



INAOE

Análisis alternativo a la teoría de perturbaciones

por

Juan Martínez Carranza

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**Maestro en Ciencias con la especialidad
en Óptica**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica**

Agosto 2011

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa

Dr. Francisco Soto Eguibar

©INAOE 2011

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias de esta tesis en su
totalidad o en partes mencionando la fuente.



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis asesores, el Dr. Héctor Moya Cessa y el Dr. Francisco Soto Eguibar por su tiempo, paciencia y explicaciones que me brindaron durante el desarrollo de este trabajo y al CONACyT por el apoyo brindado por medio de la beca de maestría.

Al Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, por su apoyo para llevar a buen fin los estudios de Maestría.

DEDICADO A...

Mis padres Javier y Leonarda que siempre me han apoyado en mis estudios con sus consejos y buenas enseñanzas. A mis hermanos Javier, José y Verónica que con sus ejemplos me han motivado a seguir superandome día con día no solo como estudiante sino también como persona.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Antecedentes	3
1.2. Marco de trabajo	5
2. Una revisión a los métodos de aproximación en la Mecánica Cuántica	7
2.1. La ecuación de Schrödinger	7
2.1.1. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo	9
2.2. Los métodos de aproximación	12
2.2.1. La aproximación WKB	12
2.2.2. La teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger	14
3. Estados Coherentes	20
3.1. Estados Coherentes	20
3.1.1. Eigenestados del operador de aniquilación	22
3.1.2. El estado de vacío desplazado	23
3.2. Los estados coherentes comprimidos	25
3.3. Estados de mínima incertidumbre	27

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	II
4. Análisis matricial a la teoría de perturbaciones	31
4.1. Modificando la teoría de perturbaciones	31
4.1.1. Corrección a primer orden	34
4.1.2. Correccion a segundo orden	41
4.1.3. Correcciones de más alto orden	47
4.2. Otros ejemplos	48
4.2.1. Potencial Coseno	49
4.2.2. Potencial de Morse	56
4.3. El operador de Dyson	60
5. Los estados coherentes y la teoría de perturbaciones	65
5.1. Estados coherentes generados por perturbaciones lineales	66
5.2. Estados comprimidos generados por perturbaciones cuadráticas	71
5.3. Estados coherente generalizados	79
6. Conclusiones	82

Resumen

En este trabajo, construimos un método alternativo a la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger de la mecánica cuántica no relativista mediante la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo y el algebra matricial. Este método tiene la ventaja que proporciona una notación compacta, la corrección a la energía y a la función de onda puede ser calculada en una sola operación, y además nos permite analizar la evolución temporal del sistema perturbado. Para analizar los resultados obtenidos, primero aplicamos este método a los casos elementales del potencial lineal y cuadrático que actúan sobre el oscilador armónico cuántico como perturbaciones, y después aplicarlo a potenciales más complejos como el coseno y el de Morse. Adicionalmente, mostramos que este nuevo análisis puede ser relacionado de forma directa con las series de Dyson, por lo que podemos dar una expresión alternativa a estas. Finalmente, para comprobar los resultados que hemos obtenido, mostramos la relación que existe entre el método que desarrollamos con el operador de desplazamiento y el operador de compresión.

Abstract

In this thesis work, we construct an alternative approach to perturbation theory of Rayleigh-Schrödinger non-relativistic quantum mechanics by time-dependent Schrödinger equation and matrix algebra. This method has the advantage that provides a compact notation, the correction to the energy and wave function can be calculated in a single operation, and also allows us to analyze the temporal evolution of the perturbed system. To analyze the results, that we have obtained, first apply this method to the elementary cases of linear and quadratic potentials acting on the quantum harmonic oscillator as perturbations, and then apply it to potentials more complex as the cosine and Morse's potential. Additionally, we show that this new analysis can be related directly with the Dyson series, so we can give an alternative expression to them. Finally, to verify the results, that we have obtained, we show the relationship between the method, that we developed, with the displacement operator and the squeezed operator.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

donde

$$\hat{H} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}_0(r, t) \right), \quad (1.2)$$

introducida por Schrödinger en 1926 [1], es una de las principales herramientas en el desarrollo de la mecánica cuántica no relativista, ya que todo proceso es descrito en menor o mayor grado por ella.

Sin embargo, existen muchos sistemas físicos de interés en los cuales \hat{V}_0 no depende del tiempo. Esta última consideración nos permite escribir una solución para la ecuación (1.1) de la forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itE/\hbar}|\phi\rangle, \quad (1.3)$$

donde $|\phi\rangle$ es independiente del tiempo. Sustituyendo (1.3) en la ecuación (1.1) obtenemos la ecuación de eigenvalores

$$\hat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \quad (1.4)$$

donde \hat{H} es un Hamiltoniano independiente del tiempo del sistema físico en que estamos interesados. La expresión (1.4) es conocida como ecuación de Schrödinger independiente del tiempo o ecuación de Schrödinger estacionaria. De hecho Schrödinger resolvió esta ecuación para obtener el espectro de energía del átomo de hidrogeno [2].

No obstante la mayoría de los problemas relacionados con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo son bastantes complejos para ser resueltos de forma exacta, de hecho sólo puede ser resuelta en forma exacta para unos cuantos casos como la partícula libre, el pozo de potencial cuadrado infinito, el oscilador armónico cuántico, entre otros.

En los casos en los que la ecuación (1.3) no tiene solución exacta estamos forzados a usar métodos de aproximación [4]-[7], que si bien no resuelven el problema en cuestion de forma exacta, nos brindan una solución con un cierto grado de aproximación de tal manera que podemos comprender el comportamiento físico del sistema que estamos estudiando.

Un método de aproximación bien conocido en la mecánica cuántica es la aproximación WKB o también conocido como la aproximación semi-clásica. Este formalismo es particularmente útil en el cálculo de energías (como en el caso del potencial de Morse [25]) y razones de tuneleo a través de barreras de potenciales.

Otra método de aproximación muy usado, y en el cual estamos particularmente interesados en este trabajo, es la teoría de perturbaciones, también conocida como teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger. Este método tiene sus raíces en los trabajos de Rayleigh y de Schrödinger, pero que no fue bien fundamentado matemáticamente hasta 50 años después por Rellich [3]. Este formalismo ha sido aplicado a una amplia variedad de sistemas físicos, por lo que en su constante implementación se han desarrollado técnicas que van desde los métodos numéricos [8], hasta aquellas que resuelven los problemas de convergencia [9], [10] con el objetivo de encontrar una solución mas precisa.

La teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger consiste principalmente en dividir un Hamiltoniano \hat{H} independiente del tiempo en dos partes, como sigue:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}, \quad (1.5)$$

donde H_0 es un Hamiltoniano que tiene soluciones exactas, es decir, las soluciones correspondientes a su ecuación de eigenvalores

$$\hat{H}_0|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle \quad (1.6)$$

son conocidas, \hat{V} es un potencial perturbativo y λ es un parametro que controla el grado de perturbación del sistema, de tal manera que cuando $\lambda = 0$ se tiene el caso sin perturbación y cuando $\lambda = 1$ se tiene el máximo grado de perturbación del sistema. Por lo que conocido \hat{V} debemos estudiar el efecto de este potencial sobre las soluciones de \hat{H}_0 .

Una característica importante de este método de aproximación es que proporciona las correcciones a la energía y a la función de onda de forma separada.

1.2. Marco de trabajo

En este trabajo de tesis, construimos un nuevo análisis a la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger, de tal forma que las correcciones correspondientes al sistema que estamos estudiando se obtengan en una sola operación. Para esto consideramos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, el algebra matricial y los sistemas de ecuaciones diferenciales. Demostramos que este modelo puede reproducir todos los resultados dados por la análisis tradicional, y además este nuevo modelo puede ser asociado con el operador de Dyson, el cual es un resultado encontrado comúnmente en la teoría cuántica de campos. También tomando el modelo del oscilador armónico cuántico establecemos una relación entre los operadores de desplazamiento y de compresión con los potenciales perturbativos lineal y cuadrático,

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.2. MARCO DE TRABAJO

respectivamente. Adicionalmente, aplicaremos nuestro análisis a potenciales más complejos como el coseno y el de Morse.

El contenido de este trabajo está organizado como sigue: En el capítulo dos haremos una breve descripción de la ecuación de Schrödinger y los métodos de aproximación usados cuando no tiene una solución exacta. Dentro de los métodos de aproximación que revisaremos están la aproximación WKB y la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger. En el capítulo tres presentamos un estudio de las principales características matemáticas de los estados coherentes. En el capítulo cuatro desarrollamos nuestro análisis alternativo a la teoría de perturbaciones presentada en el capítulo dos. Este modelo será construido con base en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Después de obtener los resultados buscados, los aplicamos al oscilador armónico cuántico, para comparar con las soluciones que se encuentran en la literatura. En el capítulo cinco relacionamos, a través de nuestro análisis, los operadores de desplazamiento y de compresión con los potenciales lineal y cuadrático actuando como potenciales perturbativos sobre el oscilador armónico. Finalmente, en el capítulo seis presentamos las conclusiones.

Capítulo 2

Una revisión a los métodos de aproximación en la Mecánica Cuántica

En este capítulo haremos una breve revisión de la ecuación de Schrödinger, y además analizaremos los métodos de aproximación, como la aproximación WKB y la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger.

2.1. La ecuación de Schrödinger

En los primeros años del siglo XX, hubo una serie de hechos experimentales (la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton, entre otros [4]) que no se podían resolver de manera satisfactoria con las teorías conocidas hasta ese entonces como la mecánica Newtoniana o la electrodinámica de Maxwell. Sin embargo, por medio de la resolución del problema de la radiación del cuerpo negro por parte de Planck y posteriormente del efecto fotoeléctrico, en el cual se plantea la dualidad de la luz como partícula y onda, por parte de Einstein, se sentaron las bases para el desarrollo de la Mecánica Cuántica.

Tiempo después Louis De Broglie propuso la hipótesis que cada partícula material puede tener un comportamiento ondulatorio similar al de la luz. Bajo esta

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**
2.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

hipotesis, Schrödinger desarrolló una ecuación para la onda asociada de De Broglie, la cual es

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t)\right) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

El éxito de esta ecuación fue inmediato debido a que se pudo obtener el espectro de energía del átomo de hidrógeno, y estos resultados se ajustaban a las series Lyman, Balmer, Brackett, Paschen y Pfund.

Pero la ecuación (2.1) dio paso a un número de particularidades que difieren de la mecánica Newtoniana como:

- La función $\psi(\vec{r}, t)$ es llamada "función de onda" y de acuerdo a la interpretación estadística de Born, la integral

$$P_{\delta V} = \int_{\delta V} |\psi|^2 dV$$

es la probabilidad de encontrar la partícula dentro de un volumen δV en un tiempo t .

- Como $|\psi|^2$ es la densidad de probabilidad, entonces la integral de esta debe ser igual a uno, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1. \quad (2.2)$$

- Por la naturaleza probabilística de ψ no podemos hacer "medidas exactas" sobre el sistema, por lo que tomaremos el valor esperado, definido como

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dV, \quad (2.3)$$

donde \hat{A} es el operador asociado a la variable dinámica A ¹. Ejemplos de operadores son el operador de posición \hat{x} , el operador de momento \hat{p} , el operador Hamiltoniano \hat{H} , etcétera.

¹Por operador entenderemos a toda transformación lineal que es aplicada a la función que le sigue.

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**
2.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

2.1.1. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

En la sección anterior presentamos la ecuación de Schrödinger y algunos conceptos fundamentales de ella; sin embargo, no hemos dicho nada acerca de cómo resolverla. Por el momento nos concentraremos cuando \hat{V} es una función independiente del tiempo, y además reduciremos nuestro análisis al caso unidimensional.

Para resolver la ecuación (2.1), utilizaremos el método de separación de variables, para lo cual suponemos que podemos escribir

$$\psi(x, t) = \phi(x)f(t). \quad (2.4)$$

Sustituyendo esta propuesta en la ecuación (2.1), obtenemos

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} + V. \quad (2.5)$$

Definiendo la constante de separación como E , tenemos que:

$$i\hbar \frac{df}{dt} = Ef, \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \phi = E\phi. \quad (2.7)$$

Ahora podemos ver fácilmente que la solución de (2.6) es:

$$f = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}. \quad (2.8)$$

Mientras que la ecuación (2.7), llamada ecuación de Schrödinger independiente del tiempo o ecuación de Schrödinger estacionaria, sólo se puede resolver cuando conocemos la forma del potencial V .

Considerar que la ecuación (2.1) tiene una solución de la forma (2.4), representa una gran ventaja en el sistema que estamos analizando debido a que:

- El sistema está en un estado estacionario, lo significa que aunque la función de onda es dependiente del tiempo, la densidad de probabilidad

$$|\psi(x, t)|^2 = |\phi(x)|^2, \quad (2.9)$$

CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA

2.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

es independiente del tiempo. Similarmente ocurre con el valor esperado de la variable dinámica A , es decir,

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \hat{A} \phi dx. \quad (2.10)$$

- En mecánica clásica el Hamiltoniano está definido como

$$H = \frac{p^2}{2m} + V. \quad (2.11)$$

Por tanto de la ecuación (2.7) podemos establecer el operador Hamiltoniano por medio de la sustitución canónica $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$; sin embargo como estamos considerando el caso unidimensional es suficiente considerar² $p_x \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}. \quad (2.12)$$

Así la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo puede ser reescrita como la ecuación de eigenvalores

$$\hat{H}\phi = E\phi. \quad (2.13)$$

Calculando el valor esperado de H , obtenemos que

$$\langle H \rangle = E \quad (2.14)$$

y

$$\langle H^2 \rangle = E^2. \quad (2.15)$$

Finalmente, tenemos que la desviación estándar en \hat{H} está dada como

$$\Delta H = \langle H^2 \rangle - (\langle H \rangle)^2 = 0. \quad (2.16)$$

Esto significa que cada medida hecha para la energía de los estados propios del Hamiltoniano regresa con seguridad el valor propio E y por lo tanto ψ es un estado de energía bien definido.

²A partir de este punto consideraremos a V como un operador, es decir, \hat{V} .

CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA

2.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

- Dependiendo del Hamiltoniano que estemos analizando, la ecuación (2.13) puede admitir una colección de soluciones $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots)$ cada una asociada con su valor constante de separación (E_1, E_2, E_3, \dots) ; de esta forma hay una función de onda diferente por cada valor de su eigen-energía $(\psi_1 = \phi_1 e^{-iE_1 t/\hbar}, \psi_2 = \phi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}, \psi_3 = \phi_3 e^{-iE_3 t/\hbar}, \dots)$.

Por último, la ecuación de Schrödinger tiene la propiedad de que cualquier combinación lineal de las soluciones es una solución, y por lo tanto podemos construir inmediatamente la solución general de la forma

$$\psi(x, t) = \sum_n \phi_n e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.17)$$

Conociendo estos hechos nosotros podemos resolver en principio la ecuación (2.13) conociendo al potencial V .

Algunos potenciales con solución analítica son: el pozo cuadrado infinito, el cual es escrito como:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \leq x \leq a, \\ \infty & \text{De otra forma.} \end{cases}$$

Las eigen-funciones ϕ_n y los valores propios de la energía E_n de este Hamiltoniano son

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \\ E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

El oscilador armónico, el cual tiene la forma

$$V = \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

para este Hamiltoniano, las eigen-funciones ϕ_n y los valores propios E_n son

$$\phi_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \\ E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Donde H_n son los polinomios de Hermite, m es la masa de la partícula, $n = 0, 1, 2, \dots$ y $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x$.

2.2. Los métodos de aproximación

En la sección anterior, se describió de manera breve la ecuación de Schrödinger y mencionamos dos ejemplos en los cuales puede ser resuelta exactamente. Sin embargo, no hay muchos potenciales para los cuales exista una solución exacta como los ejemplos mostrados anteriormente. Para estos casos podemos emplear los métodos de aproximación los cuales obtienen una solución aproximada de (2.7).

2.2.1. La aproximación WKB

Una técnica para encontrar una solución aproximada de la ecuación de Schrödinger es el método WKB; el nombre de este se debe a Wentzel, Kramers y Brillouin, o aproximación semi-clásica, dado que maneja soluciones en las cuales \hbar es pequeña comparada con la acción [5]. También este método es particularmente útil para calcular energías y razones de tunelaje a través de barreras de potenciales.

La idea esencial en el método WKB es reescribir la ecuación (2.7) como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\phi, \quad (2.18)$$

donde

$$p \equiv \sqrt{2m(E - V(x))}, \quad (2.19)$$

Por el momento supondremos que $E > V$ y diremos que estamos en "la región clásica". En general tenemos que ϕ es alguna función compleja que podemos escribir en términos de su amplitud, $A(x)$ y de su fase $\varphi(x)$, las cuales son reales

$$\phi(x) = A(x)e^{i\varphi(x)}. \quad (2.20)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.18)³

$$A'' + 2iA'\varphi' + iA\varphi'' - A(\varphi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A. \quad (2.21)$$

³Por simplicidad, el símbolo 'significa $\frac{d}{dx}$

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**
2.2. LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Separaremos ahora esta expresión en dos ecuaciones, la primera ecuación es la parte real y la segunda es la parte imaginaria:

$$A'' - A(\varphi')^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A, \quad (2.22)$$

$$2A'\varphi' + A^2\varphi'' = (A^2\varphi')' = 0. \quad (2.23)$$

La solución de (2.23) es

$$A = \frac{C}{\sqrt{\varphi}}, \quad (2.24)$$

donde C es una constante. Sin embargo, la ecuación (2.22) no puede ser resuelta en general, por lo que es necesario hacer la suposición de que la función de amplitud A varía lentamente, de tal manera que el término A'' sea despreciable, esto es:

$$\left| \frac{A''}{A} \right| \ll \left| \frac{p^2}{\hbar^2} \right|, \quad (2.25)$$

entonces tomando esta consideración en (2.22), podemos suprimir el término A'' del lado izquierdo de esta ecuación y obtenemos que

$$(\varphi')^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}. \quad (2.26)$$

Por lo tanto, la solución buscada es

$$\varphi(x) = \frac{\pm 1}{\hbar} \int p(x) dx \quad (2.27)$$

y la solución de la ecuación (2.20) es

$$\phi(x) = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}, \quad (2.28)$$

Por último, tenemos que la solución general será una combinación lineal de la forma

$$\phi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} + \frac{C_2}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}. \quad (2.29)$$

Esta solución fue obtenida para $E > V$; para $E < V$, tenemos la llamada "la región no clásica", y la solución es

$$\phi(x) = \frac{E_1}{\sqrt{p}} e^{\frac{1}{\hbar} \int p(x) dx} + \frac{E_2}{\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int p(x) dx}. \quad (2.30)$$

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**
2.2. LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Tomando ahora el problema de una partícula atrapada en un pozo de potencial, y analizando con el método WKB, podemos demostrar que la solución es de la forma

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{i}{\hbar} \int |p(x)| dx} & \text{para } x_1 < x, \\ \frac{D_1}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} + \frac{D_2}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} & \text{para } x_1 < x < x_2, \\ \frac{C_2}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int |p(x)| dx} & \text{para } x > x_2, \end{cases} \quad (2.31)$$

Sin embargo, esta solución falla en los puntos de retorno (x_1 y x_2). No obstante, a través de la formulas de conexión [6], se tiene que la solución no normalizada que proporciona el método WKB para los estados ligados es:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_1} |p(x)| dx} & \text{para } x_1 < x, \\ \frac{2C}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) & \text{para } x_1 < x < x_2, \\ \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x)| dx} & \text{para } x > x_2, \end{cases} \quad (2.32)$$

Además, la regla de cuantización para la energía puede ser encontrada por medio de

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (2.33)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto resolviendo (2.32) y (2.33) para un potencial V en específico, podremos dar una solución aproximada a (2.7) .

2.2.2. La teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger

Entre los métodos de aproximación existentes, estamos interesados en particular en la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger, debido a que es la base de nuestro trabajo⁴. Para trabajar en el marco de la teoría de perturbaciones, primero supondremos que conocemos completa y exactamente los eigenkets $|n^{(0)}\rangle$ y los eigenvalores $E_n^{(0)}$ de

$$\hat{H}_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle. \quad (2.34)$$

⁴En esta sección, usaremos la notación de Dirac para hacer los cálculos posteriores más simples.

