



**INAOE**

# **Campos ópticos singulares en la investigación de aberraciones de frente de onda y su aplicación a la óptica visual**

por

**Lic. en Fis. Jesús Emmanuel Gómez Correa**

Tesis sometida como requisito parcial  
para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Agosto 2011

Tonantzintla, Puebla

**Supervisada por:**

**Dr. Sabino Chávez-Cerda**

**Investigador Titular “C” del INAOE**

©INAOE 2011

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en partes mencionando la fuente.



# *Dedicatoria*

*Para mi papá y mi mamá*

*Macario Gómez Estrada: Por ser el mejor papá de todo el universo y enseñarme a ser el hombre que soy hasta el día de hoy. Porque gracias a sus consejos de todos los días, cariño, dedicación, caricias y sobre todo por su amor he logrado cumplir mis metas y sueños que me he propuesto. Papá Te Amo como no tienes idea.*

*Victoria Mercedes Correa Alonso: Por ser la mejor mamá de todo el universo y llevarme de la mano día a día sin importar que sucediera y por comprenderme durante toda mi vida. Gracias a sus caricias, por cuidarme, por aconsejarme y por buscar mi bienestar, pero sobre todo por su gran amor. Mamá Te Amo como no tienes idea.*

# *Agradecimientos*

*Anel Garza Rivera: Simplemente muchas Gracias por todo. Gracias por compartir tristezas y alegrías conmigo. Gracias por estar ahí cuando más lo necesitaba. Gracias por ser como eres. Gracias por aconsejarme, apoyarme y estar al pendiente de mi durante más de un año, pero sobre toso muchas gracias por demostrarme cuanto me quieres. Sabes algo???. . . Te quiero demasiadisimo. Recuerda la vida es una canción de la forma TA y hay q vivirla de la misma forma. De nuevo Muchas Gracias por absolutamente todo.*

*A mis hermanas:*

*Conchi y Blanca: Por hacerme la vida más feliz y estar conmigo cuando más las he necesitado. Por apoyarme cada día que pasa y darme ánimos para seguir adelante. Por quererme y amarme tanto. Las Adoro y las Amo hermanitas.*

*A mis hermanos:*

*Sergio y Arcenio: Por considerarme su hermano aunque sea su cuñado, por divertírnos y disfrutar de la vida con muchas sonrisas y sobre todo por quererme tanto. Los quiero demasiado hermanitos.*

*A mis sobrinos:*

*Cheito, Katy, Karol, Arcenito y Ale: Por ser mi alegría de todos los días y compartir hermosos momentos a mi lado y por demostrarme cuanto me quieren cada día que pasa. Los adoro como no tienen idea.*

*A mis amigos:*

*Juan Pablo Treviño (JP):* Porque gracias a su ayuda esta tesis fue posible, porque sin él simplemente hubiera sido más complicado terminarla. Gracias mi buen JP.

*Juan Carlos:* Gracias por las largas horas que hemos pasado riéndonos y disfrutando de la vida. Gracias mi estimado Juan Carlos.

*Sergio Mejia (Serch) y Barbara Lechuga (Barbie):* Por divertirnos tanto y pasar varias horas riéndonos, por su apoyo y sinceridad, por la gran compañía que me han dado y por su gran amistad Los quiero muchísimo.

*Margarita Flores (Maqui):* Por ser mi mejor amiga de toda mi vida, por estar ahí cuando te necesito, por estar al pendiente de mi siempre sin importar que suceda y por quererme tanto. Gracias Maqui. Te quiero muchísimo.

*Juan Martínez (Juanito):* Gracias a tus consejos como amigo y a las discusiones de las dudas de mi tesis me ayudaste demasiado. Gracias mi estimado Juanito.

*Dra. Sandra Balderas (Sandrita):* Por reírnos de cualquier cosa, por ayudarme, aconsejarme y por ser una de mis mejores amigas de una buena parte de mi vida. Gracias Sandrita y aquí sabes muy bien que tienes a un muy buen amigo.

*Julio García y Karla Sánchez:* Gracias por dejarme compartir mis ocurrencias, alegrías y tristeza con ustedes. Muchas Gracias a los dos y les deseo lo mejor en esta nueva etapa que empezaron en abril.

*Marco Canchola: Por darme tu apoyo cada día y por compartir muy buenos momentos conmigo y hacerme sentir que tengo un muy buen amigo de verdad. Gracias viejo y arre.*

*Javier Caldera (Xavy): Gracias por compartir alegrías, tristezas y muy buenos momentos, apoyarme y darme ánimos siempre. Muchas Gracias viejito.*

*Sonia Tecuatl (Sony) y Fabiola Tecuani (Faby): Por ser mis amigas y consejeras durante estos dos años de maestría. Te quiero Faby. Te quiero Sony.*

*Christian Alarcón (Chris): Por apoyarme cuando más lo necesité. Muchas Gracias.*

# *Agradecimiento Especial*

*Dr. Sabino Chávez-Cerda: Muchas gracias porque sin usted esta tesis no hubiera sido posible y por tenerme la confianza al trabajar con usted. Muchas Gracias por la dedicación y paciencia al enseñarme muchas cosas relacionadas a lo ciencia y por los consejos que me ha dado para tener una vida mucho mejor. Muchas Gracias por darme la oportunidad de trabajar y aprender de usted cada día que pasa. Realmente le agradezco todo lo que ha hecho por mí y espero algún día llegar a tener el éxito que ha tenido en el área de la óptica. Muchas Gracias Dr. S. Chávez-Cerda.*

## Resumen

En este trabajo, utilizando el trazado de rayos exactos se calculan las cáusticas de reflexión (catacáusticas) y las de refracción (diacáusticas) para diferentes arreglos iluminados por una fuente puntual alejándose hasta infinito. Se determina el frente de onda asociado a cada una de las cáusticas respectivas y se estudia el patrón formado por su propagación (cáusticas de propagación) usando la ecuación paraxial de onda. Al perturbar el frente de onda con aberraciones y caracterizar los cambios a las cáustica de propagación permite entender los efectos causados por las aberraciones en la imagen de la función punto extendido.

### **Abstract**

Using an exact ray tracing, we study the diacaustics and catacoustics that are created by refraction and reflection at different surfaces illuminated by a point source at different positions. From the corresponding bundle of rays the associated wavefronts are constructed. Once the wavefronts are created their propagation are studied using the wave equation showing the formation of the caustics. We present the corresponding results for conic surfaces and a gradient index slab. We present results for paraxial and non-paraxial cases.

Campos ópticos singulares en la investigación de  
aberraciones de frente de onda y su aplicación a  
la óptica visual

Lic. en Fis. Jesús Emmanuel Gómez Correa

16 de julio de 2013



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Conceptos fundamentales de óptica y aberraciones</b>	<b>7</b>
2.1. Conceptos de óptica geométrica . . . . .	7
2.1.1. Trazo de rayos paraxial y Trazo de rayos exacto (no paraxial)	8
2.2. Cásticas . . . . .	9
2.2.1. Catacástica . . . . .	9
2.2.2. Diacástica . . . . .	17
2.3. Conceptos de óptica ondulatoria . . . . .	21
2.3.1. La lente como una transformadora de fase . . . . .	21
2.3.2. Formación de imágenes . . . . .	23
2.4. Difracción . . . . .	24
2.4.1. Teorema de Green . . . . .	25
2.4.2. El Teorema Integral de Helmholtz y Kirchhoff . . . . .	25
2.4.3. La fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff . . . . .	26
2.4.4. Fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld . . . . .	27
2.4.5. Principio de Huygens y Principio de Huygens-Fresnel . . . . .	28
2.4.6. Difracción de Fresnel . . . . .	29
2.4.7. Difracción de Fraunhofer . . . . .	30
2.5. Conceptos fundamentales de aberraciones . . . . .	32
2.5.1. Aberración esférica . . . . .	34

2.5.2. Distorsión ocasionada por la aberración esférica . . . . .	35
2.5.3. Coma . . . . .	38
2.5.4. Astigmatismo . . . . .	40
2.5.5. Curvatura de campo . . . . .	41
2.5.6. Tilt . . . . .	42
<b>3. Medición de aberraciones</b>	<b>44</b>
3.1. Función de Punto Extendido (PSF) . . . . .	44
3.1.1. Ejemplos de la PSF utilizando los coeficientes de Zernike .	46
3.2. Función de Transferencia Óptica (OTF) . . . . .	48
3.3. Función de Transferencia de Modulación (MTF) y Función de Trans- ferencia de Fase (PTF) . . . . .	49
<b>4. Propagación de aberraciones</b>	<b>51</b>
4.1. Normalización . . . . .	51
4.2. Aplicaciones a la óptica visual . . . . .	53
4.2.1. Curvatura de campo . . . . .	57
4.2.2. Aberración esférica . . . . .	60
4.2.3. Astigmatismo . . . . .	62
4.2.4. Coma . . . . .	64
4.2.5. Tilt . . . . .	67
4.2.6. Construcción del frente de onda asociado a las cáusticas y propagación del frente de onda obtenido . . . . .	70
4.3. Lente GRIN . . . . .	82
<b>5. Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Algunas leyes de la óptica son conocidas desde hace varios siglos, por ejemplo, los Griegos tenían conocimiento de la ley de reflexión, pero a pesar de que existía cierto conocimiento sobre las propiedades ópticas no pudieron entender totalmente la naturaleza del ojo. Actualmente lo podemos considerar como un sistema óptico, es decir, se puede aplicar el conocimiento que se tiene de la óptica geométrica y la ondulatoria para estudiarlo.

Si consideramos que la Óptica Visual es el estudio de las propiedades ópticas del ojo y la vista [1] y que en la actualidad se tiene un conocimiento más amplio sobre los fenómenos ópticos, es posible entender de una forma más precisa el funcionamiento del ojo.

Es interesante pensar que el ojo tiene una baja calidad para formar imágenes comparadas con el sistema de una cámara fotográfica [2] debido a que con él observamos las imágenes del mundo exterior, esto nos lleva a preguntarnos ¿cuál es la calidad de las imágenes que podemos observar como seres humanos?, esta pregunta es demasiado difícil contestarla, pero con los avances que se tienen día a día en el área de la óptica podemos contestarla poco a poco.

Hasta el momento se ha dicho la importancia de estudiar el ojo como un sistema óptico, entonces de aquí surge la pregunta ¿qué rama de la óptica nos

dará mayor información para entender el ojo: la óptica geométrica o la óptica física?, para saber cual nos llevaría a tener mayor información en esta tesis se trabajó con ambas ramas y llegamos a la conclusión que uniendo las dos ramas obtenemos una mayor comprensión del comportamiento del ojo humano.

Utilizando el concepto de cáusticas o también llamadas campos ópticos singulares, los cuales, simplemente nos representa zonas de alta irradiancia [3], se pudo tener una mayor visualización de las aberraciones del ojo utilizando los rayos geométricos en esta tesis. Se determina el frente de onda asociado a cada una de las cáusticas respectivas y se estudia el patrón formado por su propagación usando la ecuación paraxial de onda. Al perturbar el frente de onda con aberraciones y caracterizar los cambios a las cáusticas de propagación permite entender los efectos causados por las aberraciones en la imagen de la función punto extendido.

En este trabajo, partimos en el segundo capítulo con los conceptos básicos del trazado de rayos paraxial y el trazado de rayos exacto, con los cuales, notaremos que solamente es necesario aplicar la ley de Snell o la ley de reflexión y considerar las inclinaciones correspondientes a cada rayo para generar el trazado de rayos deseado. Una vez descritos los conceptos de el trazado de rayos exacto, se calculan las cáusticas de reflexión (catacáusticas) y las de refracción (diacáusticas) para diferentes arreglos iluminados por una fuente puntual alejándose del arreglo hasta infinito. Consideraremos conceptos de óptica ondulatoria para observar la importancia de una lente como transformadora de fase. Este capítulo es finalizado haciendo un análisis de las aberraciones de Seidel desde el punto de vista de la óptica geométrica y de la óptica ondulatoria.

En el capítulo 3 se explican la Función de Punto Extendido (PSF), la Función de Transferencia Óptica (OTF), la Función de Transferencia de Modulación (MTF) y la Función de Transferencia de Fase (PTF), las cuales, son los métodos de medición de las aberraciones que son más usados en la óptica visual. Se encontrarán ejemplos de la PSF y de la MTF aplicados a una pirámide de polinomios de Zernike.

En el capítulo 4 utilizando el concepto de la lente como transformadora de fase se perturba el frente de onda incidente con alguna de las aberraciones de Seidel para caracterizar los cambios a las cáustica de propagación. Se determina el frente de onda asociado a cada una de las catacáusticas y diacáusticas respectivas y se estudia el patrón formado por su propagación. En la última sección del capítulo 4 se comprenderá la importancia de que el frente de onda de las diacáusticas a pesar de ser parábolas tengan una corrección de cuarto orden. La corrección implica que se tiene una aberración de tipo esférica, este hecho lleva a considerar que la aproximación paraxial introduce este tipo de aberración desde un principio. Este fenómeno fue identificado al comparar la cáustica de propagación con la diacáustica que generó el frente de onda. También se pudo concluir que una superficie elíptica con el semieje mayor ubicado en el eje horizontal introduce una aberración esférica mucho menor comparada con una superficie de elíptica con el semieje mayor en el eje vertical.

# Capítulo 2

## Conceptos fundamentales de óptica y aberraciones

### 2.1. Conceptos de óptica geométrica

En la óptica geométrica, se entiende que la luz viaja separándose de su fuente a lo largo de líneas rectas llamadas rayos. El rayo es entonces simplemente el paso a lo largo del cual la energía de la luz se transmite de un punto a otro en un sistema óptico [4]. La propagación de un haz luminoso en un sistema óptico puede ser descrita considerando la trayectoria de los rayos y aplicando las leyes de reflexión y refracción a cada una de las componentes de dicho sistema, este análisis es puramente de carácter geométrico y se le conoce con el nombre de trazo de rayos. Se puede elegir estudiar el sistema óptico tomando en cuenta la aproximación paraxial de los rayos con respecto al eje óptico o despreciando esta aproximación, en el primer caso hablamos del trazo de rayos paraxial y en el segundo de un trazo de rayos exacto [5], [6].

### 2.1.1. Trazo de rayos paraxial y Trazo de rayos exacto (no paraxial)

En un sistema de coordenadas planas la inclinación de cada rayo está dada por  $\sin(\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forma el rayo con respecto al eje óptico. Ahora si consideramos que  $\sin(\theta) \approx \theta$  se habla en óptica geométrica de rayos paraxiales. La aproximación paraxial es también llamada óptica Gaussiana u óptica de primer orden [6],[7].

En nuestro caso es necesario utilizar el trazado de rayos no paraxial, debido a que, estamos interesados en explicar las aberraciones producidas por cierto objeto de transmisión llamada lente.

Si Consideramos un rayo que se está propagando en un medio de índice de refracción  $n_i$  y en su trayectoria atraviesa una superficie con un medio de índice de refracción  $n_t$  en el cual incide formando un ángulo  $\theta_i$  y se transmite con un ángulo  $\theta_t$  con respecto a la normal de la superficie en un punto dado, entonces podemos deducir la ley de Snell [8], representada por

$$n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t) \quad (2.1)$$

y si consideramos que la superficie es reflectora ,  $n_i = n_t$  y obtenemos la ley de reflexión

$$\theta_i = \theta_t$$

Dadas la ley de Snell, la ley de reflexión y considerando las inclinaciones correspondientes a cada rayo, se puede generar un conjunto de rayos que forman cáusticas de cualquier superficie refractora o reflectora.

## 2.2. Cáusticas

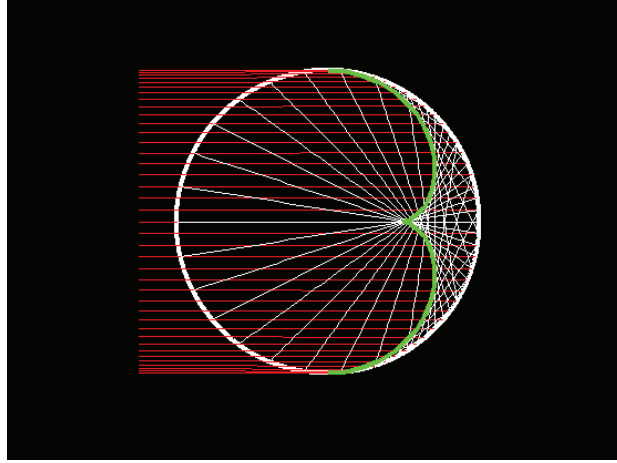
Un conjunto de rayos de luz que inciden sobre una superficie son reflejados o refractados como lo indica la ley de la reflexión y la ley de Snell respectivamente. Una vez que los rayos son reflejados o refractados se interceptarán entre ellos, el conjunto de estas intercepciones determinarán una envolvente, como una concentración de luz formando una curva, dicha curva es conocida como Cáustica [3],[9],[10],[11],[12]. La cáustica que es formada por reflexión se denomina Catacáustica y la que es formada por refracción es la Diacáustica.

Dada la definición de cáustica estudiaremos este modelo por medio del trazado de rayos aplicando solamente la ley de reflexión o de Snell para obtener la dirección de los rayos reflejados y transmitidos. Más adelante se explicarán las cáusticas obtenidas por el método de propagación de un haz.

### 2.2.1. Catacáustica

Una de las cáusticas más conocidas son las que se generan al hacer incidir sobre una superficie circular un conjunto de rayos que provienen de infinito, es decir, inciden paralelos al eje óptico (línea imaginaria que pasa por los centros de los elementos del sistema óptico y es perpendicular al plano imagen), a la catacáustica formada se le conoce como nefroide [10] como lo representa la línea verde en la figura (2.1).





**Figura 2.1:** Catacáustica de un círculo con rayos incidentes de infinito. La curva verde es llamada nefroide.

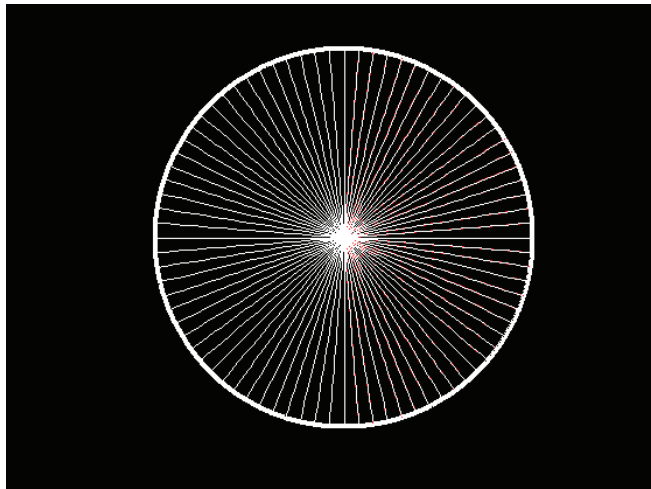
Las ecuaciones de la envolvente que define la cáustica [10], la cual, se ha denominado como nefroide están dadas por

$$x = \cos(\theta) - \frac{1}{2} \cos(\theta) \cos(2\theta) \quad (2.2)$$

$$y = \sin(\theta) - \frac{1}{2} \cos(\theta) \sin(2\theta) \quad (2.3)$$

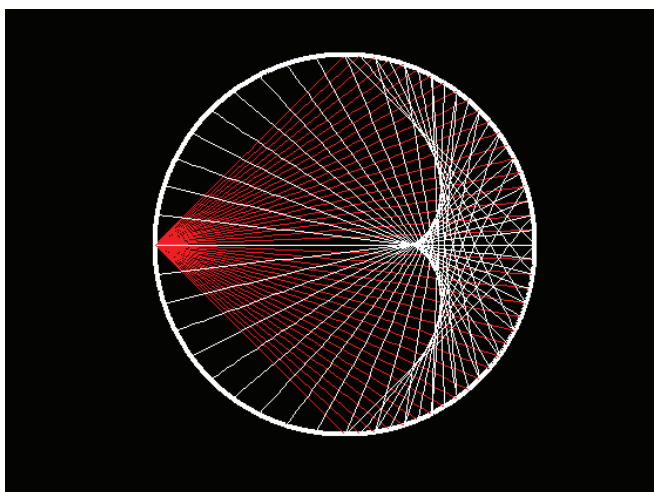
Estas ecuaciones son de mucha importancia debido a que la densidad de las intercepciones de los rayos reflejados es mayor cerca de la envolvente. Si aumentamos el número de rayos la cáustica será más visible.

