



**I
N
A
O
E**

**DETECCIÓN DE SEÑALES “CHIRP” USANDO EL
OSCILADOR DUFFING**

por

Carlos Rodolfo Bermúdez Gómez
Ingeniero Electrónico

Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ELECTRÓNICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica**
Agosto 2012
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Rogerio Enríquez Caldera
Investigador Titular del INAOE

©INAOE 2012

Derechos reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir y
distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en
partes



Resumen

*Recientemente, el oscilador Duffing ha demostrado ser una herramienta útil en la detección de señales periódicas y su correspondiente análisis a niveles bajos de relación señal a ruido. Por otro lado, tradicionalmente, las señales con frecuencia modulada (FM) siempre se han estudiado mediante las técnicas convencionales de análisis tiempo-frecuencia. Al unir estas dos áreas de estudio, surge la motivación por proponer un método que permita realizar el análisis de las señales “chirp” mediante el uso del oscilador Duffing y así, este proyecto busca analizar el comportamiento de dicho oscilador enfocado a señales “chirp” débiles. Como el oscilador Duffing, también llamado oscilador caótico, proporciona información de cuando una señal cambia de frecuencia, es necesario diseñar una metodología para estimar la variación de frecuencia en la detección de señales. Este trabajo permite encontrar que es posible usar un arreglo de osciladores Duffing adaptivo para el análisis de señales “chirp” con una relación señal a ruido de hasta -17 dB. y comparar los resultados obtenidos con las técnicas tradicionales para análisis Tiempo-Frecuencia tales como **Short Time Fourier Transform, Wigner-Ville Distribution, Choi-Williams, Multiform Tilttable Exponential Distribution y Wavelets**. Finalmente, se concluye que el análisis de señales “chirp” con baja razón señal a ruido SNR mediante el oscilador Duffing presenta un mejor desempeño que los métodos convencionales de análisis tiempo-frecuencia. Todo lo anterior se corroboró mediante la simulación de las señales utilizando Matlab, con el fin de poder comparar el desempeño de las diferentes técnicas.*

Abstract

*The chaotic oscillator has become an important tool in the analysis of harmonic signals with low signal to noise ratio (SNR). On the other hand, traditionally, frequency modulated (FM) signals have always been studied through conventional techniques of Time-Frequency (TF) analysis. Thus, by combining these two areas of study, there is the motivation for proposing a method that allows the analysis of "chirp" signals using the Duffing oscillator and this project seeks to analyze the behavior of the oscillator focused on weak "chirp" signals. The oscillator's chaotic characteristic provides information on how the frequency changes in a signal. Therefore, it is necessary to design a methodology to estimate the frequency shift for such signals. Here, it is found that is possible to use an adaptive Duffing oscillator array for the analysis of chirp signals with -17 dB of SNR. The results obtained are compared with some techniques for Time-Frequency analysis such as **Short Time Fourier Transform, Wigner-Ville Distribution, Choi-Williams, Multiform Tilttable Exponential Distribution and Wavelets**. The "chirp" signal analysis with low SNR by means of the Duffing oscillator shows a better performance than the conventional methods for TF analysis. To obtain these results the signals were simulated with MATLAB, aiming to compare the performance for the different TF representations.*

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Dr. Rogerio Enríquez Caldera por todo su apoyo y sus contribuciones a lo largo de mi trabajo de tesis. Al Dr. Antonio H. Costa por su amabilidad al recibirme como estudiante investigador en la Universidad de Massachusetts Dartmouth por un periodo de 4 meses y por sus contribuciones a mi trabajo. También quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por la beca con número de registro 374935 otorgada durante los dos años de estudio de maestría. Finalmente doy gracias a la Universidad de Massachusetts por abrirme sus puertas y permitirme hacer uso de sus instalaciones durante mi estancia de investigación.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	7
1.1 JUSTIFICACIÓN	9
1.2 OBJETIVOS	10
1.3 METODOLOGÍA	10
1.4 ESTADO DEL ARTE	11
1.5 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	14
2. CONCEPTOS TEÓRICOS	16
2.1 EL OSCILADOR DUFFING	16
2.1.1 DETECCIÓN DE FRECUENCIAS CON EL OSCILADOR DUFFING	18
2.2 TÉCNICAS PARA DETECCIÓN DE SEÑALES CHIRP	24
2.2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CORTO (STFT)	24
2.2.2 WAVELETS (WV)	27
2.2.3 DISTRIBUCIÓN DE WIGNER-VILLE (WVD)	33
2.2.4 CHOI-WILLIAMS (ChW)	36
2.2.5 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL INCLINABLE MULTIFORME (MTED)	37
3. DETECCIÓN DE SEÑALES CON EL OSCILADOR DUFFING	40
3.1 SEÑALES SINUSOIDALES	42
3.1.1 DETECCIÓN CON RUIDO	45
3.2 ANÁLISIS ESPECTRAL	47
3.2.1 DETECCIÓN CON RUIDO	49
3.3 MEDICIÓN CON DUFFING SIN SEÑAL DE REFERENCIA	51
3.4 MEDICIÓN DE SEÑALES “CHIRP”	53
3.4.1 DETECCIÓN CON SEÑAL DE REFERENCIA “CHIRP”	54
3.4.1.1 DETECCIÓN CON RUIDO	58
3.4.2 DETECCIÓN CON SEÑAL DE REFERENCIA SENOIDAL MONOCROMÁTICA	61
3.5 ARREGLO DE OSCILADORES	62
3.5.1 MEDICIÓN DE LOS DELTAS DE TIEMPO Δt	67
3.5.2 RESPUESTA DEL ARREGLO DE OSCILADORES	70
3.5.2.1 RESPUESTA DEL ARREGLO CON RUIDO	71
3.6 SISTEMA ADAPTABLE	73

3.7	PROCESO DE ADECUACIÓN DE SEÑAL	76
3.7.1	DETECTOR CUADRÁTICO	77
3.7.2	CORRELACIÓN	77
3.7.3	CUMULANTES DE ORDEN SUPERIOR	78
3.7.4	EXPONENTES DE LYAPUNOV λ	79
3.7.5	FUNCIÓN DE MELNIKOV	81
3.7.6	COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE ADECUACIÓN	82

4. SIMULACIONES 86

4.1	SEÑAL “CHIRP” LINEAL	87
4.1.1	DUFFING ADAPTABLE	87
4.1.1.1	SIN RUIDO	87
4.1.1.2	CON RUIDO	88
4.1.2	STFT	90
4.1.2.1	SIN RUIDO	90
4.1.2.2	CON RUIDO	91
4.1.3	WAVELETS	92
4.1.3.1	SIN RUIDO	93
4.1.3.2	CON RUIDO	96
4.1.4	DISTRIBUCIÓN DE WIGNER-VILLE	97
4.1.4.1	SIN RUIDO	97
4.1.4.2	CON RUIDO	98
4.1.5	CHOI-WILLIAMS	100
4.1.5.1	SIN RUIDO	100
4.1.5.2	CON RUIDO	101
4.1.6	DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL INCLINABLE MULTIFORME	101
4.1.6.1	SIN RUIDO	102
4.1.6.2	CON RUIDO	103
4.1.7	RESULTADOS	104
4.2	SEÑAL “CHIRP” CUADRÁTICA	104
4.2.1	DUFFING ADAPTABLE	104
4.2.1.1	SIN RUIDO	104
4.2.1.2	CON RUIDO	106
4.2.2	STFT	108
4.2.2.1	SIN RUIDO	108
4.2.2.2	CON RUIDO	109
4.2.3	WAVELETS	110
4.2.3.1	SIN RUIDO	110
4.2.3.2	CON RUIDO	113
4.2.4	DISTRIBUCIÓN DE WIGNER-VILLE	115
4.2.4.1	SIN RUIDO	115
4.2.4.2	CON RUIDO	116
4.2.5	CHOI WILLIAMS	117
4.2.5.1	SIN RUIDO	117
4.2.5.2	CON RUIDO	118
4.2.6	DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL INCLINABLE MULTIFORME	119
4.2.6.1	SIN RUIDO	120
4.2.6.2	CON RUIDO	120

4.2.7	RESULTADOS	122
4.3	APLICACIÓN DEL METODO DE MONTE CARLO	122
5.	CONCLUSIONES	130
5.1	TRABAJO FUTURO	133
	APÉNDICE A	134
	LISTA DE FIGURAS	137
	LISTA DE TABLAS	139
	REFERENCIAS	140

1. INTRODUCCIÓN

El estudio en la detección de señales débiles, es decir, señales inmersas en un ambiente con altos niveles de ruido, ha sido de gran interés en diferentes campos de la ciencia tales como las comunicaciones, señales de radar, señales cerebrales, reconocimiento de sismos, monitoreo de salud estructural, etc. Muchas investigaciones actualmente han concentrado sus estudios en el análisis de osciladores caóticos y en particular en el oscilador Duffing como una herramienta para la detección de señales con una relación de señal a ruido (SNR) muy baja. Los resultados que se han obtenido han sido muy buenos para los casos en los que las señales medidas son señales de frecuencia constante (Li., 2005), (H Y Chen, 2005), (Tian-Liang, 2008), (MA, 2008) y (Tao Huang, 2009).

En otra área de estudio, el efecto *Doppler* es un fenómeno muy utilizado en la medición de la velocidad de los objetos, tal es el caso de los radares utilizados para el control de tráfico aéreo. Cuando dichos objetos presentan cambios de velocidad o de aceleración, se logran medir señales emitidas por ellos que presentan cambios en su frecuencia a lo largo del tiempo. En diversas áreas de estudio en donde se usan señales Doppler y se desean investigar sus aplicaciones independientemente de las velocidades involucradas, se generan tales señales artificialmente y a éstas se les conoce como señales “chirp”. Así pues, basándose en los resultados, con el oscilador Duffing, obtenidos en investigaciones realizadas previamente con frecuencias específicas, se planteó un método que permite desarrollar análisis en el espacio Tiempo-Frecuencia de las señales “chirp”. El objetivo principal de este proyecto es realizar un análisis tiempo-frecuencia mediante el uso de un oscilador Duffing.

El resultado de este trabajo plantea una metodología para poder realizar el análisis tiempo-frecuencia de señales “chirp” con una baja SNR utilizando el oscilador caótico y se comparan los resultados con otras técnicas de análisis tiempo-frecuencia para analizar el desempeño del nuevo método.

El método propuesto en este trabajo consiste en un sistema adaptable conformado por 5 osciladores Duffing en paralelo y una sección encargada de procesar la respuesta de los osciladores mediante correlación para, finalmente, lograr la detección de la variación en frecuencia de la señal. Para poder valorar los resultados obtenidos, se realiza una comparación entre el análisis propuesto con el análisis de estas señales con otras técnicas de tiempo-frecuencia.

Las técnicas tradicionales de análisis TF tales como “*short time Fourier transform (STFT)*”, “*continuous wavelet transform (CWT)*”, “*Wigner –Ville Distribution (WVD)*” (Boashash, 2003) (L. Galleani), *Choi-Williams* (F. Hlawatsch, 1992), *Multiform Tiltable Exponential Distribution* (Antonio H Costa, 1995) presentan resultados muy precisos en la medición de las señales cuya frecuencia cambia con el tiempo, pero se ven seriamente afectadas cuando una SNR es demasiado baja. Por tanto, los aspectos más importantes de este trabajo son comprobar que es posible realizar un análisis tiempo frecuencia con el oscilador caótico y comprobar que se pueden obtener buenos resultados cuando se tiene una SNR muy baja.

Debe notarse que, por un lado, a pesar de que el oscilador *Duffing* se dice que es inmune al ruido, en la práctica presenta un umbral de ruido hasta el cual se puede trabajar, lo cual constituye una limitación y que, por otro lado, otra posible limitación es la razón de cambio en el dominio continuo con que ocurren las alteraciones de frecuencia de la señal que se desea medir.

1.1 JUSTIFICACIÓN

La medición de señales con una SNR muy baja es muy importante en la industria, especialmente en detección de fallas en estructuras, sistemas de comunicación, radares, análisis en geología, e inclusive en el campo médico. Es por esta razón que muchos estudios se enfocan en la adquisición de señales débiles, es decir, una baja SNR. El efecto Doppler, como se mencionó antes, afecta las señales en muchas aplicaciones, mediciones de flujo, radares, etc.; por tal motivo es importante el análisis de este tipo de señales que presentan un comportamiento de variación en frecuencia a lo largo del tiempo, o también conocidas como señales “*chirp*”.

La investigación del comportamiento de este tipo de señales ha sido implementada mediante el uso de técnicas de tiempo-frecuencia tales como “*short time Fourier transform (STFT)*”, “*continuous wavelet transform (CWT)*”, “*Wigner – Ville Distribution (WVD)*”, entre otras. Estas técnicas de análisis en tiempo-frecuencia presentan limitaciones cuando los niveles de ruido superan un umbral determinado. Debido a las limitaciones en ruido de estas técnicas, surge la motivación por investigar una alternativa diferente que prometa resultados muy positivos y que abren una nueva línea de investigación. Por esta razón, el objetivo central de este trabajo es analizar las señales “*chirp*” con el oscilador Duffing para observar su variación en frecuencia mediante una representación de Tiempo-Frecuencia (TF). El primer paso para lograr esto, es proponer un método que logre medir las señales “*chirp*” utilizando el oscilador. Una vez que se obtengan resultados, el siguiente paso es realizar una comparación de la técnica propuesta con algunos de los diferentes métodos convencionales de análisis TF lo cual se podrá realizar mediante simulaciones con diferentes señales entre los principales métodos de análisis para corroborar la efectividad del propuesto en este trabajo.

1.2 OBJETIVOS

Objetivo principal:

- Analizar las señales “*chirp*” con el oscilador Duffing para observar su variación en frecuencia.

Objetivos secundarios:

- Proponer una estrategia para lograr medir la señales “*chirp*” utilizando el oscilador Duffing.
- Realizar una comparación de la técnica propuesta con algunos de los diferentes métodos convencionales de análisis tiempo-frecuencia.
- Evaluar mediante simulaciones con diferentes señales para corroborar los resultados obtenidos.

1.3 METODOLOGÍA

I.

Implementar el modelo del oscilador mediante una herramienta flexible que permita realizar cambios en los parámetros del oscilador. Lo anterior puede preverse que se realizará a través de software y en particular, dado su facilidad de creación de interfaces gráficas y visualización de resultados, en Matlab. En cuanto a la generación de señales de ruido, Matlab tiene diferentes funciones que pueden permitir el estudio del oscilador en presencia de ruido

.

II.

Plantear una estrategia para el análisis de las señales “*chirp*” con el oscilador caótico. Esto con el fin de poder realizar una estimación lo más precisa posible de la frecuencia detectada a lo largo del tiempo. Una estrategia

común es tomar intervalos pequeños de la señal en el tiempo de tal forma que se obtenga una frecuencia promedio de la señal en dicho intervalo y así se puedan obtener los cambios de frecuencia de la señal a lo largo del tiempo.

Realizar, en un principio el análisis de señales “*chirp*” de segundo orden con el fin de comprobar un correcto funcionamiento de la técnica planteada y posteriormente poder manipular señales de orden mayor.

III.

Para la validación de los resultados se utilizarán diferentes técnicas de tiempo-frecuencia que permitan comparar el desempeño del sistema mediante el umbral de la relación señal a ruido y también por el error en la estimación de frecuencia a lo largo del tiempo.

1.4 ESTADO DEL ARTE

Recientemente se han venido realizando investigaciones acerca de las ventajas que presenta el oscilador caótico como una herramienta para la detección de señales débiles. Estos trabajos han demostrado que es posible mejorar la precisión en la medición de la frecuencia comparados con otros métodos convencionales y además los niveles de SNR con la que se trabaja puede llegar a ser muy baja, tal como se plantea en (Tiang-Liang, 2008) (MA, 2008; MA, 2008). Nie Chunyan (Nie Chunyan, 2011) presenta en su trabajo una propuesta para mejorar la precisión en la medición de la frecuencia mediante la combinación de correlación cruzada con teoría del caos. Esta técnica utiliza un algoritmo de optimización y se realizan mediciones de la varianza como un criterio para juzgar si el sistema se encuentra en un estado de periodicidad.

Abolfazl Jalilvand (Abolfazl Jalilvand, 2011) lleva a cabo una propuesta en la que se combina el oscilador Duffing con un análisis del espectro de frecuencia y una etapa de filtrado. Esto se realiza con el fin de poder establecer una diferencia en el valor RMS del espectro cuando el sistema está en caos y cuando está en estado periódico. Una vez establecidas estas diferencias es posible detectar automáticamente el estado del sistema sin necesidad de analizar el espacio fase.

El trabajo propuesto en (H Y Chen, 2005) se realizó con el fin de poder medir la velocidad del flujo de sangre en el cuerpo humano mediante el efecto Doppler. Debido a que las señales que se desean medir son muy débiles y combinadas con altos niveles de ruido, el autor justifica el uso del oscilador Duffing para medir con precisión la frecuencia de la señal. En este caso utiliza un arreglo de osciladores para abarcar un rango mayor de frecuencias que se desean medir. Un trabajo muy similar al mencionado anteriormente fue realizado por Tao Huang (Tao Huang, 2009), en el cual se mide la velocidad en el flujo de petróleo mediante el efecto Doppler y el uso del oscilador Duffing.

En el trabajo realizado por Tao Xie (Tao Xie, 2010) se analiza la sensibilidad a señales débiles y la inmunidad al ruido del oscilador Duffing.

Bo LE (Bo LE, 2005) presenta un nuevo método para detectar señales con frecuencia modulada (FM) con altos niveles de ruido utilizando el oscilador Duffing. Esta técnica utiliza la transformada Radón – Wigner.

Fengli Wang (Fengli Wuan, 2009) propone un método para detección de fallas en rotores, la cual combina la técnica de “*Empirical Mode Decomposition (EMD)*” con el oscilador Duffing. Esto lo hace con el fin de

obtener una mejor precisión de la medición de las frecuencias de cada una de las componentes obtenidas por EMD.

El método para detección de señales débiles propuesto en (Li., 2005) consiste en realizar una estimación previa de las frecuencias de interés mediante *FFT*. Esto se hace con el fin de poder tener un conocimiento aproximado de la frecuencia que se desea detectar con mayor precisión utilizando un pequeño arreglo de osciladores Duffing.

Huang Yiran (Huang Yiran, 2008) propone un método para demodular señales 2FSK utilizando el oscilador Duffing, aprovechando la propiedad de periodicidad que presenta dicho oscilador cuando la frecuencia detectada coincide exactamente con la frecuencia de referencia del sistema.

El estudio de señales EEG también se hace posible mediante el uso del oscilador Duffing tal como lo propone Ye Yuan en su trabajo (Ye Yuang, 2008). El método utiliza la diferencia de comportamiento del espacio fase en estado caótico cuando la señal medida es una EEG normal o epiléptica.

Deng Chen (Deng Chen, 2009) propone en su trabajo el uso del oscilador Duffing para detectar elasticidad y rigidez por medio de “*pulse wave velocity (PWV)*” y el oscilador Duffing ya que las señales medidas están inmersas en altos niveles de ruido.

Changjian Deng (Changjian Deng, 2009), combina en su trabajo un oscilador caótico con algoritmos genéticos. En este trabajo se realiza la medición de la señal directamente con el oscilador Duffing o también realiza una reducción de ruido previa al proceso con el oscilador. En la reducción de ruido menciona técnicas tales como el espectro de potencia o el filtro Wigner, SFFT, integral sincrona y cancelación de ruido con filtro adaptivo.

Liqun Shen (Liqun Shen, 2011) realiza un monitoreo de las transiciones de estado periódico a caótico en el oscilador Duffing mediante el uso de la función de *Melnikov*. Además detecta la frecuencia de las señales empleando un arreglo de osciladores Duffing.

Todos los trabajos descritos anteriormente dan una clara idea del interés por trabajar con osciladores caóticos. Esto se debe principalmente a las ventajas que presenta la detección de frecuencia con gran precisión aun cuando las señales de interés están inmersas en ambientes con mucho ruido. Sin embargo, los trabajos mencionados no han realizado un estudio de las señales “chirp” con el oscilador Duffing. El único que realizó un análisis de la señal “chirp” fue Bo LE en su trabajo (Bo LE, 2005), pero no estudia la variación de la frecuencia a lo largo del tiempo, sino que primero realiza una transformación para eliminar el término no lineal de la señal dejando solo su término de frecuencia constante. Este método contrasta notablemente con los resultados encontrados en la presente tesis en donde se demuestra que esta técnica podría llegar a funcionar para cualquier otro tipo de señal, lo cual sería de bastante interés para futuras investigaciones.

1.5 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Este documento está organizado en 5 capítulos que se distribuyen de la siguiente manera: El primer y presente capítulo describe la motivación, justificación y contribuciones de esta investigación, además se mencionan algunas investigaciones que se han realizado enfocadas a la detección de señales usando el oscilador Duffing. El segundo capítulo presenta los conceptos teóricos necesarios para comprender el funcionamiento del oscilador Duffing y su aplicación a la detección de señales; también se explica como funcionan las técnicas tradicionales de análisis TF. En el tercer

capítulo se plantea la metodología del sistema propuesto en esta investigación, describiendo los pasos que se realizaron para obtener un diseño final y explicando como funciona cada una de sus partes. El capítulo 4 muestra todos los resultados obtenidos con el sistema Duffing y las comparaciones realizadas con las otras representaciones de TF. Finalmente el quinto capítulo presenta las conclusiones y trabajo futuro.

2. CONCEPTOS TEÓRICOS

En este capítulo se verán las bases teóricas necesarias empezando por el oscilador Duffing y continuando con las técnicas de análisis TF

2.1 EL OSCILADOR DUFFING

El desarrollo de este proyecto se basa principalmente en el comportamiento de la ecuación diferencial propuesta por *Georg Duffing para movimientos oscilatorios no lineales*. Por lo tanto a continuación se dará a conocer el comportamiento de dicha ecuación y el significado de cada uno de sus parámetros.

La ecuación de Duffing (Kovacic & Brennan, 2011) con vibración libre es la siguiente:

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} + \mu\dot{y}^3 + \alpha y + \gamma y^3 = 0$$

donde y representa el desplazamiento, ζ el amortiguamiento, μ es un parámetro de amortiguamiento no lineal, α es la elasticidad lineal mientras que γ es la elasticidad no lineal.

Al realizar un cambio de variable para representar el espacio de estados, se tiene las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\y_2 &= \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha y_1 - 2\zeta y_2 - \gamma y_1^3 - \mu y_2^3.\end{aligned}$$

Existen diferentes comportamientos del oscilador que dependen del ajuste a los parámetros.

Para el caso de la estimación de frecuencia de una señal basada en el oscilador Duffing, solo se logra si los parámetros cumplen con las siguientes condiciones (Kovacic & Brennan, 2011):

$$\begin{aligned}\alpha &= -(\omega_o)^2 < 0 \\ \gamma &> 0 \\ 0 < \zeta &< \sqrt{2} \cdot \omega_o .\end{aligned}$$

Debido a la no linealidad del sistema, el espacio fase tendrá tres puntos de interés dentro de los cuales uno es la solución trivial $(y_1, y_2) = (0,0)$ y los otros dos están dados por:

$$\begin{aligned}(y_{1st}, y_{2st}) &= (y_{st}, 0) \\ y_{st} &= \mp \sqrt{-\alpha/\gamma}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el espacio fase, cuando los parámetros cumplen con las condiciones anteriormente mencionadas y no se aplica ningún tipo de entrada forzada sino que el sistema oscila libremente, es el siguiente:

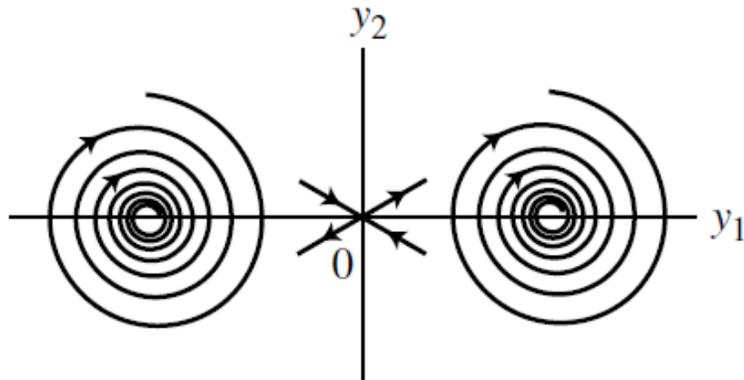


Figura 1 Espacio fase en libre oscilación (Kovacic & Brennan, 2011).

En la Figura 1 anterior, se puede apreciar que el punto fijo trivial es inestable y los otros dos puntos son focos estables. Nótese que la estabilidad del punto trivial no depende de ζ , mientras que los puntos no triviales son estables

cuando el valor de ζ es mayor que cero. El comportamiento que se mostró se da cuando el sistema se deja oscilando libremente hasta que se detiene en un momento determinado. Cuando se le aplica una excitación armónica al sistema va a presentar un comportamiento un poco diferente.

2.1.1 DETECCIÓN DE FRECUENCIAS CON EL OSCILADOR DUFFING

El principio de detección de frecuencias con el oscilador Duffing bajo régimen caótico se basa en aplicar una señal de excitación al sistema, por lo tanto el modelo se ve representado de la siguiente manera:

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} - \alpha y \pm \gamma y^3 = F \cos(\Omega t) \quad 2-1$$

donde F es la amplitud de excitación y Ω es la frecuencia de excitación para este caso. Este oscilador es conocido como “*twin –well Duffing Oscillator*”. Nótese que cuando se utiliza el signo negativo (-) en la constante de elasticidad no lineal γ , la solución es exponencial y tiende a infinito, por lo tanto se trabaja solo con su signo positivo (+).

La aplicación del oscilador Duffing para la medición de señales se basa en la transición del estado caótico a un estado de periodicidad y viceversa, tal como se describe en (Tian-Liang, 2008). Así, para que el sistema pueda funcionar como un método de identificación de frecuencia de una señal, es necesario que su comportamiento se encuentre en el límite de transición entre los dos estados mencionados.

Redefiniendo el sistema en el espacio de estados se tienen las siguientes expresiones:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = x - x^3 + \varepsilon(F\cos(\omega t) - \delta y)$$

y que al utilizar el método de Melnikov (DIALLO, KONÉ, & MAIGA, 2008) para calcular el umbral del estado caótico, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{-3}{4}\delta + \sqrt{2}\pi\omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) = 0$$

y si se define

$$R^0(\omega) = \frac{4 \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}{3\sqrt{2}\pi\omega}$$

entonces, se tienen tres situaciones:

1. $\frac{F}{\delta} < R^0(\omega)$ y el sistema se encuentra en un estado que presenta una trayectoria interior periódica (ver Figura 2).

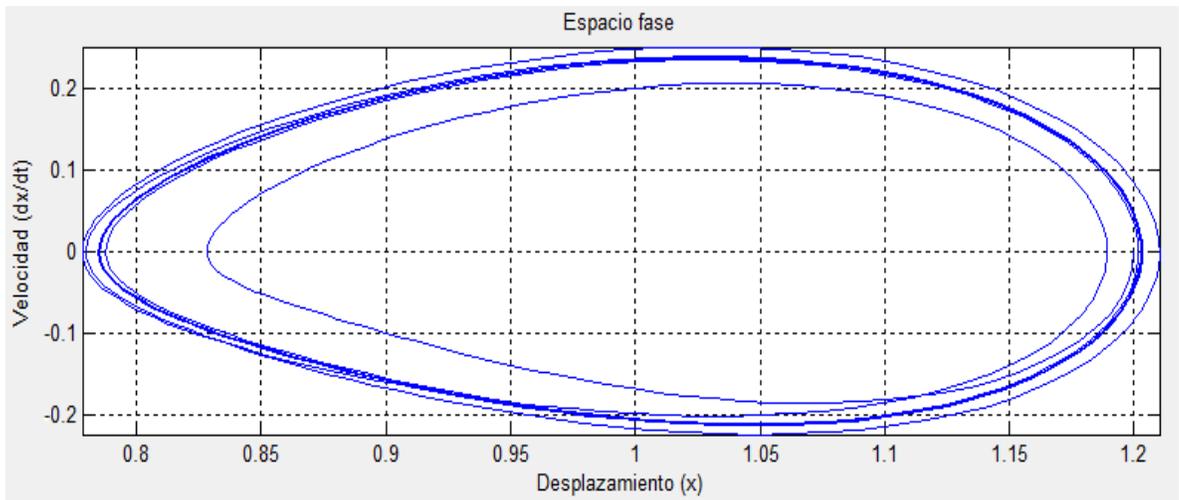


Figura 2. Trayectoria periódica interior.

2. $\frac{F}{\delta} > R^0(\omega)$ y el sistema entra en estado caótico mostrado en la Figura 3.

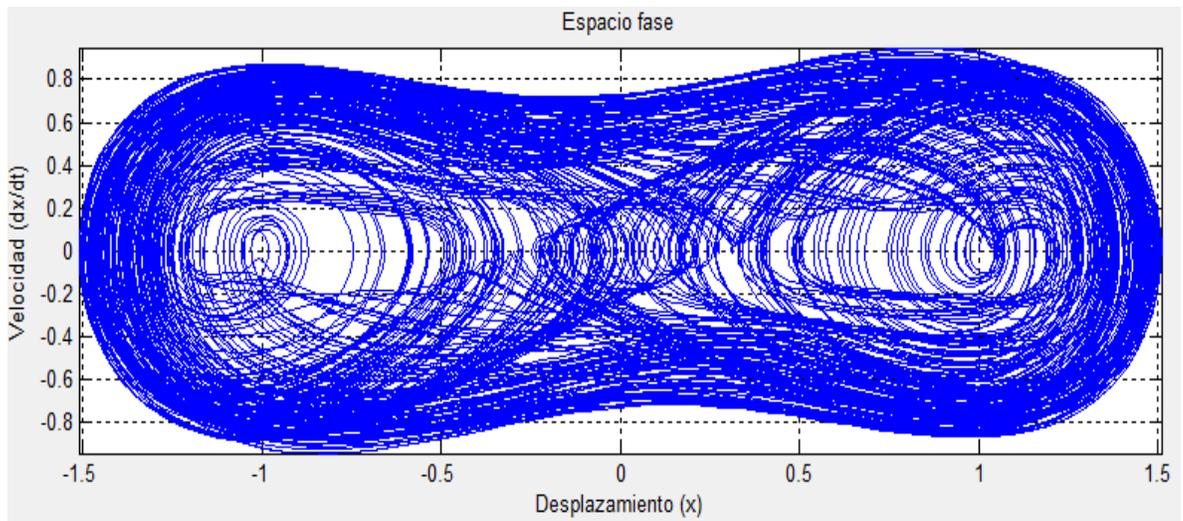


Figura 3. Sistema en caos

3. Cuando el valor de F logra superar un umbral $F > F_d$, el oscilador entra en un estado de total periodicidad (ver Figura 4).

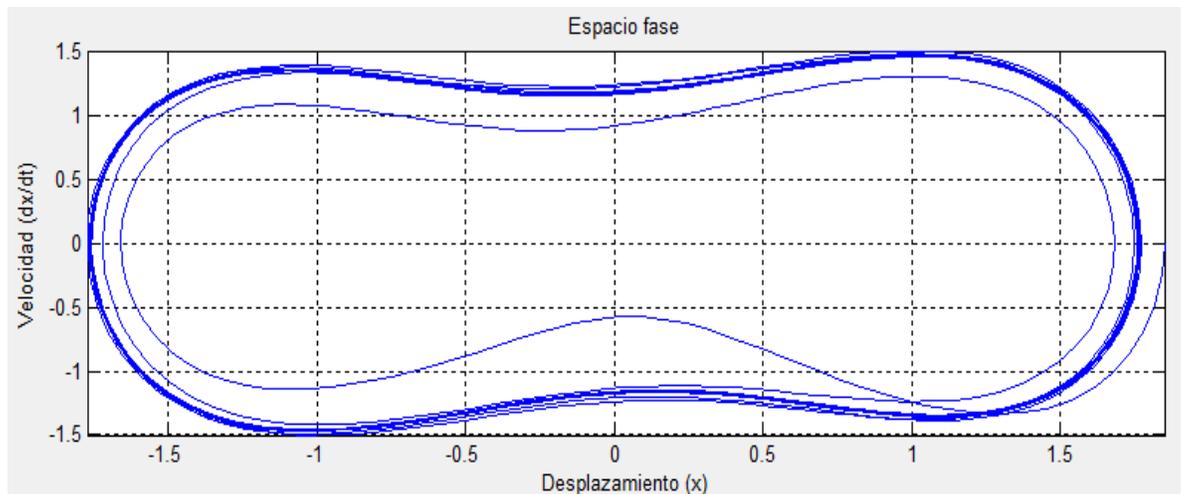


Figura 4. Movimiento periódico.

El principio de medición de señales débiles está basado en el mecanismo de caos intermitente, tal como se describe en (Tian-Liang, 2008) y se muestra a continuación.

El modelo del sistema se puede plantear de la siguiente forma cuando se introduce la señal que se desea medir:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = F_r \cos(t) + A \cos[(1 + \Delta\omega)t + \varphi] + n(t)$$

donde $F_r \cos(t)$ es la señal de referencia, $A \cos[(1 + \Delta\omega)t + \varphi]$ es la señal que se desea medir, $\Delta\omega$ es la diferencia en frecuencia con respecto a la señal de referencia y $n(t)$ es el ruido involucrado.

Cuando $F_r < F_d$ y no existe una señal externa que se desee medir, entonces el oscilador se mantiene en estado caótico. En presencia de una señal externa que perturbe al sistema de tal forma que $F_r + A$ sea un poco mayor que F_d , entonces el sistema empieza realizar transiciones de estado mientras $\Delta\omega$ sea diferente de cero. La fuerza total aplicada al sistema $F(t)$ empezará a variar entre $F_r - A$ y $F_r + A$, por lo tanto un instante se encontrará en estado caótico y el siguiente instante en estado periódico.

Si se representa la fuerza total aplicada al sistema de la siguiente manera:

$$F_r \cos(t) + A \cos[(1 + \Delta\omega)t + \varphi] = [F_r + A \cos(\Delta\omega t + \varphi)] \cos(t) - A \sin(t) \sin(\Delta\omega t + \varphi)$$

entonces,

$$F_r \cos(t) + A \cos[(1 + \Delta\omega)t + \varphi] = F(t) \cos(t + \theta(t))$$

con

$$F(t) = \sqrt{F_r^2 + 2F_r \cos(\Delta\omega t + \varphi) + A^2}$$

y

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[\frac{A \sin(\Delta\omega t + \varphi)}{F_r + A \cos(\Delta\omega t + \varphi)} \right]$$

Si $\Delta\omega = 0$ y $-\cos^{-1}\left(\frac{A}{2Fr}\right) \leq \varphi \leq \cos^{-1}\left(\frac{A}{2Fr}\right)$ entonces, el sistema se mantiene en estado caótico mientras φ se mantenga en ese intervalo. Por lo tanto la diferencia de fase también es importante en el análisis de la señal. Solo cuando la fase no se encuentra en este intervalo, entonces el oscilador podría cambiar al estado de periodicidad.

Si $\Delta\omega \neq 0$ entonces, $F(t)$ será mayor o menor que el valor de bifurcación F_d . Estas transiciones se realizan periódicamente, lo cual permite estimar el valor de la frecuencia de la señal que se desea medir ya que el periodo del caos intermitente es determinado mediante la siguiente ecuación (Tian-Liang, 2008):

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

el cual se ve claramente que es proporcional a la diferencia de frecuencia de la señal de entrada con respecto a la señal de referencia tal como se muestra en la Figura 5, donde F_0 es ligeramente menor que F_d .

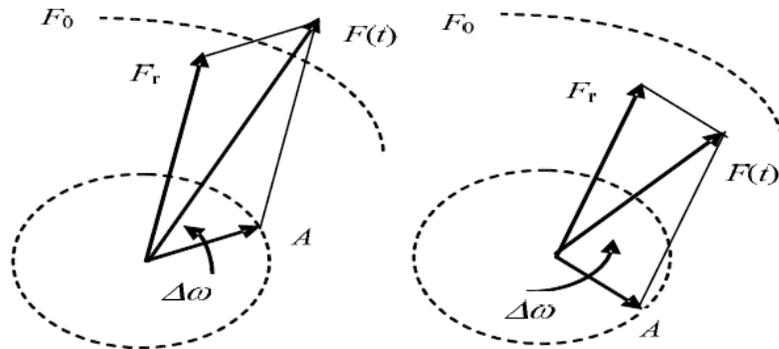


Figura 5. Relación vectorial de la fuerza inducida al oscilador (Li-xin, 2008).

Es claro de la Figura 5, que al introducir ruido al sistema, éste solo afecta la trayectoria local (ver Figura 6), pero no afecta las transiciones de estado. Por esta razón se dice que el oscilador caótico es inmune al ruido.

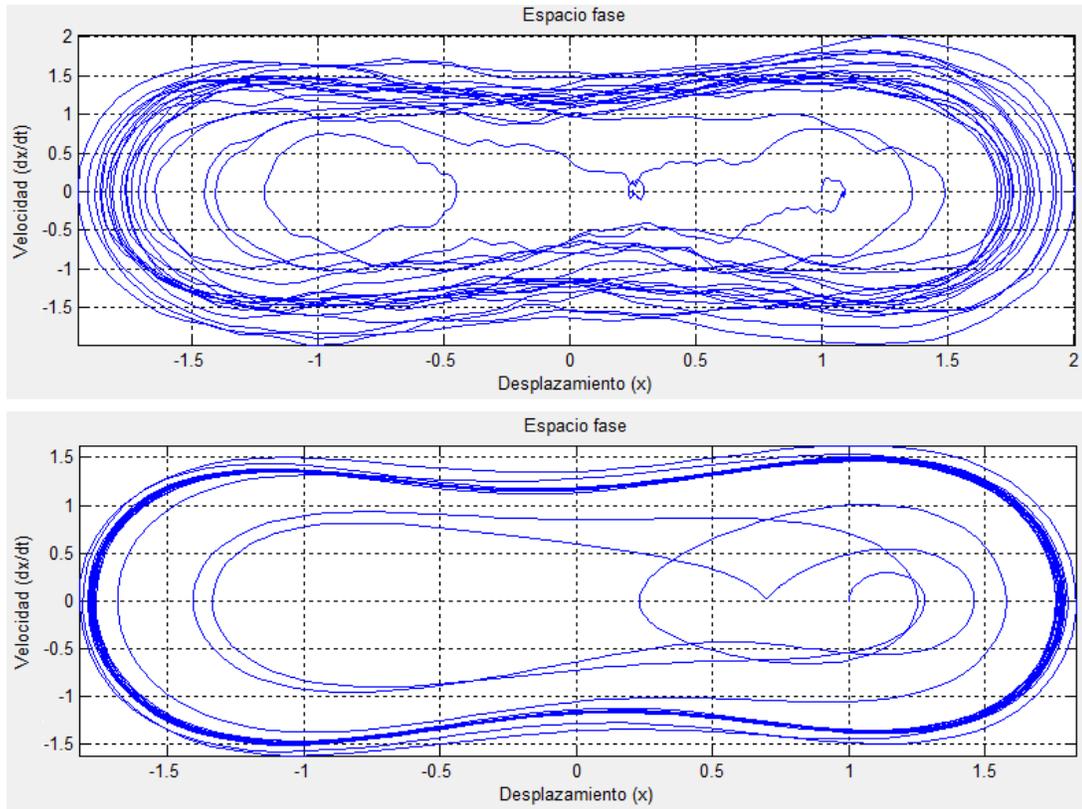


Figura 6. (Superior)Espacio fase con SNR de -20 dB. (Inferior) Espacio fase sin ruido.

Con el fin de poder detectar una señal con cualquier frecuencia, es necesario realizar una leve transformación al sistema representado por la ecuación 2-1 tal como se plantea en (Li-xin, 2008). La ecuación original del sistema es:

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} - \alpha y \pm \gamma y^3 = F \cos(\Omega t)$$

ahora, realizando una transformación de variable $t = \omega\tau$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\omega\tau) = x_\tau(\tau) \\ \dot{x}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{dx_\tau(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \dot{x}_\tau(\tau) \\ \ddot{x}(t) &= \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2x_\tau(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2} \ddot{x}_\tau(\tau) \quad 2-2 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación 2-1 en 2-2 se obtiene:

$$\frac{1}{\omega^2} \ddot{x}_\tau(\tau) + \frac{2\zeta}{\omega} \dot{x}_\tau(\tau) - x_\tau(\tau) + x_\tau^3(\tau) = F \cos(\omega\tau)$$

El espacio de estado del sistema queda descrito por el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = \omega(-2\zeta y + x - x^3 + F \cos(\omega t)) \end{cases} \quad 2-3$$

Así, con la ecuación 2-3 es posible detectar una señal de cualquier frecuencia ya que no es necesario modificar ningún parámetro a medida que ω aumenta.

