el buen desempeño del algoritmo VU para la detección de miembros finales en la imagen de Cuprite, un ejercicio adicional consiste en aplicar este procedimiento para la imagen hiperespectral registrada por AVIRIS en Moffett Field, California. Para este efecto, se ha utilizado una subimagen de la escena 3 de tamaño $352 \times 352 \times d$ con $d=102$ bandas. La razón de utilizar una subimagen se debe a que, del número total de bandas espectrales, la mayor parte está afectada por algún tipo de ruido que en algunos casos es muy severo. De esta manera, las bandas que se encuentran libres de distorsión son: de la 5 a la 106 y de la 117 a la 151; sin embargo, algunas de ellas presentan ruido en la porción superior derecha de la imagen, siendo necesario tomar una pequeña porción de ésta.

La búsqueda de miembros finales se realizó utilizando el algoritmo ya mencionado en vecindades de 16×16 píxeles, con lo cual se pudo determinar un total de 57 candidatos a

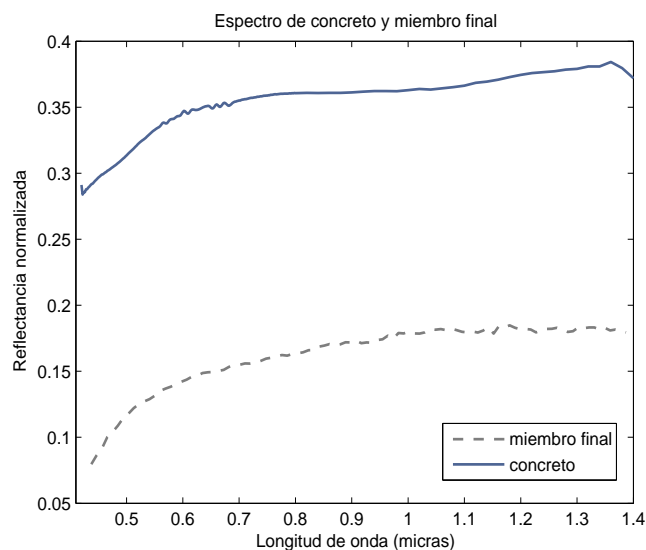


Figura 5.14: Gráfico del espectro de concreto y miembro final determinado con algoritmo VU.

ESPECTROS	SIMILITUD (rad)
Alunita 250c	0.0395
Calcita	0.0614
Kaolinita	0.0602
Muscovita	0.0428
Buddingtonita	0.0628

Tabla 5.5: Grado de similitud entre el espectro de referencia y miembro final con algoritmo VU

miembros finales. De los 57 vectores obtenidos, algunos de ellos fueron identificados con el espectro de algún material de la biblioteca espectral ASTER (Advanced Spaceborn Thermal Emission and Reflection Radiometer)¹, y por tanto seleccionados como miembros finales. La figura 5.12 muestra 5 de los miembros finales obtenidos a partir de esta metodología; las figuras 5.13 y 5.14 presentan los gráficos de algunos de éstos relativos al espectro de referencia.

¹El espectro de concreto para construcción fue reproducido de la biblioteca espectral ASTER, a través de la cortesía de Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California. Copyright © 1999. TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS

5.4. Mapas de abundancia de recursos naturales

El procedimiento para realizar la segmentación de las imágenes hiperespectrales, de acuerdo a la distribución de los recursos naturales, está determinado por el cálculo de las abundancias fraccionales para cada miembro final. Este cálculo está sujeto a dos condiciones: las abundancias deben sumar la unidad y deben ser positivas; sin embargo, debido a que no es posible satisfacer ambas condiciones a la vez, se ha elegido emplear un procedimiento alternativo en el que se toman en cuenta los valores de abundancia positivos. Éste método, mencionado en [31], consiste en realizar la estimación por mínimos cuadrados sin restricciones, eliminar cualquier abundancia negativa y enseguida escalar las abundancias de cada miembro final para que sumen la unidad.

