



**I  
N  
A  
O  
E**

# **Diseño de Filtros Pasa Bajas con Parámetros Variantes en el Tiempo Basados en OTAs y Capacitores**

Por

**Ana Luisa Mota Rodríguez**

Tesis sometida como requisito parcial para obtener el  
grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD  
DE ELECTRÓNICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica**

Febrero 2012

Tonantzintla, Puebla

Director:

**Dr. Miguel Ángel Gutiérrez de Anda**

Departamento de Electrónica

INAOE

©INAOE 2012

El autor concede al INAOE permiso para reproducir y  
distribuir copias de este documento de forma parcial o  
total.





# **Diseño de filtros pasa bajas con parámetros variantes en el tiempo basados en OTAs y capacitores**



*A mi Madre, mi ejemplo a seguir*

*A el am♥r de mi vida, Ricardo*



---

## Resumen

---

Los filtros con parámetros variantes en el tiempo son una clase particular de sistemas que están caracterizados por tener una conducta transitoria de corta duración. Dicho comportamiento es una consecuencia de un cambio temporal del valor de algunos de sus parámetros descriptivos sin afectar su respuesta en el dominio de la frecuencia. Este tipo de filtros pueden ser usados en sistemas de instrumentación donde la respuesta transitoria generada por el mismo filtro puede ser vista como una perturbación indeseada en la conducta de éste. En una primera aproximación, los filtros con parámetros variantes en el tiempo pueden ser modelados como sistemas lineales variantes en el tiempo. Desafortunadamente, el análisis de este tipo de sistemas es complicado y no siempre es posible establecer criterios suficientes para garantizar que este tipo de sistemas sea estable.

En este trabajo de tesis se presenta una metodología general para la síntesis de filtros pasa bajas de tiempo continuo con parámetros variantes en el tiempo los cuales son implementados a partir de transconductores y capacitores. Los filtros pasa bajas sujetos a la metodología propuesta son modelados por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. A través de la aplicación de una transformación de coordenadas se obtendrá un nuevo sistema modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo. Una característica importante de los filtros desarrollados con la técnica propuesta es que su estabilidad está garantizada. La validez de la técnica propuesta se verifico de manera extensiva a través de simulaciones. Finalmente, se desarrolla un prototipo basado en componentes discretos de uno de los filtros estudiados. Dicho prototipo prueba que es posible fabricar los filtros propuestos en esta tesis de forma integrada.





---

## Abstract

---

Parameter-varying filters are a particular class of systems which are characterized by having a transient behavior of short duration. This behavior is a consequence of the temporary change in the value of some of their descriptive parameters without affecting their response in the frequency domain. These filters may be used in instrumentation systems where the transient response which is generated by the filter may be seen as an undesired perturbation in its behavior. In a first approximation, parameter-varying filters may be modelled as linear time-varying systems. Unfortunately, the analysis of such systems is complicated and it is not always possible to establish sufficient criteria to guarantee the stability of these systems.

In this thesis work, a general methodology for the synthesis of a new class of continuous-time parameter-varying low pass filters implemented with transconductors and capacitors is presented. The low pass filters which are subject to the proposed methodology are modelled by a set of linear time-invariant differential equations. By means of a coordinate transform, a new system modelled by linear time-varying differential equations will be obtained. An important feature of the filters developed with the proposed technique is that their stability is guaranteed. The validity of the proposed technique has been extensively verified by means of simulations. Finally, a prototype based on discrete components for one of the studied filters was developed. This prototype demonstrates from a practical point of view that it is possible to fabricate the filters proposed in this thesis as an integrated circuit.



---

## Agradecimientos

---

En primer lugar, me gustaría agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo brindado en el periodo de mis estudios de maestría a través de la beca número 41028 con registro 335521. De igual modo, quiero expresar mi agradecimiento a la organización anteriormente mencionada por la beca otorgada en el marco del proyecto intitulado "Diseño e implementación de filtros continuos pasabajos con parámetros variantes en el tiempo" (con clave de registro CB-2007-84819-Y). Gracias a la beca financiada por dicho proyecto, concluí mi trabajo de tesis.