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**
2.2. LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Además, consideraremos que el conjunto $\{|n^{(0)}\rangle\}$ es completo en el sentido que la relación de cerradura se cumple; es decir,

$$\hat{I} = \sum_n |n^{(0)}\rangle\langle n^{(0)}|,$$

donde \hat{I} es el operador identidad y también supondremos que el espectro de energía es no degenerado ya que, como lo habíamos mencionado anteriormente, nuestro análisis está enfocado en el caso unidimensional.

Como primer paso en el desarrollo de este método, consideremos el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (2.35)$$

donde \hat{V} es una potencial de perturbación, y estamos interesados en encontrar de forma aproximada los eigenkets y los eigenvalores de

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (2.36)$$

El problema consiste en hallar las expresiones para $|n\rangle$ y E_n usando la información proporcionada por el Hamiltoniano sin perturbación (2.34). No obstante la ecuación (2.36) no será resuelta directamente, por lo que modificaremos esta ecuación como sigue

$$\left(\hat{H}_0 + \lambda\hat{V}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (2.37)$$

El parámetro λ se introduce para controlar el orden de la corrección que queremos calcular. Además, marca una transición suave entre el caso no perturbado ($\lambda \rightarrow 0$) y el caso perturbado ($\lambda \rightarrow 1$), es decir, al incrementar el valor de λ gradualmente se espera que E_n y $|n\rangle$ también cambien respecto a $E_n^{(0)}$ y $|n^{(0)}\rangle$ y como consecuencia tenemos que este nuevo problema también depende de este nuevo parámetro.

Existen diversas formas de atacar este problema, sin embargo en esta sección desarrollaremos el análisis que Sakurai aplicó a este [7]. Como primer paso se propone definir la diferencia entre energías del sistema perturbado y no perturbado, como sigue

$$\Delta_n = E_n - E_n^{(0)}. \quad (2.38)$$

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA
2.2. LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN**

$$\Rightarrow E_n = \Delta_n + E_n^{(0)}.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.37) y reacomodando términos, obtenemos:

$$(E_n^{(0)} - \hat{H}_0)|n\rangle = (\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle. \quad (2.39)$$

Multiplicando esta ecuación por $\langle n^{(0)}|$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle n^{(0)}|(\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle &= \langle n^{(0)}|(E_n^{(0)} - \hat{H}_0)|n\rangle, \\ &= \langle n^{(0)}|E_n^{(0)}|n\rangle - \langle n^{(0)}|\hat{H}_0|n\rangle, \\ &= E_n^{(0)}\langle n^{(0)}|n\rangle - [\langle n|\hat{H}_0|n^{(0)}\rangle]^*, \\ &= E_n^{(0)}\langle n^{(0)}|n\rangle - E_n^{(0)}[\langle n|n^{(0)}\rangle]^*, \\ \langle n^{(0)}|(\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

A partir de este resultado, podemos definir el siguiente operador

$$\hat{\phi}_n = \hat{I} - |n^{(0)}\rangle\langle n^{(0)}| = \sum_{k \neq n} |k^{(0)}\rangle\langle k^{(0)}|. \quad (2.41)$$

Con esta definición, el lado derecho de la ecuación (2.39) puede ser reescrito como sigue

$$(\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle = \hat{\phi}_n(\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle. \quad (2.42)$$

Y por lo tanto, también nos permite reescribir a la ecuación (2.40) como

$$\langle n^{(0)}|\hat{\phi}_n(\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle = 0. \quad (2.43)$$

Ahora tomando el lado derecho de (2.42) y el lado izquierdo de (2.39), podemos establecer la siguiente igualdad

$$|n\rangle = \frac{1}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{\phi}_n(\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle. \quad (2.44)$$

En esta última ecuación, podemos ver que la multiplicación entre el operador inverso $1/(E_n^{(0)} - \hat{H}_0)$ y $\hat{\phi}_n$ está bien definida debido a que

$$\frac{1}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{\phi}_n = \sum_{k \neq n} \frac{1}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k^{(0)}\rangle\langle k^{(0)}|.$$

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**
2.2. LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Sin embargo la ecuación (2.44) es parcialmente incorrecta ya que sí $\lambda \rightarrow 0$ entonces $\Delta_n \rightarrow 0$, lo cual nos indica que $|n\rangle \rightarrow 0$. No obstante, se debe tener que bajo la condición anterior $|n\rangle \rightarrow |n^{(0)}\rangle$. Pero, aun para $\lambda \neq 1$, siempre podemos agregar a $|n\rangle$ un término que corrija la solución previamente escrita, nombrado $c_n|n^{(0)}\rangle$, por lo que la forma adecuada de (2.44) es

$$|n\rangle = c_n(\lambda)|n^{(0)}\rangle + \frac{1}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{\phi}_n(\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle, \quad (2.45)$$

donde

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} c_n(\lambda) = 1. \quad (2.46)$$

Notese que

$$c_n(\lambda) = \langle n^{(0)}|n\rangle. \quad (2.47)$$

Por el momento es conveniente hacer las siguientes suposiciones respecto de $|n^{(0)}\rangle$ y $|n\rangle$:

$$\langle n|n\rangle = 1 \quad (2.48)$$

$$c_n(\lambda) = \langle n^{(0)}|n\rangle = 1 \text{ aun para } \lambda \neq 0. \quad (2.49)$$

La última suposición, puede llevarse a cabo siempre y cuando nosotros no estemos preocupados por la normalización total de $|n\rangle$, debido a que el único efecto de suponer $c_n \neq 1$ es introducir un factor común multiplicativo. Así, si lo deseamos podemos normalizar el ket al final de cada cálculo. También se acostumbra escribir

$$\frac{1}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{\phi}_n \rightarrow \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0}$$

y similarmente

$$\frac{1}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{\phi}_n = \hat{\phi}_n \frac{1}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} = \hat{\phi}_n \frac{1}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{\phi}_n.$$

Finalmente tenemos que

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} (\lambda\hat{V} - \Delta_n)|n\rangle. \quad (2.50)$$

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA
2.2. LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN**

De las ecuaciones (2.40) y (2.49), podemos ver que:

$$\Delta_n = \lambda \langle n^{(0)} | \hat{V} | n \rangle. \quad (2.51)$$

Ahora, sí desarrollamos Δ_n y $|n\rangle$ en potencias de λ :

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |n^{(2)}\rangle + \dots \quad (2.52)$$

$$\Delta_n = \lambda \Delta_n^{(1)} + \lambda^2 \Delta_n^{(2)} + \lambda^3 \Delta_n^{(3)} + \dots \quad (2.53)$$

Por último, igualando los coeficientes de las potencias de λ , obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(1)} &= \langle n^{(0)} | \hat{V} | n^{(0)} \rangle, \\ \Delta_n^{(2)} &= \langle n^{(0)} | \hat{V} | n^{(1)} \rangle, \\ &\vdots \\ \Delta_n^{(N)} &= \langle n^{(0)} | \hat{V} | n^{(N-1)} \rangle, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.54)$$

por lo que para evaluar el cambio de la energía en el orden λ^N es suficiente conocer $|n\rangle$ sólo hasta el orden λ^{N-1} . Después sustituyendo las ecuaciones (2.52) y (2.53) en (2.50), obtenemos:

$$\begin{aligned} |n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle + \dots &= |n^{(0)}\rangle + \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} (\lambda \hat{V} - (\lambda \Delta_n^{(1)} + \lambda^2 \Delta_n^{(2)} + \dots)), \\ &\times (|n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle + \dots) \\ &= |n^{(0)}\rangle + \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} (\lambda \hat{V} |n^{(0)}\rangle - \lambda \Delta_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle + \\ &- \lambda^2 \Delta_n^{(2)} |n^{(0)}\rangle + \lambda^2 \hat{V} |n^{(1)}\rangle - \lambda^2 \Delta_n^{(1)} |n^{(1)}\rangle) + \dots \end{aligned} \quad (2.55)$$

Igualando las potencias de λ , tenemos que

$$|n^{(1)}\rangle = \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{V} |n^{(0)}\rangle, \quad (2.56)$$

donde hemos usado $\hat{\phi}_n \Delta_n^{(1)} |n^{(0)}\rangle = 0$.

**CAPÍTULO 2. UNA REVISIÓN A LOS MÉTODOS DE
APROXIMACIÓN EN LA MECÁNICA CUÁNTICA**
2.2. LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Ahora que conocemos la forma de $|n^{(1)}\rangle$ podemos calcular $\Delta_n^{(2)}$ utilizando las relaciones (2.54)

$$\Delta_n^{(2)} = \langle n^{(0)} | \hat{V} \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{V} | n^{(0)} \rangle \quad (2.57)$$

Con este resultado y con (2.56), podemos desarrollar la corrección a segundo orden que es

$$|n^{(2)}\rangle = \left[\frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{V} \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{V} - \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \Delta_n^{(1)} \frac{\hat{\phi}_n}{E_n^{(0)} - \hat{H}_0} \hat{V} \right] |n^{(0)}\rangle \quad (2.58)$$

Claramente vemos que podemos calcular ordenes más altos de corrección siguiendo este procedimiento. Para hacer más practica la notacion empleada anteriormente, aplicaremos la forma explicita del operador $\hat{\phi}_n$ sobre estas ecuaciones, por lo que obtendremos que el ket $|n\rangle$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} |n\rangle &= |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k \neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \\ &+ \lambda^2 \left(\sum_{k \neq n} \sum_{m \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{km} V_{mn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} - \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{nn} V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.59)$$

Y similarmente para Δ_n , tenemos que

$$\Delta_n = \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \dots \quad (2.60)$$

con $V_{kn} = \langle k^{(0)} | V | n^{(0)} \rangle$.

Como hemos visto en esta sección, el orden de las correcciones de la energía y de la función de onda, en este método, son en principio calculados de forma separada. Sin embargo, estas guardan una estrecha relación entre si, ya que como podemos observar, el ket $|n^{(1)}\rangle$ es indispensable para obtener la corrección $\Delta_n^{(2)}$ y consecuentemente $\Delta_n^{(1)}$ es también necesario para calcular la forma de $|n^{(2)}\rangle$. Por lo que las series perturbativas (2.59) y (2.60), mezclan términos de las correcciones a la energía y de la función de onda respectivamente

Capítulo 3

Estados Coherentes

Los estados coherentes y su generalización, los estados coherentes comprimidos, son resultados fundamentales de la teoría cuántica de la luz que pueden ser descritos de forma elemental pero muy completa a través del oscilador armónico cuántico. En este capítulo estamos interesados en desarrollar algunas de las propiedades más significativas de este tipo de estados debido a que en el capítulo cinco se hará uso de estas para describir un sistema que involucra al oscilador armónico más algún tipo de potencial perturbativo.

3.1. Estados Coherentes

Los estados coherentes son una clase específica de estado cuántico del oscilador armónico cuántico que fueron derivados por primera vez por Schrödinger en su búsqueda de soluciones de la ecuación (2.7) que cumplieran el principio de correspondencia y más tarde, dentro del marco de trabajo de la óptica cuántica, introducidos por R. J. Glauber en 1963.

Para hacer una descripción básica de los estados coherentes, usaremos el modelo del oscilador armónico cuántico que definimos a través del operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2,$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES

3.1. ESTADOS COHERENTES

donde $p = -i\hbar\partial/\partial x$. Además, por simplicidad supondremos que $\hbar = m = 1$, por lo que tenemos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2). \quad (3.1)$$

Entonces podemos definir a los operadores de aniquilación y creación como

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{x} + i\hat{p}), \quad (3.2)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{x} - i\hat{p}), \quad (3.3)$$

relaciones que podemos invertir y que quedan

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2\omega}}, \quad (3.4)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (3.5)$$

Estos operadores obedecen la regla de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (3.6)$$

Con las definiciones anteriores, el Hamiltoniano (3.1) toma la forma

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.7)$$

y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo queda como

$$\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (3.8)$$

Ya que el oscilador armónico es un sistema bien estudiado, tenemos que los valores propios para la energía son

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

Por lo tanto (3.8) puede escribirse como

$$\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle.$$

Esto nos permite escribir

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (3.9)$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES

3.1. ESTADOS COHERENTES

Por lo que obtenemos el operador de número de fotones

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}. \quad (3.10)$$

De este resultado podemos expresar al eigenket del oscilador armónico como

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.11)$$

Con este breve resumen acerca de las principales características del oscilador armónico cuántico podemos desarrollar los estados coherentes.

3.1.1. Eigenestados del operador de aniquilación

Los estados coherentes, expresados con el ket $|\alpha\rangle$, pueden ser construidos como eigenestados del operador de aniquilación como sigue

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.12)$$

donde α es un número complejo. Los estados $|\alpha\rangle$ son eigenestados de "derecha" de \hat{a} mientras que $\langle\alpha|$ son eigenestados de "izquierda" de \hat{a}^\dagger con eigenvalor α^*

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*. \quad (3.13)$$

Considerando que los estados de número $|n\rangle$ forman un conjunto ortonormal completo, podemos desarrollar $|\alpha\rangle$ como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (3.14)$$

Aplicando el operador \hat{a} sobre cada término de (3.14)

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} |n-1\rangle. \quad (3.15)$$

Igualando los coeficientes de $|n-1\rangle$ encontramos la relación de recurrencia

$$c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}, \quad (3.16)$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES

3.1. ESTADOS COHERENTES

y obtenemos

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (3.17)$$

Sustituyendo este último resultado en (3.14) obtenemos

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.18)$$

Aplicando la condición de normalización a este estado

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= 1, \\ &= |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle, \\ &= |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \\ &= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

podemos determinar c_0 como

$$c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \quad (3.20)$$

Por último sustituyendo esto en la ecuación (3.18)

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.21)$$

En esta última expresión encontramos la forma de los estados coherentes como una suma infinita de estados de número.

3.1.2. El estado de vacío desplazado

En la sección anterior hemos obtenido una expresión para los estados coherentes en términos de los estados de número. Sin embargo, esta no es la única forma de definir este tipo de estados ya que existe otra manera que involucra al desplazamiento del estado de vacío en el espacio fase que desarrollaremos a continuación.

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES

3.1. ESTADOS COHERENTES

Primero, tomando la ecuación (3.11) y sustituyendo en (3.21), tenemos que

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle, \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dado que el operador de aniquilación al actuar sobre el estado de vacío es cero, es decir,

$$\hat{a}|0\rangle = 0,$$

podemos escribir

$$|0\rangle = \left(1 + (-\alpha^*)\hat{a} + \frac{(-\alpha^*)^2}{2!}(\hat{a})^2 + \dots \right) |0\rangle = e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle. \quad (3.23)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.22) se sigue que

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle. \quad (3.24)$$

Debido a la forma de esta ecuación, podemos considerar el teorema de Baker-Hausdorff [11], el cual establece que

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{2}} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}},$$

con la condición

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] = \left[\left[\hat{A}, \hat{B} \right], \hat{B} \right] = 0.$$

Por lo que haciendo $\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger$ y $\hat{B} = -\alpha^* \hat{a}$, se tiene

$$e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (3.25)$$

Por lo tanto con este resultado, podemos escribir un estado coherente como

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (3.26)$$

donde

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \quad (3.27)$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES
3.2. LOS ESTADOS COHERENTES COMPRIMIDOS

es conocido como el operador de desplazamiento. El número complejo α es la cantidad de desplazamiento del estado de vacío en el espacio fase.

Dentro de las propiedades de este operador se tiene que es unitario; es decir,

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = 1 \quad (3.28)$$

y [12]

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha). \quad (3.29)$$

Para terminar esta sección es importante mencionar que este operador es utilizado intensivamente en la óptica cuántica.

3.2. Los estados coherentes comprimidos

En esta sección estudiaremos los estados coherentes comprimidos, los cuales son una generalización de los estados anteriores. Este tipo de estados se introduce por primera vez en 1927 como "paquetes de Kennard" para electrones, sin embargo es hasta el periodo de 1970-1974 cuando se llevan a cabo los primeros estudios sistemáticos de ellos.

Con el fin de obtener los estados coherentes comprimidos, consideraremos nuevamente los operadores de aniquilación y creación, y aplicaremos la siguiente transformación canónica unitaria

$$\hat{b} = \hat{U}(r)\hat{a}\hat{U}^\dagger(r), \quad (3.30)$$

$$\hat{b}^\dagger = \hat{U}(r)\hat{a}^\dagger\hat{U}^\dagger(r), \quad (3.31)$$

donde \hat{U} es el operador de compresión definido por [15]¹:

$$\hat{U}(r) = e^{\frac{r}{2}(a^2 - (a^\dagger)^2)}, \quad (3.32)$$

donde

$$0 \leq r \leq \infty,$$

¹En esta referencia se tiene una buena descripción del operador de compresión.

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES
3.2. LOS ESTADOS COHERENTES COMPRIMIDOS

es el factor de compresión.

La forma del operador de compresión nos permite expresar a las ecuaciones (3.30) y (3.31) como:

$$\begin{aligned}\hat{b} &= e^{\hat{A}}\hat{a}e^{-\hat{A}}, \\ \hat{b}^\dagger &= e^{\hat{A}}\hat{a}^\dagger e^{-\hat{A}},\end{aligned}$$

donde $\hat{A} = \frac{r}{2}(a^2 - (a^\dagger)^2)$.

Entonces, podemos aplicar la formula

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots$$

a las ecuaciones mencionadas anteriormente para obtener

$$\hat{b} = a \left(1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots \right) + a^\dagger \left(\frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots \right),$$

y otra similar para \hat{b}^\dagger sólo que traspuesta conjugada de la anterior. De la serie de potencias de \hat{b} y \hat{b}^\dagger podemos ver que

$$\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger, \tag{3.33}$$

$$\hat{b}^\dagger = \mu\hat{a}^\dagger + \nu\hat{a}, \tag{3.34}$$

donde

$$\mu = \cosh(r), \tag{3.35}$$

$$\nu = \sinh(r). \tag{3.36}$$

Además

$$\mu^2 - \nu^2 = 1. \tag{3.37}$$

Los operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger obedecen la regla de conmutación

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1. \tag{3.38}$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES

3.3. ESTADOS DE MÍNIMA INCERTIDUMBRE

También el operador \hat{U} tiene la propiedad:

$$\hat{U}(r)\hat{U}^\dagger(r) = \hat{U}^\dagger(r)\hat{U}(r) = 1.$$

Debido a que los nuevos operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger satisfacen las mismas propiedades matemáticas que \hat{a} y \hat{a}^\dagger , el analogo de la definición de los estados coherentes en el oscilador armónico define a los estados comprimidos como:

$$\hat{b}|\alpha, r\rangle = \beta|\alpha, r\rangle, \quad (3.39)$$

$$\langle\alpha, r|\hat{b}^\dagger = \langle\alpha, r|\beta^* \quad (3.40)$$

con

$$|\alpha, r\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{U}(r)|0\rangle. \quad (3.41)$$

Adicionalmente se tiene que el eigenvalor asociado al estado comprimido es

$$\beta = \alpha \cosh(r) + \alpha^* \sinh(r) \quad (3.42)$$

La definicion dada en las ecuaciones (3.39), (3.40) y (3.41) son conocidas como "el punto de vista gravitacional" [16]; aunque se aplica a muchos experimentos de la óptica cuántica.