Los mapas de abundancia de los recursos naturales para las imágenes hiperespectrales anteriores han sido realizados en base al procedimiento anterior, a partir de los miembros finales determinados con el algoritmo VU y de acuerdo a lo siguiente. Se realiza el cómputo del vector de abundancias para cada pixel de la imagen utilizando la ecuación (4.1) y se toma en cuenta únicamente las abundancias que sean mayores a 0.5 para un miembro final determinado. De esta manera, para cada miembro final se produce una imagen binaria cuyos pixeles en blanco (255) denotan todos aquellos cuya abundancia es mayor a 0.5, mientras que los pixeles que están por debajo de este umbral son indicados en negro (0). Una vez que se han construido las imágenes binarias de los miembros finales, cada una se separa en sus tres canales RGB para realizar el proceso de coloración afectando el valor de los pixeles en blanco. Finalmente se suman por canales todas las imágenes y el resultado se agrupa para obtener la imagen segmentada de los diferentes recursos naturales. La figura 5.16 presenta los mapas de abundancia de los recursos minerales en la zona de Cuprite, Nevada obtenidos con el proceso de segmentación descrito anteriormente. Este procedimiento puede ser fácilmente verificado mediante la figura 5.15 que consiste en la distribución de los minerales en esta zona de acuerdo a los datos de la biblioteca espectral USGS. En esta imagen de referencia se han clasificado tres variedades del mineral alunita, coloreados en tonos de naranja, así como dos clases del mineral kaolinita, coloreados en verde y amarillo; sin embargo, en el mapa de abundancias obtenido, los diferentes tipos de alunita se han clasificado como uno solo (color naranja), así

como los dos tipos de kaolinita se han clasificado en uno solo (color verde). Ésto se debe a que los distintos tipos de un mineral determinado presentan gran similitud espectral, lo que repercute en que el algoritmo para la detección de miembros finales determine que uno de ellos es reticularmente independiente en el sentido fuerte.

Por otra parte, la figura 5.17 corresponde al mapa de abundancias de la distribución de algunos recursos naturales presentes en el sitio de Moffett Field, que se ha obtenido con el proceso de segmentación antes descrito. Los recursos que se han clasificado son los siguientes: árboles de la familia aspen, construcciones de concreto, presencia de agua de sal, vegetación seca, así como pasto verde. Debido a que en la literatura no se han reportado análisis o datos de referencia de esta zona, para comprobar los resultados, se hará referencia a la figura 5.3 cuyas características de color RGB permiten tener una idea de la validez de los resultados.

Como un comentario adicional, es importante mencionar que se realizaron algunas pruebas empleando la estimación por mínimos cuadrados con la restricción de que las abundancias sumen la unidad y que se denota por la ec.(4.2). Para la imagen de Moffett Field, las imágenes segmentadas resultantes fueron similares a la que se presenta en la figure 5.17; sin embargo, para el caso de Cuprite la distribución de los recursos minerales no corresponde con lo indicado en la figura 5.15, lo que demuestra la validez del cálculo sin restricciones, utilizado para la construcción de los mapas que se presentan a continuación.