2.2 TÉCNICAS PARA DETECCIÓN DE SEÑALES CHIRP

Esta sección describe cada una de las técnicas utilizadas para la detección de señales “chirp” y poder realizar una comparación de sus resultados con el método propuesto en este trabajo. El estudio de la investigación se basó en el análisis con técnicas tradicionales tales como “*Short Time Fourier Transform*” (STFT), “*Wigner-Ville Distribution*” (WVD), *Choi-Williams (ChW)*, “*Multiform Tiltable Exponential Distributions*” (MTED) y “*Wavelets*”.

2.2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CORTO (STFT)

El método de análisis de TF de la transformada de Fourier de tiempo corto se basa en tomar ventanas de tiempo de la señal que se desea analizar. A cada una de las ventanas se le aplica la transformada de Fourier para obtener su frecuencia instantánea y de esta manera se puede generar la representación gráfica de TF llamada espectrograma. El modelo matemático que representa

este proceso se describe a continuación, el cual fue tomado del texto de (Boashash, 2003).

Inicialmente se debe considerar una señal $s(\tau)$ y una ventana $w(\tau)$ la cual debe ser real y par. Sus transformadas de Fourier son $S(f)$ y $W(f)$ respectivamente. Ahora si se desea obtener un espectro de la señal en un determinado instante de tiempo $\tau = t$, se debe multiplicar la señal $s(\tau)$ por la ventana $w(\tau)$ centrada en un tiempo $\tau = t$ quedando

$$s_w(t, \tau) = s(\tau)w(\tau - t)$$

Luego, se calcula su transformada de Fourier para obtener:

$$F(t, f) = F_{\tau \rightarrow f}\{s(\tau)w(\tau - t)\}$$

este resultado es llamado la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT por sus siglas en inglés). La magnitud al cuadrado de la STFT es llamada espectrograma y se denota por

$$S_s^w(t, f) = |F(t, f)|^2$$

esto es,

$$S_s^w(t, f) = |F_{\tau \rightarrow f}\{s(\tau)w(\tau - t)\}|^2$$

es decir

$$S_s^w(t, f) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(\tau - t)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \right|^2$$

Su equivalente discreto es:

$$X(m, f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n - m]e^{-i2\pi fn}$$

La STFT tiene el inconveniente de no poder obtener una buena resolución tanto en el tiempo como en frecuencia al mismo tiempo, esto se debe al principio de incertidumbre de Heisenberg. Se debe sacrificar una de las dos estimaciones ya que si se busca una muy buena resolución en frecuencia entonces se debe bajar la calidad en la resolución temporal. Debe existir una compensación entre estas dos variables, por lo tanto si se requiere medir una frecuencia instantánea de una señal senoidal pura no es necesario tener una resolución temporal tan buena debido a que para cada instante de tiempo siempre se tiene la misma frecuencia. En cambio cuando la señal presenta contenido espectral que varía rápidamente con el tiempo, lo mejor es utilizar ventanas de tiempo corto, es decir, una resolución temporal alta para poder notar los cambios en cada instante de tiempo. La Figura 7 a) muestra un espectrograma con una buena resolución temporal y por ende una baja resolución frecuencial. Mientras que la Figura 7 b) muestra un espectrograma con una buena resolución en frecuencia y una mala resolución temporal.

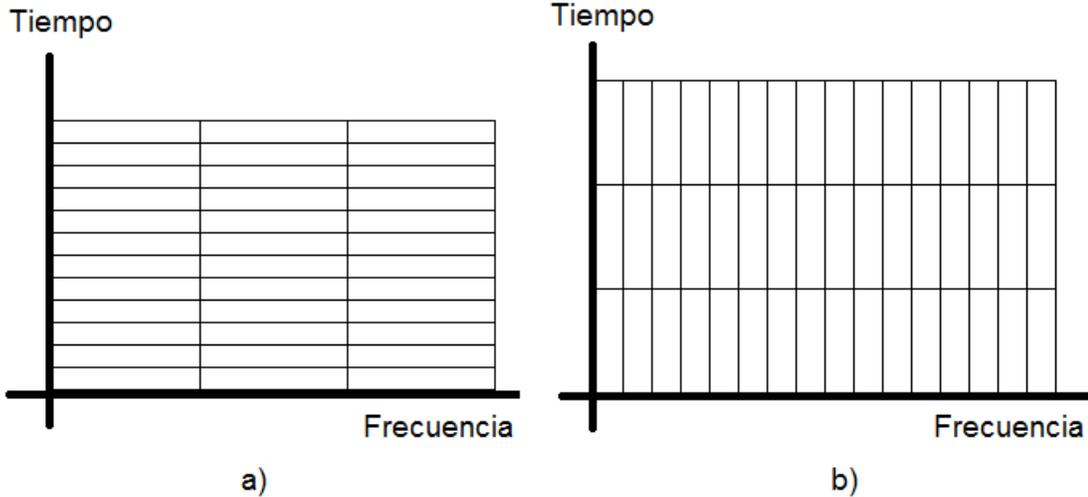


Figura 7 Espectrogramas. a) buena resolución temporal. b) buena resolución en frecuencia.

El tipo de ventana utilizada con la STFT también es una característica importante a la hora de realizar una buena estimación de la frecuencia instantánea. Al realizar una multiplicación de la señal con una ventana en el tiempo, su efecto se ve reflejado en la frecuencia a través de la convolución. Por lo tanto si tomamos una ventana rectangular para multiplicarla con la señal en el dominio de la frecuencia esta ventana es equivalente a una señal *Sinc*. Esta función *Sinc* es convolucionada con la señal en el dominio de la frecuencia y en consecuencia aparecen componentes de frecuencia no deseadas que generan un espectro confuso. Las mejores ventanas son las que su transformada de Fourier tiene la misma forma que su representación en el tiempo, tal como ocurre por ejemplo con las ventanas de Gauss, Hamming y Chebyshev.

2.2.2 WAVELETS (WV)

La transformada *Wavelet* ha sido una de las soluciones más recientes ante los inconvenientes que se presentan con la transformada de Fourier debido a que la señal se debe recortar en ventanas. Esta técnica permite representar la respuesta de Escala-Tiempo de la señal mediante un análisis de multirresolución, el cual está diseñado para evaluar la señal a diferentes escalas de resolución frecuencial.

Una *Wavelet* es una función de media cero y debe cumplir con la condición de admisibilidad (Mallat, 1999). La función de media cero debe estar acorde con la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 0$$

mientras que la condición de admisibilidad está representada mediante la siguiente ecuación:

$$C\varphi = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(w)|^2}{w} dw < +\infty$$

Lo anterior garantiza que la integral es finita, $\hat{\varphi}(0) = 0$ y su espectro se comporta como un filtro pasa-banda (Valens, 1999-2004).

La función *Wavelet* debe irse trasladando y escalando a medida que se va realizando el barrido por toda la señal que se está analizando. Estas variaciones de la *Wavelet* se pueden representar como:

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

donde s y τ representan la escala y la traslación respectivamente.

Por lo tanto la transformada *Wavelet* de una función $f(t)$ está dada por medio de la siguiente ecuación:

$$Wf(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = f \circledast \bar{\varphi}_s(\tau)$$

en donde $*$ denota el complejo conjugado de la *Wavelet* y \circledast representa la operación de convolución. Los parámetros s y τ deben irse variando con el objetivo de generar los cambios de escala y la traslación a lo largo de todo el análisis de la señal. Estas variaciones se pueden representar mediante el siguiente modelo (Mallat, 1999):

$$\varphi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)$$

El factor de incremento 2^j genera una representación *Diádica* de Escala-Tiempo tal como se puede ver en la Figura 8. Mientras que en la Figura 9 se

puede ver como se distribuyen las diferentes escalas de resolución a través de todo el plano o representación de TF. A diferencia con el espectrograma en la STFT, la Figura 9 permite ver que la resolución de frecuencia es mejor para bajas frecuencias, mientras que para altas frecuencias se ve reducida dicha resolución generando una mala estimación de la frecuencia instantánea.

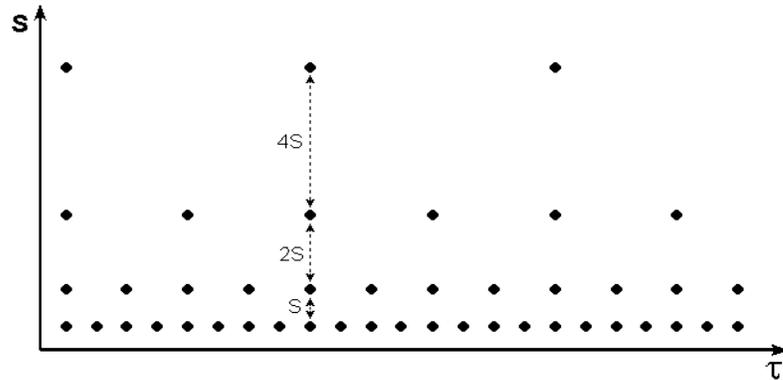


Figura 8 Representación Diádica de Escala-Tiempo (Valens, 1999-2004)

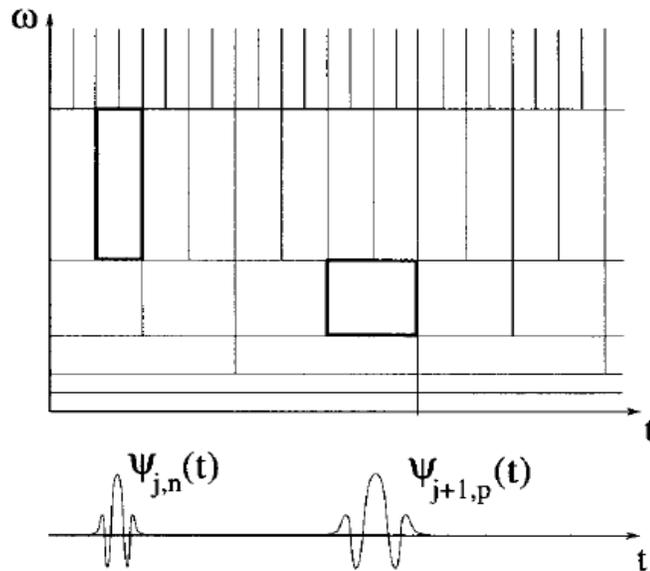


Figura 9 Resolución de Tiempo-Frecuencia basado en Wavelets. (Mallat, 1999)

Debido a que existe un gran número de *Wavelets* madres, es importante tener un criterio para realizar la correcta selección de la *Wavelet* que se desea utilizar para realizar el análisis de la señal.

Tal como se menciona en (Mallat, 1999) y en (Valens, 1999-2004) , es importante tener en cuenta el número de momentos de desvanecimiento de la *Wavelet* ya que hacen que la transformada *Wavelet* decrezca rápidamente al ir decreciendo el factor de escala s . Esta función establece que la función *Wavelet* debe tener un suavizado y una concentración tanto en el dominio de la frecuencia como en el tiempo.

Si la función $f(t)$ tiene pocas singularidades aisladas y la función es muy regular entre estas singularidades, se debe escoger una *Wavelet* con muchos momentos de desvanecimiento para producir un gran número de coeficientes *Wavelets*.

Debnath (Debnath, 2002), hace referencia a que una función posee n momentos de desvanecimiento si:

$$\int t^p \varphi(t) df = 0 \quad \text{para } p = 0, 1, \dots, n$$

Por ejemplo la *Wavelet* de *Meyer* tiene infinitos momentos de desvanecimiento, lo cual la convierte en una función muy apropiada para el análisis de las señales “chirp”, a diferencia de la *Wavelet Haar* que tan solo posee un momento de desvanecimiento. Por lo tanto se considera que la *Wavelet Haar* no es adecuada para analizar las señales “chirp”. Otra *Wavelet* que es importante resaltar, es la *Wavelet Daubechies* y es probablemente una de las más utilizadas debido a que permite escoger el número de momentos de desvanecimiento, es decir, que se puede escoger una función

Daubechies con tan solo un momento de desvanecimiento hasta un número infinito de ellos. Una propiedad que posee la *Wavelet Daubechies* es que si solo posee un momento de desvanecimiento es exactamente la misma función *Wavelet Haar*. En conclusión, si se quiere hacer un análisis de señales “chirp” utilizando la *Wavelet* de *Daubechies*, es importante que tenga varios momentos de desvanecimiento para mejorar la calidad de la estimación de la frecuencia instantánea.

Tal como se mencionó anteriormente, la serie de dilataciones de la *Wavelet* se puede considerar como un banco de filtros (Valens, 1999-2004). Por lo tanto el proceso de transformada *Wavelet* es equivalente a pasar la señal a través de dicho banco de filtros (Figura 10).

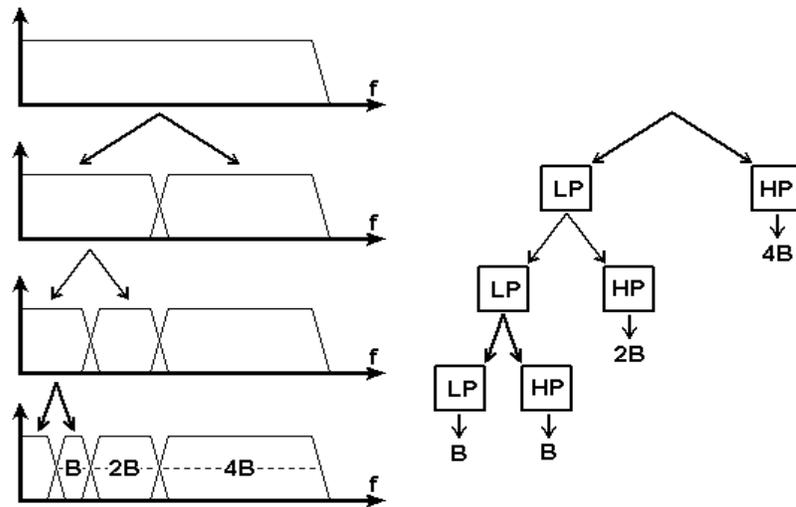


Figura 10 Representación del banco de filtros como un proceso iterativo (Valens, 1999-2004).

La desventaja que presenta esta forma de realizar el análisis es que solo se obtiene buena resolución para las frecuencias bajas. Por esta razón aparece la técnica conocida como *Wavelet Packet*. Esta técnica realiza exactamente el mismo proceso que la *Wavelet* tanto en bajas frecuencias como en altas,

lo cual genera un banco de filtros simétrico y se genera una mejor resolución en altas frecuencias.

La Figura 11 permite ver que la resolución de frecuencia y de tiempo es constante en toda la representación TF, lo cual es equivalente al espectrograma generado por el análisis de la STFT.

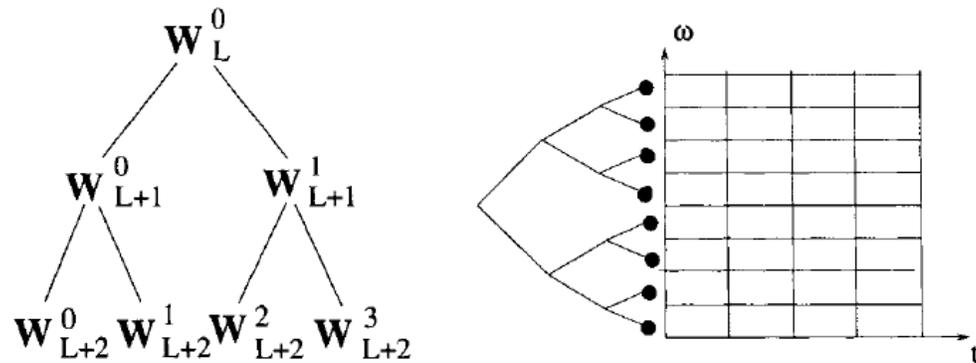


Figura 11 Representación Tiempo-Frecuencia de Wavelet Packet. (Mallat, 1999)

A continuación se enlistan unas conclusiones de (Valens, 1999-2004) que son importantes resaltarlas.

- Cuando se utilizan wavelets continuas se generan muchos términos que son redundantes, los cuales son eliminados cuando se utiliza Wavelets discretas.
- La función de escalamiento soluciona el problema de tener un número infinito de wavelets en la transformada Wavelet.
- La representación del banco de filtros soluciona el problema de la no existencia de una solución analítica.
- Incrementar el número de momentos de desvanecimiento convierte a la función Wavelet más suave o más regular.

2.2.3 DISTRIBUCIÓN DE WIGNER-VILLE (WVD)

La base fundamental de este método proviene de una técnica conocida como *Distribución de Wigner* (WD por sus siglas en inglés), la cual utiliza la función de autocorrelación de la señal y su transformada de Fourier para realizar el análisis de TF. Esto se puede ver representado mediante lo siguiente:

Si se tiene

$$z(t) = e^{j\phi(t)}$$

hágase

$$K_z(t, \tau) = z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

y tómesese

$$P_z(t, f) = F_{\tau \rightarrow f}\{K_z(t, \tau)\}.$$

así finalmente,

$$W_z(t, f) = P_z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

donde $z(t)$ es la señal que se desea analizar, $K_z(t, \tau)$ es la función de autocorrelación instantánea de la señal.

La expresión $W_z(t, f)$ es la Transformada de Wigner de la señal $z(t)$ (Boashash, 2003).

Cuando se aplica esta transformada directamente a la señal aparecen términos cruzados que son unas componentes no deseables en la representación de TF que son inexistentes en la señal real y esto se debe a la no linealidad de WD, haciendo que se disminuya la utilidad de WD en señales reales. Este inconveniente se soluciona Modificando la WD por la *Distribución de Wigner-Ville* (WVD por sus siglas en inglés).

La WVD de una señal $s(t)$ denotada por $W_z(t, f)$, es definida como la WD de su asociación analítica. La función analítica tiene como característica principal la de poseer espectro positivo, eliminando información redundante ya que si obtenemos el espectro de la señal real veremos que es simétrico respecto al origen generando información duplicada (Rosado Muñoz, 1999).

Sí, si se tiene

$$s(t) = e^{j\phi(t)}$$

se define una función de asociación analítica como:

$$A[s(t)] = z(t) = s(t) + jH[s(t)]$$

donde la parte real de $A[s(t)]$ es la señal de análisis y la parte imaginaria $H[s(t)]$ es la transformada Hilbert de la misma señal de análisis, entonces ahora se tiene que

$$K_z(t, \tau) = z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

por lo que se puede escribir

$$W_z(t, f) = F_{\tau \rightarrow f}\{K_z(t, \tau)\}.$$

y finalmente

$$W_z(t, f) = P_z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

Esto significa que no se aplica la transformada de Fourier directamente sobre la función de autocorrelación de la señal sino sobre la función de autocorrelación de su asociación analítica.

Existe una relación entre WVD y todas las demás distribuciones de TF (TFD). Se puede considerar que todas las demás TFD son una versión enventanada o suavizada de WVD. Este suavizado se realiza en la frecuencia y por lo

tanto las interferencias resultan altamente atenuadas en comparación con la representación Wigner-Ville. El ventaneo implica la inclusión de un *Kernel* el cual provoca una disminución de resolución ya que el filtrado al que se somete la señal genera una dispersión de energía en los ejes temporal y frecuencial (Rosado Muñoz, 1999). La ecuación que representa esta relación es la siguiente:

$$PWV(t, w) = \iint h(\tau) \cdot z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\tau w} d\tau du$$

En el texto de (Boashash, 2003) se demuestra que la WVD es el caso trivial de todas las TFD, tal como se muestra a continuación:

$$P_z(t, f) = \gamma(t, f) ** W_z(t, f)$$

la doble convolución representa la convolución en el tiempo y en la frecuencia. La función $\gamma(t, f)$ es la transformada de Fourier de la ventana $G(t, \tau)$ utilizada,

$$\gamma(t, f) = F_{\tau \rightarrow f}\{G(t, \tau)\}$$

Ahora considerando la función $R(t, \tau)$ como la convolución entre la ventana seleccionada y la función analítica se tiene que:

$$R(t, \tau) = G(t, \tau) * K_z(t, \tau)$$

con

$$K_z(t, \tau) = z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

por lo tanto, para la WVD el modelo se representa por:

$$R(t, \tau) = K_z(t, \tau) = \delta(t) * K_z(t, \tau)$$

considerando el caso trivial

$$G(t, \tau) = \delta(t)$$

se obtiene

$$P_z(t, f) = F_{\tau \rightarrow f}\{R(t, \tau)\}$$

esto es

$$P_z(t, f) = F_{\tau \rightarrow f}\{K_z(t, \tau)\} = W_z(t, f)$$

En conclusión, WVD es ideal para el caso de las señales con modulación de frecuencia lineal ya que cuando la modulación en frecuencia no es lineal y/o existen múltiples componentes entonces WVD presenta términos cruzados no deseables. En tal caso es recomendable utilizar un Kernel para obtener alguna de las TFD con el fin de atenuar dichos términos cruzados.

2.2.4 CHOI-WILLIAMS (ChW)

Choi y Williams propusieron un *Kernel* que redujera directamente los términos cruzados mediante el uso de funciones exponenciales. Además, este método presenta un mejor desempeño frente al ruido. ChW es una distribución de tiempo frecuencia y por lo tanto se puede definir como una ventana de suavizado para la WVD tal como se mencionó en la sección 2.2.3.

El modelo que representa la ventana de Choi-Williams esta dado por (Boashash, 2003):

$$G(t, \tau) = \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{|\tau|} \cdot e^{-\pi^2\sigma t^2/\tau^2}$$

Por lo tanto su representación de tiempo frecuencia esta dada por:

$$PWV(t, w) = \iint G(t, \tau) \cdot z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\tau w} d\tau du$$

quedando

$$ChW(t, w) = \iint \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{|\tau|} \cdot e^{\frac{-\pi^2\sigma(t-u)^2}{\tau^2}} \cdot z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \cdot z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\tau w} du d\tau$$

que es la representación de Choi-Williams de una señal $S(t)$.

2.2.5 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL INCLINABLE MULTIFORME (MTED)

La representación de Tiempo Frecuencia (TFR) de una señal $x(t)$ se dice que pertenece a la clase *Cohen* si y solo si puede ser formulada como (Antonio H Costa, 1995):

$$T_x(t, f; \Psi_T) = \iint \Psi_T(\tau, \nu) A_x(\tau, \nu) e^{j2\pi(\nu t - \tau f)} d\tau d\nu$$

donde $\Psi_T(\tau, \nu)$ es un *Kernel* asociado a una TFR en particular. En este modelo t y f representan el tiempo y la frecuencia respectivamente, mientras que τ y ν representan el retraso en el tiempo y el retraso en la frecuencia para el dominio de la función de ambigüedad $A_x(\tau, \nu)$ definida por:

$$A_x(\tau, \nu) = \int x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\nu u} du$$

Por lo tanto las TFR pueden ser obtenidas a partir de los *Kernels* propuestos por diferentes autores tal como ocurre para el caso de WVD y ChW, mencionados anteriormente, con el fin de eliminar ruido y cualquier tipo de interferencia o elementos cruzados.

La propuesta realizada por (Antonio H Costa G. F.-B., 1995) es una forma generalizada para obtener diferentes formas de *Kernel* de acuerdo al

comportamiento frecuencial de la señal que se desea analizar. Por esta razón su nombre de Distribución Exponencial Inclinable Multiforme (*Multiform, Tilttable Exponential Distribution MTED*) que se define mediante la siguiente expresión:

$$\Psi_{MTED}(\tau, \nu) = \exp \left\{ -\pi \left[\mu^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{\nu}{\nu_0}; \alpha, r, \beta, \gamma \right) \right]^\lambda \right\}$$

donde

$$\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\nu}; \alpha, r, \beta, \gamma) = \tilde{\tau}^2(\tilde{\nu}^2)^\alpha + (\tilde{\tau}^2)^\alpha \tilde{\nu}^2 + 2r[(\tilde{\tau}\tilde{\nu})^\beta]^\gamma$$

y los parámetros involucrados en el Kernel deben cumplir con las siguientes condiciones:

α = potencia no negativa

λ = potencia positiva

τ_0 = constante de escala con valor positivo

ν_0 = constante de escala con valor positivo

r = parámetro de inclinación o rotación $\in [-1,1]$

β, γ = potencias acopladas que pueden tener valores (1,1) para no generar cambio, ó (2,1/2) para variar la magnitud $\tilde{\tau}\tilde{\nu}$.

La forma del Kernel se ajusta de acuerdo al tipo de señal que se desea detectar, por lo tanto la MTED presenta diferentes formas tales como *franjas paralelas, forma cruzada, copo de nieve, elíptica (no inclinada), elíptica (inclinada), diamante, hiperbólica y rectangular* (Antonio H Costa G. F.-B., 1995). Para el caso de las señales “chirp” lineal y cuadrática se debe utilizar las formas *franjas paralelas y forma cruzada* respectivamente. Esto se concluyó a partir de las experiencias realizadas con los diferentes Kernels ajustando su inclinación de acuerdo al comportamiento frecuencial a lo largo del tiempo y siguiendo las sugerencias del Doctor Antonio H. Costa durante la estancia en la Universidad de Massachusetts. Estas dos últimas formas

mencionadas para el caso de las señales “chirp” deben cumplir con los parámetros que se mencionan en la Tabla 1.

		Función Kernel	Limitaciones de los parámetros					
	TFR	$\Psi_{MTEd}(\tau, \nu)$	$\tau_0 \nu_0$	α	r	β	γ	λ
1	Franjas paralelas	$\exp\left\{-\pi\left[\mu^2\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{\nu}{\nu_0}; \alpha, \pm 1, 1, 1\right)\right]^\lambda\right\}$		$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1000}$	± 1	1	1	
2	Forma cruzada	$\exp\left\{-\pi\left[\mu^2\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{\nu}{\nu_0}; \alpha, -1, 2, \frac{1}{2}\right)\right]^\lambda\right\}$		$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1000}$	-1	2	$\frac{1}{2}$	

Tabla 1. Kernels utilizados para las señales “Chirp”.

Para ambos casos se deben seleccionar los parámetros $\tau_0 \nu_0$ y λ que mejor se ajusten a la señal de análisis tal como se explica en (Antonio H Costa, 1995).

3. DETECCIÓN DE SEÑALES CON EL OSCILADOR DUFFING

En este capítulo se pretende dar una idea al lector de cómo es posible detectar señales “chirp” mediante el uso del oscilador Duffing. Para lo cual se describe con detalle cada uno de los pasos que se realizaron antes de llegar a la propuesta final del sistema Duffing para detección de señales “chirp”. Allí se explica el funcionamiento completo y la metodología utilizada por el sistema para lograr obtener una representación gráfica de Tiempo-Frecuencia al igual que lo hacen las técnicas tradicionales de TF.

Tal como se mencionó en el capítulo 1 en la sección de antecedentes, el oscilador Duffing es una herramienta muy poderosa cuando se trata de detectar señales sinusoidales débiles cuya fase es una función lineal del tiempo, lo cual es equivalente a decir que su frecuencia se mantiene constante a lo largo del tiempo. Los resultados encontrados hasta ahora por los investigadores interesados en este tema, demuestran la alta capacidad de este oscilador frente a los niveles elevados de ruido.

En la actualidad las investigaciones se han basado en estudiar dicho oscilador solamente en señales cuya frecuencia no varía, pero las señales de frecuencia variables son también muy importantes en muchos campos de la ciencia. Al saber que el oscilador podía detectar las frecuencias de las señales de una manera tan precisa, se tuvo la idea de que también lo podría hacer en presencia de señales con frecuencia variable. Por tal razón se decidió proponer el estudio de señales “chirp” con este oscilador. Inicialmente no existía ninguna estrategia clara acerca de cómo se realizaría la detección de este tipo de señales y esto conllevó a realizar diferentes pruebas que permitieran tener una mayor idea del comportamiento del oscilador Duffing.

Se realizaron diferentes simulaciones y variaciones al sistema con el objetivo de ver los cambios en su respuesta.

El estudio de las técnicas convencionales de análisis de TF se realizó con el fin de tener un conocimiento amplio acerca de su funcionamiento y la manera como realizan la detección de las señales y estimar su frecuencia. Además era importante tener diferentes métodos con los que se pudiera comparar los resultados obtenidos con el sistema del oscilador Duffing.

Esta parte de la investigación generó la idea inicial de cual sería el posible método para poder realizar la detección de las señales con el oscilador Duffing. La STFT fue la metodología que originó la base de la nueva propuesta. Sabiendo que el oscilador Duffing es capaz de detectar de una manera muy precisa la frecuencia de señales con fase lineal, entonces surgió la idea de dividir la señal “chirp” en pequeñas ventanas de tiempo asumiendo que durante este corto periodo presentan una frecuencia que se puede considerar constante. A partir de este criterio se inició el desarrollo de la nueva metodología para análisis de TF. Fue necesario realizar diferentes pruebas con el fin de obtener los mejores resultados para lograr un método que fuera eficiente y con un error bajo en la estimación de la frecuencia real.

En este capítulo se describe cada una de las pruebas que se realizaron antes de obtener la metodología final para que lograra detectar señales “chirp” lineales, cuadráticas y en general cualquier tipo de frecuencia variable a lo largo del tiempo. Es importante resaltar que el sistema tiene la capacidad de detectar variaciones de frecuencia que no son solamente lineales sino cuadráticas y que corresponden a aceleraciones y desaceleraciones dentro de la misma señal, lo cual va más acorde con el efecto Doppler en situaciones reales.

Los resultados de las investigaciones previas demuestran que es posible detectar señales cuya relación SNR varía entre -23 dB y -29 dB aproximadamente. En las simulaciones realizadas durante el desarrollo de la investigación se logró llegar a una SNR de -28.5 dB para el caso de las señales sinusoidales de frecuencia constante. En un principio se esperaba que para el caso de las señales “chirp” se pudiera llegar también a estos niveles de ruido, pero debido a las variaciones de frecuencia y a la corta duración que tienen las ventanas de tiempo se produjo una reducción de la capacidad del sistema para lograr llegar a esos niveles tan elevados de ruido. Esto no significa que el sistema no logre detectar señales en presencia de ruido, por el contrario, indican que sí es posible y estos resultados se pueden ver también con más detalle en este capítulo.

3.1 SEÑALES SINUSOIDALES

Como se mencionó, las señales sinusoidales débiles o señales inmersas en niveles muy altos de ruido, son altamente detectables por el oscilador Duffing debido a sus propiedades caóticas. Por lo tanto lo primero que se realizó durante este trabajo fue analizar el comportamiento del oscilador con dichas señales mediante la simulación de la ecuación diferencial que representa el modelo del oscilador Duffing.

Para realizar las simulaciones se utilizó la plataforma de Matlab, la cual posee una herramienta llamada *ode45* que permite resolver ecuaciones diferenciales mediante el método iterativo de Runge-Kutta tal como se menciona en la ayuda de este software (www.mathworks.com). Por lo tanto se implementó una función de Matlab encargada de modelar tal ecuación diferencial para así generar una respuesta a la señal de entrada al sistema. La señal de entrada es una señal senoidal con ruido blanco Gaussiano con posibilidad de ajustar la SNR.

Con el sistema implementado, se realizó un GUI en Matlab que permitiera visualizar la respuesta del sistema y que a la vez permitiera realizar cualquier modificación de los parámetros del sistema según el criterio del usuario. La modificación de dichos parámetros es fundamental para ajustar el sistema de acuerdo a las señales que se desean medir. Una vez se tienen todos los parámetros del sistema ajustados, se puede iniciar a realizar la detección de señales sinusoidales. El principio de funcionamiento del sistema se basa en las transiciones entre el estado caótico y periódico del oscilador como ya se mencionó anteriormente en este documento.

Para mencionar un ejemplo del funcionamiento del sistema, se detalla a continuación los resultados obtenidos con una señal senoidal de prueba dada por:

$$y = 0.11 \cos(1.01t) + n(t) \quad 3-1$$

con $\omega = 1.01 \text{ rad/seg}$ la frecuencia de la señal, $n(t)$ el ruido aditivo y σ la desviación estándar del ruido.

Por lo tanto el modelo del sistema con su respectiva señal de entrada es:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0.51 \cos(t) + 0.11 \cos(1.01t) + n(t) \quad 3-2$$

La amplitud de la señal de referencia se ajustó en 0.51 ya que se debe fijar en un valor muy cercano al límite de la transición entre caos y periodicidad en tanto que la frecuencia es de $\omega = 1 \text{ rad/seg}$ por lo que se tiene un delta de frecuencia $\Delta\omega = 0.01 \text{ rad/seg}$. La frecuencia de muestreo utilizada para esta simulación es igual a cien veces la frecuencia fundamental de la señal de referencia ($f_s = 15.92 \text{ Hz}$ ó $\omega = 100 \text{ rad/seg}$). Esta frecuencia de muestreo se seleccionó con el fin de cumplir con el criterio de *Nyquist*. Aunque seleccionar una frecuencia de muestreo que sea cien veces mayor que la

frecuencia de la señal puede sonar exagerado, fue seleccionado este valor ya que con frecuencias de muestreo menores el sistema se torna un poco más lento debido al proceso iterativo de Runge-Khuta. Al tener una frecuencia de muestreo mayor no hay problema con la estimación de la señal en las iteraciones de la función ODE45, pero una vez mas el proceso se tarda más tiempo debido al incremento en el número de muestras para una señal con la misma duración.

Primero se aplica la señal de entrada sin ruido, por lo que es muy sencillo para el sistema lograr detectar la diferencia de frecuencia entre la señal de referencia y la señal de entrada, permitiendo medir de manera precisa la frecuencia de la señal tal como se ve en la siguiente imagen.

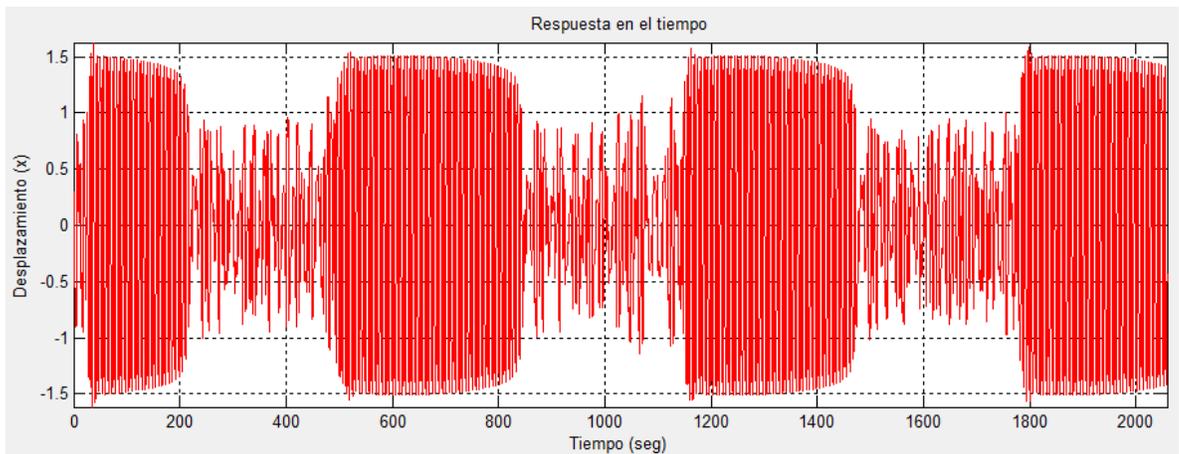


Figura 12. Respuesta del oscilador Duffing sin ruido.

Al medir los periodos de tiempo que tardan en ocurrir las transiciones es posible medir la diferencia de frecuencia entre la señal de referencia y la señal de entrada mediante la siguiente ecuación (Huang & Qin, 2009):

$$T = \frac{2\pi}{\Delta w} \quad 3-3$$

El periodo medido para el caso permite encontrar que la diferencia de frecuencia tiene un valor $\Delta\omega = 0.010053 \text{ rad/seg}$. Una vez conociendo este valor se puede calcular la frecuencia de la señal medida ya que se conoce la frecuencia de la señal de referencia. Por lo tanto se puede establecer que la frecuencia de la señal de entrada es $\omega = 1.010053 \text{ rad/seg}$. Este resultado muestra claramente la precisión con la que se puede medir la frecuencia de una señal.

3.1.1 DETECCIÓN CON RUIDO

Como la principal ventaja del oscilador Duffing es la detección de señales débiles o inmersas en niveles de ruido muy altos, es necesario definir los límites de operación en presencia de ruido. Por lo tanto se realizaron diferentes simulaciones modificando la SNR.

Se sabe que si se tiene una SNR de 0 dB es porque el ruido tiene la misma potencia de la señal que se desea medir y con esos niveles de ruido muchos sistemas fallan, o su precisión no es muy buena. Por lo tanto en un principio se le aplicó al sistema una señal con una SNR igual a 0 dB. Con la siguiente simulación que se realizó se demostró que para el oscilador Duffing este nivel de ruido no afecta las transiciones entre caos y periodicidad tal como se ve en la Figura 13.

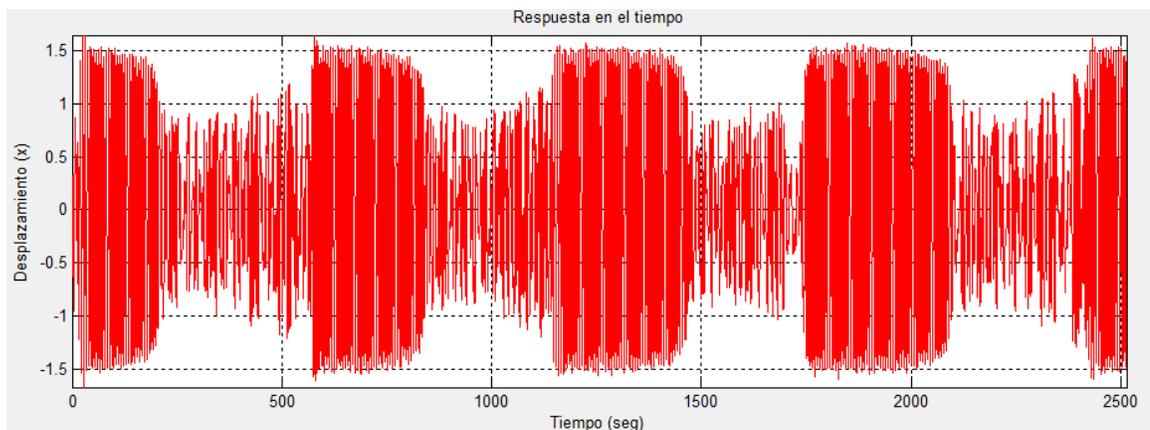


Figura 13. Respuesta del oscilador Duffing con 0 dB de SNR.

Aún con este nivel de ruido, es posible medir el periodo de las transiciones y en consecuencia estimar de una manera precisa la frecuencia de la señal aplicada al sistema. En este caso la diferencia de frecuencia estimada fue $\Delta\omega = 0.0103 \text{ rad/seg}$ y por lo tanto la frecuencia estimada de la señal de entrada es $\omega = 1.0103 \text{ rad/seg}$.

Finalmente después de continuar bajando el valor de SNR, se llegó a una relación señal a ruido de -24 dB. Con este nivel de ruido, el sistema aun presenta las transiciones entre el estado caótico y periódico, pero el periodo de las transiciones es medido con dificultad. La siguiente figura muestra la respuesta del oscilador Duffing y se pueden apreciar con cierta dificultad las transiciones.

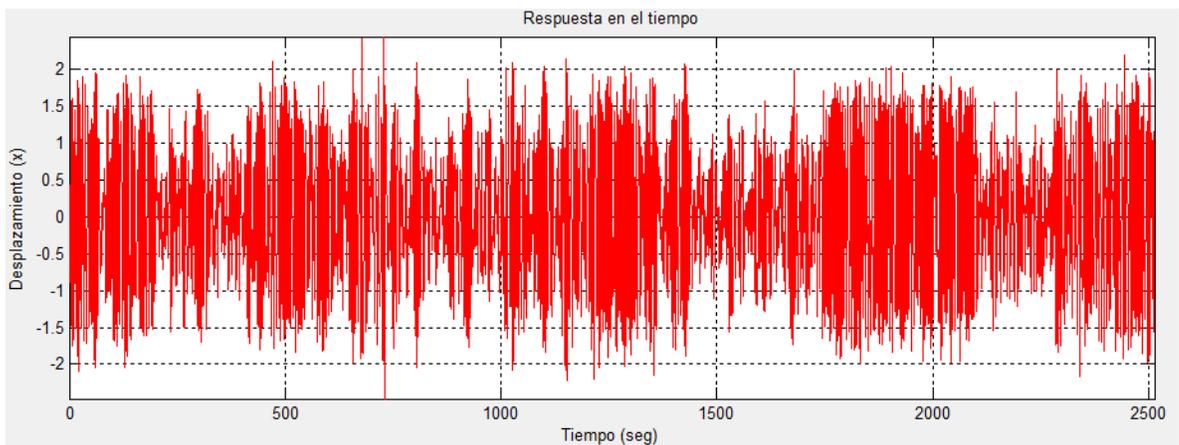


Figura 14. Respuesta del oscilador Duffing a -24 dB de SNR

A pesar del ruido y la dificultad de apreciar las transiciones, el periodo medido para este caso establece que existe una diferencia de frecuencia con un valor aproximado $\Delta\omega = 0.0090146 \text{ rad/seg}$ y por lo tanto la frecuencia estimada de la señal es $\omega = 1.0090146 \text{ rad/seg}$.