Quiero hacer patente mi agradecimiento al Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE) por darme el honor de formar parte de un gran equipo de investigación y desarrollo científico. El Instituto me dió la oportunidad de conocer a una gran cantidad de doctores y doctoras que no solo nos ven como alumnos, sino como a unos amigos. Sin duda uno de ellos es mi asesor de tesis, el Dr. Miguel Ángel Gutiérrez de Anda. Gracias a sus conocimientos, paciencia y entrega fue posible la realización de este trabajo de tesis.

Agradezco al grupo PYME, encabezado por el Dr. Alejandro Díaz Sánchez, quien me proporcionó una oportunidad valiosa al incorporarme en su equipo de diseñadores analógicos. Asimismo, estoy en deuda con el Dr. José Miguel Rocha y con el Dr. Ivan Padilla, quienes despertaron en mí el gusto por el diseño de circuitos integrados analógicos. En dicho grupo conocí a grandes amigos y excepcionales seres humanos. Cuando llegué a Puebla ellos fueron los primeros en hacerme sentir como en casa.

No puedo olvidar y agradecer a todos mis amigos de maestría, porque juntos vivimos la gran experiencia de un posgrado. Esto en definitiva incluye las sonrisas, alegrías y (porqué no) también las lagrimas que regabamos en las famosas caballerizas. Quiero agradecer de forma especial a mi gran amiga y cómplice Teresa Rojas, así como a mis mejores amigos Galarza, Fabo y Gerry, quienes siempre saben como hacerme reír. En general a todos los llevaré siempre en mi corazón.

Por último, pero no menos importante, estoy doblemente agradecida con Dios. Hace 25 años Él me presento ante la mujer más importante de mi vida, mi “Ave Fenix”, mi ejemplo a seguir, quien me enseñó que la sencillez es una virtud, a la que tengo el orgullo de llamar Madre. Y hace tan solo 3 años me dió la oportunidad de conocer al hombre más importante de mi vida, mi esposo Ricardo Astro Bohórquez, quien me devolvió el resplandor de mi sonrisa y la alegría de un nuevo día. Gracias a él ahora entiendo lo que hablan los poetas. Que el amor existe en su más pura y limpia expresión, de manera tan natural como respirar, con un brillo tal que opaca al oro, infinito y misterioso como el universo. Muchas GRACIAS Dios, por amarme de tal forma que me mandaste a tus mejores angeles.

---

## Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XII</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>XIII</b>
<b>Acrónimos de lengua inglesa utilizados en esta tesis</b>	<b>xv</b>
<b>1. Vista preliminar de esta tesis</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Motivación de este trabajo . . . . .	4
1.3. Contribuciones principales de la tesis . . . . .	6
1.4. Organización de la tesis . . . . .	7
<b>2. Conceptos preliminares de los sistemas variantes en el tiempo</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Sistemas lineales y no lineales . . . . .	10
2.3. Sistemas dinámicos lineales . . . . .	11
2.4. Transformaciones de coordenadas . . . . .	14

<b>3. Metodología general para la compensación de la respuesta transitoria de sistemas LTI</b>	<b>17</b>
3.1. Introducción . . . . .	17
3.2. Metodología general para la síntesis de sistemas lineales variantes en el tiempo . . . . .	18
3.3. Estrategia de diseño de filtros con parámetros variantes en el tiempo basados en OTAs-C . . . . .	20
3.4. Síntesis de un filtro pasa bajas de segundo orden . . . . .	22
3.5. Síntesis de un filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática	27
3.6. Síntesis de un filtro escalera LC pasa bajas elíptico de tercer orden . . . . .	31
<b>4. Implementación de la metodología general para la compensación de la respuesta transitoria de sistemas LTI</b>	<b>39</b>
4.1. Introducción . . . . .	39
4.2. Diseño del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo . . . . .	39
4.3. Circuito generador de corrientes exponencialmente decrecientes en el tiempo	44
4.4. Caracterización del filtro con parámetros variantes en el tiempo . . . . .	48
<b>5. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>
<b>Código en Octave para la solución de las ecuaciones de estado de de los filtros pasa bajas considerados en esta tesis</b>	<b>59</b>
1. Filtro pasa bajas de segundo orden . . . . .	59
2. Filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo .	60
3. Filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática . . . . .	61
4. Filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática con parámetros variantes en el tiempo . . . . .	61
5. Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden . . . . .	62
6. Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden con parámetros variantes en el tiempo . . . . .	63