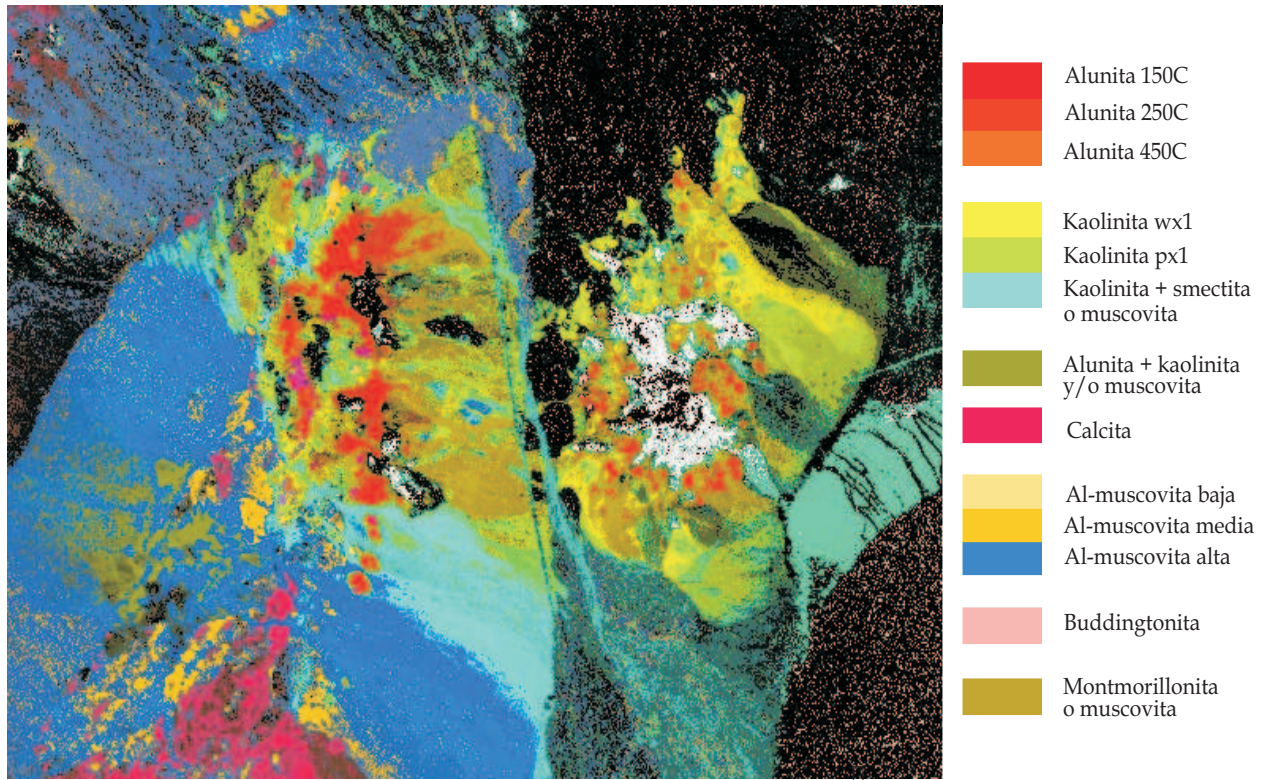


Figura 5.15: Distribución de recursos minerales en Cuprite, Nevada. La imagen ha sido tomada de la biblioteca espectral USGS (U.S. Geological Survey) y se encuentra ligeramente desplazada hacia la derecha respecto de la registrada por AVIRIS.

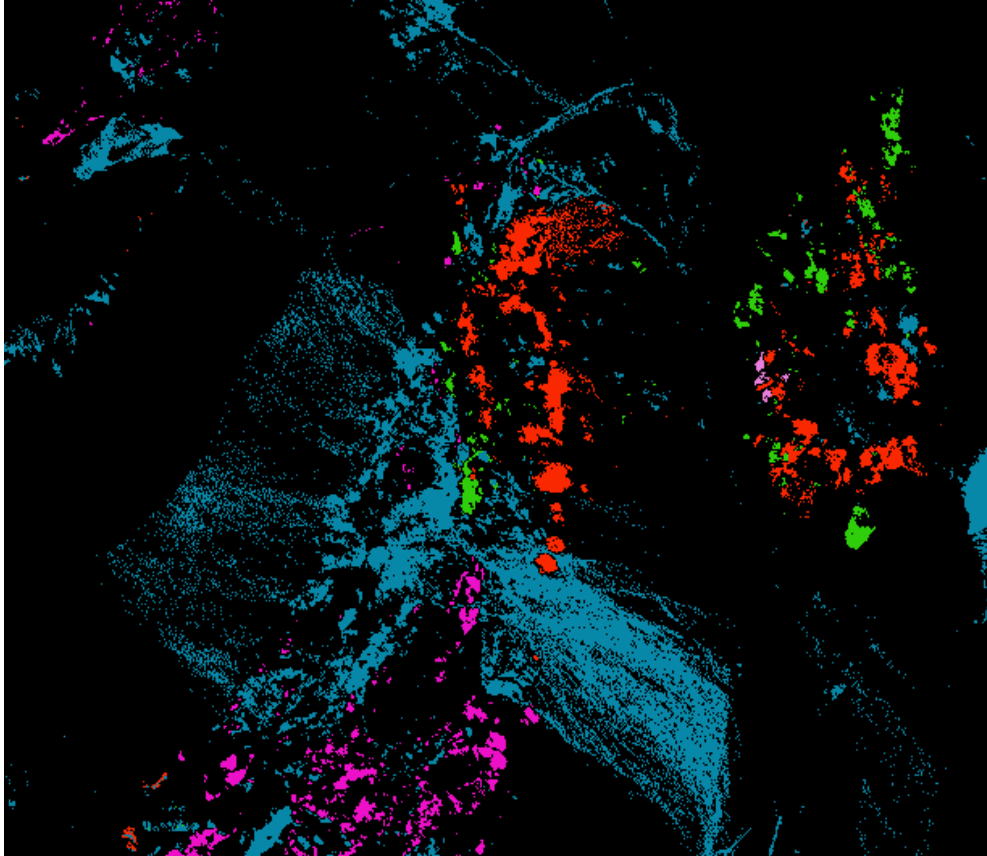


Figura 5.16: Mapa de abundancias de algunos minerales en la zona de Cuprite, como resultado del proceso de inversión utilizando cinco miembros finales obtenidos con el algoritmo VU. La clasificación de los minerales es como sigue: naranja corresponde con los diferentes tipos de alunite, rosa intenso con calcita, verde con kaolinita, azul con muscovita y rosa claro con buddingtonita. Los resultados de esta segmentación pueden ser verificados de acuerdo a la distribución de estos minerales indicada por la figura 5.15.