Este resultado confirma la robustez del sistema frente a niveles bajos de SNR, lo cual demuestra la ventaja que representa utilizar el oscilador Duffing como una herramienta para la detección con alta precisión para señales débiles.

3.2 ANÁLISIS ESPECTRAL

La respuesta del oscilador también fue analizada mediante el uso de la transformada de *Fourier*. Esto se realizó con el fin de obtener la información de frecuencia detectada después de aplicarle la señal de entrada al sistema. Con este estudio se pudo concluir que la frecuencia que se logra detectar en el espectro es la frecuencia de la señal de referencia y por lo tanto lo único que se podría decir es que la frecuencia de la señal de entrada al sistema está muy cercana a dicho valor estimado por el espectro.

En la Figura 15 se puede ver que se detecta claramente la frecuencia de referencia y además aparecen unas componentes adicionales que son causadas por la respuesta caótica del sistema. Estas componentes adicionales se pueden percibir también en el espectrograma de la Figura 16. El espectrograma genera una información adicional a la frecuencia de la señal, esta información es el periodo con el que ocurren de las transiciones, lo cual sería útil también para medir la diferencia de frecuencia entre la señal de entrada y la señal de referencia del sistema utilizando la ecuación 3-3.

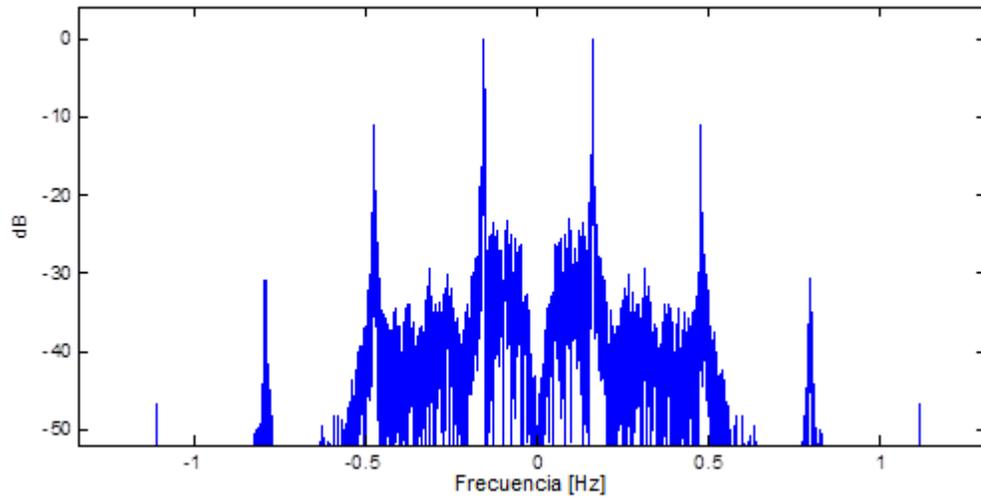


Figura 15. Espectro de la respuesta del oscilador para la señal sin ruido

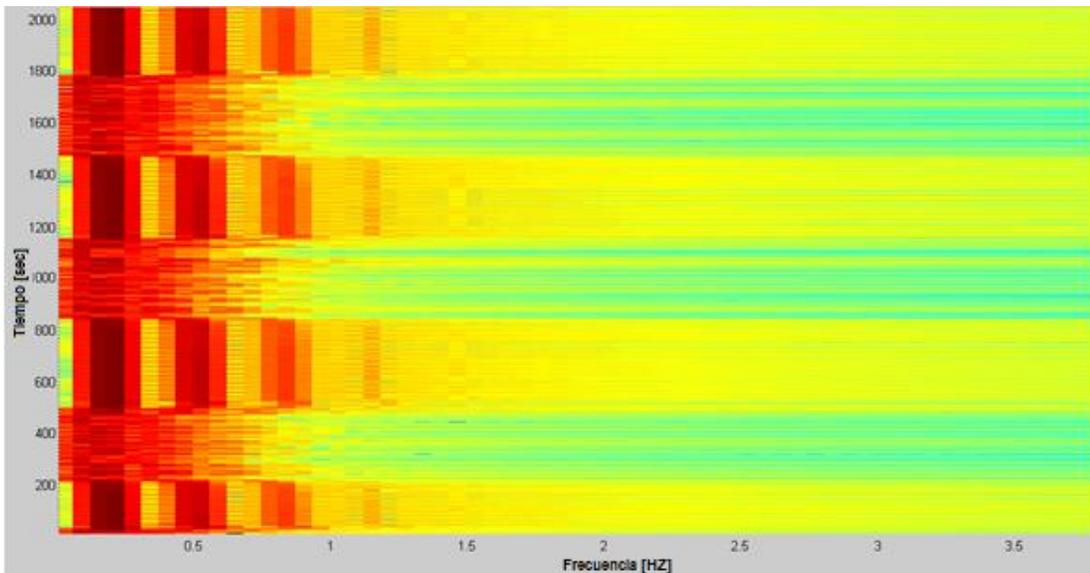


Figura 16. Espectrograma de la respuesta del oscilador sin ruido.

Por lo tanto es posible medir la frecuencia de la señal tanto en el tiempo como en el espectrograma. La desventaja de medirla en el espectrograma es que se necesita realizar un proceso adicional para calcularlo, mientras que la respuesta en el tiempo ya está entregando esa información sin ningún proceso adicional.

3.2.1 DETECCIÓN CON RUIDO

Al aplicar la transformada de Fourier directamente a la señal de entrada al sistema, es decir, sin utilizar el oscilador caótico, se puede apreciar que el ruido está presente en todo el espectro de la señal. Para el caso de una SNR de -24 dB lo anterior genera que la señal no se logre medir fácilmente tal como se ve en la Figura 17.

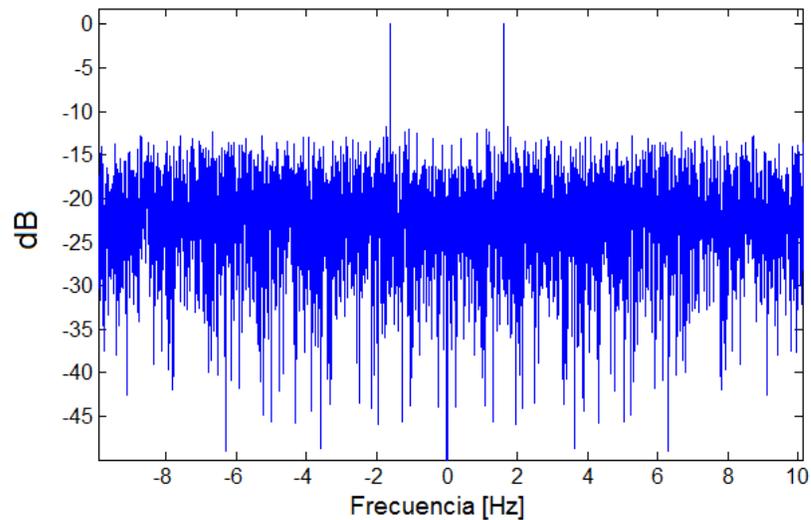


Figura 17. Espectro de la señal de entrada con SNR de -24 dB

Si se aplica el espectrograma directamente a la señal que se desea medir, ya ni es posible percibirla, ya que el ruido afecta todo el espectro y se pierde la información de la señal. Esto se puede ver claramente en la Figura 18.

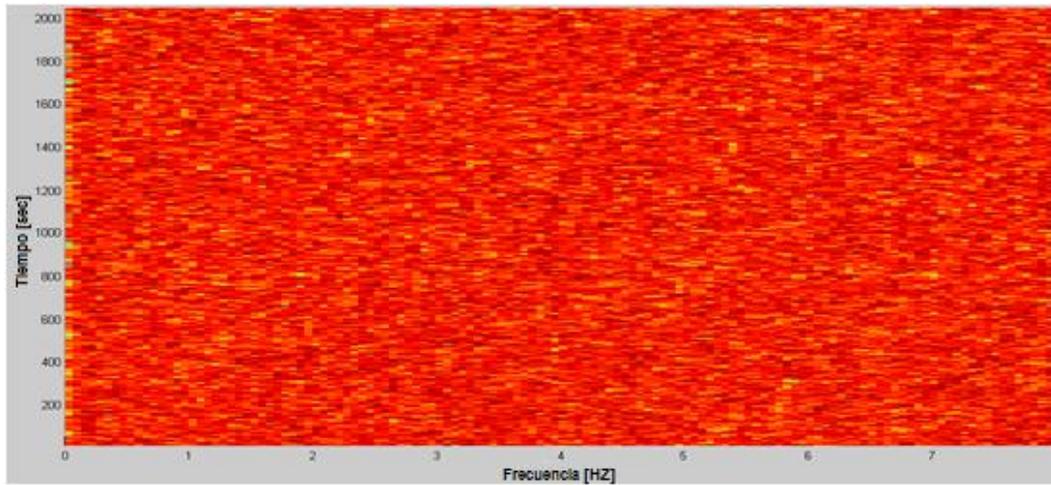


Figura 18. Espectrograma de la señal de entrada con SNR de -24 dB.

Cuando se utiliza el sistema del oscilador Duffing, se puede detectar la frecuencia de la señal de una manera más precisa ya que el sistema completo tiene una respuesta que puede interpretarse como si filtrara la señal dentro de la banda que contiene sus componentes espectrales. Este efecto de filtrado se puede apreciar tanto en el espectro como en el espectrograma de la salida del oscilador con la misma relación señal a ruido de -24 dB que se ha venido trabajando (ver Figura 19 y Figura 20). Se puede observar como el ruido ya no afecta el espectro de una manera tan notoria tal como si ocurre cuando se analiza la señal de entrada directamente.

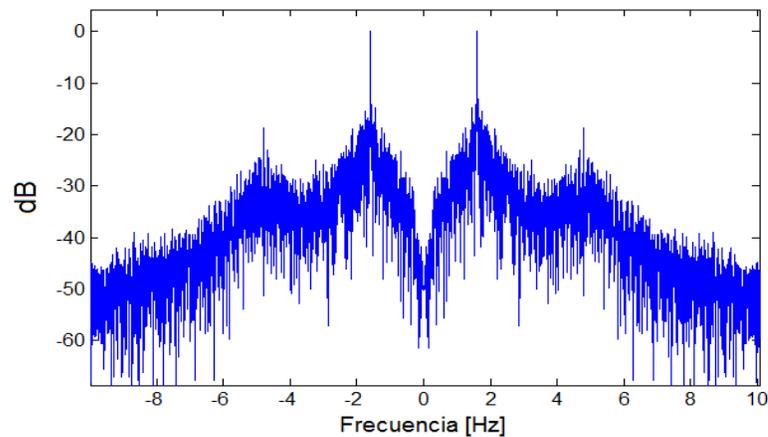


Figura 19. Espectro de la respuesta del oscilador con -24 dB de SNR.

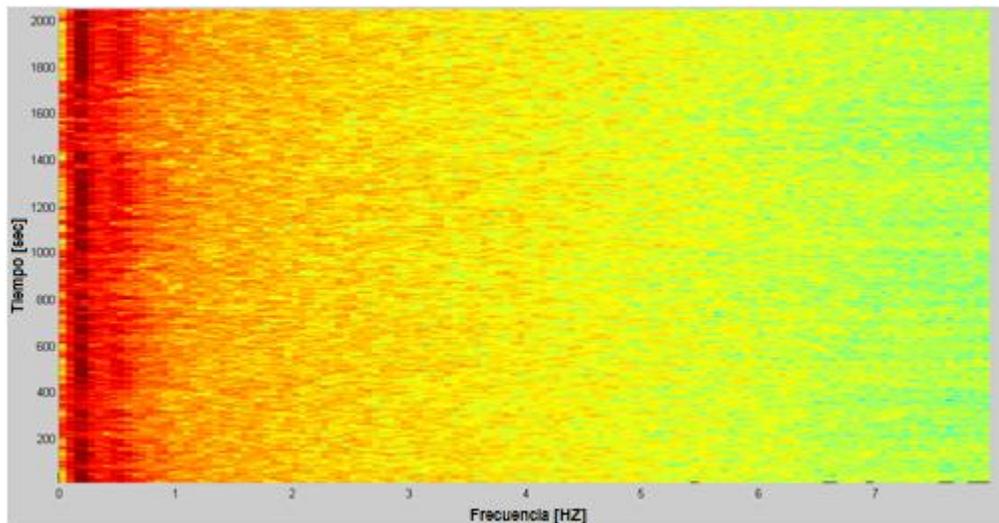


Figura 20. Espectrograma de la respuesta del oscilador con -24 dB de SNR.

Como ya se mencionó, el oscilador Duffing genera un efecto de filtrado a la señal, es por esta razón que el espectro se ve más limpio que cuando se aplica la transformada de *Fourier* directamente sobre la señal de entrada. Este resultado demuestra la robustez del oscilador ante las señales con ruido.

3.3 MEDICIÓN CON DUFFING SIN SEÑAL DE REFERENCIA

Basado en los resultados obtenidos en la sección anterior, se concluyó que la frecuencia detectada en el espectro es la frecuencia de la señal de referencia. Considerando este resultado se propuso utilizar el oscilador Duffing sin señal de referencia, es decir, aplicar directamente la señal que se desea medir al oscilador Duffing ya que se esperaba que la respuesta en frecuencia mostrara exactamente la frecuencia de la señal de análisis y así no sería necesario medir las transiciones entre caos y periodicidad.

Esta propuesta presentó buenos resultados cuando la señal aplicada no contenía ningún tipo de ruido, por lo tanto se esperaba que al aplicarle

niveles de ruido altos también se obtuviera la misma respuesta. Cuando se aplicó ruido a la señal no se obtuvieron tales resultados y por el contrario, se perdía la información de frecuencia de la señal de interés

El inconveniente de aplicar la transformada de *Fourier* directamente sobre la señal de respuesta del oscilador sin referencia, es que las componentes de frecuencia que aparecen por el efecto caótico se amplifican a medida que el ruido se hace mayor. Esto genera un error en la medición de la frecuencia ya que estas componentes de frecuencia tienen una mayor potencia que la misma señal que se está analizando. Además, a medida que el nivel de ruido aumenta estas componentes abarcan una mayor parte del espectro resultante a la salida del oscilador, lo cual va opacando la componente de frecuencia de la señal de interés (ver Figura 21).

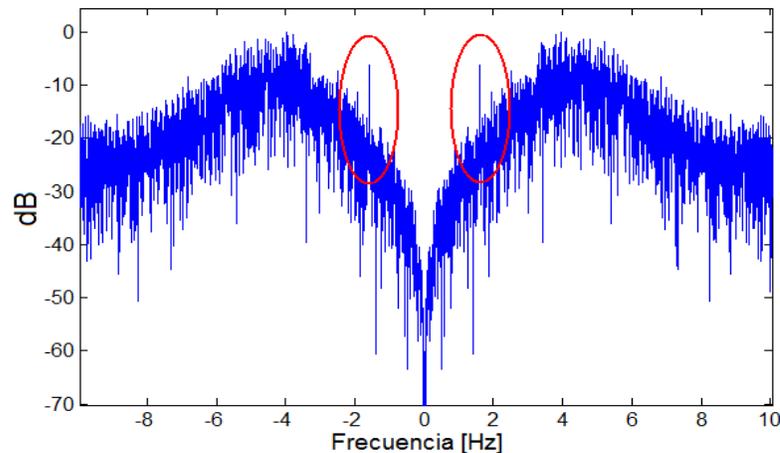


Figura 21. Espectro de la respuesta del oscilador sin señal de referencia con - 20 dB de SNR.

Los círculos de la gráfica encierran las componentes de frecuencia que pertenecen a la señal que se está analizando en el oscilador Duffing. Se puede apreciar claramente como empiezan a desaparecer entre de las

demás componentes de frecuencia que se generan como consecuencia del oscilador caótico en presencia de ruido.

A partir de los resultados obtenidos se demostró la importancia que tiene la señal de referencia en el sistema cuando la señal que se desea medir está inmersa en niveles altos de ruido. Esto se debe a que la característica más importante del oscilador Duffing son las transiciones entre caos y periodicidad causadas precisamente por existir una señal de referencia y una señal de entrada al sistema con un delta de frecuencia entre ellas.

3.4 MEDICIÓN DE SEÑALES “CHIRP”

Las señales “chirp”, a diferencia de una señal sinusoidal estacionaria, presentan cambios de frecuencia a lo largo del tiempo. Esto se debe a que tales señales presentan una aceleración en la fase y por lo tanto una frecuencia variable con el tiempo. El modelo matemático que representa una señal “chirp” puede escribirse por la ecuación:

$$y = A * \cos (\omega t + \dot{\omega} t^2)$$

donde la fase es

$$\varphi(t) = \omega t + \dot{\omega} t^2$$

por lo que la frecuencia instantánea es:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega + 2\dot{\omega}t$$

lo que indica claramente que la frecuencia tiene un crecimiento lineal a medida que transcurre el tiempo como se ve en el ejemplo ilustrativo de la Figura 22.

Cuando es necesario muestrear señales “chirp”, se debe tener en cuenta que la frecuencia de muestreo debe cumplir con el criterio de Nyquist para la frecuencia más alta que pueda tener dicha señal ya que si cumple para la frecuencia alta por ende se cumple para las frecuencias inferiores y particularmente para la más baja. Así, en las simulaciones que se realizaron con señales “chirp” se seleccionó una frecuencia de muestreo que fuera 100 veces la frecuencia inicial de la señal. Este valor funcionó correctamente ya que también se seleccionó una aceleración que con tal frecuencia de muestreo se alcanzaba a muestrear 70 veces el valor de la frecuencia más alta de la señal.

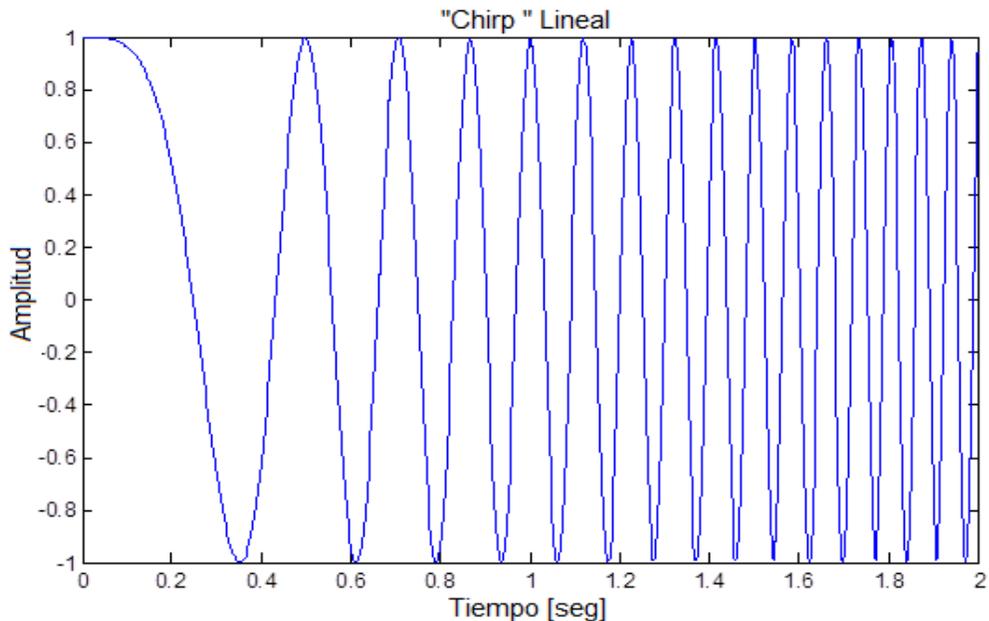


Figura 22 Señal chirp con $\omega = 0.1$ rad/se y $\dot{\omega} = 25$ rad/seg²

3.4.1 DETECCIÓN CON SEÑAL DE REFERENCIA “CHIRP”

Para la medición de las señales “chirp” lo primero que se propuso fue medir la señal utilizando una señal “chirp” como “referencia”, de esta forma la señal de referencia tendría la misma forma que la señal de entrada al sistema. Esto

se hizo con el fin de encontrar las variaciones de los periodos en las transiciones de caos a periodicidad causadas por la aceleración de la señal. El modelo del sistema con una señal de referencia “chirp” se representa mediante la siguiente ecuación del oscilador Duffing pero con la correspondiente señal de excitación “chirp”:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = F_r \cos(\omega t + \dot{\omega}t^2) + A \cos[(\omega + \Delta\omega)t + (\dot{\omega} + \Delta\dot{\omega})t^2 + \varphi] + n(t)$$

Al utilizar una señal “chirp” como referencia para el sistema, es posible medir las transiciones entre los estados caótico y periódico, pero aparece una nueva variable debido a la aceleración del sistema. Esta variable es la variación con la que va cambiando el delta de tiempo entre las transiciones y por lo tanto estas transiciones tienen dos variables implícitas. Las dos variables que aparecen en la respuesta del oscilador caótico son los deltas de tiempo debidos a la diferencia en frecuencia y la diferencia en los cambios de frecuencia que existen entre la señal de referencia y la señal que se desea medir. Al existir dos variables implícitas en la duración con la que ocurren las transiciones del oscilador, no es posible reconocer cada una de ellas de manera independiente.

Para ilustrar el efecto anterior, se muestra a continuación un ejemplo donde la señal “chirp” utilizada está representada por la siguiente ecuación:

$$y = 0.7 \cos[(1.015)t + (0.0001)t^2]$$

y el modelo del sistema para este caso en ausencia de ruido está representado mediante la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 1 \cos(t + 0.0001 * t^2) + 0.7 \cos(1.015t + 0.0001 * t^2)$$

Al aplicarle esta señal al oscilador Duffing se obtiene una respuesta en el tiempo tal como se ve en la Figura 23. La figura muestra claramente como el delta de tiempo entre las transiciones cada vez se hace menor por causa de la aceleración de la señal. Además se puede observar como la amplitud de la respuesta va aumentando a medida que la frecuencia también lo hace. Este aumento en la amplitud se debe a que, a medida que aumenta la frecuencia de la señal, el umbral en el que ocurre la transición de caos a periodicidad también aumenta cuando el modelo del espacio de estados del sistema no esta multiplicado por la frecuencia de la señal de referencia (ver ecuación 2-3).

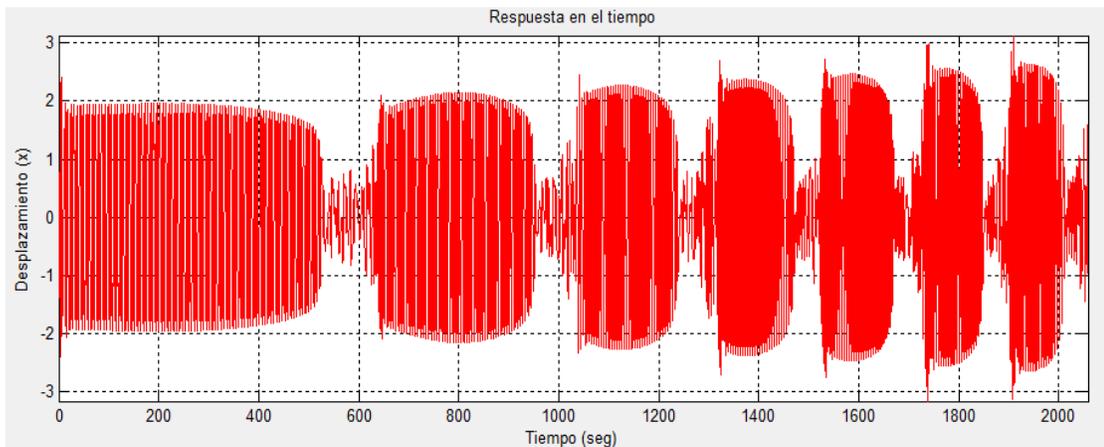


Figura 23. Respuesta del oscilador Duffing sin ruido.

Esta respuesta del oscilador Duffing también es posible analizarla en frecuencia. Al aplicarle la transformada de *Fourier* a la respuesta del oscilador Duffing, pueden apreciarse las frecuencias que ocupa la señal a lo largo de todo el espectro, pero no es posible detectar en que instante de tiempo ocurre cada frecuencia como era de esperarse (ver Figura 24).

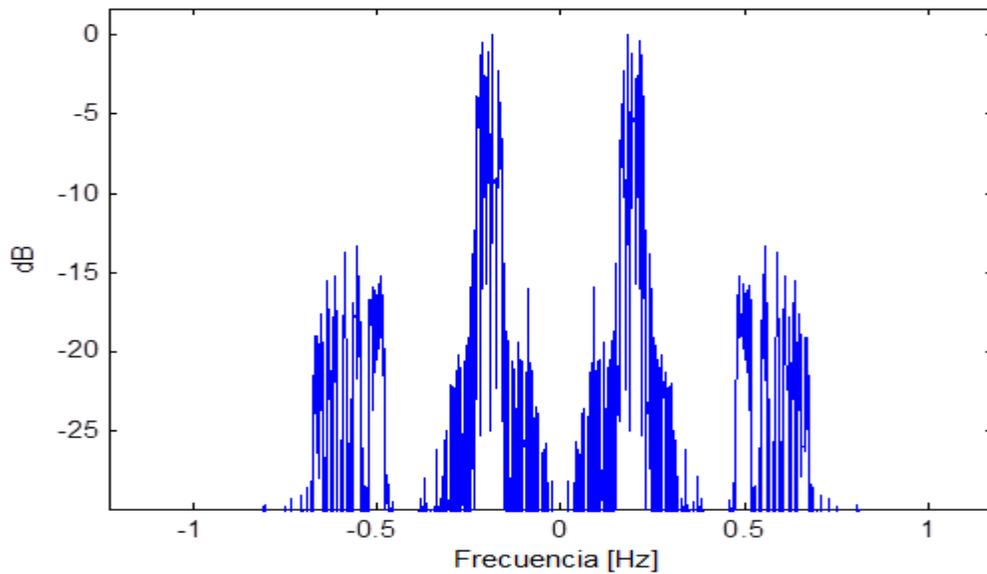


Figura 24. Espectro de la respuesta del oscilador sin ruido.

En el espectro se ve claramente como aparecen otras componentes de frecuencias mayores que se generan debido al efecto caótico del oscilador, las cuales se apreciarían aún menos a medida que se adicionaría ruido a la señal, por lo que se generarían mayores errores en la medición de la frecuencia de la señal.

Por otro lado, si se utiliza un espectrograma es posible observar cómo cambia la frecuencia en cada instante de tiempo, pero la frecuencia detectada es la frecuencia de la señal de referencia y no de la señal medida tal como ocurre para el caso de una senoidal pura. Además de la frecuencia instantánea, también se logra ver las transiciones que ocurren entre caos y periodicidad. La Figura 25 muestra el espectrograma de la respuesta del oscilador y se puede ver que en esta representación gráfica también es posible medir la duración de los deltas de tiempo y se resaltan las componentes de frecuencia adicionales que aparecen por el efecto caótico como ya se mencionó.

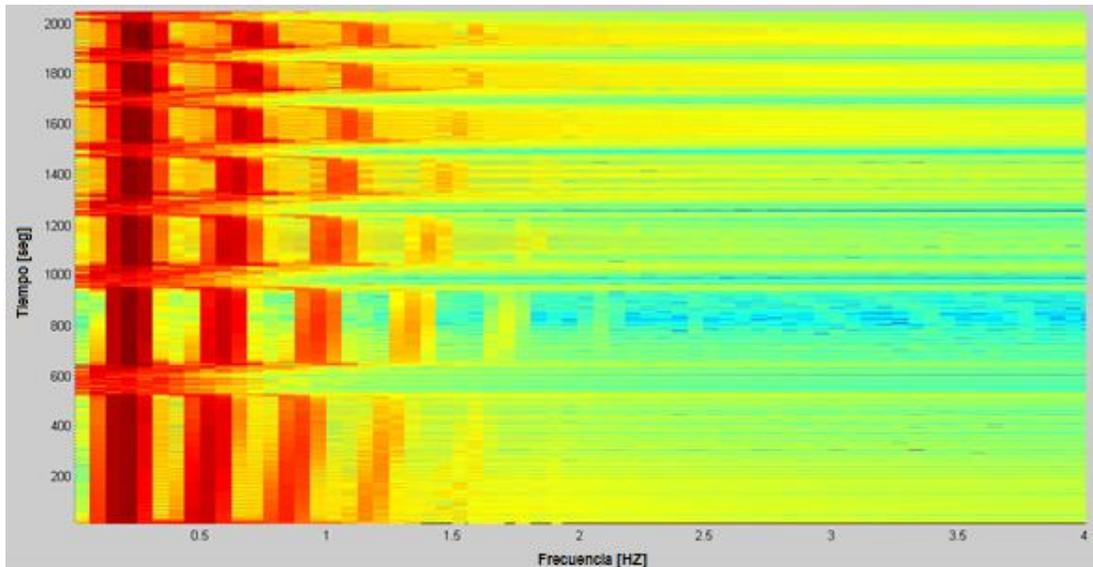


Figura 25. Espectrograma de la respuesta del oscilador sin ruido.

3.4.1.1 DETECCIÓN CON RUIDO

Cuando se aplica una señal con ruido, aún es posible detectar las transiciones entre los dos estados, lo cual significa que sería posible medir las señales “chirp” con niveles bajos de SNR. Para comprobar esto se realizaron simulaciones a diferentes niveles de SNR llegando a -15 dB. La señal utilizada para efectuar estas pruebas es la misma que se mencionó como ejemplo para el caso sin ruido.

El modelo del sistema con ruido se ve representado mediante la ecuación:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 1 \cos(t + 0.0001 * t^2) + 0.7 \cos(1.015t + 0.0001 * t^2) + n(t)$$

La respuesta del oscilador a -15 dB de SNR se puede ver en la Figura 26. En esta imagen se observa como las transiciones aún se pueden ver y medir a pesar de la dificultad inherente.

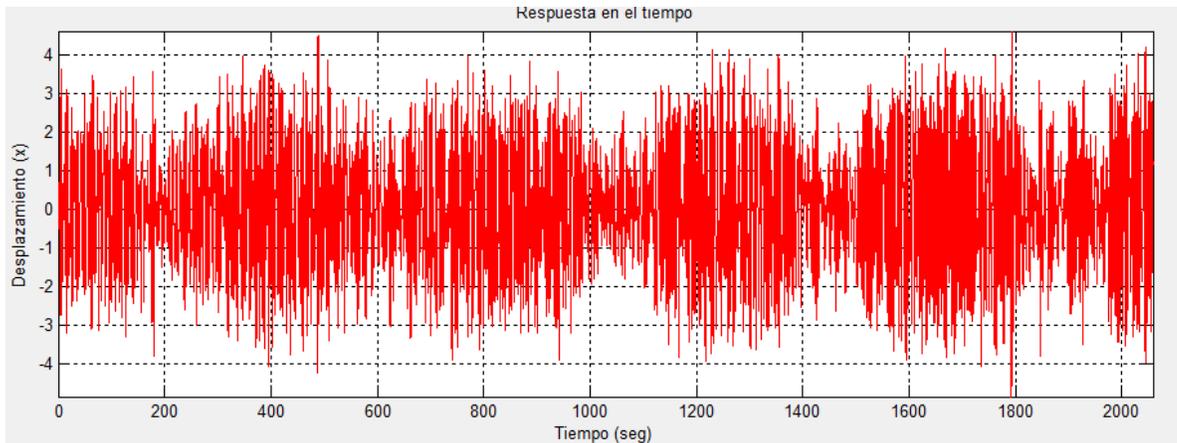


Figura 26. Respuesta del oscilador a -15 dB de SNR para una señal “chirp”, usando una señal de referencia “chirp”.

El cálculo de la respuesta en frecuencia y el espectrograma para este caso, permiten ver la frecuencia de la señal de referencia y las transiciones que ocurren a lo largo del tiempo. Como ya se mencionó anteriormente, a medida que el ruido se incrementa las componentes de frecuencia que aparecen debido al efecto caótico interfieren con la medición exacta de la frecuencia de la señal (ver Figura 27 y Figura 28).

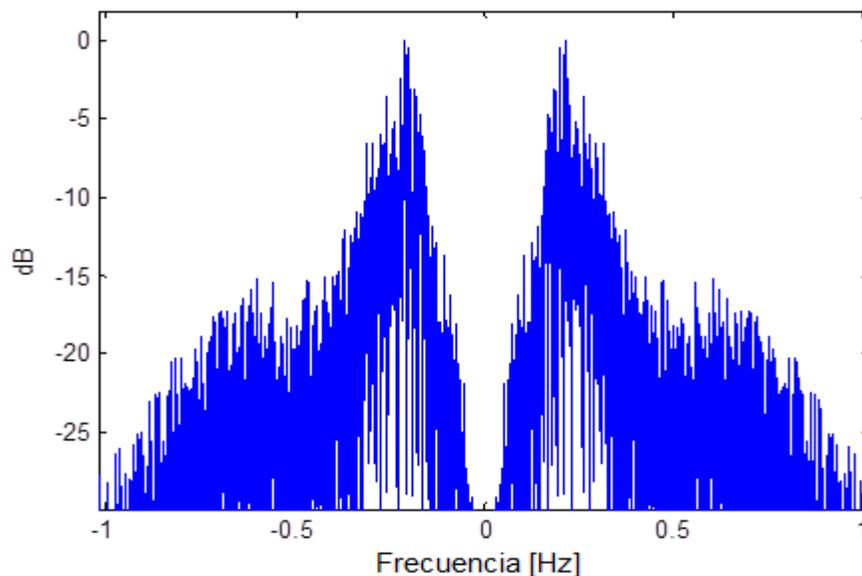


Figura 27. Espectro de la respuesta del oscilador a -15 dB SNR.

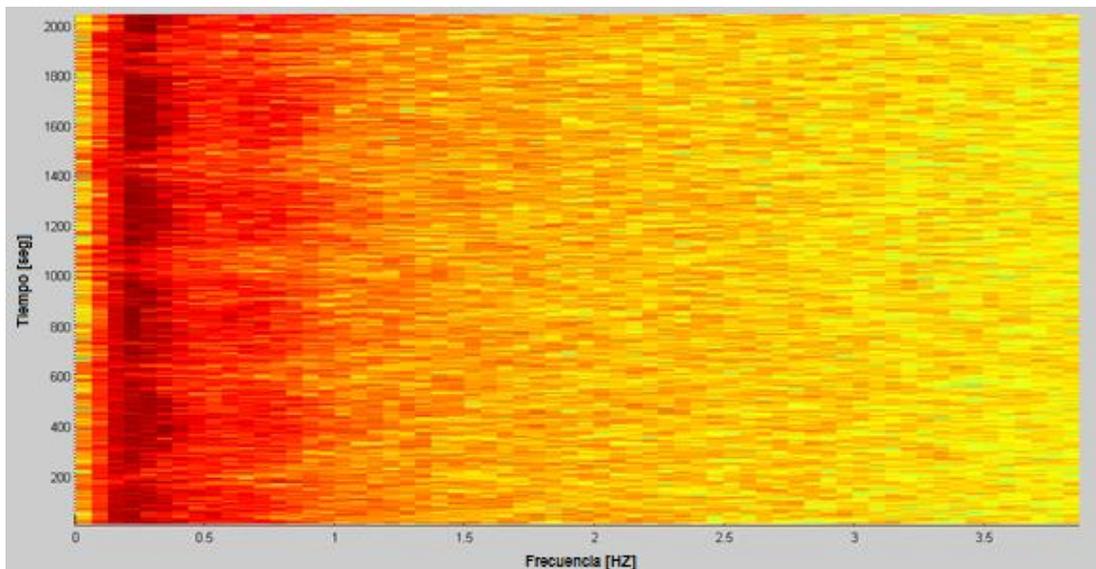


Figura 28. Espectrograma de la respuesta del oscilador a -15 dB de SNR.

El inconveniente que presenta este método es el efecto de tener dos variables implícitas en los deltas de tiempo, lo cual no permite medir por separado cual es el delta de frecuencia y el delta en la aceleración de la señal.

Esta experiencia previa permite concluir además que existe otra limitación debido a la señal de referencia ya que para utilizar una señal de referencia “chirp” sería necesario conocer de antemano la señal que se desea medir para ajustar los parámetros de frecuencia y aceleración como referencia. Esto implica saber si la señal “chirp” es de orden dos o superior, lo cual es poco práctico si se desea medir una señal que puede tener otro tipo de variaciones en su frecuencia. Por tanto, para tratar de subsanar esto, se plantea la necesidad de experimentar con una señal de referencia monocromática para detección de señales “chirp”; lo cual se discute a continuación.

3.4.2 DETECCIÓN CON SEÑAL DE REFERENCIA SENOIDAL MONOCROMÁTICA

Para evitar el uso de la señal “chirp” como referencia, se propuso utilizar una señal senoidal como referencia para medir una señal “chirp” y de esta forma se esperaba lograr detectar la diferencia de frecuencia $\Delta\omega$. Al utilizar este método propuesto, se encontró un inconveniente al medir las señales ya que la referencia senoidal no es capaz de seguir por mucho tiempo la señal “chirp”. A medida que la señal “chirp” se va acelerando va aumentando su frecuencia, mientras que la referencia senoidal mantiene una frecuencia fija y los deltas de tiempo cada vez se hacen más pequeños hasta el punto que es prácticamente imposible medirlos (ver Figura 29).

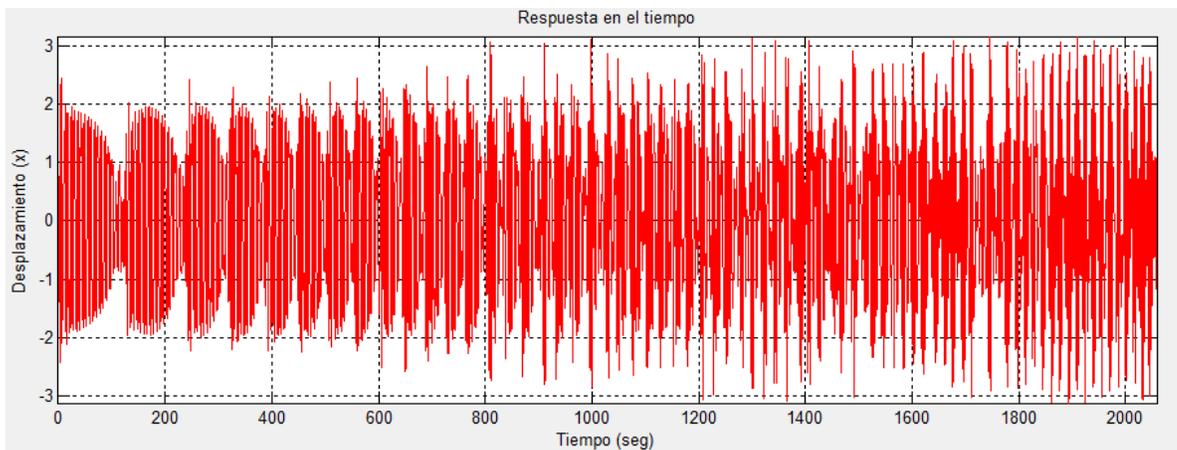


Figura 29. Respuesta del oscilador con referencia “coseno” para una señal de entrada “chirp”.

En conclusión, este resultado resalta la importancia de tener una señal de referencia con la misma forma que la señal de entrada al sistema. Sin embargo, de acuerdo a la sección anterior, al tomar como base los resultados obtenidos hasta el momento en cuanto a la medición de señales “chirp”, se concluyó que no es práctico medir las variaciones de frecuencia utilizando una señal de referencia “chirp”. Esto se debe a la dificultad para diferenciar

los deltas de frecuencia y aceleración por separado cuando se miden los deltas de tiempo en la respuesta del oscilador. Pero esto, irremisiblemente conlleva a que, como ya se mencionó antes, se debería conocer el tipo de cambios en la frecuencia presentes en la señal para definir una señal de referencia lo más parecida posible.

Como el objetivo principal de este trabajo es lograr medir señales “chirp” con el oscilador Duffing, entonces, fue necesario plantear un método que permitiera lograr sobrepasar las dos limitaciones de las dos secciones anteriores.

3.5 ARREGLO DE OSCILADORES

Considerando que al momento de utilizar un solo oscilador Duffing existen limitaciones que impiden lograr medir una señal cuya frecuencia varía dentro de un rango definido. No es recomendable medir señales cuyo $\Delta\omega > 0.04$ rad/seg tal como lo menciona (Huang & Qin, 2009) ya que es difícil percibir el caos intermitente. Esto se debe a que $F(t)$ cambia tan rápido que el sistema no es capaz de responder bien y las transiciones entre caos y periodicidad ocurren muy rápido.