Además en el caso particular de que r tome el valor cero, se tiene que

$$\beta = \alpha, \quad (3.43)$$

Con lo que volvemos a obtener estados los coherentes que ya habiamos definido anteriormente.

$$|\alpha, 0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (3.44)$$

3.3. Estados de mínima incertidumbre

En las secciones anteriores hemos mostrado como construir estados coherentes y estados comprimidos. Sin embargo, aún no hemos discutido la principal característica física que los definen, está es el vinculo que guardan este tipo de estados cuánticos con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES
3.3. ESTADOS DE MÍNIMA INCERTIDUMBRE

Para empezar el análisis entre el principio de incertidumbre y los estados coherentes, consideraremos la definición de la desviación estándar para la posición y el momento, esto es

$$\Delta x = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

$$\Delta p = (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

donde \hat{x} y \hat{p} fueron definidos por (3.4) y (3.5) respectivamente. Con el fin de obtener la desviación para \hat{x} calculamos

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\alpha) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\alpha + \alpha^*), \end{aligned} \quad (3.47)$$

y

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{2\omega} \langle \alpha | (\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2) | \alpha \rangle, \\ &= \frac{1}{2\omega} \langle 0 | (\alpha + a)^2 + (\hat{a} + \alpha)(\hat{a}^\dagger + \alpha^*) + (\hat{a}^\dagger + \alpha^*)(\hat{a} + \alpha) + (\alpha^* + \hat{a}^\dagger)^2 | 0 \rangle, \\ &= \frac{1}{2\omega} (\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + (\alpha^*)^2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Mientras que para \hat{p}

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \alpha \rangle \\ &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \langle 0 | \hat{a}^\dagger + \alpha^* - \hat{a} - \alpha | 0 \rangle \\ &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha), \end{aligned} \quad (3.49)$$

y

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \frac{\omega}{2} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\omega}{2} \langle 0 | (\alpha^* + \hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a} + \alpha)(\hat{a}^\dagger + \alpha^*) + (\hat{a}^\dagger + \alpha^*)(\hat{a} + \alpha) - (\alpha + a)^2 | 0 \rangle \\ &= \frac{\omega}{2} (2|\alpha|^2 + 1 - (\alpha^*)^2 - \alpha^2). \end{aligned} \quad (3.50)$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES
3.3. ESTADOS DE MÍNIMA INCERTIDUMBRE

Sustituyendo estos resultados en la desviación estandar definida anteriormente

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}, \\ \Delta p &= \sqrt{\frac{\omega}{2}}.\end{aligned}$$

Y aplicando estos resultados en la relación de incertidumbre, tenemos

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2} \quad (3.51)$$

Por lo que los estados coherentes son estados de mínima incertidumbre ya que sus incertidumbres toman el mínimo valor permitido por la mecánica cuántica.

Con el procedimiento anterior, analizaremos la relación de incertidumbre de los estados comprimidos, por lo que tenemos que

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle 0 | \hat{U}^\dagger(r) \hat{D}^\dagger(\alpha) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{D}(\alpha) \hat{U}(r) | 0 \rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\alpha + \alpha^*)\end{aligned} \quad (3.52)$$

y

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \frac{1}{2\omega} \langle 0 | \hat{U}^\dagger(r) \hat{D}^\dagger(\alpha) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \hat{D}(\alpha) \hat{U}(r) | 0 \rangle, \\ &= \frac{1}{2\omega} ((\alpha - \alpha^*)^2 + (\mu - \nu)^2).\end{aligned} \quad (3.53)$$

Mientras que para \hat{p}

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \langle 0 | \hat{U}^\dagger(r) \hat{D}^\dagger(\alpha) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \hat{D}(\alpha) \hat{U}(r) | 0 \rangle, \\ &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha)\end{aligned} \quad (3.54)$$

y

$$\begin{aligned}\langle p^2 \rangle &= \frac{\omega}{2} \langle 0 | \hat{U}^\dagger(r) \hat{D}^\dagger(\alpha) (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \hat{D}(\alpha) \hat{U}(r) | 0 \rangle, \\ &= \frac{\omega}{2} ((\mu + \nu) - (\alpha - \alpha^*)).\end{aligned} \quad (3.55)$$

CAPÍTULO 3. ESTADOS COHERENTES
3.3. ESTADOS DE MÍNIMA INCERTIDUMBRE

Por lo que la desviación estándar para \hat{x} y \hat{p} es

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\mu - \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}e^{-r}, \\ \Delta p &= \sqrt{\frac{\omega}{2}}(\mu + \nu) = \sqrt{\frac{\omega}{2}}e^r.\end{aligned}$$

De tal manera que la relación de incertidumbre para los estados comprimidos es

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2) = \frac{1}{2}. \quad (3.56)$$

De este último resultado podemos ver que los estados comprimidos también son estados de mínima incertidumbre, sin embargo, la principal diferencia con los estados coherentes es que

$$\Delta x \neq \Delta p.$$

Esto significa que para los estados comprimidos, si la incertidumbre crece en la coordenada x entonces esta decrece en la coordenada p y viceversa, de tal manera que relación (3.56) permanece igual independientemente del valor que tome r .

Capítulo 4

Análisis matricial a la teoría de perturbaciones

En el capítulo dos definimos el método de aproximación conocido como teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger, que propone resolver un sistema perturbado de forma aproximada tomando un sistema no perturbado bien conocido. Sin embargo, esta herramienta calcula las correcciones a la energía y a la función de onda de forma separada. Por lo que en este capítulo, plantearemos un análisis diferente a la teoría de perturbaciones que no sólo nos permite simplificar las operaciones implicadas en las correcciones del sistema, sino que también nos permite tener una notación más compacta y clara para estas, y nos lleva de forma natural al desarrollo del operador de Dyson, herramienta importante en la teoría cuántica de campos, que nos permite aplicar este nuevo planteamiento a otras disciplinas de la física como la óptica cuántica, como veremos en el capítulo cinco. Adicionalmente, aplicaremos este nuevo método a los potenciales coseno y de Morse para ver cómo trabaja en sistemas más complejos.

4.1. Modificando la teoría de perturbaciones

La idea esencial en el planteamiento de este nuevo análisis que proponemos, el cual es similar a la teoría de perturbaciones desarrollada en el capítulo dos, consiste

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

en resolver de manera aproximada la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V})|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle, \quad (4.1)$$

donde \hat{H}_0 es un Hamiltoniano independiente del tiempo no perturbado que tiene soluciones bien conocidas, \hat{V} es un potencial perturbativo y λ es un parametro adimensional que controla el grado de perturbacion del sistema. Debido a que la parte izquierda de esta ecuación es independiente del tiempo, la solución formal está dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V})t} |\psi(0)\rangle. \quad (4.2)$$

Con el objetivo de obtener una expresión explicita de la ecuación anterior, primero desarrollaremos (4.2) en su serie de Taylor

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} (\hat{H}_0 + \lambda \hat{V})^n |\psi(0)\rangle, \quad (4.3) \\ &= \left(\hat{I} + (-it)(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V}) + \frac{(-it)^2}{2!} (\hat{H}_0^2 + \lambda(\hat{H}_0 \hat{V} + \hat{V} \hat{H}_0) + \lambda^2 \hat{V}^2) \right. \\ &\quad + \frac{(-it)^3}{3!} (\hat{H}_0^3 + \lambda(\hat{H}_0^2 \hat{V} + \hat{H}_0 \hat{V} \hat{H}_0 + \hat{V} \hat{H}_0^2) + \lambda^2(\hat{H}_0 \hat{V}^2 + \hat{V} \hat{H}_0 \hat{V} + \hat{V}^2 \hat{H}_0) \\ &\quad \left. + \lambda^3 \hat{V}^3) + \dots \right) |\psi(0)\rangle. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Reacomodando términos en (4.4) tenemos

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \left(I + (-it)\hat{H}_0 + \frac{(-it)^2}{2!} \hat{H}_0^2 + \frac{(-it)^3}{3!} \hat{H}_0^3 + \dots \right. \\ &\quad + \lambda \left((-it)\hat{V} + \frac{(-it)^2}{2!} (\hat{H}_0 \hat{V} + \hat{V} \hat{H}_0) + \frac{(-it)^3}{3!} (\hat{H}_0^2 \hat{V} + \hat{H}_0 \hat{V} \hat{H}_0 + \hat{V} \hat{H}_0^2) + \dots \right) \\ &\quad \left. + \lambda^2 \left(\frac{(-it)^2}{2!} \hat{V}^2 + \frac{(-it)^3}{3!} (\hat{H}_0 \hat{V}^2 + \hat{V} \hat{H}_0 \hat{V} + \hat{V}^2 \hat{H}_0) + \dots \right) + \dots \right) |\psi(0)\rangle, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \hat{H}_0^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{H}_0^{n-1-k} \hat{V} \hat{H}_0^k \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \hat{H}_0^{n-k-j-1} \hat{V} \hat{H}_0^j \hat{V} \hat{H}_0^{k-1} + \dots \right) |\psi(0)\rangle. \quad (4.5) \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Definiendo la matriz semi-infinita

$$M = \begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \hat{V} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \hat{H}_0 & \hat{V} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \hat{H}_0 & \hat{V} & \cdots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} (M^n)_{1,1} &= \hat{H}_0^n, \\ (M^n)_{1,2} &= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{H}_0^{n-1-k} \hat{V} \hat{H}_0^k, \\ (M^n)_{1,3} &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} \hat{H}_0^{n-k-j-1} \hat{V} \hat{H}_0^j \hat{V} \hat{H}_0^{k-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De tal manera que la ecuación (4.5) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} (\hat{H}_0)^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-it)^n (M^n)_{(1,2)}}{n!} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-it)^n (M^n)_{(1,3)}}{n!} + \dots \right] |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Además, podemos ver fácilmente que:

$$\begin{aligned} (M^0)_{1,k} &= (I)_{1,k} = 0, \text{ para } k \geq 2, \\ (M^1)_{1,k} &= 0 \text{ para } k \geq 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde I es la matriz identidad. Por lo que introduciendo estos términos en la expresión anterior obtendremos

$$|\psi(t)\rangle = \left(e^{-i\hat{H}_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (e^{-iMt})_{(1,n+1)} \right) |\psi(0)\rangle. \quad (4.8)$$

Nótese que en esta última ecuación se ha separado la expresión (4.2) en la solución del sistema no perturbado más todas posibles contribuciones perturbativas causadas por el potencial \hat{V} sobre \hat{H}_0 . En la literatura existen métodos matriciales similares para estudiar otros problemas, como se muestra en [13] y [14].

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

4.1.1. Corrección a primer orden

La ecuación (4.8) hallada anteriormente, aunque es la solución completa a la ecuación (4.1), es una expresión muy general de la solución del sistema perturbado, por lo que el siguiente paso es truncar esta serie al orden de corrección que se quiere hallar, es decir,

$$|\psi(t)\rangle \approx \left(e^{-i\hat{H}_0 t} + \sum_{n=1}^m \lambda^n (e^{-iMt})_{(1,n+1)} \right) |\psi(0)\rangle. \quad (4.9)$$

donde m indica el orden de corrección. A partir de la ecuación (4.9) hallaremos la corrección a primer orden, por lo que tomaremos hasta el término $m = 1$ de la sumatoria anterior, es decir,

$$|\psi(t)\rangle \approx \left(e^{-i\hat{H}_0 t} + \lambda (e^{-iMt})_{(1,2)} \right) |\psi(0)\rangle. \quad (4.10)$$

Por otro lado, proponiendo que $|\psi(t)\rangle$ se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle \approx |\psi^{(0)}(t)\rangle + \lambda (||\psi^p\rangle)_{1,2}, \quad (4.11)$$

donde

$$||\psi^p\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_{1,1}\rangle & |\psi_{1,2}\rangle & \cdots \\ |\psi_{2,1}\rangle & |\psi_{2,2}\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

es una matriz que contiene todas las contribuciones perturbativas del sistema.

Igualando las expresiones (4.9) y (4.11), tenemos que

$$|\psi^{(0)}(t)\rangle + \lambda (||\psi^p\rangle)_{1,2} = \left(e^{-i\hat{H}_0 t} + \lambda (e^{-iMt})_{(1,2)} \right) |\psi(0)\rangle. \quad (4.13)$$

A continuación, derivando esta ecuación respecto al tiempo, obtenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi^{(0)}(t)\rangle + i\lambda \frac{\partial}{\partial t} (||\psi^p\rangle)_{1,2} = \hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(0)\rangle + \lambda (M e^{-itM} I |\psi(0)\rangle)_{1,2}, \quad (4.14)$$

e igualando las potencias de λ se tiene que

$$i \frac{\partial}{\partial t} (||\psi^p\rangle)_{1,2} = (M e^{-itM} I |\psi(0)\rangle)_{1,2}. \quad (4.15)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Debemos resolver ahora la ecuación (4.15), pero es claro que es equivalente a resolver el sistema

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\psi_{(1,1)}\rangle & |\psi_{(1,2)}\rangle & \cdots \\ |\psi_{(2,1)}\rangle & |\psi_{(2,2)}\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = Me^{-itM} \begin{pmatrix} |\psi(0)\rangle & 0 & \cdots \\ 0 & |\psi(0)\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Integrando la ecuación anterior tenemos

$$||\psi^p\rangle = e^{-itM} \begin{pmatrix} |\psi(0)\rangle & 0 & \cdots \\ 0 & |\psi(0)\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

de tal manera que podemos definir el sistema matricial diferencial

$$i\frac{\partial}{\partial t} ||\psi^p\rangle = M||\psi^p\rangle, \quad (4.18)$$

con la condición inicial

$$||\psi^p(0)\rangle = \begin{pmatrix} |\psi(0)\rangle & 0 & \cdots \\ 0 & |\psi(0)\rangle & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

No obstante, no resolveremos toda la ecuación matricial anterior debido a que la solución en la que estamos interesados está asociada con la segunda columna de la matriz $||\psi^p\rangle$, de tal manera que escribimos

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\psi_{(1,2)}\rangle \\ |\psi_{(2,2)}\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} |\psi_{(1,2)}\rangle \\ |\psi_{(2,2)}\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

con la condición inicial

$$\begin{pmatrix} 0 \\ |\psi(0)\rangle \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.20), primero consideraremos el subsistema formado por todas las derivadas de los kets $|\psi_{k,2}\rangle$, con $k \geq 3$, es decir,

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{3,2}\rangle &= \hat{H}_0|\psi_{3,2}\rangle + \hat{V}|\psi_{4,2}\rangle, \\ i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{4,2}\rangle &= \hat{H}_0|\psi_{4,2}\rangle + \hat{V}|\psi_{5,2}\rangle, \\ i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{5,2}\rangle &= \hat{H}_0|\psi_{5,2}\rangle + \hat{V}|\psi_{6,2}\rangle, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.22}$$

En este sistema de ecuaciones diferenciales podemos ver que los kets $|\psi_{1,2}\rangle$ y $|\psi_{2,2}\rangle$ no aparecen en la parte derecha de la igualdad, esto nos indica que la solución del sistema (4.22) no depende de estos kets ya que no están acoplados a este. Por lo que el sistema (4.22) puede resolverse definiendo su condición inicial

$$\begin{pmatrix} |\psi_{2,3}(0)\rangle = 0 \\ |\psi_{2,4}(0)\rangle = 0 \\ |\psi_{2,5}(0)\rangle = 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Bajo esta condición, solo existe una solución que satisface al sistema (4.22) que es

$$|\psi_{k,2}\rangle = 0 \text{ para } k \geq 3 \tag{4.24}$$

Por lo que sólo resta resolver el sistema formado por

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{1,2}\rangle = \hat{H}_0|\psi_{1,2}\rangle + \hat{V}|\psi_{2,2}\rangle, \tag{4.25}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{2,2}\rangle = \hat{H}_0|\psi_{2,2}\rangle. \tag{4.26}$$

Pero la ecuación (4.26) se resuelve trivialmente, dando

$$|\psi_{2,2}\rangle = e^{-it\hat{H}_0}|\psi(0)\rangle. \tag{4.27}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.25), tenemos

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{1,2}\rangle = \hat{H}_0|\psi_{1,2}\rangle + \hat{V}e^{-it\hat{H}_0}|\psi(0)\rangle, \tag{4.28}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

y haciendo el cambio de variable $|\psi_{1,2}\rangle = e^{-it\hat{H}_0}|\phi_{1,2}\rangle$, obtenemos:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi_{1,2}\rangle = e^{i\hat{H}_0 t}V e^{-i\hat{H}_0 t}|\psi(0)\rangle,$$

que al integrarse nos da

$$|\phi_{1,2}\rangle = -i \left[\int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t_1} dt_1 \right] |\psi(0)\rangle,$$

asi que finalmente obtenemos

$$|\psi_{1,2}\rangle = -ie^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t_1} dt_1 \right] |\psi(0)\rangle. \quad (4.29)$$

Por lo tanto la ecuación (4.29) es la expresión que necesitamos para obtener la corrección a primer orden al ket $|\psi^{(0)}(t)\rangle$.

Considerando que el conjunto de eigenkets que satisface al Hamiltoniano no perturbado forma una base completa y ortonormal, como lo habiamos mencionado anteriormente, podemos escribir la condición inicial como

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n^{(0)}\rangle, \quad (4.30)$$

con c_n constante. Por lo que podemos considerar, sin perdida de generalidad, que

$$|\psi(0)\rangle = |n^{(0)}\rangle. \quad (4.31)$$

Sustituyendo (4.31) en la corrección a primer orden, tenemos que

$$|\psi_{1,2}\rangle = -ie^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t_1} dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle. \quad (4.32)$$

Aplicando el operador identidad a esta ecuación

$$\begin{aligned} |\psi_{1,2}\rangle &= -i \sum_k |k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}| e^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} V e^{-i\hat{H}_0 t_1} dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle \\ &= -i \sum_k |k^{(0)}\rangle e^{-iE_k^{(0)} t} \left[\int_0^t \langle k^{(0)}| V |n^{(0)}\rangle e^{it_1(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})} dt_1 \right] \\ &= -i \sum_k |k^{(0)}\rangle e^{-iE_k^{(0)} t} V_{kn} \left[\int_0^t e^{it_1(E_k^{(0)} - E_n^{(0)})} dt_1 \right] \\ &= e^{-iE_n^{(0)} t} \left[\sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} - it |n^{(0)}\rangle V_{nn} \right] - \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} e^{-iE_k^{(0)} t} \end{aligned} \quad (4.33)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

El resultado anterior es muy importante ya que si comparamos con las ecuaciones (2.59) y (2.60), podemos encontrar las correcciones del ket $|n\rangle$ y de la energía Δ_n a primer orden de la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger más un nuevo término que denominaremos "ket de corrección temporal" dado por

$$|n^{(1)}(t)\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} e^{-iE_k^{(0)}t}.$$

Por lo que finalmente podemos escribir

$$|\psi_{1,2}\rangle = e^{-iE_n^{(0)}t} [|n^{(1)}\rangle - it|n^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)}] - |n^{(1)}(t)\rangle \quad (4.34)$$

Ejemplos

Para mostrar cómo funciona el nuevo método que estamos proponiendo, calcularemos las correcciones a primer orden de los potenciales perturbativos \hat{x} y \hat{x}^2 , y además, supondremos que el Hamiltoniano no perturbado es el oscilador armónico cuántico, el cual es definido por la ecuación (3.7).

Perturbación lineal

En este ejemplo establecemos el potencial que perturba al oscilador armónico es de la forma

$$\hat{V} = \gamma \hat{x}, \quad (4.35)$$

donde γ es una constante. Sustituyendo esta expresión en (4.32)

$$|\psi_{1,2}\rangle = -ie^{-i\hat{H}_0t} \left[\int_0^t e^{i\hat{H}_0t_1} \gamma \hat{x} e^{-i\hat{H}_0t_1} dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle, \quad (4.36)$$

y retomando la definición establecida en (3.4) se sigue

$$|\psi_{1,2}\rangle = -i \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\hat{H}_0t} \left[\int_0^t (e^{i\hat{H}_0t_1} a e^{-i\hat{H}_0t_1} + e^{i\hat{H}_0t_1} a^\dagger e^{-i\hat{H}_0t_1}) dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle.$$

Usando las relaciones

$$e^{i\hat{H}_0t} \hat{a} e^{-i\hat{H}_0t} = \hat{a} e^{-i\omega t} \quad (4.37)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

y

$$e^{i\hat{H}_0 t} \hat{a}^\dagger e^{-i\hat{H}_0 t} = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}, \quad (4.38)$$

se sigue que

$$\begin{aligned} |\psi_{1,2}\rangle &= -i \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t (\hat{a} e^{-i\omega t_1} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t_1}) dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle, \\ &= -i \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\hat{H}_0 t} \left(\frac{\hat{a}}{-i\omega} e^{-i\omega t} + \frac{\hat{a}^\dagger}{i\omega} e^{i\omega t} \right) \Big|_0^t |n^{(0)}\rangle, \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} e^{-i\hat{H}_0 t} \left((\hat{a} e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) - (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \right) |n^{(0)}\rangle, \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} e^{-i\hat{H}_0 t} \left(\hat{a} (e^{-i\omega t} - 1) + \hat{a}^\dagger (1 - e^{i\omega t}) \right) |n^{(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Por último, aplicando la condición inicial y considerando $E_n^{(0)} = \omega(n + 1/2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\psi_{1,2}\rangle &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} e^{-i\hat{H}_0 t} \left(\sqrt{n} |n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle e^{-i\omega t} - \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle e^{i\omega t} \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{n} |n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle - \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_{1,2}\rangle &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} \left(\sqrt{n} |n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle e^{-itE_{n-1}^{(0)}} e^{-it\omega} - \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle e^{-itE_{n+1}^{(0)}} e^{i\omega t} \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{n} e^{-itE_{n-1}^{(0)}} |n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle - \sqrt{n+1} e^{-itE_{n+1}^{(0)}} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) \right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

pero $E_{n\pm k}^{(0)} = \omega((n \pm k) + \frac{1}{2}) = \omega(n + \frac{1}{2}) \pm k\omega = E_n^{(0)} \pm k\omega$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} |\psi_{1,2}\rangle &= \frac{\gamma e^{-itE_n^{(0)}}}{\sqrt{2\omega^3}} \left(\left(\sqrt{n} |n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle - \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(e^{it\omega} \sqrt{n} |n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle - e^{-it\omega} \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Por lo que comparando este resultado con (4.34) tenemos que

$$|n^{(1)}\rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} \left(\sqrt{n}|n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle - \sqrt{n+1}|n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) \quad (4.42)$$

$$\Delta_n^{(1)} = 0 \quad (4.43)$$

$$|n^{(1)}(t)\rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} \left(\sqrt{n}e^{-itE_{n+1}^{(0)}}|n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle - \sqrt{n+1}e^{-itE_{n-1}^{(0)}}|n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) \quad (4.44)$$

Del análisis anterior podemos ver que a través de la integración directa de la ecuación (4.36) para la perturbación lineal, obtenemos las correcciones a primer orden asociadas a la teoría de Rayleigh-Schrödinger más un término de corrección temporal que para este caso en particular esta dado por la ecuación (4.44).