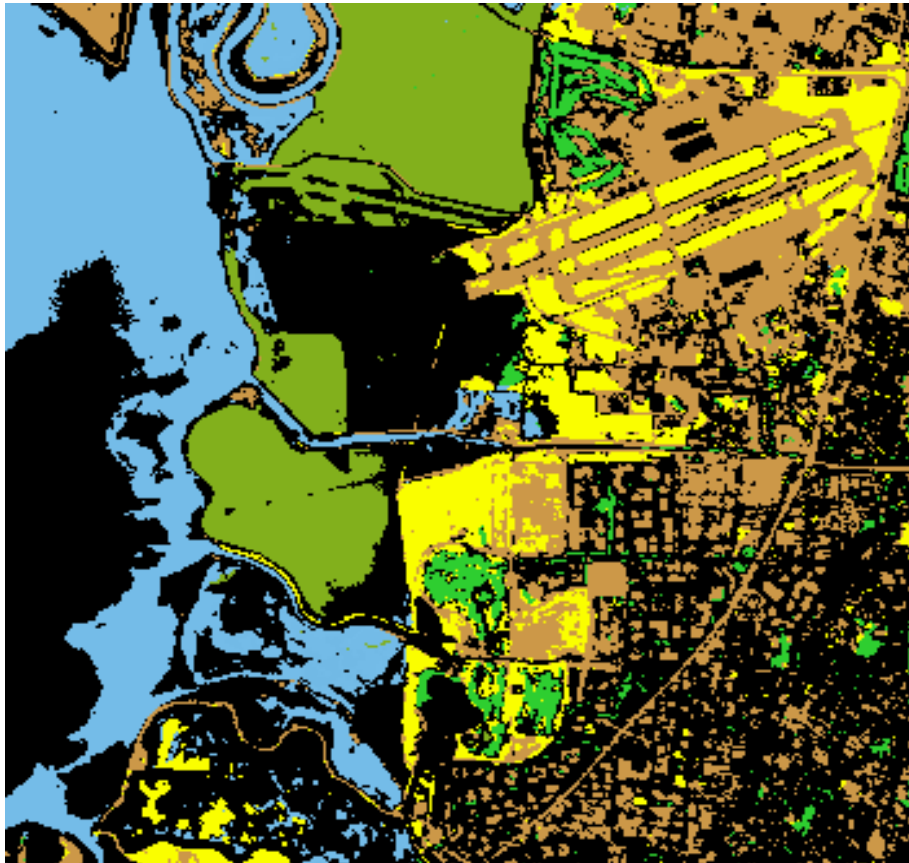


Figura 5.17: Mapa de abundancias de algunas regiones de interés en el sitio de Moffett Field, como resultado del proceso de inversión utilizando cinco miembros finales obtenidos con el algoritmo VU. Las regiones en color verde brillante indican la distribución de árboles de la familia aspen, el color café indica zonas de concreto, el color amarillo denota regiones con vegetación seca, el color verde opaco indica regiones de pasto y las zonas en celeste indican la presencia de agua de mar. En la figura en color RGB (fig. 5.3) se pueden distinguir algunas de estas zonas, lo que permite verificar el buen resultado de la segmentación de este mapa de abundancias.

Capítulo 6

Conclusiones

En este capítulo se discutirán los resultados obtenidos en el capítulo anterior y se expondrán las conclusiones derivadas de este trabajo de investigación. Para ello, éste será dividido en las siguientes secciones. La sección de conclusiones principales expondrá las conclusiones más importantes derivadas de este trabajo de tesis. La sección denominada conclusiones adicionales, aportará detalles y resultados importantes a partir de los objetivos secundarios que fueron planteados en el capítulo 1. En la sección de aportaciones de esta investigación se presentarán las contribuciones más importantes que se hicieron en cada capítulo, así como la dirección del trabajo futuro. Finalmente, en la última sección se hará una breve mención de la participación en algunos seminarios y conferencias.

