



INAOE

El Operador de Fase de Pegg y Barnett y la Transformada Discreta de Fourier

por el

Lic. Luis Amilca Andrade Morales

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y
Electrónica**

Supervisada por:

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa

INAOE

Dr. Francisco Soto Eguibar

INAOE

AGOSTO 2015

Tonantzintla, Puebla

©INAOE 2015

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias en su totalidad, o
en partes, de esta tesis



Dedicatoria

A mi familia, especialmente a mis **padres**.

Gracias por apoyarme siempre en todo momento, por sus enseñanzas y sus consejos, pero más importante gracias por todo su amor y cariño, todo lo que soy se los debo a ustedes, así que este triunfo también es suyo, los amo.

Al amor de mi vida.

Este triunfo también es tuyo mi amor, sin tí nunca lo hubiera logrado. Gracias por tu apoyo incondicional, por ser mi fuerza para levantarme de mis derrotas, te amo con todo mi corazón.

A mis amigos y compañeros de estudio.

Lo que más disfruto de hacer ciencia, es hacerla a su lado. Gracias por su amistad.

Agradecimientos

A los **Dres. Héctor M. Moya Cessa, Francisco Soto Eguibar, Blas M. Rodríguez Lara.**

Por su asesoría para la elaboración de esta tesis. Muchas gracias por su paciencia y sus enseñanzas.

Al **INAOE** y a **CONACYT.**

Por la oportunidad que me ha dado de crecer profesionalmente, por abrirme los ojos a un mundo de preparación para el futuro.

A mis sinodales los **Dres. Blas M. Rodríguez Lara, Gabriel C. Martínez Niconoff, Víctor M. Arrizón Peña.**

Quienes con sus comentarios y observaciones han hecho de éste un mejor trabajo.

A mis **compañeros y amigos del INAOE.**

Quienes me acompañaron en esta travesía.

Índice general

1. Introducción	1
2. El Problema de la Fase en Óptica Cuántica	3
2.1. Introducción	3
2.2. Electrodinámica Clásica	4
2.3. Cuantización del Campo Electromagnético	8
2.3.1. Estados de Número	11
2.4. La Fase en Óptica Cuántica	13
2.4.1. Historia del Operador de Fase	13
2.4.2. El Formalismo de Dirac	15
2.4.3. El Formalismo de Susskind-Glogower	18
3. Formalismo de Pegg y Barnett	23
3.1. Introducción	23
3.2. Estados de Fase	24
3.3. El operador de Fase de Pegg y Barnett	26
3.3.1. Conmutador de Fase y Número	27
3.3.2. Operadores de Creación y Aniquilación	28
4. La Transformada Discreta de Fourier y el Operador de Fase de Pegg y Barnett	31

4.1. Raíces de la Unidad	32
4.2. Transformada Discreta de Fourier	33
4.2.1. Forma Matricial de la DFT	34
4.3. Representación Matricial del Operador de Pegg y Barnett	36
4.3.1. Logaritmo de una Matriz	37
4.3.2. Valores y Vectores Propios	38
4.4. Operador Exponencial de Fase	41
5. Conclusiones	45

Índice de figuras

2.1. Cavity con paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$. El campo eléctrico está polarizado a lo largo de la dirección X . . .	9
4.1. Tres raíces de la unidad.	32

Resumen

La fase es una variable insustituible en la óptica clásica, por lo que vale la pena investigar el observable que represente esta magnitud en óptica cuántica. Sorprendentemente, dicho observable no es nada fácil de definir, hasta el punto de no existir un operador cuántico que pueda abarcar todas las propiedades que debe tener la fase [1].

El objetivo de esta tesis es estudiar ciertos aspectos que conciernen a la fase del campo electromagnético en el régimen cuántico. Específicamente, se hace una revisión del problema de la fase cuántica, estudiado por primera vez por London en 1926. Haciendo una revisión de éste y otros formalismos, como el de Pegg y Barnett [2], se elabora un trabajo puramente teórico para intentar definir un operador cuántico de fase, expresado en términos de una transformada discreta de Fourier.

Abstract

Phase is an irreplaceable variable in classical optics, so it is very important to investigate the observable representing this magnitude in quantum optics. Surprisingly, this observable is so hard to define, that presently it does not exist a quantum operator that can cover all the properties required.

The aim of this thesis is to study certain aspects of the phase of the electromagnetic field in the quantum regime. Specifically, a review of the quantum phase studied first by London in 1926 is done. By reviewing this and other formalism, as the one of Pegg and Barnett, a purely theoretical work is made to try to define a quantum phase operator, expressed in terms of a discrete Fourier transform.

Capítulo 1

Introducción

La transición de una descripción clásica a una descripción cuántica del campo de radiación, se ha convertido en un tema cada vez más importante en las últimas décadas. Sin embargo, la búsqueda de un operador de fase cuántico es un problema viejo en mecánica cuántica [3]. En 1926, London se da cuenta que no existía un operador hermitiano en mecánica cuántica que correspondiera a la fase en mecánica clásica [4]. La idea de un operador de fase llegó al campo de la óptica cuántica, cuando Dirac en 1927, se acercó al problema la cuantización del campo electromagnético [5, 6]; sin embargo, la solución de Dirac sufre de inconsistencias matemáticas relacionadas con el dominio del operador. Louisell en 1963 sugirió que esto podría evitarse usando funciones periódicas del operador, en lugar del propio operador [7]. Más adelante, en 1964, Susskind y Glogower siguieron esta sugerencia y propusieron los operadores que llevan sus nombres. La aplicación de Susskind-Glogower conduce a examinar operadores tales como $\cos \phi$, $\sin \phi$ y $e^{i\phi}$; dado que se encontró que este último no es unitario, ϕ no puede ser un operador hermitiano, lo que indica se debe tener cuidado con estos operadores. En 1968, Carruthers y Nieto [7] propusieron nuevos operadores a los que llamaron \hat{C} , \hat{S} y \hat{E} , en analogía con los de Susskind y Glogower. Como vamos a

ver, los operadores \hat{C} y \hat{S} tampoco dan una respuesta satisfactoria, ya que por esta vía no podemos medir el seno y el coseno de la fase al mismo tiempo, pues sus correspondientes operadores no conmutan. Posteriormente, Pegg y Barnett, basándose en los estados de fase propuestos por Loudon [8, 9], construyeron un operador hermitiano de fase; este operador ha probado ser una de las propuestas más acertadas en la descripción cuántica de la fase; sin embargo, también presenta algunos inconvenientes, como el de estar definido en un espacio de dimensión finita. De aquí que haya necesidad de encontrar otras expresiones para el operador de fase.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: En el segundo capítulo se presentan algunos conceptos indispensables para entender la teoría cuántica de la radiación, como son, la cuantización del campo electromagnético, los operadores de creación y aniquilación, así como los estados de número o estados de Fock, que son de suma importancia en óptica cuántica. Se plantea el problema fundamental de la fase cuántica, así como el formalismo de Dirac y el formalismo de Susskind-Glogower para poder solucionarlo.

En el capítulo tres se presenta de igual manera una revisión del formalismo de Pegg y Barnett. Se estudian los estados de fase propuestos por Loudon y se toman como punto de partida para intentar obtener un operador de fase.

En el cuarto capítulo, haciendo uso del operador de fase definido en el capítulo tres por Pegg y Barnett, calculamos su logaritmo natural para obtener dicho operador de fase en términos de la transformada discreta de Fourier.

En el último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado.

Capítulo 2

El Problema de la Fase en Óptica Cuántica

A pesar de un siglo de desarrollo en el campo de la mecánica cuántica, no existe todavía una respuesta generalmente aceptada para el problema de la fase del campo electromagnético cuántico. Si bien es sabido que el campo electromagnético compuesto por un solo modo es modelado adecuadamente por un oscilador armónico [2], hasta el día de hoy aún existen varias preguntas sobre el significado de la fase. ¿Cómo puede ser definida la fase?, ¿Cómo puede ser medida? o ¿Es posible asociar un operador cuántico a la fase?; estas son algunas de las preguntas que aún son imposibles de responder.

2.1. Introducción

Los experimentos estudiados en óptica cuántica involucran la detección y conteo de fotones individuales, esto hace que la naturaleza de las mediciones quede fuera del marco conceptual de cualquier teoría clásica o semiclásica, y sea necesario incorporar la teoría cuántica del campo de radiación. En la teoría cuántica

de la radiación, los vectores del campo son ahora operadores y no solo cantidades vectoriales como en la teoría clásica. Pero ambas teorías están basadas en las ecuaciones de Maxwell.