---

## Índice de figuras

---

2.1. Caraterísticas de los sistemas lineales . . . . .	11
3.1. Filtro pasa bajas de segundo orden. . . . .	23
3.2. Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de la Fig. 3.1 . . . . .	24
3.3. Filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo. . . . .	25
3.4. Respuesta a un escalón unitario del filtro de la Fig. 3.1 y del filtro de la Fig. 3.3 . . . . .	26
3.5. Filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática . . . . .	28
3.6. Filtro pasa bajas de tercer orden con parámetros variantes en el tiempo basado en el circuito de la Fig. 3.5. . . . .	29
3.7. Respuesta a un escalón unitario del filtro de la Fig. 3.5 y del filtro de la Fig. 3.6. . . . .	31
3.8. Filtro escalera LC pasa bajas elíptico. . . . .	32
3.9. Implementación activa de resistores. . . . .	33
3.10. Filtro escalera pasa bajas elíptico con resistores activos. . . . .	33
3.11. Emulación de un inductor flotante. . . . .	34
3.12. Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden con componentes activos. . . . .	34
3.13. Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden con parámetros variantes en el tiempo. . . . .	36
3.14. Respuesta a un escalón unitario del filtro de la Fig. 3.12 y del filtro de la Fig. 3.13. . . . .	37

---

4.1. Filtro pasa bajas de segundo orden. . . . .	41
4.2. Filtro pasa bajas de segundo orden implementado con componentes discretos.	41
4.3. Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas del circuito de la Fig. 4.2 . . . . .	43
4.4. Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de segundo orden considerado en la Sección 3.3. . . . .	43
4.5. Filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo.	44
4.6. Circuito generador de corrientes exponencialmente decrecientes en el tiempo.	46
4.7. Diagrama simplificado de las señales generadas por el circuito de la Fig 4.6.	46
4.8. Implementación discreta del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo . . . . .	48
4.9. Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo. . . . .	49
4.10. Resultados de simulación en Octave para la respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo.	49



---

## Índice de cuadros

---

3.1. Resumen de las características de la respuesta transitoria del filtro de la Fig. 3.1 y del filtro de la Fig 3.3. . . . . .	26
3.2. Valores de los elementos del filtro de la Fig. (3.5). . . . . .	29
3.3. Resumen de las características de la respuesta transitoria del filtro de la Fig. 3.5 y del filtro de la Fig. 3.6. . . . . .	31
3.4. Valores de los elementos del filtro de la Fig. (3.5). . . . . .	36
3.5. Valores de las características de la respuesta transitoria del filtro de la Fig. 3.12 y del filtro de la Fig. 3.13. . . . . .	37
4.1. Valores de las transconductancias del filtro pasa bajas de la Fig. 4.2. . . . .	41
4.2. Valores de los elementos pasivos del filtro de la Fig. (4.6). . . . . .	47



---

## Acrónimos de lengua inglesa utilizados en esta tesis

---

**OPAMP** *Operational Amplifier*

**MOS** *Metal Oxide Semiconductor*

**OTA** *Operational Transconductance Amplifier-Capacitor*

**MOSFET-C** *Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor*

**LTI** *Linear Time-Invariant*

**LTV** *Linear Time-Varying*



### 1.1. Introducción

Los sistemas de filtrado analógico de tiempo continuo han evolucionado desde la década de los 20s. Los primeros sistemas de filtrado fueron aplicados en comunicaciones telefónicas y eran fabricados a partir de componentes pasivos tales como resistores, capacitores e inductores. A finales de los años 40s, y gracias al trabajo de Wilhelm Cauer, la teoría de síntesis de redes ya contaba con un marco sólido que permitió su diseño y aplicación en diversos problemas de procesamiento de señales de tiempo continuo. En la década de los 50s, la demanda de este tipo de sistemas se incrementó. Motivando la reducción en sus costos de implementación. Un paso en esta dirección era la supresión de los componentes voluminosos y pesados presentes en éstos. Un gran avance fue el reemplazo del inductor mediante circuitería activa, entre ellos el *gyrator* [1].