6.1. Conclusiones principales

Las imágenes hiperespectrales representan una poderosa herramienta para el análisis y monitoreo de los materiales que constituyen una región determinada. Estas imágenes han sido el resultado del desarrollo de la ciencia de la espectroscopía, cuyos instrumentos más modernos son capaces de formar la imagen de las características espectrales en cada pixel. En los últimos años, estos espectrómetros de imagen han sido colocados en plataformas aéreas para registrar la superficie terrestre en cientos de bandas espectrales, un área que ha sido denominada como sensado remoto hiperespectral y que ha encontrado muchas aplicaciones relacionadas con la

identificación de recursos naturales, monitoreo del medio ambiente e inclusive, aplicaciones militares. El objetivo principal en el análisis de imágenes hiperespectrales consiste en realizar la segmentación para construir mapas de abundancias de los recursos naturales. Por tanto, una etapa fundamental para este procedimiento consiste en la determinación de los materiales fundamentales que componen una escena, también denominados miembros finales.

En el presente trabajo de investigación se han estudiado dos métodos, que están basados en memorias asociativas morfológicas, para determinar un conjunto de vectores que puedan ser considerados miembros finales. La idea de utilizar a W y M para derivar este conjunto surge en [17, 18] con los trabajos de Graña et al. Este método utiliza ambas memorias para detectar la propiedad de independencia morfológica entre vectores y su fundamento es considerar que estos vectores radican en las extremidades de una caja convexa que envuelve a todos los demás datos. Recientemente, Ritter et al. en [34] demuestran que es posible utilizar las columnas de estas memorias para construir un conjunto de vectores con la propiedad de independencia reticular fuerte, que además coinciden con puntos extremos de un simplex que envuelve a los datos, lo que se traduce en un método para derivar miembros finales a partir de W_{XX} o M_{XX} . Como parte de este trabajo de investigación, se ha implementado el algoritmo basado en esta última idea para comprobar algunos de los resultados teóricos planteados; asimismo, se ha realizado una comparación con los resultados obtenidos al emplear el método basado en independencia morfológica.

En efecto, el método de las columnas de W_{XX} , implementado en el algoritmo RGU, representa un procedimiento para construir un conjunto de vectores con independencia reticular fuerte y que además son identificados como miembros finales en imágenes hiperespectrales. La importancia de este procedimiento radica en que puede ser considerado un método autónomo para determinar miembros finales, donde el número de éstos será igual a d , el número de bandas espectrales que se utilizan para construir las memorias. Asimismo, el número de miembros finales coincide con el número de puntos extremos del simplex de alta dimensionalidad que envuelve a los datos hiperespectrales [26]. Como consecuencia, algunos de estos vectores son identificados con materiales constituyentes de la escena remotamente sensada al utilizar espectros de la biblioteca espectral junto con una medida de similitud como puede ser el SAM.

Aunque el método afirma que estos vectores, contruidos a partir de las columnas de las memorias, coinciden con algún vector de la imagen original realizando un escalamiento de los valores, se ha comprobado que ésto no se cumple para el caso hiperespectral donde $k \gg d$; es decir, el número de vectores en la imagen es mucho mayor al número de bandas. Esto último representa una de las principales desventajas del método ya que los miembros finales no necesariamente corresponden con algún pixel en la imagen, lo que se traduce en deformaciones que aparecen como picos en la distribución espectral de éstos.

Como una contribución a este trabajo de investigación y tomando de referencia este último método, se ha propuesto utilizar la definición de independencia reticular fuerte para derivar un conjunto de vectores SLI directamente desde la imagen, con lo cual no se necesitan construir las memorias W y M . Además, para efectos de conservar la correlación espacial y espectral entre pixeles adyacentes, la búsqueda de vectores con SLI se realiza por vecindades de la imagen. El conjunto de vectores obtenidos con este procedimiento son candidatos a miembros finales y, por tanto, pueden ser identificados con algún espectro de referencia de la biblioteca espectral. Los resultados presentados en el capítulo anterior, ponen de manifiesto que este método es muy apropiado para la detección de miembros finales ya que el ángulo espectral con el espectro de referencia está entre 0.01 y 0.06 radianes. Finalmente, algunas ventajas de este procedimiento son las siguientes. Los miembros finales son determinados a partir de los pixeles de la imagen, los candidatos a miembros finales poseen un alto grado de similitud con algun espectro de referencia de la biblioteca espectral y por consecuencia, al utilizar estos miembros finales para el proceso de inversión, los mapas de abundancia contruidos se apegan al análisis de la distribución de los recursos naturales realizada por la biblioteca espectral USGS. La desventaja del método radica en que, dependiendo del tamaño de las vecindades, es el número de miembros finales que se obtienen en el conjunto de salida, siendo necesario realizar una nueva selección a partir de este conjunto si el número de vectores es superior a $d + 1$ (número de bandas más uno).