Al colocar la fuente puntual a diferentes distancias la cáustica ya no estaría definida por la curva nefroide, por ejemplo, si colocamos la fuente puntual en el origen los rayos reflejados tomarían la trayectoria de las normales a la circunferencia, es decir, el rayo reflejado tiene la misma trayectoria que el rayo incidente y el ángulo de reflexión sería igual a 0, como lo muestra la figura(2.2).



**Figura 2.2:** Fuente colocada en el centro del círculo.  
Los rayos se reflejan en la misma dirección en la  
cual incidieron.

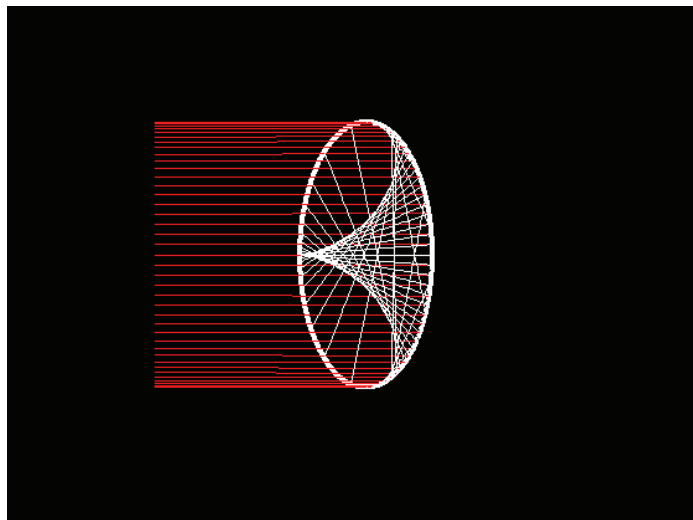
En la figura (2.3) podemos observar que cuando la fuente puntual es colocada sobre la superficie generará una cáustica en la cual los rayos reflejados en la frontera, es decir, en  $\frac{\pi}{2}$  hasta aproximadamente a  $\frac{\pi}{4}$ , son de una forma más plana que la nefroide que proviene de infinito. Esto nos lleva a deducir que cada vez que acercamos más la fuente puntual al origen la cáustica se vuelve más plana, es decir, va perdiendo la forma de la curva neforide.



**Figura 2.3:** Catacáustica de un círculo con la fuente puntual colocada sobre el eje horizontal y sobre la superficie del círculo.

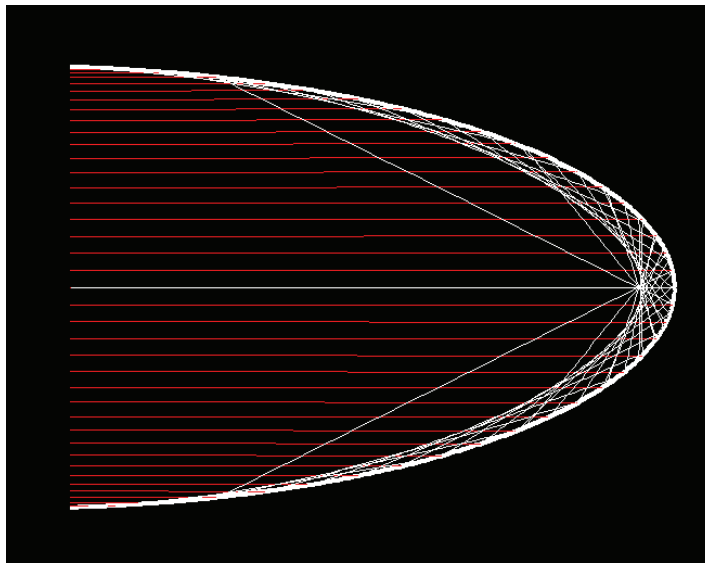
En esta tesis trabajaremos con cuatro tipos de curvas para ejemplificar las cáusticas, una de ellas es la circunferencia, la cual ya fue explicada, la parábola, la hipérbola y la elipse que genera cáusticas muy parecidas a la nefroide. Dependiendo de la proporción de los semiejes de la elipse y la posición de la fuente puntual es la forma que tomará la cáustica.

Como ejemplo tenemos las causticas de dos elipses, una con el semieje-mayor en el eje vertical y la otra ubicada en el eje horizontal. Se puede observar en la figura (2.4), que cuando tenemos el semieje-mayor en forma vertical se genera una caustica en forma de nefroide con el centro más prolongado.



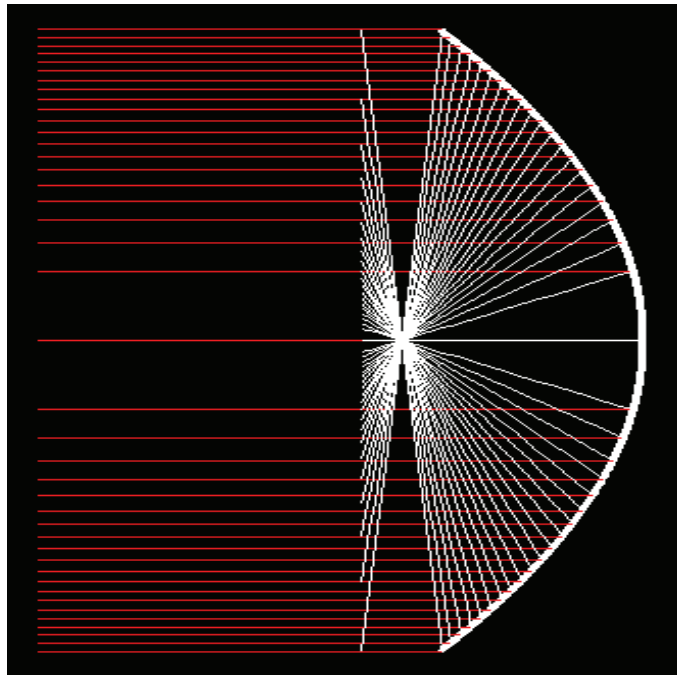
**Figura 2.4:** Catacáustica de una elipse con el semieje mayor en eje vertical. Los rayos inciden de infinito.

Cuanto el semieje-mayor está en forma horizontal se genera una cáustica donde el centro no es muy prolongado como en la cáustica de la elipse con el semieje mayor en el eje vertical, figura (2.5). Dicho esto, se puede describir la cáustica del círculo como un caso particular de la elipse.



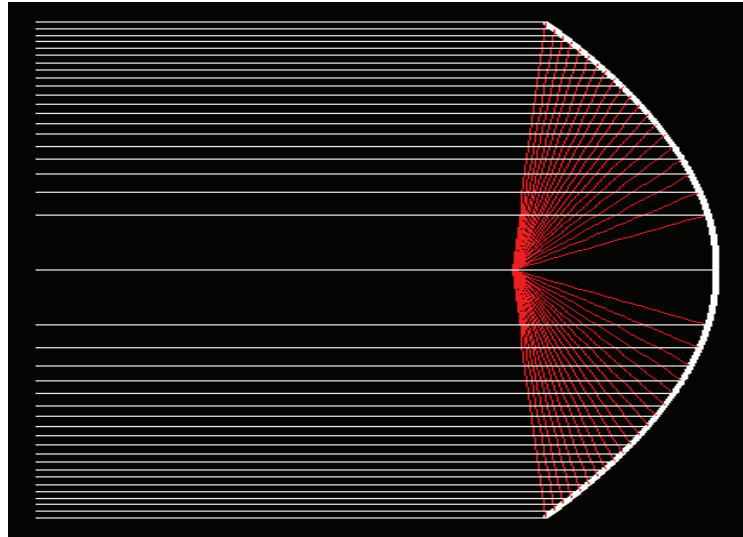
**Figura 2.5:** Catacáustica de una elipse con el semieje mayor en el eje horizontal. Los rayos incidentes provienen de infinito.

La parábola tiene una propiedad muy significativa, la cual es que todos los rayos incidentes provenientes del infinito se reflejan pasando por el foco, consideremos un foco  $q$  está fuera de la parábola para que se observe bien dicho efecto, como lo muestra la figura (2.6).



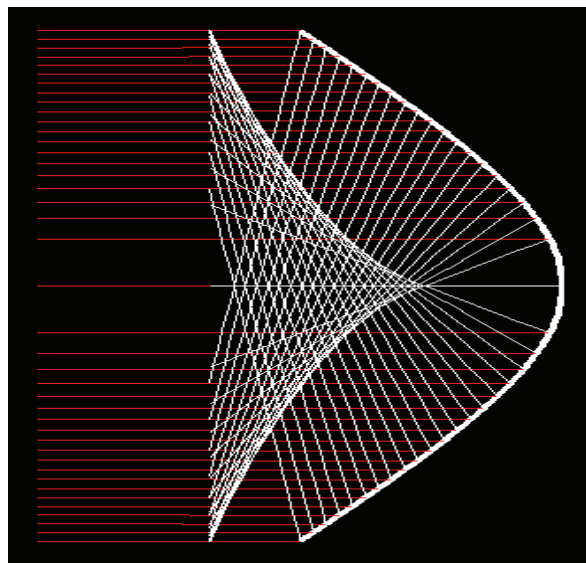
**Figura 2.6:** Los rayos incidentes provenientes del infinito se reflejan pasando por el foco.

El caso simétrico es cuando colocamos la fuente de los rayos incidentes en el foco de la parábola, esto lo que genera es que los rayos reflejados no se intercepten y se propaguen hasta el infinito, figura (2.7).



**Figura 2.7:** Cuando la fuente puntual se coloca en el foco de la parábola se reflejan a paralelos al eje óptico.

Observemos que la hipérbola sería un caso muy especial, dado que, la cáustica que genera es casi igual a la parte central de la cáustica de un círculo, pero en vez de formarse el pico central de la superficie a un plano se forma de un plano hacia la superficie, es decir, el pico está invertido, figura (2.8).



**Figura 2.8:** Catacaústica de una hipérbola.

### 2.2.2. Diacáustica

Durante toda la sección de cáusticas se ha hablado de catacáusticas, ahora, nos permitiremos hablar de diacáusticas. Sabemos que el ojo es un sistema dióptrico (sistema formado por superficies refractivas), por tanto, las diacáusticas son de igual y en algunos casos de mayor importancia que las catacáusticas.

Igual que en las catacáusticas las diacáusticas estudiadas estarán dadas por la elipse, la circunferencia, la parábola y la hipérbola. En esta subsección es importante mencionar que en las diacáusticas no existe el fenómeno de la reflexión interna total, dado que, este fenómeno solo se produce cuando el índice de refracción del segundo medio donde se transmite la onda es menor que el primer medio.

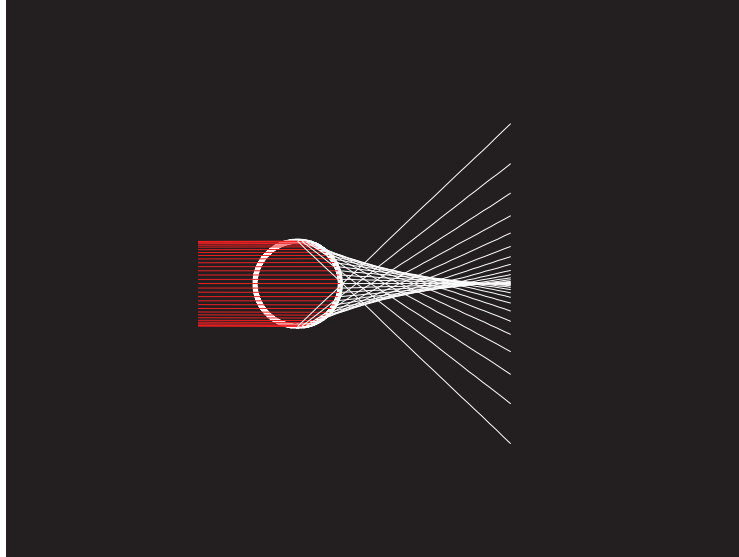
Supongamos que el índice de refracción donde provienen los rayos incidentes lo llamamos  $n_1$  y el segundo medio, en el cual, se transmite los rayos incidentes lo consideramos  $n_2$ , entonces, la condición para que existe la reflexión interna total es que  $n_1 > n_2$  y en el caso del ojo humano  $n_2 > n_1$ , por lo tanto, dicho fenómeno no puede ser posible [8].

Es importante mencionar que consideraremos un índice de refracción igual a 1 en el lado donde inciden los rayos y un índice de 1.38 después de la curva, esto es debido a que el índice de refracción del ojo humano en promedio tiene un valor de 1.38 y nosotros estamos interesados en observar las aberraciones del ojo.

Observemos que el comportamiento que tendremos de las diacáusticas no es igual al comportamiento de las diacáusticas formada por una lente, dado que en nuestros cálculos solo consideramos una interface y en una lente tendríamos que considerar dos interfaces.

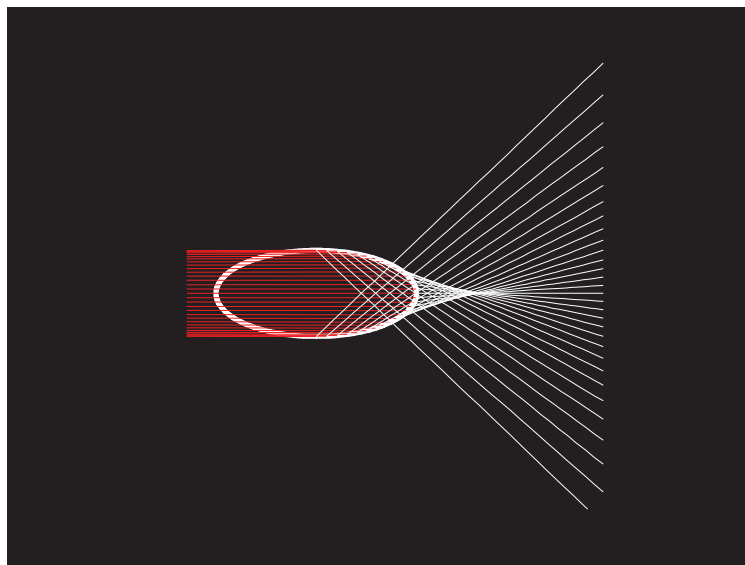
La cáustica de refracción para una circunferencia está dada como lo muestra la figura (2.9), aquí podemos ver que esta diacáustica tiene una forma como la parte central de la nefroide. En la siguiente sección se explicará porqué este resultado es de gran importancia.





**Figura 2.9:** Diacáustica de un círculo.

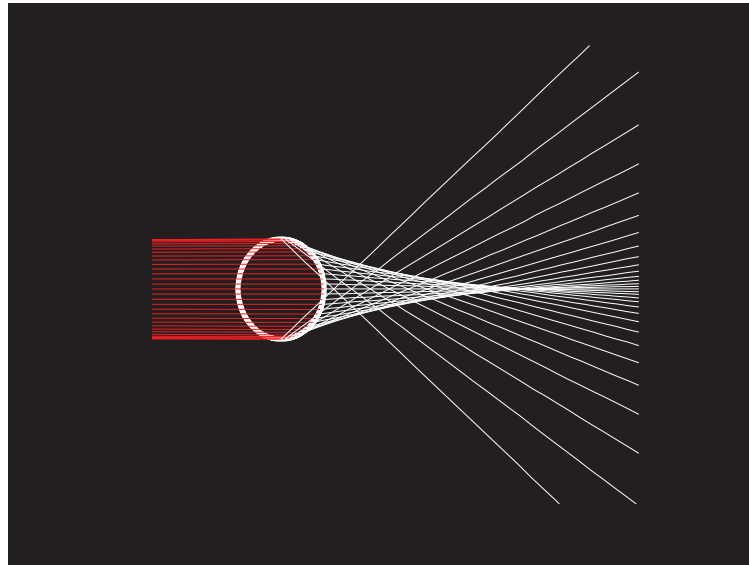
En el caso de las diacáusticas producidas por una interfase elíptica se utilizarán los mismos ejemplos que en las catacáusticas. La figura (2.10) nos representa la diacáustica cuando el semieje-mayor de la elipse está en el plano horizontal



**Figura 2.10:** Diacáustica de una elipse con el semieje mayor en el eje horizontal.

y la figura (2.11) es la diacáustica cuando se encuentra el semieje-mayor el el

plano vertical.

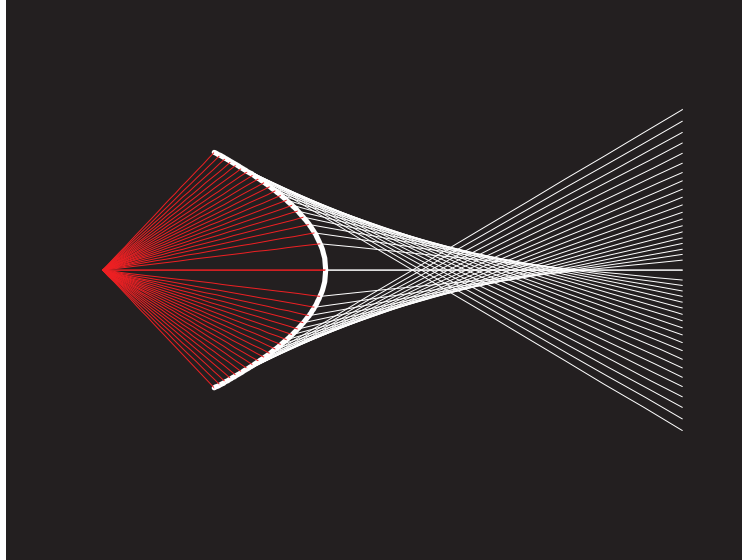


**Figura 2.11:** Diacústica de una elipse con el semieje mayor en el eje vertical.

Observemos que igual que en la circunferencia tienen una forma similar a la parte central de la nefroide pero en el primer caso es más corta que en el segundo.

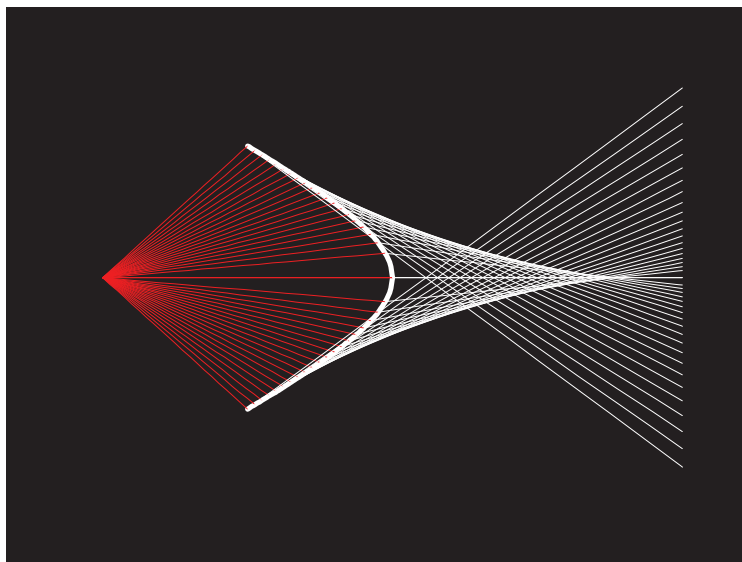
La diacústica en el caso de la parábola y la hipérbola tienen la misma estructura que el círculo y la elipse, con el pequeño detalle que entre más se aleje la fuente puntual más se alejarán las intercepciones, por este motivo en la figura (2.12) y (2.13) la fuente puntual no proviene de infinito.

Para la parábola, tenemos la siguiente imagen



**Figura 2.12:** Diacústica de una parábola. Los rayos no provienen de infinito.

y para la hipérbola



**Figura 2.13:** Diacústica de una hipérbola. Los rayos no inciden desde infinito.

## 2.3. Conceptos de óptica ondulatoria

En el siglo XVII surge la teoría ondulatoria debido a la observación del fenómeno de difracción, pero esencialmente esta teoría es un hecho cuando en 1865 James Clerk Maxwell publica un trabajo titulado "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field"[13], en el cual predecía que existían ondas electromagnéticas propagantes y para mayor sorpresa la luz se define como una onda del mismo tipo. El trabajo de Maxwell originalmente consistía en veinte ecuaciones donde describía por completo todos los fenómenos electromagnéticos. El primero en expresar estas ecuaciones en forma vectorial fue Oliver Heaviside [14]. Mientras tanto la forma actual de las ecuaciones dadas por Maxwell fueron dadas por Willard Gibbs [15] gracias al análisis vectorial.