Surge la idea de tener un banco de osciladores Duffing tal que al cada oscilador detecte una sección de la señal “chirp” en donde pudiera considerarse constante la variación de frecuencia en el tiempo. La idea original del método propuesto, se basó en tomar ventanas en el tiempo de la señal “chirp” completa con un número determinado de muestras tal como ocurre con la STFT y particularmente la ventana

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

cuya figura es

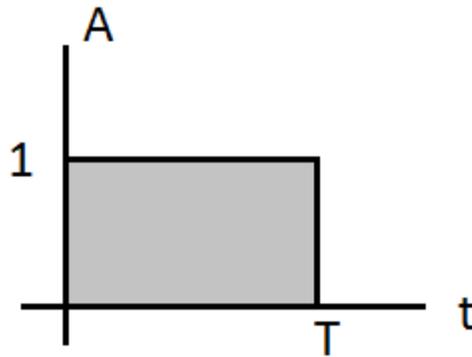


Figura 30. Ventana Rectangular

Las señales “chirp” presentan diferentes frecuencias a lo largo del tiempo, por tal razón si se desea medir una ventana que se ha tomado de dicha señal es necesario tener un oscilador Duffing cuya frecuencia se encuentre cercana a la frecuencia promedio de dicha ventana de análisis. Para lograr obtener un oscilador cuya frecuencia de referencia se encuentre cercana a la frecuencia de la señal medida, se utilizó un arreglo de osciladores Duffing.

La Figura 31 muestra la forma como se realiza la obtención de las ventanas de la señal completa. Estas ventanas son cuadradas ya que se debe conservar la forma original de la señal. En este caso considerar tomar ventanas con forma Gaussiana o ventanas Hamming no es conveniente debido a que en el caso del oscilador Duffing no se realiza ninguna transformación de tiempo a frecuencia durante el procesamiento de la señal. Por lo tanto no existe ningún efecto secundario causado por la convolución en el espacio frecuencial como si ocurre con la transformada de *Fourier* y que justifica utilizar ventanas con formas distintas a la cuadrada.

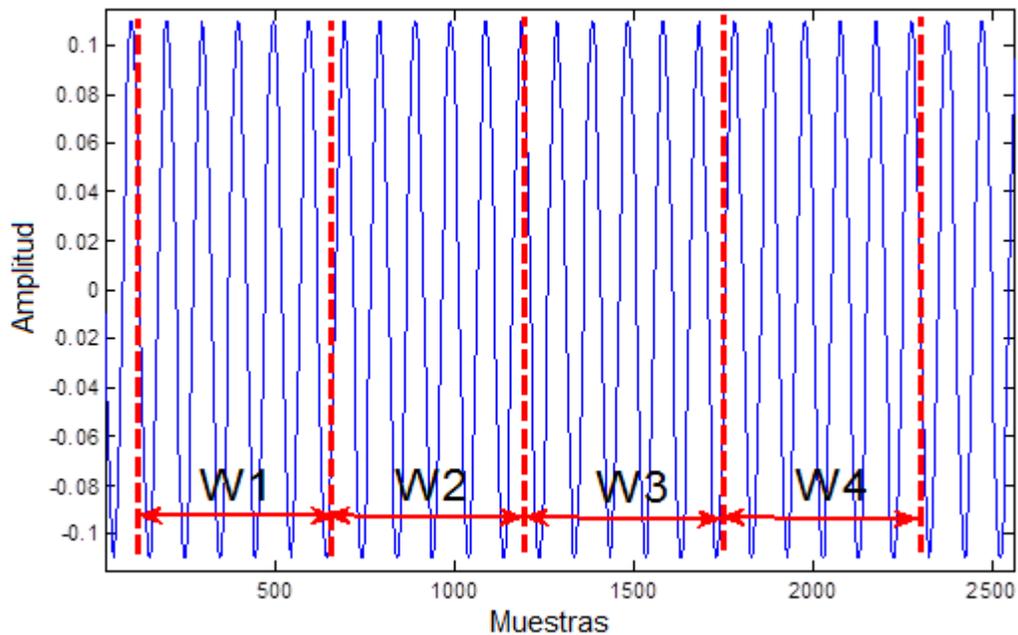


Figura 31. Enventanado de la señal.

El arreglo de osciladores se utiliza con el fin de lograr abarcar un mayor rango de frecuencias ya que con uno solo no es posible. Los experimentos originales con un solo oscilador permitió darse cuenta que solo se abarcaría un rango de frecuencias de 0.08 rad/sec alrededor de su frecuencia de referencia $\omega_c = 1 \text{ rad/sec}$ tal como se ilustra en la Figura 32, así, en forma heurística se puede decir que sería el 8% alrededor de la frecuencia de referencia.

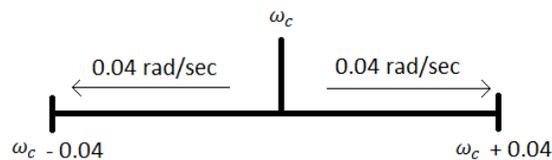


Figura 32. Rango de frecuencias teórico abarcado por un Oscilador Duffing.

Por lo tanto, al agrupar un número determinado de osciladores se logra obtener un mayor intervalo para detectar la frecuencia de la señal deseada, teniéndose al final un arreglo de osciladores Duffing. En la Figura 33 se

ilustra la forma como se aumenta el intervalo de frecuencias con un arreglo de n osciladores.

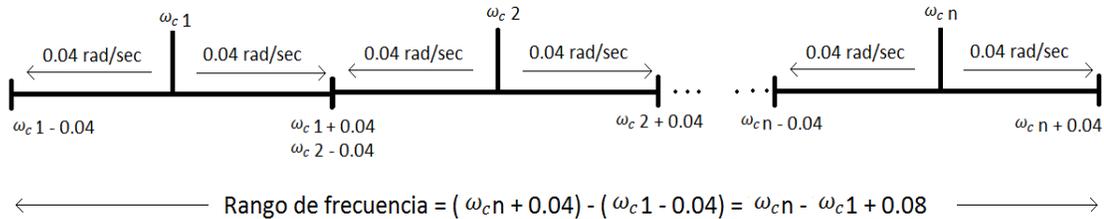


Figura 33. Arreglo de osciladores Duffing.

Este arreglo de osciladores está en capacidad de detectar cualquier frecuencia que se encuentre dentro del intervalo $\omega_{cn} - \omega_{c1} + 0.08$. Así, si se toma una de las ventanas obtenidas de la señal original y se aplica al sistema comprendido por el arreglo de osciladores se puede detectar la frecuencia de dicha ventana correspondiente a cada uno de los osciladores del arreglo. Esto es, si definimos la primera señal $X_1(t)$ que se obtiene al multiplicar la ventana rectangular W_1 con la señal que se está midiendo, se puede ilustrar como es el procedimiento para medir la frecuencia de $X_1(t)$. La señal $X_1(t)$ se debe analizar por todos los osciladores que se encuentran en el arreglo (ver Figura 34). Cada uno de los osciladores genera una respuesta en el tiempo que presenta transiciones entre caos y periodicidad. Debido a que los osciladores se encuentran ubicados a diferentes frecuencias de referencia, cada uno de ellos genera una respuesta diferente pero que debe ser consistente con la frecuencia detectada por los demás osciladores para finalmente obtener una frecuencia promedio de valor ω_a .

Posteriormente se realiza el mismo procedimiento para cada una de las ventanas obtenidas hasta finalizar un barrido por toda la señal que se desea detectar. Por lo tanto para las ventanas W_2, W_3 hasta W_n se obtendrían las frecuencias ω_b, ω_c hasta ω_x respectivamente. Por lo que al realizar el barrido

por toda la señal utilizando ventanas de tiempo corto, se logra medir con precisión la frecuencia instantánea de la señal.

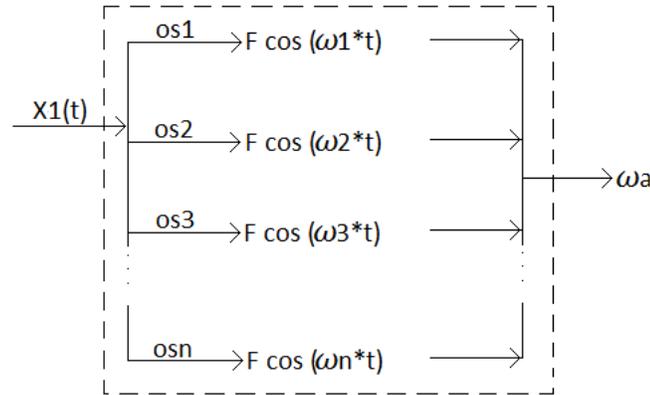


Figura 34. Arreglo de osciladores.

Es necesario hacer notar que, experimentalmente, se logra mayor precisión en la medición cuando se traslapan las ventanas ya que los saltos de ventanas a lo largo de la señal son más suaves tal como ocurre con la STFT. Para el caso del traslape de ventanas, la heurística experimentada sugiere que el investigador debe definir el número de muestras que quiere traslapar de acuerdo a lo deseado por el mismo considerando que, a medida que se traslapen más muestras, se logra una mejor precisión en la medición de frecuencia instantánea pero con la desventaja de que el proceso se vuelve más lento. La Figura 35 muestra un esquema de la forma como se realiza el barrido por toda la señal con traslape de ventanas al 50%.

Ya se mencionó que cada uno de los osciladores genera una respuesta diferente debido a que cada uno de ellos tiene una frecuencia de referencia distinta. La respuesta de cada oscilador presenta transiciones entre los estados caótico y periódico como era de esperarse, pero el número de transiciones depende de que tan alejado se encuentre el oscilador de la frecuencia de la señal. Es por esta razón que se aprecia otra ventaja al usar

los osciladores Duffing pues permiten medir con precisión el valor de los deltas de tiempo presentes en las respuestas de cada oscilador.

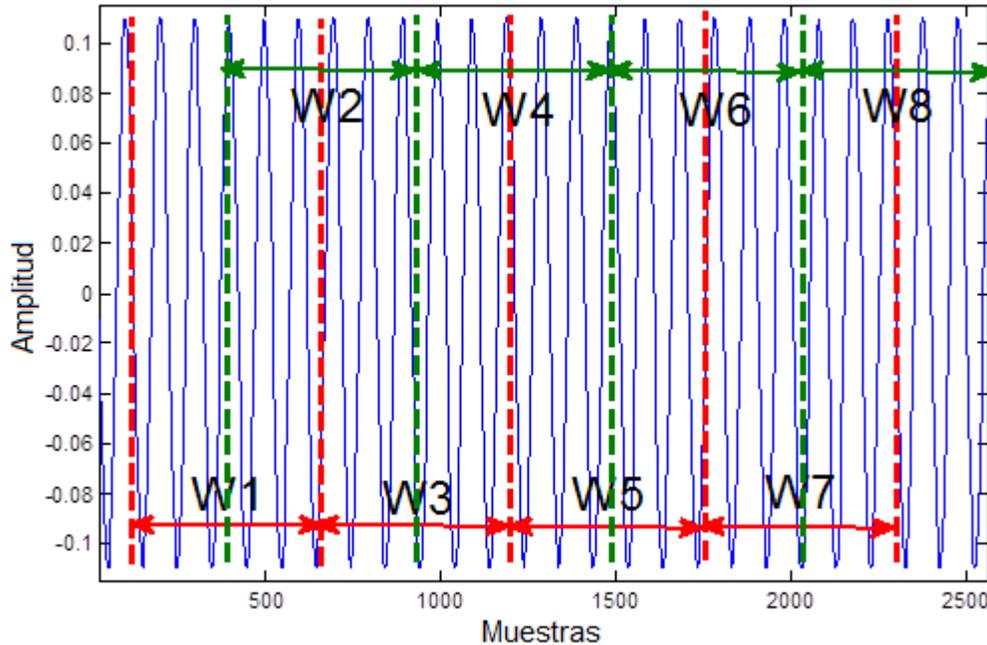


Figura 35. Detección de frecuencia utilizando traslape de ventanas.

3.5.1 MEDICIÓN DE LOS DELTAS DE TIEMPO Δt

Para medir los deltas de tiempo Δt fue necesario diseñar una metodología para que se midiera automáticamente y no manualmente como se suele hacer. El método está basado en la medición de umbrales tanto en amplitud como en separación de puntos máximos. Cuando observamos la respuesta del oscilador Duffing se ve claramente que el estado periódico presenta una mayor amplitud que el estado caótico (ver Figura 36). Por lo tanto el primer paso es detectar cuales puntos de la señal tienen una amplitud que está por encima de cierto umbral (por ejemplo 1.5 de amplitud para el caso de la Figura 36), lo cual significa que esos puntos encontrados pertenecen a estados periódicos.

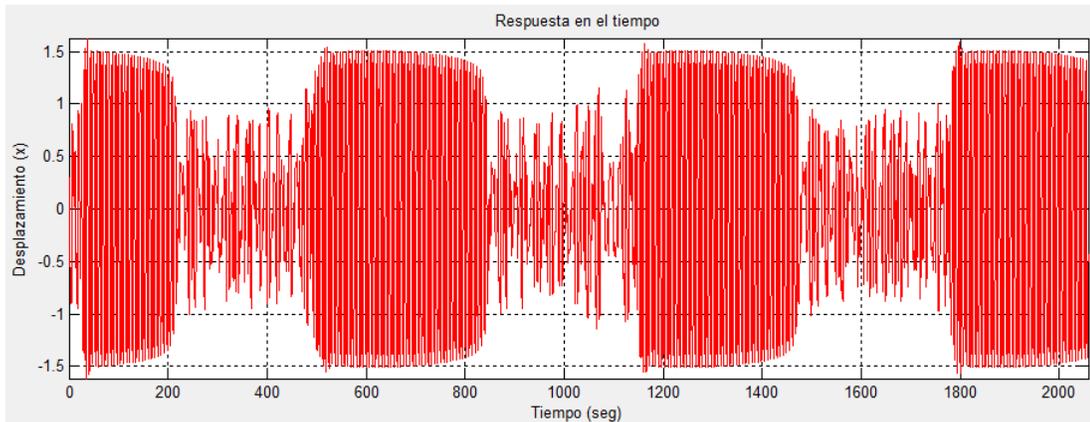


Figura 36. Respuesta del oscilador Duffing.

El siguiente paso es identificar cuales puntos pertenecen al mismo estado periódico y cuales son de diferente estado. Una vez que se han identificado los puntos que pertenecen a diferente periodo se debe medir la distancia que existe entre cada uno de ellos y esta distancia equivale al periodo o Δt de la respuesta. Dentro de la respuesta del oscilador se van a encontrar varias transiciones, por lo tanto se promedian todos los deltas de tiempo encontrados y este es el delta final para la respuesta de dicho oscilador. Finalmente después de encontrar el delta de tiempo se puede calcular el delta de frecuencia que existe entre la señal de referencia y la señal medida para encontrar la frecuencia de la señal. Al calcular la frecuencia de la señal se debe tener en cuenta la frecuencia de referencia del oscilador para sumarle o restarle el delta de frecuencia $\Delta\omega$ según sea el caso.

Es importante resaltar que el oscilador Duffing identifica el delta de frecuencia de la señal con respecto a la frecuencia de referencia pero no identifica si es mayor o menor. Por esta razón se debe identificar para saber con precisión si se debe sumar o restar la diferencia de frecuencia. Para lograr esto se debe medir el número de transiciones que presenta cada oscilador ya que el oscilador que genere el menor número de transiciones es el que se encuentra más cercano a la frecuencia de la señal. Al identificar cual es el oscilador más

cercano a la frecuencia ya se sabe si se debe sumar o restar el $\Delta\omega$ porque se conoce la posición de los demás osciladores.

Una vez que se tiene la frecuencia calculada por cada oscilador, ya se puede obtener una frecuencia promedio de todas las respuestas obtenidas. Este resultado sería el entregado por el arreglo completo de osciladores y por lo tanto sería la frecuencia de la ventana analizada después de este proceso. Finalmente se debe repetir el mismo procedimiento para todas las ventanas. El diagrama de bloques de la Figura 37 explica con mayor claridad tal proceso.

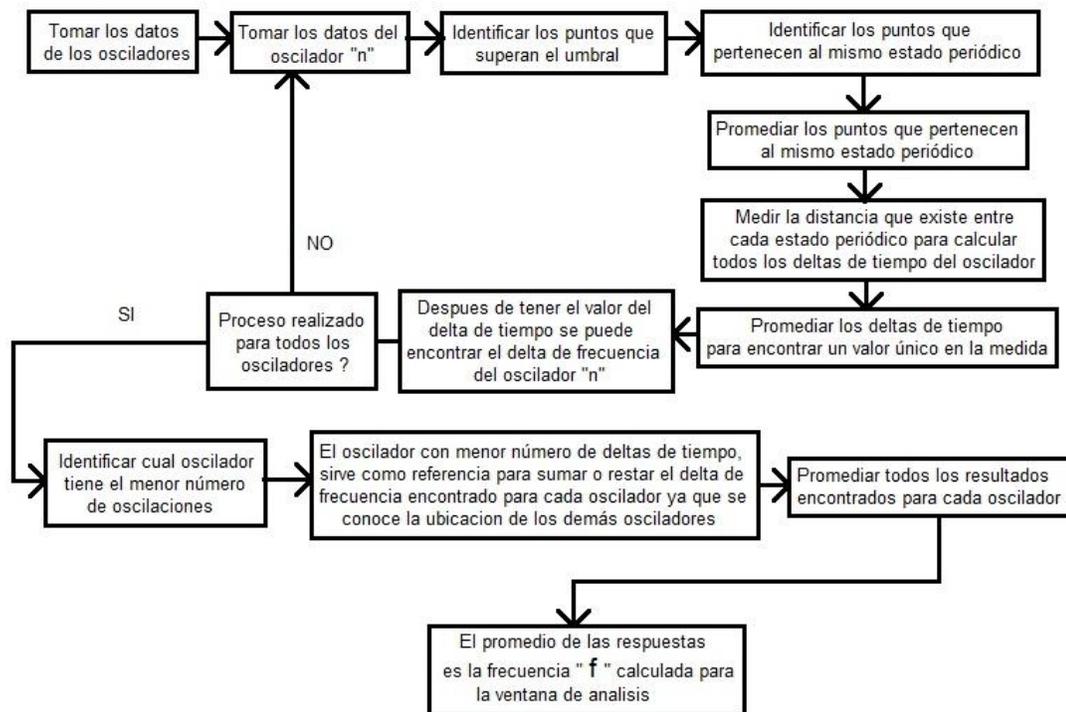


Figura 37. Diagrama de bloques que representa el método para medir la frecuencia de las ventanas de análisis.

3.5.2 RESPUESTA DEL ARREGLO DE OSCILADORES

Para mostrar un ejemplo de las respuestas que se generan cuando se utiliza el arreglo de osciladores, se tomaron 5 osciladores separados 0.1 rad/seg para una señal cuyo intervalo de frecuencias es de 1 rad/seg hasta 1.4 rad/seg sin ruido. Se tomaron ventanas de 2048 muestras y un traslape de 1024 muestras, es decir, un traslape del 50%.

La Figura 38 muestra la respuesta de los 5 osciladores para una de las ventanas analizadas. En ésta se ve que el oscilador 4 es el que presenta un menor número de iteraciones, lo cual significa que es el oscilador más cercano a la frecuencia instantánea de la señal. Por lo tanto para este caso el oscilador 4 (OS4) sería el oscilador que se toma como referencia para realizar los cálculos de las frecuencias.

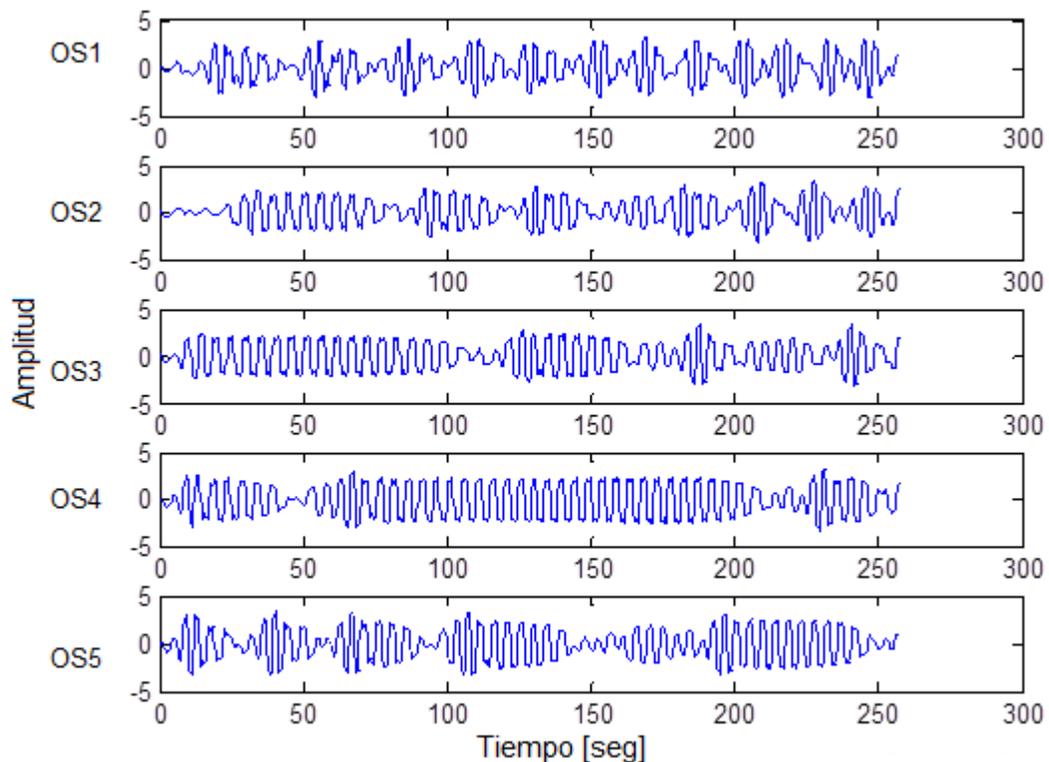


Figura 38. Respuesta de un arreglo de 5 osciladores

De acuerdo a lo planteado en la en la Figura 37, a los osciladores 1, 2 y 3 se les debe sumar el delta de frecuencia calculado ya que se encuentran a una frecuencia menor de la que posee el oscilador 4. En cambio para el oscilador 5 es necesario restar el delta de frecuencia calculado ya que se encuentra a una frecuencia mayor que la del oscilador 4. En la medición de la frecuencia final no se considera la frecuencia calculada para el oscilador 4 debido a que este no presenta un número suficiente de transiciones y su estimación de la frecuencia puede generar errores. Experimentalmente se pudo comprobar que la medición más exacta es la entregada por el oscilador con un mayor número de transiciones, es decir, el que se encuentra más lejos de la frecuencia real, pero obviamente existe un número de transiciones máximo que limita la medición de los deltas.

Un inconveniente que existe a la hora de medir los deltas de tiempo es que muchas veces hay algún estado periódico que no logra superar el umbral de amplitud. En este caso ocurre con el oscilador 5 en la transición número 5, se puede ver que este estado periódico es de menor amplitud que los demás. Para solucionar este inconveniente, el método de medición de deltas realiza una medición de las distancias que existe entre cada uno de ellos y la compara con el promedio de toda la señal para posteriormente realizar una asignación automática de los puntos que hacen falta. De esta forma se pueden corregir los errores que se generan por causa de los estados periódicos que no logran llegar al umbral definido.

3.5.2.1 RESPUESTA DEL ARREGLO CON RUIDO

Al aplicar ruido a la señal es posible detectar la frecuencia de la misma forma que se hace para el caso de la señal sin ruido. A medida que se aumenta el nivel de ruido se va distorsionando la respuesta de los osciladores cuando la SNR esta por debajo de los 0 dB, lo cual limita la medición de la frecuencia.

Para ilustrar un ejemplo, se realizó una simulación con la misma señal del caso anterior con una relación señal a ruido de -10 dB tal como se muestra:

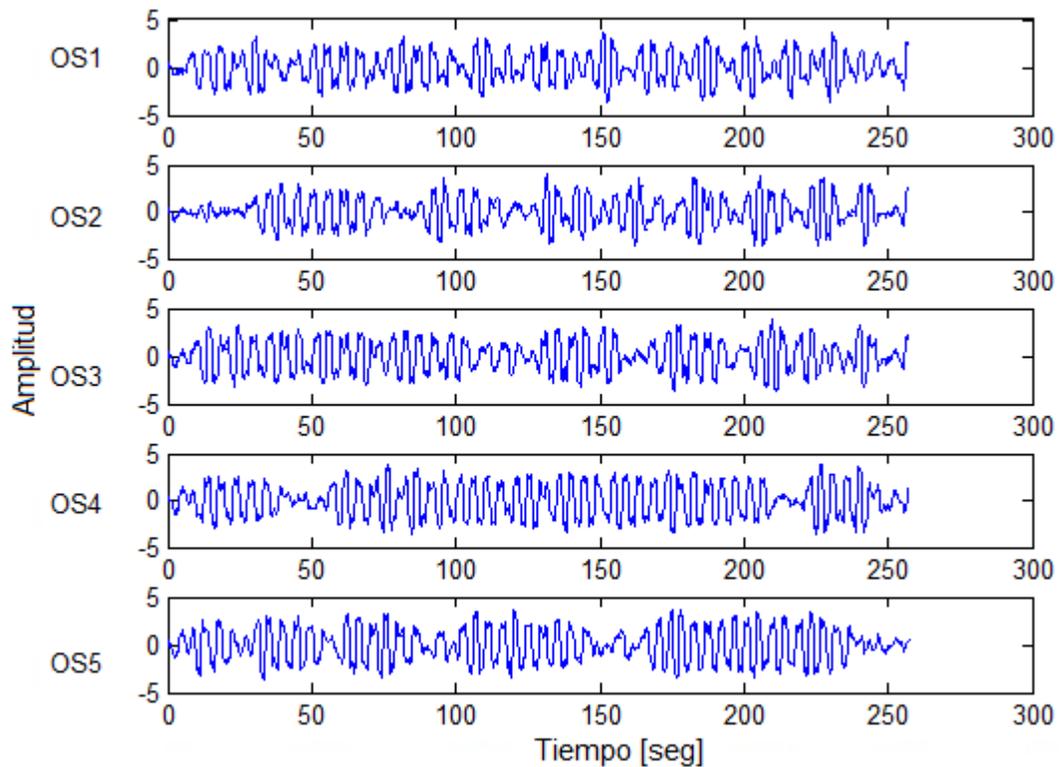


Figura 39. Respuesta de un arreglo de 5 osciladores con -10 dB de SNR.

La Figura 39 permite ver que aun es posible detectar las transiciones pero con un poco de dificultad precisamente por el nivel de ruido que presenta la señal. En este caso la medición más confiable es la del oscilador que se encuentra más alejado de la frecuencia real ya que los osciladores que tienen estados periódicos muy largos presentan algunos altibajos en su amplitud y se pueden confundir con diferentes transiciones, lo cual generaría un error en la medida. La respuesta de Tiempo vs Frecuencia del sistema caótico en presencia de ruido muestra algunas componentes con un error en la estimación causada por el ruido, pero considerando todas las componentes obtenidas es posible aceptar una varianza en la medida.

3.6 SISTEMA ADAPTABLE

El uso de un arreglo de osciladores genera una muy buena estimación de la frecuencia de una señal, pero presenta limitaciones a la hora de detectar la frecuencia instantánea de una señal cuyo rango de frecuencias es muy amplio. Al tener un rango amplio de frecuencias implica tener un arreglo de osciladores muy extenso, además los osciladores que se encuentran muy alejados de la frecuencia real no podrían realizar una medición exacta de la frecuencia. Tal como se mostró en el numeral anterior, el arreglo de 5 osciladores funciona muy bien ya que es fácil realizar la medición de los deltas de tiempo. Una opción muy práctica para evitar el uso de un arreglo muy extenso de osciladores, es generar un sistema que se vaya adaptando a la frecuencia que se va detectando en la señal.

La metodología para este caso se describe con el diagrama de la Figura 40. Y en donde el principio de funcionamiento se basa en ir tomando ventanas de análisis tal como se explicó anteriormente y cada ventana es analizada por el arreglo de cinco osciladores junto con el código encargado de calcular la frecuencia de la ventana. Una vez que se ha calculado la frecuencia de dicha ventana se repite el mismo procedimiento para la siguiente ventana y ajustando la frecuencia de referencia de los osciladores de acuerdo al valor calculado en la etapa anterior (ver Figura 40). Este procedimiento asegura que el arreglo de osciladores se encuentre bastante cerca de la frecuencia instantánea de la señal.

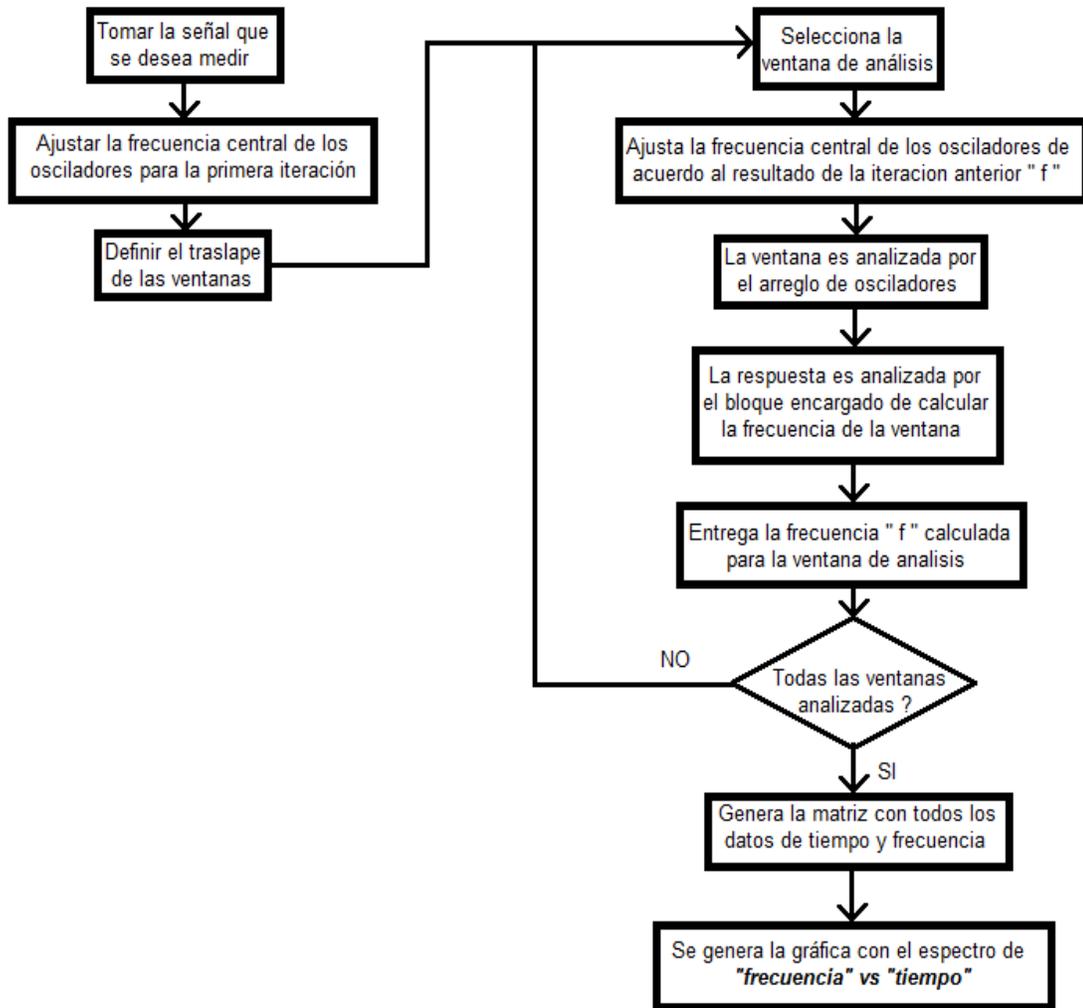


Figura 40. Diagrama de bloques del sistema adaptable.

Con este método siempre se van a necesitar un número fijo de osciladores sin importar el rango de frecuencias. Además al ser adaptable el sistema va ajustando la frecuencia del arreglo de los osciladores de acuerdo a la frecuencia encontrada en cada iteración. La principal ventaja de este método es que la frecuencia de la señal que se desea analizar no necesariamente debe ser una señal “chirp” específica, como la que se ha venido usando anteriormente, sino también cualquier señal chirp generalizada y descrita por la ecuación:

$$y = A * \cos (wt + \dot{w}t^2 + \ddot{w}t^3 + \dots + \ddot{w}t^n)$$

ya que el sistema se va adaptando a la señal a medida que la va analizando, es decir, que la señal puede tener aceleraciones, desaceleraciones o cualquier cambio en su fase a lo largo del tiempo. Sólo hay que reforzar que, al igual que con el método del arreglo de osciladores no adaptable, es importante realizar el traslape de ventanas para generar una mejor resolución de frecuencia en la respuesta del sistema.

La Figura 41 es un esquema que permite ver de manera más gráfica el funcionamiento del sistema completo. En este diagrama aparece un bloque nuevo “Mejoramiento de señal” encargado de mejorar la respuesta de los osciladores y de esta forma lograr medir de una manera mas precisa la frecuencia de la señal (que para esta figura es una “chirp” con variación de fase hasta el término cúbico). Este bloque nuevo se explica en la siguiente sección (sección 3.7).

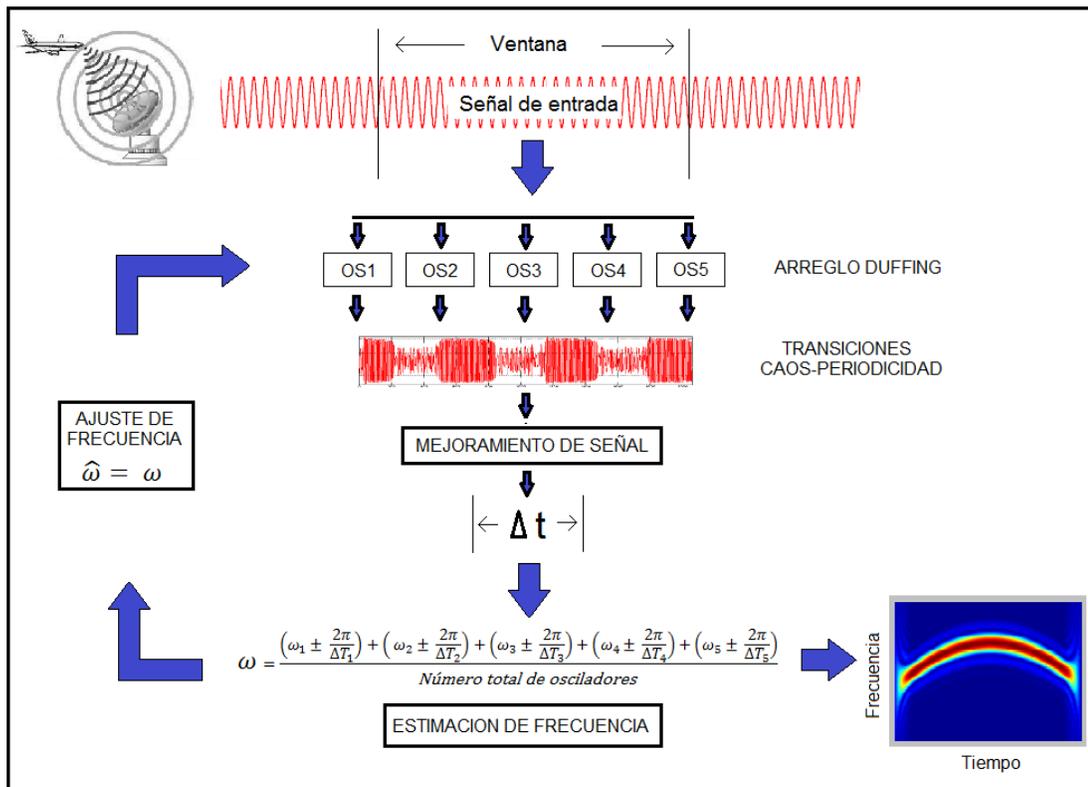


Figura 41. Esquema final del sistema adaptable.

3.7 PROCESO DE ADECUACIÓN DE SEÑAL

La medición de los deltas de tiempo en la respuesta del oscilador Duffing es el proceso clave en el desempeño del sistema ya que es en este punto donde se realiza la detección de la frecuencia de la señal de interés. Por lo tanto es necesario realizar la estimación de los deltas de tiempo con el menor error posible para lograr una mayor exactitud en la medida.

En este proceso es necesario identificar o resaltar cualquiera de los dos estados de la respuesta del oscilador (estado periódico o estado caótico) con el fin de medir el periodo con el que ocurren las transiciones. Por esta razón se estudiaron diferentes metodologías que logran resaltar alguno de los dos estados para facilitar y mejorar la medición.



Figura 42. Adecuación de la señal y medición de los deltas de tiempo.

La Figura 42 muestra la forma como se realiza el proceso para calcular la frecuencia de la señal una vez que se ha obtenido la respuesta del oscilador Duffing. Donde $y(t)$ es la respuesta del oscilador Duffing y $s(t)$ es la nueva señal de análisis que será procesada por el medidor de deltas de tiempo.

El bloque de adecuación de señal es el encargado de mejorar la respuesta del oscilador con el fin de poder identificar las transiciones entre los estados con una mejor precisión. Los métodos estudiados para realizar lo anterior fueron los siguientes:

- Detector cuadrático.
- Correlación.
- Cumulantes de Orden Superior.

- Exponente de Lyapunov.
- Función de Melnikov.

3.7.1 DETECTOR CUADRÁTICO

Esta forma de procesar la señal surge a raíz de la observación de la respuesta del oscilador tanto en el tiempo como en el espacio fase. En condiciones ideales (sin ruido) la respuesta caótica siempre tiene valores con una magnitud inferior a 1, mientras que la respuesta periódica presenta una amplitud superior a 1. Por lo tanto si elevamos la respuesta del oscilador al cuadrado

$$s(t) = |y(t)|^2 \quad 3-4$$

la respuesta caótica se atenúa y la respuesta periódica se amplifica.

Si se observa desde el punto de vista de la energía de la señal, tiene sentido decir que en el estado periódico la señal presenta mayor energía que en el estado caótico. Una desventaja de este método es que en presencia de ruido el estado caótico presenta algunos puntos que logran tener una amplitud mayor que 1 y se amplifican al elevarlos al cuadrado, generando una fuente de error en la medición. Sin embargo este método presenta mejores resultados que cuando se miden los deltas de tiempo directamente sobre la respuesta del oscilador.

3.7.2 CORRELACIÓN

Este método realiza la correlación cruzada entre la señal de referencia y la respuesta del oscilador Duffing. La respuesta del estado periódico en el oscilador contiene la misma frecuencia que la señal de referencia, entonces al correlacionar estas dos señales se obtienen valores altos de correlación cuando la señal de referencia se correlaciona con el estado periódico. La correlación cruzada entre estas dos señales es (Rober Grover Brown, 1985):

$$S(t1, t2) = E[y(t1) * x(t2)]$$

donde $y(t)$ es la respuesta del oscilador y $x(t) = F \cos(\omega t)$ es la señal de referencia quedando finalmente que para el tiempo de ventaneo t

$$S(\tau) = E[y(t) * x(t + \tau)]$$

3.7.3 CUMULANTES DE ORDEN SUPERIOR

En estadística los cumulantes son usados como una alternativa a los momentos. Existe una relación directa entre los cumulantes de orden superior y los momentos estadísticos ya que los cumulantes son una combinación no lineal de los momentos y viceversa. Al utilizar cumulantes es posible identificar experimentalmente de una manera más clara las transiciones entre caos y periodicidad.

El n-ésimo cumulante para una variable aleatoria X se calcula mediante la siguiente expresión (S. Rao Jammalamadaka, 2006):

$$\psi_X(\lambda) = \ln[\varphi_X(\lambda)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n * \frac{(i\lambda)^n}{n!} \right)$$

donde

$$\varphi_X(\lambda) = E[e^{i\lambda X}] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n * \frac{(i\lambda)^n}{n!} \right)$$

con

$$u_n = E[X^n] \quad n = 1, 2, \dots$$

y k_n es el n-esimo cumulante de la variable aleatoria X

$$k_n = \left[(-i)^n \frac{\partial^n \psi_X(\lambda)}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0}$$

Lo anterior significa que la n-ésima derivada de la expansión de la serie de Taylor de la función $\psi_X(\lambda)$ evaluada en $\lambda = 0$ permite obtener el n-ésimo cumulante.