6.2. Conclusiones adicionales

Para el algoritmo GG, el valor típico del parámetro α está entre 1 y 2, con lo cual se obtienen de 3 a 12 miembros finales. Este número aumenta conforme se disminuye el valor de α por debajo de este intervalo. De este conjunto de vectores determinados como miembros finales, un máximo de 3 de ellos fueron identificados con el espectro de algún mineral de la biblioteca espectral USGS. Por lo tanto, los mejores resultados se obtienen con los otros dos algoritmos.

Se realizaron diversas pruebas con el algoritmo RGU para determinar si los miembros finales obtenidos correspondían con el espectro de algún pixel de la imagen hiperespectral como es enunciado en [34]; aunque estos miembros finales son escalados, no corresponden con algún pixel en la imagen debido a la alta dimensionalidad de los vectores.

De los algoritmos expuestos en esta investigación el que produce mejores resultados, en base a la selección de los espectros utilizados como miembros finales, es el algoritmo VU ya que el grado de similitud entre el espectro de referencia y el vector es inferior a 0.06 rad. Además, para el caso de Cuprite, con este algoritmo se logró identificar un número mayor de minerales que con los anteriores.

Respecto al procedimiento del cálculo de abundancias, el criterio utilizado ha sido el cálculo de la estimación por mínimos cuadrados sin restricciones, empleando abundancias fraccionales mayores a 0.5 para cada miembro final. Aunque es posible mejorar este cálculo utilizando algún método de optimización, el estudio de estos métodos no está dentro del alcance de este trabajo. Los mapas de abundancia de los recursos naturales que se han obtenido, a través del proceso de inversión, corresponden bien con las imágenes de referencia para Cuprite y Moffett. De esta manera, se ha comprobado que el modelo de mezcla lineal, como la base matemática para representar las mezclas espectrales, es una buena aproximación.

6.2.1. Aportaciones de esta investigación y trabajo futuro

Con la realización de esta tesis se realizaron algunas aportaciones que se describen a continuación. En el capítulo 2 se ha realizado una búsqueda bibliográfica importante para reunir

los elementos que comprenden el proceso de adquisición y análisis de imágenes en el contexto del sensado remoto hiperespectral. En el capítulo 3 se han expuesto, de manera ordenada, las bases matemáticas y las características de las memorias asociativas morfológicas, así como sus principales aportaciones en el área de reconocimiento de patrones. Además, se han reunido diversos elementos derivados del álgebra reticular minimax, tales como los conceptos de independencia morfológica e independencia reticular fuerte, mismos que han sido utilizados en la literatura para aplicaciones de reconocimiento de patrones. En el capítulo 4 se ha estudiado con detalle la base matemática del método basado en independencia morfológica, se ha implementado el algoritmo correspondiente y se han discutido algunos de los resultados obtenidos. Por otra parte, en base a la idea de derivar un conjunto de vectores SLI a partir de las columnas de W_{XX} o M_{XX} , propuesta en [34] se ha implementado el algoritmo RGU. En este capítulo también se ha propuesto un nuevo método para la detección autónoma de miembros finales. En el capítulo 5 se ha realizado una descripción detallada del funcionamiento y características principales del espectrómetro de imagen AVIRIS. Asimismo, se ha descrito con detalle el procedimiento para leer un archivo de datos de reflectancia de este espectrómetro, para obtener la imagen hiperespectral correspondiente. Además, se han reportado los resultados obtenidos para la detección de miembros finales con los algoritmos antes citados. Otra aportación importante en este capítulo consiste en la segmentación de dos imágenes hiperespectrales, con lo cual se ha verificado la funcionalidad del método propuesto.

La dirección del trabajo futuro estará orientada en utilizar algunos métodos de optimización que serán aplicados al proceso de inversión para el cálculo de las abundancias fraccionales. De esta manera, la idea de utilizar estos métodos de optimización es satisfacer las condiciones de que las abundancias deben ser positivas y sumar la unidad, con lo cual se pretende obtener mejores resultados en los mapas de abundancia de los recursos naturales.

6.2.2. Actividades derivadas de esta investigación

En el transcurso de esta investigación, ha sido posible participar en algunos eventos tales como seminarios y conferencias que han dado sustento a este trabajo. Además, como una aportación científica es posible mencionar la participación en el evento Optics & Photonics

2007, a través de una sesión oral y un poster, mismos que han sido publicados en los Proceedings de SPIE. En las siguientes líneas se presenta un resumen de estas actividades.