Utilizando las ecuaciones de Maxwell y considerando ondas continuas cuya dependencia temporal es de la forma  $\exp(i\omega t)$  podemos deducir la ecuación diferencial de Helmholtz

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0 \quad (2.4)$$

donde  $E(r)$  es un campo escalar y  $k$  es el número de onda.

Al resolver esta ecuación se obtendrán ondas electromagnéticas en las cuales su geometría de frente de onda dependen de la geometría del sistema de coordenadas utilizado.

### 2.3.1. La lente como una transformadora de fase

En la sección 2.1.1 se explicó como se hace el trazado de rayos paraxial y el exacto incidiendo sobre una lente, ahora veremos como se comportará una lente si en vez de considerar que la luz incide en forma de rayos (óptica geométrica) consideramos que inciden en forma de ondas (óptica ondulatoria).

Consideremos que una onda plana incide sobre una lente positiva, esta generará un retraso en la fase de la onda la cual estará dada por

$$t_l(x, y) = \exp\left(-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right) \quad (2.5)$$

donde  $f$  es la distancia focal de la lente y cabe mencionar que la ecuación (2.5) se obtiene aplicando la aproximación paraxial [16].

Dada una transmitancia con amplitud  $t_A(x, y)$  la cual colocamos inmediatamente antes de la lente positiva y la iluminamos con una onda plana monocromática con amplitud  $A$ , entonces la perturbación incidente sobre la lente está dada por

$$U_l(x, y) = At_A(x, y)$$

Una función útil que nos ayudará para entender mejor el sistema analizado es la función de pupila, ya que es necesaria definirla debido a que la lente tiene dimensiones finitas, entonces definimos la función pupila como

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{Si incide sobre la abertura de la lente} \\ 0 & \text{En otro lado} \end{cases} \quad (2.6)$$

Después de que la onda pasa a través de la lente y recordando que esta genera un retraso de fase, la distribución de amplitud es de la forma

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y) P(x, y) \exp\left(-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right)$$

La distribución en el punto focal de la lente  $U_f(u, v)$  se puede calcular con la ayuda de la siguiente integral (2.7), que es la integral de difracción de Fresnel que será explicada con más detalle en el capítulo IV e igual que la fórmula de difracción de Fraunhofer.

$$U(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right) \times \quad (2.7)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) \exp\left(i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right) \right\} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right) d\xi d\eta$$

sustituyendo los datos conocidos y  $z = f$ , obtenemos que la distribución está dada por

$$U_f(u, v) = \exp\left(i\frac{k}{2f}(u^2 + v^2)\right) \iint_{-\infty}^{\infty} U_l(x, y) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right) dx dy \quad (2.8)$$

observemos que la ecuación (2.8) es una transformada de Fourier en dos dimensiones y es equivalente a tener la fórmula de difracción de Fraunhofer, lo cual nos dice que en el plano focal de la lente el patrón de distribución estará dado por el patrón de difracción de Fraunhofer.

La distribución de intensidad en el plano focal estará dado por

$$I_f(u, v) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \iint_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right) dx dy \right|^2 \quad (2.9)$$

con esta fórmula podemos calcular la forma del patrón de difracción para cualquier abertura al hacerle incidir una onda y que esta a su vez pase a través de una lente [16].

### 2.3.2. Formación de imágenes

Tenemos que con óptica geométrica es posible definir una imagen, con óptica ondulatoria también es posible definir la imagen de un objeto dado.

Consideremos que iluminamos un sistema por luz monocromática y que  $U_0(\xi, \eta)$  es el campo complejo inmediatamente después del objeto, el cual está a una distancia  $z_1$  antes de la lente y una distribución  $U_i(u, v)$  a una distancia  $z_2$  después de la lente donde se formará la imagen, es decir, el campo en esta distancia estará dado por

$$U_i(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(u, v; \xi, \eta) U_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.10)$$

donde  $h(u, v; \xi, \eta)$  es la respuesta de impulso y es un campo producido en las coordenadas  $(u, v)$  por una fuente puntual de amplitud unitaria la cual pasa a través de un objeto en coordenadas  $(\xi, \eta)$ . Si la respuesta de impulso puede ser especificada el sistema formador de imágenes puede ser completamente descrito.

La fórmula (2.10) nos representa la imagen formada por el sistema óptico utilizado, en este caso, es formado por una lente positiva y una fuente puntual monocromática.

Hasta el momento hemos considerado sistemas los cuales forman la imagen sin ninguna deformación y con nitidez, es decir, las imágenes formadas no tienen ninguna clase de aberraciones. Ahora consideraremos el efecto de difracción el cual generará una cierta aberración sobre la imagen.

Este efecto lo consideraremos entre el objeto y la pupila de entrada o alternativamente y equivalentemente desde la pupila de salida a la imagen, es decir, viene siendo lo mismo debido a que el objeto se podría definir como la imagen de la imagen [16].

## 2.4. Difracción

El fenómeno de difracción fue definido por Sommerfeld como "Cualquier desviación de los rayos de luz desde una trayectoria rectilínea los cuales no pueden ser interpretados como reflexión o refracción" [16], actualmente es definido como el cambio de fase o de amplitud que sufre una onda al pasar por el borde de un objeto o cuando pasa a través de una rendija estrecha [8].

Aunque nuestro trabajo está relacionado solamente con zonas paraxiales es importante explicar algunos conceptos y trabajos relacionados con la teoría de difracción. Antes de definir las integrales de difracción de Fresnel y Fraunhofer, dado que, en un trabajo a futuro podríamos aplicar método presentado en esta tesis para casos no paraxiales y fuera de eje.

### 2.4.1. Teorema de Green

Empezaremos por explicar el Teorema de Green el cual es en muchos aspectos la base primordial de la teoría escalar de la difracción. Este Teorema nos dice: Sea  $U(P)$  y  $G(P)$  cualquiera dos funciones con valores complejos de posición y  $S$  una superficie cerrada que rodea un volumen  $V$ . Si  $U$ ,  $G$  y sus primeras y segundas derivadas parciales evaluadas en un solo punto y además son continuas dentro y sobre  $S$ , entonces tenemos

$$\iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dv = \iint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \quad (2.11)$$

en este caso  $\frac{\partial}{\partial n}$  representa la derivada parcial en la dirección normal hacia el exterior de cada punto sobre  $S$ .

A pesar que el Teorema de Green representa la base primordial en el problema de difracción solamente puede ser aplicado directamente si escogemos una función prudente  $G$  y una superficie cerrada  $S$ .

### 2.4.2. El Teorema Integral de Helmholtz y Kirchhoff

Kirchhoff consideró una elección de una función auxiliar  $G$  del Teorema de Green y se basó en el Teorema integral que expresa la solución de la ecuación de onda homogénea en un punto arbitrario en términos de los valores de la solución y sus primeras derivadas en una superficie cerrada alrededor de un punto para obtener la formulación del problema de difracción.

Si escogemos un punto de observación es  $P_0$  y  $S$  denota la superficie cerrada alrededor de este punto, entonces Kirchhoff definió la función de Green en el espacio libre como la función  $G$  la cual está dada por

$$G(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \quad (2.12)$$

la cual representa una onda esférica expandiéndose a partir del punto  $P_0$  y es



de amplitud unitaria. Esta ecuación tiene una discontinuidad en el punto  $P_0$ , entonces, lo ideal para que esta función satisfaga la ecuación de Helmholtz (2.4) es encerrar esta discontinuidad con una superficie de radio  $\epsilon$  y hacer que este radio tienda a 0. Una vez que la ecuación  $G$  satisface la ecuación de Helmholtz y además utilizando el Teorema de Green obtenemos

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} ds \quad (2.13)$$

Esta ecuación es la que se conoce como el Teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff.

Ahora si consideramos el problema de difracción por una apertura  $\Sigma$  en una pantalla opaca tendremos que definir las condiciones de frontera necesaria, las cuales son

1. Sobre la abertura  $\Sigma$ , la función de onda  $U$  y sus derivadas  $\frac{\partial U}{\partial n}$  son exactamente las mismas cuando la pantalla está ausente.
2. Sobre la parte complementaria a la abertura, la función de onda y sus derivadas son nulas.

Estas condiciones simplifican de manera considerable los cálculos realizados para la teoría escalar de difracción[16].

### 2.4.3. La fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff

Si consideramos que la distancia  $r_{01}$  la cual está definida desde la abertura hasta el punto de observación es mucho más grande que la longitud de onda y además suponemos que la abertura es iluminada por una onda esférica

$$U(P_1) = \frac{A \exp(ikr_{21})}{r_{21}} \quad (2.14)$$

obtenemos

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] ds \quad (2.15)$$

la cual es la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff.

#### 2.4.4. Fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld

Las condiciones de frontera de Kirchhoff son inconsistentes debido a que si aplicamos ambas condiciones, el campo en cualquier parte despues de la pantalla será cero, la cual, es una solución física no aceptada.

Para evadir estas inconsistencias Sommerfeld modificó la función de Green de tal manera que la teoría de difracción de Kirchhoff siga siendo válida y utiliza una condición de frontera sobre la función de Green la cual nos dice que  $G$  o  $\frac{\partial G}{\partial n}$  desaparecerán sobre toda la superficie de integración. Esto nos lleva a que ninguna condición de frontera se propondrá sobre la función de onda  $U$  y sobre su primera derivada  $\frac{\partial U}{\partial n}$ . Con esta condición de frontera queda eliminada la inconsistencia de la teoría de Kirchhoff. El propone que la función de Green puede estar definida como

$$G_-(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} - \frac{\exp(ik\tilde{r}_{01})}{r_{01}} \quad (2.16)$$

y

$$G_+(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} + \frac{\exp(ik\tilde{r}_{01})}{r_{01}} \quad (2.17)$$

ambas funciones nos indican que existen dos fuentes puntuales iluminando la abertura, las cuales están colocadas como si una fueran una imagen espejo una de la otra. La función (2.16) tiene un desfase en su oscilación de  $180^\circ$  y la función (2.17) está oscilando en fase. Esto nos lleva a tener dos posibles soluciones

$$U_I(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{\partial G_-}{\partial n} ds \quad (2.18)$$

la cual es conocida como la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{\partial G_+}{\partial n} ds \quad (2.19)$$

y como la segunda solución de Rayleigh-Sommerfeld.

Si asumimos en la integral de Kirchhoff que  $G = G_-$ ,  $r_{01} \gg \lambda$  y que la función de onda  $U$  está dada por una onda esférica en el punto  $P_2$ , obtenemos que la formula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld está dada por

$$U_I(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds \quad (2.20)$$

y si ahora tenemos que  $G = G_-$  y que  $r_{21} \gg \lambda$ , entonces

$$U_{II}(P_0) = -\frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21}) ds \quad (2.21)$$

con estas correcciones de Rayleigh-Sommerfeld se han resuelto las inconsistencias a la teoría de difracción de Kirchhoff[16].

### 2.4.5. Principio de Huygens y Principio de Huygens-Fresnel

El principio de Huygens nos afirma que cualquier punto de un frente de onda genera una fuente puntual en forma de ondas esféricas secundarias y la suma de las ondas secundarias forman una envolvente, la cual, produce el mismo frente de onda primario un instante de tiempo más tarde. Además estas ondas secundarias avanzan en cada punto del espacio con una rapidez y frecuencia igual a la de la onda primaria.

Este principio no es de gran ayuda para utilizarlo en el problema de difracción, sin embargo, Fresnel ayudado con el concepto de interferencia definió un nuevo principio para que fuera utilizado en este problema. El principio de Huygens-Fresnel establece que cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo dado, sirve como una fuente de ondas secundarias esféricas, la

cual, tiene la misma frecuencia de la onda primaria. La amplitud del campo óptico en cualquier punto adelante es la superposición de todas estas ondas considerando sus amplitudes y fases relativas.

Matemáticamente este principio en coordenadas rectangulares lo podemos definir como

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (2.22)$$

donde

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (2.23)$$

El plano  $(x, y)$  es donde se encuentra la pantalla a estudiar y el plano  $(\xi, \eta)$  es el plano de observación, los cuales son paralelos entre si separados una distancia  $z$  [16].

### 2.4.6. Difracción de Fresnel

Utilizando la expansión binomial en la ecuación (2.23), obtenemos

$$r_{01} \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \left( \frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right] \quad (2.24)$$

si aplicamos esta aproximación al principio de Huygens-Fresnel puede tener una forma más simple, la cual estará dada por

$$U(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left[ i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \times \quad (2.25)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) \exp \left[ i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right] \right\} \exp \left[ -i \frac{k}{2z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta$$

esta ecuación es conocida como la integral de difracción de Fresnel, observemos que los límites de integración están definidos de menos infinito hasta infinito los

cuales se cambiarán dependiendo de las condiciones de frontera del problema a resolver. También es importante mencionar que puede ser interpretada como una transformada de Fourier de una función  $\Psi(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) \exp\left[i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right]$ .

### 2.4.7. Difracción de Fraunhofer

Así como fue simplificado el principio de Huygens-Fresnel puede ser simplificada la integral de difracción de Fresnel, considerando que

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{2}$$

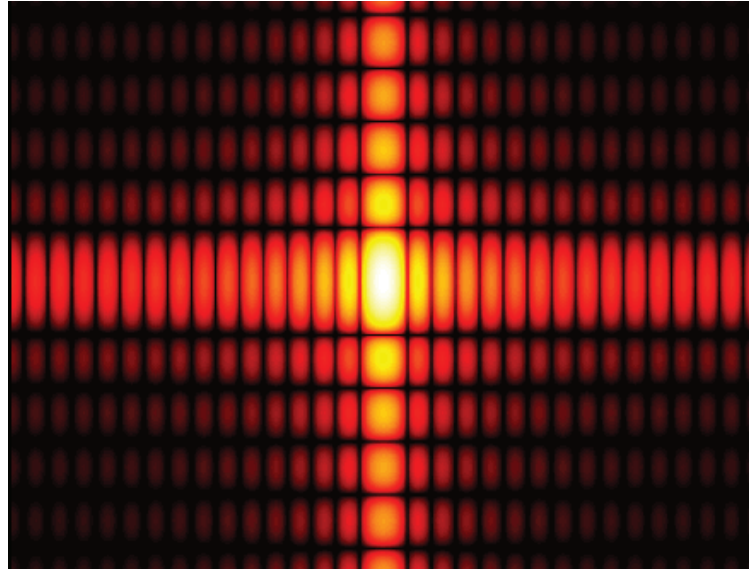
aplicando esto, obtenemos

$$U(x, y) = \frac{\exp(i\lambda z) \exp\left[i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right]}{i\lambda z} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right) d\xi d\eta \quad (2.26)$$

la cual llamamos integral de difracción de Fraunhofer. Observemos que es directamente una transformada de Fourier aplicada a la función  $U(\xi, \eta)$ .

Como ejemplos a la difracción de Fraunhofer calcularemos los patrones de difracción de las aberturas con forma rectangular y una circular.

Para la abertura rectangular tenemos que el patrón de difracción calculada con la teoría de Fraunhofer es de la forma

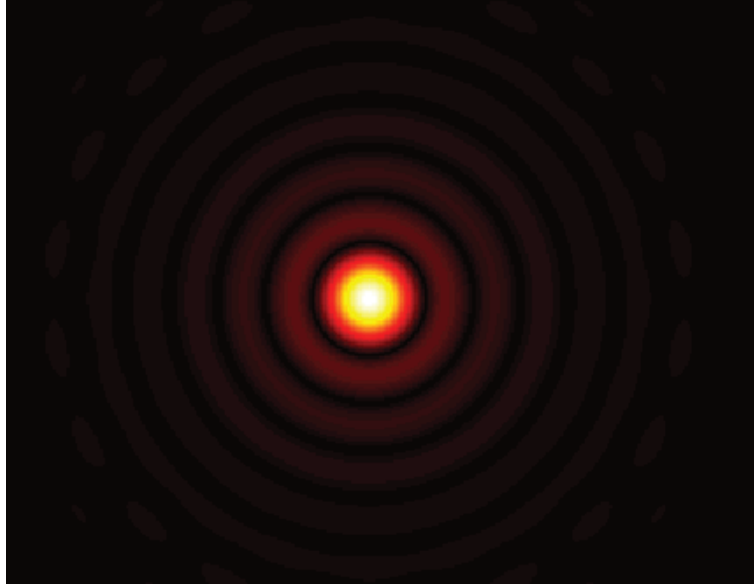


**Figura 2.14:** Patrón de difracción de Fraunhofer para una abertura rectangular.

la cual matemáticamente está definida como

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 z^2} \text{sinc}^2\left(\frac{2\omega_x x}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{2\omega_y y}{\lambda z}\right)$$

y para la abertura circular el patrón de difracción está dado por



**Figura 2.15:** Patrón de difracción de Fraunhofer para una abertura circular.

la cual tiene una forma matemática de la forma

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 z^2} \left[ 2 \frac{J_1\left(\frac{k\omega r}{z}\right)}{\frac{k\omega r}{z}} \right]^2$$

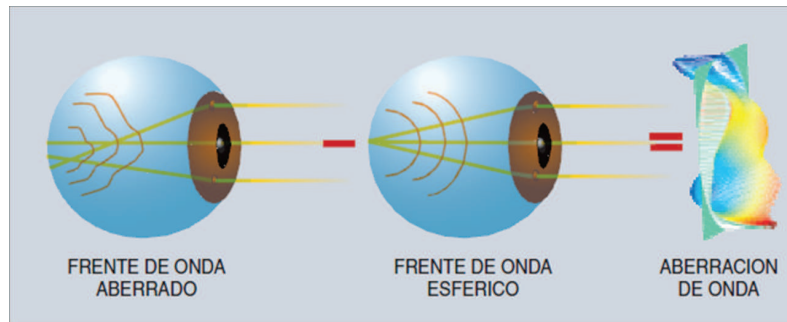
## 2.5. Conceptos fundamentales de aberraciones

Tenemos que un modelo ideal formador de imágenes es el modelo Gaussiano, sin embargo, este modelo es ideal porque utiliza solamente la aproximación paraxial y un sistema real formador de imágenes está limitado por aberraciones y difracción [7], [16], [6].

En esta sección utilizaremos la teoría de trazado de rayos exacto y la teoría de aberraciones de onda para definir las aberraciones de tercer orden, las cuales son llamadas aberraciones primarias. Se puede definir a las aberraciones como la diferencia del método de trazado de rayos exactos con el trazado de rayos

utiizando la aproximación paraxial, dichas aberraciones empobrecen la calidad de las imágenes.

Si suponemos que tenemos un frente de onda plano el cual ilumina un sistema óptico, que en este caso será un ojo humano, y este converge hacia el plano imagen (la retina) como un frente de onda esférico formando un punto se dice que el sistema está libre de aberraciones, si tenemos una distribución de rayos en el plano imagen el cual es llamado diagrama de manchas, decimos que el frente de onda está aberrado. Se llama aberración de onda a la diferencia entre el frente de onda distorsionado y el frente de onda esférico del sistema perfecto [2], como lo muestra la figura (2.16).



**Figura 2.16:** La aberración de onda está definida como la diferencia de el frente de onda aberrado y el frente de onda esférico del sistema óptico perfecto [2].

Las aberraciones de rayos son relacionadas con las aberraciones de onda por la ecuación

$$(x_i, y_i) = \frac{R}{n} \left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} \right). \quad (2.27)$$

Si tenemos un sistema con simetría rotacional podemos definir la función de aberración como

$$W(\rho, \theta) = A_s \rho^4 + A_c \rho^3 \cos(\theta) + A_a \rho^2 \cos^2(\theta) + A_d \rho^2 + A_t \rho \cos(\theta) \quad (2.28)$$



donde  $A_i$  son los coeficientes máximos de las aberraciones y también se tiene que  $0 \leq \rho < 1$  y  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

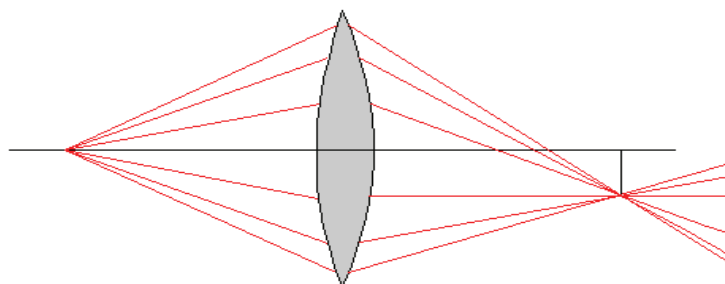
Las principales aberraciones son cinco, las cuales son: aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y tilt [7],[6],[17]. Cada una de estas aberraciones son representadas con un término de la función de aberración (2.28).