La teoría cuántica del campo de radiación guarda algunas analogías con la teoría clásica. Aunque no es posible derivarlo de ésta, sin embargo, la transición a la mecánica cuántica se puede hacer más fácilmente, si las ecuaciones de la teoría electromagnética clásica se ponen en forma que la ecuación para el oscilador armónico clásico es reemplazado por la correspondiente ecuación cuántica.

Muchos fenómenos de la naturaleza pueden ser cuantificados en primera instancia mediante osciladores armónicos. Es el modelo fundamental en ramas como espectroscopía molecular, física del estado sólido, teoría cuántica del campo electromagnético, óptica cuántica y mecánica estadística. Max Planck fue quien propuso la idea de que las paredes del cuerpo negro consistían de un conjunto grande de osciladores armónicos y que ellos absorbían y emitían energía de manera discreta, de modo que, a cada unidad discreta de energía lo llamó un *quantum* de energía mas tarde conocido como fotón.

2.2. Electrodinámica Clásica

Con el objetivo de cuantizar el campo electromagnético en el espacio libre, es conveniente comenzar con la descripción clásica del campo basada en las ecuaciones de Maxwell, las cuales permiten calcular los campos eléctrico, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y magnético, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, a partir de las densidades de carga eléctrica, $\rho(\vec{r}, t)$, y de corriente eléctrica, $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

En unidades del Sistema Internacional, las ecuaciones de Maxwell pueden

escribirse como

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

Aquí ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y la permeabilidad del espacio libre respectivamente y $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

En ausencia de cargas y corrientes, las ecuaciones de Maxwell se simplifican como

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

En seguida, tomando el rotacional¹ de la ecuación (2.1) y sustituyendo la ecuación (2.2), resulta que $\vec{E}(\vec{r}, t)$ satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5)$$

De manera análoga, es posible obtener una ecuación de onda para el campo magnético tomando el rotacional de la ecuación (2.2).

¹ Es útil usar la identidad $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$.

Las ecuación (2.5) se conoce como ecuación vectorial de D'Alembert² [10]. Un caso particular de funciones que satisfacen la ecuación de onda son las funciones armónicas. Por definición, una onda armónica es una función $g(x, t)$ de la forma

$$g(x, t) = A \cos[\kappa(x - vt) + \phi], \quad (2.6)$$

A se denomina amplitud y κ número de onda. La velocidad de propagación, v , en el caso de ondas armónicas, suele recibir el nombre de velocidad de fase. La función

$$\Phi(x, t) = \kappa(x - vt) + \phi. \quad (2.7)$$

es la fase del movimiento ondulatorio, de forma que ϕ es la fase correspondiente a $x = 0$ y $t = 0$.

A partir de la ecuación (2.6) se pueden obtener la longitud de onda λ y el periodo del movimiento ondulatorio armónico T . Por ejemplo, para hallar λ sólo tenemos que tener en cuenta que cuando el argumento del coseno (la fase) se incrementa en 2π , su valor es el mismo. Esto se consigue incrementando x en $2\pi/\kappa$, de forma que

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, como $\lambda = vT$, tenemos

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\pi}{\kappa v}. \quad (2.9)$$

² En coordenadas cartesianas, cada componente $f(\vec{r}, t)$ de los campos satisface la ecuación escalar $\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, que es la ecuación de D'Alembert. Se puede comprobar fácilmente que una función f del tipo $f(z \mp ct)$ es solución de la ecuación de D'Alembert. Esta solución de la ecuación de ondas se denomina onda plana.

Nótese que, fijado x , el movimiento $g(x, t)$ es armónico simple con un período $T = 2\pi/\kappa v$, y una frecuencia angular $\omega = \kappa v$. La *frecuencia* del movimiento ondulatorio será por tanto $\nu = 1/T$.

Otras formas de expresar (2.6) a partir de las cantidades que hemos obtenido, son:

$$g(x, t) = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right], \quad (2.10)$$

$$g(x, t) = A \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \phi\right], \quad (2.11)$$

$$g(x, t) = A \cos(\omega t - \kappa x + \phi). \quad (2.12)$$

Usando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, podemos expresar una onda en su forma compleja. Por ejemplo

$$g(x, t) = Ae^{i(\omega t - \kappa x + \phi)} = Ae^{i\Phi}. \quad (2.13)$$

Si elegimos la parte real de la ecuación (2.13),

$$g(x, t) = \text{Re}[Ae^{i(\omega t - \kappa x + \phi)}], \quad (2.14)$$

veremos que es equivalente a la ecuación (2.12). La representación compleja toma ventaja debido a la facilidad para manipular exponenciales, sin embargo, si queremos representar una onda real, debemos tomar la parte real. La expresión (2.13) es la descomposición clásica del campo eléctrico en amplitud (A) y fase (Φ). Tanto la intensidad y la fase del campo se pueden medir simultáneamente con precisión.

2.3. Cuantización del Campo Electromagnético

Consideremos el caso de un campo electromagnético con un único modo de oscilación confinado en una cavidad unidimensional a lo largo del eje z , con paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$, como se muestra en la figura (2.1).

El campo eléctrico debe desaparecer en los límites y tomará la forma de una onda estacionaria. Suponemos que no hay fuentes de radiación, ni corrientes, ni cargas, ni cualquier medio dieléctrico en la cavidad. El campo se encuentra polarizado a lo largo de la dirección x , $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e}_x E_x(z, t)$, donde \hat{e}_x es un vector de polarización unitario. Las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes en unidades del Sistema Internacional pueden escribirse como (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4).

Una solución compuesta por un único modo dentro de la cavidad es [11]

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(\kappa z), \quad (2.15)$$

donde ω es la frecuencia del modo y κ es el número de onda relacionado con la frecuencia de acuerdo a la expresión $\kappa = \omega/c$. La condición a la frontera $z = L$ conduce a las frecuencias permitidas $\omega_m = c(m\pi/L)$, con $m = 1, 2, \dots$. Por simplicidad asumiremos que ω en la ecuación (2.15) es una de estas frecuencias e ignoraremos el resto. V en la ecuación (2.15) es el volumen efectivo de la cavidad y $q(t)$ un factor dependiente del tiempo, que tiene dimensiones de longitud. Como veremos, $q(t)$ actuará como una posición canónica.

El campo magnético en la cavidad, de la ecuación (2.15) y la ecuación (2.2)

es $\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{e}_y B_y(z, t)$, donde

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\kappa} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V \epsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(\kappa z). \quad (2.16)$$

Aquí, $\dot{q}(t)$ juega el papel de un momento canónico para una partícula de masa unitaria, donde $p(t) = \dot{q}(t)$.

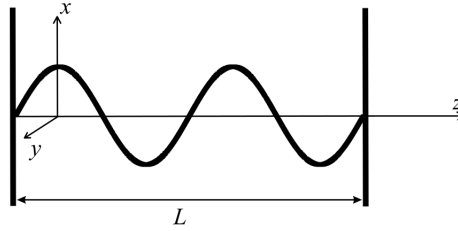


Figura 2.1: Cavidad con paredes perfectamente conductoras en $z = 0$ y $z = L$. El campo eléctrico está polarizado a lo largo de la dirección X .

La energía clásica del campo electromagnético o Hamiltoniano H de un campo con un único modo, está dado por [11]

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right], \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right]. \quad (2.18)$$

De las ecuaciones (2.15) y (2.16) es posible mostrar que

$$H = \frac{1}{2} [p^2(t) + \omega^2 q^2(t)]. \quad (2.19)$$

De donde es evidente que un campo con un único modo es formalmente equivalente a un oscilador armónico de masa unitaria.

La cuantización canónica del Hamiltoniano (2.19) consiste en identificar las variables canónicas q y p para el sistema clásico y reemplazarlas por sus

equivalentes operadores \hat{q} y \hat{p} . Estos operadores deben satisfacer la relación de conmutación canónica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i. \quad (2.20)$$

con $\hbar = 1$.