A mediados de los años 60s, el uso del amplificador operacional (u OPAMP, por sus siglas en inglés, *Operational Amplifier*) fue un notable avance en la implementación de filtros de tiempo continuo [2]. La estructura de los filtros implementados con amplificadores operacionales se encuentra definida por la configuración típica de un integrador, es decir, un OPAMP con un resistor de entrada y un capacitor que hace las veces de red de realimentación. Debido a que las constantes de tiempo del filtro son definidas en términos de los valores de sus resistores y capacitores, es necesario tener un cierto grado de precisión

en los valores de dichos elementos. Sin embargo, dichos elementos pasivos no pueden ser fabricados de forma precisa en un circuito integrado debido a las variaciones del proceso de fabricación. Asimismo, el valor de los resistores integrados (los cuales distan de ser mucho elementos lineales por estar implementados a partir de uniones PN inversamente polarizadas) es una función del voltaje de polarización del sustrato y de la temperatura. Por esta razón, se optaba por su implementación externa con elementos discretos. Los filtros basados en OPAMPs, resistencias y capacitores se conocen como filtros activos RC. Cabe mencionar que los amplificadores operacionales usados para los primeros filtros activos RC eran fabricados con tecnología bipolar [2].

La integración de un sistema de filtrado pudo conseguirse de manera total a finales de la época de los 70s. En otras palabras, tanto los resistores como los capacitores se encontraban en un solo circuito integrado (CI). Los resistores fueron implementados con un arreglo de capacitores y transistores que operaban de forma conmutada. Con una determinada red de capacitores y conmutadores, era posible implementar un elemento resistivo lineal con bastante precisión en un cierto rango de frecuencias. La sustitución de los resistores por las redes anteriormente mencionadas es el fundamento detrás de los circuitos con capacitores conmutados [3]. Es en esta década en que la tecnología MOS se hace presente para desplazar a la tecnología bipolar, convirtiéndose en la predilecta por los diseñadores analógicos por su alta capacidad de integración y bajo costo. Las constantes de tiempo de los integradores con capacitores conmutados se encontraban en función de la razón de dos capacitancias integradas y de la frecuencia de la señal de reloj encargada de controlar el proceso de conmutación.

Otra razón de la popularidad de la técnica de los capacitores conmutados era el hecho de que si bien los capacitores se pueden fabricar dentro de un circuito integrado están sujetos a una gran variabilidad, la razón del valor de dos capacitores ubicados muy cerca uno del otro era muy precisa. Dado que es posible generar señales de reloj con gran precisión y bajos valores de *jitter*, los errores en la implementación de una constante de tiempo dada para un filtro con capacitores conmutados son muy pequeños en la práctica. Sin embargo, la demanda de sistemas de procesamiento de señales con componentes espectrales en el rango de los megahertz mostró los límites reales de los circuitos con capacitores conmutados. A altas frecuencias los capacitores que son usados para emular resistencias deben ser descargados a una mayor frecuencia. Esto implica que los bloques involucrados en el suministro de corriente para este propósito manejaran una corriente alta. Este problema se traduce en la necesidad de tener amplificadores operacionales con mayor capacidad de

*slewing* así como redes de conmutadores con transistores más grandes. Al tener transistores más grandes en las redes de conmutación, las capacitancias parásitas asociadas a ésta eran más grandes. En consecuencia, la señal de salida de del filtro sufrirá algún tipo de degradación debido a los componentes de alta frecuencia de la señal de reloj que son inyectados a lo largo de la ruta de la señal. Estos factores motivaron la búsqueda de otras opciones para la síntesis de filtros analógicos.