A continuación se muestran las ecuaciones para calcular los cumulantes desde el primero hasta el quinto orden (k_1 y k_2 son la media y la varianza de X respectivamente):

$$k_1 = u_1$$

$$k_2 = u_2 - u_1^2$$

$$k_3 = u_3 - 3u_2u_1 + 2u_1^3$$

$$k_4 = u_4 - 4u_3u_1 - 3u_2^2 + 12u_2u_1^2 - 6u_1^4$$

$$k_5 = u_5 - 5u_4u_1 - 10u_3u_2 + 20u_3u_1^2 + 30u_2^2u_1 - 60u_2u_1^3 + 24u_1^5$$

Al utilizar cumulantes en el oscilador Duffing, se notó experimentalmente que a medida que se va incrementando el orden del cumulante se va resaltando más el estado periódico y se atenúa considerablemente el estado caótico especialmente cuando se utilizan cumulantes de orden par. La experiencia nos llevó a percibir que el cumulante de 4º orden es el que se puede utilizar para analizar los resultados ya que no existía ninguna diferencia en la respuesta del cumulante 4º con el 6º, por lo tanto no era necesario continuar incrementando el orden.

3.7.4 EXPONENTES DE LYAPUNOV λ

Dentro de los criterios cuantitativos para identificar el caos se encuentran los exponentes de Lyapunov que se utilizan como una medida que indica la

separación de dos trayectorias cercanas (Tsonis, 1992) (Henry D.I. Abarbanel, 1998). Los exponentes λ están definidos por:

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n) \ln \left| \frac{df(x_n)}{dx_n} \right| dx_n$$

donde $p(x_n)$ puede ser calculado para el caso discreto como

$$p(x_n) = \frac{N_n}{N}$$

En el caso de una serie de muestras se debe crear el mapa de retorno del vector y dividirlo en un número M de casillas, donde N_n es el número de observaciones en la i -ésima casilla y N es el número total de observaciones (Tsonis, 1992) (Henry D.I. Abarbanel, 1998).

Una forma más práctica para el cálculo de los exponentes de Lyapunov es:

$$\lambda \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left| \frac{df(x_n)}{dx_n} \right| \right)$$

donde N es el número de muestras del vector de datos.

Los exponentes de Lyapunov tienen tres posibles resultados los cuales se indican a continuación (Elert, 1995-2007):

$\lambda < 0$, indica que no hay caos dentro de la señal que se está analizando. Lo cual significa que las orbitas son atraídas hacia un punto fijo o es una órbita periódica estable

$\lambda = 0$, la orbita es un punto fijo neutral, lo cual significa que el sistema se encuentra en un estado que se puede considerar estable. Para este caso tampoco hay presencia de caos

$\lambda > 0$, la orbita es inestable y caótica. Por lo tanto se asegura la presencia de caos dentro de la señal analizada.

Si se calculan los exponentes de Lyapunov para la respuesta completa del oscilador Duffing, siempre se detectará caos en la señal y no será posible detectar los puntos exactos donde existe caos. Para poder obtener una medición de dichos puntos es necesario tomar intervalos pequeños de la respuesta del oscilador Duffing e ir detectando en cada intervalo de tiempo si existe o no la presencia de caos.

A diferencia de los tres métodos anteriores que buscan identificar los estados periódicos, en este caso los puntos que se desean identificar son los instantes en los que la respuesta del oscilador está en caos indicando que la medición de los deltas también se puede realizar con los estados caóticos sin ningún problema.

3.7.5 FUNCIÓN DE MELNIKOV

La función de Melnikov es una función muy utilizada para identificar el estado caótico del oscilador Duffing. Esta función presenta oscilaciones alrededor de cero con una amplitud determinada cuando la respuesta del oscilador está en caos, en cambio, cuando el oscilador se encuentra en estado periódico la función de Melnikov mantendrá su valor en cero.

Como ya se conoce la ecuación que modela el sistema con la señal de entrada:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = F_r \cos(t) + A \cos[(1 + \Delta\omega)t + \varphi] + n(t)$$

entonces, la función de Melnikov se puede calcular mediante la siguiente expresión (Liqun Shen, 2011) :

$$M(t_0, \phi_0) = \int_0^{2\pi} \dot{x}(t + t_0) [-\delta \dot{x}(t + t_0) + F_r \cos(t + t_0 + \phi_0)]$$

donde t_0 representa el punto inicial del cálculo y la fase inicial se puede establecer como $\phi_0 = 0$.

Al igual que con los exponentes de Lyapunov, la función de Melnikov detecta los instantes en los que el oscilador está en caos y con éstos se realiza la medida de los deltas de tiempo.

3.7.6 COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE ADECUACIÓN

Con el fin de identificar cual de los métodos mencionados anteriormente funciona mejor para el sistema, se realizaron pruebas con diferentes niveles de ruido. Con fines de comparación en las pruebas se aplica una señal senoidal de frecuencia constante $y = 0.5 \cos(7000t)$, $\omega = 7000 \frac{rad}{seg}$ ó $f = 1114.08 Hz$ para así estimar ese valor de frecuencia con cada uno de los métodos usando el sistema Duffing y a diferentes SNR. La respuesta del oscilador se ilustra en la Figura 43.

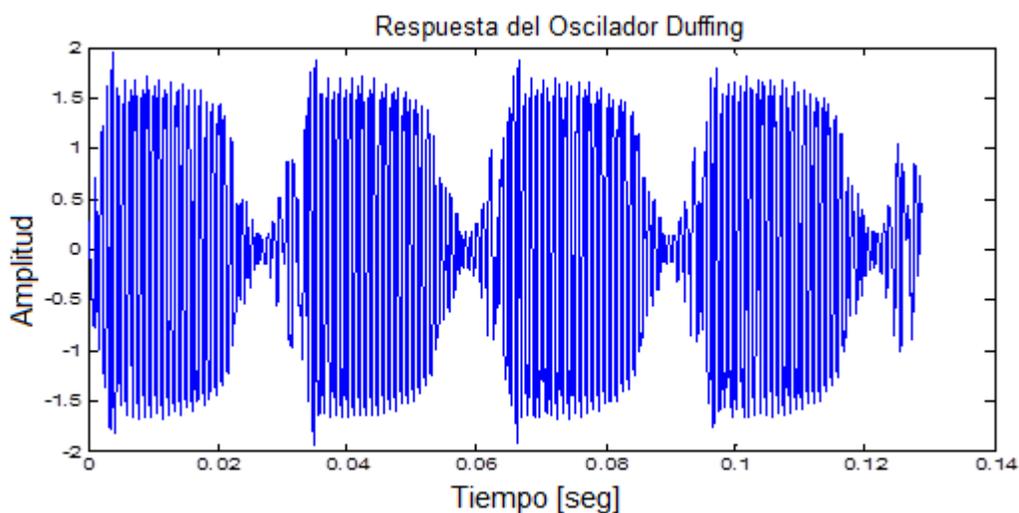


Figura 43 Respuesta del oscilador Duffing.

La Figura 44 muestra los resultados obtenidos al analizar la respuesta de uno de los osciladores sin ruido bajo cada uno de los métodos utilizados. En ella se ve claramente como algunos métodos resaltan los estados caóticos mientras que otros resaltan los estados periódicos como ya se mencionó anteriormente.

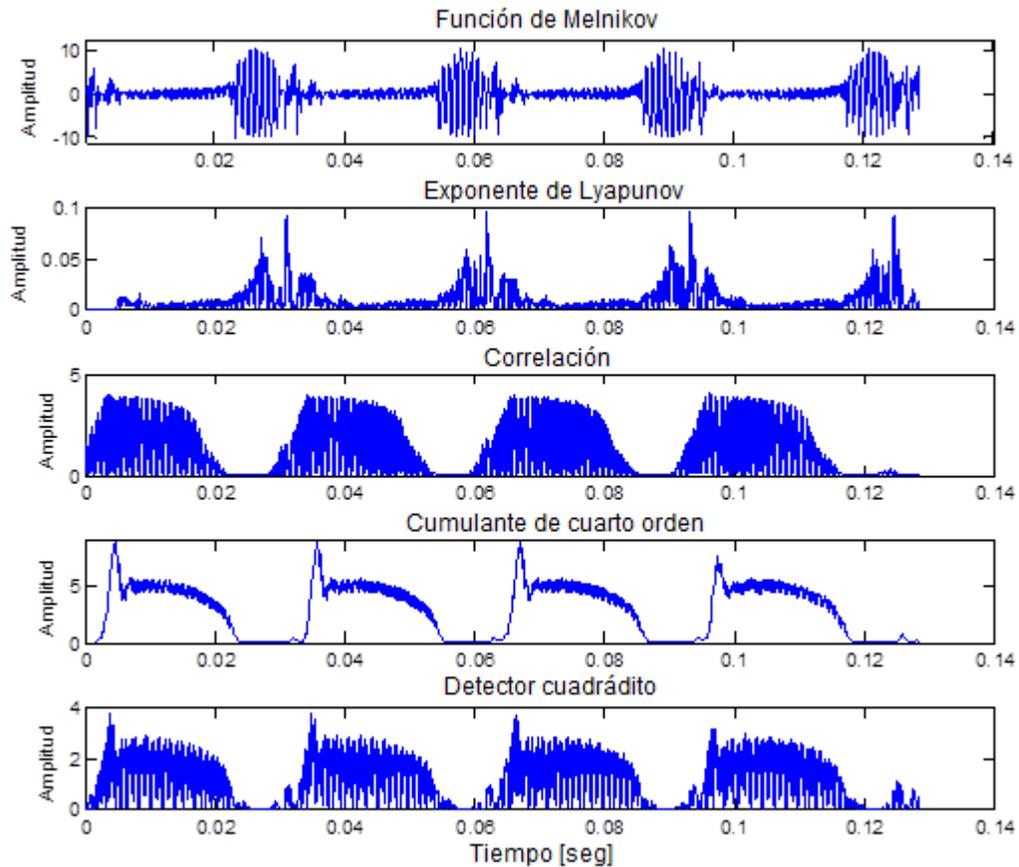


Figura 44 Respuesta de los métodos utilizados.

Esta experiencia se llevó a cabo para diferentes niveles de ruido realizándose 50 simulaciones para obtener diferentes muestras y poder calcular su valor medio, la varianza y la desviación estándar, además del porcentaje de error con respecto al valor ideal. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.

MÉTODO	FRECUENCIA DE LA SEÑAL [Hz]	"f" Promedio [Hz]	ERROR %	σ^2	σ
SIN RUIDO					
CUADRÁTICO	1114.08	1114.1	0.001795	0.6501	0.806
CORRELACIÓN	1114.08	1113.55	0.047573	2.9	1.703
CUMULANTES	1114.08	1114.97	0.079887	5.54	2.354
LYAPUNOV	1114.08	1113.65	0.038597	2.32	1.523
MELNIKOV	1114.08	1113.7	0.034109	0.62	0.787
0 dB de SNR					
CUADRÁTICO	1114.08	1115.2	0.100531	85.27	9.234
CORRELACIÓN	1114.08	1114.2	0.010771	1.0327	1.016
CUMULANTES	1114.08	1113.3	0.070013	23.25	4.822
LYAPUNOV	1114.08	1112.55	0.137333	23.375	4.835
MELNIKOV	1114.08	1112.25	0.164261	20.37	4.513
-15 dB de SNR					
CUADRÁTICO	1114.08	1113.8	0.025133	24.66	4.966
CORRELACIÓN	1114.08	1113.1	0.087965	24.3	4.93
CUMULANTES	1114.08	1112.7	0.123869	8.28	2.877
LYAPUNOV	1114.08	1112.35	0.155285	111.46	10.56
MELNIKOV	1114.08	1109.6	0.402126	136.19	11.67
-28.5 dB de SNR					
CUADRÁTICO	1114.08	1123.3	0.827589	430.13	20.74
CORRELACIÓN	1114.08	1115.1	0.091555	56.54	7.519
CUMULANTES	1114.08	1110.9	0.285437	210.12	14.5
LYAPUNOV	1114.08	1109.8	0.384173	600.96	24.51
MELNIKOV	1114.08	1025.3	7.968907	626.89	25.04

Tabla 2. Resultados de cada método con diferentes niveles de ruido.

Los resultados de la Tabla 2 permiten definir cual de los métodos es el que presenta un mejor desempeño en presencia de ruido.

El método de correlación fue el que se seleccionó para ser utilizado con el sistema completo ya que éste presentó los mejores resultados al haber logrado mediciones de frecuencia hasta alcanzar un límite de -28.5 dB de SNR con una buena precisión en la medida.

4. SIMULACIONES

Para comprobar el funcionamiento del método y verificar que efectivamente es capaz de seguir la frecuencia de la señal de entrada, se realizaron algunas simulaciones en ausencia y en presencia de ruido. Estas simulaciones fueron realizadas con el fin de poder comparar los resultados con las técnicas tradicionales de análisis de TF. Para comparar los resultados se utilizaron exactamente las mismas señales con todos los métodos de TF.

Las frecuencias utilizadas para las simulaciones se tomaron considerando los rangos de frecuencia en los cuales trabajan algunos sistemas de radar. Esto se realizó con el fin de mostrar el desempeño del sistema con frecuencias que se pueden encontrar en aplicaciones reales tales como radares meteorológicos, radares de vigilancia aérea, seguimiento de satélites y misiles balísticos, entre otros (Wolff). El radar Doppler es utilizado para realizar medidas de velocidad de un objeto, emitiendo una onda con frecuencia fija. En el momento en que la onda enviada por el radar se encuentra con el objeto, la onda es reflejada poseyendo una frecuencia diferente a la que se emitió originalmente, la variación de frecuencia permite detectar la velocidad y la aceleración del objeto. De igual forma se puede aplicar el mismo principio para la medición de velocidad de fluidos utilizando frecuencias en el rango de ultrasonido.

Para realizar las simulaciones de *Wigner-Ville*, *Choi-Williams* y *Multiform Tilttable exponential Distribution* se utilizaron las funciones “*wd*”, “*cwd*” y “*mted*” desarrollada por el Dr. Antonio H Acosta en “Matlab”, estas funciones fueron implementadas junto con otras funciones de TFR y han sido utilizadas por él a lo largo de todas sus investigaciones en esta área. Durante la estancia en la *Universidad de Massachusetts Dartmouth* el Dr. Antonio Costa

permitió el uso de sus códigos de Matlab con el fin de aplicarlos en esta investigación.

4.1 SEÑAL “CHIRP” LINEAL

En esta sección se presentan todas las simulaciones que se realizaron con señales “chirp” lineales, es decir, donde la fase de la onda varía cuadráticamente con el tiempo.

4.1.1 DUFFING ADAPTABLE

Esta es la propuesta de este trabajo

4.1.1.1 SIN RUIDO

Esta simulación fue desarrollada utilizando una señal “chirp” lineal sin ruido descrita por la ecuación:

$$y = 0.5 \cos (5 * 10^9 t + 375 * 10^{12} t^2) \quad 4-1$$

Esta señal tiene un rango de frecuencias que varia aproximadamente desde 800 MHz hasta 1.04 GHz tal como se ve en la Figura 45.

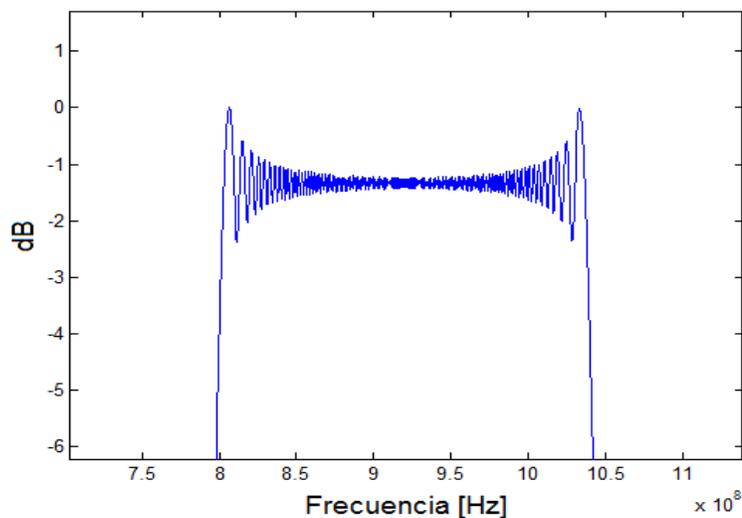


Figura 45. Espectro de la señal de entrada al sistema

Para este ejemplo la señal tiene 32768 muestras, el tamaño de las ventanas analizadas es de 1700 muestras y un traslape de 1570 muestras. Los resultados se pueden ver en la Figura 46 en la cual se puede apreciar que la respuesta tiene una precisión muy buena. Para este caso se aprecia como la representación de T-F detecta una señal con una duración aproximada de $2 \mu s$ dentro del rango de frecuencias. Esto prueba que la estimación es casi exacta y que la principal ventaja de la técnica propuesta en este trabajo es que se obtiene una buena resolución en frecuencia.

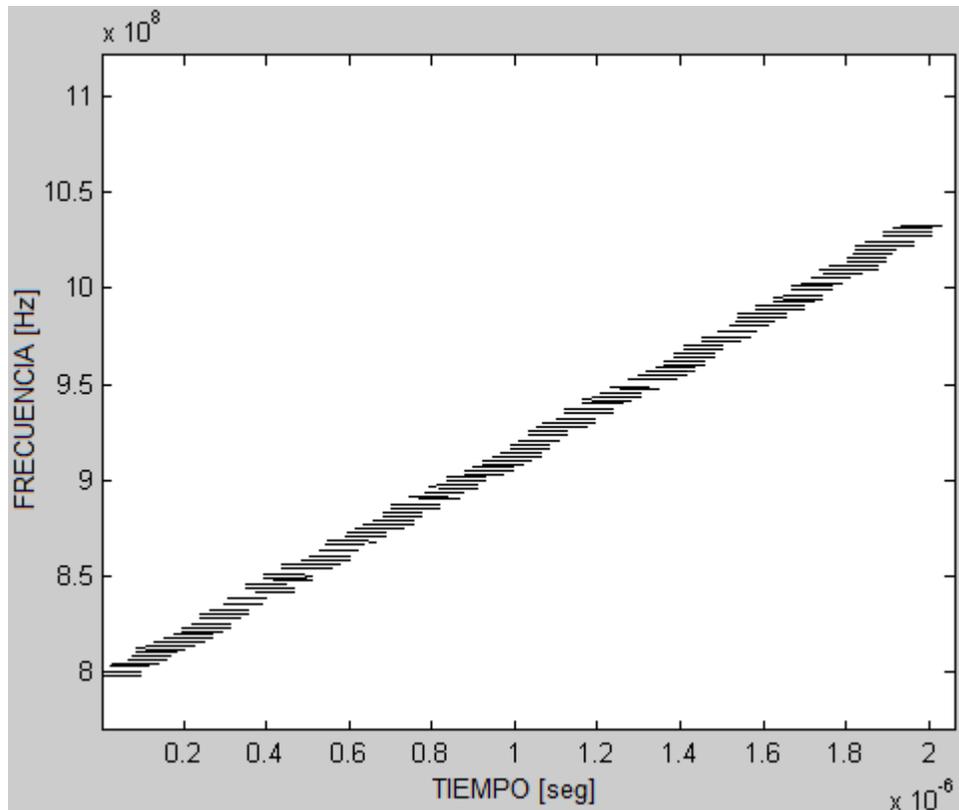


Figura 46. Respuesta del sistema sin ruido (Tiempo vs Frecuencia).

4.1.1.2 CON RUIDO

La segunda prueba realizada se hizo con una señal “chirp” lineal en presencia de ruido con una SNR de -10 dB y descrita por la ecuación:

$$y = 0.5 \cos[(6 * 10^9)t + (45 * 10^{13})t^2] + n(t) \quad 4-2$$

Esta señal abarca un rango de frecuencias que van desde 950 MHz hasta 1.25 GHz aproximadamente. Además se utilizaron 32738 muestras con ventanas de 1400 muestras y un traslape de 1100 muestras, es decir, un traslape del 78.57%.

Por lo tanto era de esperarse que el sistema implementado con el arreglo de osciladores Duffing adaptable lograra seguir la frecuencia de la señal a lo largo de su duración total en el tiempo. Esta respuesta se puede ver en la Figura 47, la cual presenta resultados confiables ya que el rango de frecuencias detectado se encuentra dentro del rango establecido.

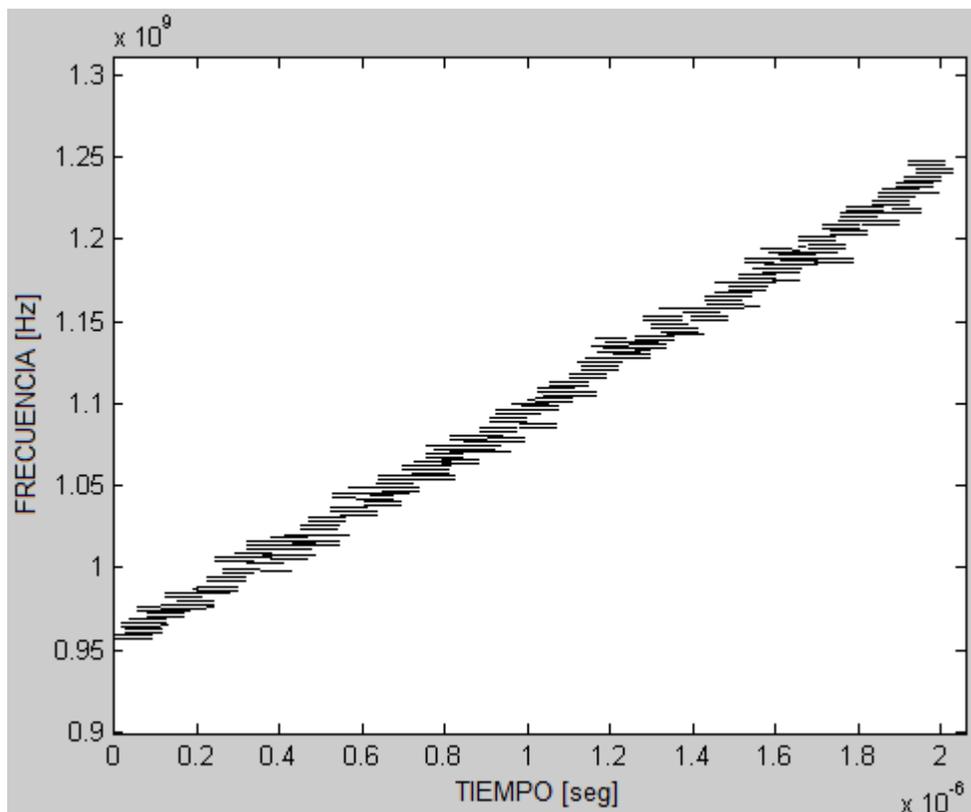


Figura 47 Respuesta del sistema adaptable (chirp lineal a -10 dB de SNR)

Este resultado indica que la estimación de frecuencia realizada por el sistema es bastante precisa a pesar del nivel de ruido presente en la señal. Con fines de comparar los resultados con el método propuesto del sistema adaptable, se analizaron las mismas señales chirp donde el ruido utilizado fue exactamente el mismo de -10 dB SNR pero ahora usando métodos de TF que son comunes en estos tipos de problemas, tales como el STFT, la popular Wavelet, utilizando la distribución de Wigner-Ville, su variante Choi-Williams y finalmente MTED . La manera para poder comparar estos métodos es mediante una tabla que permita ver el error con respecto al valor teórico de la frecuencia.

4.1.2 STFT

La primera comparación realizada se hizo utilizando la transformada de tiempo corto de Fourier.

4.1.2.1 SIN RUIDO

La función “*fft*” de Matlab fue utilizada para realizar la transformada de Fourier de la ecuación 4-2, así como también se utilizó la función “*spectrogram*” de Matlab para generar el espectrograma de la misma señal.

La figura muestra el espectrograma de la señal, en la cual se puede ver claramente como varía la frecuencia en forma lineal a lo largo del tiempo, pero con una baja resolución en frecuencia.

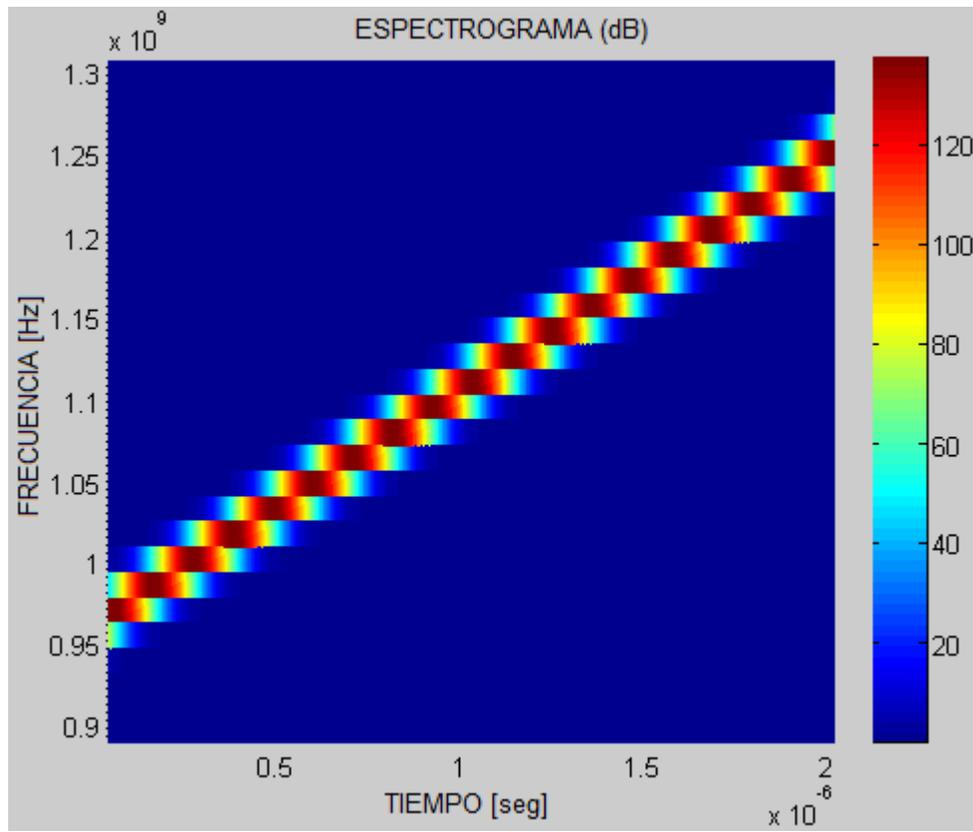


Figura 48. Respuesta de la STFT sin ruido.

4.1.2.2 CON RUIDO

La Figura 49 muestra el resultado de la simulación con ruido. En esta imagen se puede ver que el ruido está presente en todo el espectro, lo cual es una desventaja al compararlo con el sistema Duffing adaptable ya que con el sistema Duffing el ruido se elimina por completo de la representación TF.

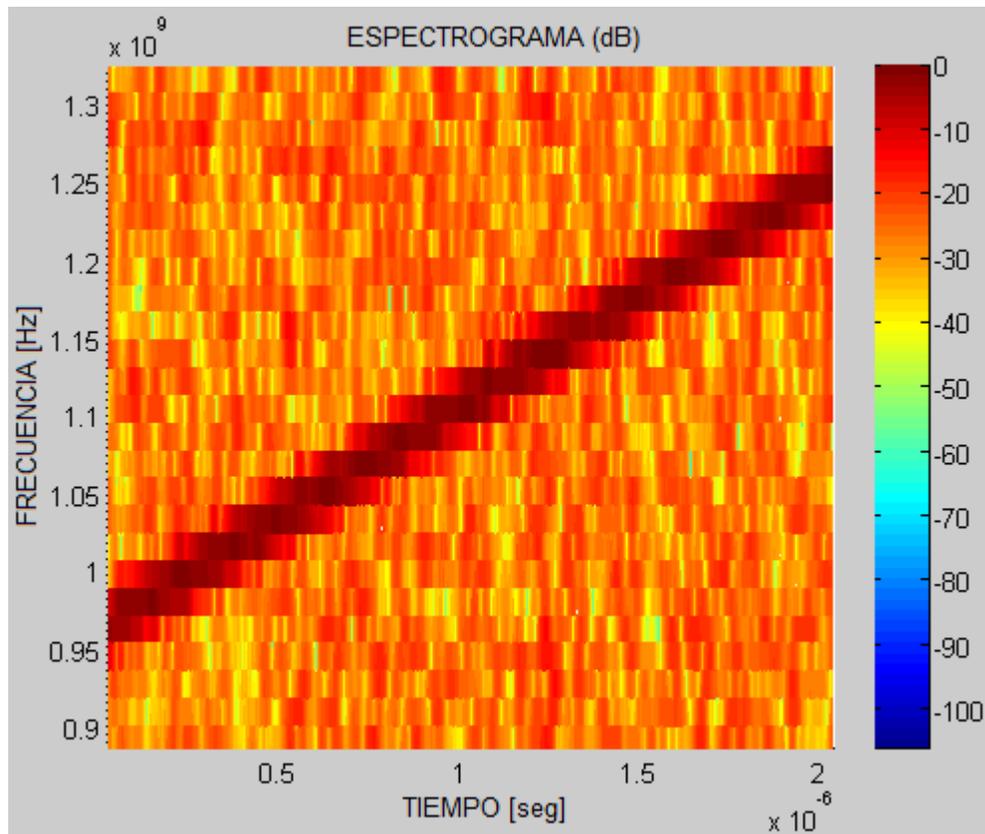


Figura 49. Respuesta de la STFT con -10 dB de SNR

Otra desventaja que presenta la STFT con respecto al sistema Duffing es que la resolución en frecuencia no es muy buena y por lo tanto no es muy precisa la estimación de la frecuencia temporal. La STFT puede realizar una estimación de la frecuencia en presencia de ruido pero con menor precisión en comparación como lo hace el sistema con osciladores Duffing.

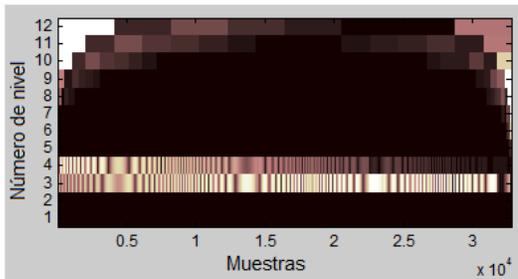
4.1.3 WAVELETS

Para esta comparación se utilizó el toolbox de Matlab llamado *Wavelab*. Este toolbox permite realizar el análisis de las señales utilizando el *Análisis Wavelet Discreto* y el *Análisis Discreto con Wavelet Packet*. La respuesta de

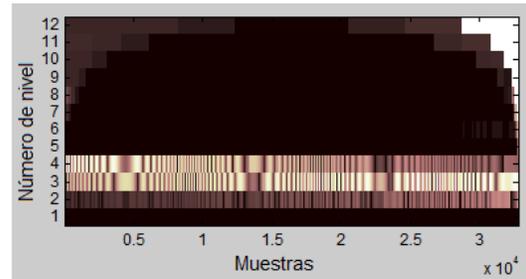
este método es de Escala-Tiempo, pero se realizaron los ajustes de los ejes para obtener la representación de TF.

4.1.3.1 SIN RUIDO

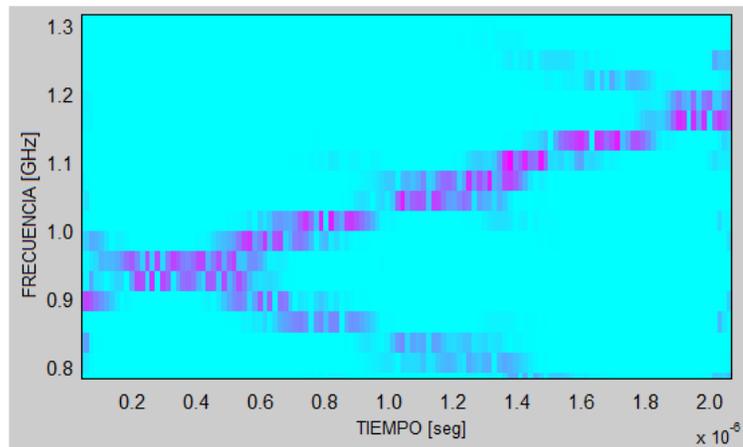
Al igual que con las comparaciones anteriores, en este caso se inició realizando el análisis de la señal sin ruido. Utilizar Wavelets implica seleccionar la Wavelet mas adecuada de acuerdo al tipo de señal que se desea detectar. Por lo tanto, y de acuerdo a lo ya discutido en el Capitulo 2, se seleccionaron Wavelets que tuvieran el mayor número de momentos o que permitieran variar sus momentos ya que la señal que se está estudiando presenta cambios suaves (Mallat, 1999), lo cual significa que una Wavelet *Haar* o *Daubechies 1* no funciona para este caso. En las simulaciones con *Wavelet Discreto* las Wavelets que presentaron mejores resultados fueron *Meyer* y *Daubechies 10*, ambas con 12 niveles de descomposición para obtener una mejor resolución de frecuencia (ver Figura 50 a y b).



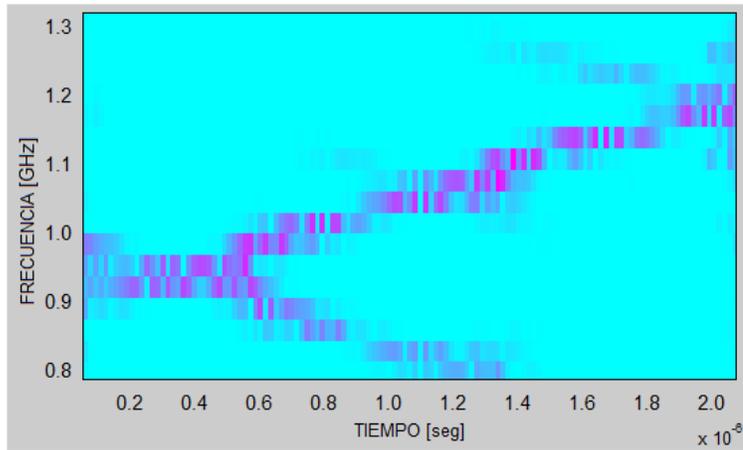
a) Meyer nivel 12



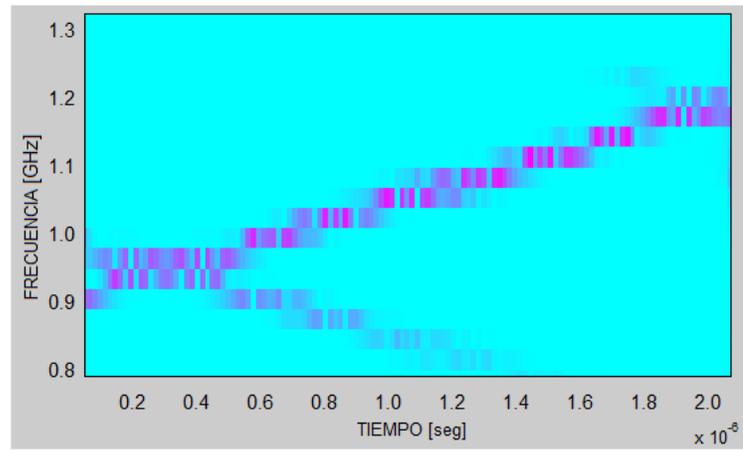
b) Daubichies 10, nivel 12



c) Coiflet 5, nivel 8



d) Daubechies 10, nivel 8



e) Meyer nivel 8

Figura 50. Respuesta de Wavelet y Wavelet Packet sin ruido.

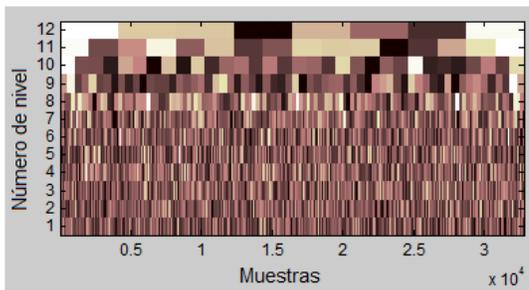
Sin embargo, este método no permite una clara detección de la frecuencia de la señal debido a que la resolución de frecuencia es muy baja. Esto se debe a que la escala en la que se detecta la señal abarca un rango muy amplio de frecuencia tomando prácticamente toda la señal. Es por esto que la señal solo se logra percibir en las escalas 3 y 4 para ambos casos, pero no se logra tener una idea clara de cual es la frecuencia instantánea.

Debido a la mala estimación de frecuencia del caso anterior, se decidió utilizar *Wavelet Packet* ya que tiene mejor resolución en frecuencias altas y bajas. Las Wavelets que presentaron mejores resultados fueron *Coiflet 5*, *Daubechies 10* y *Meyer*, todas con 8 niveles de descomposición. En teoría si aplicamos un mayor número de descomposiciones se obtendría mejor resolución frecuencial, pero debido a que el método de Wavelet es un proceso de filtrado, solo se cubre la mitad del espectro restante, lo cual significa que sería necesario utilizar un número muy grande de Wavelets para realizar todo el proceso. Por esta razón se utiliza la función de escalamiento ya que se comporta como un filtro pasa-bajas que evita utilizar un número infinito de descomposiciones (Valens C. , 1999-2004). En el experimento, con 8 niveles de descomposición se obtuvieron los mejores resultados. En las Figura 50 *c,d* y *e* se muestran los resultados de Wavelet Packet.

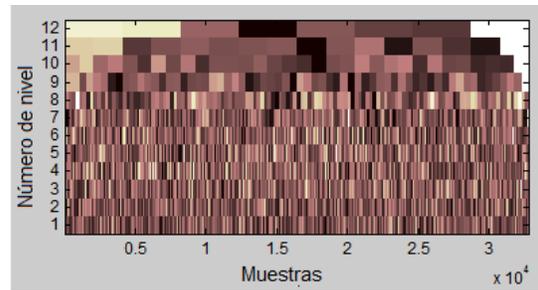
Puede notarse que efectivamente hay una mejor resolución de frecuencia ya que las escalas permiten ver una mejor variación de la frecuencia a lo largo de tiempo. La Wavelet que presenta mejores resultados es la de *Meyer*, aunque aparecen ciertos términos que no corresponden a los valores reales de frecuencia de la señal generando un error en la medición.

4.1.3.2 CON RUIDO

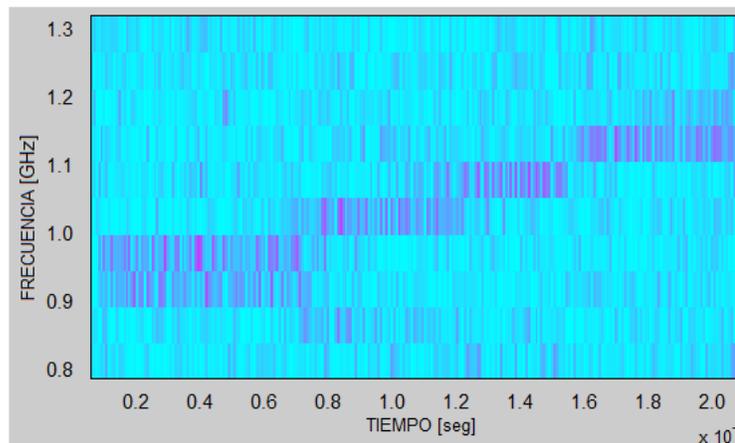
Podemos por tanto apreciar que, en presencia de ruido, con el método normal de *Wavelet Discreto* no es posible detectar la señal ya que el nivel de ruido afecta seriamente la medición (ver Figura 51 a y b). En el caso de *Wavelet Packet* aun es posible realizar una detección de la señal pero con una resolución de frecuencia muy pobre. Para el caso de Coiflet 5 se obtuvo el mejor resultado con 7 niveles de descomposición y para los casos de Daubechies 10 y Meyer se lograron mejores resultados con 8 niveles de descomposición (ver Figura 51 c,d y e). En este caso la mejor respuesta fue obtenida con la wavelet Meyer en la cual se logra percibir los cambios de frecuencia pero con muy baja resolución de frecuencia.