Si definimos $E_0 = (2\omega^2/V\epsilon_0)^{1/2}$ y $B_0 = E_0/kc^2$ como las amplitudes de los campos eléctrico y magnético, respectivamente, los campos se convierten en los operadores

$$\hat{E}_x(z, t) = E_0\hat{q}(t)\sin(kz), \quad \hat{B}_y(z, t) = B_0\hat{p}(t)\cos(kz). \quad (2.21)$$

y el Hamiltoniano (2.19) adquiere la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[\hat{p}^2(t) + \omega^2\hat{q}^2(t)]. \quad (2.22)$$

Los operadores \hat{q} y \hat{p} son hermitianos, y por lo tanto, corresponden a cantidades observables. Sin embargo, es conveniente y tradicional introducir los operadores no-hermitianos, llamados operador de aniquilación \hat{a} y operador de creación \hat{a}^\dagger , a través de las combinaciones [12]

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} + i\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\hat{p}, \quad (2.23)$$

y su transpuesto conjugado

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} - i\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\hat{p}. \quad (2.24)$$

Los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.25)$$

y como resultado el Hamiltoniano (2.22) se puede expresar como

$$\hat{H} = \omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}), \quad (2.26)$$

El producto de operadores $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}$ se interpreta como el operador de número de fotones. De tal manera que podemos escribir la ecuación anterior como

$$\hat{H} = \omega(\hat{n} + \frac{1}{2}). \quad (2.27)$$

2.3.1. Estados de Número

Los eigenestados del operador definido en la ecuación (2.27) son llamados estados de Fock o estados de número, y en la notación de Dirac se escriben como $|n\rangle$. Estos estados representan el autoestado correspondiente al n -ésimo nivel de excitación con eigenvalores $E = \omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$; i.e.,

$$\hat{H} |n\rangle = \omega(n + \frac{1}{2}) |n\rangle, \quad (2.28)$$

donde n es un entero no negativo.

Los estados de Fock son, por lo tanto, eigenestados del operador de número,

$$\hat{n} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.29)$$

La energía de un oscilador armónico siempre es positiva, así que debe haber un valor de la energía, $E_0 > 0$ con un correspondiente eigenestado $|0\rangle$. Definimos el estado base o de vacío del oscilador armónico como

$$\hat{a} |0\rangle = 0. \quad (2.30)$$

Los operadores de creación y aniquilación actúan sobre los estados de número de la siguiente forma

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.31)$$

y

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.32)$$

Otra propiedad importante de los estados de número, es que cualquier estado $|n\rangle$ puede ser construido en términos del estado vacío por medio del operador de creación,

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.33)$$

Los estados de número forman una base ortonormal

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (2.34)$$

y también son completos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (2.35)$$

Por medio de la relación (2.35) es posible expresar cualquier operador en términos de los estados de número. En efecto, el operador de aniquilación se escribe

$$\hat{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n\rangle \langle n+1|, \quad (2.36)$$

y el operador de creación se pone como

$$\hat{a}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}^\dagger |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|. \quad (2.37)$$

El operador de número es simplemente

$$\hat{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle \langle n|. \quad (2.38)$$

Los estados de número no tienen incertidumbre en intensidad, o lo que es lo mismo,

$$\langle \Delta \hat{n} \rangle = \sqrt{\langle n | \hat{n}^2 | n \rangle - \langle n | \hat{n} | n \rangle^2} = 0. \quad (2.39)$$

Los promedios para la posición y momento son nulos para los estados de número, $\langle n | \hat{q} | n \rangle = \langle n | \hat{p} | n \rangle = 0$. Sin embargo, sus incertidumbres son

$$\langle \Delta \hat{q} \rangle = \sqrt{\langle n | \hat{q}^2 | n \rangle} = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2\omega}}, \quad (2.40)$$

y

$$\langle \Delta \hat{p} \rangle = \sqrt{\langle n | \hat{p}^2 | n \rangle} = \sqrt{\frac{(2n+1)\omega}{2}}. \quad (2.41)$$

La cantidad

$$P(n) = |\langle n | \psi \rangle|^2. \quad (2.42)$$

nos da la probabilidad de tener n número de excitaciones (fotones) en el estado $|\psi\rangle$.

2.4. La Fase en Óptica Cuántica

Por mucho tiempo la naturaleza de la fase de un campo cuantizado ha permanecido como un enigma. A pesar de que la fase es un concepto único para el entendimiento de los fenómenos de la óptica clásica, en óptica cuántica no ha sido fácil entenderlo. Parece sorprendente que la óptica cuántica halla podido subsistir sin un correspondiente operador hermitiano cuántico que reúna todas las propiedades deseables para representar la fase.

2.4.1. Historia del Operador de Fase

Este problema fue primeramente abordado por London en 1926, sin embargo su solución tuvo algunas complicaciones. Después de London, el desafío fue tomado por una serie de investigadores, generando muchas e ingeniosas soluciones, acompañadas de una enorme y variada literatura.

A continuación damos un breve esbozo de algunas de las aproximaciones al “problema de la fase” a lo largo de la historia [13]

- **London** (1926): Es el primero en darse cuenta que no existía un operador hermitiano en mecánica cuántica correspondiente a la fase en mecánica clásica. Propone un operador de la forma $e^{i\hat{\phi}}$.
- **Dirac** (1927): Propone la descomposición polar de los operadores de aniquilación y creación, como $\hat{a} = e^{i\hat{\phi}}\sqrt{\hat{n}}$, y $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{n}}e^{-i\hat{\phi}}$. Y obtiene el conmutador $[\hat{n}, \hat{\phi}] = i$. Este conmutador conduce a resultado erróneos cuando tomamos su valor esperado para un eigenestado de energía $|n\rangle$.
- **Susskind-Glogower** (1964): Demuestran que no hay manera de definir un operador unitario \hat{U} , con la propiedad $\hat{U}\sqrt{\hat{n}} = \hat{a}$. Por lo tanto el operador $\hat{\phi}$ no puede ser un operador hermitiano tal que $\hat{U} = e^{i\hat{\phi}}$, lo que explica la falla en el ansatz de Dirac.

- **Loudon** (1968): Define “los eigenestados de fase”, no-ortogonales

$$|\phi\rangle := \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle. \quad (2.43)$$

- **Lévy-Leblond** (1976): Usando los estados propuestos por Loudon, construye el operador unidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi |\phi\rangle \langle \phi| = 1. \quad (2.44)$$

- **Barnett-Pegg** (1986): Introducen estados de número negativos y definen un operador unitario

$$e^{i\hat{\phi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|. \quad (2.45)$$

Los estados de número negativos, son sólo un dispositivo formal que permite definir un operador unitario pero no tienen ningún contenido físico.

- **Barnett-Pegg** (1988): Definen los eigenestados de fase en un espacio de Hilbert H de dimensión finita, pero arbitrariamente grande.

$$|\phi_m\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\phi_m} |n\rangle, \quad (2.46)$$

donde

$$\phi_m = \phi_0 + \frac{2\pi}{s+1} m \quad \text{con } m = 0, 1, \dots, s. \quad (2.47)$$

El límite al infinito debe ser tomado sólo después que los resultados físicos son evaluados.

2.4.2. El Formalismo de Dirac

Aparentemente Dirac fue el primero en intentar una definición de un operador de fase por medio de una descomposición de amplitud y fase en un operador. Sabemos que un número complejo se puede expresar en términos de su amplitud y de su fase como $a = Re^{i\phi}$. De manera similar, Dirac buscó expresar los operadores de aniquilación (\hat{a}) y creación (\hat{a}^\dagger) del mono-modo del campo electromagnético en la siguiente forma [7].

$$\hat{a} = e^{i\hat{\phi}} \sqrt{\hat{n}}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{n}} e^{-i\hat{\phi}}. \quad (2.48)$$

donde $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, es el operador de número. Dirac considero a $\hat{\phi}$ como un operador hermitiano correspondiente a la fase.

De la relación fundamental de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, se sigue que

$$e^{i\hat{\phi}} \hat{n} e^{-i\hat{\phi}} - \hat{n} = 1, \quad (2.49)$$

y multiplicando la ecuación anterior a la derecha por $e^{i\hat{\phi}}$, obtenemos la expresión

$$e^{i\hat{\phi}} \hat{n} - \hat{n} e^{i\hat{\phi}} = e^{i\hat{\phi}}. \quad (2.50)$$

Resulta que la ecuación (2.50), es equivalente al conmutador

$$[e^{i\hat{\phi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\phi}} \quad (2.51)$$

con frecuencia llamado criterio de Lerner [7].

De la expresión (2.49) y haciendo uso de la fórmula de Hadamard³ podemos obtener la relación de conmutación,

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] = i. \quad (2.52)$$

donde $[\hat{n}, \hat{\phi}]$, se esperaría que den un número clásico como $[\hat{q}, \hat{p}]$.