A mediados de los 80s dos nuevas técnicas de filtrado analógico en tiempo continuo fueron propuestas con el objeto de hacer posible la integración de filtros completos en un circuito integrado. La primera de estas técnicas implica el uso de transistores MOS operando en la región de triodo para el reemplazo de los resistores en filtros activos RC. Los filtros diseñados con esta técnica se conoce como filtros MOSFET-C. Debido a que este tipo de filtros son esencialmente filtros activos RC cuyos resistores han sido reemplazados por dispositivos no lineales, el rango dinámico de los mismos es limitado. Asimismo, debido a que los filtros basados en la técnica de diseño MOSFET-C usan amplificadores operacionales realimentados negativamente, el ancho de banda de los mismos no es mayor al que puede realizar un filtro activo RC. La segunda técnica es la más popular y atractiva hasta la fecha en el diseño analógico. En dicha técnica ya no es necesaria la sustitución de un elemento resistivo por un elemento no lineal. En esta técnica de diseño, se utilizan amplificadores operacionales de transconductancia y capacitores para implementar de manera sencilla un integrador. Los filtros implementados con esta estrategia de diseño se conocen como filtros OTA-C o  $g_m$ -C [4]. Con esta técnica es posible implementar filtros que operen en rangos de frecuencias más altas con una mayor insensibilidad a la presencia de capacitancias parásitas. De acuerdo a la aplicación y las opciones de fabricación disponibles, éstos pueden ser implementados tanto en tecnología bipolar, MOS o BiCMOS [5].

Los filtros  $g_m$ -C pueden realizar funciones de transferencia destinadas a procesar señales con un rango de frecuencias pequeño, así como señales en el rango de los centenares de megahertz o incluso en los gigahertz. Por esta razón, este tipo de filtros puede encontrar un rango muy diverso de aplicaciones. Para la implementación de este tipo de filtros, se pueden tomar en cuenta dos opciones de diseño. La primera de ellas es que se opte por hacer todos los transconductores de dimensiones iguales. Con esta consideración el diseño del *layout* de este tipo de filtros se simplifica ya que se tendrá solo una celda base (el transconductor) para ser repetida cuantas veces sea necesario. El rendimiento que presentan estos filtros se encuentra directamente relacionado con el desempeño del transconductor utilizado como base. La segunda opción de diseño es hacer que todos los

capacitores que componen al filtro tengan valores iguales e integrables y los transconductores sean diferentes. Esta opción no es la más óptima, ya que los capacitores presentan mayores variaciones ante las variaciones de voltaje, proceso y temperatura. Por otro lado, las dimensiones de los transconductores no siempre se encuentran en múltiplos enteros. Esto implica que no puede diseñarse una celda base para este bloque a diferencia de la técnica anteriormente descrita.

## 1.2. Motivación de este trabajo

A lo largo de la evolución de las técnicas para la implementación de sistemas de filtrado analógico en tiempo continuo, se han logrado avances significativos que permiten su manufactura con un alto grado de fiabilidad. Independientemente de las características generales que debe presentar un filtro (pasa bajas, pasa altas, rechaza banda, pasa todo, etc), éste debe satisfacer un conjunto de especificaciones básicas. Dichas especificaciones incluyen al ancho de banda, la distorsión, el ruido, la estabilidad, el área y el consumo de potencia [6].

En algunas aplicaciones de instrumentación, es importante que la respuesta transitoria natural del filtro sea de corta duración, como es el caso de sistemas de procesamiento de señales en donde se requiere adquirir una gran cantidad de datos en un tiempo relativamente pequeño. Dentro de las categorías de filtros analógicos, existen pocas opciones para obtener un comportamiento transitorio de corta duración sin inducir modificaciones drásticas en su respuesta en frecuencia. Una estrategia de diseño para obtener la conducta antes mencionada consiste en evaluar las características en el dominio del tiempo como una especificación del diseño adicional para diferentes aproximaciones de la función de transferencia deseada. De este proceso de evaluación se elige la mejor opción que cumpla al mismo tiempo con las especificaciones de magnitud y fase. Sin embargo, es necesario notar que esta estrategia es muy limitada pues implica que solamente se puede evaluar el desempeño de un filtro dado a partir de aproximaciones conocidas, tales como la aproximación de Butterworth, de Chebyshev, de Cauer<sup>1</sup> o de Bessel. En [7] se presentó una estrategia diferente para la problemática previamente planteada. Dicha estrategia consiste en modificar la banda de paso de un filtro pasa bajas por medio de la variación de los coeficientes del mismo en un intervalo de tiempo determinado. Esta compensación de la

---

<sup>1</sup>La aproximación de Cauer es también conocida como la aproximación elíptica.



respuesta transitoria del filtro es aplicada únicamente cuando la respuesta del filtro exhibe un régimen transitorio indeseado (por ejemplo, cuando se detecta una variación abrupta de la señal de entrada).