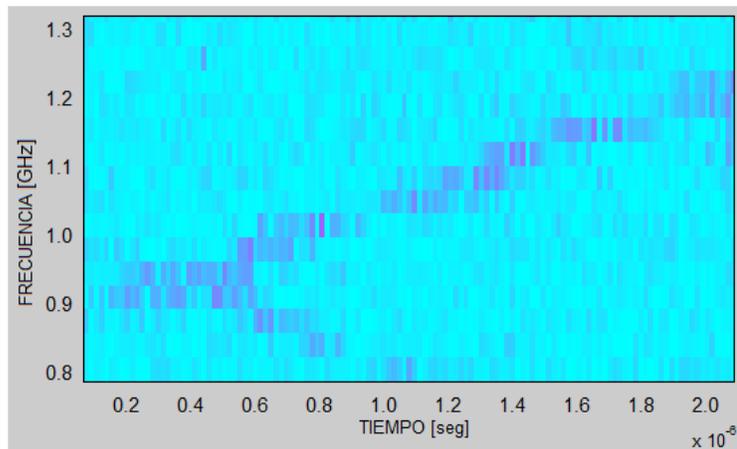
a) Meyer nivel 12



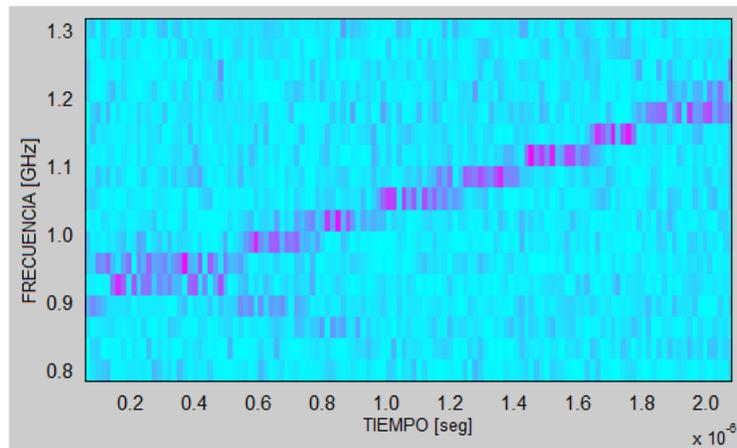
b) Daubichies 10, nivel 12



c) Coiflet 5, nivel 7



d) Daubechies 10, nivel 8



e) Meyer nivel 8

Figura 51. Respuesta de Wavelet con -10 dB de SNR.

4.1.4 DISTRIBUCIÓN DE WIGNER-VILLE

Esta simulación se hizo utilizando la distribución de *Wigner-Ville*, la cual utiliza el *Kernel* mas simple tal como se explicó en el capítulo 2.

4.1.4.1 SIN RUIDO

Al aplicar *Wigner-Ville* a la señal de entrada sin ruido se realiza una correcta estimación de la frecuencia, pero se ve claramente, de la Figura 52, como

aparecen algunas componentes adicionales que no son deseables en la respuesta del sistema. Por lo tanto es de esperarse que al inducir ruido al sistema dichas componentes se resalten y perjudiquen la respuesta del sistema. Cabe resaltar que el sistema Duffing no tiene este tipo de problemas, por lo cual no es necesario preocuparse por términos de interferencia, ó “*cross terms*” como se suelen conocer, tal como ocurre con las técnicas tradicionales.

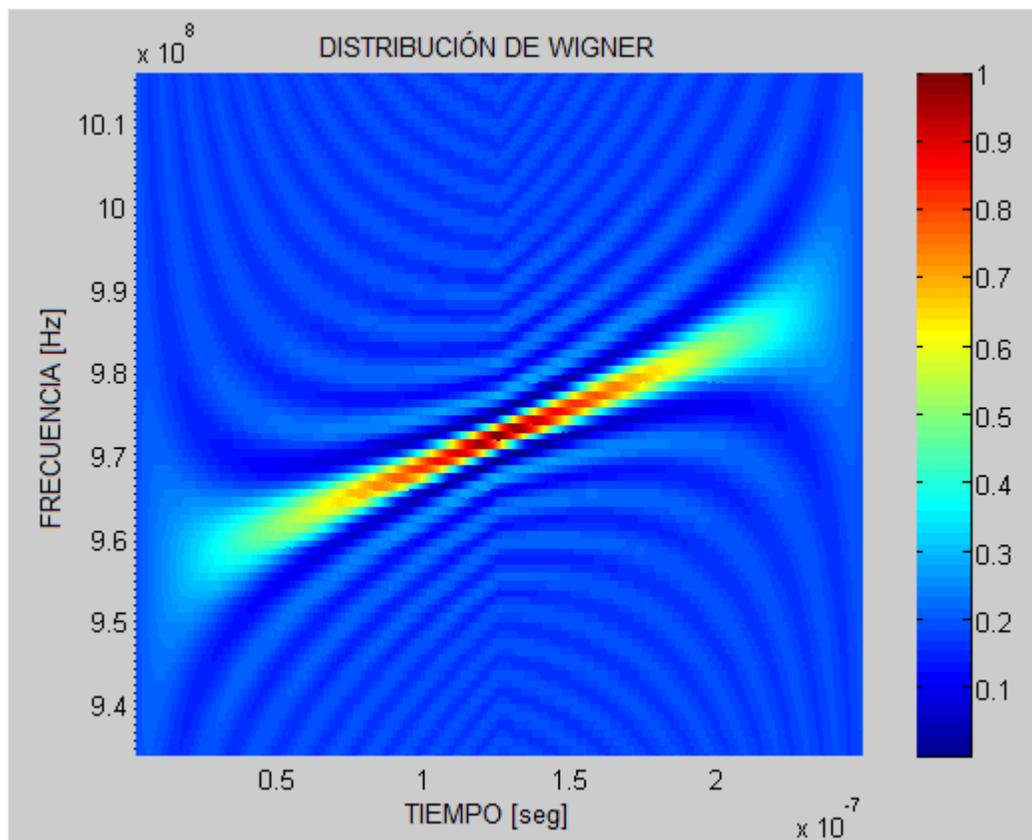


Figura 52. Wigner-Ville Distribution sin ruido.

4.1.4.2 CON RUIDO

Para este caso también se utilizó una señal con ruido para analizar la respuesta del sistema. Lo cual se presenta en la Figura 53.

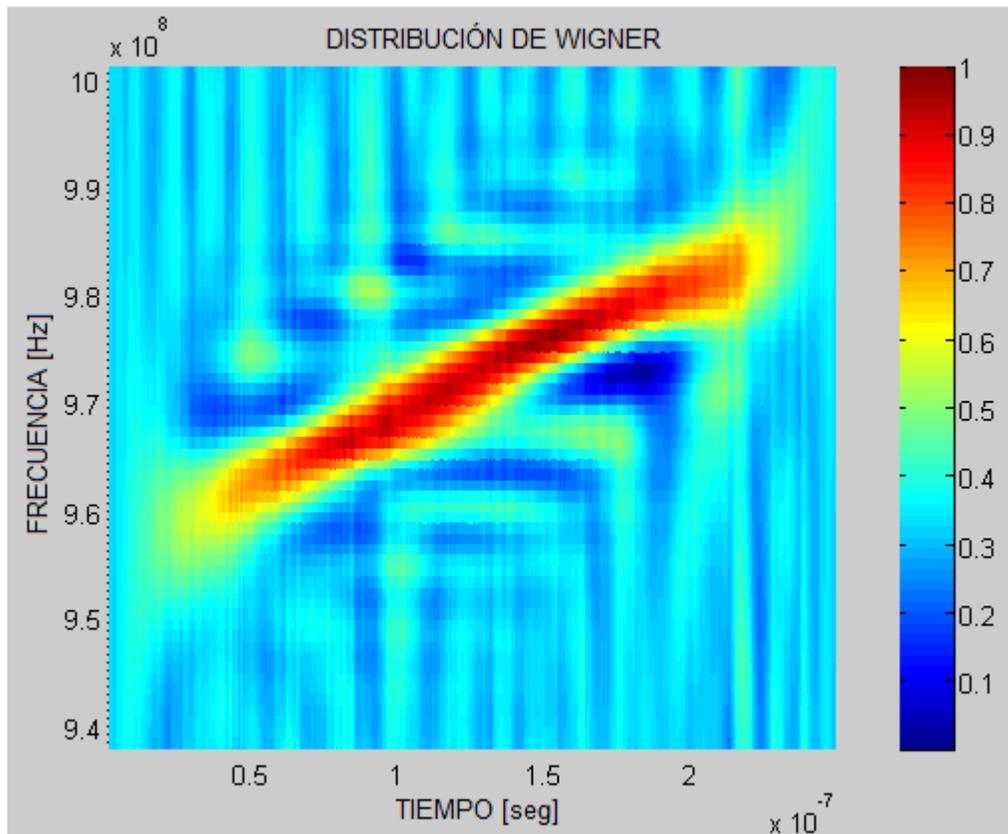


Figura 53. Respuesta de *Wigner – Ville Distribution* con -10 dB de SNR.

Al ver la respuesta de *Wigner-Ville* con ruido es posible identificar la frecuencia de la señal de una manera no muy precisa ya que la resolución en frecuencia se ve seriamente afectada por el ruido. Además los términos de interferencia que aparecen mediante este método siguen apareciendo en el análisis con ruido generando una mayor imprecisión en la medida. Estos términos de interferencia son un gran problema si se desea realizar algún tipo de detección automática de la frecuencia. Además, esta representación TFR presenta pérdidas de información en los extremos, por lo tanto no se logra saber con certeza la frecuencia inicial y final de la señal. Una vez más, se resalta la principal ventaja que presenta el sistema *Duffing* al tener mejor resolución en frecuencia a pesar del nivel de ruido presente en la señal.

4.1.5 CHOI-WILLIAMS

Esta comparación se hizo utilizando *Choi-Williams* que es la distribución de *Wigner-Ville* utilizando el *Kernel* de *Choi-Williams* tal como se describe en el Capítulo 2.

4.1.5.1 SIN RUIDO

Al aplicar *Choi-Williams* a la señal de entrada sin ruido se realiza una correcta estimación de la frecuencia y se puede apreciar como se atenúan las componentes adicionales no deseables que si aparecen en el método de *Wigner-Ville*. Por lo tanto es de esperarse que al inducir ruido al sistema se obtenga una mejor respuesta que con *Wigner -Ville*. El método de *Choi Williams* posee una mejor resolución en frecuencia que *Wigner_Ville Distribution (WVD)*, esto significa que la respuesta obtenida presenta una mayor exactitud en la medición de la frecuencia instantánea de la señal comparándolo con la STFT y WVD (ver Figura 54).

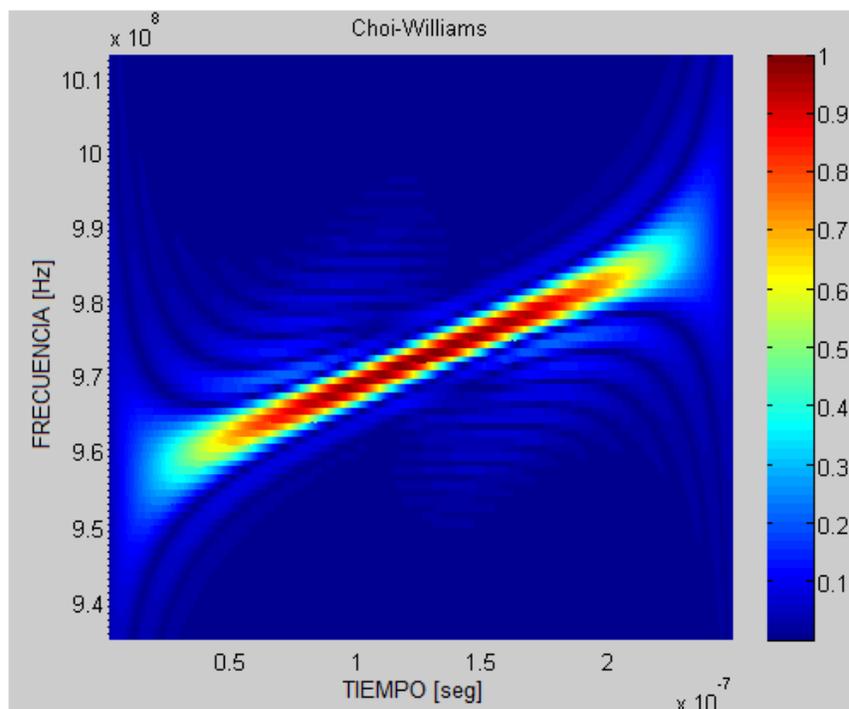


Figura 54. Respuesta de *Choi Williams* sin ruido.

4.1.5.2 CON RUIDO

Si se observa la respuesta de *Choi Williams* con ruido es posible identificar la frecuencia de la señal pero de una manera no muy precisa ya que la resolución en frecuencia se ve seriamente afectada por el ruido tal como ocurre con WVD y STFT. Con este método no se tienen las componentes no deseadas o términos de interferencia que aparecen en WVD, lo cual representa una ventaja en la medición.

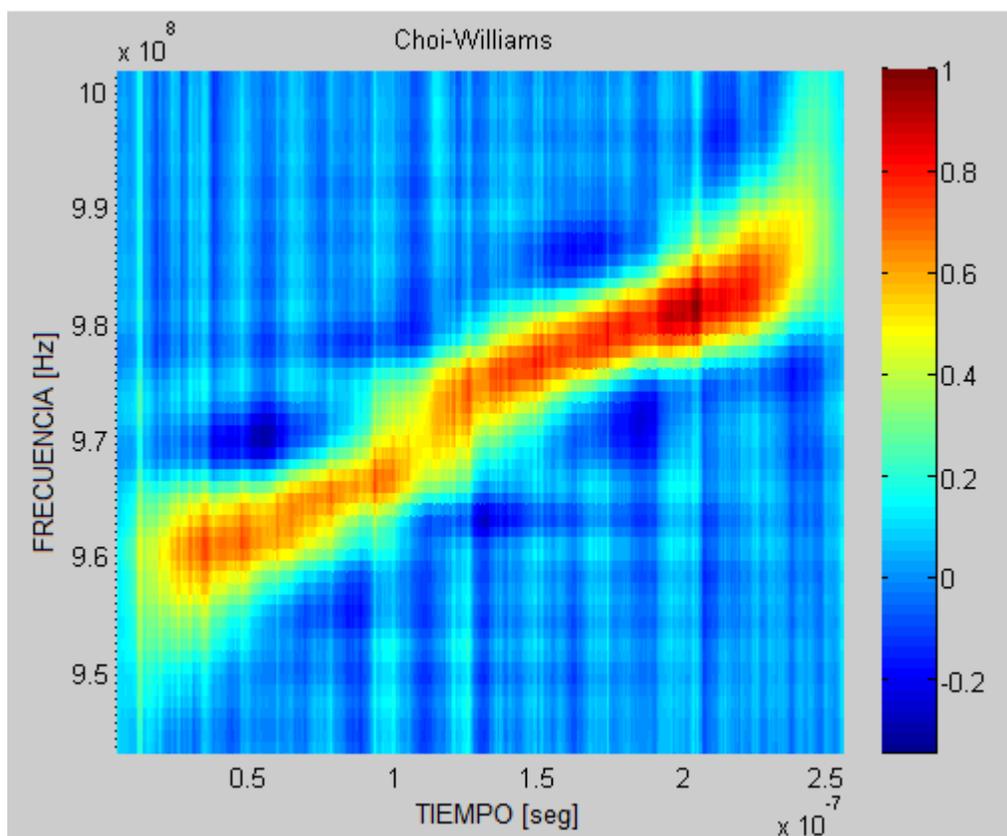


Figura 55. Respuesta de *Choi Williams* con -10 dB de SNR

4.1.6 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL INCLINABLE MULTIFORME

El método propuesto por el Doctor Antonio H. Costa demostró tener mejores resultados que las demás TFR tradicionales ya que existe un mayor control sobre los parámetros del Kernel. Esto permite eliminar una mayor cantidad de

elementos no deseados en TFR. Los resultados se pueden ver en la Figura 56 y Figura 57.

4.1.6.1 SIN RUIDO

La respuesta del método MTED también nos permite detectar la frecuencia de la señal de una manera eficiente en ausencia de ruido. Al comparar los resultados con las demás técnicas tradicionales se puede decir que se asemeja bastante a los resultados de Choi-Williams en ausencia de ruido ya que los términos de interferencia son atenuados considerablemente.

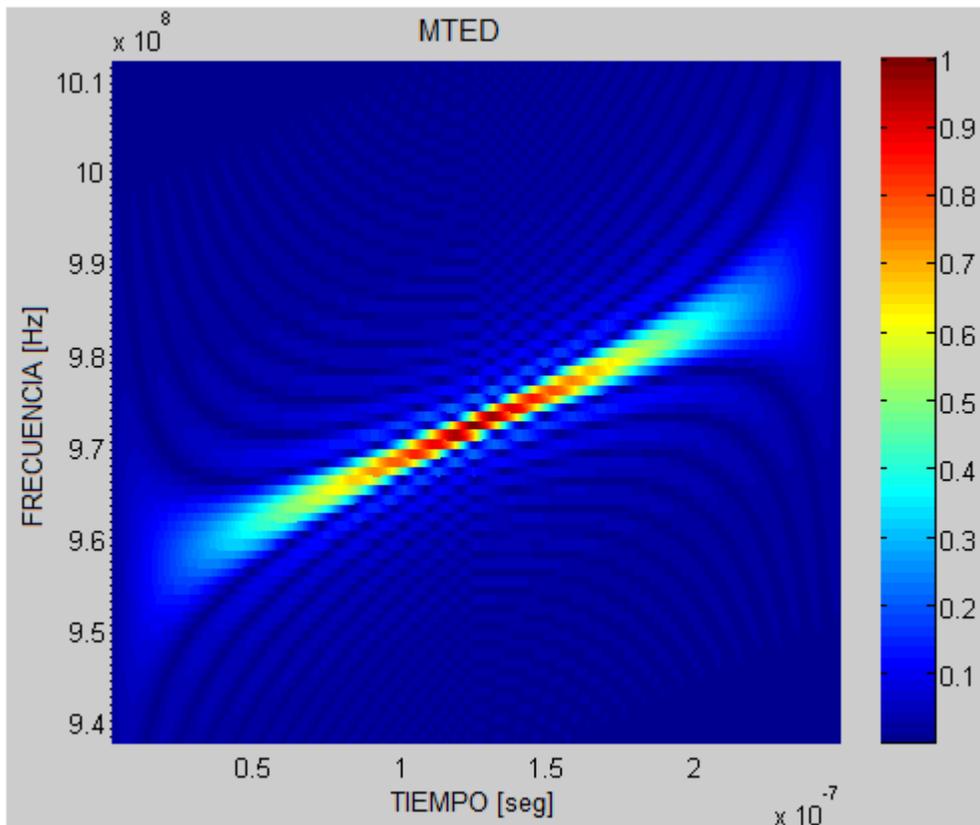


Figura 56 . Multiform Tiltable Exponential Distribution sin ruido.

4.1.6.2 CON RUIDO

Con ruido se tiene una mejor estimación de la frecuencia de la señal pero se puede apreciar que aparecen términos de interferencia alrededor de la componente principal, lo cual se puede prestar para una mala interpretación de los resultados especialmente cuando se busca medir la frecuencia de una manera automática.

El algoritmo de *MTED* fue el que demostró tener los mejores resultados entre las técnicas tradicionales de análisis TF ya que no se ve tan afectado por la presencia del ruido y logra tener una mejor resolución en frecuencia que las demás. Sin embargo la mejor resolución en frecuencia sigue siendo la del sistema *Duffing* cuando se comparan las técnicas tradicionales de TF con el sistema propuesto en esta investigación. Además el sistema Duffing tampoco presenta componentes no deseadas en el espectro tal como si ocurre con *MTED*.

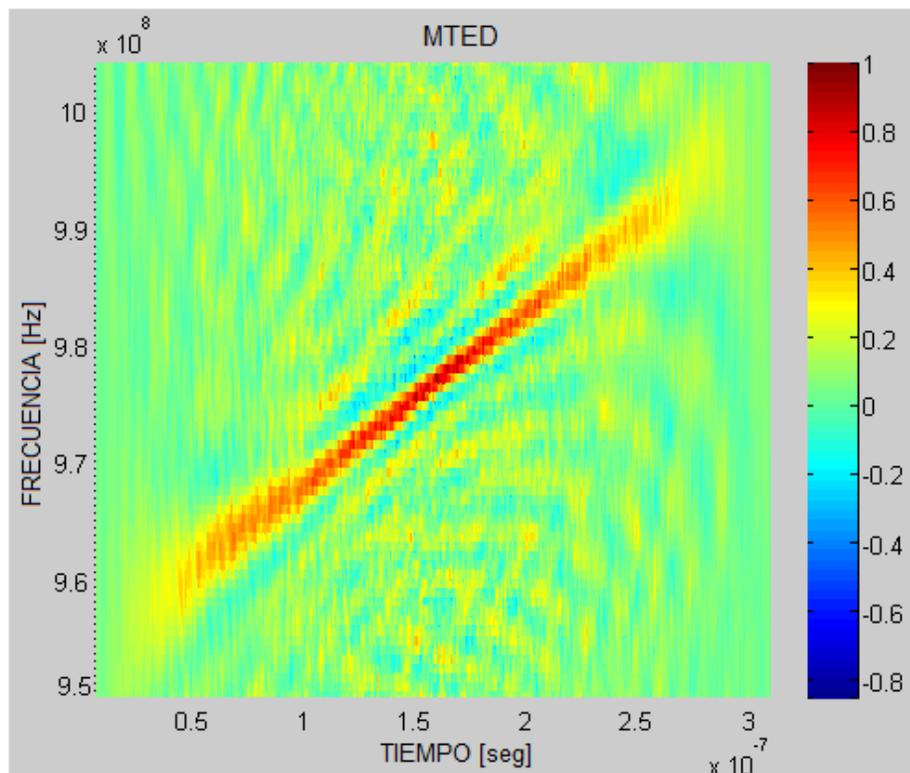


Figura 57 . Multiform Tilttable Exponential Distribution con -10 dB SNR.

4.1.7 RESULTADOS

A continuación se presenta una tabla de resultados con los errores estimados para cada uno de los métodos.

METODO		% ERROR (CHIRP LINEAL)
DUFFING		0.1771 %
STFT		2.3121 %
MTED		0.2844 %
WIGNER-VILLE		0.4811 %
CHOI-WILLIAMS		0.4533 %
WAVELETS	MEYER	1.8762 %
	DAUBECHIES 10	1.8213 %
	CIFLET 5	2.6188 %

Tabla 3. Resultados para la señal “chirp lineal”.

4.2 SEÑAL “CHIRP” CUADRÁTICA

En esta sección se presentan todas las simulaciones que se realizaron con señales “chirp” cuadráticas, es decir donde la fase de la onda varía cúbicamente con el tiempo.

4.2.1 DUFFING ADAPTABLE

4.2.1.1 SIN RUIDO

La primera prueba realizada se hizo con una señal “chirp” cuadrática descrita por la ecuación:

$$y = 0.5 \cos [(5 * 10^9)t + (9 * 10^{14})t^2 - (37 * 10^{19})t^3] \quad 4-3$$

Esta señal abarca un rango de frecuencias que van desde 660 MHz hasta 911 MHz aproximadamente (ver Figura 58). Además se utilizaron 32738 muestras con ventanas de 1024 muestras y un traslape de 512 muestras. Por lo tanto era de esperarse que el sistema implementado con el arreglo de osciladores Duffing adaptable lograra seguir la frecuencia de la señal a lo largo de su duración total en el tiempo.

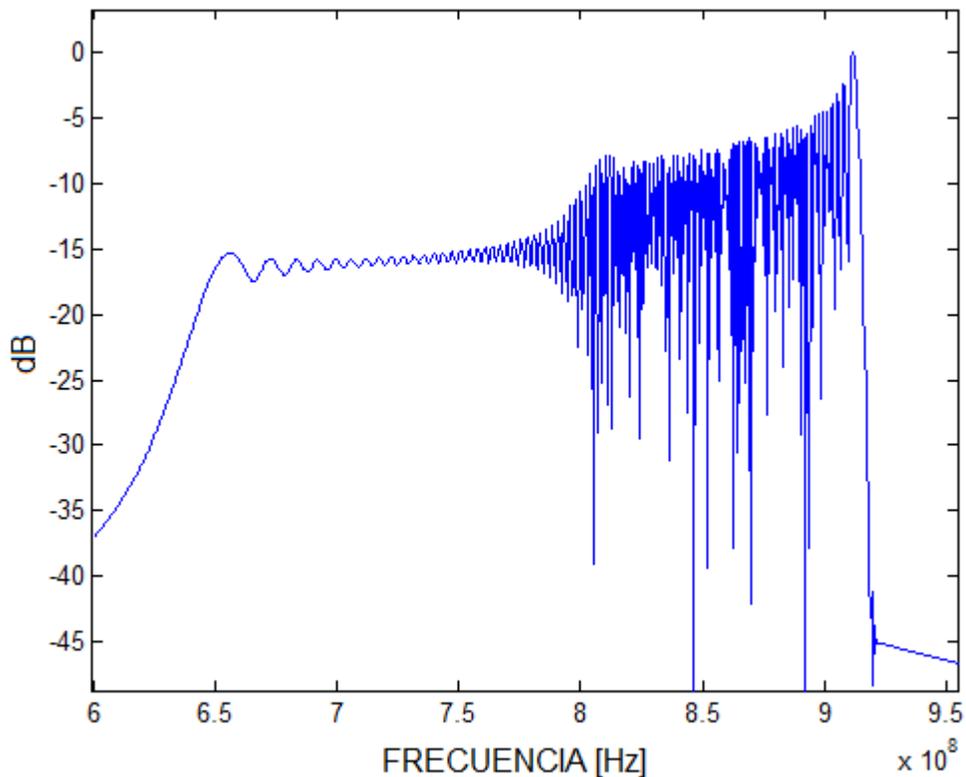


Figura 58. Espectro de la señal de entrada al sistema.

Esta respuesta se puede ver en la Figura 59, la cual presenta resultados confiables ya que el rango de frecuencias detectado se encuentra dentro del mismo rango descrito por la Figura 58.

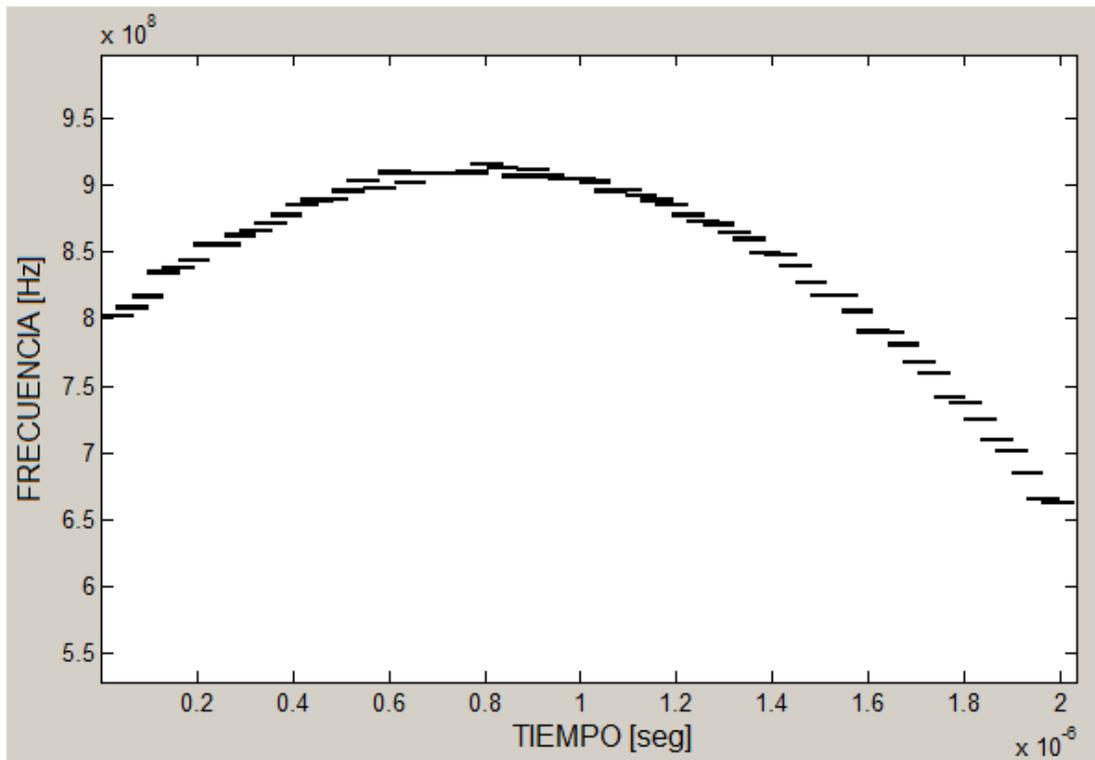


Figura 59. Respuesta del sistema adaptable sin ruido (Tiempo vs Frecuencia).

Al igual que para el caso de la señal “chirp” lineal se puede apreciar que la respuesta del oscilador Duffing presenta una varianza en la estimación de la frecuencia, pero el promedio de los datos generan la respuesta cuadrática que se esperaba con esta señal “chirp”.

4.2.1.2 CON RUIDO

La segunda prueba realizada se hizo con otra señal “chirp” cuadrática en presencia de ruido (-10 dB SNR) descrita por la ecuación:

$$y = 0.5 \cos [(5 * 10^9)t + (15 * 10^{14})t^2 - (98 * 10^{19})t^3] + n(t) \quad 4-4$$

Esta señal abarca un rango de frecuencias que van desde 796 MHz hasta 918 MHz aproximadamente (ver Figura 60). Se utilizaron 16384 muestras con ventanas de 1400 muestras y un traslape de 1260 muestras.

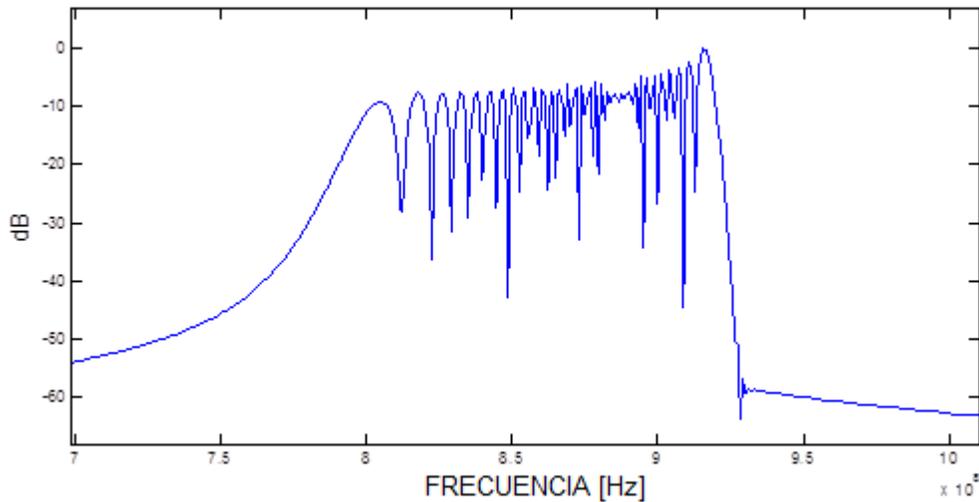


Figura 60. Espectro de la señal de entrada al sistema sin ruido.

La respuesta del sistema Duffing adaptable se puede ver en la Figura 61, la cual presenta resultados confiables ya que el rango de frecuencias detectado se encuentra muy cercano al rango descrito por la Figura 60.

En este caso se puede ver que el sistema es capaz de realizar un seguimiento a la frecuencia de la señal. En la imagen se ve claramente que la respuesta del sistema tiende a desviarse de la frecuencia real pero automáticamente recupera su trayectoria, lo cual demuestra que él mismo se va corrigiendo cuando comete algunos errores en la estimación de la frecuencia. El tipo de alteraciones que se aprecian, se generan debido a que en ciertas iteraciones el método de medición de frecuencia presenta algunas imprecisiones en la medida causadas por el alto nivel de ruido.

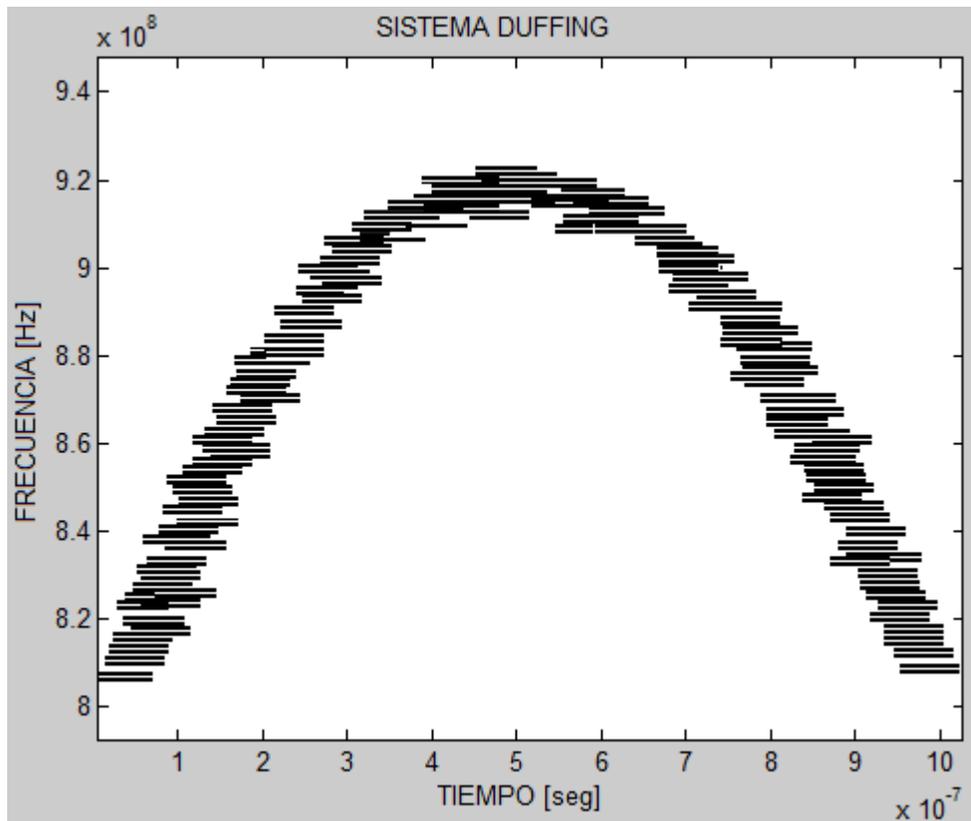


Figura 61 Respuesta del sistema adaptable (chirp lineal a -10 dB de SNR).

Similarmente a lo anterior y con fines de comparación ahora se realiza el estudio con STFT, Wigner-Ville, Wavelets, Choi-Williams y MTED.

4.2.2 STFT

4.2.2.1 SIN RUIDO

La primera comparación realizada se hizo utilizando la transformada de tiempo corto de Fourier. Este resultado muestra el comportamiento no lineal de la señal "chirp" pero la resolución en frecuencia es baja al igual que ocurre para el caso de la señal "chirp" lineal.

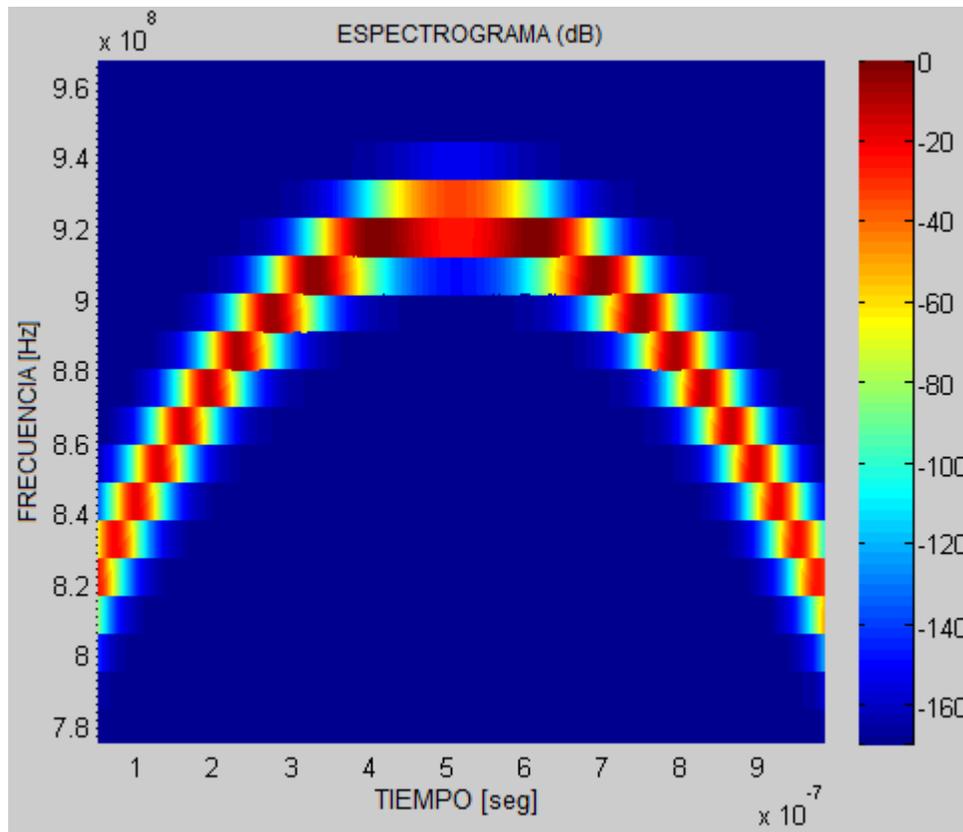


Figura 62. STFT con “chirp” cuadrática sin ruido

4.2.2.2 CON RUIDO

La Figura 63 muestra el resultado de la simulación. En esta imagen se puede ver que el ruido está presente en todo el espectro al igual que ocurrió en la simulación con la señal “chirp” lineal, lo cual es una desventaja al compararlo con el sistema Duffing adaptable ya que con el sistema Duffing el ruido se elimina por completo de la representación Tiempo-Frecuencia que se obtiene. En comparación con la resolución en frecuencia se obtuvo una menor resolución en la señal “chirp” cuadrática que con la señal “chirp” lineal para el caso de la STFT, especialmente en el punto con mayor no-linealidad, es decir, el punto de mayor curvatura.

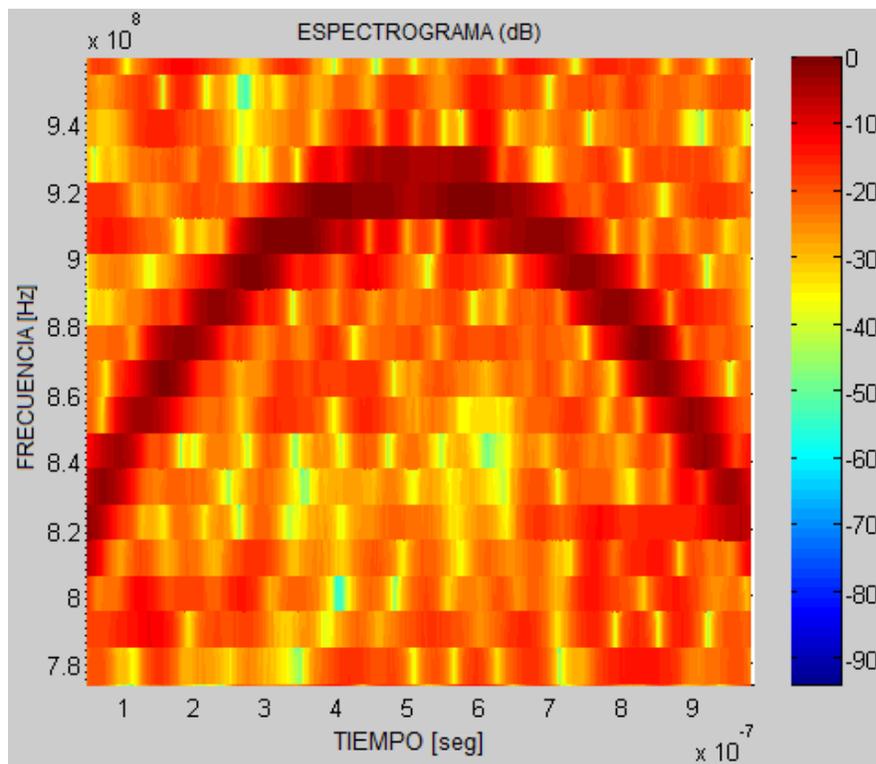


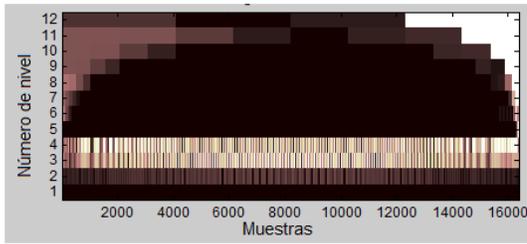
Figura 63. Respuesta de la STFT con -10 dB de SNR

4.2.3 WAVELETS

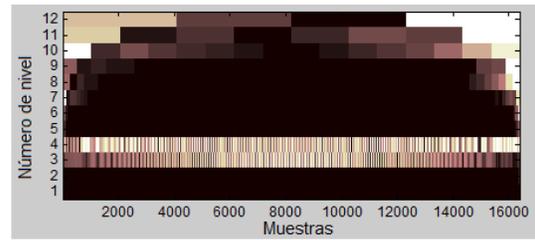
Al igual que con las comparaciones anteriores, en este caso se inició realizando el análisis de la señal sin ruido. Para la selección de la *Wavelet* que se utilizó se tuvieron las mismas consideraciones que en el caso de la “chirp” lineal. Por lo tanto se seleccionaron Wavelets que tuvieran el mayor número de momentos o que permitieran variar sus momentos ya que la señal que se está estudiando presenta cambios suaves.