### 2.5.1. Aberración esférica

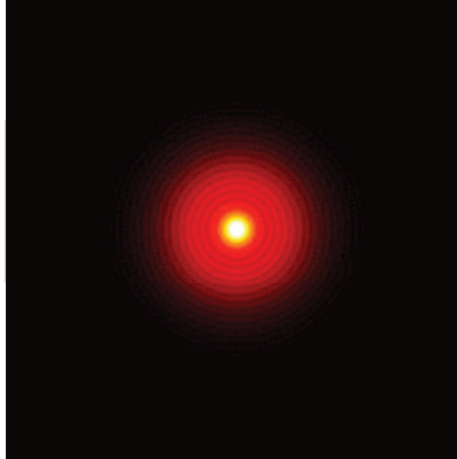
La aberración esférica ocurre cuando la luz que atraviesa el lente a diferentes distancia del eje óptico se enfoca en diferentes puntos, esto se puede interpretar como la variación de la distancia focal con respecto al radio de la pupila, es decir, no todos los rayos se enfocarán en un solo punto, esto se debe al trazado de rayos no paraxial. Esta aberración solo sucede sobre el eje óptico. La función de aberración esférica está dado por el primer término de la función de aberración, es decir

$$W(\rho) = A_s \rho^4 \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) representa una aberración de cuarto orden, la cual la podemos observar visualmente con el trazado de rayos en la figura (2.17) y como una aberración de onda de la forma de la figura (2.18).



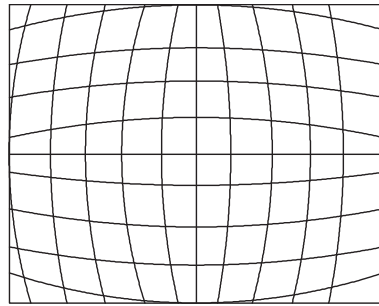
**Figura 2.17:** Aberración Esférica obtenida con el trazado de rayos exacto.



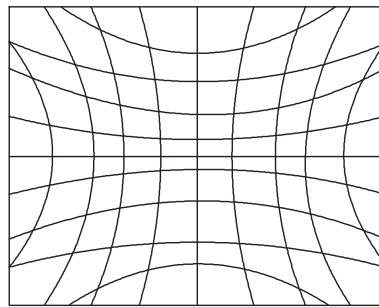
**Figura 2.18:** Intensidad del campo con aberración Esférica calculada en el foco de la lente cuando el campo propagado incide sobre una abertura circular.

### 2.5.2. Distorsión ocasionada por la aberración esférica

Si las líneas rectas de un objeto son generadas en forma de curvas en la imagen y el aumento lateral dependen de la altura del objeto decimos que tenemos aberración de distorsión, la cual la podemos dividir en dos aberraciones, cuando la aberración es positiva decimos que tenemos distorsión de barril y cuando la aberración es negativa tenemos distorsión de corset como lo muestran las figuras (2.19) y (2.20). A lo que se debe que sea negativa o positiva es que existe menor o mayor aumento para los puntos alejados del eje. Esta aberración afecta la forma del objeto.

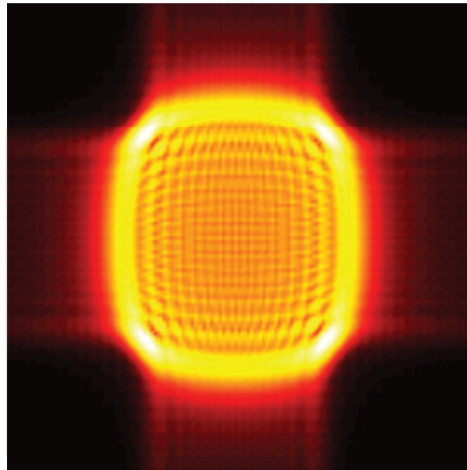


**Figura 2.19:** Aberración de distorsión de Barril.

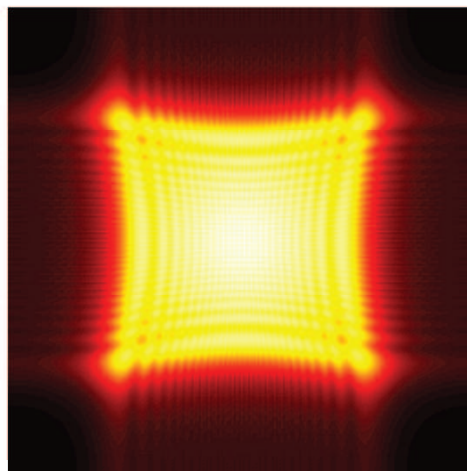


**Figura 2.20:** Aberración de distorsión de Corset.

La figura (2.21) y (2.22) nos representa la función de aberración de distorsión.



**Figura 2.21:** Intensidad del campo con aberración de barril calculada con la función de aberración con un coeficiente  $A_S$  negativo incidiendo sobre una abertura cuadrada.



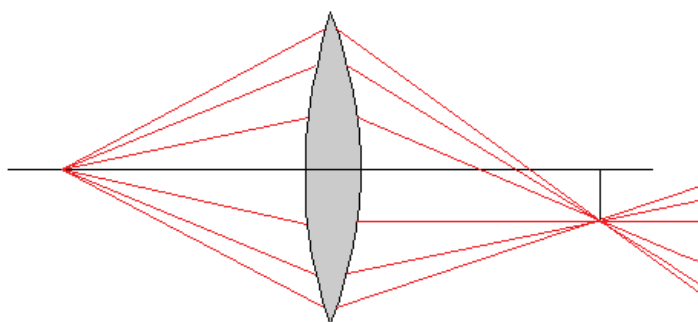
**Figura 2.22:** Intensidad del campo con aberración de corset calculada con la función de aberración con un coeficiente  $A_S$  positivo incidiendo sobre una abertura cuadrada.

### 2.5.3. Coma

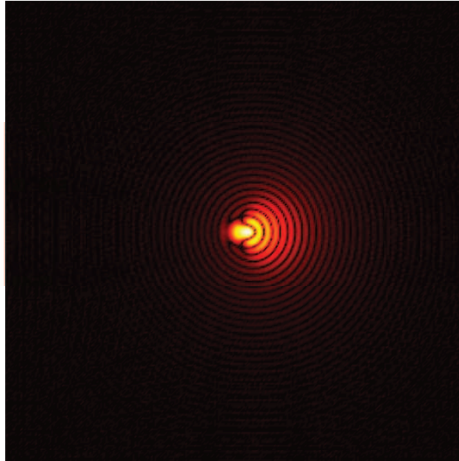
Un objeto extendido, es decir, con una determinada altura generará la aberración de coma, la cual la podemos definir como la incapacidad para hacer que los rayos se enfoquen en un solo punto, es como la aberración esférica pero la coma se origina fuera del eje óptico. La función de aberración de la coma está dado por el término

$$W(\rho, \theta) = A_c \rho^3 \cos(\theta). \quad (2.30)$$

La figura (2.23) representa la aberración de coma con trazado de rayos y la figura (2.24) con un frente de onda.

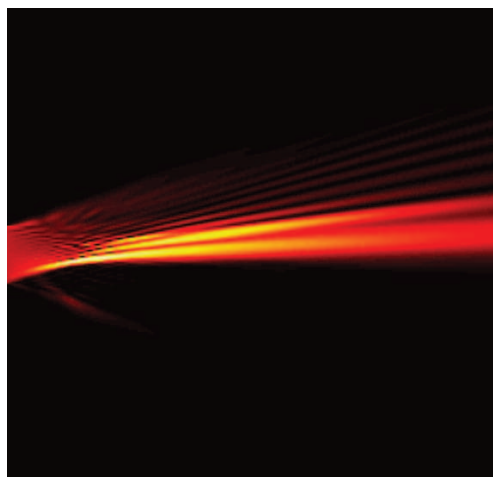


**Figura 2.23:** Aberración de coma con trazo de rayos exacto.



**Figura 2.24:** Intensidad del campo con aberración de coma calculada en el foco de la lente cuando el campo propagado incide sobre una abertura circular.

En la aberración de coma es importante observar como se comporta la intensidad en el plano sagital, debido a que tiene cierta semejanza con los haces acelerados, como lo muestra la figura 2.25.



**Figura 2.25:** Intensidad del campo propagado con aberración de coma en el plano sagital.

Los haces acelerados son actualmente de interés debido a que representan una nueva forma de campos no difractivos y sus múltiples aplicaciones en manipulación óptica [18] y además pueden ser estudiadas con óptica geométrica utilizando el concepto de cáusticas. Un ejemplo de los haces acelerados es el comportamiento de los haces Airy.

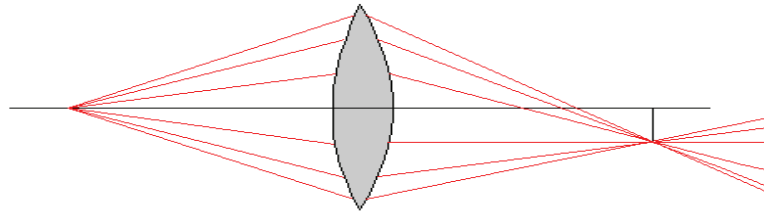
Las cáusticas generadas por la intensidad de los haces acelerados tienen un perfil parabólico, semejantes a la figura 2.9, debido a esto es de importancia estudiar en un futuro cercano la relación de la aberración de coma con los haces acelerados.

#### 2.5.4. Astigmatismo

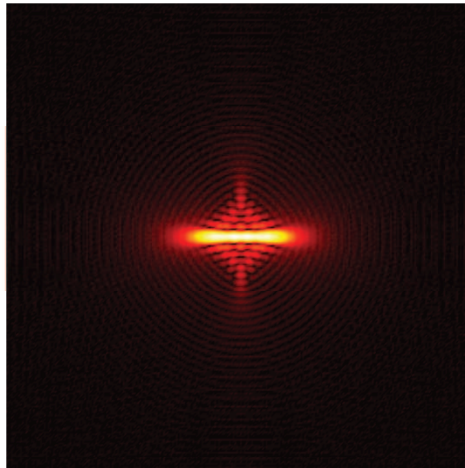
En una lente podemos definir dos planos uno que llamaremos plano sagital, el cual está de forma horizontal y pasa por el eje óptico y el plano tangencial que se encuentra de forma vertical y también pasa por el eje óptico. Al iluminar dicha lente los rayos que pasan por el plano sagital se enfocarán en un punto y a ese punto le llamaremos foco sagital y cuando pasan por el plano tangencial se enfocarán a una distancia antes que el foco sagital y a este foco le llamaremos foco tangencial, entre ambos focos existe una zona en la cual las alturas de los rayos son mínimas, a esta zona se le llama círculo de mínima confusión, esta aberración es llamada astigmatismo. La función de aberración del astigmatismo la podemos definir como

$$W(\rho, \theta) = A_a \rho^2 \cos^2(\theta) \quad (2.31)$$

Las figuras (2.26) y (2.27) nos representan el astigmatismo, la primera es con el trazo de rayos exacto y la segunda con la función de aberración del frente de onda.



**Figura 2.26:** Astigmatismo observado desde óptica geométrica.



**Figura 2.27:** Astigmatismo calculado en el foco de la lente cuando el campo propagado incide sobre una abertura circular.

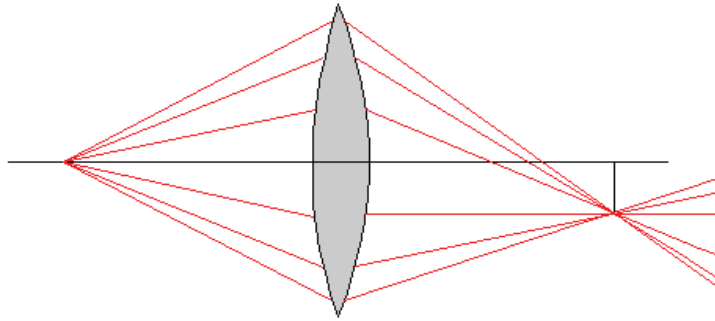
### 2.5.5. Curvatura de campo

La característica de tendencia natural de un sistema óptico al querer formar la imagen de un objeto plano que está normal al eje óptico será curvar la imagen debido a que los rayos entre más separados estén del eje óptico se enfocarán antes que los que se encuentran cerca del eje óptico. La función de aberración de onda para la aberración de curvatura del campo está dada por

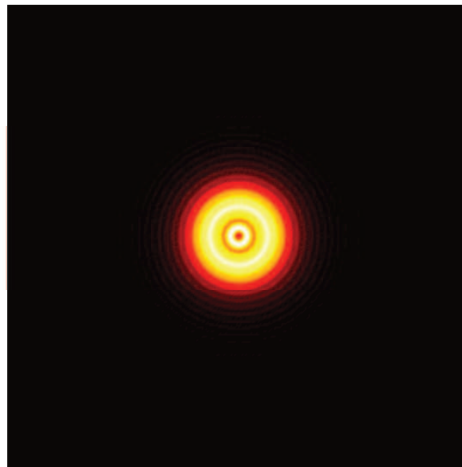
$$W(\rho) = A_d \rho^2 \quad (2.32)$$



Esta aberración la podemos representar gráficamente como están en la figura (2.28) la cual nos representa la aberración con trazo de rayos no paraxial y la figura (2.29) la cual es la aberración de frente de onda dada por la ecuación (2.32).



**Figura 2.28:** Curvatura de campo obtenida con trazado de rayos exacto.



**Figura 2.29:** Aberración de curvatura de campo calculada en el foco de la lente.

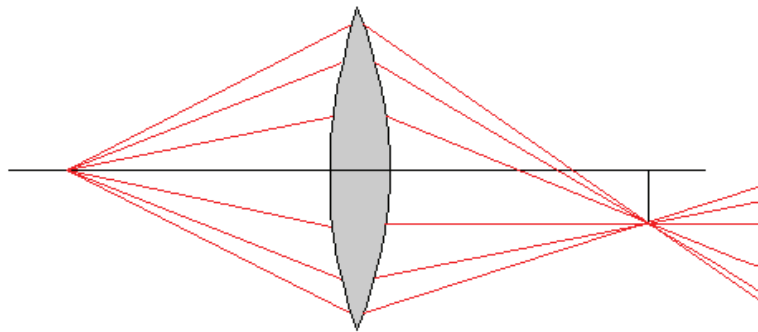
### 2.5.6. Tilt

Imaginemos una aberración que ocasione un desplazamiento sobre el eje  $x$  determinado por el sistema óptico, esta aberración se denomina Tilt. Su función

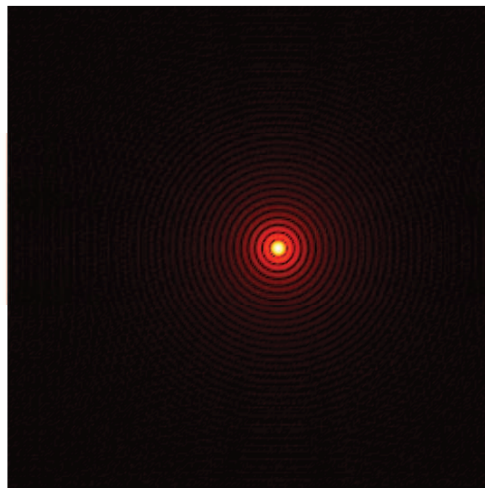
de aberración está dada por

$$W(\rho, \theta) = A_t \rho \cos(\theta).$$

Con esta aberración el enfoque se dará fuera del eje óptico, como lo muestra la figura (2.30) con el trazo de rayos geoméricamente



**Figura 2.30:** Aberración de Tilt con óptica geométrica.  
y la figura (2.31) con la función de aberración.



**Figura 2.31:** Aberración de tilt calculada en el foco de la lente.

# Capítulo 3

## Medición de aberraciones

Existen dos efectos muy importantes causados por las aberraciones, los cuales son:

1. Si tenemos un objeto de un punto, el resultado ya no es un punto.
2. Las imágenes punto ya no están en la posición predicha por la óptica de Gauss.

La imagen de un punto se ensancha y se torna asimétrica por efecto de las aberraciones. Las funciones más importantes para medir las aberraciones están dadas por la Función de Punto Extendido (PSF), la Función de Transferencia Óptica (OTF) y la Función de Transferencia de Modulación (MTF) [7],[2],[19],[1]. Las Siglas están dadas por sus nombres en inglés.

### 3.1. Función de Punto Extendido (PSF)

La función de punto extendido está definida como la distribución de la luz en la imagen de un punto, la cual, es medida en el plano imagen o cerca del mismo [1]. Esta distribución depende tanto del nivel de aberración del haz y la difracción. Cada objeto lo podemos definir como un arreglo de fuentes puntuales independientes, es decir, cada punto produce su propia PSF [19], entonces la PSF puede ser calculada como

$$I(r, \theta; z) = \frac{PS_p}{\pi\lambda^2 z^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[-i\pi kW(\rho, \theta)] \times \right. \quad (3.1)$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{i\pi R}{z} r\rho \cos(\theta - \theta_i)\right] \rho d\rho d\theta \right|^2$$

donde  $P$  es la potencia total en la pupila de salida y entonces también es en la imagen,  $S_p = \pi^2 a$  la cual como se puede observar es el área de la pupila del sistema y  $W(\rho, \theta)$  está dada por uno o más términos de la ecuación (2.28), dependiendo de la aberración que se quiera observar. Es importante mencionar que el término  $\frac{S_p}{\pi\lambda^2 z^2}$  está normalizada, entonces, carece de unidades [7].

Como se puede observar en la ecuación (3.1) la PSF solamente puede ser calculada cuando conocemos la aberración de onda, la transmisión del sistema óptico y la forma y las medidas de la abertura. Si tenemos que  $W(\rho, \theta) = 0$ , es decir, que el frente de onda no está aberrado, entonces tendremos uno de los mejores sistemas formadores de imágenes, el cual, estará solamente limitado por difracción, debido a esto, la PSF es una medida importante para saber que tan buena calidad tiene un sistema para formar una imagen. Es importante mencionar que si la PSF no está limitada por difracción será simplemente la densidad de rayos que interceptan el plano imagen y a este patrón se le conoce como diagrama de manchas, el cual, está definido solamente geoméricamente y, por lo tanto, la PSF se convierte en un arreglo de rayos de forma geométrica. Esta función es conocida como Función Geométrica de Punto Extendido.

En la literatura algunas veces se define la función de punto extendido solamente como

$$PSF = |\mathcal{F}\{M(x, y)\}|^2 \quad (3.2)$$

donde  $\mathcal{F}$  representa la transformada de Fourier de la función  $M(x, y)$  [2], la cual está definida como

$$M(x, y) = P(x, y) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda} W(x, y) \right]. \quad (3.3)$$

Una vez explicada la PSF podemos hacer como ejemplos el cálculo para algunos polinomios de Zernike.