Perturbación cuadrática

Para este ejemplo consideraremos al potencial perturbativo como

$$\hat{V} = \frac{\omega^2}{2}\hat{x}^2, \quad (4.45)$$

y sustituyendolo nuevamente en (4.32) tenemos que

$$|\psi_{1,2}\rangle = -ie^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \frac{\omega^2}{2} \hat{x}^2 e^{-i\hat{H}_0 t_1} dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle. \quad (4.46)$$

Entonces se sigue que

$$|\psi_{1,2}\rangle = -i\frac{\omega}{4}e^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 e^{-i\hat{H}_0 t_1} dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle,$$

y tomando nuevamente las relaciones (4.37) y (4.38), obtenemos

$$|\psi_{1,2}\rangle = -i\frac{\omega}{4}e^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t (\hat{a}^2 e^{-2i\omega t_1} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\omega t_1}) dt_1 \right] |n^{(0)}\rangle,$$

integrando esta ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} |\psi_{1,2}\rangle &= -i\frac{\omega}{4}e^{-i\hat{H}_0 t} \left[\frac{\hat{a}^2}{-2i\omega} e^{-2i\omega t} + (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})t_1 + \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{2i\omega} e^{2i\omega t} \right] \Big|_0^t |n^{(0)}\rangle, \\ &= e^{-i\hat{H}_0 t} \left[\frac{\hat{a}^2(e^{-2i\omega t} - 1) + (\hat{a}^\dagger)^2(1 - e^{2i\omega t})}{8} - \frac{it\omega}{2} \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \right] |n^{(0)}\rangle \end{aligned} \quad (4.47)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Por último, aplicando nuevamente la condición inicial tenemos

$$\begin{aligned}
 |\psi_{1,2}\rangle &= e^{-iE_n^{(0)}t} \left[\left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{8} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{8} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right) \right. \\
 &\quad - \left(e^{2i\omega t} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{8} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle - e^{-2i\omega t} \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{8} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right) \\
 &\quad \left. - \frac{i\omega}{4}(2n+1)t \right]. \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

Comparando nuevamente con la ecuación (4.34) tenemos

$$|n^{(1)}\rangle = \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{8} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{8} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right) \tag{4.49}$$

$$\Delta_n^{(1)} = \frac{\omega}{4}(2n+1), \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
 |n^{(1)}(t)\rangle &= \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{8} e^{-itE_{n+2}^{(0)}} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{8} e^{-itE_{n-2}^{(0)}} \right. \\
 &\quad \left. \times |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right). \tag{4.51}
 \end{aligned}$$

En este ejemplo, al resolver la integral (4.46) hallamos la corrección a primer orden que nuestro método proporciona y al igual que en la perturbación lineal, hallamos las correcciones asociadas a la teoría perturbaciones más el ket de corrección temporal correspondiente.

4.1.2. Corrección a segundo orden

Una vez que hemos establecido la forma analítica de la corrección a primer orden y resolvimos algunos ejemplos básicos para esta, ahora es el turno de encontrar la expresión correspondiente para la corrección a segundo orden.

Como primer paso, en la sumatoria (4.8) tomaremos hasta el término $m = 2$, es decir,

$$|\psi(t)\rangle \approx \left(e^{-i\hat{H}_0 t} + \lambda (e^{-iMt})_{(1,2)} + \lambda^2 (e^{-iMt})_{(1,3)} \right) |\psi(0)\rangle. \tag{4.52}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Nuevamente proponiendo que $|\psi(t)\rangle$ a segundo orden en λ se escribe de la siguiente forma

$$|\psi\rangle \approx |\psi^{(0)}(t)\rangle + \lambda(|\psi^p\rangle)_{1,2} + \lambda^2(|\psi^p\rangle)_{1,3}, \quad (4.53)$$

igualando (4.52) y (4.53), tenemos

$$|\psi^{(0)}(t)\rangle + \lambda(|\psi^p\rangle)_{1,2} + \lambda^2(|\psi^p\rangle)_{1,3} = \left(e^{-i\hat{H}_0 t} + \lambda (e^{-iMt})_{(1,2)} + \lambda^2 (e^{-iMt})_{(1,3)} \right) |\psi(0)\rangle \quad (4.54)$$

y derivando esto respecto al tiempo obtenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi^{(0)}(t)\rangle + i\lambda \frac{\partial}{\partial t} (|\psi^p\rangle)_{1,2} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} (|\psi^p\rangle)_{1,3} = \hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(0)\rangle + \lambda (Me^{-itM} I |\psi(0)\rangle)_{1,2} + \lambda^2 (Me^{-itM} I |\psi(0)\rangle)_{1,3}. \quad (4.55)$$

Entonces igualando los términos con potencia λ^2

$$i \frac{\partial}{\partial t} (|\psi_p\rangle)_{1,3} = (Me^{-itM} I |\psi(0)\rangle)_{1,3}. \quad (4.56)$$

o de forma equivalente

$$i \frac{\partial}{\partial t} (|\psi_p\rangle)_{1,3} = (M|\psi_p\rangle)_{1,3}. \quad (4.57)$$

donde $|\psi^p\rangle$ esta definido por (4.17). Es claro que esta última ecuación es igual a (4.14) con la única diferencia de que la corrección que estamos buscando está asociada con la tercera columna de la matriz $|\psi^p\rangle$, por lo que podemos escribir directamente, sin pérdida de generalidad, el sistema de ecuaciones

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\psi_{(1,3)}\rangle \\ |\psi_{(2,3)}\rangle \\ |\psi_{(3,3)}\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} |\psi_{(1,3)}\rangle \\ |\psi_{(2,3)}\rangle \\ |\psi_{(3,3)}\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

que tiene la condición inicial

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\psi(0)\rangle \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Seguindo nuevamente los pasos de la corrección a primer orden, podemos demostrar que

$$|\psi_{k,3}\rangle = 0 \text{ para } k \geq 4,$$

y que la solución buscada es

$$|\psi_{1,3}\rangle = -ie^{-i\hat{H}_0 t} \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} \left[-ie^{-i\hat{H}_0 t_1} \int_0^{t_1} e^{i\hat{H}_0 t_2} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t_2} dt_2 |\psi(0)\rangle \right] dt_1. \quad (4.60)$$

Es importante resaltar que la expresión dentro de los corchetes en la ecuación anterior, corresponde a la corrección a primer orden (4.29), de tal manera que podemos escribir

$$\begin{aligned} |\psi_{1,3}\rangle &= -ie^{-i\hat{H}_0 t} \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} \left[e^{-it_1 E_n^{(0)}} (|n^{(1)}\rangle - it_1 |n^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)}) - |n^{(1)}(t_1)\rangle \right] dt_1 \\ &= -ie^{-i\hat{H}_0 t} \left[\int_0^t e^{-it_1 E_n^{(0)}} e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} |n^{(1)}\rangle dt_1 - i \int_0^t t_1 e^{-it_1 E_n^{(0)}} e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} |n^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)} dt_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} |n^{(1)}(t_1)\rangle dt_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Aplicando nuevamente el operador identidad \hat{I} a la ecuación anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} |\psi_{1,3}\rangle &= -i \sum_k |k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}| e^{-i\hat{H}_0 t} \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} \left[e^{-it_1 E_n^{(0)}} (|n^{(1)}\rangle - it_1 |n^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. - |n^{(1)}(t_1)\rangle \right] dt_1, \\ &= e^{-i\hat{E}_n^{(0)} t} \left[\sum_{k \neq n} \sum_{m \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{km} V_{mn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} - \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)} V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \right. \\ &\quad \left. - it \langle n^{(0)} | \hat{V} | n^{(1)} \rangle + i \frac{t^2}{2} (\Delta_n^{(1)})^2 - \sum_{k \neq n} \frac{it |k^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)} V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \right] \\ &\quad - |n^{(2)}(t)\rangle + |n_1^{(2)}(t)\rangle, \end{aligned} \quad (4.62)$$

con

$$\begin{aligned} |n^{(2)}(t)\rangle &= \sum_{k \neq n} \sum_{m \neq n} \left[\frac{|k^{(0)}\rangle V_{km} V_{mn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} - \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)} V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k \neq n} \frac{it |k^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)} V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \right] e^{-i\hat{E}_k^{(0)} t} \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

y

$$\begin{aligned} |n_1^{(2)}(t)\rangle &= i \sum_k |k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}| e^{-i\hat{H}_0 t} \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} |n^{(1)}(t_1)\rangle dt_1, \\ &= \sum_k \sum_{m \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle e^{-itE_k^{(0)}} V_{km} V_{mn}}{E_k^{(0)} - E_m^{(0)}} \int_0^t e^{it(E_k^{(0)} - E_m^{(0)})} dt_1 \end{aligned}$$

Al igual que la corrección a primer orden, la ecuación (4.60) calcula la corrección a segundo orden del ket $|\psi^{(0)}(t)\rangle$. Además, si comparamos la ecuación (4.62) con (2.59) y (2.60), podemos ver que los términos de corrección de segundo orden asociados a la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger también se pueden obtener de forma simultanea cuando se resuelve la integral (4.60), no obstante este calculo genera expresiones adicionales como $|n^{(2)}(t)\rangle$, $|n_1^{(2)}(t)\rangle$, entre otras. Por último, sustituyendo en la ecuación (4.62), las expresiones descritas anteriormente podemos escribir

$$\begin{aligned} |\psi_{1,3}\rangle &= e^{-i\hat{E}_n^{(0)} t} \left[|n^{(2)}\rangle - \sum_{k \neq n} \frac{it |k^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)} V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} - it \Delta_n^{(2)} + i \frac{t^2}{2} (\Delta_n^{(1)})^2 \right] \\ &\quad - |n^{(2)}(t)\rangle + |n_1^{(2)}(t)\rangle. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Ejemplos

Perturbación Lineal

Ya que conocemos la forma analítica de la correccion a segundo orden, aplicaremos esta ecuación al potencial lineal definido en (4.35), no obstante como ya hemos calculado la corrección a primer orden, esto nos permite sustituir las expresiones (4.42-4.44) directamente en (4.61), de tal manera que

$$\begin{aligned} |\psi_{1,3}\rangle &= \frac{-i\gamma e^{-i\hat{H}_0 t}}{\sqrt{2\omega^3}} \left[\int_0^t e^{-it_1 E_n^{(0)}} e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} \left(\sqrt{n} |n^{(0)} - 1^{(0)}\rangle - \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) dt_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} |n^{(1)}(t_1)\rangle dt_1. \right] \end{aligned} \tag{4.64}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Ahora resolveremos la primera integral de la ecuación anterior y dejaremos indicada la segunda integral como $|n_1^{(2)}\rangle$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}
|\psi_{1,3}\rangle &= -i\frac{\gamma^2 e^{-i\hat{H}_0 t}}{2\omega^2} \left(\int_0^t e^{-it_1 E_n^{(0)}} e^{i\hat{H}_0 t_1} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \left(\sqrt{n} |n^{(0)}\rangle - |1^{(0)}\rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1^{(0)}\rangle \right) dt_1 \right) - |n_1^{(2)}\rangle, \\
&= -i\frac{\gamma^2 e^{-i\hat{H}_0 t}}{2\omega^2} \left(\int_0^t \left(\sqrt{n(n-2)} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle e^{it_1(E_{n-2}^{(0)} - E_n^{(0)})} + (-1) |n^{(0)}\rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{(n+1)(n+2)} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle e^{it_1(E_{n+2}^{(0)} - E_n^{(0)})} \right) dt_1 \right) - |n_1^{(2)}\rangle, \\
&= -\frac{\gamma^2 e^{-i\hat{H}_0 t}}{2\omega^2} \left(\frac{\sqrt{n(n-2)} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle}{E_{n-2}^{(0)} - E_n^{(0)}} e^{it_1(E_{n-2}^{(0)} - E_n^{(0)})} + (-1) t_1 |n^{(0)}\rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle}{E_{n+2}^{(0)} - E_n^{(0)}} e^{it_1(E_{n+2}^{(0)} - E_n^{(0)})} \right) \Big|_0^t - |n_1^{(2)}\rangle, \\
&= e^{-itE_n^{(0)}} \left(\frac{\gamma^2}{4\omega^3} \left(\sqrt{n(n-2)} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right) \right. \\
&\quad \left. - i\frac{-\gamma^2}{2\omega^2} t |n^{(0)}\rangle \right) - \frac{\gamma^2}{4\omega^3} \left(e^{-itE_{n-2}^{(0)}} \sqrt{n(n-2)} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle \right. \\
&\quad \left. + e^{-itE_{n+2}^{(0)}} \sqrt{(n+1)(n+2)} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right) - |n_1^{(2)}\rangle. \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Comparando este resultado con (4.63), se tiene

$$|n^{(2)}\rangle = \frac{\gamma^2}{4\omega^3} \left(\sqrt{n(n-2)} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right) \tag{4.66}$$

$$\Delta_n^{(2)} = \frac{-\gamma^2}{2\omega^2}, \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
|n^{(2)}(t)\rangle &= \frac{\gamma^2}{4\omega^3} \left(e^{-itE_{n-2}^{(0)}} \sqrt{n(n-2)} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle + e^{-itE_{n+2}^{(0)}} \sqrt{(n+1)(n+2)} \right. \\
&\quad \left. \times |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle \right) \tag{4.68}
\end{aligned}$$

y además

$$|n_1^{(2)}\rangle = \frac{-i\gamma e^{-i\hat{H}_0 t}}{\sqrt{2\omega^3}} \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} |n^{(1)}(t_1)\rangle dt_1.$$

De estos resultados podemos ver que la primera integral proporciona las correcciones a segundo orden de la energía y al eigenket de la teoría de perturbaciones. Por lo

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

que sí solo estamos interesados en obtener estas expresiones, el cual es el caso de este problema en particular, entonces no es necesario conocer explícitamente el ket $|n_1^{(2)}\rangle$.

Perturbación cuadrática

En este ejemplo calcularemos la corrección a segundo orden para el potencial definido en (4.45), sin embargo, como en el ejemplo mostrado anteriormente, debido a que la corrección a primer orden ya ha sido calculada, podemos aplicar las ecuaciones (4.49)-(4.51) directamente a (4.61), por lo que tenemos que

$$\begin{aligned}
 |\psi_{1,3}\rangle &= -ie^{-i\hat{H}_0 t} \int_0^t e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} \left[e^{-it_1 \omega_n^{(0)}} (|n^{(1)}\rangle - it_1 |n^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)}) \right] dt_1 \\
 &\quad - ie^{-i\hat{H}_0 t} \int_0^t -e^{i\hat{H}_0 t_1} \hat{V} |n^{(1)}(t_1)\rangle dt_1.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

No obstante sólo estamos interesados en la primera integral, ya que como vimos en el ejemplo anterior, al resolver esta entonces podemos encontrar las correcciones a segundo orden de la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger mientras que la segunda integral solo la dejaremos indicada. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
 |\psi_{1,3}\rangle &= e^{-itE_n^{(0)}} \left[\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{128} |n^{(0)} - 4^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{16} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle \right. \\
 &\quad + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{16} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{128} \\
 &\quad \times |n^{(0)} + 4^{(0)}\rangle + \frac{it\Delta_n^{(1)}}{8} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle - \sqrt{n(n-1)} \right. \\
 &\quad \left. \times |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle \right) - \frac{t^2}{2} (\Delta_n^{(1)})^2 |n^{(0)}\rangle - it \frac{\omega(2n+1)}{16} |n^{(0)}\rangle \left. \right] \\
 &\quad - \left[\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{128} |n^{(0)} - 4^{(0)}\rangle e^{-itE_{n-4}^{(0)}} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{16} |n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle \right. \\
 &\quad \times e^{-itE_{n-2}^{(0)}} + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{16} |n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle e^{-itE_{n+2}^{(0)}} \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{128} |n^{(0)} + 4^{(0)}\rangle e^{-itE_{n+4}^{(0)}} \right] - |n_1^{(2)}\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.1. MODIFICANDO LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

Comparando este resultado nuevamente con (4.63) podemos encontrar los términos

$$\begin{aligned}
 |n^{(2)}\rangle &= \frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{128}|n^{(0)} - 4^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{16}|n^{(0)} - 2^{(0)}\rangle \\
 &+ \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{16}|n^{(0)} + 2^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{128}|n^{(0)} + 4^{(0)}\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\Delta_n^{(2)} = \frac{\omega(2n+1)}{16}, \tag{4.72}$$

A través de estos dos ejemplos básicos, hemos demostrado que al resolver la ecuación (4.60), podemos hallar las expresiones correspondientes a la teoría de perturbaciones tradicional dentro de la solución que proporciona esta.

4.1.3. Correcciones de más alto orden

En las secciones anteriores hemos construido las expresiones correspondientes a la corrección de primer y segundo orden y hemos demostrado que estas arrojan resultados propios de la teoría de perturbaciones tradicional, por lo que ahora sólo resta hacer una generalización de este método. Para ello planteamos la serie perturbativa

$$|\psi^{(0)}(t)\rangle + \sum_{n=1}^m \lambda^n (|\psi^{(n)}\rangle)_{1,m+1} \approx \left(e^{-it\hat{H}_0} + \sum_{n=1}^m \lambda^n (e^{-itM})_{1,m+1} \right) |\psi(0)\rangle \tag{4.73}$$

Siguiendo la metodología planteada para las correcciones de primer y segundo orden, podemos establecer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$i \frac{\partial}{\partial t} (|\psi^{(n)}\rangle)_{1,m+1} = M (|\psi^{(n)}\rangle)_{1,m+1}, \tag{4.74}$$

o equivalentemente

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\psi_{1,m+1}\rangle \\ \vdots \\ |\psi_{m+1,m+1}\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} |\psi_{1,m+1}\rangle \\ \vdots \\ |\psi_{m+1,m+1}\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{4.75}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

que se resolvara con la condición inicial

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ |\psi(0)\rangle \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

De esta forma se puede demostrar que la solución que estamos buscando es

$$\psi_{1,n+1} = -ie^{-iH_0t} \int_0^t e^{iH_0t_1} V \left[-ie^{-iH_0t_1} \int_0^{t_1} e^{iH_0t_2} V \left[-ie^{-iH_0t_2} \int_0^{t_2} \dots dt_3 \right] dt_2 |\psi(0)\rangle \right] dt_1. \quad (4.77)$$

Por último, considerando los resultados previos, podemos ver que la forma de $||\psi^{(p)}\rangle$ es

$$||\psi^{(p)}\rangle = e^{-it\hat{H}_0} \begin{pmatrix} 1 & -i \int_0^t dt_1 \hat{V}(t_1) & (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{V}(t_1) \hat{V}(t_2) & \dots \\ 0 & 1 & -i \int_0^t dt_1 \hat{V}(t_1) & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} |\psi(0)\rangle, \quad (4.78)$$

$$\text{con } \hat{V}(t_n) = e^{i\hat{H}_0t_n} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0t_n}.$$

4.2. Otros ejemplos

A través de los ejemplos anteriores hemos analizado potenciales perturbativos elementales para obtener resultados que son consistentes con la teoría de Rayleigh-Schrödinger. Por lo que en esta sección calcularemos, con nuestro análisis, las correcciones a primer orden de potenciales más complejos, que son los potenciales coseno y de Morse. Hemos escogido estos potenciales porque podemos conocer las correcciones de la energía usando métodos de aproximación de rotaciones [18], de tal manera que podemos comparar estos resultados con nuestro método.