Por tanto, parece que el número y la fase son observables complementarios y por lo tanto las fluctuaciones en estas cantidades deben satisfacer la relación de incertidumbre.

$$\Delta n \Delta \phi \geq \frac{1}{2}. \quad (2.53)$$

Por desgracia, las cosas no son tan simples. Para ver que algo está muy mal con lo anterior, consideremos el elemento de matriz del conmutador para un estado de número arbitrario $|n\rangle$ y $|n'\rangle$

$$\langle n' | [\hat{n}, \hat{\phi}] | n \rangle = i \langle n' | n \rangle, \quad (2.54)$$

tomando en cuenta que tanto los estados $|n\rangle$ como los estados $|n'\rangle$ son eigenestados del operador de número \hat{n} , podemos obtener

$$(n' - n) \langle n' | \hat{\phi} | n \rangle = i \delta_{n',n}, \quad (2.55)$$

que contiene una contradicción evidente en el caso cuando $n' = n$, ($0 = i$).

Por lo que los elementos de matriz en la base de estados de número de $\hat{\phi}$ están

³ Si A y B son dos operadores que no conmutan y ζ es un parámetro, entonces

$$e^{\zeta A} B e^{-\zeta A} = B + \zeta [A, B] + \frac{\zeta^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\zeta^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots,$$

indefinidos y la relación de incertidumbre de Heitler es incorrecta (2.51). Louisell sugirió que la razón de esta indefinición es la multivaluación de la fase y propuso el uso de funciones periódicas de $\hat{\phi}$.

Además, Susskind y Glogower (1964), mostraron que $e^{i\hat{\phi}}$ no es un operador unitario. De las ecuaciones (2.48), tenemos que

$$e^{i\hat{\phi}} = \hat{a}(\hat{n})^{-1/2}, \quad (2.56)$$

y

$$e^{-i\hat{\phi}} = (\hat{n})^{-1/2}\hat{a}^\dagger = (e^{i\hat{\phi}})^\dagger, \quad (2.57)$$

De aquí que

$$(e^{i\hat{\phi}})^\dagger(e^{i\hat{\phi}}) = 1, \quad (2.58)$$

pero por otro lado

$$(e^{i\hat{\phi}})(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = \hat{a}\frac{1}{\hat{n}}\hat{a}^\dagger \neq 1. \quad (2.59)$$

así que el operador no es unitario, y por lo tanto, $\hat{\phi}$ no puede ser un operador hermitiano.

La raíz del problema es que el operador \hat{n} tiene un espectro limitado desde abajo; es decir que no incluye los enteros negativos. Una forma de solucionar este problema es simplemente incluir enteros negativos en el espectro. Los estados de número negativos por supuesto no tienen significado físico pero, como Barnett y Pegg han demostrado, es posible construir operadores unitarios de la forma

$$e^{i\hat{\theta}} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|, \quad (2.60)$$

con

$$(e^{i\hat{\theta}})^\dagger = e^{-i\hat{\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \quad (2.61)$$

Utilizando las ecuaciones (2.60) y (2.61) es fácil verificar que $e^{i\hat{\theta}}$ es unitario; es decir,

$$e^{i\hat{\theta}} e^{-i\hat{\theta}} = e^{-i\hat{\theta}} e^{i\hat{\theta}} = 1 \quad (2.62)$$

Nótese que los estados de número negativos son sólo un recurso que permite que la ecuación (2.60) defina un operador unitario, sin que tengan sentido físico. Ya que $e^{i\hat{\theta}}$ es unitario, éste define un operador hermitiano $\hat{\theta}$, sin embargo una relación similar a (2.51) resulta de la ecuación (2.60), a saber,

$$[\hat{n}, \hat{\theta}] = i. \quad (2.63)$$

Sin embargo, la ecuación (2.63) es nuevamente incorrecta, ya que el argumento de Heitler que conduce a la ecuación (2.55) es nuevamente válido.

2.4.3. El Formalismo de Susskind-Glogower

Los operadores de Susskind y Glogower están definidos como [11]

$$\hat{E} \equiv (\hat{n} + 1)^{-1/2} \hat{a}, \quad \hat{E}^\dagger \equiv \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1)^{-1/2}. \quad (2.64)$$

Los eigenestados $|\phi\rangle$ del operador \hat{E} , deben satisfacer la ecuación de eigenvalores

$$\hat{E} |\phi\rangle = e^{i\hat{\phi}} |\phi\rangle \quad (2.65)$$

Un conjunto de soluciones de la ecuación de eigenvalores, está dado por

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle. \quad (2.66)$$

Los estados $|\phi\rangle$ forman un conjunto completo, y por lo tanto, resuelven la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi |\phi\rangle \langle\phi| = 1. \quad (2.67)$$

Cuando se aplican a los estados de número $|n\rangle$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \hat{E} |n\rangle &= |n-1\rangle \quad \text{para } n \neq 0 \\ &= 0 \quad \text{para } n = 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\hat{E}^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle. \quad (2.69)$$

A partir de esto, es fácil expresar los operadores de Susskind-Glogower en términos de los estados de número $|n\rangle$, como

$$\hat{E} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|, \quad \hat{E}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \quad (2.70)$$

Es fácil mostrar que

$$\hat{E}\hat{E}^\dagger = \sum_{n,n'=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|n'+1\rangle \langle n'| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (2.71)$$

y que

$$\hat{E}^\dagger\hat{E} = \sum_{n,n'=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|n'\rangle \langle n'+1| = 1 - |0\rangle \langle 0|. \quad (2.72)$$

La presencia del proyector del estado vacío $|0\rangle \langle 0|$ en la ecuación (2.72) estropea la unitariedad de \hat{E} . Sin embargo, para un estado con número de fotones $\bar{n} = \langle n \rangle \geq 1$, la contribución del estado vacío será pequeña y E podrá ser tratado como aproximadamente unitaria.

Por supuesto que \hat{E} y \hat{E}^\dagger no son observables, pero los operadores seno y coseno, definidos como

$$\hat{C} \equiv \frac{1}{2}(\hat{E} + \hat{E}^\dagger), \quad \hat{S} \equiv \frac{1}{2i}(\hat{E} - \hat{E}^\dagger). \quad (2.73)$$

son los análogos evidentes de $\cos \phi$ y $\sin \phi$. El origen del nombre de estos operadores queda claro cuando se interpretan a los operadores de Susskind-Glogower como los operadores exponenciales de la fase $e^{\pm i\hat{\phi}}$ y se recuerda la fórmula de Euler.

Estos operadores son hermitianos y satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{C}, \hat{n}] = i\hat{S}, \quad (2.74)$$

$$[\hat{S}, \hat{n}] = -i\hat{C}, \quad (2.75)$$

$$[\hat{C}, \hat{S}] = \frac{i}{2} |0\rangle \langle 0|, \quad (2.76)$$

$$\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = 1 - \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0|. \quad (2.77)$$

En las dos últimas ecuaciones encontramos de nuevo la presencia del proyector del estado vacío, que estropea la conmutatividad de \hat{C} y \hat{S} e impide que los operadores satisfagan la identidad trigonométrica adecuada del seno y del coseno.

El formalismo de Susskind-Glogower suministra una teoría razonablemente completa y consistente con el operador de fase. El trabajo teórico al aplicarlo no es muy grande, salvo por unas cuantas dificultades en los cálculos, la teoría es

consistente dentro del marco de referencia de la mecánica cuántica ordinaria. Por lo que deberá llegar a ser un formalismo estándar dentro de las discusiones que involucran el operador de fase, así como un punto de partida y comparación que verifique y mida las predicciones de teorías posteriores más completas y competitivas.

Capítulo 3

Formalismo de Pegg y Barnett

Se han hecho varios intentos para describir la fase en óptica cuántica a partir de un operador de fase; sin embargo, hasta el momento no se han conseguido resultados satisfactorios. Una de las propuestas más acertadas es la de Pegg y Barnett [2], quienes basándose en los estados de fase definidos por Loudon, definieron un operador hermitiano de fase en un espacio de Hilbert H de dimensión finita. En este capítulo se estudia el formalismo desarrollado por Pegg y Barnett, así como algunas de sus consecuencias.