Los filtros cuyos parámetros son variados en el tiempo de acuerdo a una estrategia de control predefinida se conocen colectivamente como filtros con parámetros variantes en el tiempo. En [8] se propuso el uso de un filtro pasa bajas analógico con parámetros variantes en el tiempo, con el objetivo principal de reducir el número de muestras necesarias para obtener los potenciales evocados<sup>2</sup> auditivos de señales electroencefalográficas. En [10] se presenta una aplicación industrial para el uso de filtros con parámetros variantes en el tiempo para la compensación dinámica de la respuesta dinámica de celdas de carga [10]. El beneficio al utilizar esta estrategia de filtrado conlleva a obtener la medición correcta del peso por medio de una celda de carga en un tiempo relativamente corto.

Los filtros con parámetros variantes en el tiempo tienen como característica principal una respuesta transitoria reducida. Dicha conducta es consecuencia del cambio temporal de algunos de sus parámetros constitutivos sin perder sus propiedades de respuesta en frecuencia en estado estacionario [11]. Este tipo de filtros se distingue de los filtros adaptivos pues éstos últimos ajustan sus parámetros a partir del uso de un algoritmo de optimización. Como se mencionó anteriormente, los parámetros de un filtro con parámetros variantes en el tiempo son variados de acuerdo a una regla de control predefinida que tiene por objeto reducir el régimen transitorio exhibido por el filtro mientras se garantiza sus propiedades de estabilidad (y de manera particular, su estabilidad exponencial asintótica). Debido a las ventajas proporcionadas por la implementación de los filtros analógicos “ $g_m$ - $C$ ”, el presente trabajo de tesis se centra en la síntesis de filtros pasabajas con parámetros variantes en el tiempo que serán implementados con la técnica de diseño antes mencionada. El enfoque a tomar en este trabajo de tesis estará a nivel sistema. En otras palabras, no se propondrán bloques de circuito nuevos para la implementación de los filtros con parámetros variantes en el tiempo. En cambio, se establecerá de manera rigurosa la forma de reducir la conducta transitoria de un filtro pasa bajas implementado con transconductancias y capacitores.

---

<sup>2</sup>Los potenciales evocados son potenciales bioeléctricos que son generados por ciertas estructuras anatómicas ligadas al sistema nervioso como respuesta a un determinado tipo de estímulo externo. Los potenciales evocados se clasifican de acuerdo al estímulo recibido. Estos pueden ser visuales, auditivos, somatosensoriales ó cognitivos [9]. Comparados contra una señal electroencefalográfica, un potencial evocado es de una amplitud mucho menor (de al menos un orden de magnitud). Por esta razón, los potenciales evocados son enmascarados por señales electroencefalográficas.

### 1.3. Contribuciones principales de la tesis

En la sección previa se concluyó que el campo de aplicación de los filtros con parámetros variantes en el tiempo no es nuevo. De hecho, se puede encontrar una gran variedad de artículos científicos que describen desde el punto de vista teórico a este tipo de sistemas. El concepto de los filtros con parámetros variantes en el tiempo fue presentado por primera vez en [12]. Uno de los problemas que implica el uso de este tipo de filtros es la determinación de sus propiedades de estabilidad. A diferencia de lo que ocurre en los sistemas lineales invariantes en el tiempo, no existe un equivalente del concepto de polos para sistemas lineales variantes en el tiempo que pueda ser usado para establecer sus propiedades de estabilidad. Si bien el trabajo desarrollado en [12] presenta condiciones analíticas para determinar la estabilidad de este tipo de filtros, la gran mayoría de los trabajos descritos en la literatura usan un enfoque numérico para el análisis de los filtros con parámetros variantes en el tiempo. Una excepción notable es el trabajo presentado en [13]. En dicho trabajo se presenta la solución analítica de las ecuaciones que caracterizan a la conducta de un filtro pasa bajas de segundo orden. Sin embargo, estas soluciones están en términos de funciones hipergeométricas convergentes<sup>3</sup>. Debido a la naturaleza de estas funciones, no es posible usar de manera directa esos resultados en el proceso de síntesis de un filtro con parámetros variantes en el tiempo. En cualquier caso, los trabajos anteriormente citados se centran en una clase particular de filtro con parámetros variantes en el tiempo que es modelado por una ecuación diferencial escalar de segundo orden con coeficientes variantes en el tiempo. Sin embargo, no se ha presentado hasta el día de hoy algún trabajo de literatura especializada que plantee una metodología general para la compensación de la respuesta transitoria de un filtro pasa bajas dado sin importar el orden de éste.