4.2.1. Potencial Coseno

En esta sección analizaremos el potencial coseno definido por

$$\hat{V} = -g_0^2 \cos(q\hat{x}), \quad (4.79)$$

el cual sustituido en la ecuación (2.7) genera la ecuación de Mathew [19], también conocida como el rotor cuántico. Este es un modelo de gran importancia dentro de la física del estado sólido debido a que puede asociarse con una red periódica, y ser resuelto con el teorema de Floquet-Bloch [20] y de esta forma, la función de onda y la energía tienen una solución analítica en el espacio recíproco [21]. También resultados aproximados a los eigenvalores y las eigenfunciones han sido estudiados en [22]. Inclusive otros métodos de aproximación de la física tales como las aproximaciones WKB y Raman-Nath han sido aplicados a este problema para hallar una solución [23].

Empezaremos el análisis, escribiendo el Hamiltoniano

$$\hat{H}_{QR} = \frac{\hat{p}^2}{2} - g_0^2 \cos(q\hat{x}). \quad (4.80)$$

Desarrollando el coseno en su serie de Taylor

$$H_{QR} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{(g_0q)^2}{2} \hat{x}^2 - g_0^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (q\hat{x})^{2k}}{(2k)!} - g_0^2. \quad (4.81)$$

En esta ecuación, dividimos el Hamiltoniano (4.80) en dos. La primera parte corresponde al Hamiltoniano del oscilador armónico

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{(g_0q)^2}{2} \hat{x}^2 \quad (4.82)$$

y la segunda parte corresponde al potencial perturbativo

$$\hat{V} = g_0^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (q\hat{x})^{2k}}{(2k)!} - g_0^2, \quad (4.83)$$

de tal manera que podemos escribir

$$\hat{H}_{QR} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}. \quad (4.84)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

Redefiniendo a los operadores de aniquilación y creación como¹:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{g_0q}{2}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2g_0q}} \quad (4.85)$$

y

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{g_0q}{2}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2g_0q}}. \quad (4.86)$$

Sacando la inversa de estas ecuaciones

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2g_0q}}, \quad (4.87)$$

Con las relaciones anteriores el Hamiltoniano (4.82) se puede escribir como

$$\hat{H}_0 = \frac{g_0q}{2} \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.88)$$

Dado el problema de valores y vectores propios definido por el Hamiltoniano (4.84) podemos aplicar nuestro método utilizando la ecuación (4.29). Por simplicidad, sólo trabajaremos con la corrección a primer orden de tal manera que escribiremos

$$|\psi_{1,2}\rangle = -ie^{-it\hat{H}_0} \left[\int_0^t e^{it_1\hat{H}_0} \left(g_0^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (q\hat{x})^{2k}}{(2k)!} - g_0^2 \right) e^{-it_1\hat{H}_0} dt_1 \right] |\psi(0)\rangle,$$

usando nuevamente las relaciones (4.37) y (4.38), podemos reescribir la integral como

$$|\psi_{1,2}\rangle = -ie^{-it\hat{H}_0} \left[\int_0^t \left(g_0^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{-q}{2g_0} \right)^k \frac{(\hat{a}e^{-it_1g_0q} + \hat{a}^\dagger e^{it_1g_0q})^{2k}}{(2k)!} - g_0^2 \right) dt_1 \right] |\psi(0)\rangle, \quad (4.89)$$

Sin embargo calcular toda esta integral es difícil en un solo paso, por lo que dividiremos el problema en dos partes. En la primera parte calcularemos la corrección a la energía y después calcularemos la corrección al ket $|\psi^{(0)}(t)\rangle$.

Corrección a la energía

Para llevar a cabo este calculo, primero tomaremos el elemento k -esimo de la sumatoria en la integral (4.89):

$$|\psi_{1,2}^{2k}\rangle = -i\eta_{2k}e^{-it\hat{H}_0} \left[\int_0^t (\hat{a}e^{-it_1g_0q} + \hat{a}^\dagger e^{it_1g_0q})^{2k} dt_1 \right] |\psi(0)\rangle, \quad (4.90)$$

¹Nótese que $g_0q \equiv \omega$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

con η_{2k} constante. Entonces desarrollando la potencia dentro de la integral se tiene

$$\begin{aligned} |\psi_{1,2}^{2k}\rangle &= -i\eta_{2k}e^{-iH_0t} \int_0^t (e^{-i2kg_0qt_1}a^{2k} + e^{-i(2k-1)g_0qt_1}a^{(2k-1)}a^\dagger + \dots \\ &+ e^{i(2k-1)g_0qt_1}a(a^\dagger)^{(2k-1)} + e^{i2kg_0qt_1}(a^\dagger)^{2k} + \dots \\ &+ a^k(a^\dagger)^k + \dots + (a^\dagger)^k a^k dt_1) |\psi(0)\rangle, \end{aligned}$$

en esta última expresión, podemos ver términos que contienen exponenciales complejas que dependen del tiempo y otros que no, de tal manera que podemos escribir

$$|\psi_{1,2}^{2k}\rangle = -i\eta_{2k} \left(e^{-iH_0t} \int_0^t \tilde{\phi}_{2k}(t_1) dt_1 |\psi(0)\rangle + e^{-iH_0t} \int_0^t C_{2k}^{(1)} dt_1 |\psi(0)\rangle \right). \quad (4.91)$$

La función $\tilde{\phi}_{2k}(t_1)$ contiene todos los términos dependientes del tiempo, mientras que $C_{2k}^{(1)}$ agrupa al resto. El término $C_{2k}^{(1)}$ puede ser escrito en el orden simétrico de Weyl del operador \hat{n} [24]

$$C_{2k}^{(1)} = \binom{2k}{k} : (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k : w. \quad (4.92)$$

Que puede ser transformado a su orden normal como

$$C_{2k}^{(1)} = \binom{2k}{k} \sum_{l=0}^k \frac{l!}{2^l} \binom{k}{l} (\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}. \quad (4.93)$$

Además, suponiendo la condición inicial

$$|\psi(0)\rangle = |n^{(0)}\rangle,$$

se tiene que la integral (4.91) es

$$|\psi_{1,2}^{2k}\rangle = -i\eta_{2k}e^{-iH_0t} \int_0^t \tilde{\phi}_{2k}(t_1) dt_1 |n^{(0)}\rangle - i\eta_{2k}e^{-iH_0t} t C_{2k}^{(1)} |n^{(0)}\rangle. \quad (4.94)$$

Comparando este resultado con (4.34) tenemos que

$$-i\eta_{2k}e^{-it\hat{H}_0} \int_0^t \tilde{\phi}_{2k}(t_1) dt_1 |n^{(0)}\rangle = e^{-itE_n^{(0)}} |n^{(1)}\rangle - |n^{(1)}(t)\rangle \quad (4.95)$$

y

$$-i\eta_{2k}e^{-it\hat{H}_0} t C_{2k}^{(1)} |n^{(0)}\rangle = -ite^{-itE_n^{(0)}} |n^{(0)}\rangle \Delta_n^{(1)}. \quad (4.96)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

Multiplicando ambos lados de (4.96) por el bra $\langle n^{(0)}|$, tenemos

$$\Delta_n^{(1)} = \eta_{2k} \langle n^{(0)} | C_{2k}^{(1)} | n^{(0)} \rangle. \quad (4.97)$$

Este último resultado es de gran utilidad, ya que podemos generalizar en la sumatoria

$$\Delta_{n_{QR}}^{(1)} = -g_0^2 \langle n^{(0)} | \sum_{k=2}^{\infty} \eta_k C_{2k}^{(1)} | n^{(0)} \rangle - g_0^2, \quad (4.98)$$

donde

$$\eta_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k,$$

que es la corrección de la energía a primer orden del potencial coseno.

Escribiendo

$$\sum_{k=2}^{\infty} \eta_{2k} C_{2k}^{(1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \binom{2k}{k} \sum_{l=0}^k \frac{l!}{2^l} \binom{k}{l} (\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}, \quad (4.99)$$

entonces

$$C_{2k}^{(1)} = -g_0^2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^k}{((k)!)^2} \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \frac{l!}{2^l} \binom{k}{l} (\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}.$$

Pero

$$\binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_{2k}^{(1)} &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^k}{2^l l!} \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \frac{(\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}}{((k-l)!)^2}, \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^l l!} \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \frac{(\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}}{((k-l)!)^2}. \end{aligned}$$

En esta última ecuación, tenemos que si $k - l < 0$ entonces $(k - l)! = \infty$, de tal manera que la suma respecto a l puede llevarse a infinito sin pérdida de generalidad.

Reacomodando términos se sigue

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \frac{(\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}}{((k-l)!)^2}.$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

Por lo que completamos la suma en k :

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \frac{(\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}}{((k-l)!)^2} \\
&- \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l l!} \left(\left(\frac{-1q}{2g_0} \right)^0 \frac{(\hat{a}^\dagger)^{0-l} \hat{a}^{0-l}}{((0-l)!)^2} + \left(\frac{-1q}{2g_0} \right)^1 \frac{(\hat{a}^\dagger)^{1-l} \hat{a}^{1-l}}{((1-l)!)^2} \right), \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \frac{(\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}}{((k-l)!)^2} \\
&+ \frac{q}{2g_0} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - 1, \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Después, tomando la suma S_1 y considerando que la sumatoria respecto a k comienza a partir de l

$$S_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=l}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{q}{2g_0} \right)^k \frac{(\hat{a}^\dagger)^{k-l} \hat{a}^{k-l}}{((k-l)!)^2},$$

y por último, haciendo el cambio de variable $n = k - l$, obtenemos

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l l!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+l} \left(\frac{q}{2g_0} \right)^{n+l} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^n}{((n)!)^2}, \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \left(\frac{q}{2g_0} \right)^l \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{q}{2g_0} \right)^n \frac{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^n}{((n)!)^2}, \\
&= e^{-\frac{q}{4g_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{q}{2g_0} \right)^n \frac{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^n}{((n)!)^2}, \\
S_1 &= e^{-\frac{q}{4g_0}} : J_0 \left(\frac{q}{2g_0} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) : . \tag{4.100}
\end{aligned}$$

o utilizando la igualdad

$$\begin{aligned}
(\hat{a}^\dagger)^j \hat{a}^j &= \frac{\hat{n}!}{(\hat{n} - j)!}, \\
\Rightarrow S_1 &= e^{-\frac{q}{4g_0}} L_{\hat{n}} \left(\frac{q}{2g_0} \right). \tag{4.101}
\end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo este resultado (4.98), obtenemos

$$\Delta_{n_{QR}}^{(1)} = -g_0^2 \langle n^{(0)} | \left(e^{-\frac{q}{4g_0}} L_{\hat{n}} \left(\frac{q}{2g_0} \right) + \frac{q}{2g_0} \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \right) | n^{(0)} \rangle. \tag{4.102}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

El resultado que acabamos de obtener es el mismo que se muestra en [18]. Está también da una relación interesante entre la función Bessel de orden cero y los polinomios de Laguerre.

Para finalizar, debemos tener en cuenta que el potencial coseno es un pozo de potencial finito, por lo que sólo existen un número finito de estados ligados, de tal manera que las correcciones a la energía, dada una condición inicial, solo serán validas sí estan dentro del rango

$$-g_0^2 < \Delta_{n_{QR}}^{(1)} < 0. \quad (4.103)$$

Corrección a la función de onda

En la sección anterior hemos usado el orden simétrico de Weyl, que es un caso particular cuando existe el mismo número de operadores de creación y aniquilación en $C_{2k}^{(1)}$, sin embargo este ordenamiento es un caso particular de la formula [24]

$$\{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\}_s = \sum_{l=0}^{\min\{n,m\}} \frac{l!}{2^l} \binom{n}{l} \binom{m}{l} (t-s)^l \{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\}_t, \quad (4.104)$$

con

$$\{(a^\dagger)^n a^m\}_s = \frac{\partial^{n+m}}{\partial \alpha^n \partial (-\alpha^*)^m} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} e^{s|\alpha|^2} \Big|_{\alpha=0}$$

y $s, t = 1, 0, -1$ son el ordenamiento normal, de Weyl y anti-normal respectivamente.

De hecho el ordenamiento normal viene dado cuando $n = m$.

Considerando nuevamente el binomio:

$$(\hat{a} e^{-it_1 g_0 q} + \hat{a}^\dagger e^{it_1 g_0 q})^n$$

y (4.104), podemos demostrar que

$$(a^\dagger e^{it_1 g_0 q} + a e^{-it_1 g_0 q})^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \{(a^\dagger)^{n-j} a^j\}_0 e^{ig_0 q t (n-2j)}. \quad (4.105)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

De esta expresión, estamos interesados en el caso cuando $n = 2k$. Además, debemos de notar que el caso $k = j$ corresponde al calculo de la expresión $C_{2k}^{(1)}$, mientras que para $k \neq j$ se tiene

$$\tilde{\phi}_{2k}(t_1) = \sum_{j \neq k}^{2k} \binom{2k}{j} \{(a^\dagger)^{2k-j} a^j\}_0 e^{i2g_0qt_1(k-j)}. \quad (4.106)$$

Por lo que ahora con esta expresión explicita de $\tilde{\phi}_{2k}(t_1)$ calcularemos la corrección a primer orden de la función de onda.

Aplicando directamente (4.106) a la ecuación (4.89) tenemos que

$$\begin{aligned} & -ie^{-it\hat{H}_0} \int_0^t \sum_{k=2}^{\infty} \eta_k \tilde{\phi}_{2k}(t_1) dt_1 |\psi(0)\rangle = -ie^{-it\hat{H}_0} \int_0^t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{q}{\sqrt{2g_0q}}\right)^{2k} \sum_{j \neq k}^{2k} \binom{2k}{j} \\ & \times e^{i2g_0qt_1(k-j)} \sum_{l=0}^{\min\{2k-j, j\}} \frac{l!}{2^l} \binom{2k-j}{l} \binom{j}{l} (\hat{a}^\dagger)^{2k-j-l} \hat{a}^{j-l} dt_1 |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Para hallar el resultado de esta integral, supongamos primero que $j = k + 1$ en la ecuación anterior, por lo que

$$\begin{aligned} & -ie^{-it\hat{H}_0} \int_0^t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{q}{\sqrt{2g_0q}}\right)^{2k} \binom{2k}{k+1} e^{-i2g_0qt_1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l!}{2^l} \binom{k-1}{l} \binom{k+1}{l} \\ & \times (\hat{a}^\dagger)^{k-1-l} \hat{a}^{k-1-l} dt_1 \hat{a}^2 |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Siguiendo un procedimiento similar al de la corrección a la energía, tenemos que la solución de (4.108) es

$$e^{-it\hat{H}_0} e^{-\frac{q}{4g_0}} \left(\frac{q}{\sqrt{2g_0q}}\right)^2 \frac{L_{\hat{n}}^{(2)}\left(\frac{q}{2g_0}\right)}{\Gamma(\hat{n}+3)} \frac{\hat{a}^2}{2g_0q} e^{-i2g_0qt} \Big|_0^t |\psi(0)\rangle. \quad (4.109)$$

Sí consideramos que $k = l - 1$ en (4.108) entonces tenemos que

$$-e^{-it\hat{H}_0} e^{-\frac{q}{4g_0}} \left(\frac{q}{\sqrt{2g_0q}}\right)^2 (\hat{a}^\dagger)^2 \frac{L_{\hat{n}}^{(2)}\left(\frac{q}{2g_0}\right)}{2g_0q \Gamma(\hat{n}+3)} e^{i2g_0qt} \Big|_0^t |\psi(0)\rangle. \quad (4.110)$$

Estos dos resultados pueden ser generalizados facilmente de tal forma que la integral (4.107) es igual a

$$\begin{aligned}
 & -ie^{-it\hat{H}_0} \int_0^t \sum_{k=2}^{\infty} \eta_k \tilde{\phi}_{2k}(t_1) dt_1 |\psi(0)\rangle = e^{-it\hat{H}_0} e^{-\frac{q}{4g_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\sqrt{2g_0q}} \right)^{2k} \left[\frac{L_{\hat{n}}^{(2k)} \left(\frac{q}{2g_0} \right)}{\Gamma(\hat{n} + 2k + 1)} \right. \\
 & \times \left. \frac{\hat{a}^{2k}}{2kg_0q} e^{-i2kg_0qt} - \frac{(\hat{a}^\dagger)^{2k}}{2kg_0q} \frac{L_{\hat{n}}^{(2k)} \left(\frac{q}{2g_0} \right)}{\Gamma(\hat{n} + 2k + 1)} e^{i2kg_0qt} \right] \Big|_0^t |\psi(0)\rangle. \quad (4.111)
 \end{aligned}$$

Para encontrar la forma final de esta corrección se tendría que aplicar la condición inicial $|n^{(0)}\rangle$ y evaluar en los limites de integración.

4.2.2. Potencial de Morse

Ahora analizaremos el potencial de Morse [25], definido por

$$\hat{V} = \gamma^2(1 - e^{-c(\hat{x}-b)})^2, \quad (4.112)$$

si sustituimos esta expresión en la ecuación (2.7) obtenemos el Hamiltoniano

$$\hat{H}_{MP} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \gamma^2(1 - e^{-c(\hat{x}-b)})^2. \quad (4.113)$$

Este Hamiltoniano es comúnmente utilizado para describir propiedades de moléculas diatómicas y otras situaciones en las que existe anarmonicidad. El potencial de Morse ha mostrado interesantes propiedades en relación con la aproximación WKB [26].

Como paso previo para encontrar las correcciones que queremos calcular, transformamos al Hamiltoniano (4.113) por medio de la transformación $e^{ib\hat{p}}$ de tal manera que

$$\begin{aligned}
 \hat{H}'_{MP} &= e^{ib\hat{p}} \hat{H}_{MP} e^{-ib\hat{p}} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \gamma^2(1 - e^{-c\hat{x}})^2, \\
 &= \frac{\hat{p}^2}{2} + \gamma^2(1 - 2e^{-c\hat{x}} + e^{-2c\hat{x}}). \quad (4.114)
 \end{aligned}$$

Desarrollando el Hamiltoniano anterior en su serie de Taylor

$$\hat{H}'_{MP} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \gamma^2 c^2 \hat{x}^2 + \gamma^2 \left(-2 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-c\hat{x})^k}{k!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2c\hat{x})^k}{k!} \right). \quad (4.115)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

Al igual que en la ecuación (4.80), este Hamiltoniano ha sido dividido en

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2} + \gamma^2 c^2 \hat{x}^2, \quad (4.116)$$

y en

$$\hat{V} = \gamma^2 \left(-2 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-c\hat{x})^k}{k!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2c\hat{x})^k}{k!} \right). \quad (4.117)$$

En las expresiones anteriores, (4.116) corresponde al Hamiltoniano del oscilador armónico y (4.117) es un potencial perturbativo, de tal manera que podemos escribir

$$\hat{H}'_{MP} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V} \quad (4.118)$$

Por lo que podemos aplicar nuevamente nuestro método de la teoría de perturbaciones. Redefiniendo los operadores de creación y aniquilación

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{\gamma c}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \hat{x} - i \frac{\hat{p}}{2\sqrt{2}\gamma c} \quad (4.119)$$

y

$$\hat{a} = \left(\frac{\gamma c}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{2\sqrt{2}\gamma c}. \quad (4.120)$$

Facilmente podemos obtener la inversa de estas ecuaciones

$$\hat{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma c} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (4.121)$$

Por lo que el Hamiltoniano queda redefinido como

$$\Rightarrow \hat{H}_0 = \sqrt{2}\gamma c \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.122)$$

Con las relaciones escritas anteriormente, podemos calcular las correcciones necesarias a primer orden del Hamiltoniano (4.118). Sin embargo, antes de hacer cualquier calculo reacomodaremos (4.117) como

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-c\hat{x})^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-c\hat{x})^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-c\hat{x})^{2k}}{(2k)!} \quad (4.123)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

y

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2c\hat{x})^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2c\hat{x})^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2c\hat{x})^{2k}}{(2k)!}. \quad (4.124)$$

Expresar las sumatorias de esta forma nos permite ver que elementos de estas contribuirán a la corrección de la energía, ya que como vimos en el caso del potencial coseno, sólo las potencias pares de $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ contienen términos que tienen el mismo número de \hat{a} y \hat{a}^\dagger y por lo tanto tendrán una contribución significativa, por lo que para este cálculo todas las potencias impares pueden ser despreciadas.