4.2.3.1 SIN RUIDO

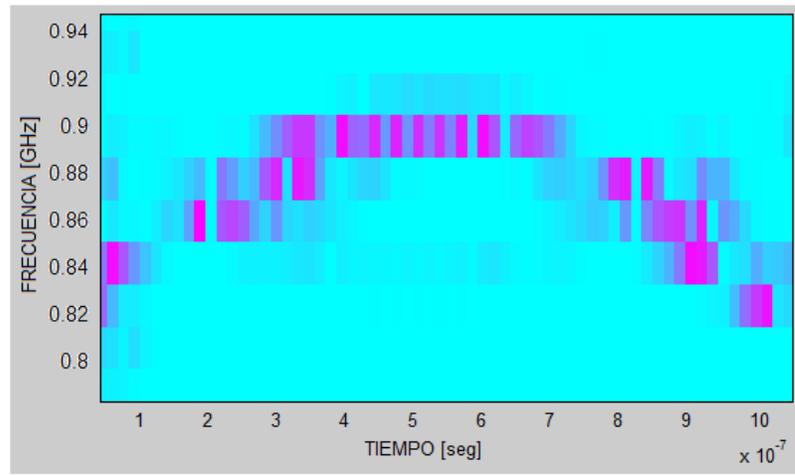
En las simulaciones con *Wavelet Discreto* las Wavelets que presentaron mejores resultados fueron *Meyer* y *Daubechies 10*, ambas con 7 niveles de descomposición para obtener una mejor resolución de frecuencia (ver Figura 64 a y b).



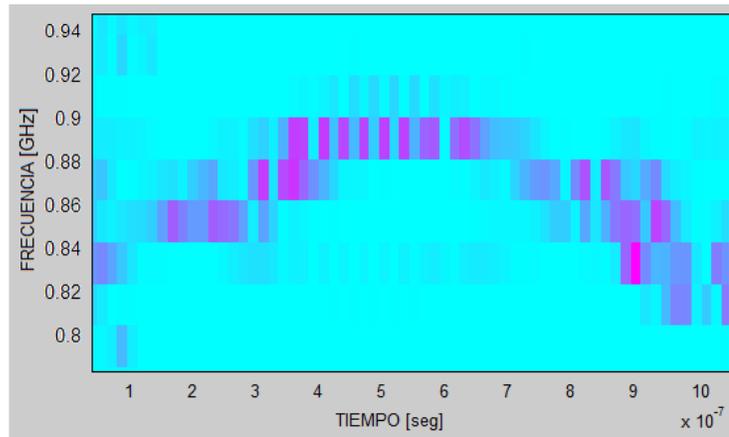
a) Daubechies 10, nivel 12



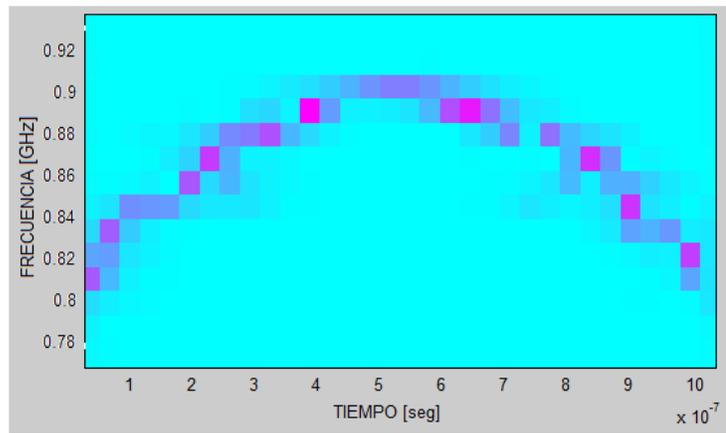
b) Meyer nivel 12



c) Coiflet 5, nivel 8



d) Daubechies 10, nivel 8



e) Meyer nivel 9

Figura 64. Respuesta de Wavelet sin ruido.

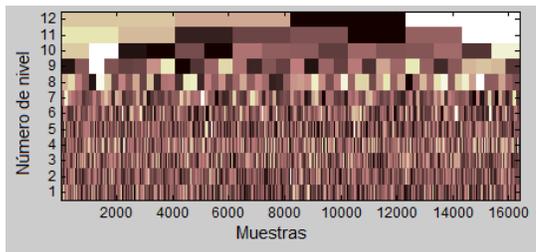
Agregar mas niveles de descomposición no mejora la respuesta ya que lo único que se logra es subdividir la banda de bajas frecuencias. Con el fin de ilustrar esto, se muestran las Figura 64 a y b con 12 niveles de descomposición. Este método no permite una clara detección de la frecuencia de la señal ya que la resolución de frecuencia es muy baja. Esto se debe a que la escala en la que se detecta la señal abarca un rango muy amplio de frecuencia tomando prácticamente toda la señal. Es por esto que la señal solo se logra percibir en las escalas 3 y 4 para *Meyer*. Para el caso de *Daubechies* la respuesta abarca un mayor número de niveles pero aun es difícil conocer que tipo de señal es porque se puede confundir con una “chirp” lineal, además no se logra tener una idea clara de cual es la frecuencia instantánea.

Debido a la mala estimación de frecuencia del caso anterior, al igual que antes, se decidió utilizar *Wavelet Packet* ya que tiene mejor resolución en frecuencias altas y bajas. Las Wavelets que presentaron mejores resultados fueron *Coiflet 5*, *Daubechies 10* y *Meyer*, tal como ocurre para el caso de la “chirp” lineal. *Daubechies* y *Coiflet* presentan sus mejores resultados con 8 niveles de descomposición mientras que *Meyer* presenta su mejor respuesta

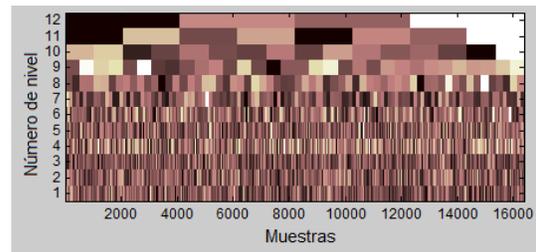
aplicando 9 niveles de descomposición. En las Figura 64 *c*, *d* y *e* se muestran sus respectivos resultados. La Wavelet que presenta mejores resultados es la de *Meyer* de la misma forma como sucede en el caso de “chirp” lineal.

4.2.3.2 CON RUIDO

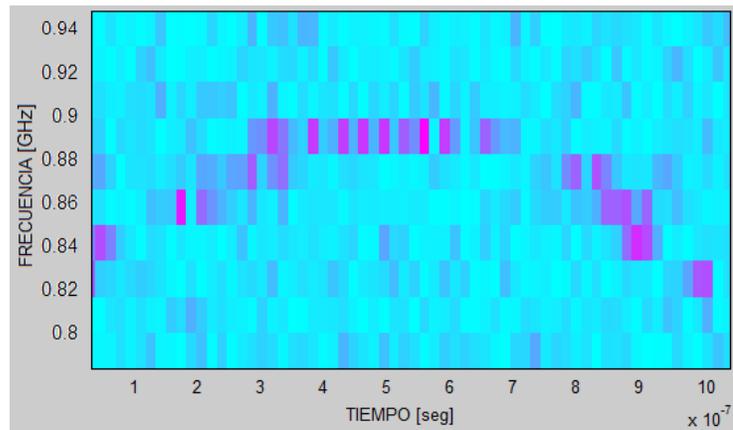
En presencia de ruido, con el método normal de *Wavelet Discreto* no es posible detectar la señal ya que el nivel de ruido afecta seriamente la medición (ver Figura 65 a y b).



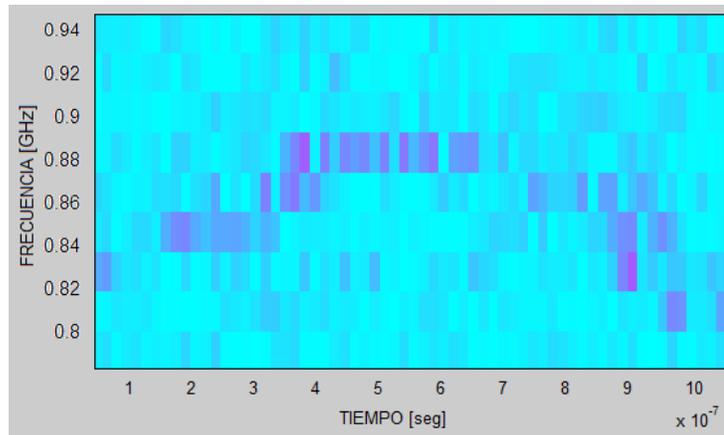
a) Daubechies 10, nivel 12



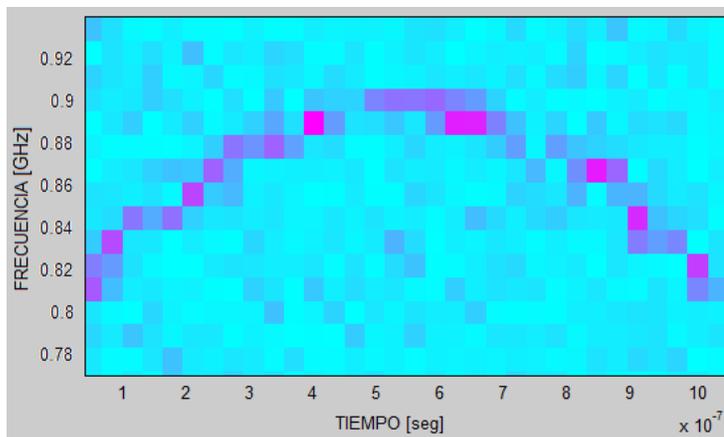
b) Meyer nivel 12



c) Coiflet 5, nivel 8



d) Daubechies 10, nivel 8



e) Meyer nivel 9

Figura 65. Respuesta de Wavelet con -10 dB de SNR.

En el caso de *Wavelet Packet* aun es posible realizar una detección de la señal pero con una resolución temporal y de frecuencia muy pobres sobretodo para las *Wavelets Daubechies 10* y *Coiflet 5*. Con la *Wavelet Meyer* se logra percibir los cambio de frecuencia pero con baja resolución de frecuencia y si se desea mejorar la resolución entonces el proceso de filtrado utilizado por *Wavelet Packet* tiende a desaparecer la energía de la señal haciendo que no sea posible percibir la señal.

Las simulaciones con Wavelets presentan los mismos resultados que se obtuvieron en el caso de la “Chirp” lineal. Este método no es muy adecuado

ya que se ve limitado por la resolución frecuencial y por esta razón es muy difícil hacer una medición muy exacta de la frecuencia instantánea. En este caso solo es posible hacer una apreciación del posible rango en el que se encuentra la frecuencia instantánea de la señal.

4.2.4 DISTRIBUCIÓN DE WIGNER-VILLE

La siguiente comparación se hizo utilizando la distribución de *Wigner-Ville* y se presenta en la Figura 66 y Figura 67

4.2.4.1 SIN RUIDO

La respuesta de *Wigner-Ville* deja ver con claridad el inconveniente que se presenta cuando existen componentes de la misma frecuencia en diferentes instantes de tiempo. Por esta razón aparecen términos de interferencia o elementos cruzados como se les conoce comúnmente. Estos términos generan un error en la estimación de la medida de la frecuencia aun en ausencia de ruido, lo cual disminuye en gran medida la fiabilidad del método para la detección de este tipo de señales “chirp” cuadráticas ya que se puede confundir con una señal de múltiples componentes de frecuencia. Estas componentes adicionales de frecuencia que aparecen en la TFR se deben a que el método de Wigner –Ville funciona correctamente solo para señales “chirp” lineales y por ende las demás TFR basadas en Wigner-Ville padecen el mismo inconveniente con las “chirp” no lineales.

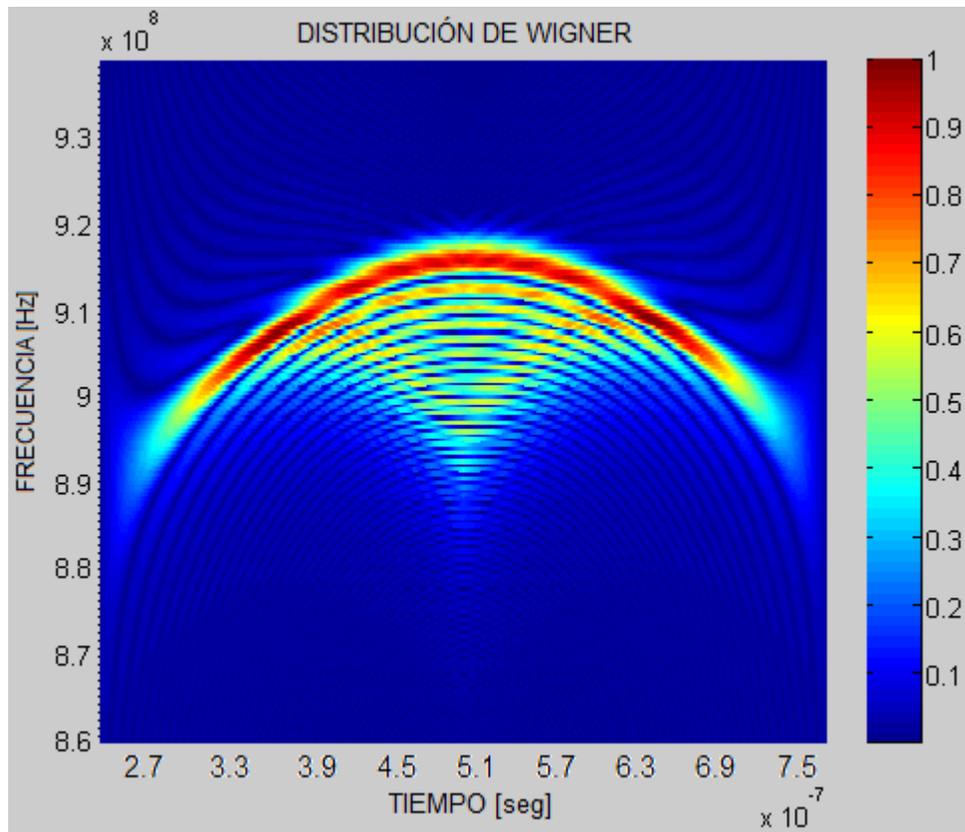


Figura 66. Wigner-Ville Distribution sin ruido.

4.2.4.2 CON RUIDO

Al ver la respuesta de *Wigner-Ville* con ruido es posible identificar la frecuencia de la señal, pero de una manera no muy precisa. Esta imagen permite ver claramente como la respuesta se ve seriamente afectada por el ruido presente en la señal. Además las componentes no deseadas que aparecen mediante este método siguen apareciendo en el análisis con ruido generando una mayor imprecisión en la medida. Estas componentes de frecuencia adicionales son una gran desventaja cuando se compara la respuesta con el sistema Duffing debido a que éste si está diseñado para detectar una señal chirp con cualquier grado de no-linealidad, mientras que *Wigner-Ville* no.

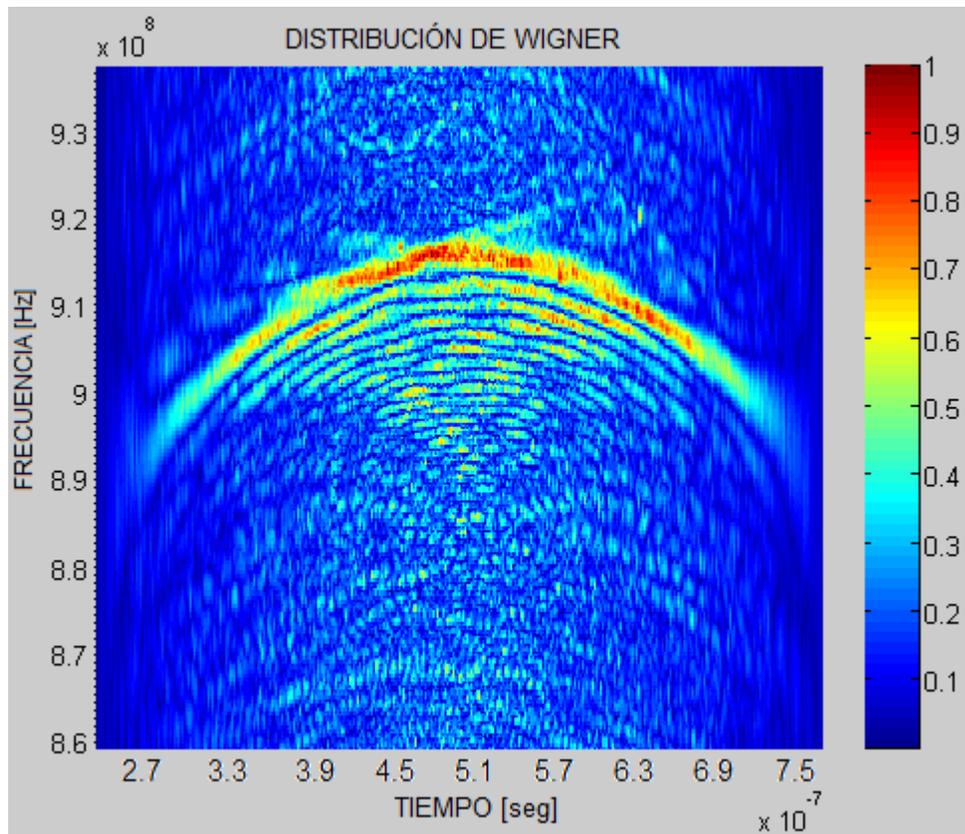


Figura 67. Respuesta de *Wigner – Ville Distribution* con -10 dB de SNR.

4.2.5 CHOI WILLIAMS

4.2.5.1 SIN RUIDO

Al aplicar *Choi-Williams* a la señal de entrada sin ruido se realiza una estimación de la frecuencia en una mejor forma que con el método de *Wigner-Ville* ya que precisamente la función del Kernel es intentar atenuar las componentes tal como se demostró con la señal “chirp” lineal. A pesar de esto siguen apareciendo ciertos términos cruzados que generan error en la estimación de la frecuencia principalmente en el punto de máxima curvatura de la gráfica (Ver Figura 68). El método de *Choi-Williams* presenta una mayor exactitud en la medición de la frecuencia instantánea de la señal comparándolo con la STFT y WVD.

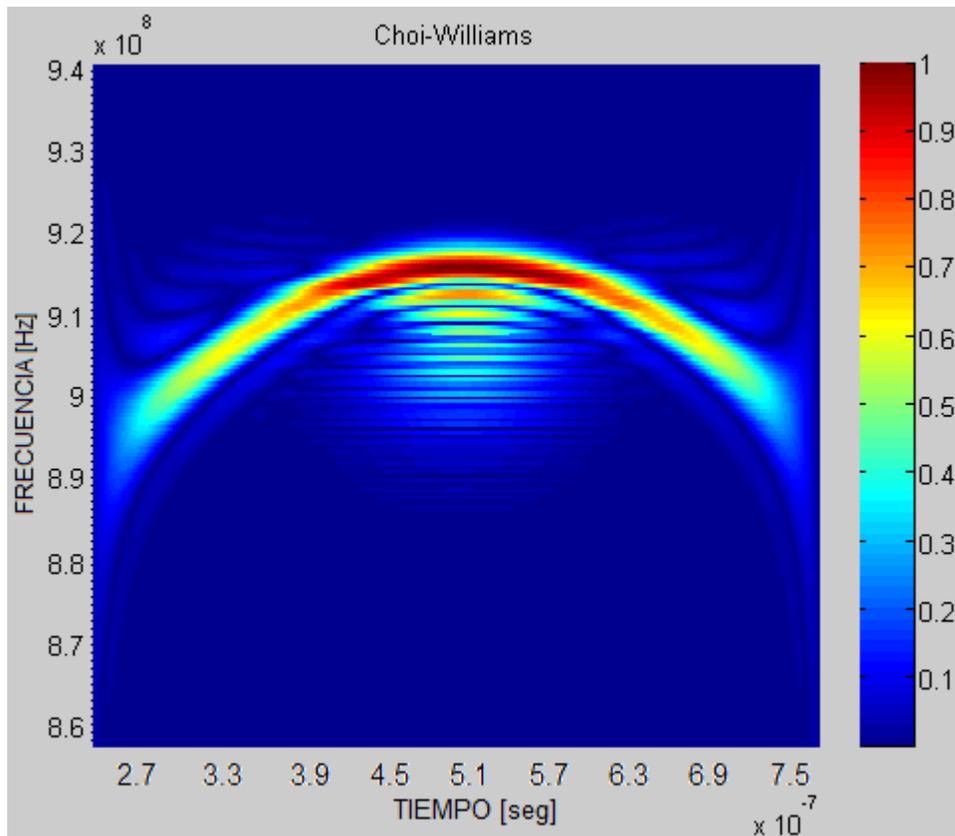


Figura 68. Respuesta de *Choi Williams* sin ruido.

4.2.5.2 CON RUIDO

Finalmente la Figura 69, permite identificar la frecuencia de la señal de una manera no muy precisa ya que la resolución en frecuencia se ve seriamente afectada por el ruido tal como ocurre con WVD y STFT. Con este método, las componentes no deseadas que aparecen en WVD se atenúan considerablemente. lo cual representa una ventaja en la medición.

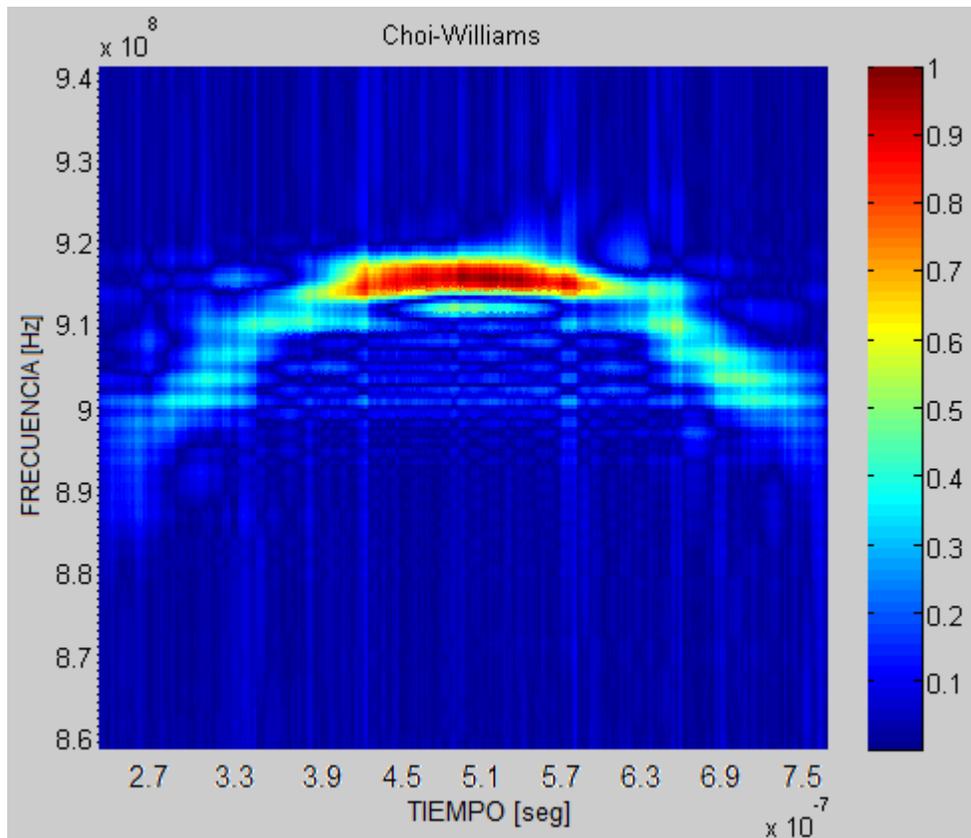


Figura 69. Respuesta de *Choi Williams* con -10 dB de SNR.

4.2.6 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL INCLINABLE MULTIFORME

Debido a que no existe un Kernel diseñado específicamente para señales “chirp” cuadráticas, se utilizó el Kernel de *forma cruzada* ya que éste presenta los mejores resultados para este caso debido a que fue diseñado para señales chirp lineales con pendiente positiva y negativa. Este Kernel es el que genera una mejor respuesta dentro de los Kernels de MTED debido a su forma de equis (X), el cual presenta vértices que se asemejan al vértice o al punto de máxima curvatura de la señal “chirp” cuadrática.

4.2.6.1 SIN RUIDO

En ausencia de ruido el desempeño de MTED es bastante bueno ya que no presenta términos de interferencia, lo cual permite identificar muy bien la variación de la frecuencia a lo largo del tiempo. Este resultado se puede observar en la Figura 70.

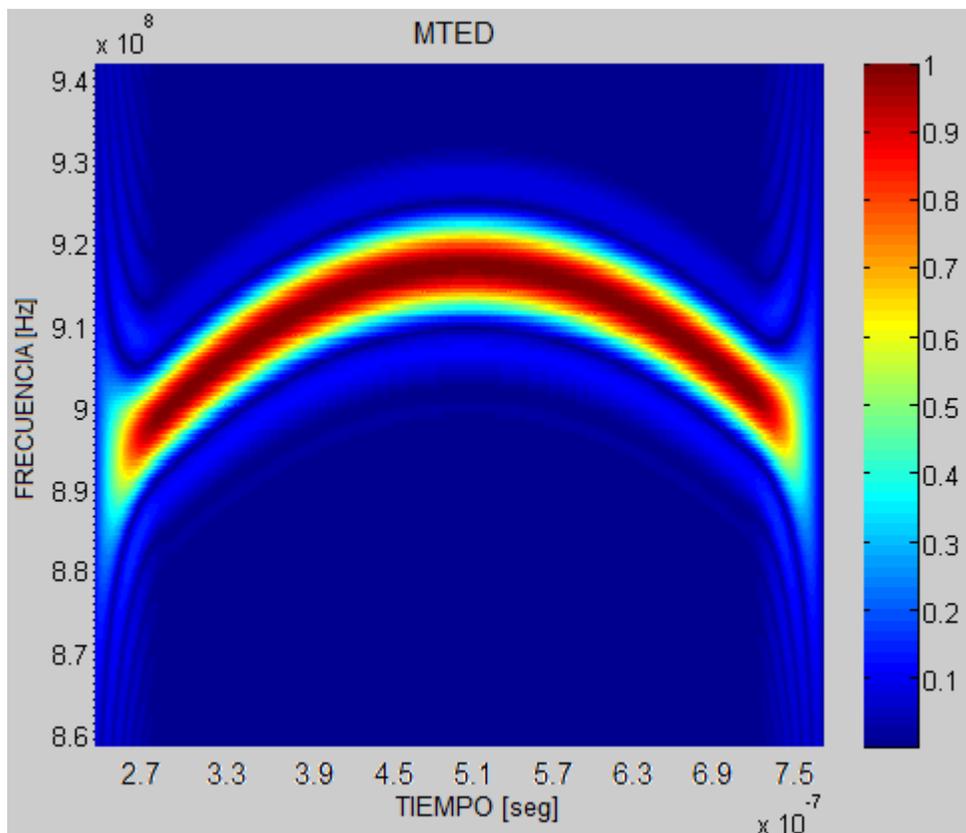


Figura 70 .MTED sin ruido.

4.2.6.2 CON RUIDO

Con ruido en la señal se percibe una disminución en la estimación de la frecuencia, pero aun así sigue presentando mejores resultados que *Choi-Williams*. También se puede ver como aparece el ruido en todo el espectro, lo cual se puede prestar para malas interpretaciones de los resultados.

Una vez más el algoritmo de *MTED* fue el que demostró tener los mejores resultados entre las técnicas tradicionales de análisis TF ya que no se ve tan afectado por la presencia del ruido y logra tener una mejor resolución en frecuencia que las demás. Además, tampoco presenta términos cruzados. Por lo tanto este es el mejor método con el que se puede comparar el sistema Duffing ya que presenta los mejores resultados y permite demostrar que la resolución en frecuencia y la medición del sistema adaptable Duffing son altamente confiables.

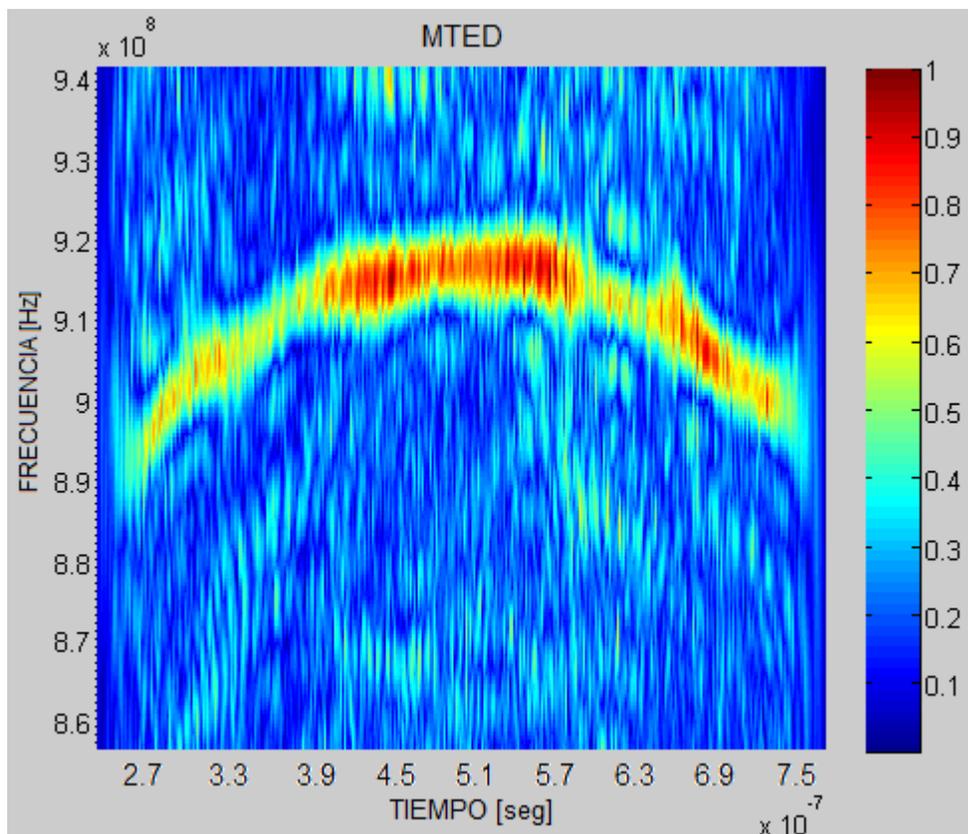


Figura 71. MTED con -10 dB de SNR.

4.2.7 RESULTADOS

A continuación se presenta una tabla de resultados con los errores estimados para cada uno de los métodos.

METODO		% ERROR (CHIRP CUADRATICA)
DUFFING		0.1866 %
STFT		2.4701 %
MTED		0.7835 %
WIGNER-VILLE		0.8755 %
CHOI-WILLIAMS		0.8143 %
WAVELETS	MEYER	2.5359 %
	DAUBECHIES 10	5.9523 %
	CIFLET 5	6.6221 %

Tabla 4. Resultados para la señal “chirp Cuadrática”.

4.3 APLICACIÓN DEL METODO DE MONTE CARLO

Las simulaciones que se mostraron anteriormente con ruido se realizaron a -10 dB de SNR. Este fue el nivel de ruido al cual lograron llegar las TFR tradicionales, o al menos los resultados a este nivel se consideraron confiables y con un nivel de error no muy alto. El oscilador Duffing obtiene excelentes resultados en presencia de ruido y se demostró que se podía llegar a medir una señal con hasta -28.5 dB de SNR para el caso de una señal con frecuencia constante. Por lo tanto se esperaba que para las señales “chirp” se lograra obtener resultados bastante buenos con niveles altos de ruido. El máximo nivel al cual se logró llegar fue a -17 dB de SNR para señales “chirp”, esto se debe a que los cambios de frecuencia no permiten medir con la misma precisión la frecuencia de la señal y por ende no se logra llegar a un nivel tan alto de ruido como en el caso de las frecuencias constantes. Sin embargo, -17 dB de SNR sigue siendo un valor bastante bajo

de SNR y además, las TFRs estudiadas no logran realizar mediciones de frecuencia a ese nivel.

Debido a que el ruido es una señal aleatoria, es necesario realizar la simulación de una misma señal con diferentes escenarios, es decir, con distintas señales de ruido con el fin de analizar su comportamiento. El método de Monte Carlo en esencia consiste en tomar varias muestras y superponerlas con el fin de obtener un valor promedio al final. Para hacer esta estimación se realizaron 50 simulaciones con un ruido distinto en cada una de ellas y manteniendo siempre la misma señal “chirp” cuadrática descrita por la ecuación

$$y = 0.5 \cos [(5 * 10^9)t + (15 * 10^{14})t^2 - (98 * 10^{19})t^3 + n(t)] \quad 4-5$$

La relación señal a ruido utilizada fue de 0 dB y -17 dB. Se utilizaron 15000 muestras para la señal con una frecuencia de muestreo de 15.92 Ghz (100 GRad/seg). Por lo tanto la duración de la señal es de 942.4 nS, con una frecuencia mínima de 795.8 MHz y una frecuencia máxima de 917.6 MHz.

Estas simulaciones se realizaron con la señal “chirp” cuadrática ya que ésta es la que presenta mayores cambios de frecuencia y por lo tanto se genera un mayor grado de error en la estimación de la frecuencia. Por consiguiente estos resultados son igualmente válidos para una señal “chirp” lineal.

A continuación se muestran los resultados obtenidos:

- **Graficas superpuestas para Monte Carlo.**

50 gráficas (Lineas azules) y frecuencia instantanea promedio (Linea roja)

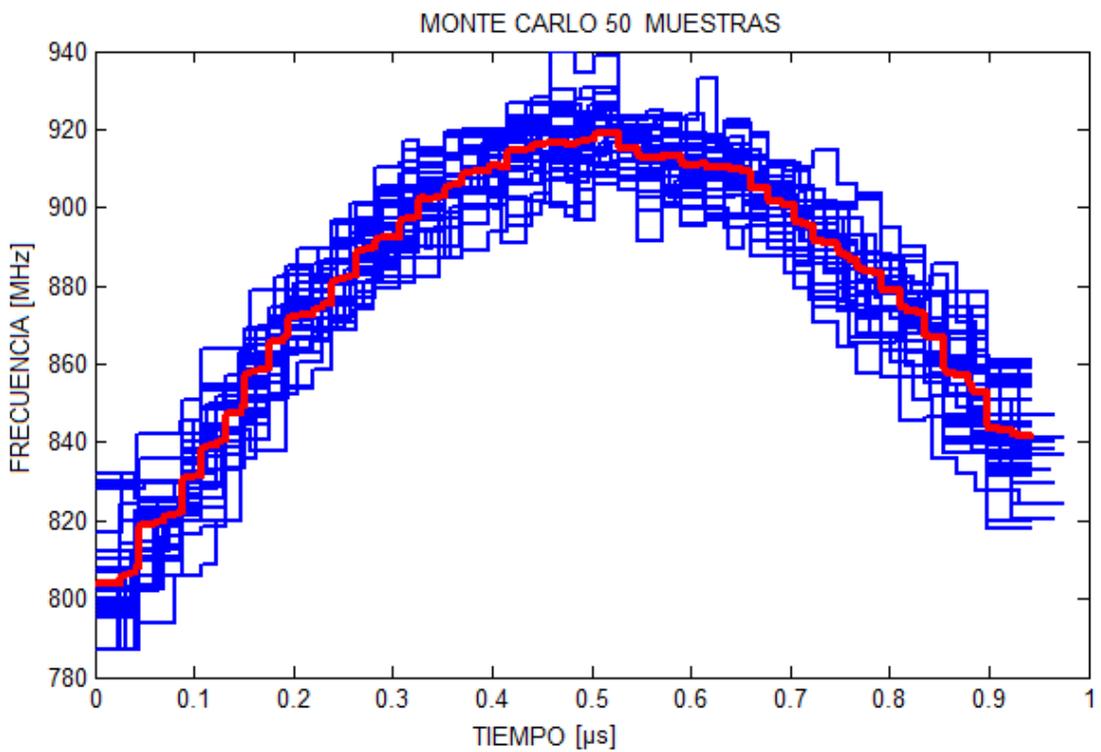
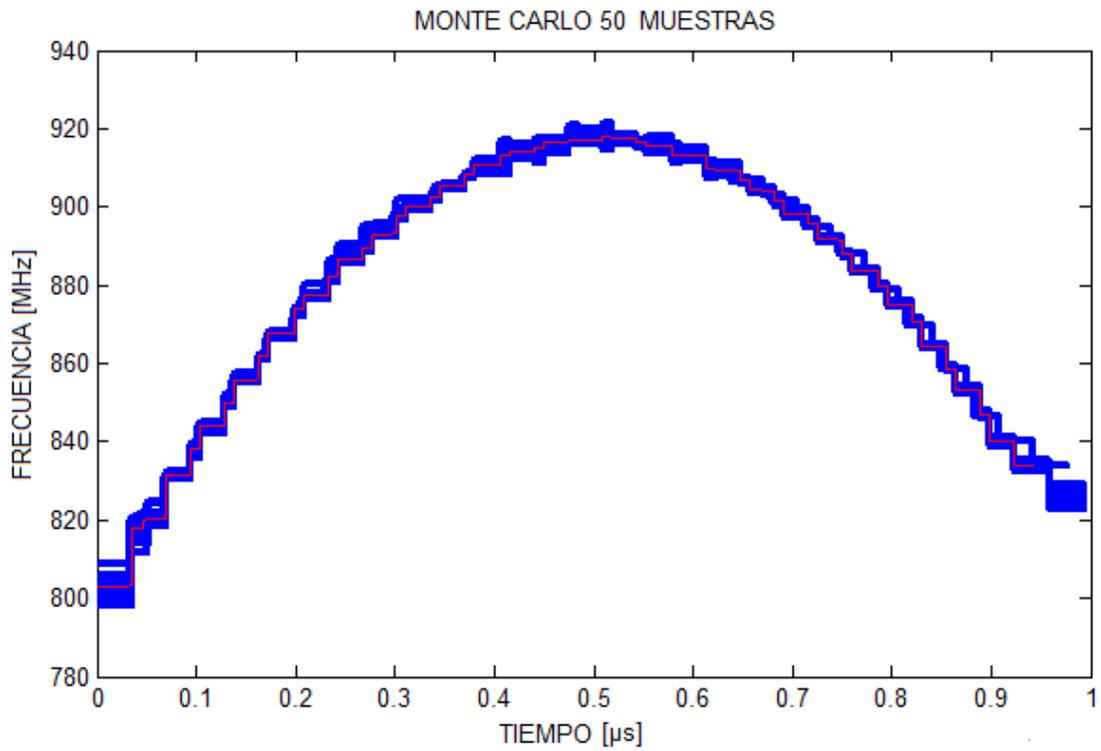
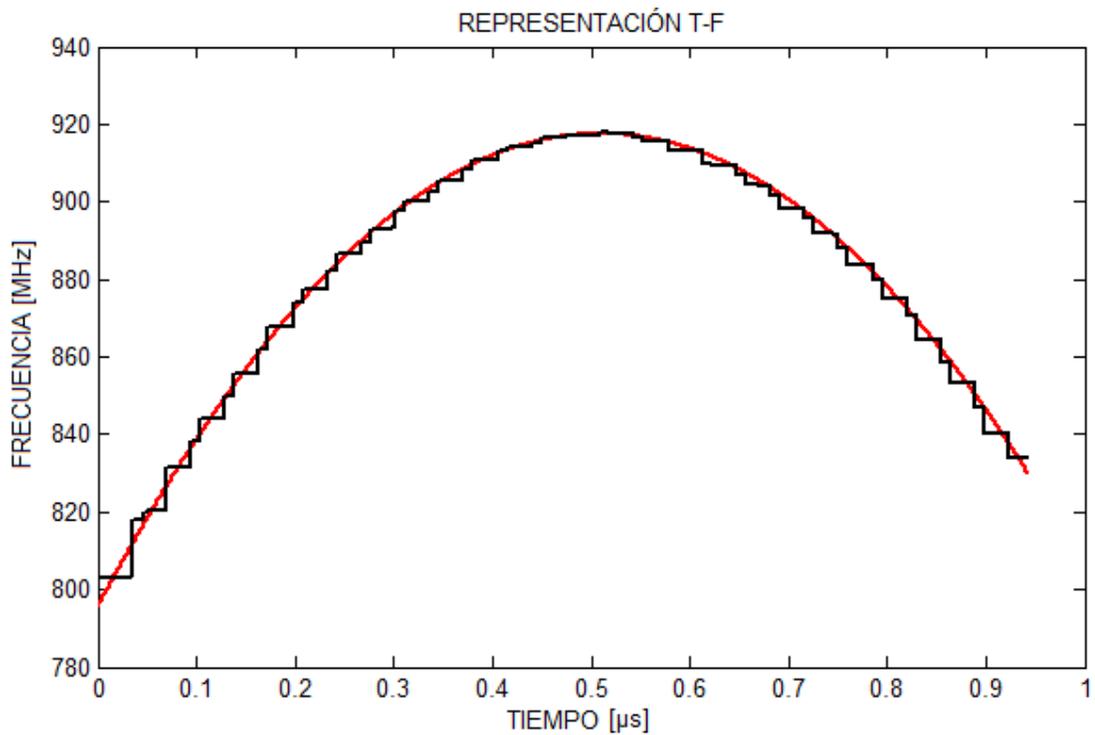


Figura 72. 50 gráficas superpuestas y su valor medio resultante. Superior 0 dB de SNR, Inferior -17 dB de SNR.