### 3.1.1. Ejemplos de la PSF utilizando los coeficientes de Zernike

Los polinomios de Zernike los podemos definir como un conjunto completo de polinomios ortogonales sobre un círculo unitario [20]. En coordenadas polares los polinomios de Zernike están definidos como

$$\left. \begin{aligned} Z_{even\ j} &= [2(n+1)]^{\frac{1}{2}} R_n^m(r) \cos(m\theta) \\ Z_{odd\ j} &= [2(n+1)]^{\frac{1}{2}} R_n^m(r) \sin(m\theta) \end{aligned} \right\} m \neq 0 \quad (3.4)$$

$$Z_j = [(n+1)]^{\frac{1}{2}} R_n^m(r) \left. \right\} m = 0 \quad (3.5)$$

donde

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{(n-m)}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[ \frac{(n+m)}{2} - s \right]! \left[ \frac{(n-m)}{2} - s \right]!} r^{n-2s} \quad (3.6)$$

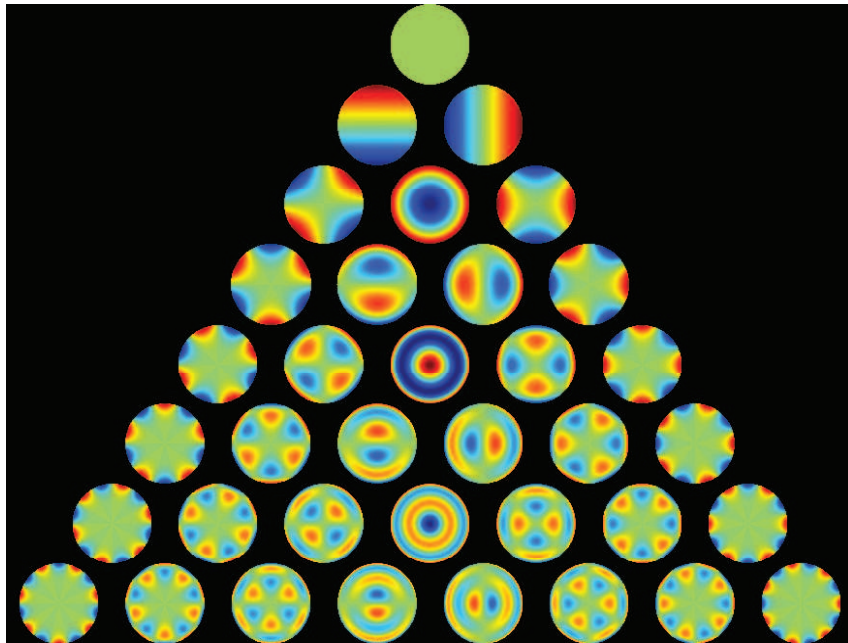
Esta clase de polinomios son muy importantes debido a que con ellos podemos representar las aberraciones de frente de onda con convenientes expresiones matemáticas, es decir, expresiones sencillas de representar. La función de aberración en términos de los polinomios de Zernike, está dada por

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j Z_j(\rho, \theta) \quad (3.7)$$

donde  $a_j$  son los coeficientes de la sumatoria, y están definidos como

$$a_j = \pi^{-1} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W(\rho, \theta) Z_j(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (3.8)$$

Tenemos que los coeficientes de Zernike tienen un orden radial dado por  $n$  y un orden azimutal dado por  $m$  [21], es fácil obtener gráficamente los polinomios de Zernike, como lo muestra la figura (3.1). Cada uno de los elementos de la pirámide representan una de las aberraciones explicadas en el capítulo anterior .



**Figura 3.1:** Pirámide que representa los modos de Zernike.

Todo lo anterior fue explicado para que podamos dar un ejemplo de como se representa la PSF de cada una de las aberraciones de frente de onda, basándonos en los elementos de la pirámide de los polinomios de Zernike y la ecuación (3.2). El resultado de obtener la transformada de Fourier en cada uno de los polinomios de Zernike es la figura (3.2).

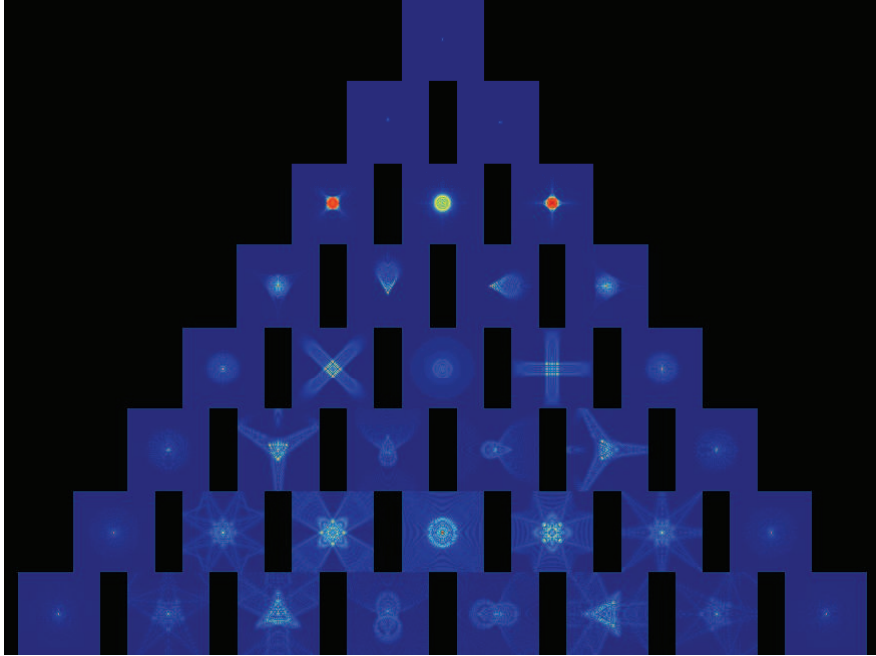


Figura 3.2: Representación de la PSF de 37 modos de Zernike.

### 3.2. Función de Transferencia Óptica (OTF)

Para poder definir la función de transferencia de modulación (MTF) primero es necesario definir a la función de transferencia óptica (OTF). La OTF es una medida de la reducción en contraste y cambio en fase de patrones senoidales imaged por un sistema óptico. La cual es una función de la frecuencia espacial y la orientación del patrón [1]. Matemáticamente la OTF es calculada como la transformada de Fourier de la PSF

$$OTF = \mathcal{F}\{PSF\} \quad (3.9)$$

o lo que es equivalente a tener

$$OTF = \tau(\vec{v}_i) = \int PSF(\vec{r}_i) \exp(2\pi i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i) d\vec{r}_i \quad (3.10)$$

donde  $\vec{v}_i = (v_i, \phi)$  es un vector de frecuencia espacial en el plano imagen y  $\vec{r}_i$  es un vector de posición de un punto en este plano.

En la próxima sección explicaremos el significado físico de OTF para definir la MTF.

### 3.3. Función de Transferencia de Modulación (MTF) y Función de Transferencia de Fase (PTF)

Si tenemos que  $\vec{v}_0$  es la frecuencia espacial de un objeto senoidal, el cual, tiene una modulación o contraste  $m$  y fase  $\delta$ , entonces, la imagen Gaussiana tendrá una frecuencia espacial también senoidal dada por  $\vec{v}_i = \frac{\vec{v}_0}{M}$  y donde  $M$  es la magnificación de la imagen [7], podemos decir que la modulación y la fase de la imagen Gaussiana obtenida son las mismas que las del objeto senoidal.

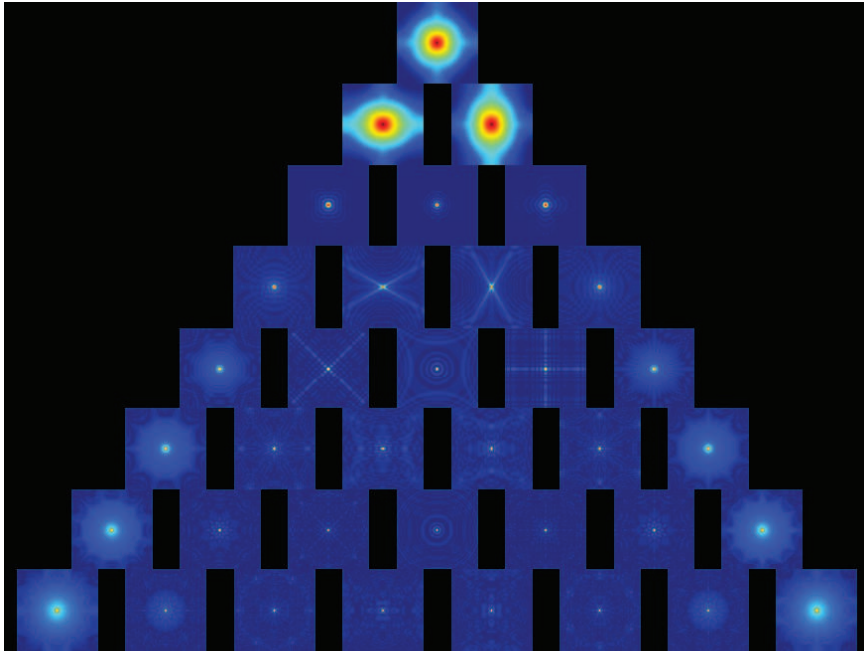
Ahora tenemos que la modulación de la imagen que ha sido difractada está dada por  $m |\tau(\vec{v}_i)|$  y la fase por  $\delta - \Psi(\vec{v}_i)$ . Dado esto la ecuación (3.10) la podemos reescribir como

$$\tau(\vec{v}_i) = |\tau(v_i)| \exp[i\Psi(\vec{v}_i)] \quad (3.11)$$

donde  $|\tau(v_i)|$  es llamada Función de Transferencia de Modulación (MTF) y  $\Psi(\vec{v}_i)$  como Función de Transferencia de Fase (PTF). Un componente lineal de la PTF corresponde a un desplazamiento de la imagen.

Como la MTF nos ofrece el grado de detalle, esto es, la reducción del contraste en función de la frecuencia espacial de la imagen a su paso por un sistema óptico [2], es importante ilustrar algunos ejemplos de la MTF. Igual que en los ejemplos de la PSF nos basaremos en los polinomios de Zernike para la MTF, los patrones dados por la MTF están en la figura(3.3).





**Figura 3.3:** Representación de la MTF de 37 modos de Zernike.

# Capítulo 4

## Propagación de aberraciones

### 4.1. Normalización

Durante el desarrollo del programa de propagación de haces utilizaremos cantidades adimensionales, las cuales, son normalizadas con respecto a un parámetro dado. Esto es eficiente para cálculos computacionales debido a que no incluimos cantidades muy pequeñas o muy grandes, por ejemplo, la longitud de onda es del orden de  $\approx 10^{-7}$  y la velocidad de la luz es de  $\approx 10^8$ , esto puede ocasionar errores numéricos dependiendo de la precisión del programa computacional usado.

En óptica existen dos cantidades muy conocidas:

La primera es la longitud de difracción o la longitud de Rayleigh

$$L_D = \frac{k\omega_0^2}{2} \quad (4.1)$$

donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  y  $\omega_0$  es el ancho del haz Gaussiano el cual será nuestro parámetro para normalizar. Esta ecuación es importante debido que nosotros estamos describiendo propagación de haces y si pensamos que estamos propagando con un haz que tiene perfil Gaussiano el cual tiene un ancho  $\omega_0$ , entonces, es fácil utilizar  $L_D$  para normalizar nuestras ecuaciones.

La segunda cantidad es el llamado número de Fresnel, la cual, es muy utilizada

en el problema de difracción debido a que solamente depende del ancho de una abertura circular de radio  $\omega_0$  y de la posición del plano de observación colocado a una distancia  $z$ . El número de Fresnel está definido como

$$N_F(z) = \frac{\omega_0^2}{\lambda z} \quad (4.2)$$

la cual podemos poner en términos de la longitud de difracción

$$N_F(z) = \frac{1}{\pi} \frac{L_D}{z} \quad (4.3)$$

Tanto la longitud de difracción como el número de Fresnel son cantidades que se utilizan para normalizar, entonces todas nuestras ecuaciones quedarán en términos de ambas cantidades.

Como un ejemplo de la normalización podemos representar como se obtiene la ecuación normalizada de la fase de la lente dada por

$$t_l(r) = \exp\left(-i \frac{k}{2f} r^2\right) \quad (4.4)$$

si nosotros multiplicamos y dividimos el factor de fase por  $\omega_0^2$ , obtenemos

$$t_l(r) = \exp\left(-i \frac{k}{2f} r^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right) = \exp\left(-i \frac{k\omega_0^2}{2f} \frac{r^2}{\omega_0^2}\right) = \exp\left(-i \frac{L_D}{f} \frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \quad (4.5)$$

si definimos a  $\frac{r^2}{\omega_0^2} = \rho^2$  y  $\frac{f}{L_D} = \mathcal{L}$ , entonces

$$t_l(\rho) = \exp\left(-i \frac{\rho^2}{\mathcal{L}}\right) \quad (4.6)$$

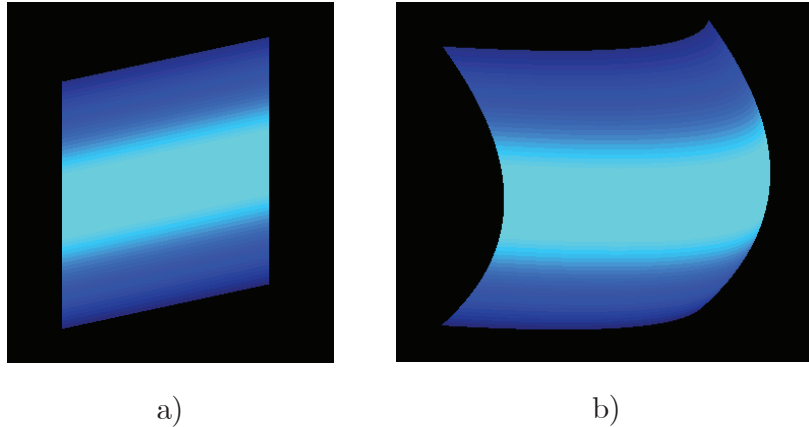
donde podemos observar que la fase de la lente se ha convertido en una cantidad adimensional.

A partir de este momento utilizando este método todas las ecuaciones utilizadas para los cálculos de propagación libre y con aberraciones estarán normalizadas para que el cálculo computacional sea mucho más eficiente comparada cuando utilizamos cantidades reales.

## 4.2. Aplicaciones a la óptica visual

En esta sección utilizaremos una técnica computacional llamada Beam Propagation Method (BPM) para obtener las estructuras cáusticas sobre un plano elegido al hacer incidir un haz sobre una abertura circular, la cual, contiene una lente que hace enfocar al haz a una determinada distancia cuando este es propagado. Los planos elegidos fueron el tangencial y el plano sagital determinados por la lente.

Si hacemos incidir un haz de luz con un frente de onda plana sobre una abertura circular la cual contiene una lente sin ninguna clase de aberraciones, se modificará el frente de onda hasta convertirse en un frente de onda esférico [16], entonces el frente de onda incidente se modificará como lo muestra la figura (4.1).

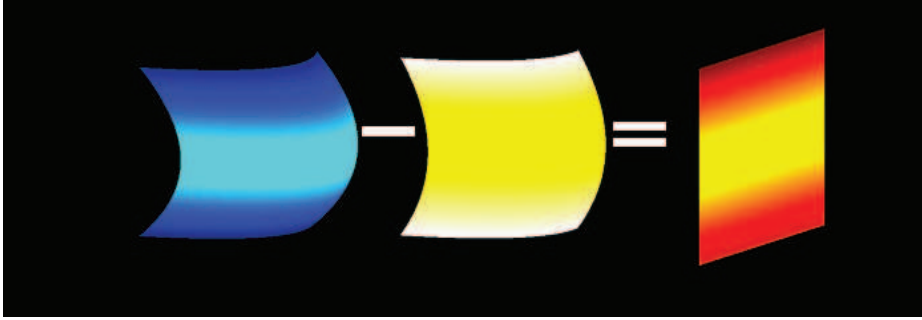


**Figura 4.1:** a) Frente de onda plano y b) Frente de onda esférico.

Utilizando el concepto de aberración definido en la sección 2.5 se puede obtener la función de aberración, es decir, haciendo la diferencia entre el frente de onda ideal (que sabemos que es un frente de onda esférico) y el frente de onda propagado. Para este caso tenemos que el frente de onda propagado está dado por un frente de onda esférico y el frente de onda ideal también es un frente de onda esférico, entonces obtenemos que

$$W(\rho, \theta) = 0 \tag{4.7}$$

y esto lo podemos representar gráficamente como lo muestra la figura (4.2)



**Figura 4.2:** Obtención del frente de onda aberrado.

donde se puede notar que la función de aberración que es igual a cero, es decir, no aberrada está representada por un plano. Ahora para saber que frente de onda será propagado después de haber pasado por la lente tenemos que sumar el frente de onda esférico que genera la lente y el frente de onda dado por la función de aberración, entonces tenemos que el frente de onda total está dado por

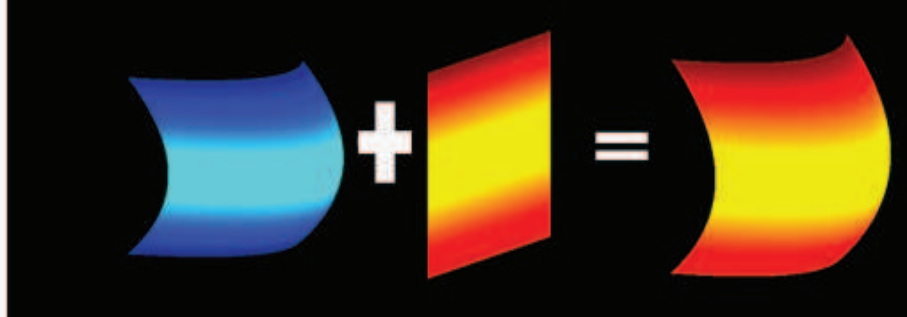
$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}} + W(\rho, \theta) \quad (4.8)$$

donde  $FOT$  = Frente de Onda Total y sustituyendo el valor de  $W(\rho, \theta) = 0$ , se obtiene

$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}} + 0$$

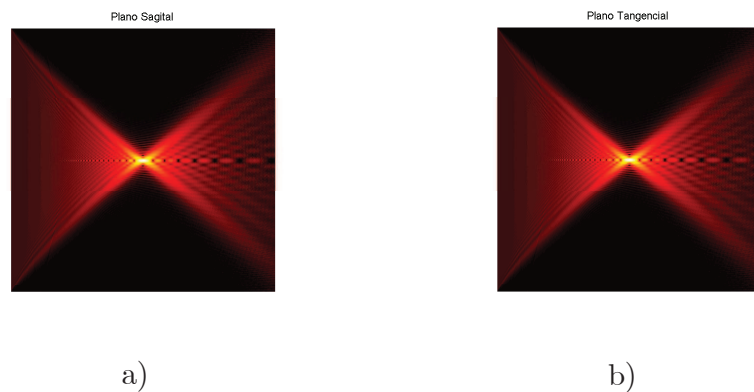
$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}}$$

entonces esto está representado por la figura (4.3).



**Figura 4.3:** Frente de onda propagado después de haber pasado por la lente.

De esta forma solo se propagará el cambio de fase que introduce la lente al frente de onda plano incidente, entonces podremos obtener la propagación en los planos sagital y tangencial dados por la lente, las cuales son representada por las siguientes imágenes de propagación,

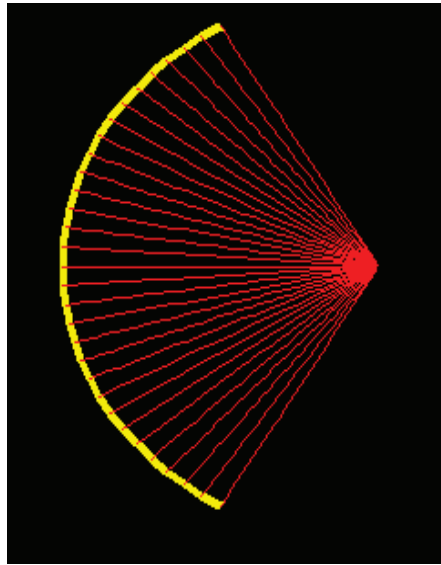


**Figura 4.4:** Cáustica de propagación de una lente que no tiene ninguna clase de aberraciones. a) Calculada en el plano sagital y b) calculada en el plano tangencial.

observemos que se forman un tipo de causticas y las llamaremos causticas de propagación. En ambos planos se forma la misma imagen, es decir, la propagación es simétrica.

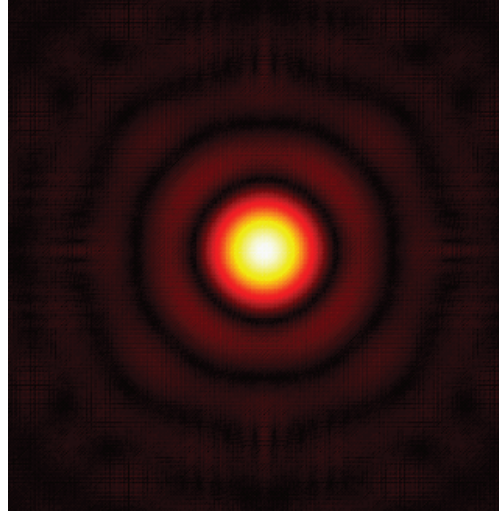
En óptica geométrica en el caso de la aproximación paraxial (Óptica Geométrica Gaussiana) la imagen ideal de un objeto puntual es un punto, es decir, si ten-

emos una fuente puntual esta después de haber pasado por la lente generariamos una onda convergente hacia un punto como lo muestra la figura (4.5).