Aplicando (4.97) sólo a las potencias pares de (4.123) y (4.124), y siguiendo el mismo procedimiento del potencial coseno, obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} \eta_{k_1} C_{2k_1}^{(1)} = \exp\left(\frac{c}{4\sqrt{2}\gamma}\right) L_{\hat{n}}\left(-\frac{c}{2\sqrt{2}\gamma}\right) - \frac{c}{2\sqrt{2}\gamma} \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) - 1 \quad (4.125)$$

y

$$\sum_{k=2}^{\infty} \eta_{k_2} C_{2k_2}^{(1)} = \exp\left(\frac{c}{\sqrt{2}\gamma}\right) L_{\hat{n}}\left(-\frac{\sqrt{2}c}{\gamma}\right) - \frac{\sqrt{2}c}{\gamma} \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) - 1, \quad (4.126)$$

con

$$\eta_{k_1} = \frac{(-c)^{2k}}{(2k)! 2^{2k}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma c}\right)^k$$

$$\eta_{k_2} = \frac{(-c)^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma c}\right)^k$$

respectivamente.

Con los resultados anteriores podemos encontrar que la corrección a primer orden de la energía es

$$\begin{aligned} \Delta_{MP}^{(1)} &= \gamma^2 \langle n^{(0)} | \sum_{k=2}^{\infty} \left(-2\eta_{k_1} C_{2k_1}^{(1)} + \eta_{k_2} C_{2k_2}^{(1)} \right) | n^{(0)} \rangle, \\ &= \langle n^{(0)} | \left(-2\gamma^2 \exp\left(\frac{c}{4\sqrt{2}\gamma}\right) L_{\hat{n}}\left(-\frac{c}{2\sqrt{2}\gamma}\right) + \gamma^2 \exp\left(\frac{c}{\sqrt{2}\gamma}\right) L_{\hat{n}}\left(-\frac{\sqrt{2}c}{\gamma}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\gamma c}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}c\gamma\right) \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) + \gamma^2 \right) | n^{(0)} \rangle. \end{aligned} \quad (4.127)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.2. OTROS EJEMPLOS

Pero de forma similar que en el potencial coseno, esta corrección sólo es valida en el rango

$$0 < \Delta_{MP}^{(1)} \leq \gamma^2 \quad (4.128)$$

Ahora para calcular la corrección a la función de onda para este potencial, debemos considerar nuevamente (4.105), el cual se tiene estudiado en el caso para cuando $n = 2k$, ya que nos proporciona

$$\tilde{\phi}_{2k}(t_1) = \sum_{j \neq k}^{2k} \binom{2k}{j} \{(\hat{a}^\dagger)^{2k-j} \hat{a}^j\}_0 e^{2\sqrt{2}c\gamma t_1(k-j)}. \quad (4.129)$$

Esta función, como habiamos dicho antes, contiene todos términos que no tienen el mismo numero de \hat{a} y \hat{a}^\dagger de las potencias pares de las sumatorias (4.123) y (4.124), sin embargo, para los términos impares $n = 2k - 1$ de estas mismas, se tiene que (4.105) puede reescribirse como

$$\tilde{\phi}_{2k-1}(t_1) = \sum_{j=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} \{(\hat{a}^\dagger)^{2k-1-j} \hat{a}^j\}_0 e^{2\sqrt{2}c\gamma t_1(2k-2j-1)}. \quad (4.130)$$

Notese que en este caso, ya no hay necesidad de escribir $j \neq k$, ya que por ser el binomio de una potencia impar, entonces nunca habra el mismo número de \hat{a} y \hat{a}^\dagger en los términos de este.

Definiendo la función

$$\tilde{\phi}(t_1) = \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-2\beta_{k_1} + \beta_{k_2}) \tilde{\phi}_{2k-1}(t_1) + (-2\eta_{k_1} + \eta_{k_2}) \tilde{\phi}_{2k}(t_1) \right] \quad (4.131)$$

con

$$\beta_{k_1} = \frac{(-c)^{2k-1}}{2^{2k-1}(2k-1)!} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{c\gamma}} \right]^{2k-1},$$

$$\beta_{k_2} = \frac{(-c)^{2k-1}}{(2k-1)!} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{c\gamma}} \right]^{2k-1}$$

se tiene considerados todos los términos que contribuyen a la corrección de la función de onda.

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.3. EL OPERADOR DE DYSON

Integrando la ecuación (4.131) como sigue

$$\begin{aligned}
 - i e^{-it\hat{H}_0} \int_0^t \tilde{\phi}(t_1) dt_1 |\psi(0)\rangle &= -i e^{-it\hat{H}_0} \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-2\beta_{k_1} + \beta_{k_2}) \int_0^t \tilde{\phi}_{2k-1}(t_1) dt_1 \right. \\
 &+ \left. (-2\eta_{k_1} + \eta_{k_2}) \int_0^t \tilde{\phi}_{2k}(t_1) dt_1 \right] |\psi(0)\rangle, \tag{4.132}
 \end{aligned}$$

y siguiendo el procedimiento para la corrección de la función de onda para el potencial coseno, se tiene que la corrección buscada es

$$\begin{aligned}
 - i e^{-it\hat{H}_0} \int_0^t \tilde{\phi}(t_1) dt_1 |\psi(0)\rangle &= \frac{e^{-it\hat{H}_0}}{\sqrt{2}\gamma c} \left\{ -2e^{\beta_1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_1^k \left[\frac{L_{\hat{n}}^k(-\beta_1^2)}{\Gamma(\hat{n} + k + 1)} \frac{\hat{a}^k}{k} e^{-ik\sqrt{2}\gamma ct} \right. \right. \\
 &- \left. \left. \frac{(\hat{a}^\dagger)^k}{k} \frac{L_{\hat{n}}^k(-\beta_1^2)}{\Gamma(\hat{n} + k + 1)} e^{-ik\sqrt{2}\gamma ct} \right] + e^{\beta_2/2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_2^k \left[\frac{L_{\hat{n}}^k(-\beta_2^2)}{\Gamma(\hat{n} + k + 1)} \frac{\hat{a}^k}{k} e^{-ik\sqrt{2}\gamma ct} \right. \right. \\
 &- \left. \left. \frac{(\hat{a}^\dagger)^k}{k} \frac{L_{\hat{n}}^k(-\beta_2^2)}{\Gamma(\hat{n} + k + 1)} e^{-ik\sqrt{2}\gamma ct} \right] \right\} |\psi(0)\rangle, \tag{4.133}
 \end{aligned}$$

donde $\beta_1 = \frac{-c}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma c} \right)^{1/2}$ y $\beta_2 = c \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma c} \right)^{1/2}$.

De igual forma que en el potencial coseno, si queremos obtener la forma completa de la corrección, basta con evaluar al resultado de esta integral en los límites señalados e inmediatamente aplicar la condición inicial.

4.3. El operador de Dyson

Consideremos el operador

$$\hat{U}(t) = \exp(\hat{B}(t)). \tag{4.134}$$

donde

$$\hat{B}(t) = -i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1), \tag{4.135}$$

siendo \hat{H} un operador dependiente del tiempo, cuya dependencia temporal explicita no conocemos, pero que puede ser resultado de una interacción dependiente del tiempo o de una transformación dentro de la representación de interacción.

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.3. EL OPERADOR DE DYSON

Este problema es central en la mecánica cuántica ya que $\hat{H}(t)$ es a menudo un Hamiltoniano y por lo tanto \hat{U} está estrechamente relacionado con el operador de evolución ó conocido también como el operador de Dyson, el cual describe la conexión entre los vectores de estado a los tiempos t_0 y t , es decir,

$$|\phi, t\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\phi, t_0\rangle \quad (4.136)$$

Desarrollando \hat{U} en su serie de Taylor

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) \right]^n. \quad (4.137)$$

Por simplicidad, tomaremos los tres primeros términos de (4.137):

$$\hat{U}(t) \approx 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2). \quad (4.138)$$

El paso crucial en este análisis es introducir el operador de ordenamiento [11], también conocido como "el operador de cortesía" [27] como sigue: Sean \hat{A} y \hat{B} dos operadores arbitrarios dependientes del tiempo entonces

$$\hat{T}[\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)] = \begin{cases} \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1) & \text{sí } t_2 > t_1, \\ \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) & \text{sí } t_1 > t_2. \end{cases} \quad (4.139)$$

Esto significa que \hat{T} ordena a los operadores en una secuencia cronológica de derecha a izquierda.

En términos más generales, para un producto de n operadores, tenemos

$$\hat{T}(\hat{A}_i(t_i)\hat{A}_j(t_j) \cdots \hat{A}_k(t_k)) = \hat{A}_1(t_1)\hat{A}_2(t_2) \cdots \hat{A}_n(t_n), \quad (4.140)$$

donde $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$.

Aplicando \hat{T} a (4.138), tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{T}[\hat{U}(t)] &= \hat{T} \left[1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t \hat{H}(t_1) dt_1 + \frac{(-i)^2}{2} \hat{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.3. EL OPERADOR DE DYSON

En el último término de la expresión anterior, descomponemos la integral respecto a t_1 en los dominios $t_1 > t_2$ y $t_2 > t_1$ de tal manera que

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2,$$

y encontramos

$$\begin{aligned} \hat{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] &= \hat{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] \\ &+ \hat{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \hat{H}(t_1) H(t_2) \right]. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $t_1 > t_2$ entonces aplicando \hat{T} , obtenemos

$$\hat{T} \left[\hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] = \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2).$$

Mientras que para la segunda integral, tenemos que $t_1 > t_2$, por lo que

$$\hat{T} \left[\hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] = H(t_2) H(t_1).$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \hat{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \\ &+ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2) H(t_1). \end{aligned}$$

Después intercambiamos el orden de integración en la segunda doble integral, usando la formula

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1,$$

y encontramos que

$$\begin{aligned} \hat{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \\ &+ \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1). \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.3. EL OPERADOR DE DYSON

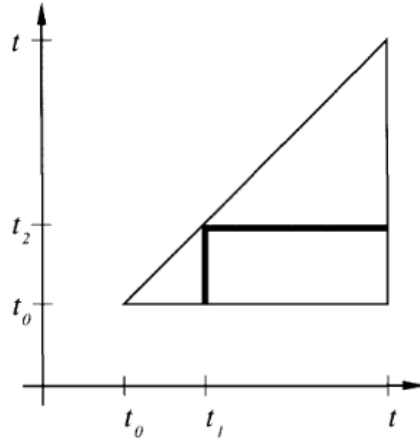


Figura 4.1: Con el fin de cubrir los parámetros (t_1, t_2) dentro del triángulo definido por la diagonal, el punto (t_0, t_0) y la línea vertical en t integramos primero la variable t_2 de t_1 hasta t (línea vertical) y entonces integrar t_1 de t_0 hasta t . Equivalentemente podemos integrar primero las variable t_1 de t_0 hasta t_1 (línea horizontal) y después integrar t_2 de t_0 hasta t [17].

Haciendo los cambios de variables

$$t_1 \rightarrow t_2 \text{ y } t_2 \rightarrow t_1$$

en la segunda doble integral, reconocemos que esta es idéntica a la primera y por tanto

$$\hat{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right] = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2). \quad (4.141)$$

Sustituyendo los resultados anteriores en $\hat{T}[\hat{U}]$, obtenemos

$$\hat{T} [U(t)] = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2).$$

Este resultado puede ser generalizado como [17]

$$T \left[\int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) \right]^n = n! \int_{t_0}^t dt_n \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_n) \cdots H(t_1). \quad (4.142)$$

Por lo que podemos escribir \hat{U} como

$$\begin{aligned} \hat{T} [\hat{U}(t)] &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \\ &+ (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_3) + \cdots \end{aligned} \quad (4.143)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS MATRICIAL A LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
4.3. EL OPERADOR DE DYSON

Y por lo tanto podemos definir el Operador de Evolución u Operador de Dyson como

$$\hat{U}_D(t) = \hat{T} \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) \right] \right\}. \quad (4.144)$$

Este operador tiene sus principales aplicaciones en problemas relacionados con la Matriz de Dispersión [29], sin embargo podemos usarlo también para estudiar problemas en la óptica cuántica [30], [31], [32].

El análisis anterior puede ser aplicado al método que hemos desarrollado en las secciones anteriores debido a que el ket $|\psi(t)\rangle$ tiene la solución

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}_0 t} \left[1 + (-i)\lambda \int_0^t dt_1 \hat{V}(t_1) + (-i)^2 \lambda^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{V}(t_1) \hat{V}(t_2) \right. \\ &\quad \left. + (-i)^3 \lambda^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \hat{V}(t_1) \hat{V}(t_2) \hat{V}(t_3) + \dots \right] |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (4.145)$$

En esta solución podemos observar que la expresión dentro de los corchetes es idéntica a la ecuación (4.143), por tanto tenemos

$$\hat{H} = \hat{V} \quad (4.146)$$

Por lo que $|\psi(t)\rangle$ se reescribe como

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{T} \left\{ \exp \left[-i\lambda \int_0^t dt_1 \hat{V}(t_1) \right] \right\} |\psi(0)\rangle. \quad (4.147)$$

Pero sí también comparamos este resultado con (4.8), tenemos

$$e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{T} \left\{ \exp \left[-i\lambda \int_0^t dt_1 \hat{V}(t_1) \right] \right\} |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (e^{-iMt})_{(1,n+1)} |\psi(0)\rangle, \quad (4.148)$$

y finalmente

$$\hat{T} \left\{ \exp \left[-i\lambda \int_0^t dt_1 \hat{V}(t_1) \right] \right\} = e^{i\hat{H}_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (e^{-iMt})_{(1,n+1)}. \quad (4.149)$$

Este último resultado es importante, ya que podemos asociar nuestro método con el operador de evolución de \hat{V} , y al mismo tiempo, podemos dar una expresión analítica al lado derecho de la ecuación (4.149) en términos del operador de Dyson.

Capítulo 5

Los estados coherentes y la teoría de perturbaciones

En el capítulo anterior, desarrollamos un análisis diferente a la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger y aplicamos este de forma exitosa a modelos bien conocidos de la mecánica cuántica, e inclusive establecimos una conexión entre nuestro método y el operador de Dyson. Para finalizar este trabajo, volveremos a los casos básicos mostrados en el capítulo dos, es decir, la perturbación lineal y cuadrática al oscilador armónico, y buscaremos las relaciones que existen entre el análisis matricial que proponemos, el operador de desplazamiento y el operador de compresión, con el fin de establecer parámetros que permitan validar los resultados que hemos hallado.

CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE PERTURBACIONES

5.1. ESTADOS COHERENTES GENERADOS POR PERTURBACIONES LINEALES

5.1. Estados coherentes generados por perturbaciones lineales

Para empezar esta sección escribiremos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V})|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle,$$

y además supondremos que \hat{H}_0 es nuevamente el Hamiltoniano del oscilador armónico. También podemos ver fácilmente que la solución formal de la ecuación anterior es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V})t} |\psi(0)\rangle. \quad (5.1)$$

Escogiendo el estado de vacío como condición inicial ($|\psi(0)\rangle = |0^{(0)}\rangle$) y $\lambda = 0$, tenemos que (5.1) se reduce a

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_0^{(0)}t} |0^{(0)}\rangle. \quad (5.2)$$

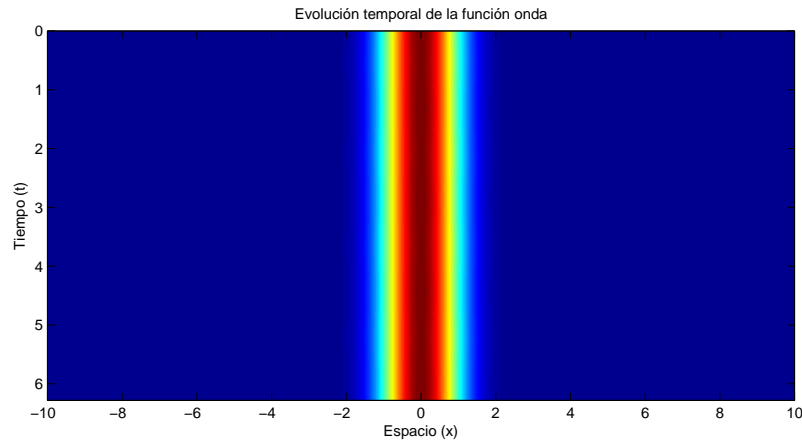


Figura 5.1: En esta figura podemos ver la evolución temporal de la función de onda (5.2). Debido a que escogemos como condición inicial una solución exacta del oscilador armónico cuántico y $\lambda = 0$, se tiene que la propagación de $|\psi(t)\rangle$ en el tiempo ocurre sin deformación alguna.

Sí escogemos $\lambda \neq 0$ y $\hat{V} = \gamma \hat{x}$ en la ecuación (5.1), la evolución temporal del estado de vacío será alterada como se muestra en la figura (5.2). En esta figura podemos ver que este estado empieza a oscilar de forma periódica en una región bien

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.1. ESTADOS COHERENTES GENERADOS POR PERTURBACIONES
LINEALES

definida, imitando el movimiento de una partícula dentro de un potencial cuadrático. Analizaremos este caso para ligar nuestro método con los estados coherentes.

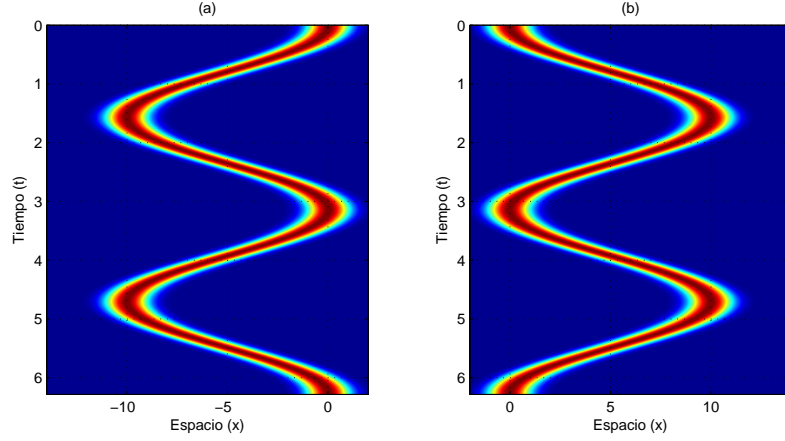


Figura 5.2: En estas gráficas podemos ver la propagación temporal del estado de vacío cuando existe una perturbación del tipo $\gamma\hat{x}$ sobre el sistema. La gráfica (a) corresponde a $\gamma > 0$ y (b) cuando $\gamma < 0$.

Empezaremos nuestro análisis escribiendo el Hamiltoniano

$$H_\gamma = \frac{\hat{p}^2}{2} + \omega^2 \frac{\hat{x}^2}{2} + \lambda\gamma\hat{x}, \quad (5.3)$$

con $\gamma > 0$. De hecho, este Hamiltoniano tiene solución exacta si consideramos que

$$\begin{aligned} \hat{H}_\gamma &= \frac{\hat{p}^2}{2} + \omega^2 \frac{\hat{x}^2}{2} + \lambda\gamma\hat{x}, \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \left(x + \frac{\lambda\gamma}{\omega^2} \right)^2 - \frac{2\lambda^2\gamma^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Haciendo el cambio de variable $x' = x + \frac{\lambda\gamma}{\omega^2}$, obtenemos

$$\hat{H}_\gamma = \frac{\hat{p}'^2}{2} + \omega^2 \frac{\hat{x}'^2}{2} - \frac{2\lambda^2\gamma^2}{\omega^2}. \quad (5.5)$$

En esta expresión podemos ver que tenemos nuevamente el Hamiltoniano del oscilador armónico más una constante, que es la misma que obtuvimos en la corrección en la energía a segundo orden en la ecuación (4.67). Por lo que podemos establecer

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.1. ESTADOS COHERENTES GENERADOS POR PERTURBACIONES
LINEALES

la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\hat{H}_\gamma |n_\gamma\rangle = E_{n_\gamma} |n_\gamma\rangle \quad (5.6)$$

donde

$$\langle x' | n_\gamma \rangle = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\xi'^2/2} H_n(\xi') \quad (5.7)$$

y

$$E_{n_\gamma} = E_n^{(0)} - \frac{2\lambda^2\gamma^2}{\omega^2}. \quad (5.8)$$

con $\xi' = \sqrt{\omega}(x + \lambda\gamma/\omega^2)$. Con estos resultados podemos ver que el Hamiltoniano (5.3) genera soluciones exactas del tipo de oscilador armónico que están desplazadas por la cantidad $\lambda\gamma/\omega^2$ para su función de onda, y además tiene un corrimiento en la energía de $2\lambda^2\gamma^2/\omega^2$.