En el presente trabajo de tesis se plantea una metodología general para transformar un filtro basado en transconductores y capacitores modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo en un sistema modelado por ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo. A diferencia de los trabajos que se encuentran en la literatura, este propone una teoría general para la síntesis a nivel sistema de filtros pasa bajas con parámetros variantes en el tiempo a partir de un sistema prototipo representado por medio de ecuaciones de estado. Como se verá más adelante, el proceso

---

<sup>3</sup>Una función hipergeométrica convergente es una función especial que puede ser vista como una generalización de las funciones trascendentales tales como la exponencial y las funciones trigonométricas.

de transformación propuesto lleva de forma directa a un circuito que puede ser implementado por medio de transconductores y capacitores. El nuevo circuito posee asimismo una conducta transitoria mejorada comparada contra el circuito original que sirvió como punto de partida en el proceso de síntesis. Asimismo, la transformación propuesta preserva las propiedades de respuesta en frecuencia del filtro en cuestión en estado estacionario (es decir, sin estar sujeto a variaciones en el valor de sus parámetros).

## 1.4. Organización de la tesis

El resto de este documento de tesis se encuentra organizado de la siguiente forma:

- En el **Capítulo 2** se describen los conceptos fundamentales de los sistemas variantes en el tiempo. Inicialmente se explicaran las diferencias entre los sistemas lineales y no lineales, así como las diferencias entre los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) y los sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV). Para este propósito se señalan las propiedades que definen a cada uno de los sistemas mencionados. Como se verá más adelante, estos sistemas pueden modelarse con ecuaciones de estado. La introducción de este tipo de modelos es necesaria para la formulación de una metodología de diseño general para filtros pasa bajas con parámetros variantes en el tiempo.
- En el **Capítulo 3** se plantea paso a paso la metodología general para la compensación del comportamiento de la respuesta transitoria de un filtro pasa bajas modelado por ecuaciones de estado. Asimismo, se discutirá cómo pasar de un modelo de ecuaciones de estado a un circuito equivalente que pueda ser implementado por medio de transconductores y capacitores. Se presentan ejemplos de diferentes filtros que cuya respuesta transitoria es reducida a través de la técnica propuesta. Se muestran resultados de las simulaciones de las ecuaciones de estado de dichos filtros realizadas en Octave<sup>4</sup> con el objetivo de demostrar los beneficios que se obtienen al poner en práctica la técnica propuesta.
- En el **Capítulo 4** se presenta una implementación utilizando componentes discretos, de uno de los filtros analizados en el capítulo anterior para validar su comportamiento. Los resultados presentados en este capítulo confirman la aplicación real

---

<sup>4</sup>Octave es una herramienta libre para hacer cálculos sobre matrices de manera similar a MATLAB.

del método desarrollado en esta tesis para la reducción de la respuesta transitoria de un filtro pasa bajas. Asimismo, estos resultados también demuestran la factibilidad de la implementación en un circuito integrado de este tipo de filtros.

- En el **Capítulo 5** se exponen las conclusiones obtenidas a lo largo de esta investigación. Al mismo tiempo, se indica el trabajo futuro que puede realizarse a partir de los resultados obtenidos.

---

### Conceptos preliminares de los sistemas variantes en el tiempo

---

#### 2.1. Introducción

Los sistemas se clasifican según la naturaleza, origen, complejidad, tipo de variables que los definen, etc. Es imprescindible el análisis de las características y propiedades de los mismos. Una manera de estudiar a los sistemas es mediante el uso de modelos, los cuales nos permiten una representación sencilla de los mismos [14]. En el campo de la ingeniería los modelos que se utilizan para caracterizar un sistema pueden ser clasificados como:

- **Causales.** Todos los sistemas en tiempo real son causales ya que su respuesta depende únicamente de las entradas presentes y pasadas. Un sistema que no tenga estas características se conoce como sistema anticausal. Un ejemplo de un sistema anticausal lo constituye el filtro de Wiener<sup>5</sup>.
- **Agrupados o concentrados.** Las dimensiones de los componentes del sistema son pequeños en comparación con las longitudes de onda de las frecuencias de las señales del sistema. Muchos circuitos electrónicos prácticos pueden verse como sistemas con