3.1. Introducción

Pegg y Barnett definieron un operador hermitiano de fase en un espacio de estados de dimensión finita. La idea principal del formalismo de Pegg-Barnett consiste en evaluar todos los valores esperados de las variables físicas en un espacio de Hilbert de dimensión finita; los valores esperados son entonces números reales que dependen paramétricamente de la dimensión del espacio de Hilbert. Debido a que la descripción completa del oscilador armónico implica un conjunto infinito de estados, el límite infinito debe ser tomado. Este límite es

tomado sólo después que los resultados físicos son evaluados, de esta manera conducen a un límite adecuado que corresponde a los resultados que se pueden obtener en la mecánica cuántica ordinaria.

3.2. Estados de Fase

Loudon [8, 9] define los estados de fase $|\theta\rangle$ como

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s e^{in\theta} |n\rangle \quad (3.1)$$

donde $|n\rangle$ son los $(s+1)$ estados de número de la base del espacio vectorial H de dimensión $(s+1)$. Nótese que los estados de fase $|\theta\rangle$ son una superposición lineal normalizada de todos los estados de número, cada uno pesado por un factor de fase $e^{in\theta}$ y con la misma amplitud $(s+1)^{-1/2}$, la cual tiende a cero conforme s tiende a infinito.

Ya que estos estados de fase están bien definidos, Pegg y Barnett concluyeron que los problemas deberían presentarse al llevar a cabo el proceso de límite y hacer, prematuramente, tender s a infinito. El procedimiento de Pegg y Barnett, consiste en trabajar con estados y operadores en el espacio $(s+1)$ dimensional, (donde s puede ser arbitrariamente grande) y hacer tender s a infinito sólo después de haber calculado las cantidades de interés físico, como los valores esperados de un operador.

El parámetro θ en los estados de fase (3.1) puede tomar cualquier valor real, aunque sólo existen estados de fase distinguibles en un intervalo de magnitud 2π , fuera de este intervalo los estados de fase se repiten,

$$|\theta + 2\pi\rangle = |\theta\rangle \quad (3.2)$$

Por lo tanto, existen un número infinito de estados de fase diferentes, incluso en el finito, pero arbitrariamente grande espacio de estados H . Los estados de fase son necesariamente sobrecompletos y no necesariamente ortogonales. Sin embargo, no es difícil mostrar que los estados con valores de θ que difieren por múltiplos enteros de $2\pi/(s+1)$ son ortogonales, y en consecuencia, dado cualquier estado de referencia $|\theta_0\rangle$, podemos encontrar un conjunto completo de $(s+1)$ estados de fase ortogonales dados como

$$|\theta_m\rangle = e^{\frac{i\hat{N}m2\pi}{(s+1)}} |\theta_0\rangle, \quad \text{con } m = 0, 1, \dots, s. \quad (3.3)$$

donde $\hat{N} \equiv \sum_{n=0}^s n |n\rangle \langle n|$.

El conjunto de estados de fase $|\theta_m\rangle$ determinan una base para el espacio vectorial $(s+1)$ dimensional H . El valor de θ_0 puede ser cualquiera, lo que implica que hay un infinito continuo de dichas bases y se puede elegir entre éstas la base más adecuada para resolver un problema en particular.

Los $(s+1)$ valores de θ_m son

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi}{s+1}m, \quad (3.4)$$

que se distribuyen de forma uniforme en todo el rango

$$\theta_0 \leq \theta_m < \theta_0 + 2\pi. \quad (3.5)$$

En el límite, cuando s tiende a infinito, los valores de θ_m corresponden a θ_0 más fracciones racionales de 2π , y forman un infinito contable de estados ortogonales, en correspondencia uno a uno con la base contable de estados de número.

Se pueden expresar los estados de número en términos de esta base completa de estados de fase de la forma

$$|n\rangle = (s+1)^{-1/2} \sum_{m=0}^s \exp(-in\theta_m) |\theta_m\rangle; \quad (3.6)$$

esta fórmula es fácil de derivar usando la ecuación (3.1) y la ortonormalidad de la base $|\theta_m\rangle$.

3.3. El operador de Fase de Pegg y Barnett

El espacio de estados H de dimensión $(s+1)$ está compuesto por los estados de número $|n\rangle$, ($n = 0, 1, \dots, s$) o equivalentemente por el conjunto ortonormal completo de estados de fase

$$|\theta_m\rangle = (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle \quad (3.7)$$

que son ortonormales y completos

$$\langle \theta_m | \theta_n \rangle = \delta_{m,n}, \quad \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = 1. \quad (3.8)$$

El operador de fase de Pegg y Barnett se construye directamente de estos estados ortonormales de fase $|\theta_m\rangle$ [2, 14, 15] como

$$\hat{\Phi}_\theta \equiv \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (3.9)$$

o de manera equivalente como

$$\hat{\Phi}_\theta = \theta_0 + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m=0}^s m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (3.10)$$

Es fácil convencerse que los estados $|\theta_m\rangle$ son eigenestados del operador de fase $\hat{\Phi}_\theta$; es decir,

$$\hat{\Phi}_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle. \quad (3.11)$$

3.3.1. Conmutador de Fase y Número

Usando la definición de los estados de fase (3.1), se puede expresar el proyector $|\theta_m\rangle \langle \theta_m|$ en términos de la base de estados de número como

$$|\theta_m\rangle \langle \theta_m| = (s+1)^{-1} \sum_{n,n'=0}^s e^{i(n'-n)\theta_m} |n'\rangle \langle n|. \quad (3.12)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.10), obtenemos un desarrollo del operador de fase en términos de los estados de número,

$$\hat{\Phi}_\theta = \theta_0 + \frac{s\pi}{s+1} + \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'} \frac{\exp[i(n'-n)\theta_0] |n'\rangle \langle n|}{\exp[i(n'-n)2\pi/(s+1)] - 1}. \quad (3.13)$$

De manera similar, podemos expresar el operador de número \hat{N} en términos de los estados de fase:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum_{n=0}^s n |n\rangle \langle n|, \\ &= \frac{s}{2} + \sum_{m \neq m'} \frac{|\theta_{m'}\rangle \langle \theta_m|}{\exp[-i(m'-m)2\pi/(s+1)] - 1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde hemos usado el resultado (3.6).

Las expresiones para $\hat{\Phi}_\theta$ y \hat{N} revelan una interesante simetría, ya que ambos operadores consisten de una constante correspondiente a la mitad de su rango de eigenvalores, más una suma de proyectores fuera de la diagonal.

El conmutador del operador de fase y del operador de número es fácil de calcular usando las ecuaciones (3.13) y (3.14). Dicho conmutador, expresado en la base de los estados de número, es

$$[\hat{\Phi}_\theta, \hat{N}] = \frac{2\pi}{s+1} \sum_{n \neq n'} \frac{(n-n') \exp[i(n'-n)\theta_0] |n'\rangle \langle n|}{\exp[-i(n'-n)2\pi/(s+1)] - 1}. \quad (3.15)$$

Mientras que en término de la base de los estados de fase queda como

$$[\hat{\Phi}_\theta, \hat{N}] = \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m \neq m'} \frac{(m'-m) |\theta_{m'}\rangle \langle \theta_m|}{\exp[-i(m-m')2\pi/(s+1)] - 1}. \quad (3.16)$$

Esta expresión es muy diferente de aquella propuesta por Dirac (2.52). Los elementos de matriz del conmutador del operador número y del operador de fase, en la base de los estados de número, son

$$\langle n | [\hat{\Phi}_\theta, \hat{N}] | n \rangle = 0, \quad (3.17)$$

y

$$\langle n' | [\hat{\Phi}_\theta, \hat{N}] | n \rangle = \frac{2\pi(n - n') \exp[i(n' - n)\theta_0]}{(s + 1) \exp[i(n' - n)2\pi/(s + 1)] - 1}, \quad n' \neq n. \quad (3.18)$$

Este conmutador no sufre de la inconsistencia matemática del conmutador de los correspondientes operadores definidos por Dirac.