En la Figura 72 se puede apreciar que existe una varianza en las muestras especialmente para el caso de las simulaciones con -17 dB de SNR como era de esperarse. Para el caso de los resultados a 0 dB de SNR se puede ver que el sistema no se ve seriamente afectado, demostrando así que aun con este nivel de ruido se puede detectar la frecuencia instantánea de la señal de una manera confiable y precisa.

- **Frecuencia instantánea teórica (Línea Roja)**
Frecuencia Instantánea estimada o promedio (Línea Negra)



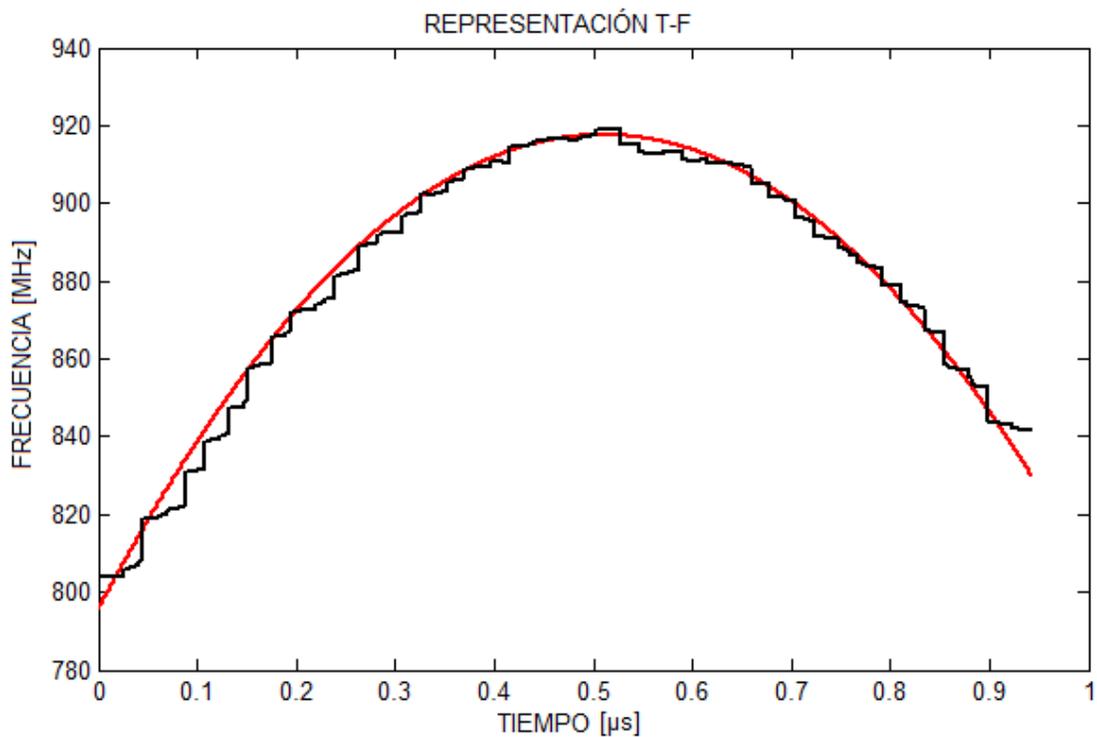


Figura 73. Frecuencia Teórica y Frecuencia Estimada Superior 0 dB de SNR, Inferior -17 dB de SNR.

Al comparar la respuesta promedio de todas las simulaciones con el valor teórico de la frecuencia instantánea se observa que el sistema Duffing logra seguir las variaciones no lineales de la frecuencia con un error bajo, especialmente en el punto máximo de curvatura de la gráfica. Es claro que existe un error en la estimación en presencia de altos niveles de ruido, pero la ventaja más importante es que no existe ninguna otra componente de frecuencia o término cruzado tal como si ocurre con las demás TFR.

- **Porcentaje de error instantáneo (Línea azul)**
Error Promedio (Línea roja)
0 dB = 0.1796 % y -17 dB = 0.3065%

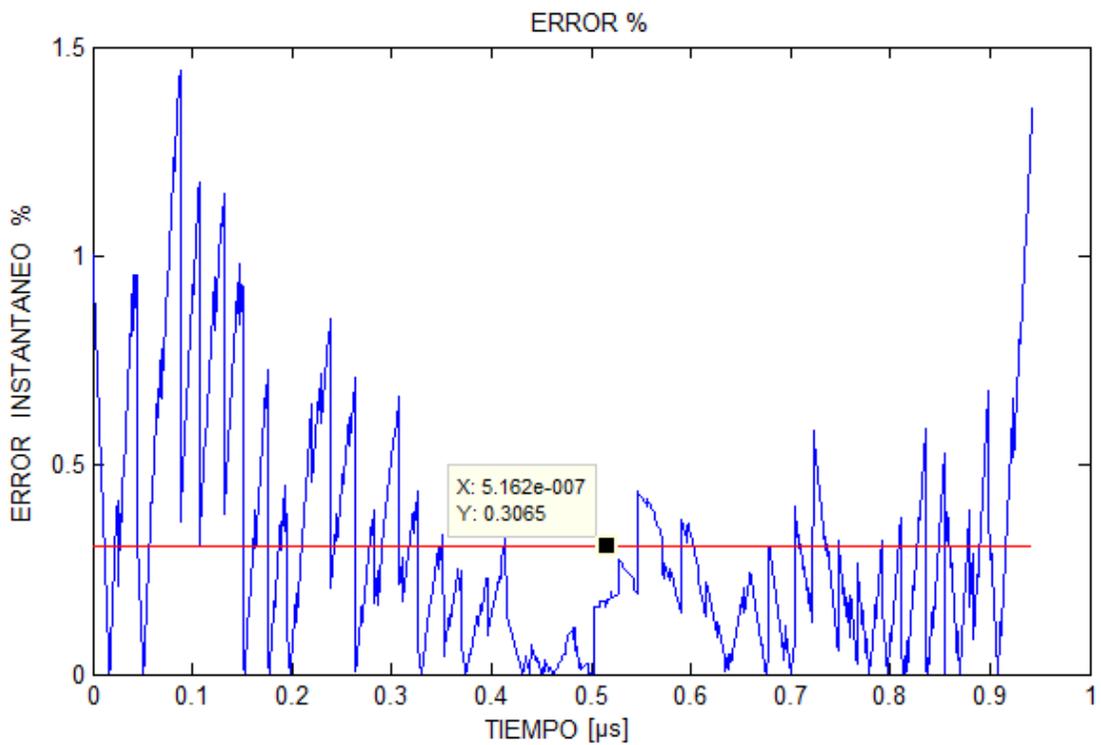
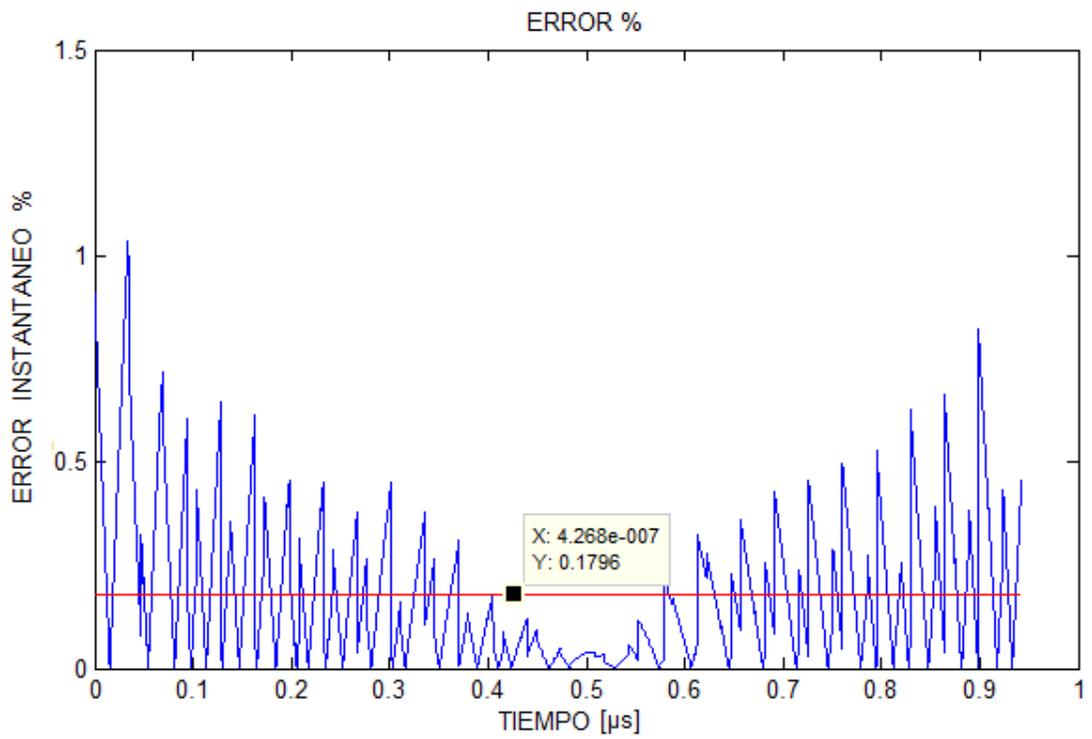


Figura 74. Error instantáneo y error promedio. Superior 0 dB de SNR, Inferior -17 dB de SNR.

Tal como ya se mencionó, el menor porcentaje de error se presenta cuando la representación TF presenta su máximo nivel de curvatura para ambos casos. Además, se puede ver que en general el error se mantiene por debajo del orden del 1%.

- ***Desviación estándar instantánea (Líneas Azules)***

La desviación estándar instantánea es un vector que contiene la desviación estándar de cada instante de tiempo, considerando las 50 muestras de cada posición en el vector.

Desviación estándar promedio (Líneas rojas)

La desviación estándar promedio es la media del vector que contiene la desviación estándar instantánea.

Frecuencia Instantánea estimada o promedio (Línea Negra)

La desviación estándar y por ende la varianza para el caso de 0 dB de SNR es casi nula o al menos se puede decir que todas las pruebas con este nivel de ruido van a tener prácticamente el mismo resultado. A diferencia del caso anterior, con un nivel de -17 dB de SNR si se tiene una varianza un poco mayor pero los resultados se siguen manteniendo un un rango de estimación confiable ya que no superan un error del 1.5% para el peor de los casos.

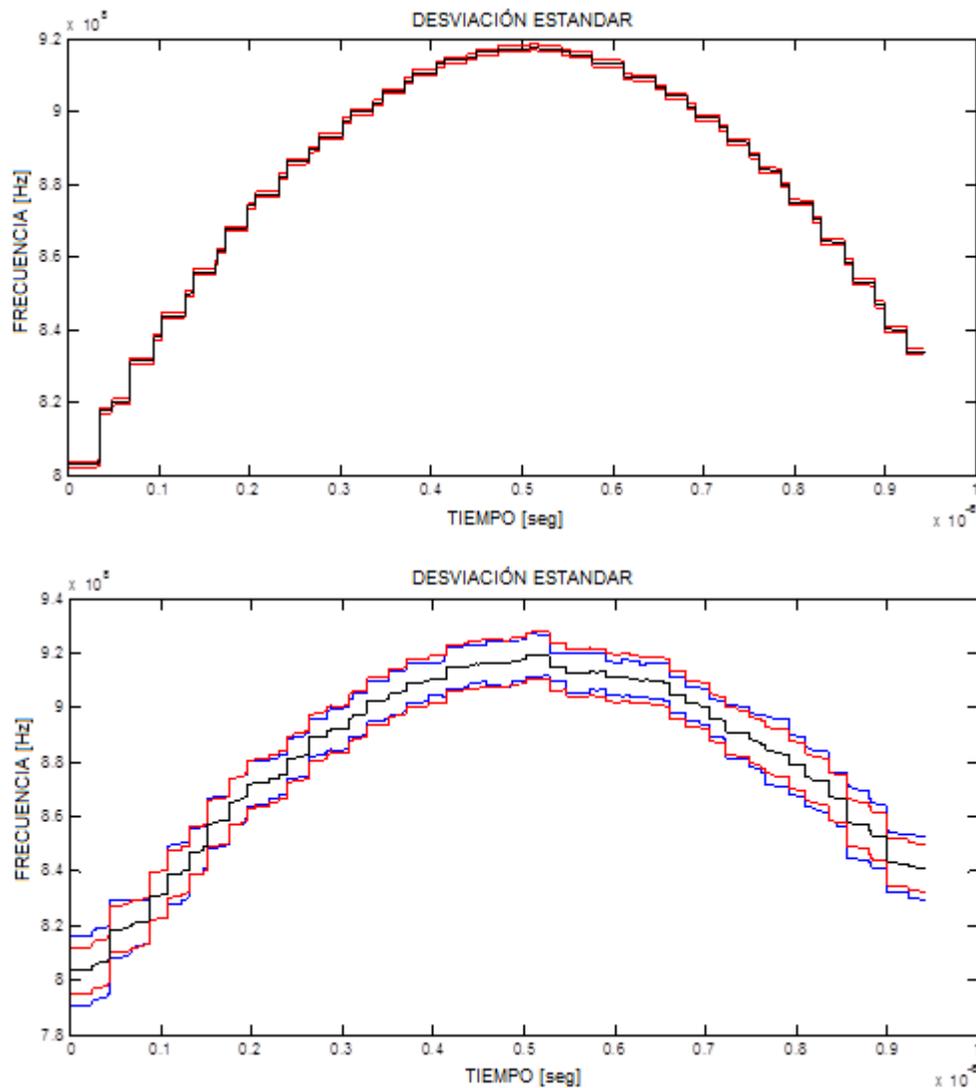


Figura 75. Desviación estándar. Superior 0 dB de SNR, Inferior -17 dB de SNR.

Como resultado de todas las pruebas y comparaciones realizadas, se puede afirmar que el sistema de representación TF basado en osciladores Duffing presenta resultados excelentes en presencia de señales ruidosas. Esto se demostró al comparar los resultados obtenidos con otras técnicas tradicionales de análisis TF y con el análisis de Monte Carlo que permitió realizar un análisis estadístico del sistema global.

5. CONCLUSIONES

La primera y más importante de las conclusiones de este trabajo, es afirmar que si se logró cumplir con el objetivo de proponer un método para detectar señales “chirp” por medio del oscilador Duffing.

Los resultados obtenidos lograron cumplir y superar las expectativas que se tenían con las hipótesis planteadas al inicio de la investigación. El principal aporte de esta investigación es el hecho de haber demostrado que sí es posible detectar señales en presencia de ruido cuya frecuencia varía linealmente o en forma cuadrática con el tiempo mediante el uso del oscilador Duffing.

Con los análisis que se deseaban realizar, se buscaba que esta técnica presentara mejores resultados que las técnicas convencionales de análisis en TF en relación a la SNR. La primera contribución es haber corroborado que el sistema es capaz de detectar señales “chirp” a -17 dB de SNR y para el caso de señales con frecuencia constante se llega a -28.5 dB de SNR.

El método propuesto y los resultados positivos que se obtuvieron abren una nueva línea de investigación en el área de procesamiento de señales y representaciones de TF especialmente cuando las señales presentan altos niveles de ruido y son afectadas por el efecto Doppler. La ventaja del uso del oscilador Duffing es que es posible detectar señales con niveles de ruido más altos que los niveles a los cuales logran llegar las técnicas tradicionales de TF. Una enorme ventaja del sistema propuesto con 5 osciladores Duffing es que se elimina la necesidad de utilizar una gran cantidad de osciladores cuando el rango de frecuencias abarcado por la señal es bastante amplio.

Los resultados con señales “chirp” pudieran extrapolarse y apreciarse que este sistema adaptivo permite que la variación de la frecuencia de la señal sea de cualquier orden y no necesariamente está limitada a que sea lineal o cuadrática. Además el sistema no presenta ningún tipo de inconveniente con elementos de interferencia que si están presentes en las técnicas tradicionales de análisis TF. La ventaja de presentar un sistema adaptivo con 5 osciladores es que mejora la precisión en la medición de la frecuencia ya que se tienen diferentes puntos de referencia y permite la corrección de error dentro de la medición de frecuencia.

El estudio de diferentes alternativas para mejorar la respuesta del oscilador Duffing demostró que la correlación de esta misma con la señal de referencia del sistema, aumenta en gran proporción la capacidad del sistema para medir los deltas de tiempo y por ende la frecuencia de la señal especialmente cuando el nivel de SNR es muy bajo. Este aporte realizado, fue el punto que logró mejorar el desempeño del sistema con niveles de ruido mas altos y por ende genera una mayor fidelidad de la medición de la frecuencia cuando la SNR es mayor a 0 dB.

Se logró corroborar que la respuesta del sistema con una SNR de 0 dB presenta prácticamente los mismos resultados que cuando la señal se encuentra en ausencia de ruido. Esto también confirma la fortaleza que presenta el oscilador Duffing para la detección de señales con altos niveles de ruido.

La interfaz gráfica desarrollada le permite al investigador que la use un mejor entendimiento del funcionamiento del oscilador Duffing, además permite la modificación de los parámetros del sistema para adecuarlo a las condiciones en las cuales se desea utilizar el oscilador para visualizar el comportamiento

en el espacio TF de las señales “*chirp*”, además de permitir la evaluación entre diferentes métodos de TF y sus respectivas representaciones.

Dentro de los métodos tradicionales de análisis TF, el que demostró tener el error más grande en la estimación de la frecuencia instantánea de las señales es *Wavelet* debido a su baja resolución frecuencial. Mientras que el método *Multiform, Tiltable Exponential Distribution* (MTED) fue el que presentó los mejores resultados dentro de estas técnicas. Sin embargo, todas estas técnicas continúan teniendo una resolución en frecuencia mas baja que el sistema con osciladores Duffing y su desempeño con altos niveles de ruido se ve seriamente afectado.

A lo largo de la investigación se escribieron dos artículos con el fin de dar a conocer la nueva metodología y mostrar los resultados obtenidos. Estos artículos se mencionan a continuación.

- Carlos R. Bermúdez-Gómez, Rogerio Enriquez-Caldera and Jorge Martínez-Carballido. “*Chirp Signal Detection Using The Duffing Oscillator*” CONIELECOMP 2012, Universidad de las Americas Puebla. Puebla-México, Febrero 2012.
- Carlos R. Bermúdez-Gómez, Rogerio Enriquez-Caldera and Antonio H. Costa. “*Representation of Chirp Signals in the Time-Frequency Domain Using Duffing Oscillators*”. Artículo enviado a la revista "EURASIP Journal on Advances in Signal Processing" de la editorial ELSEIVER.

5.1 TRABAJO FUTURO

A raíz de los excelentes resultados encontrados, es recomendable continuar investigando en este campo ya que se puede mejorar en gran parte el funcionamiento de esta metodología generando mejores resultados.

Basado en la experiencia que se obtuvo a lo largo de toda la investigación, se sugiere profundizar más en la etapa de medición de los deltas de tiempo ya que es en este punto donde se presenta la mayor fuente de error en la detección de la frecuencia. En este caso se concluyó que el método de correlación es el más adecuado para mejorar la respuesta del oscilador, pero es posible que combinándolo con algún otro método se puedan mejorar aun más los resultados. Es importante mencionar que el método de cumulantes de orden superior podría llegar a ser mejor que el método de correlación, pero esto depende en gran medida de la forma como se midan los deltas de tiempo. Por esta razón se recomienda dar un enfoque mas profundo a la medición de los deltas de tiempo para futuras investigaciones.

Otra recomendación para un trabajo futuro es realizar una investigación sobre las formas para medir la amplitud de la señal que se desea detectar y de esta manera poder hacer estimaciones de la potencia de la señal. Así se tendría una representación de TF con información tanto de la frecuencia como de la potencia de la señal.

Finalmente, si se desea poner a prueba este método, se debería analizar señales reales de cualquier tipo de aplicación, puede ser de algún sistema de comunicaciones, señales de radar, señales cerebrales, reconocimiento de sismos, monitoreo de salud estructural, astronomía, etc.

APÉNDICE A

INTERFAZ GRÁFICA

La interfaz gráfica para esta aplicación, se realizó con el objetivo de tener una mejor comprensión del funcionamiento del sistema permitiendo observar su respuesta en el tiempo, en el espacio fase y las variaciones de frecuencia de la señal a lo largo del tiempo. Para su desarrollo se diseñó un GUIDE con Matlab, el cual le permite al usuario realizar los ajustes previos a la simulación y posteriormente visualizar la respuesta en el tiempo junto con el espacio fase. La respuesta en frecuencia no se muestra directamente sobre esta interfaz, sino que al finalizar la simulación se genera una nueva imagen que presenta la respuesta de Tiempo vs Frecuencia tal como se muestra en los resultados de este trabajo.

Visualizar lo que sucede con el sistema, permite al investigador comprender de una mejor manera lo que ocurre cada vez que se modifican los parámetros de la señal y del sistema. Por lo tanto se convierte en una herramienta que facilita la comprensión de su funcionamiento.

En esta interfaz es posible variar todos los parámetros que modelan el sistema Duffing (el amortiguamiento ζ , el parámetro de amortiguamiento no lineal μ , la elasticidad lineal α , la elasticidad no lineal γ , la amplitud de excitación F y la frecuencia de referencia Ω). También es posible seleccionar diferentes tipos de señales simplemente con modificar los parámetros que la definen tales como su amplitud, su comportamiento en frecuencia (frecuencia, aceleración, jerk) y la fase. Adicionalmente, el usuario puede seleccionar la relación señal a ruido que desea utilizar para realizar la simulación junto con el número de muestras para las ventanas y el traslape deseado. Una vez

que se tengan todos los parámetros ajustados se procede a realizar el análisis de la señal utilizando el botón llamado “PROCESAR” (ver Figura A2).

La siguiente imagen muestra el ciclo general que realiza todo el sistema para calcular la respuesta de Tiempo vs Frecuencia.



Figura A1. Funcionamiento del sistema completo.

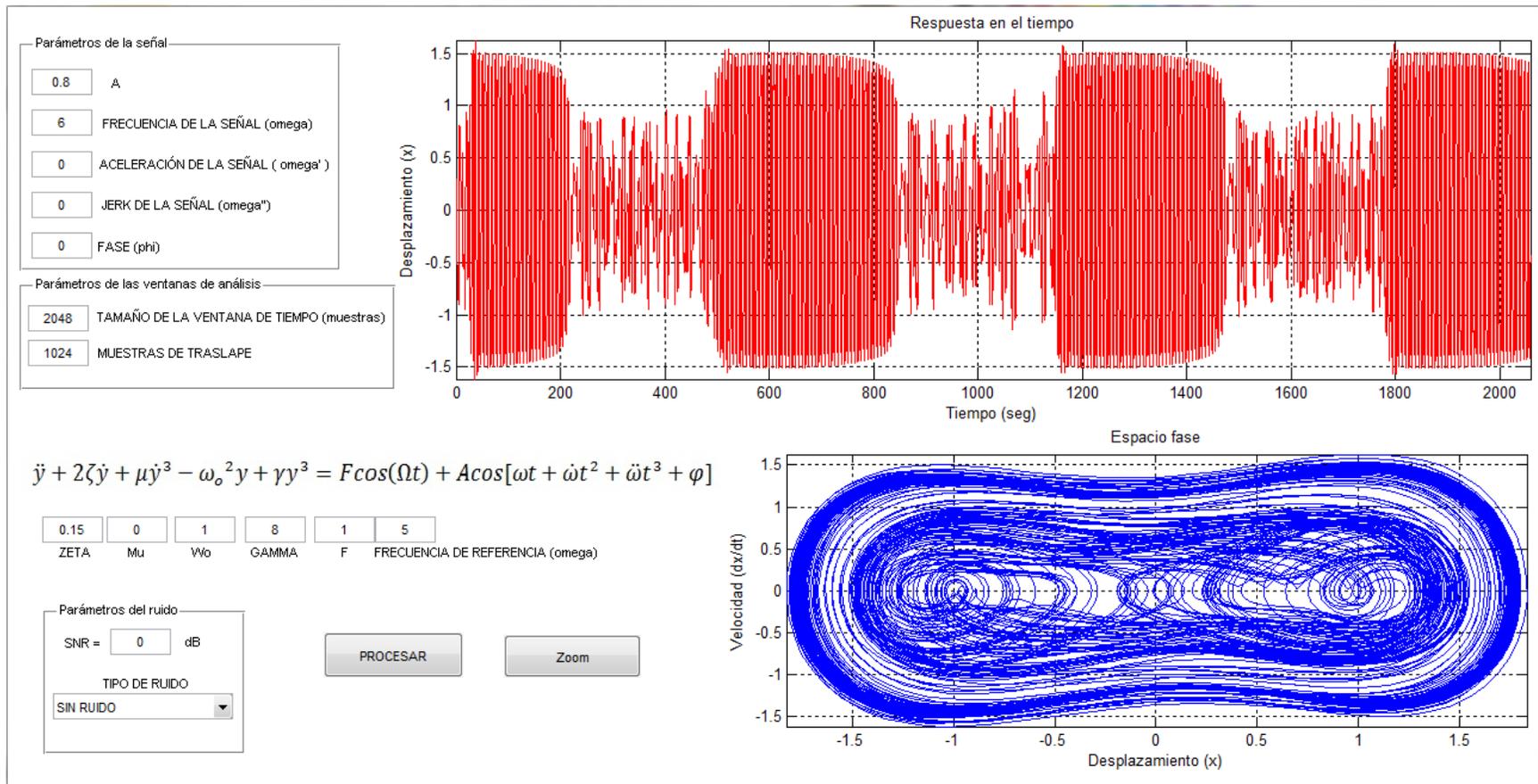


Figura A2. Interfaz gráfica del sistema.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 ESPACIO FASE EN LIBRE OSCILACIÓN (KOVACIC & BRENNAN, 2011).	17
FIGURA 2. TRAYECTORIA PERIÓDICA INTERIOR.	19
FIGURA 3. SISTEMA EN CAOS	20
FIGURA 4. MOVIMIENTO PERIÓDICO.	20
FIGURA 5. RELACIÓN VECTORIAL DE LA FUERZA INDUCIDA AL OSCILADOR (LI-XIN, 2008).	22
FIGURA 6. (SUPERIOR)ESPACIO FASE CON SNR DE -20 DB. (INFERIOR) ESPACIO FASE SIN RUIDO.	23
FIGURA 7 ESPECTROGRAMAS. A) BUENA RESOLUCIÓN TEMPORAL. B) BUENA RESOLUCIÓN EN FRECUENCIA.	26
FIGURA 8 REPRESENTACIÓN DIÁDICA DE ESCALA-TIEMPO (VALENS, 1999-2004)	29
FIGURA 9 RESOLUCIÓN DE TIEMPO-FRECUENCIA BASADO EN WAVELETS. (MALLAT, 1999)	29
FIGURA 10 REPRESENTACIÓN DEL BANCO DE FILTROS COMO UN PROCESO ITERATIVO (VALENS, 1999-2004).	31
FIGURA 11 REPRESENTACIÓN TIEMPO-FRECUENCIA DE WAVELET PACKET. (MALLAT, 1999)	32
FIGURA 12. RESPUESTA DEL OSCILADOR DUFFING SIN RUIDO.	44
FIGURA 13. RESPUESTA DEL OSCILADOR DUFFING CON 0 DB DE SNR.	45
FIGURA 14. RESPUESTA DEL OSCILADOR DUFFING A -24 DB DE SNR	46
FIGURA 15. ESPECTRO DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR PARA LA SEÑAL SIN RUIDO	48
FIGURA 16. ESPECTROGRAMA DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR SIN RUIDO.	48
FIGURA 17. ESPECTRO DE LA SEÑAL DE ENTRADA CON SNR DE -24 DB	49
FIGURA 18. ESPECTROGRAMA DE LA SEÑAL DE ENTRADA CON SNR DE -24 DB.	50
FIGURA 19. ESPECTRO DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR CON -24 DB DE SNR.	50
FIGURA 20. ESPECTROGRAMA DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR CON -24 DB DE SNR.	51
FIGURA 21. ESPECTRO DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR SIN SEÑAL DE REFERENCIA CON -20 DB DE SNR.	52
FIGURA 22 SEÑAL CHIRP CON $\omega = 0.1$ RAD/SE Y $\dot{\omega} = 25$ RAD/SEG ²	54
FIGURA 23. RESPUESTA DEL OSCILADOR DUFFING SIN RUIDO.	56
FIGURA 24. ESPECTRO DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR SIN RUIDO.	57
FIGURA 25. ESPECTROGRAMA DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR SIN RUIDO.	58
FIGURA 26. RESPUESTA DEL OSCILADOR A -15 DB DE SNR PARA UNA SEÑAL "CHIRP", USANDO UNA SEÑAL DE REFERENCIA "CHIRP".	59
FIGURA 27. ESPECTRO DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR A -15 DB SNR.	59

FIGURA 28. ESPECTROGRAMA DE LA RESPUESTA DEL OSCILADOR A -15 DB DE SNR.	60
FIGURA 29. RESPUESTA DEL OSCILADOR CON REFERENCIA "COSENO" PARA UNA SEÑAL DE ENTRADA "CHIRP".	61
FIGURA 30. VENTANA RECTANGULAR	63
FIGURA 31. ENVENTANADO DE LA SEÑAL.	64
FIGURA 32. RANGO DE FRECUENCIAS TEÓRICO ABARCADO POR UN OSCILADOR DUFFING.	64
FIGURA 33. ARREGLO DE OSCILADORES DUFFING.	65
FIGURA 34. ARREGLO DE OSCILADORES.	66
FIGURA 35. DETECCIÓN DE FRECUENCIA UTILIZANDO TRASLAPE DE VENTANAS.	67
FIGURA 36. RESPUESTA DEL OSCILADOR DUFFING.	68
FIGURA 37. DIAGRAMA DE BLOQUES QUE REPRESENTA EL MÉTODO PARA MEDIR LA FRECUENCIA DE LAS VENTANAS DE ANÁLISIS.	69
FIGURA 38. RESPUESTA DE UN ARREGLO DE 5 OSCILADORES	70
FIGURA 39. RESPUESTA DE UN ARREGLO DE 5 OSCILADORES CON -10 DB DE SNR.	72
FIGURA 40. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA ADAPTABLE.	74
FIGURA 41. ESQUEMA FINAL DEL SISTEMA ADAPTABLE.	75
FIGURA 42. ADECUACIÓN DE LA SEÑAL Y MEDICIÓN DE LOS DELTAS DE TIEMPO.	76
FIGURA 43 RESPUESTA DEL OSCILADOR DUFFING.	82
FIGURA 44 RESPUESTA DE LOS MÉTODOS UTILIZADOS.	83
FIGURA 45. ESPECTRO DE LA SEÑAL DE ENTRADA AL SISTEMA	87
FIGURA 46. RESPUESTA DEL SISTEMA SIN RUIDO (TIEMPO VS FRECUENCIA).	88
FIGURA 47 RESPUESTA DEL SISTEMA ADAPTABLE (CHIRP LINEAL A -10 DB DE SNR)	89
FIGURA 48. RESPUESTA DE LA STFT SIN RUIDO.	91
FIGURA 49. RESPUESTA DE LA STFT CON -10 DB DE SNR	92
FIGURA 50. RESPUESTA DE WAVELET Y WAVELET PACKET SIN RUIDO.	94
FIGURA 51. RESPUESTA DE WAVELET CON -10 DB DE SNR.	97
FIGURA 52. WIGNER-VILLE DISTRIBUTION SIN RUIDO.	98
FIGURA 53. RESPUESTA DE <i>WIGNER – VILLE DISTRIBUTION</i> CON -10 DB DE SNR.	99
FIGURA 54. RESPUESTA DE <i>CHOI WILLIAMS</i> SIN RUIDO.	100
FIGURA 55. RESPUESTA DE <i>CHOI WILLIAMS</i> CON -10 DB DE SNR	101
FIGURA 56 . MULTIFORM TILTABLE EXPONENTIAL DISTRIBUTION SIN RUIDO.	102
FIGURA 57 . MULTIFORM TILTABLE EXPONENTIAL DISTRIBUTION CON -10 DB SNR.	103
FIGURA 58. ESPECTRO DE LA SEÑAL DE ENTRADA AL SISTEMA.	105
FIGURA 59. RESPUESTA DEL SISTEMA ADAPTABLE SIN RUIDO (TIEMPO VS FRECUENCIA).	106
	138

FIGURA 60. ESPECTRO DE LA SEÑAL DE ENTRADA AL SISTEMA SIN RUIDO.	107
FIGURA 61 RESPUESTA DEL SISTEMA ADAPTABLE (CHIRP LINEAL A -10 DB DE SNR).	108
FIGURA 62. STFT CON “CHIRP” CUADRÁTICA SIN RUIDO	109
FIGURA 63. RESPUESTA DE LA STFT CON -10 DB DE SNR	110
FIGURA 64. RESPUESTA DE WAVELET SIN RUIDO.	112
FIGURA 65. RESPUESTA DE WAVELET CON -10 DB DE SNR.	114
FIGURA 66. WIGNER-VILLE DISTRIBUTION SIN RUIDO.	116
FIGURA 67. RESPUESTA DE <i>WIGNER – VILLE DISTRIBUTION</i> CON -10 DB DE SNR.	117
FIGURA 68. RESPUESTA DE <i>CHOI WILLIAMS</i> SIN RUIDO.	118
FIGURA 69. RESPUESTA DE <i>CHOI WILLIAMS</i> CON -10 DB DE SNR.	119
FIGURA 70 .MTED SIN RUIDO.	120
FIGURA 71. MTED CON -10 DB DE SNR.	121
FIGURA 72. 50 GRÁFICAS SUPERPUESTAS Y SU VALOR MEDIO RESULTANTE. SUPERIOR 0 DB DE SNR, INFERIOR -17 DB DE SNR.	124
FIGURA 73. FRECUENCIA TEÓRICA Y FRECUENCIA ESTIMADA SUPERIOR 0 DB DE SNR, INFERIOR -17 DB DE SNR.	126
FIGURA 74. ERROR INSTANTÁNEO Y ERROR PROMEDIO. SUPERIOR 0 DB DE SNR, INFERIOR -17 DB DE SNR.	127
FIGURA 75. DESVIACIÓN ESTÁNDAR. SUPERIOR 0 DB DE SNR, INFERIOR -17 DB DE SNR.	129

LISTA DE TABLAS

TABLA 1. KERNELS UTILIZADOS PARA LAS SEÑALES “CHIRP”.	39
TABLA 2. RESULTADOS DE CADA MÉTODO CON DIFERENTES NIVELES DE RUIDO.	84
TABLA 3. RESULTADOS PARA LA SEÑAL “CHIRP LINEAL”.	104
TABLA 4. RESULTADOS PARA LA SEÑAL “CHIRP CUADRÁTICA”.	122

REFERENCIAS

- Abolfazl Jalilvand, H. F. (Febrero de 2011). The application of Duffing oscillator in weak signal detection. *ECTI transactions on electrical eng., electronics, and communications*, 9(1).
- Antonio H Costa, G. F.-B. (October de 1995). Design of Time-Frequency Representations Using a Multiform, Tilttable Exponential Kerner. *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, 43(10), 2283-2301.
- Bo LE, Z. L. (2005). Chaotic oscillator and other techniques for detection of weak signal. *IEICE Trans. fundamentals*, E88-A(10), 2699-2701.
- Boashash, B. (2003). *Time Frequency Signal Analysis and processing, A Comprehensive Reference*. (B. Boashash, Ed.) Brisbane, Australia: Elseiver.
- Changjian Deng, S. Z. (2009). The Weak Signal Detection Based on Chaos and Genetic Algorithms. *Second International Symposium on Information Science and Engineering.*, 579-582.
- Debnath, L. (2002). *Wavelet transform and their applications*. Texas, USA: Birkhauser.
- Deng Chen, S. W. (2009). The Method for Pulse Wave Velocity Measurement Based on Chaotic Oscillator. *International Conference on Artificial Intelligence and Computational Intelligence.*, 340-344.
- DIALLO, O., KONÉ, Y., & MAIGA, A. (2008). Melnikov Analysis of Chaos in an Epidemiological Model with Almost Periodic Incidence Rates. *Applied Mathematical Sciences*, 1377-1386.
- Elert, G. (1995-2007). *Hypertextbook*. Recuperado el 5 de Abril de 2012, de <http://hypertextbook.com/chaos/43.shtml>
- F. Hlawatsch, G. B.-B. (Abril de 1992). Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representation. *IEEE SP MAGAZINE*, 21-67.
- Fengli Wuan, D. Z. (2009). Chaotic Oscillator Detection Based on Empirical Mode Decomposition and Its Application. *International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications.*, 318-322.
- H Y Chen, J. T. (2005). Chaos weak signal detecting algorithm and its application in the ultrasonic Doppler bloodstream speed measuring. *Journal of Physics: conference series* 13 . *7th international symposium on measurement technology and intelligent instruments.*, 320-324.

Henry D.I. Abarbanel, T. W. (1998). Obtaining Order in a World of Chaos. Time-Domain Analysis of Nonlinear and Chaotic Signal. *IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE*, 49-65.

Huang Yiran, Y. c. (2008). A Method of 2FSK Signal Detection using Duffing Oscillator. *ISECS International Colloquium on Computing, Communication, Control, and Management.*, 510-513.

Huang, T., & Qin, L. (2009). Chaos Theory Based Ultrasonic Doppler for Velocity Measurement of Fluid in the Petroleum Channel. *Fifth International Conference on Natural Computation*, 460-463.

Kovacic, I., & Brennan, M. J. (2011). *The Duffing Equation, Non Linear Oscillators and their Behaviour*. Wiley.

L. Galleani, M. B. (s.f.). Analysis of Chaotic Signals in the Time Frequency Plane.

Li., C. (2005). Study of Weak Signal Detection Based on Second FFT and Chaotic Oscillator. *Nature and Science*, 3(2), 59-64.

Liqun Shen, P. W. (July de 2011). The Application of Melnikov Function in Weak Signal Detection with Duffing Oscillators. *The 2nd International conference on Intelligent Control and Information Processing*, 854-858.

MA, L.-x. (2008). Weak signal detection based on Duffing oscillator. *International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering*, 430-433.

Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of signal processing* (second ed.). Elseiver.

Nie Chunyan, W. Z. (2011). Application of chaos in weak signal detection. *Third International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*, 528-531.

Rober Grover Brown, P. J. (1985). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons.

Rosado Muñoz, A. (1999). Las transformadas tiempo-frecuencia. En A. Rosado Muñoz, *Desarrollo de técnicas de detección de fibrilación ventricular basadas en algoritmos Tiempo-Frecuencia* (págs. 2.1 - 2.37). Valencia, España.

S. Rao Jammalamadaka, T. S. (2006). Higher Order Cummulants of Random Vectors and Applications to Statistical Inference and Time Series. *The Indian Journal of Statistics (2003-2007)*, 68(2), 326-356.

Swami, A., Mendel, J. M., & Nikias, C. L. (1993-2001). *Higher-Order Spectral Analysis Toolbox User's Guide (For use with MATLAB)* (version 2 ed.).

Tao Huang, L. Q. (2009). Chaos Theory Based Ultrasonic Doppler for Velocity Measurement of Fluid in the Petroleum Channel. *Fifth International Conference on Natural Computation.*, 460-463.

Tao Xie, X. W. (2010). Noise immunity analysis in external excitation chaotic oscillator detecting system. *International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application.*, 1013-1016.

Tiang-Liang, L. (2008). Frequency estimation for weak signal based on chaos theory. *International seminar on future biomedical information engineering*, 361-364.

Tsonis, A. A. (1992). *CHAOS. From Theory to Applications*. New York, USA: Plenum Press.

Valens, C. (1999-2004). *A Really Friendly Guide to Wavelets*. Obtenido de PolyValens: www.polyvalens.com

Wolff, C. (s.f.). *Radartutorial*. Recuperado el March de 2012, de www.radartutorial.eu/07.waves/was04.en.html

www.mathworks.com. (s.f.). www.mathworks.com.

Ye Yuang, Y. L. (2008). Study on EEG Time Series Based on Duffing Equation. *International Conference on BioMedical Engineering and Informatics.*, 516-519.