- Participación en el curso “Remote sensing: an introduction with applications and the use of hyperspectral imagery,” impartido por la Dra. Joan Lurie en el Centro de Investigaciones en Óptica, León Guanajuato, septiembre 2006.
- J.C. Valdiviezo Navarro y G. Urcid Serrano, “Imágenes hiperespectrales y memorias autoasociativas morfológicas,” 7^o *Encuentro de Investigación*, INAOE, pp. 76a-76d, noviembre 2006.
- Participación en el Seminario del grupo de Instrumentación con el tema “Imágenes hiperespectrales en sensado remoto,” INAOE, noviembre 2006.
- Participación en el Seminario del grupo de Instrumentación con el tema “Detección de miembros finales basada en independencia reticular fuerte,” INAOE, mayo 2007.
- G. Urcid-S. and J. C. Valdiviezo-N., “Generation of lattice independent vector sets for pattern recognition applications,” *SPIE Proc.: Mathematics of Data/Image Pattern Recognition, Compression, Coding, and Encryption X, with Applications*, **6700-12**, San Diego CA, 2007.
- J. C. Valdiviezo-N. and G. Urcid-S., “Hyperspectral endmember detection based on strong lattice independence,” *SPIE Proc.: Applications of Digital Image Processing XXX*, **6696-72**, San Diego CA, 2007.

Bibliografía

- [1] Aviris, JPL. “AVIRIS home page.”, <ftp://www.aviris.jpl.nasa.gov> (1997).
- [2] JPL. Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer, “ASTER home page.”, <ftp://www.speclib.jpl.nasa.gov> (2002).
- [3] Banninger C., Johnson L., Peterson D., “Determination of biochemical changes in conifer canopies with airborne visible/infrared imaging spectrometer (AVIRIS) data,” *SPIE Recent Advances in Remote Sensing and Hyperspectral Remote Sensing*, **2318**, pp. 1–9, (2000).
- [4] Banwell C.N., “Fundamentos de espectroscopía molecular,” Ediciones del Castillo, S.A., Madrid, España, pp. 4–11 (1997).
- [5] Beer R., “Remote sensing by fourier transform spectroscopy,” John Wiley and Sons, Inc., pp. 44-46, 52-54, 130–133 (1992).
- [6] Clark G. L. “The encyclopedia of spectroscopy,” Reinhold Publishing Corporation, pp. 1–7 (1960).
- [7] Cuninghame-Green R., “Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour,” *Oper. Research Quart.*, pp. 95–100 (1962).
- [8] Cuninghame-Green R., “Minimax algebra and applications,” *Advances in Imaging & Electron Physics*, **90**, P. Hawkes , Academic Press, New York NY, pp. 1–121, (1995).
- [9] Campbell J.B., “Introduction to remote sensing,” The Guilford Press, New York NY, pp. 413–421, (2007).

-
- [10] Egan W.G., “Optical remote sensing,” Marcel Dekker, Inc., Queens, NY, pp. 394–395 (2004).
- [11] Farrand W.H., “Hyperspectral remote sensing of land and the atmosphere,” *Encyclopedia of Modern Optics*, **1**, pp. 395–403 (2005).
- [12] Fausett L., “Fundamentals of neural networks. architectures, algorithms, and applications,” Prentice Hall, Florida, USA, pp. 7–11 (1994).
- [13] Gat N., Subramanian S., “Spectral imaging: technology and applications,” *Hyperspectrum News Letter*, **3** (1997).
- [14] Geological Survey, US. “US Geological Survey home page.”, <ftp://www.usgs.gov> (2006).
- [15] Gonzalez R.C., Woods R.E., “Digital image processing,” Pearson Education, pp. 331, 567–569 (2002).
- [16] Graña M., Raducanu B., “Increasing the robustness of heteroassociative morphological memories for practical applications” *Proc. 6th Int. Symp. on Mathematical Morphology*, Sidney, Australia, pp. 379–388 (2002).
- [17] Graña M., Gallego J., “Hyperspectral image analysis with associative morphological memories,” *IEEE*, **7803**, pp. 549–552 (2003).
- [18] Graña M., Maldonado O. & Vicente D., “Morphological independence and hyperspectral image indexing,” *SPIE Math. Meth. in Pat. and Image Anal.*, **5916**, pp. 1–10 (2005).
- [19] Graña M., Sussner P., Ritter G., “Innovative applications of associative morphological memories for image processing and pattern recognition,” *Mathware & Soft Computing*, **10**, pp. 155–168 (2003).
- [20] Gualtieri, J.A., Chettri S., “Support vector machines for classification of hyperspectral data,” *Proc. Geosci. Rem. Sens. Symp.*, IGARSS, **2**, pp. 813–815 (2000).
- [21] Guenther R., “Modern optics,” John Wiley and Sons, pp. 61–67 (1990).