3.3.2. Operadores de Creación y Aniquilación

Es posible construir un operador unitario $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$ con el operador hermitiano de fase [2]. El operador $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$ tiene a los estados de fase como sus eigenestados, es decir

$$\exp(\pm i\hat{\Phi}_\theta) |\theta_m\rangle = \exp(\pm i\theta_m) |\theta_m\rangle. \quad (3.19)$$

Pasamos ahora a construir una representación explícita del operador unitario $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$ en términos de los proyectores de número. Usando la ecuación (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\Phi}_\theta) |n\rangle &= \exp\left(i \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|\right) |n\rangle \\ &= (s + 1)^{-1/2} \sum_{m=0}^s \exp[-i(n - 1)\theta_m] |\theta_m\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para $n > 0$,

$$\exp(i\hat{\Phi}_\theta) |n\rangle = |n - 1\rangle, \quad (3.21)$$

y para el estado de vacío ($n = 0$),

$$\begin{aligned}
 \exp(i\hat{\Phi}_\theta) |0\rangle &= (s+1)^{-1/2} \sum_m \exp(i\theta_m) |\theta_m\rangle \\
 &= (s+1)^{-1/2} \exp[i(s+1)\theta_0] \sum_m \exp(-is\theta_m) |\theta_m\rangle \\
 &= \exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por lo tanto, en la representación de los estados de número $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$ es

$$\exp(i\hat{\Phi}_\theta) = \sum_{n=1}^s |n-1\rangle \langle n| + \exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle \langle 0|, \tag{3.23}$$

o de manera equivalente

$$\exp(i\hat{\Phi}_\theta) = |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 2| + \dots + |s-1\rangle \langle s| + \exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle \langle 0|. \tag{3.24}$$

El conjugado hermitiano es simplemente

$$[\exp(i\hat{\Phi}_\theta)]^\dagger = \exp(-i\hat{\Phi}_\theta). \tag{3.25}$$

Los operadores de creación \hat{a}^\dagger y de aniquilación \hat{a} , se pueden construir copiando la definición original de Dirac, ecuaciones (2.48), y en la representación de los estados de número se expresan como

$$\begin{aligned}
 \hat{a} &\equiv \exp(i\hat{\Phi}_\theta) \hat{N}^{1/2}, \\
 &= |0\rangle \langle 1| + 2^{1/2} |1\rangle \langle 2| + \dots + s^{1/2} |s-1\rangle \langle s|.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

con \hat{a}^\dagger el conjugado hermitiano de \hat{a} , definido como $\hat{a}^\dagger \equiv \hat{N}^{1/2} \exp(-i\hat{\Phi}_\theta)$.

Por otro lado, aplicando la fórmula de Euler al operador de fase $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$, podemos construir los operadores $\cos(\hat{\Phi}_\theta)$ y $\sin(\hat{\Phi}_\theta)$ [14]. Estos operadores son más

consistentes que sus homólogos formados a partir de los operadores Susskind-Glogower. En particular, encontramos que

$$\cos^2 \hat{\Phi}_\theta + \sin^2 \hat{\Phi}_\theta = 1, \quad (3.27)$$

$$[\cos \hat{\Phi}_\theta, \sin \hat{\Phi}_\theta] = 0, \quad (3.28)$$

$$\langle n | \cos^2 \hat{\Phi}_\theta | n \rangle = \langle n | \sin^2 \hat{\Phi}_\theta | n \rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

Todas estas expresiones difieren de las expresiones correspondientes para los operadores Susskind-Glogower, ver las ecuaciones, (2.74), (2.75), (2.76) y (2.77). Por lo tanto, en la teoría de Pegg y Barnett los operadores coseno y seno son consistentes, pues satisfacen la habitual identidad trigonométrica para sus cuadrados.

Capítulo 4

La Transformada Discreta de Fourier y el Operador de Fase de Pegg y Barnett

La transformada de Fourier es una de las herramientas principales con que se cuenta hoy en la ciencia y la tecnología. Su poder radica en la posibilidad de establecer relaciones entre puntos de vista muy diferentes, relativos a un mismo problema. Así, al visualizar un fenómeno tanto en términos de la función asociada, como de su transformada de Fourier, se tiene frecuentemente un procedimiento de análisis útil para resolver un problema determinado. En este capítulo, a partir del operador de fase de Pegg y Barnett, estudiado en el capítulo anterior, intentamos obtener una expresión para dicho operador en términos de la transformada discreta de Fourier.

4.1. Raíces de la Unidad

Las raíces n -ésimas de la unidad, o números de de Moivre, son números complejos que al ser elevados a alguna potencia entera n da como resultado la unidad. Las raíces de la unidad se utilizan en muchas ramas de las matemáticas, y son especialmente importantes en la teoría de números, y en la transformada discreta de Fourier.

Se llama raíz n -ésima de la unidad a cualquiera de los números complejos que satisfacen la ecuación

$$z^n = 1, \quad (n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots). \quad (4.1)$$

Las n diferentes raíces n -ésimas de la unidad son los números

$$e^{2\pi ik/n}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1). \quad (4.2)$$

Las raíces n -ésimas de la unidad están localizadas en el círculo unitario del plano complejo y forman los vértices de un polígono regular de n lados. Como se muestra en el ejemplo de la Figura (4.1).

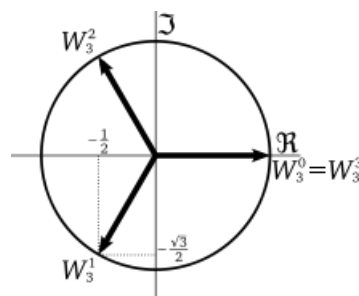


Figura 4.1: Tres raíces de la unidad.

Las raíces n -ésimas de la unidad forman un grupo cíclico de orden n , y de hecho estos grupos comprenden todos los subgrupos finitos multiplicativos de

los números complejos, excepto el grupo trivial 0. Un generador de este grupo cíclico es una raíz primitiva n -ésima de la unidad. Las raíces primitivas n -ésimas de la unidad son $e^{2\pi ik/n}$, donde k y n son coprimos¹. La raíz primitiva $e^{-2\pi i/n}$ (o su conjugada $e^{2\pi i/n}$) se escribe a menudo ω_n (o a veces simplemente ω), especialmente en el contexto de la transformada discreta de Fourier.

4.2. Transformada Discreta de Fourier

El uso de la transformada discreta de Fourier (DFT) es bastante amplio en muchos campos de las ciencias físicas y de la ingeniería [16]. La transformada discreta de Fourier es un tipo de transformada discreta utilizada en el análisis de Fourier, que transforma una función matemática en otra, obteniendo una representación en el dominio de la frecuencia, siendo la función original una función en el dominio del tiempo. La DFT requiere que la función de entrada sea una secuencia discreta.

La secuencia de N números complejos g_0, \dots, g_{N-1} , se transforma en la secuencia de N números complejos G_0, \dots, G_{N-1} mediante la transformada de Fourier discreta

$$G_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}, \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.3)$$

donde i es la unidad imaginaria y $e^{\frac{2\pi i}{N}}$ es la N -ésima raíz de la unidad.

La transformada inversa de Fourier discreta viene dada por:

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}, \quad \text{con } n = 0, \dots, N-1. \quad (4.4)$$

¹ Dos números enteros a y b son números primos entre sí (o coprimos), si no tienen ningún factor primo en común, o, dicho de otra manera, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1 .

Una descripción simple de estas ecuaciones es que los números complejos G_k representan la amplitud y la fase de diferentes componentes sinusoidales de la señal de entrada g_n .

4.2.1. Forma Matricial de la DFT

Otra forma de interpretar la DFT es dándose cuenta que se puede expresar como una multiplicación de matrices de la forma $G = Fg$, donde g es la señal de entrada, y G es la DFT de la señal original. La transformación F puede ser definida como

$$F = \left(\frac{\omega^{kn}}{\sqrt{N}} \right)_{k,n=0,\dots,N-1}, \quad \omega = e^{2\pi i/N} \text{ es una raíz de la unidad.} \quad (4.5)$$

De tal manera que podemos escribir la expresión (4.3), en su forma matricial como

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \omega^{0 \cdot 0} & \omega^{0 \cdot 1} & \dots & \omega^{0 \cdot (N-1)} \\ \omega^{1 \cdot 0} & \omega^{1 \cdot 1} & \dots & \omega^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{(N-1) \cdot 0} & \omega^{(N-1) \cdot 1} & \dots & \omega^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

La matriz de Fourier se define como aquella F , tal que

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \omega^{0 \cdot 0} & \omega^{0 \cdot 1} & \dots & \omega^{0 \cdot (N-1)} \\ \omega^{1 \cdot 0} & \omega^{1 \cdot 1} & \dots & \omega^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{(N-1) \cdot 0} & \omega^{(N-1) \cdot 1} & \dots & \omega^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Algunas propiedades de la matriz de Fourier F son:

- F y F^* son simétricas.