Sin embargo, por el momento no estamos interesados en las soluciones anteriores, en vez de esto, estamos interesados en la respuesta del Hamiltoniano (5.3) desde la perspectiva de \hat{H}_0 .

Para hacer esto, solo consideramos la parte que contiene al operador \hat{x} en el Hamiltoniano (5.3) y escribimos

$$\omega^2 \frac{\hat{x}^2}{2} + \lambda\gamma\hat{x} = \frac{\omega^2}{2} \left(\hat{x}^2 + \frac{2\lambda\gamma}{\omega^2} \hat{x} \right),$$

que podemos reescribir como

$$\frac{\omega^2}{2} \left(\hat{x}^2 + \frac{2\lambda\gamma}{\omega^2} \hat{x} \right) = \frac{\omega^2}{2} e^{i\beta\hat{p}} \hat{x}^2 e^{-i\beta\hat{p}}, \quad (5.9)$$

donde $\beta = \lambda\gamma/\omega^2$. Introduciendo esta expresión en el Hamiltoniano (5.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} e^{i\beta\hat{p}} \hat{x}^2 e^{-i\beta\hat{p}}, \\ &= e^{i\beta\hat{p}} \left(\frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \hat{x}^2 \right) e^{-i\beta\hat{p}}, \\ &= e^{i\beta\hat{p}} \hat{H}_0 e^{-i\beta\hat{p}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.1. ESTADOS COHERENTES GENERADOS POR PERTURBACIONES
LINEALES

Sustituyendo este resultado en (5.1)

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[-ie^{i\beta\hat{p}} \hat{H}_0 e^{-i\beta\hat{p}t} \right] |\psi(0)\rangle = e^{i\beta\hat{p}} e^{-i\hat{H}_0 t} e^{-i\beta\hat{p}} |\psi(0)\rangle, \quad (5.11)$$

donde

$$e^{-i\beta\hat{p}} = e^{\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\omega^3}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}. \quad (5.12)$$

Sí comparamos esta expresión con el operador de desplazamiento (3.25), podemos ver que (5.12) es el caso cuando α es real, por lo que podemos escribir

$$\hat{D}(\lambda) = e^{\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\omega^3}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}. \quad (5.13)$$

Por tanto, la ecuación (5.11) toma la forma

$$|\psi(t)\rangle = \hat{D}^\dagger(\lambda) e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{D}(\lambda) |\psi(0)\rangle. \quad (5.14)$$

Multiplicando por $e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{H}_0 t}$, se sigue

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{H}_0 t} \hat{D}^\dagger(\lambda) e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{D}(\lambda) |\psi(0)\rangle.$$

Con esto podemos definir el operador de desplazamiento dependiente del tiempo como

$$\hat{D}^\dagger(\lambda, t) = \exp \left(\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} (\hat{a} e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \right), \quad (5.15)$$

por lo que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{D}^\dagger(\lambda, t) \hat{D}(\lambda) |\psi(0)\rangle. \quad (5.16)$$

Comparando este último resultado con la ecuación (4.147), tenemos

$$e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{D}^\dagger(\lambda, t) \hat{D}(\lambda) |\psi(0)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{T} \left\{ \exp \left[-i\lambda \int_0^t dt_1 \hat{V}(t_1) \right] \right\} |\psi(0)\rangle. \quad (5.17)$$

Por lo que el operador de Dyson para esta perturbación es igual a

$$\hat{U}_D = \hat{D}^\dagger(\lambda, t) \hat{D}(\lambda). \quad (5.18)$$

Este último resultado es interesante, ya que el operador de Dyson para el caso de la perturbación lineal, cuenta con una solución analítica que está dada en términos del operador de desplazamiento.

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.1. ESTADOS COHERENTES GENERADOS POR PERTURBACIONES
LINEALES

Desarrollando $\hat{D}^\dagger(\lambda, t)$ y $\hat{D}(\lambda)$ en su serie de Taylor, tenemos

$$\hat{D}^\dagger(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} \right)^n (\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})^n \quad (5.19)$$

y

$$\hat{D}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} \right)^n (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^n. \quad (5.20)$$

Sí tomamos $\lambda \ll 1$ podemos considerar una aproximación a primer orden en las ecuaciones anteriores, lo que significa que truncamos las sumatorias hasta la potencia λ , es decir,

$$\hat{D}^\dagger(\lambda, t) \approx 1 + \left(\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} \right) (\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})$$

y

$$\hat{D}(\lambda) \approx 1 + \left(\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} \right) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Multiplicando estas dos aproximaciones, tenemos

$$\hat{D}^\dagger(\lambda, t)\hat{D}(\lambda) = 1 + \frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} (\hat{a}^\dagger(1 - e^{i\omega t}) + \hat{a}(e^{-i\omega t} - 1)). \quad (5.21)$$

Sustituyendo este resultado en (5.16), obtenemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(0)\rangle + \lambda \frac{e^{-i\hat{H}_0 t} \gamma}{\sqrt{2\omega^3}} (\hat{a}^\dagger(1 - e^{i\omega t}) + \hat{a}(e^{-i\omega t} - 1)) |\psi(0)\rangle. \quad (5.22)$$

Ahora tomando el término

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2\omega^3}} e^{-i\hat{H}_0 t} (\hat{a}^\dagger(1 - e^{i\omega t}) + \hat{a}(e^{-i\omega t} - 1)) |\psi(0)\rangle \quad (5.23)$$

y comparandolo con el resultado en (4.39), podemos ver que esta expresión es igual excepto por la condición inicial; sin embargo, esto último no es un problema ya que si consideramos que $|\psi(0)\rangle = |n^{(0)}\rangle$ podemos escribir

$$e^{-iE_n^{(0)} t} |n^{(1)}\rangle - |n^{(1)}(t)\rangle. \quad (5.24)$$

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

De estos resultados podemos ver que la generación de estados coherentes ocurre cuando al Hamiltoniano del oscilador armónico le aplicamos una perturbación lineal y como condición inicial tomamos al estado de vacío. Además, cuando hacemos una aproximación a primer orden de la ecuación (5.16) obtenemos la corrección a primer orden de nuestro método. Por lo tanto, podemos asociar los estados coherentes con nuestro análisis matricial de la teoría de perturbaciones.

Para finalizar esta sección, y hacer un análisis completo de este caso, tenemos que mencionar que cuando $\gamma < 0$ la ecuación (5.16) se reescribe como

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{D}(\lambda, t) \hat{D}^\dagger(\lambda) |\psi(0)\rangle. \quad (5.25)$$

5.2. Estados comprimidos generados por perturbaciones cuadráticas

En esta sección estudiaremos el comportamiento del oscilador armónico con un potencial perturbativo de la forma

$$V = \frac{\omega^2}{2} \hat{x}^2. \quad (5.26)$$

Sustituyendo este potencial en la ecuación (5.1), tenemos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(\hat{H}_0 + \lambda \frac{\omega^2}{2} \hat{x}^2)t} |\psi(0)\rangle. \quad (5.27)$$

Definimos el Hamiltoniano

$$\hat{H}_{\tilde{\omega}} = \hat{H}_0 + \lambda \frac{\omega^2}{2} \hat{x}^2 = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \tilde{\omega}^2 \hat{x}^2), \quad (5.28)$$

donde

$$\tilde{\omega} = \omega \sqrt{1 + \lambda}.$$

Este Hamiltoniano puede representar físicamente una cavidad de un solo modo a la cual se le puede cambiar la frecuencia de oscilación. El resultado de modificar

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

la frecuencia de oscilación inicial produce estados coherentes comprimidos, como se describe en [15].

Considerando (5.28), la ecuación (5.27) toma la forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\tilde{\omega}}t}|\psi(0)\rangle. \quad (5.29)$$

Escogiendo nuevamente el estado de vacío como condición inicial y $\lambda \neq 0$, podemos ver que al cambiar la frecuencia de oscilación de ω a $\tilde{\omega}$, la función de onda va sufriendo compresiones y descompresiones de forma periodica a lo largo de su evolución temporal, tal y como se muestra en la figura (5.3).

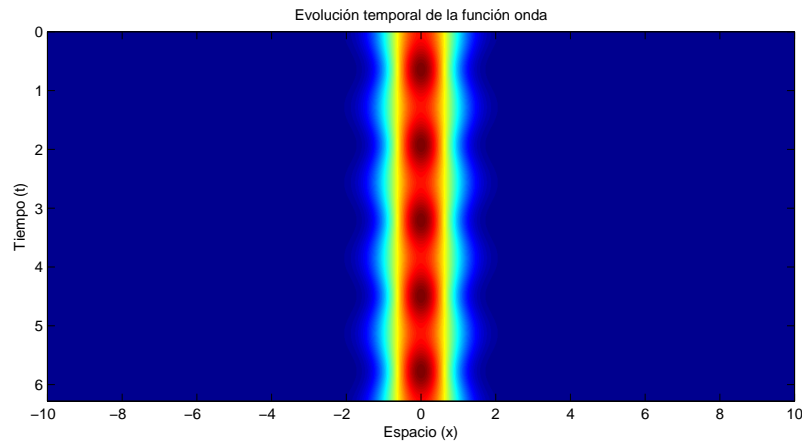


Figura 5.3: En esta gráfica generamos un estado comprimido cambiando la frecuencia de oscilación de \hat{H}_0 de ω a $\tilde{\omega}$, y escogiendo como condición inicial el estado de vacío.

Ya que el Hamiltoniano (5.28) tiene una frecuencia de oscilación diferente a la de \hat{H}_0 necesitamos redefinir los operadores creación y aniquilación como sigue

$$\hat{A}^\dagger = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{2}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2\tilde{\omega}}} \quad (5.30)$$

y

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{2}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2\tilde{\omega}}}. \quad (5.31)$$

Nótese que sí $\lambda = 0$ recuperamos los operadores de creación y aniquilación definidos en (3.2) y (3.3). Usando los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger , podemos escribir la ecuación (5.28)

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

como

$$\hat{H}_{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega} \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.32)$$

Con este Hamiltoniano podemos, de forma muy particular, estudiar los estados comprimidos; sin embargo, un estudio más sistemático y general de este tipo de estados se muestra en [33].

Continuando con nuestro análisis, tenemos que el Hamiltoniano (5.32) cumple la ecuación de eigenvalores

$$\hat{H}_{\tilde{\omega}} |n_{\tilde{\omega}}\rangle = E_{n_{\tilde{\omega}}} |n_{\tilde{\omega}}\rangle, \quad (5.33)$$

donde los eigenvalores $E_{n_{\tilde{\omega}}}$ y los eigenkets $|n_{\tilde{\omega}}\rangle$ pueden ser hallados facilmente. Sin embargo, estamos interesados en estudiar las propiedades de este Hamiltoniano con los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , por lo tanto usamos las relaciones (3.4) y (3.5), que sustituidas en (5.30) y (5.31), nos dan

$$\hat{A}^\dagger = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{2}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2\omega}} - \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{\sqrt{2\tilde{\omega}}}$$

y

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{2}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2\omega}} + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{\sqrt{2\tilde{\omega}}},$$

y reacomodando términos, tenemos

$$\hat{A}^\dagger = \alpha \hat{a} + \beta \hat{a}^\dagger \quad (5.34)$$

y

$$\hat{A} = \beta \hat{a} + \alpha \hat{a}^\dagger, \quad (5.35)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}} - \sqrt{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}} \right)$$

y

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}} + \sqrt{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}} \right).$$

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

Una vez que hemos redefinido los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger , vamos a encontrar su conmutador, por lo que se sigue

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] &= \hat{A}\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{A}, \\
 &= (\beta\hat{a} + \alpha\hat{a}^\dagger)(\alpha\hat{a} + \beta\hat{a}^\dagger) - (\alpha\hat{a} + \beta\hat{a}^\dagger)(\beta\hat{a} + \alpha\hat{a}^\dagger), \\
 &= \beta\alpha\hat{a}^2 + \beta^2\hat{a}\hat{a}^\dagger + \alpha^2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \alpha\beta(\hat{a}^\dagger)^2 \\
 &\quad - \alpha\beta\hat{a}^2 - \alpha^2\hat{a}\hat{a}^\dagger - \beta^2\hat{a}^\dagger\hat{a} - \beta\alpha(\hat{a}^\dagger)^2, \\
 &= (\beta\alpha - \alpha\beta)\hat{a}^2 + (\beta^2 - \alpha^2)\hat{a}\hat{a}^\dagger + (\alpha^2 - \beta^2)\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\alpha\beta - \beta\alpha)\hat{a}^{\dagger 2},
 \end{aligned}$$

y tenemos

$$\beta\alpha - \alpha\beta = \alpha\beta - \beta\alpha = 0, \quad (5.36)$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = 1, \quad (5.37)$$

y

$$\alpha^2 - \beta^2 = -1. \quad (5.38)$$

Sustituyendo estos términos dentro del conmutador obtenemos

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (5.39)$$

Por medio de estos resultados, podemos ver que los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger son similares a los operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger de tal manera que podemos igualar las relaciones

$$\mu^2 - \nu^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 1,$$

donde μ y ν son definidos en (3.35) y (3.36), por lo que

$$\mu^2 = \beta^2,$$

que podemos reescribir como

$$(\cosh(r))^2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}} + \sqrt{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}} \right)^2,$$

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

entonces

$$\begin{aligned} e^{2r} + 2 + e^{-2r} &= \frac{\tilde{\omega}}{\omega} + 2 + \frac{\omega}{\tilde{\omega}}, \\ e^{2r} + e^{-2r} &= \sqrt{1 + \lambda} + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda}}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

y por lo tanto

$$e^{2r} = \sqrt{1 + \lambda}$$

y finalmente

$$r = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1 + \lambda}) = \frac{1}{4} \ln(1 + \lambda). \quad (5.41)$$

De tal manera que podemos escribir el operador de compresión (3.32) en términos del parametro perturbativo λ como sigue

$$\hat{S}(\lambda) = \exp\left(\frac{\ln(1 + \lambda)}{8} (\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2)\right). \quad (5.42)$$

Por analogía con \hat{b} y \hat{b}^\dagger , podemos definir

$$\hat{A} = \hat{S}\hat{a}\hat{S}^\dagger \quad (5.43)$$

y

$$\hat{A}^\dagger = \hat{S}\hat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger. \quad (5.44)$$

Aplicando este resultado en (5.29) tenemos

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-it\tilde{\omega}(\hat{A}^\dagger\hat{A}+1/2)}|\psi(0)\rangle, \\ &= e^{-it\tilde{\omega}\hat{S}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)\hat{S}^\dagger}|\psi(0)\rangle, \\ &= \hat{S}e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\hat{S}^\dagger|\psi(0)\rangle, \end{aligned}$$

y multiplicando por $e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}e^{it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}$, obtenemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}e^{it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\hat{S}e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\hat{S}^\dagger|\psi(0)\rangle. \quad (5.45)$$

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

De igual forma que para el operador de desplazamiento, definimos el operador de compresión dependiente del tiempo como

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\tilde{\omega}}(\lambda, t) &= e^{it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\hat{S}e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}, \\ &= e^{it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}e^{\frac{1}{8}\ln(1+\lambda)(\hat{a}^2-(\hat{a}^\dagger)^2)}e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}, \\ &= \exp\left[\frac{1}{8}\ln(1+\lambda)\left(e^{it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\hat{a}^2e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- e^{it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}(\hat{a}^\dagger)^2e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\right)\right],\end{aligned}$$

por lo que finalmente obtenemos

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}}(\lambda, t) = \exp\left[\frac{1}{8}\ln(1+\lambda)(\hat{a}^2e^{-2it\tilde{\omega}} - (\hat{a}^\dagger)^2e^{2it\tilde{\omega}})\right]. \quad (5.46)$$

Entonces (5.45) toma la forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\tilde{\omega}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}\hat{S}_{\tilde{\omega}}(\lambda, t)\hat{S}^\dagger(\lambda)|\psi(0)\rangle. \quad (5.47)$$

Desarrollando la exponencial compleja en su serie de Taylor

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{1+\lambda}\hat{A}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{\sqrt{1+\lambda}\hat{A}} \Big|_{\lambda=0} \\ &= e^{\hat{A}} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\hat{A} + \frac{\lambda^2}{2!2} [\hat{A}^2 - \hat{A}] + \dots\right),\end{aligned} \quad (5.48)$$

donde $\hat{A} = -it\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) = -it\hat{H}_0$.

Sustituyendo este resultado en (5.47), tenemos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{\hat{A}} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\hat{A} + \frac{\lambda^2}{2!2} [\hat{A}^2 - \hat{A}] + \dots\right) \hat{S}_{\tilde{\omega}}(\lambda, t)\hat{S}^\dagger(\lambda)|\psi(0)\rangle. \quad (5.49)$$

Nuevamente, comparando este resultado con (4.39), tenemos que el operador de Dyson para la perturbación cuadrática es

$$\hat{U}_D = \left(1 + (-it)\frac{\lambda}{2}\hat{H}_0 + \frac{\lambda^2}{2!2} [(-it)^2\hat{H}_0^2 - (-it)\hat{H}_0] + \dots\right) \hat{S}_{\tilde{\omega}}(\lambda, t)\hat{S}^\dagger(\lambda). \quad (5.50)$$

Notamos que para esta perturbación el operador de Dyson no tiene una solución exacta, tal y como ocurrio en la perturbación lineal; sin embargo, la solución que encontramos para (5.50) está dada en términos del operador de compresión \hat{S} .

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

Retomando la ecuación (5.46), consideremos el caso para $\hat{S}_{\tilde{\omega}}$ cuando $t = n\pi/\tilde{\omega}$ entonces

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}} = \hat{S}(\lambda)$$

lo cual implica

$$\left| \psi \left(\frac{n\pi}{\tilde{\omega}} \right) \right\rangle = e^{-in\pi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})} |\psi(0)\rangle, \quad (5.51)$$

y cuando $t = (n + 1/2)\pi/\tilde{\omega}$ entonces

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}} = \hat{S}^\dagger(\lambda),$$

de tal manera que

$$\left| \psi \left(\frac{(n + 1/2)\pi}{\tilde{\omega}} \right) \right\rangle = e^{-i(n+1/2)\pi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})} (\hat{S}^\dagger(\lambda))^2 |\psi(0)\rangle \quad (5.52)$$

donde n es un entero.

Estos dos casos nos indican los punto de nula compresión (5.51) y de máxima compresión (5.52) que tiene el sistema a lo largo de su evolución. Además, también podemos ver que esta compresión será periódica y la frecuencia de ésta dependerá de $\tilde{\omega}(\lambda)$.