-
- [22] Hecht E., “Óptica,” Addison Wesley, pp. 86–124 (2000).
- [23] Hopfield J.J. “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities,” *Proc. of the National Academy of Sciences*, pp. 2554–2558 (1982).
- [24] Huebshman M.L., Schultz R.A., Garner H.R., “Hyperspectral imaging,” *Encyclopedia of Modern Optics*, **1**, pp. 134–143 (2005).
- [25] Ifarraguerri A., Chang C.-I., “Multispectral and hyperspectral image analysis with convex cones,” *IEEE Trans. Geos. Rem. Sensing*, **37**(2), pp.756–770 (1999).
- [26] Keshava N., “A survey of spectral unmixing algorithms,” *Lincoln Laboratory Journal*, **14**, No. 1, pp. 55–74 (2003).
- [27] Keshava N., Boetcher P. “On the relationship between physical phenomena, distance metrics and best bands selections in hyperspectral processing,” *Proc. SPIE Alg. for Multi., Hyper., and Ultra. imagery VII*, **4381**, pp. 55-67 (2001).
- [28] Kramer H.J., “Observation of the Earth and its environment: survey of missions and sensors,” *Article by eoPortal.org*, (2004).
- [29] Merton R.N., *Multi-temporal analysis of community scale vegetation stress with imaging spectroscopy*, Ph.D. Thesis, Geography Department, University of Auckland, New Zealand (1999).
- [30] More K.A., “Spectrometers,” *Encyclopedia of Modern Optics*, **1**, pp. 324–336 (2005).
- [31] Myers D.S., *Hyperspectral Endmember Detection using Morphological Autoassociative Memories*, Master Thesis, University of Florida, Gainesville Fl, 2005.
- [32] Reeves R.G., Anson A., Landen D., “Manual of remote sensing,” American Society of Photogrammetry, E.U., **1**, pp. 27-34 (1975).
- [33] Ritter, G.X. “Image algebra with applications.” Unpublished manuscript, available via anonymous ftp://cis.ufl.edu./pub/src/ia/documents (1994).

-
- [34] Ritter, G.X. & Gader P. “Fixed point of lattice transforms and lattice associative memories,” *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. Hawkes ed. **144**, Elsevier, San Diego, CA. pp.165–242 (2006).
- [35] Ritter, G.X., Sussner, P., & Diaz de León J.L., “Morphological associative memories,” *IEEE Trans. on Neural Networks*, **9**, No. 2, pp. 281–293 (1998).
- [36] Ritter, G.X., Urcid, G., & Iancu, L. “Reconstruction of patterns from noisy inputs using morphological associative memories,” *Jour. of Math. Imag. and Vis.*, **19**, pp. 95–111 (2003).
- [37] Ritter G.X., Wilson J.N. “Handbook of computer vision algorithms in image algebra,” CCR Press Inc., Florida, E.U., pp. 289-308 (1996).
- [38] Shippert P., “Hyperspectral vs Multispectral,” *Tutorial by Geoplace, Inc.* (2006).
- [39] Simpson P.K., “Foundation of neural networks,” *Artificial Neural Networks. IEEE Press.*, pp. 3–24 (1992).
- [40] Smeulders A.W.M., Worring M., Santini S., Gupta A., Jain R., “Content-based Image Retrieval at the End of the Early Years,” *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intel.*, pp. 1349–1380 (2000).
- [41] Smith R.B., “Introduction to hyperspectral images,” *Tutorial by Microimages, Inc.*, Lincoln, NE, (2001).
- [42] Smith R.B., “Introduction to remote sensing,” *Tutorial by Microimages, Inc.*, Lincoln, NE, (2001).
- [43] Spencer C.H., “Using hyperspectral imagery to create GIS layers,” *Federal Institute for Geosciences and Natural Resources*, Hannover, Germany (1995).
- [44] Urcid-S. G. and Valdiviezo-N. J.C., “Generation of lattice independent vector sets for pattern recognition applications,” *SPIE Proc.: Mathematics of Data/Image Pattern Recognition, Compression, Coding, and Encryption X, with Applications*, **6700**-12, San Diego CA, 2007.