- F es unitaria. En realidad, $FF^* = F^*F = I_n$, o mejor dicho, $F^* = F^{-1}$.
- Los autovalores de F son $\pm 1, \pm i$, con sus apropiadas multiplicidades. Esto se deduce del hecho que F es una matriz unitaria y todo autovalor λ de una matriz unitaria satisface $|\lambda| = 1$.

La matriz (4.8), puede ser expresada de manera mas simple como

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega_4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Otra forma de interpretar la DFT es dándose cuenta que la matriz F puede expresarse como una matriz de Vandermonde [17], la cuál será definida más adelante. La matriz de Vandermonde es una matriz alternativa que tiene importantes usos en matemáticas e ingeniería. Existe una extensa literatura sobre soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones lineales donde la matriz está dada por una matriz de Vandermonde. Entre otros usos, incluyen la interpolación polinómica y el procesamiento de señales, donde la matriz para una transformada discreta de Fourier es una matriz de Vandermonde.

4.3. Representación Matricial del Operador de Pegg y Barnett

Una definición de un operador de fase unitario corresponde al operador exponencial de fase $e^{i\hat{\Phi}_\theta}$ propuesto por Pegg y Barnett.

$$\exp(i\hat{\Phi}_\theta) = \sum_{k=1}^s |k-1\rangle \langle k| + \exp[i(s+1)\theta_0] |s\rangle \langle 0|. \quad (4.9)$$

El operador exponencial de fase, tiene una fase constante arbitraria θ_0 , que puede ser elegida convenientemente para resolver un problema en particular, i.e. $\theta_0 = 0$; entonces la ecuación (4.9) la podemos expresar de manera simplificada como

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\Phi}_\theta) &= \sum_{k=1}^s |k-1\rangle \langle k| + |s\rangle \langle 0|, \\ &= |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 2| + \dots + |s-1\rangle \langle s| + |s\rangle \langle 0|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La matriz P correspondiente al operador $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$ se expresa de la siguiente forma

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

y tiene dimensión $N = s + 1$. Claramente esta matriz satisface $P^{s+1} = I$, donde I es igual a la matriz identidad.

La matriz P es de uso común en la teoría de matrices circulantes [18, 19].

Una matriz circulante es una matriz de Toeplitz que tiene la forma general

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & \dots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & & c_2 \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{N-2} & & \ddots & \ddots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \dots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Cualquier matriz circulante C de orden $N = s + 1$, puede expresarse como una combinación lineal del conjunto de matrices básicas I, P, \dots, P^{T-1} ; y por lo tanto C se puede expresar como una función polinómica

$$C = c_0 I + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_{N-1} P^{N-1} = f(P) \quad (4.13)$$

En análisis numérico, las matrices circulantes son importantes porque se pueden diagonalizar por medio de una transformada discreta de Fourier. Dada una matriz circulante C , esta puede ser diagonalizada por la matriz de Fourier F , (ver (4.8)), como

$$C = F^* \Omega F, \quad \Omega = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}). \quad (4.14)$$

donde $\omega = \exp(2\pi i/N)$.

4.3.1. Logaritmo de una Matriz

Una matriz B es el logaritmo de una matriz dada A si la exponenciación de B es A ; o sea,

$$e^B = A. \quad (4.15)$$

Las propiedades del logaritmo de una matriz son las siguientes:

- Una matriz tiene logaritmo si y sólo si es invertible.

- El logaritmo de una matriz puede ser una matriz compleja aún si sus elementos son números reales.
- El logaritmo no es único, es decir, existe más de una matriz compleja A tal que $e^A = B$.

Un método para encontrar el logaritmo de una matriz diagonalizable A es el siguiente:

1. Encontrar la matriz V de vectores propios de A .
2. Encontrar la matriz inversa V^{-1} de V .
3. Sea entonces $D = V^{-1}AV$. La matriz D es diagonal y sus elementos son los valores propios de A .
4. Reemplazar cada elemento de la diagonal de D por su logaritmo natural para obtener $\ln D$.
5. Finalmente,

$$\ln A = V(\ln D)V^{-1}. \quad (4.16)$$

4.3.2. Valores y Vectores Propios

Dada una matriz cuadrada A , se dice que el número λ_0 , es un valor propio de A si existe un vector columna c no nulo tal que

$$Ac = \lambda_0 c. \quad (4.17)$$

El vector c se llama vector propio de A asociado al valor propio λ_0 . La ecuación es equivalente a

$$(\lambda_0 I - A)c = 0. \quad (4.18)$$

Si c a de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante $|\lambda_0 I - A|$ tiene que ser igual a 0. Una posible manera de hallar el λ_0 que buscamos es construir el polinomio en λ .

$$p(\lambda) = |\lambda I - A|. \quad (4.19)$$

El polinomio $p(\lambda)$ se llama polinomio característico de A . Debemos resolver la ecuación en la incógnita λ

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = 0. \quad (4.20)$$

A continuación si λ_0 es una raíz de esta ecuación, se resuelve el sistema homogéneo indeterminado

$$(\lambda_0 - IA) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

en las incógnitas c_1, c_2, c_3 . Una solución $c = \{c_1, c_2, c_3\}$, con no todas las componentes nulas, proporciona uno de los vectores buscados.

Los valores propios de la matriz P satisfacen la ecuación $\lambda^N = 1$. Por lo que sus valores propios λ son justamente las raíces de la unidad,

$$\lambda_k = \omega^k, \quad \text{donde } \omega = e^{2\pi i/N}, \quad (4.22)$$

con $N = 2, 3, \dots$ y $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Los valores propios serán entonces $\Lambda = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}\}$.

Consideremos el caso más sencillo, donde la matriz P es de dimensión $N = 2$. Sea la matriz P_2 ,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

que tiene los valores propios $(\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1)$ y sus respectivos vectores propios $c_0 = (1, 1), c_1 = (1, -1)$. Con los cuales podemos construir la matriz de vectores propios dada como

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Si $N = 3$,

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

y sus valores propios serán $(\lambda_0 = e^{\frac{2\pi i(0)}{3}} = 1, \lambda_1 = e^{\frac{2\pi i(1)}{3}}, \lambda_2 = e^{\frac{2\pi i(2)}{3}})$ y sus respectivos vectores propios $c_0 = (1, 1, 1), c_1 = (1, \lambda_1, \lambda_1^2), c_2 = (1, \lambda_2, \lambda_2^2)$.

La matriz de vectores propios es

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Si continuamos con el proceso anterior para N dimensiones, podemos observar que la matriz de vectores propios correspondiente a la matriz P , está acomodada de tal forma que el primer elemento de cada columna hay solamente unos (al ser la potencia de cero) y en el segundo elemento hay una serie de números correspondientes a los valores propios λ . En el tercero se encuentran esos mismos números elevados al cuadrado. En el cuarto están esos mismos números elevados al cubo y en las siguientes filas elevados a la potencia inmediatamente superior, de manera que en el elemento N de cada columna, esos números estén elevados a la potencia $N - 1$. Esta matriz no es mas que una matriz de

Vandermonde, que está definida como la matriz V de orden N tal que

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{N-1} & \lambda_1^{N-1} & \cdots & \lambda_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Es importante señalar que esta matriz tiene inversa [20].

4.4. Operador Exponencial de Fase

Al comparar la matriz de vectores propios de P , definida en (4.27), con la matriz de Fourier (4.8), es fácil darnos cuenta que la matriz de vectores propios V es similar a la matriz de la transformada discreta de Fourier. Para este caso en particular, tanto la matriz V como la matriz F son la misma, debido a que $\lambda_k = \omega^k$, donde $\omega = e^{2\pi i/N}$. Por tanto, podemos diagonalizar la matriz P como

$$D = F^{-1}PF, \quad (4.28)$$

donde F es la matriz de Fourier. Hay que tener en cuenta que no necesariamente la matriz de vectores propios de una matriz dada tiene la forma de una matriz de Vandermonde. La matriz diagonal D es entonces

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

y los elementos de su diagonal son los valores propios de P . Si a continuación aplicamos el logaritmo a la matriz diagonal D , obtendremos una matriz que

llamaremos $\hat{n} = \ln D$, de la forma

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \ln \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ln \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ln \lambda_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \left(e^{\frac{2\pi i(0)}{N}} \right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ln \left(e^{\frac{2\pi i(1)}{N}} \right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ln \left(e^{\frac{2\pi i(2)}{N}} \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ln \left(e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}} \right) \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

o de manera equivalente

$$\hat{n} = \frac{2\pi i}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N-1 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

La matriz \hat{n} puede considerarse como el operador de número [21, 22], en el espacio N dimensional, con los valores propios $0, 1, 2, \dots, N-1$. Por lo que podemos expresar finalmente el logaritmo de la matriz (4.11) y encontrar una expresión para Φ del operador unitario $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$. Como $\ln P = F(\ln D)F^{-1}$,

$$\hat{\Phi} = \frac{2\pi}{N} F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N-1 \end{pmatrix} F^{-1}. \quad (4.32)$$

Esta ecuación muestra que la matriz P correspondiente al operador exponencial de fase de Pegg y Barnett se puede diagonalizar por medio de una matriz de Fourier, y que el operador de fase $\hat{\Phi}$ está relacionado intrínsecamente con el operador de número por medio de una transformada de Fourier. Este resultado era de esperarse, como sabemos, el operador de posición y momento lineal son unitariamente equivalentes siendo la transformada de Fourier la que nos permite pasar de la representación asociada a \hat{x} a la asociada a \hat{p} y viceversa, por lo que no nos extraña la relación entre $\hat{\Phi}$ y \hat{n} .