**Figura 4.5:** Frente de onda ideal en óptica geométrica.

En el caso de la óptica ondulatoria tenemos que un sistema ideal formador de imágenes solamente está limitado por difracción, es decir, la imagen de un punto estará dada por la forma que tiene el patrón de Airy, con la restricción de que el sistema tendrá una abertura circular, como es el caso del ojo. En el caso de las cáusticas de propagación podemos ver que no se enfocan en un solo punto, se enfocan en una región, la cual como se ha dicho en líneas anteriores está dada por la forma del disco de Airy.



**Figura 4.6:** Disco de Airy.

Las causticas de propagación también se pueden visualizar cuando la lente tiene aberraciones.

Utilizando la teoría desarrollada en el capítulo 2 consideraremos que la lente tiene alguna aberración, donde el coeficiente de aberración puede ser positivo y negativo, empezaremos por presentar las aberraciones que son simétricas en ambos planos como la curvatura de campo y la aberración esférica.

#### 4.2.1. Curvatura de campo

En la sección anterior se explicó como obtener el frente de onda que será propagado después de pasar por el sistema óptico elegido, siguiendo esta misma analogía tenemos que el frente de onda de la aberración de curvatura de campo está dado por

$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}} \pm A_d \rho^2 \quad (4.9)$$

$$FOT = \rho^2 \left( -\frac{1}{\mathcal{L}} \pm A_d \right) \quad (4.10)$$

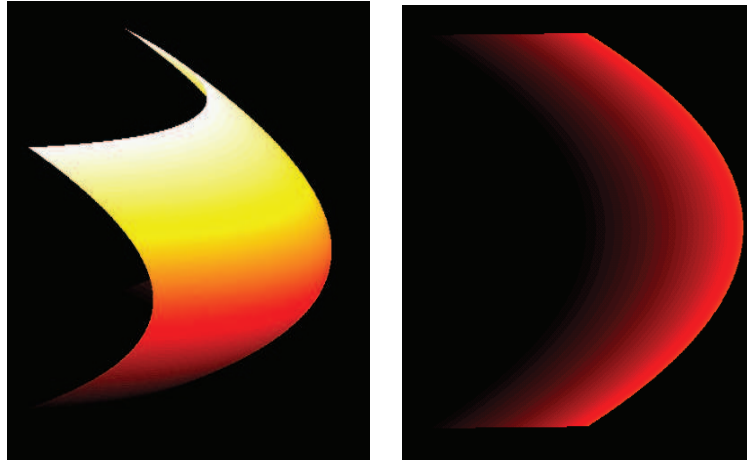


esto se puede interpretar como la capacidad para hacer que la lente enfoque antes o después de la distancia focal conocida por los parámetros dados por la lente, esto depende si el coeficiente de aberración es negativo o positivo. Este frente de onda total tiene la forma de un frente de onda esférico como lo muestra la figura (4.7)



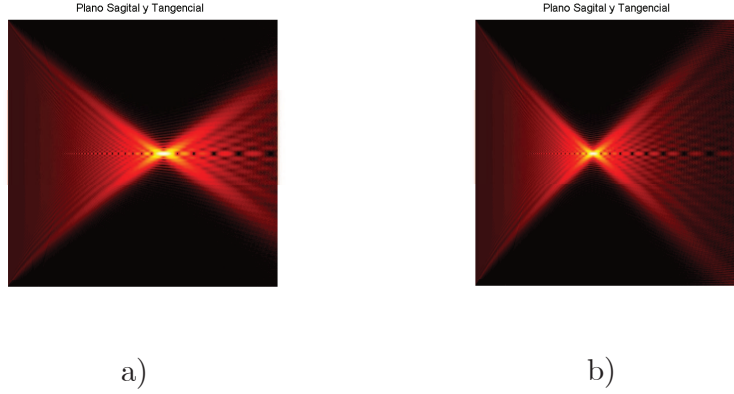
**Figura 4.7:** Frente de onda con aberración de curvatura de campo después de pasar por la lente.

y el frente de onda de la función de aberración no varía mucho de el frente de onda total, figura (4.8).



**Figura 4.8:** Frente de onda de la aberración de curvatura de campo.

En la aberración de curvatura de campo cuando no conocemos la distancia focal de la lente es muy fácil confundir sus cáusticas de propagación con las de una lente sin aberraciones, debido a que si observamos las figuras (4.9) son demasiadas parecidas a la figura (4.4), pero si conocemos la distancia focal de la lente es fácil identificar que cuando tenemos un coeficiente de aberración negativo la luz se enfoca antes de la distancia focal de la lente, figura (4.9 b)), y si el coeficiente de aberración es positivo la luz se enfocara después de la distancia focal dada, figura (4.9 a)). Cuando en un ojo tenemos estos casos decimos que el ojo tiene miopía o hipermetropía respectivamente.



**Figura 4.9:** Cáustica de propagación de la aberración de curvatura de campo a) Con un coeficiente de aberración positivo obtenemos que el enfoque es mayor a la distancia focal, lo cual ocasiona hipermetropía y b) si el coeficiente es negativo obtenemos que el enfoque es antes de la distancia focal de la lente, lo cual se interpreta como miopía.

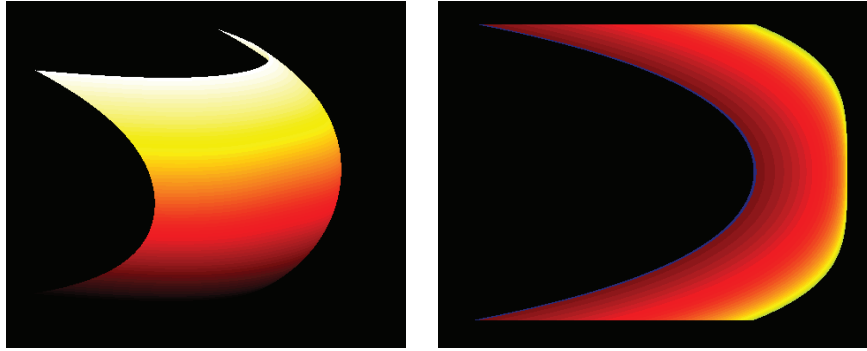
### 4.2.2. Aberración esférica

En la aberración de tipo esférica tenemos que el frente de onda total está dado por

$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}} \pm A_s \rho^4 \quad (4.11)$$

$$FOT = \rho^2 \left( -\frac{1}{\mathcal{L}} \pm A_s \rho^2 \right) \quad (4.12)$$

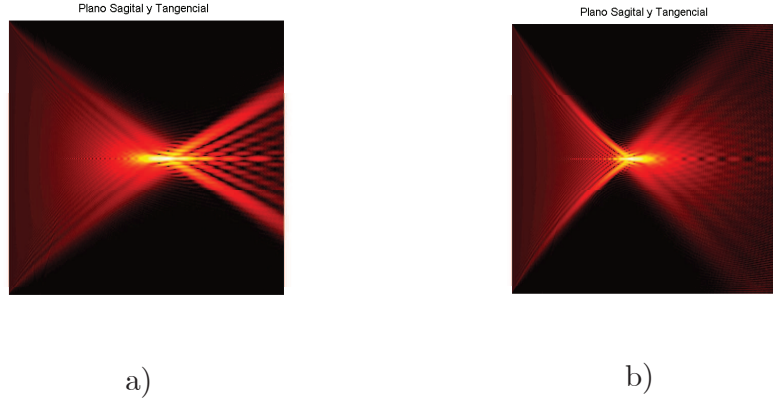
es decir, la aberración esférica introduce un término radial elevado a la cuarta potencia, la cual, implica que el frente de onda ideal se aplane en el centro como lo muestra la figura (4.10), esto nos lleva a no obtener un patrón de Airy perfecto, este patrón queda modificado teniendo en el centro un máximo de intensidad y en los bordes baja intensidad.



**Figura 4.10:** Frente de onda de la aberración esférica.

Con la forma que tiene el frente de onda que es propagado en la aberración esférica se pueden explicar de una forma clara la distorsión de barril y de corset ocasionadas por la aberración esférica explicadas en el sección 2.5.2, es decir, en la aberración de distorsión de barril es enfocado antes la parte central que la parte de las orillas del objeto (la parte de los bordes), esto es facil de comprender si observamos la figura (4.10) donde vemos que la primera parte que llega al foco de la lente es la parte central y las orillas están retrazadas. Para la distorsión de corset la podemos interpretar como el desfazamiento que sufre la parte central con respecto de las orillas del frente de onda propagado.

Las causticas de propagación de la aberración esférica, figura (4.11 a)) y (4.11 b)), son congruentes con la explicacion del capítulo 2, es decir, esta aberración lo que causa es que no todo el campo entrante se enfoque en un solo punto y observemos que sobre el eje óptico se forma una linea de mayor intensidad, en la cual es donde se está enfocando el campo. El signo de el coeficiente de aberración lo único que provoca es cambiar la dirección de la linea de enfocamiento.



**Figura 4.11:** Cáustica de propagación de la aberración esférica.

Ahora consideraremos las aberraciones que no son simétricas dadas por el astigmatismo, la coma y el tilt.

### 4.2.3. Astigmatismo

Para saber porque esta aberración es asimétrica tenemos que

$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}} \pm A_a \rho^2 \cos^2(\theta) \quad (4.13)$$

$$FOT = \rho^2 \left[ -\frac{1}{\mathcal{L}} \pm A_a \cos^2(\theta) \right] \quad (4.14)$$

la cual implica un cambio en la coordenada angular y ocasiona una desigualdad en el frente de onda propagado, como lo muestra la figura (4.12), es decir, cambia la forma del frente de onda ideal en la dirección del eje horizontal o en el eje vertical.



**Figura 4.12:** Frente de onda de la aberración de astigmatismo despues de la lente.

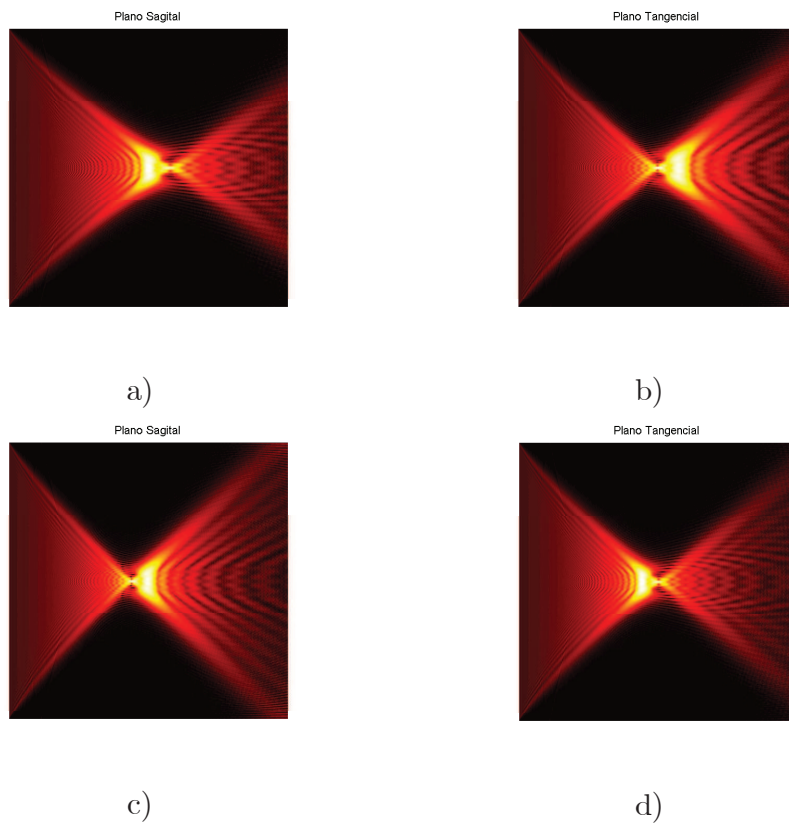
Si queremos entender un poco más a detalle el cambio sufrido en el frente d onda propagado es necesario ver el frente de onda dada por la función de aberración, figura (4.13), observemos que en el eje horizontal la onda tiene una curvatura, mientras que en el eje vertical se mantiene con una forma plana.



**Figura 4.13:** Frente de onda de la aberración de astigmatismo.

La aberración de astigmatismo es caracterizada por la luz incidente la cual no se refracta del mismo modo en todos los meridianos, es decir, la luz proveniente

del plano sagital se enfocará a una distancia distinta a la luz proveniente del plano tangencial, como podemos observar en la figura (4.14), depende del signo del coeficiente de aberración para determinar cual plano se enfoca antes y cual despues del foco de la lente.



**Figura 4.14:** Cáustica de propagación de la aberración de coma.  
 a) Plano sagital con un coeficiente de aberración positivo. b) Plano tangencial con coeficiente de aberración positivo. c) Plano sagital con un coeficiente de aberración negativo. b) Plano tangencial con coeficiente de aberración negativo.

#### 4.2.4. Coma

La forma matemática del frente de onda propagado está dado por

$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}} \pm A_c \rho^3 \cos(\theta) \quad (4.15)$$

$$FOT = \rho^2 \left[ -\frac{1}{\mathcal{L}} \pm A_c \rho \cos(\theta) \right] \quad (4.16)$$

esta aberración afecta tanto a la parte radial como a la parte angular, debido a que introduce un término de la forma  $\rho \cos(\theta)$ , es importante mencionar que el frente de onda dada por  $W(\rho, \theta)$  tiene una forma de élise vista desde arriba, es decir, si dividimos el frente de onda a partir del eje central notaremos que una se adelanta y la otra se atraza generando una aberración que está fuera del eje óptico.



**Figura 4.15:** frente de onda de la aberración de coma.

El frente de onda de la aberración de curvatura de campo lo podemos visualizar gráficamente como

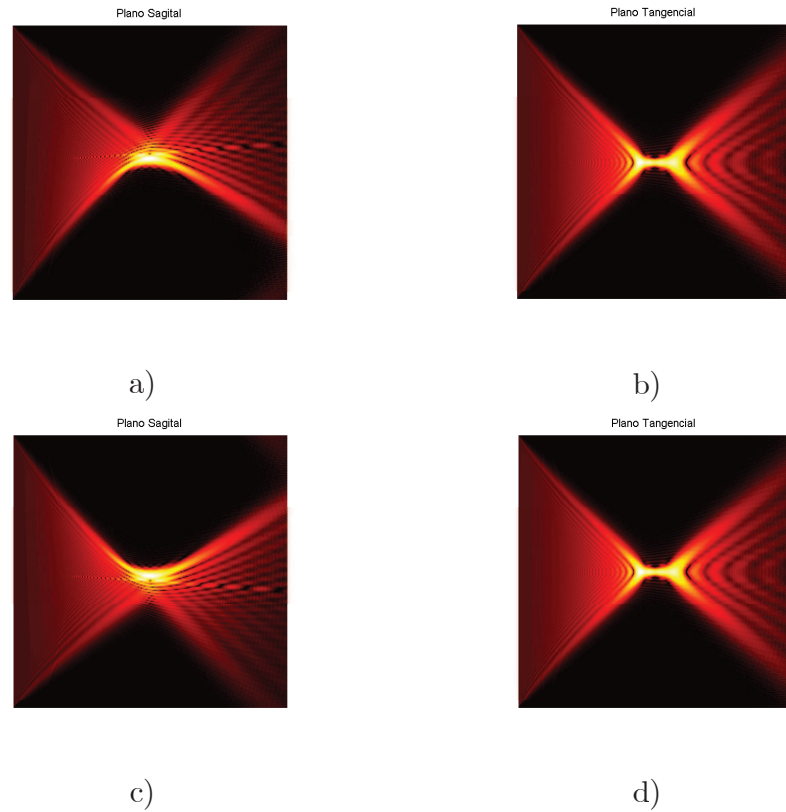




**Figura 4.16:** Frente de onda propagado con aberración de coma.

en la cual podemos observar que la parte central del frente de onda ideal está desplazado hacia un lado en el eje horizontal y por lo tanto no es simétrica en ninguno de los dos ejes.

En la figura (4.17 a)) y (4.17 c)) podemos notar que el campo incidente no se enfoca en un punto y además se enfoca sobre una línea en el eje óptico como en la aberración esférica, es decir, el enfoque del campo es en el eje óptico y fuera del mismo, esta aberración en el capítulo 2 la denominamos coma. Las figuras (4.17 b)) y (4.17 d)) corresponde al plano tangencial, las cuales son simétricas con respecto al coeficiente de aberración.



**Figura 4.17:** Cáustica de propagación de la aberración de coma. En el plano tangencial son simétricas con respecto al coeficiente de aberración como lo muestra la figura b) y d). En el plano sagital notamos que cuando se tienen coeficientes de diferentes signos cambia la dirección de la aberración de coma. Cuando se tiene un coeficiente positivo la caustica de propagación en el plano sagital está dada por la figura a) y para uno negativo está dado por b).

Esta aberración es de vital importancia debido a que se puede asociar a los haces Airy que producen haces acelerados.

#### 4.2.5. Tilt

La última aberración que explicaremos con este método pero no de menor importancia que las anteriores aberraciones es la aberración de tilt la cual tiene asociado un frente de onda para que sea propagado de la forma

$$FOT = -\frac{\rho^2}{\mathcal{L}} \pm A_t \rho \cos(\theta) \quad (4.17)$$

este frente de onda lo que ocasiona es un desplazamiento en el eje horizontal, es decir, al hacer un cambio de variable a coordenadas cartesianas observaremos que  $x = A_t \rho \cos(\theta)$ , entonces el frente de onda asociado a la función de aberración está dado por la figura (4.18).



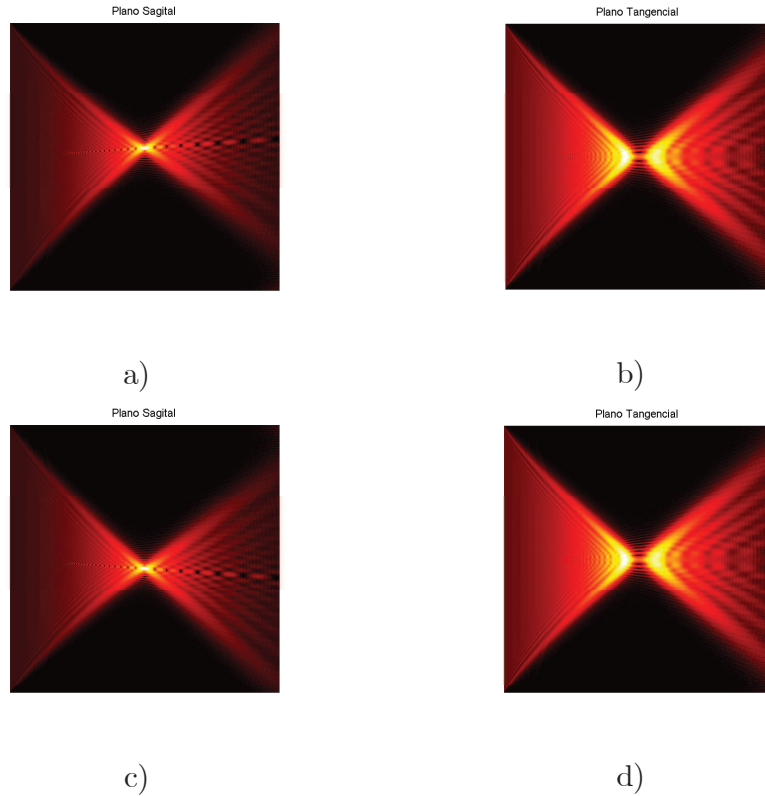
**Figura 4.18:** Frente de onda de la aberración de tilt.

Recordando que cuando tenemos  $W(\rho, \theta) = 0$  la forma de visualizarlo es un plano, en este caso, también tenemos un plano con la única condición que el plano está inclinado. El frente de onda que es propagado tiene la forma gráfica como lo muestra la figura (4.19).



**Figura 4.19:** Frente de onda propagado con aberración de tilt.

Cuando el sistema forma la caustica de propagación dada por la figura (4.20 a)) y (4.20 c)), se puede determinar que el sistema en el plano sagital es muy parecido a la cáustica de propagación de una lente sin aberraciones, con la diferencia que el eje óptico es desplazado una cierta distancia en el eje horizontal, el plano tangencial es simétrico para ambos coeficientes de aberración. A esta aberración se le conoce como tilt.



**Figura 4.20:** Cáustica de propagación de la aberración de Tilt. El plano tangencial es simétrico con respecto al coeficiente de aberración como lo representa b) y d). En el plano sagital la diferencia es que el eje óptico cambia de dirección. Para un coeficiente positivo es representado por a) y para uno negativo por c).