El siguiente paso en este análisis es hacer una aproximación a primer orden de la ecuación (5.47) en una forma similar a la perturbación lineal. Primero desarrollando \hat{S} y \hat{S}^\dagger en su serie de Taylor, tenemos que

$$\hat{S}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{S}^{\dagger(n)}(0)}{n!} \lambda^n \quad (5.53)$$

y

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{S}^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n. \quad (5.54)$$

Considerando $\lambda \ll 1$ podemos truncar a primer orden las sumatorias anteriores, por lo que

$$\hat{S}^\dagger \approx \hat{S}^{\dagger(0)}(0) + \lambda \hat{S}^{\dagger(1)}(0)$$

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.2. ESTADOS COMPRIMIDOS GENERADOS POR PERTURBACIONES
CUADRÁTICAS

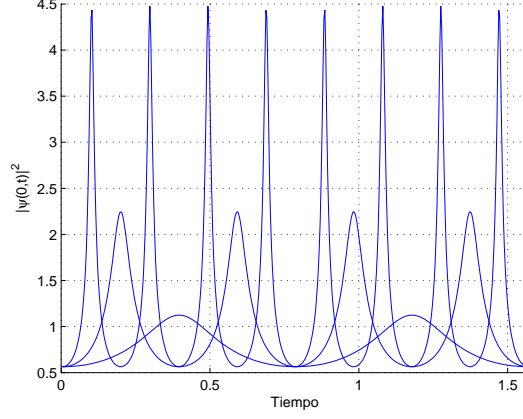


Figura 5.4: En esta gráfica podemos ver la evolución temporal de las soluciones de la ecuación (5.29) para $x = 0$ y $\lambda = 3, 15, 63$ respectivamente. Nuevamente se ha usado el estado de vacío como condición inicial.

y

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}} \approx \hat{S}_{\tilde{\omega}}(0) + \lambda \hat{S}_{\tilde{\omega}}^{(1)}(0).$$

Pero se puede ver facilmente que

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}}^{\dagger(0)}(0) = \hat{S}_{\tilde{\omega}}^{(0)}(0) = 1, \quad (5.55)$$

y además

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}}^{\dagger(1)} = \frac{\partial \hat{S}_{\tilde{\omega}}^{\dagger}}{\partial \lambda} = \frac{\exp \left[\frac{\ln(1+\lambda)((\hat{a}^{\dagger})^2 - \hat{a}^2)}{8} \right]}{8(1+\lambda)} ((\hat{a}^{\dagger})^2 - \hat{a}^2). \quad (5.56)$$

Evaluando esta expresión en $\lambda = 0$, obtenemos

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}}^{\dagger(1)}(0) = \frac{((\hat{a}^{\dagger})^2 - \hat{a}^2)}{8}. \quad (5.57)$$

Para hallar $\hat{S}_{\tilde{\omega}}^{(1)}$, empezaremos por resolver

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\tilde{\omega}}^{(1)} &= \frac{\partial \hat{S}_{\tilde{\omega}}}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp \left[\frac{1}{8} \ln(1+\lambda) (\hat{a}^2 e^{-2it\tilde{\omega}} - (\hat{a}^{\dagger})^2 e^{2it\tilde{\omega}}) \right], \\ &= \exp \left[\frac{1}{8} \ln(1+\lambda) (\hat{a}^2 e^{-2it\tilde{\omega}\sqrt{1+\lambda}} - (\hat{a}^{\dagger})^2 e^{2it\tilde{\omega}\sqrt{1+\lambda}}) \right], \\ &\times \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{8} \ln(1+\lambda) (\hat{a}^2 e^{-2it\tilde{\omega}\sqrt{1+\lambda}} - (\hat{a}^{\dagger})^2 e^{2it\tilde{\omega}\sqrt{1+\lambda}}). \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.3. ESTADOS COHERENTE GENERALIZADOS

Realizando la derivada y reacomodando términos, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\tilde{\omega}}^{(1)} &= \frac{\hat{S}_{\tilde{\omega}}}{8} \left(\frac{\hat{a}^2 e^{-2it\omega\sqrt{1+\lambda}} - (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2it\omega\sqrt{1+\lambda}}}{1+\lambda}, \right. \\ &\quad \left. + \frac{(i\omega t) \ln(1+\lambda) (\hat{a}^2 e^{-2it\omega\sqrt{1+\lambda}} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2it\omega\sqrt{1+\lambda}})}{\sqrt{1+\lambda}} \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Evaluando esta expresion en $\lambda = 0$, se reduce a

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}}^{(1)}(0) = \frac{1}{8} \left(\hat{a}^2 e^{-2it\omega} - (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2it\omega} \right). \quad (5.59)$$

Entonces multiplicando (5.57) y (5.59) encontramos

$$\hat{S}_{\tilde{\omega}} \hat{S}^\dagger = 1 + \frac{\lambda}{8} \left((\hat{a}^\dagger)^2 (1 - e^{2i\omega t}) + \hat{a}^2 (e^{-2i\omega t} - 1) \right). \quad (5.60)$$

Truncado de igual forma a primer orden la ecuación (5.48) tenemos

$$e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \approx e^{-it\omega(\hat{n}+1/2)} + \frac{\lambda}{2} (-it\omega) e^{-it\omega(\hat{n}+1/2)} (\hat{n} + 1/2). \quad (5.61)$$

Sustituyendo este resultado y (5.60) en (5.47), obtenemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\hat{H}_0} \left(1 + \frac{\lambda}{8} \left((\hat{a}^\dagger)^2 (1 - e^{2i\omega t}) + \hat{a}^2 (e^{-2i\omega t} - 1) \right) - \lambda \frac{it\omega}{2} \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \right) |\psi(0)\rangle. \quad (5.62)$$

Nuevamente tomando el término

$$e^{-it\hat{H}_0} \left(\frac{1}{8} \left((\hat{a}^\dagger)^2 (1 - e^{2i\omega t}) + \hat{a}^2 (e^{-2i\omega t} - 1) \right) - \frac{it\omega}{2} \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \right) |\psi(0)\rangle,$$

y considerando la condición inicial $|n^{(0)}\rangle$ podemos ver que la expresión resultante es igual a la ecuación (4.49), por lo tanto podemos asociar los estados comprimidos con nuestro modelo de la teoría de perturbaciones y con el operador de Dyson.

5.3. Estados coherente generalizados

Hemos visto en las secciones anteriores que considerar perturbaciones lineales ó cuadráticas en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo genera estados

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.3. ESTADOS COHERENTE GENERALIZADOS

coherentes ó estados comprimidos respectivamente. Por lo que para finalizar este capítulo analizaremos el caso general, es decir, cuando ambas perturbaciones se consideran en (5.1).

Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-it(\hat{H}_0 + \lambda(\gamma\hat{x} + \frac{\omega^2}{2}\hat{x}^2))} |\psi(0)\rangle, \\ &= \exp\left[-it\left(\frac{\hat{p}}{2} + \frac{\tilde{\omega}^2}{2}\hat{x}^2 + \lambda\gamma\hat{x}\right)\right] |\psi(0)\rangle, \end{aligned} \quad (5.63)$$

por lo que el Hamiltoniano es

$$\hat{H}_{\gamma,\tilde{\omega}} = \frac{\hat{p}}{2} + \frac{\tilde{\omega}^2}{2}\hat{x}^2 + \lambda\gamma\hat{x}. \quad (5.64)$$

El Hamiltoniano anterior puede ser escrito como

$$\hat{H}_{\gamma,\tilde{\omega}} = D^\dagger(\tilde{\omega}) \left(\frac{\hat{p}}{2} + \frac{\tilde{\omega}^2}{2}\hat{x}^2\right) \hat{D}(\tilde{\omega}), \quad (5.65)$$

donde

$$\hat{D}(\tilde{\omega}) = e^{\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\tilde{\omega}^3}}(\hat{A}^\dagger - \hat{A})}. \quad (5.66)$$

Utilizando las relaciones (5.43) y (5.44), tenemos que el operador $\hat{D}(\tilde{\omega})$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \hat{D}(\tilde{\omega}) &= \hat{S} e^{\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\tilde{\omega}^3}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} \hat{S}^\dagger, \\ &= \hat{S} \hat{D}_\gamma \hat{S}^\dagger. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Por lo tanto la ecuación (5.64) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{D}^\dagger(\tilde{\omega}) \hat{S} e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{S}^\dagger \hat{D}(\tilde{\omega}) |\psi(0)\rangle, \\ &= \hat{S} \hat{D}_\gamma^\dagger e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{D}_\gamma \hat{S}^\dagger |\psi(0)\rangle, \\ &= e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} e^{it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{D}_\gamma^\dagger e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} e^{it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{S} e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{D}_\gamma \hat{S}^\dagger |\psi(0)\rangle, \\ &= e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{D}_\gamma^\dagger(t) \hat{S}_\omega(t) \hat{D}_\gamma \hat{S}^\dagger |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (5.68)$$

En esta última ecuación podemos ver que la evolución temporal del ket $|\psi(t)\rangle$ está escrita en términos del operador de desplazamiento y del operador de compresión, por

**CAPÍTULO 5. LOS ESTADOS COHERENTES Y LA TEORÍA DE
PERTURBACIONES**
5.3. ESTADOS COHERENTE GENERALIZADOS

lo que al aplicar una condición inicial específica a la ecuación (5.68) observaremos la interacción que surge entre estos dos operadores. En concreto, si escogemos nuevamente el estado de vacío como la condición inicial, tenemos que la ecuación (5.68) toma la forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{D}_\gamma^\dagger(t) \hat{S}_{\tilde{\omega}}(t) \hat{D}_\gamma \hat{S}^\dagger |0^{(0)}\rangle$$

y tomando la definición (3.41), tenemos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\tilde{\omega}(\hat{n}+1/2)} \hat{D}_\gamma^\dagger(t) \hat{S}_{\tilde{\omega}}(t) \left| \frac{\lambda\gamma}{\sqrt{2\tilde{\omega}}}, -\ln(1+\lambda) \right\rangle. \quad (5.69)$$

En la figura siguiente se muestra la evolución temporal de algunas soluciones que satisfacen a la ecuación (5.69).

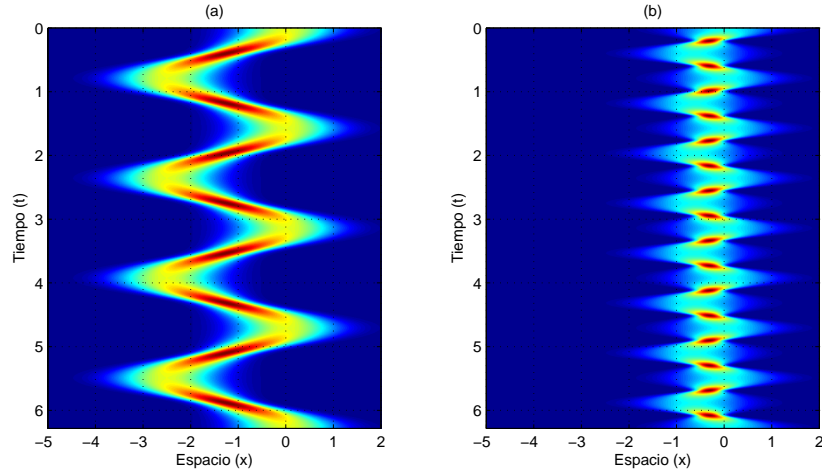


Figura 5.5: En estas gráficas podemos ver la evolución temporal de dos estados coherentes generales; los llamamos de esta forma debido a que usamos las perturbaciones lineal y cuadrática al mismo tiempo para generarlos, y además la condición inicial que usamos es el estado de vacío. Ambas gráficas tienen el mismo valor de $\lambda\gamma$, sin embargo, la frecuencia en (a) es $\tilde{\omega}$ mientras que para (b) es $2\tilde{\omega}$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado una nueva técnica de aplicación a la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger. Esta nueva implementación se pudo construir a través de la solución formal de la ecuación de Schrödinger (4.4) para un Hamiltoniano independiente del tiempo de la forma $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$. Sin embargo, la idea esencial de nuestro método, consistió en proponer la matriz M definida en (4.6), lo cual nos permitió transformar la serie de Taylor del ket $|\psi(t)\rangle$, que estaba en términos de productos de los operadores \hat{H}_0 y \hat{V} , en una sumatoria infinita de las potencias de M la cual fue más fácil de manejar.

Atacar el problema en cuestión desde esta perspectiva trae una serie de resultados tales como:

- Este método nos permite expresar los términos de las series perturbativas en forma de integrales dependientes del tiempo que están acotadas en el intervalo $[0, t]$, como se muestra en (4.29) y (4.60). Una propiedad interesante de las ecuaciones mencionadas anteriormente es que en las formas que son presentadas no distinguen si es el Hamiltoniano \hat{H}_0 es degenerado o no, por lo que las ecuaciones que proporcionamos para las correcciones son expresiones muy generales.
- Cuando resolvemos el correspondiente orden de corrección a $|\psi^{(0)}(t)\rangle$, podemos

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

ver que esta contiene la corrección al eigenvalor y al eigenket del sistema (2.37), como podemos ver en las ecuaciones (4.33) y (4.62), y además contiene otra serie de términos dependientes del tiempo que nos permiten analizar la evolución temporal del sistema.

- Por medio de este resultado tenemos que al plantear el Hamiltoniano \hat{H} en la ecuación de Schrödinger y analizarlo con base en el sistema estacionario generado por \hat{H}_0 , encontramos que la solución que satisface a \hat{H} no es un sistema estacionario, como se contempla en la teoría de R-S, sino que es una solución que tiene una evolución temporal y por lo tanto también es necesario calcular su corrección, lo cual obtenemos con nuestro método.
- Un aspecto importante a resaltar en este modelo es que este puede ser aplicado de forma eficiente a cualquier sistema cuántico que posea operadores de creación y aniquilación, como por ejemplo los operadores de Susskind-Glogower.

Por motivos de comparación de nuestro método con la teoría de R-S, resolvimos las correcciones a primer y segundo orden de los potenciales lineal y cuadrático como potenciales perturbativos sobre el oscilador armónico y encontramos que la solución proporcionada no solo contiene los resultados del caso estacionario, sino que encontramos otros términos de dependencia temporal que nos ayudan a estudiar la evolución temporal de las correcciones en estudio.

Además, aplicamos nuestro modelo a potenciales más complejos tales como el potencial coseno y de Morse para analizar su comportamiento con este nuevo método. Sin embargo, antes de aplicar este modelo, primero desarrollamos estos potenciales en su serie de Taylor para obtener nuevamente un oscilador armónico más una serie infinita de potenciales perturbativos. Como un paso previo para resolver los sistemas anteriores, aplicamos el ordenamiento simétrico propuesto por Fuji [24] de tal manera que encontramos que para este tipo de problemas las correcciones a primer orden

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

están asociados con los polinomios de Laguerre. Siendo más específicos encontramos que la corrección a la energía está dada en términos de un polinomio de Laguerre, mientras que la corrección a la función de onda está dada como una sumatoria infinita de polinomios asociados de Laguerre. Aunque esto último es una desventaja debido a que no podemos encontrar una expresión analítica para este tipo de corrección, podemos hacer algún tipo de aproximación o truncamiento para darnos una idea de cómo puede ser la solución final.

Considerando la forma de la series perturbativas que obtuvimos de nuestro análisis, pudimos mostrar que este modelo puede ser asociado de forma directa con el operador de Evolución Temporal u Operador de Dyson del potencial perturbativo \hat{V} , y además podemos proveer una notación diferente a este dada por la ecuación (4.149). Como el operador de Dyson es una herramienta bien estudiada entonces obtener un resultado de este tipo es una fuerte demostración de que nuestro análisis puede ser aplicado a problemas más complejos relacionados con la teoría de la dispersión, la óptica cuántica, como es mostrado en [30], [31] y [32], u otras ramas de la física cuántica.

Por último, tomando nuevamente la expresión (4.4) y sustituyendo los potenciales perturbativos lineal y cuadrático en esta, encontramos que el ket $|\psi(t)\rangle$ tiene solución exacta en términos de los operadores de desplazamiento y de compresión respectivamente, y además estos dependen del parámetro λ . Esto es de gran utilidad, ya que podemos desarrollar estos operadores en sus series de Taylor y hacer aproximaciones del orden n-esimo de tal forma que podemos comparar estas con los resultados obtenidos por nuestro método. En particular, hicimos la comparación entre la aproximación a primer orden y la corrección a primer orden de $|\psi(t)\rangle$, observando que son las mismas expresiones, lo cual nos permite establecer parámetros para validar el análisis matricial de la teoría de perturbaciones que hemos desarrollado.

Adicionalmente, al considerar que estas dos perturbaciones actúan al mismo

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

tiempo sobre Hamiltoniano \hat{H}_0 nos permite generar estados coherentes de tal manera que podemos observar la interacción entre el operador de compresión y desplazamiento en la evolución temporal de la función de onda.

Índice de figuras

4.1.	Con el fin de cubrir los parámetros (t_1, t_2) dentro del triangulo definido por la diagonal, el punto (t_0, t_0) y la línea vertical en t integramos primero la variable t_2 de t_1 hasta t (línea vertical) y entonces integrar t_1 de t_0 hasta t . Equivalentemente podemos integrar primero las variable t_1 de t_0 hasta t_1 (línea horizontal) y después integrar t_2 de t_0 hasta t [17].	63
5.1.	En esta figura podemos ver la evolución temporal de la función de onda (5.2). Debido a que escogemos como condición inicial una solución exacta del oscilador armónico cuántico y $\lambda = 0$, se tiene que la propagación de $ \psi(t)\rangle$ en el tiempo ocurre sin deformación alguna.	66
5.2.	En estas gráficas podemos ver la propagación temporal del estado de vacío cuando existe una perturbación del tipo $\gamma\hat{x}$ sobre el sistema. La gráfica (a) corresponde a $\gamma > 0$ y (b) cuando $\gamma < 0$	67
5.3.	En esta gráfica generamos un estado comprimido cambiando la frecuencia de oscilación de \hat{H}_0 de ω a $\tilde{\omega}$, y escogiendo como condición inicial el estado de vacío.	72
5.4.	En esta gráfica podemos ver la evolución temporal de las soluciones de la ecuación (5.29) para $x = 0$ y $\lambda = 3, 15, 63$ respectivamente. Nuevamente se ha usado el estado de vacío como condición inicial.	78

5.5. En estas gráficas podemos ver la evolución temporal de dos estados coherentes generales; los llamamos de esta forma debido a que usamos las perturbaciones lineal y cuadrática al mismo tiempo para generarlos, y además la condición inicial que usamos es el estado de vacío. Ambas gráficas tienen el mismo valor de $\lambda\gamma$, sin embargo, la frecuencia en (a) es $\tilde{\omega}$ mientras que para (b) es $2\tilde{\omega}$ 81

Bibliografía

- [1] Schrödinger E. (1926), Phys. Rev. 28, 1049.
- [2] Schrödinger E. (1926), Annalen der Physik 80, 361.
- [3] Simon B. (1991), Bulletin of the AMS 24, 303.
- [4] Powell John L., Quantum Mechanics (Addison-Wesley, 1961).
- [5] Merzbacher E., Quantum Mechanics (John Wiley & Sons, 1998).
- [6] Griffiths D. J. , Introduction to Quantum Mechanics (Prentice Hall, 1994) .
- [7] Sakurai J.J., Modern Quantum Mechanics (Addison-Wesley, 1994).
- [8] Znojil M. (1997), J. Phys. A 30, 8771.
- [9] Hai W., Feng M., et al (2000), Phys. Rev. A 61, L79.
- [10] Yun-Hui Z., et al (2008), Chinese Phys. B, 17, 1720
- [11] Greiner W., Reinhardt J., Field Quantization (Springer, 1996).
- [12] Gerry C., Knight P., Introductory Quantum Optics (Cambridge University Press, 2005).
- [13] Weigert S. (1997), J. Phys. A 30, 8739.
- [14] Weigert S. (2000), J. Math. Phys. 41, 2434.
- [15] Dutra S. M., Cavity quantum electrodynamics (Wiley, 2005).

- [16] Cortes-Tamayo J.O. (1993), Rev. Mex. de Fis. E 39 ,128.
- [17] Schleich W.P., Quantum optics in phase space (Wiley, 2001).
- [18] Larson J., Moya-Cessa H. (2007), J. of Modern Optics 54, 1497.
- [19] Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions (Dover, 1965).
- [20] Novotny L., Hecht B., Principles of Nano-Optics (Cambridge University Press, 2006).
- [21] Moliton A., Solid-State Physics for Electronics (Wiley, 2009).
- [22] Frenkel L., Portugal R. (2001), J. Phys A 34, 3541.
- [23] O'Dell D. J. J. (2001), J. Phys. 34, 3897.
- [24] Fuji K., Suzuki T. (2004), Mod. Phys. Lett. A 19, 827.
- [25] Morse P. M. (1929), Phys. Rev. 34, 54
- [26] Blümel R., Advance Quantum Mechanics (Jones and Bartlett Publishers, 2011).
- [27] Roman P., Advanced Quantum Theory (Addison Wesley, 1965).
- [28] Dyson F. J. (1949), Phys. Rev. 75, 486.
- [29] Brouwer P.M., Frahm K. M. and Beenakker C. W. J. (1997), Phys. Rev. Lett. 78, 4737.
- [30] Mostafazadeh A. (1997), Phys. Rev. A 55, 1653.
- [31] Frasca M. (1998), Phys. Rev. A 58, 3439.
- [32] Frasca M. (1999), Phys. Rev. A 60, 573.

- [33] Ralich R.M., Clemons C.B., Young G. W. (2005), Int. Journal of Applied Mathematical Sciences 2, 105.