Capítulo 5

Conclusiones

Para finalizar esta tesis hacemos las conclusiones y comentarios finales:

Como hemos visto, son muchas las razones que hacen interesante el estudio de la fase en la óptica cuántica. Se trata de una variable importante en la óptica clásica a la hora de explicar una variedad enorme de fenómenos, y parece que lo mismo debería ocurrir en la óptica cuántica. Sin embargo, la fase cuántica encuentra una dificultad de carácter fundamental. Aunque parezca sorprendente, resulta que no hay un operador de fase que reúna todas las propiedades deseables para esta variable, por lo que es de suma importancia continuar trabajando en este problema.

En los primeros capítulos de este trabajo se hizo una revisión del problema de la fase cuántica. Posteriormente, se utilizó el formalismo de Pegg y Barnett como punto de partida para definir el operador de fase en términos de una transformada discreta de Fourier y así darle un nuevo enfoque. Se construyó la representación matricial del operador exponencial $\exp(i\hat{\Phi}_\theta)$, propuesta por Pegg y Barnett y definida en la ecuación (4.11), y se mostró que es posible diagonalizarla como $D = F^{-1}PF$, donde F es la matriz de Fourier y P la matriz del operador

exponencial. Con estos elementos es posible encontrar el logaritmo del operador exponencial y definir el operador de fase $\hat{\Phi}$ como

$$\hat{\Phi} = \frac{2\pi}{N} F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 \end{pmatrix} F^{-1} \quad (5.1)$$

La matriz que se muestra en la ecuación anterior es la matriz del operador de número \hat{n} en el espacio N -dimensional, por lo que podemos concluir que los operadores \hat{n} y $\hat{\Phi}$ están relacionados por medio de la transformada de Fourier, al igual que los operadores de posición \hat{x} y momento \hat{p} .

Otra cosa importante que debemos hacer notar es que para este caso en particular, la matriz de Fourier F es justamente la matriz de vectores propios de P , que a su vez tiene la forma de una matriz de Vandermonde. Las propiedades de la matriz de Vandermonde nos ofrecen un puente entre dos disciplinas, ya que nos han permitido unir la transformada de Fourier y el operador de fase cuántico.

Finalmente, podemos concluir también que a pesar de que el formalismo de Pegg y Barnett es una de las propuestas más acertadas para definir un operador de fase, presenta algunos inconvenientes, al estar forzando el espacio a una dimensión finita. Debido a que una descripción completa implica un conjunto infinito de estados, el límite infinito debe ser tomado.

Bibliografía

- [1] H. Guise, A. Vourdas, L. L. Sánchez-Soto, “Complementary and phases in SU(3),” J. Phys. A:Math. Theor. 45 (2012) 244030.
- [2] D. T. Pegg, S. M. Barnett, “Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field,” Phys. Rev. A 39, 1665(1989).
- [3] P. Carruthers, M. M. Nieto, “Phase and angle variables in quantum mechanics,” Rev. Mod. Phys. 40, 411-440 (1968).
- [4] F. S. Eguibar, B. M. Rodriguez-Lara, H. M. Moya-Cessa, “Dirac’s quantum phase problem,” arXiv:1402.2572v1, 11 Feb 2014.
- [5] J. M. Vargas-Martínez, H. Moya-Cessa, “On the quantum phase problem,” J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 6 (2004) S155–S157.
- [6] J. Sperling, W. Voge, “Dirac’s quantum phase problem”, arXiv:0907.3349v1-20 Jul 2009.
- [7] R. Lynch, “The quantum phase problem: a critical review,” Physics Reports 256 (1995) 367-436.
- [8] S. Sánchez Sánchez, “Operador de Fase: Elementos de Matriz y Características Cuánticas”, Tesis de Maestría: Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, (Noviembre del 2000, Puebla, Mex).

- [9] M. L. Arroyo Carrasco, "El operador de fase en óptica cuántica", Tesis de Maestría: Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, (Noviembre del 1996, Puebla, Mex.)
- [10] Eugene Hecht, "Optics". Addison Wesley, 4 ed. 2002.
- [11] C. C. Gerry, P. L. Knight, "Introductory Quantum Optics" Cambridge University Press, 2006 .
- [12] H. M. Moya Cessa, F. S. Eguibar, "Introduction to quantum optics," Rinton Press, 2011.
- [13] M. Daumer, S. Goldstein, "Observables, measurements and phase operators from a bohmian perspective," Department of mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08903.
- [14] V. Buzek, A. D. Wilson-Gordon, P. L. Knight, W. K. Lai, "Coherent states in a infinite-dimensional basis: Their phase properties and relationship to coherent states of light," Phys. Rev. A 45, (1992).
- [15] M. Rezgi and Lars Eldén, "Extended Pegg-Barnett phase operator," Linear Algebra and its Applications, (435), 3, 422-447, (2011).
- [16] M. R. Kibler, "Quadratic discrete Fourier transform and mutually unbiased base," arXiv: 1010.59g4v1, 28 Oct 2010.
- [17] J. J. Rushanan, "On the Vandermonde matrix," The American Mathematical Monthly, Vol. 96, No. 10 (Dec., 1989), pp.921-924.
- [18] M. Rezgi, Lars Eldén, "Diagonalization of tensor with circulant structure," Linear Algebra and its Applications, (435), 3, 422-447, (2011).
- [19] M. Combescure, "Block circulant matrices with circulant blocks, weil sums and mutually unbiased base," arXiv: 0710.5643v1, 30 Oct 2007.

- [20] B.M. Rodriguez-Lara, H.M. Moya-Cessa, and S.M. Viana, "Por qué y cómo encontramos funciones de matrices: entropía en mecánica cuántica," *Revista Mexicana de Física E* 51 (2) 87–98 Diciembre 2005.
- [21] Yorick Hardy, Willi Hans Steeb, Ruedi Stoop, "Entanglement, disentanglement and Wigner functions," *Physica Scripta*. Vol. 69, 166-169, 2004.
- [22] N. M. Atakishiyev, M. R. Kibler, K. B. Wolf, "SU(2) and SU(1,1) approaches to phase operators and temporally stable phase states: applications to mutually unbiased bases and discrete Fourier transforms," *Symmetry* 2010,.
- [23] M. M. Nieto, "Quantum phase and quantum phase operators: Some physics and some history," *Physica Scripta*. Vol. T48, 5-12, 1993.
- [24] M. Daoud, M.R. Kibler, "Phase operators, temporally stable phase states, mutually unbiased bases and exactly solvable quantum systems ", arXiv:1002.0955v1- 04 Feb 2010.
- [25] Zhu. Jiu-yun, K. Le-man, "Even and odd phase coherent states associated with the Pegg-Barnett hermitian phase operator," *Chin.Phys.Lett.* Vol. 13, Nov 4(1996)273.
- [26] K. Kakazu, "Extended Pegg-Barnett phase operator," *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 106, No. 4, October 2001.
- [27] D.T. Smithey, M. Beck, J. Cooper, M.G. Raymer, "Measurement of number-phase uncertainty relations of optical fields," *Phys. Rev. A* 1993, Vol. 48, No. 4.
- [28] Ts. GANTSOG, R. TANAS, "Phase properties of self-squeezed states generated by the anharmonic oscillator," *Journal of Modern Optics*, 1991, Vol. 38, No. 6, 1021-1034.