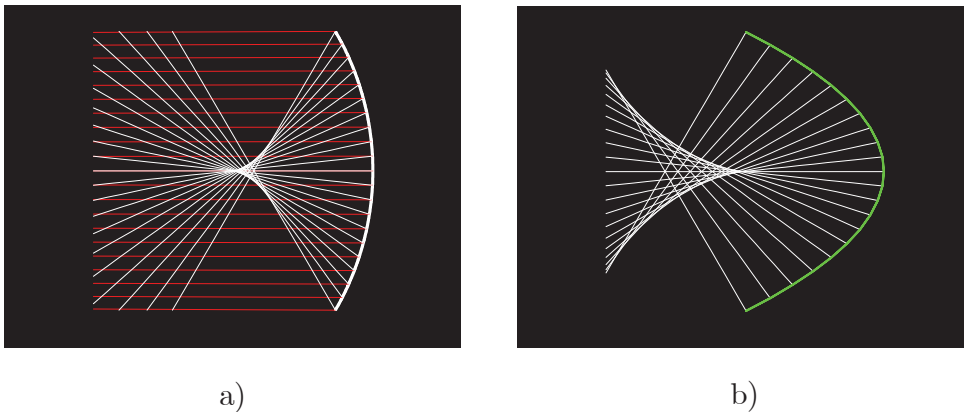
#### 4.2.6. Construcción del frente de onda asociado a las cáusticas y propagación del frente de onda obtenido

En la sección 2.2 hablamos de cáusticas, ahora nuestro propósito es poder construir el frente de onda de cada una de las curvas dadas para construir las cáusticas, es importante mencionar que lo haremos pensando solamente en la zona paraxial.

Para construir el frente de onda cada rayo que es reflejado o refractado por la

superficie analizada y los cuales son propagados hasta un plano dado los consideraremos como la normal en un punto dado del frente de onda, cada rayo proveniente de un plano tendrán la misma longitud de camino óptico.

Consideremos un círculo y los rayos incidentes solo estarán dados hasta un ángulo de  $15^\circ$ , es decir, en la aproximación paraxial [11] y observemos la cáustica que se forma en dicha zona como lo muestra la figura (4.21 a)), en esta figura no controlamos la longitud de los rayos, es decir, los mandamos a un plano arbitrario. La figura (4.21 b)) nos representa la reconstrucción del frente de onda de la cáustica producida, en dicha figura estamos considerando que todos los rayos tienen la misma longitud de camino óptico.



**Figura 4.21:** a) Representa la catacaústica de un círculo en la zona paraxial.  
 b) Representa el frente de onda generado de la catacaústica del círculo.

Hasta el momento no sabemos que clase de cónica nos representa el frente de onda, entonces, utilizaremos la siguiente ecuación para determinarlo

$$ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (4.18)$$

Esta ecuación es muy facil de resolver debido a que conocemos seis puntos sobre la curva del frente de onda y podemos obtener un sistema de seis ecuaciones para determinar cada coeficiente dado por  $a, B, C, D, E$  y  $F$ , una vez obtenidos estos coeficientes utilizaremos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} F & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & a & \frac{C}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{C}{2} & B \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

y

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & B \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

construidas estas matrices obtendremos el determinante de cada una y podemos definir la ecuación del frente de onda con la siguiente tabla

det A ≠ 0	det A <sub>00</sub> ≠ 0	det A <sub>00</sub> > 0	signo (det A) = signo (a <sub>11</sub> ·a <sub>22</sub> )    Elipse imaginaria signo (det A) ≠ signo (a <sub>11</sub> ·a <sub>22</sub> )    Elipse real
		det A <sub>00</sub> < 0	Hipérbola
		det A <sub>00</sub> = 0    Parábola	
det A = 0	det A <sub>00</sub> ≠ 0	det A <sub>00</sub> > 0    Rectas no paralelas imaginarias	
		det A <sub>00</sub> < 0    Rectas no paralelas reales	
	det A <sub>00</sub> = 0	det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> = 0	
		det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> > 0	Rectas paralelas imaginarias
		det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> < 0	Rectas paralelas reales
		det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> = 0    Rectas coincidentes	

**Tabla 1:** Esta tabla muestra como obtener la forma de una curva dada por sus parámetros [22].

Un ejemplo a este método determinaremos en frente de onda de la figura (4.21). Tenemos que el sistema de ecuaciones está dado por

$$B(20,250) + D(4,500) + E(4,500) + F = 20,253$$

$$B(10,402) + D(6,688) + E(3,225) + F = 44,736$$

$$B(0,221) + D(8,950) + E(0,471) + F = 80,115$$

$$B(3,501) + D(8,221) + E(-1,871) + F = 67,600$$

del cual obtenemos que

$$\begin{aligned}
 a &= 0 \\
 B &= -80143,766209 \\
 C &= 0 \\
 D &= -360661,54093 \\
 E &= 0,19404815 \times 10^{-1} \\
 F &= 3246034,85280
 \end{aligned}$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} 3246034,852 & \frac{-360661,540}{2} & \frac{0,194 \times 10^{-1}}{2} \\ \frac{-360661,540}{2} & 0 & 0 \\ \frac{0,194 \times 10^{-1}}{2} & 0 & -80143,766 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

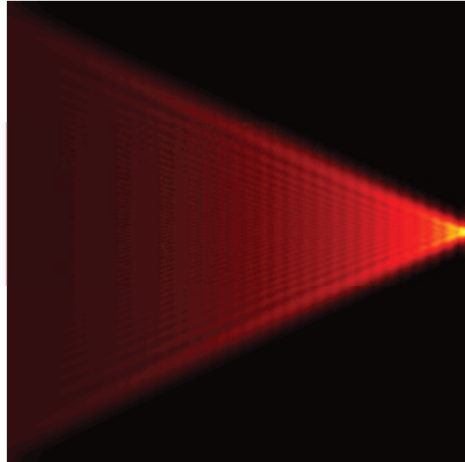
$$\det(A) = 2,606 \times 10^{15} \quad (4.22)$$

$$\det(A_{00}) = 0 \quad (4.23)$$

observando la tabla 1, determinamos que el frente de onda de la cáustica formada por un círculo es una parábola.

Conocido el frente de onda podemos conocer su cáustica de propagacion, dada por la figura (4.22)

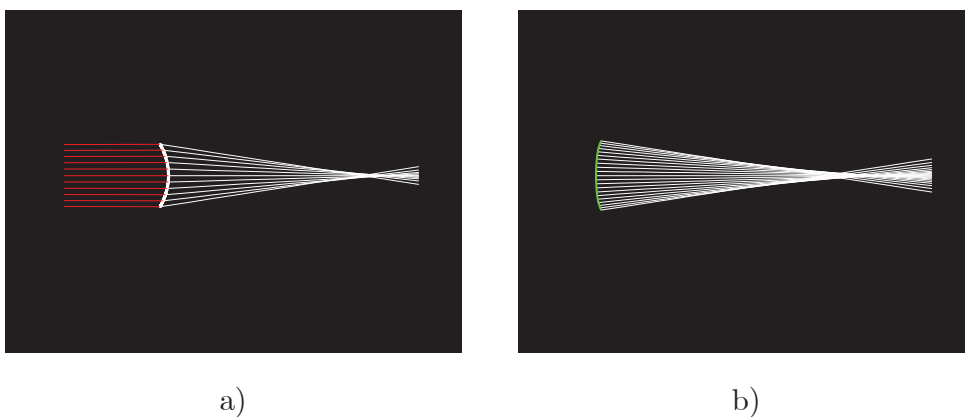




**Figura 4.22:** Cáustica de propagación del frente de onda generado por la catacáustica de un círculo.

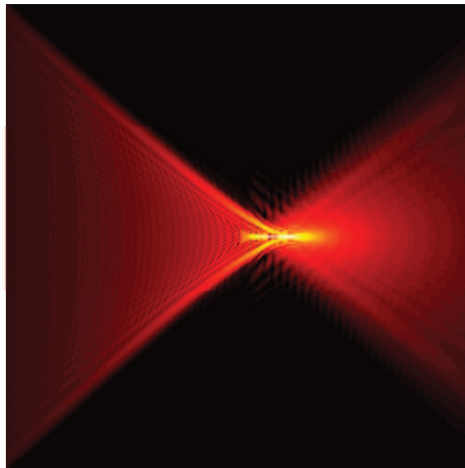
la cual comparada con la figura (4.4) observamos que tienen la misma estructura de formación.

Para la diacáusticas generada por un círculo tenemos que la figura (4.23) nos representan la diacáustica y el frente de onda de un círculo.



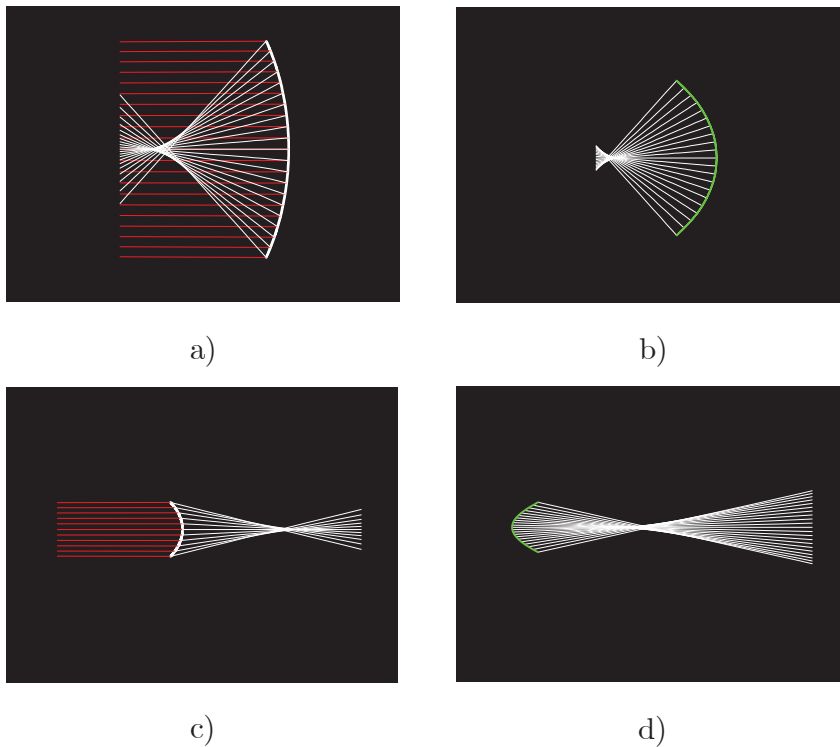
**Figura 4.23:** a) Diacáustica de un círculo considerando solamente la zona paraxial. b) Frente de onda generado por la diacáustica del círculo.

el frente de onda tiene asociada una parábola y su cáustica de propagación es



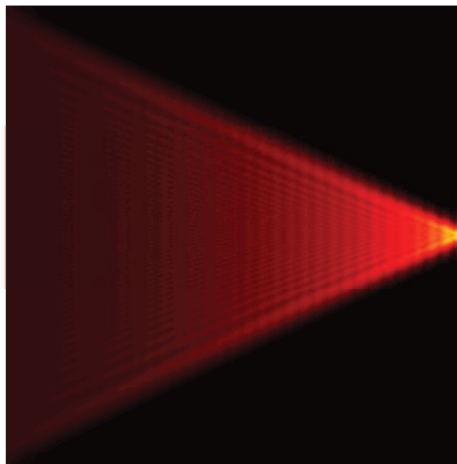
**Figura 4.24:** Cáustica de propagación generado por el frente de onda de la diacáustica. La cual es muy parecida a la cáustica de propagación de la aberración esférica.

Al haber explicado como encontramos el frente de onda de la cáustica de un círculo y su cáustica de propagación, ahora de este mismo modo como ejemplos nos propondremos a calcular ambas estructuras para la elipse. Empezaremos con la elipse con el semieje mayor en el eje horizontal, en la figura (4.25 a)) y (4.26 c)) es la catacáustica y diacáustica de la elipse y la figura (4.25 b)) y (4.25 d)) el frente de onda de cada una de ellas



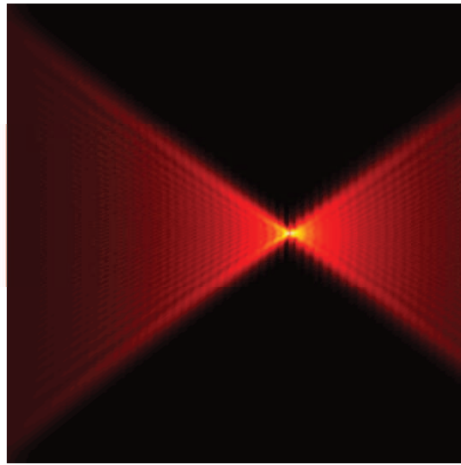
**Figura 4.25:** a) Catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal. b) Frente de onda generado por la catacáustica. c) Diacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal. d) Frente de onda generado por la diacáustica.

El frente de onda de la catacáustica es una parábola y su cáustica de propagación está dada por la figura (4.26).



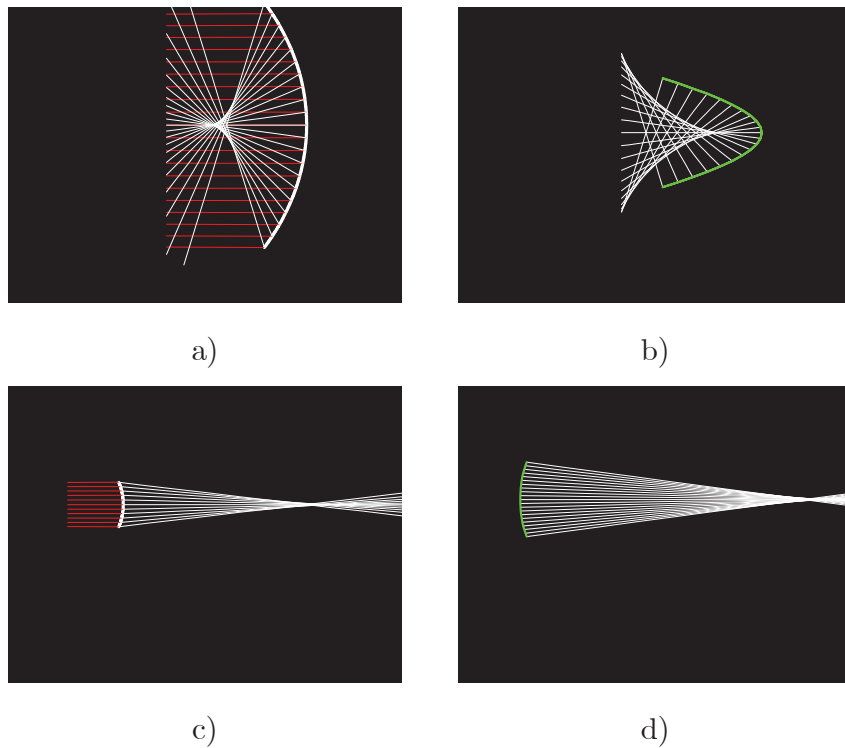
**Figura 4.26:** Cáustica de propagación generado por la catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal.

Para la diacáustica su frente de onda es una parábola y la figura (4.27) es la cáustica de propagación



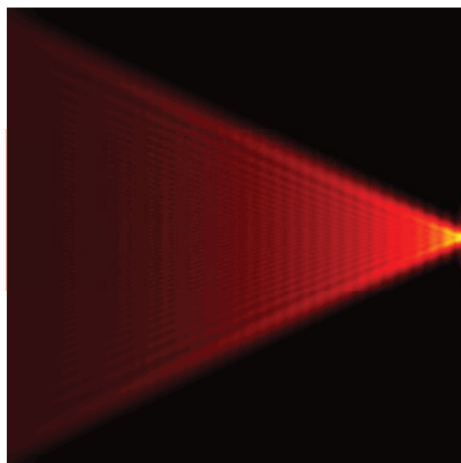
**Figura 4.27:** Cáustica de propagación generado por la diacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal.

La figura (4.28 a)) nos representa la catacáustica de la elipse con el semieje mayor en el eje vertical, el frente de onda está representado por la figura (4.28 b)). La diacáustica está dada por la figura (4.28 c)) y su frente de onda por la figura (4.28 d))

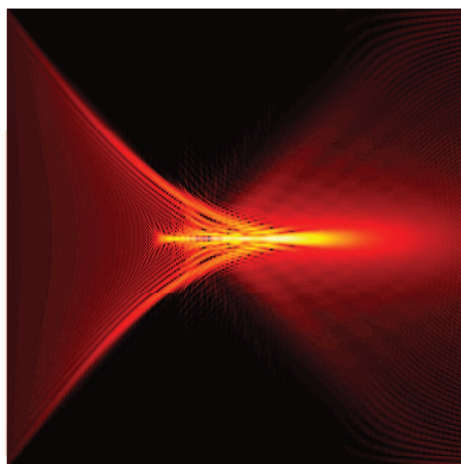


**Figura 4.28:** a) Catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical. b) Frente de onda generado por la catacáustica. c) Diacaustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical. d) Frente de onda generado por la diacaustica.

y la figura (4.29) y (4.30) nos representa la cáustica de propagación para el frente de onda de la catacáustica y la diacaustica, la cuales, tienen asociada el frente de onda de una parábola respectivamente.



**Figura 4.29:** Cáustica de propagación generado por la catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical.



**Figura 4.30:** Cáustica de propagación generado por la diacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical.

Es importante mencionar que los frentes de ondas asociados a las catacáusticas

son parábolas, donde su expresión matemática es de la forma

$$f(x) = ax^2 + c \quad (4.24)$$

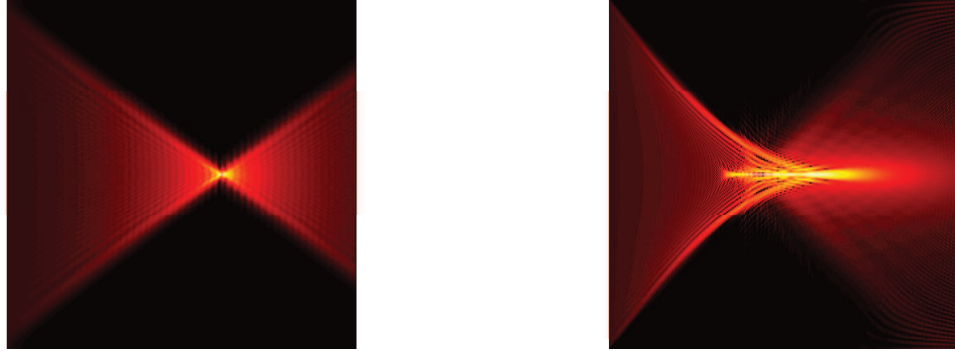
la cual indica que no existe prácticamente ningún ajuste de orden superior a  $x^2$ , en cambio, los frentes de ondas asociados a las diacáusticas tienen la forma matemática dada por

$$f(x) = ax^2 + bx^4 + c \quad (4.25)$$

observemos que tiene una corrección de cuarto orden y a pesar de que  $b \ll a$ , este factor tiene una contribución de una gran importancia, debido a que, estamos introduciendo una aberración de tipo esférica, es decir, la aproximación paraxial introduce este tipo de aberración desde un principio. Si comparamos las cáusticas de propagación de la aberración esférica con las cáusticas de propagación de los frentes de ondas asociados a las diacáusticas veremos que son casi idénticas, entendiendo que cada cáustica de propagación tiene un coeficiente de aberración diferente.

De la figura (4.29) y (4.30) podemos analizar que la aberración esférica se hace muy evidente cuando se tiene el semieje mayor está en el eje vertical y cuando el semieje mayor está en el eje horizontal es minimizada casi por completo, como se muestra en la figura (4.31).





**Figure 4.31:** Comparación entre las cáusticas de propagación con el semieje mayor en el eje horizontal y vertical.

### 4.3. Lente GRIN

En el desarrollo de esta tesis se han explicado las cáusticas de diferentes superficies con una interface, las cuales contienen índices de refracción diferentes, sin embargo, en esta sección se hace un análisis para lentes con un índice de refracción gradiente. Esto es debido a que la cornea y el cristalino que son las dos lentes más importantes en el diseño óptico del ojo tienen este tipo de comportamiento.

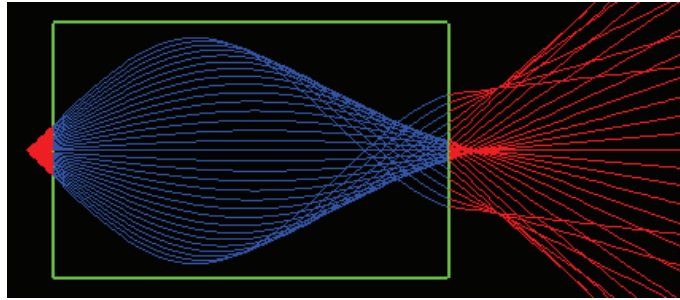
Una lente GRIN la podemos definir como una lente con un índice de refracción variable, es decir, el valor del índice de refracción es máximo en el centro de la lente y va decreciendo conforme nos alejamos del centro[24]. Matemáticamente este tipo de variabilidad la representamos como

$$n(r, z) = n_0(z) \left[ 1 - \frac{g^2(z)}{2} r^2 \right], \quad r = x^2 + y^2$$

donde  $n_0(z)$  es el índice de refracción a lo largo del eje óptico y  $g(z)$  es el parámetro de gradiente que describe la evolución de la función parabólica transversal.

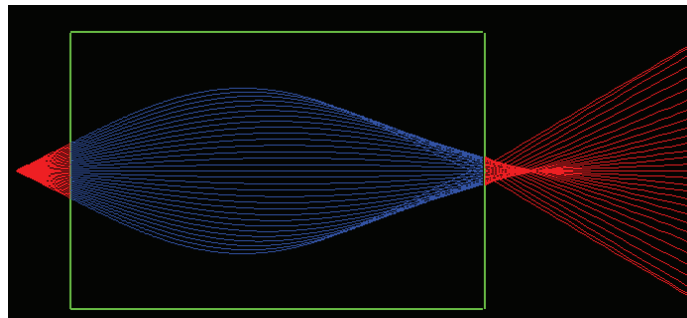
Si Consideramos un plano de una lente GRIN en forma de disco con un espesor

dado y utilizando el trazado de rayos exacto, obtenemos la siguiente cáustica



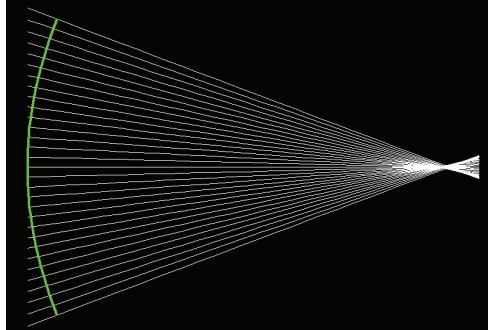
**Figura 4.32:** Catacaústica de una lente GRIN con forma de disco.

en este caso el espesor la cáustica depende del espesor del disco, sin embargo, si consideramos el trazado de rayos paraxial obtenemos siguiente cáustica



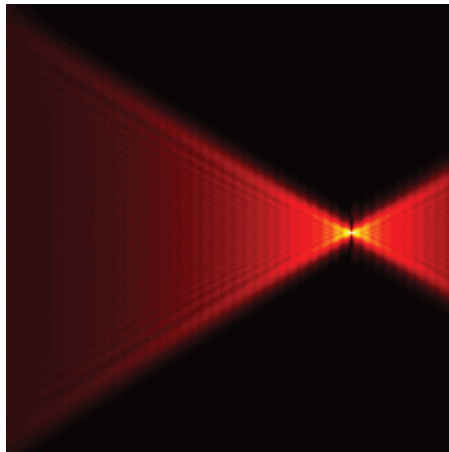
**Figura 4.33:** Catacaústica de una lente GRIN con forma de disco en la aproximación paraxial.

y como hemos dicho en la tesis nos interesa calcular el frente de onda en la zona paraxial, el cual está dado de la forma



**Figura 4.34:** Frente de onda formada por la lente GRIN en la zona paraxial.

y su cáustica de propagación por



**Figura 4.35:** Cáustica de propagación formada por el frente de onda de la lente GRIN.

Observemos que en el caso de una lente GRIN con forma de disco no se tiene casi ningún tipo de aberración como lo muestra la figura (4.35).

Es importante hacer un análisis con la forma real de las superficies de la cornea y el cristalino para estudiar el comportamiento de las aberraciones del ojo en su gran mayoría, es decir, con estas simulaciones numéricas podríamos comprender mejor el funcionamiento del ojo humano.

# Capítulo 5

## Conclusiones

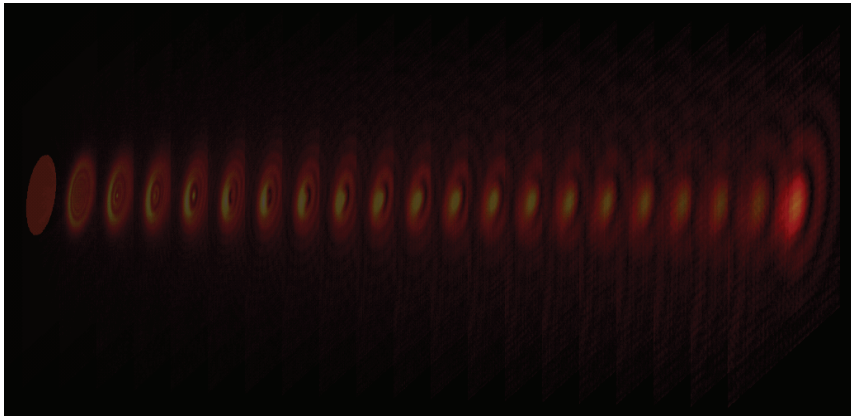
Se pudo observar a lo largo de esta tesis que la óptica geométrica y la óptica ondulatoria están estrechamente relacionadas y que logramos obtener mucha más información al estudiar los fenómenos ópticos desde ambas perspectivas.

Logramos explicar las aberraciones de frente de onda utilizando las cáusticas de propagación, con las cuales podemos determinar el efecto ocasionado por cada una de ellas de una manera más visible que cuando solamente observamos las cáusticas realizadas con óptica geométrica. A pesar que es la misma explicación que en la óptica geométrica, con las cáusticas de propagación observamos de una manera más clara dicho fenómeno.

Se pudo construir y definir que el frente de onda asociado a las catacáusticas y a las diacáusticas son parábolas con diferentes parámetros debidos a la superficie con las cuales se construyeron las cáusticas. Para el caso de las catacáusticas el frente de onda se puede mencionar que siempre son parábolas "perfectas", es decir, con la forma matemática dada por  $f(x) = ax^2 + c$  y para las diacáusticas el frente de onda está dado por  $f(x) = ax^2 + bx^4 + c$ , lo cual, significa que es una parábola que tiene una corrección a cuarto orden, es muy importante mencionar que esta clase de frente de ondas implica que tiene desde un inicio una aberración de tipo esférica dada por la ecuación (2.29) definida en el capítulo 2. Debido a

que los cálculos fueron realizados en la zona paraxial, esto implica que este tipo de aproximaciones desde un principio incluye una aberración de este tipo, la cual puede ser minimizada utilizando el semieje mayor de la elipse en el eje horizontal.

Este método nos permite construir una PSF de forma tridimensional, la cual, estaría formada por las cáusticas de propagación y la PSF calculada en diferentes distancias como lo muestra la figura (5.1). También es posible comprobar con un grado de precisión que tipo de superficies no tienen aberración esférica, por ejemplo como una asfera, o que tipo de aberración se tiene en cualquier superficie que actúe como una lente.



**Figura 5.1:** PSF tridimensional formada por las cáusticas de propagación.

Algunos trabajos a futuro son obtener este tipo de tratamientos para superficies tridimensionales [23] y para superficies con un índice de gradiente cuadrático [24] para entender mejor el funcionamiento del modelo de formación de imágenes del cristalino. También es posible analizar la visión periférica en un arreglo de dos dimensiones para poder observar el cambio de las cáusticas al hacer una propagación fuera de eje, es decir, sería muy importante comprobar con este tipo de análisis que cuando una lente, en este caso el ojo humano, se encuentra fuera de eje se adicionan dos tipos de aberraciones: el astigmatismo y la miopía.

También se pueden utilizar aberraciones de alto orden con este método, lo

## *CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES*

---

cual nos llevaria a tener una aplicación muy importante como es ver como afecta el cambio de la superficie de la cornea despues de haber realizado una operación Lasik, es decir, obtener las cáusticas de propagación de la forma de la cornea antes de ser operado y después de haber sufrido la operación y así poder ver que tipo de aberraciones se eliminaron y cuales se le agregaron.

**Índice de Figuras y Tablas**

Fig. 2.1      Catacáustica de un círculo con rayos incidentes de infinito. La curva verde es llamada nefroide.....10

Fig. 2.2      Fuente colocada en el centro del círculo. Los rayos se reflejan en la misma dirección en la cual incidieron.....11

Fig. 2.3      Catacáustica de un círculo con la fuente puntual colocada sobre el eje horizontal y sobre la superficie del círculo.....12

Fig. 2.4      Catacáustica de una elipse con el semieje mayor en eje vertical. Los rayos inciden de infinito.....13

Fig. 2.5      Catacáustica de una elipse con el semieje mayor en el eje horizontal. Los rayos incidentes provienen de infinito.....14

Fig. 2.6      Los rayos incidentes provenientes del infinito se reflejan pasando por el foco.....15

Fig. 2.7      Cuando la fuente puntual se coloca en el foco de la parábola se reflejan a paralelos al eje óptico.....16

Fig. 2.8      Catacáustica de una hipérbola.....16

Fig. 2.9      Diacáustica de un círculo.....18

Fig. 2.10     Diacáustica de una elipse con el semieje mayor en el eje horizontal.....18

Fig. 2.11     Diacáustica de una elipse con el semieje mayor en el eje vertical.....19

Fig. 2.12     Diacáustica de una parábola. Los rayos no provienen de infinito.....20

Fig. 2.13     Diacáustica de una hipérbola. Los rayos no inciden desde infinito.....20

Fig. 2.14     Patrón de difracción de Fraunhofer para una abertura rectangular.....31

Fig. 2.15     Patrón de difracción de Fraunhofer para una abertura circular.....32

Fig. 2.16	La aberración de onda está definida como la diferencia de el frente de onda aberrado y el frente de onda esférico del sistema óptico perfecto.....	33
Fig. 2.17	Aberración Esferica obtenida con el trazado de rayos exacto.....	34
Fig. 2.18	Intensidad del campo con aberración Esférica calculada en el foco de la lente cuando el campo propagado incide sobre una abertura circular.....	35
Fig. 2.19	Aberración de distorsión de Barril.....	36
Fig. 2.20	Aberración de distorsión de Corset.....	36
Fig. 2.21	Intensidad del campo con aberración de barril calculada con la función de aberración con un coeficiente $A_s$ negativo incidiendo sobre una abertura cuadrada.....	37
Fig. 2.22	Intensidad del campo con aberración de corset calculada con la función de aberración con un coeficiente $A_s$ positivo incidiendo sobre una abertura cuadrada.....	37
Fig. 2.23	Aberración de coma con trazo de rayos exacto.....	38
Fig. 2.24	Intensidad del campo con aberración de coma calculada en el foco de la lente cuando el campo propagado incide sobre una abertura circular.....	39
Fig. 2.25	Intensidad del campo propagado con aberración de coma en el plano sagital.....	39
Fig. 2.26	Astigmatismo observado desde óptica geométrica.....	41
Fig. 2.27	Astigmatismo calculado en el foco de la lente cuando el campo propagado incide sobre una abertura circular.....	41
Fig. 2.28	Curvatura de campo obtenida con trazado de rayos exacto.....	42
Fig. 2.29	Aberración de curvatura de campo calculada en el foco de la lente.....	42
Fig. 2.30	Aberración de Tilt con óptica geométrica.....	43
Fig. 2.31	Aberración de tilt calculada en el foco de la lente.....	43
Fig. 3.1	Pirámide que representa los modos de Zernike.....	47
Fig. 3.2	Representación de la PSF de 37 modos de Zernike.....	48
Fig. 3.3	Representación de la MTF de 37 modos de Zernike.....	50



Fig. 4.1	a) Frente de onda plano y b) Frente de onda esférico.....	53
Fig. 4.2	Obtención del frente de onda aberrado.....	54
Fig. 4.3	Frente de onda propagado después de haber pasado por la lente.....	55
Fig. 4.4	Cáustica de propagación de una lente que no tiene ninguna clase de aberraciones. a) Calculada en el plano sagital y b) calculada en el plano tangencial.....	55
Fig. 4.5	Frente de onda ideal en óptica geométrica.....	56
Fig. 4.6	Disco de Airy.....	57
Fig. 4.7	Frente de onda con aberración de curvatura de campo después de pasar por la lente.....	58
Fig. 4.8	Frente de onda de la aberración de curvatura de campo.....	59
Fig. 4.9	Cáustica de propagación de la aberración de curvatura de campo a) Con un coeficiente de aberración positivo obtenemos que el enfoque es mayor a la distancia focal, lo cual ocasiona hipermetropía y b) si el coeficiente es negativo obtenemos que el enfoque es antes de la distancia focal de la lente, lo cual se interpreta como miopía.....	60
Fig. 4.10	Frente de onda de la aberración esférica.....	61
Fig. 4.11	Cáustica de propagación de la aberración esférica.....	62
Fig. 4.12	Frente de onda de la aberración de astigmatismo después de la lente.....	63
Fig. 4.13	Frente de onda de la aberración de astigmatismo.....	63
Fig. 4.14	Cáustica de propagación de la aberración de coma. a) Plano sagital con un coeficiente de aberración positivo. b) Plano tangencial con coeficiente de aberración positivo. c) Plano sagital con un coeficiente de aberración negativo. b) Plano tangencial con coeficiente de aberración negativo.....	64
Fig. 4.15	Frente de onda de la aberración de coma.....	65
Fig. 4.16	Frente de onda propagado con aberración de coma.....	66
Fig. 4.17	Cáustica de propagación de la aberración de coma. En el plano tangencial son simétricas con respecto al coeficiente de aberración como lo muestra	

la figura b) y d). En el plano sagital notamos que cuando se tienen coeficientes de diferentes signos cambia la dirección de la aberración de coma. Cuando se tiene un coeficiente positivo la caústica de propagación en el plano sagital está dada por la figura a) y para uno negativo está dado por b).....67

Fig. 4.18 Frente de onda de la aberración de tilt.....68

Fig. 4.19 Frente de onda propagado con aberración de tilt.....69

Fig. 4.20 Cáustica de propagación de la aberración de Tilt. El plano tangencial es simétrico con respecto al coeficiente de aberración como lo representa b) y d). En el plano sagital la diferencia es que el eje óptico cambia de dirección. Para un coeficiente positivo es representado por a) y para uno negativo por c).....70

Fig. 4.21 a) Representa la catacáustica de un círculo en la zona paraxial.

b) Representa el frente de onda generado de la catacáustica del círculo.....71

Tabla 1 Esta tabla muestra como obtener la forma de una curva dada por sus parámetros.....72

Fig. 4.22 Cáustica de propagación del frente de onda generado por la catacáustica de un círculo.....74

Fig. 4.23 a) Diacáustica de un círculo considerando solamente la zona paraxial. b) Frente de onda generado por la diacáustica del círculo.....74

Fig. 4.24 Cáustica de propagación generado por el frente de onda de la diacáustica. La cual es muy parecida a la cáustica de propagación de la aberración esférica.....75

Fig. 4.25 a) Catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal. b) Frente de onda generado por la catacáustica. c) Diacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal. d) Frente de onda generado por la diacáustica.....76

Fig. 4.26 Cáustica de propagación generado por la catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal.....77

Fig. 4.27 Cáustica de propagación generado por la diacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje horizontal. 78

Fig. 4.28	a) Catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical. b) Frente de onda generado por la catacáustica. c) Diacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical. d) Frente de onda generado por la diacáustica.....	79
Fig. 4.29	Cáustica de propagación generado por la catacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical.....	80
Fig. 4.30	Cáustica de propagación generado por la diacáustica de una elipse con semieje mayor en el eje vertical.....	80
Fig. 4.31	Comparación entre las cáusticas de propagación con el semieje mayor en el eje horizontal y vertical.....	82
Fig. 4.32	Catacáustica de una lente GRIN con forma de disco.....	83
Fig. 4.33	Catacáustica de una lente GRIN con forma de disco en la aproximación paraxial.....	83
Fig. 4.34	Frente de onda formada por la lente GRIN en la zona paraxial.....	84
Fig. 4.35	Cáustica de propagación formada por el frente de onda de la lente GRIN.....	84
Fig. 5.1	PSF tridimensional formada por las cáusticas de propagación.....	86

# Bibliografía

- [1] George Smith and David A. Atchison, The eye and visual optical instruments, (CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1997).
- [2] Susana Marcos, Calidad óptica del ojo", Investigación y Ciencia,66-74, (2005).
- [3] Gabriel Martinez-Niconoff, Jazmin Carranza and Alejandro Cornejo-Rodriguez, Caustics of diffraction fields", Optics Communications **114**, 194-198, (1995).
- [4] Introduction to Optics, Frank L. Pedrotti sj y Leno S. Pedrotti; Pearson Ed. Internacional, 1993.
- [5] Alejandro Cornejo Rodríguez y Gonzalo Urcid Serrano, ÓPTICA GEOMÉTRICA Resumen de Conceptos y Fórmulas Parte I (Reporte Técnico), 2da ed., (Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y electrónica, 2006).
- [6] Donald C. O'shea, Elements of modern optical desingn, (JOHN WILEY & SONS, 1985).
- [7] Virenda N. Mahajan, Optical imaging and aberrations, Wave diffraction optics, (SPIE PRESS 2004).
- [8] Eugene Hecht, Optics, 4 ed., (Addison Wesley, 2002).
- [9] J. F. Nye, Natural focusing and fine structure of light, (IOP, 1999).

- [10] Tim Poston and Ian Stewart, Catastrophe theory and its applications, (DOVER 1978).
- [11] Maximino Avendaño-Alejo, Luis Castañeda and Ivan Moreno, "Properties of caustics produced by a positive lens: meridional rays", *J. Opt. Soc. Am. A* **27**, 2252-2260 (2010).
- [12] O. Cardona Núñez, J. Pedraza Contreras y A. Cornejo Rodríguez, "Significado de las superficies cáusticas en óptica", *Revista Mexicana de Física* **29**, 245-258, (1983).
- [13] J. Clerk Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **155**, 459-512 (1865).
- [14] Heaviside O, *Electrical Papers* reprinted 1970 (New York: Chelsea) vol 1, p 447; vol 2, p 172 (original edition, London 1892).
- [15] Gibbs J W, *Element of Vector Analysis* privately printed in two parts 1881, 1884 (reprinted 1961 *The Scientific Papers of J Willard Gibbs* (New York: Dover)).
- [16] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, 3 Ed. (Roberts & Company Publishers, 2005)
- [17] Max Born and Emil Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7th ed., (CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2002).
- [18] L. Froehly, F. Courvoisier, A. Mathis, M. Jacquot, L. Furfaro, R. Giust, P. A. Lacourt, J. M. Dudley, "Arbitrary accelerating micron-scale caustic beams in two and three dimensions", *Optics Express*, **19**, (2011).
- [19] Ronald R. Krueger, Raymond A. Applegate and Scott M. MacRae, *Wavefront customized visual correction*, (SLACK Incorporated, 2004).

## *BIBLIOGRAFÍA*

---

- [20] J. Y. Wang and D. E. Silva, "Wave-front interpretation with Zernike polynomials", *Applied Optics* **19**, 1510-1518, (1980).
- [21] Virenda N. Mahajan, "Zernike circle polynomials and optical aberrations of systems with circular pupils", *Supplement to Applied Optics*, 8121-8124, (1994).
- [22] [http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Conicas/marco\\_conicas.htm](http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Conicas/marco_conicas.htm)
- [23] Edwin Román-Hernández, José Guadalupe Santiago-Santiago, Gilberto Silva-Ortigoza and Ramón Silva-Ortigoza, "Wavefronts and caustic a spherical wave reflected by an arbitrary smooth surface", *J. Opt. Soc. Am. A* **26**, 2295-2305 (2009).
- [24] M. T. Flores-Arias, A. Díaz del Rio, C. Bao-Varela, M. V. Pérez and C. Gómez-Reino, "Description of gradient-index human eye by a first-order optical system", *J. Opt. A:Pure Appl. Opt.* **11**, 1-8, (2009).