---

<sup>5</sup>El filtro de Wiener es un tipo particular de filtro adaptivos. El filtro de Wiener es la solución óptima ideal para el problema de filtrado adaptivo. Sin embargo, para la determinación de esta solución óptima, es necesario conocer la historia global de la entrada del sistema (no sólo las entradas presentes y las pasadas, sino también las futuras).

elementos concentrados. Sin embargo, un sistema que no posee esta propiedad se conoce como sistema distribuido. Un ejemplo muy popular de este último tipo de sistemas es una línea de transmisión.

- **Invariantes en el tiempo.** Ninguno de los elementos del sistema tiene parámetros que varíen con el tiempo.
- **Variantes en el tiempo.** Los parámetros de ciertos elementos del sistema varían en función del tiempo.
- **Lineales.** Estos sistemas se caracterizan por cumplir con los principios de homogeneidad y aditividad.
- **No lineales.** Un sistema no lineal es aquel que no presenta alguna de las dos propiedades mencionadas anteriormente. Características de los sistemas lineales.

En el contexto del presente trabajo de investigación, se llevará a cabo un análisis más detallado de los cuatro últimos tipos de sistemas anteriormente mencionados. En los siguientes apartados se describirán las propiedades que definen a cada uno de estos.

## 2.2. Sistemas lineales y no lineales

En la sección anterior se hizo una breve descripción de los sistemas lineales y no lineales. En este apartado se abordará este tópico con más detalle, con la finalidad de poder diferenciar entre dichos sistemas. Como se mencionó, para que un sistema sea clasificado como lineal debe cumplir con los principios de homogeneidad y aditividad. El principio de homogeneidad puede ser explicado con la ayuda de la Fig. 2.1(a). Si para una entrada  $x(t)$  un sistema  $S$  exhibe una respuesta  $y(t)$ , se dice que el sistema  $S$  satisface el principio de homogeneidad, si y solo si, una versión escalada de la entrada  $Cx(t)$  genera una respuesta escalada  $Cy(t)$ .

En la Fig. 2.1(b) se explica de manera gráfica el principio de aditividad. Para un sistema  $S$ , las entradas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  darán lugar a las respuestas  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$ . Se dice que el sistema  $S$  satisface la propiedad de aditividad si y solo si la combinación de las entradas  $x_1(t) + x_2(t)$  da lugar a la respuesta  $y_1(t) + y_2(t)$ .

Un sistema es no lineal si no cumple con cualquiera de las propiedades anteriormente mencionadas. Un ejemplo típico de un sistema que puede cumplir con la propiedad de

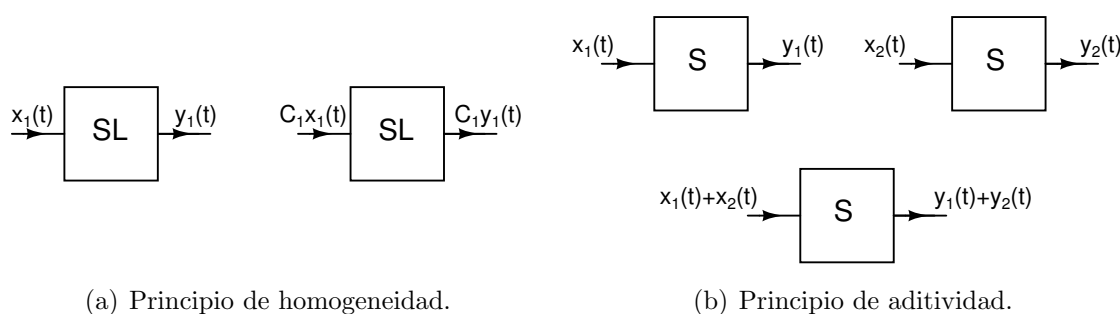


Figura 2.1: Características de los sistemas lineales

homogeneidad pero no con la propiedad de aditividad es un rectificador. Si una señal es escalada por una constante positiva y usada como entrada a un rectificador, la salida será igual a la señal arbitraria rectificada multiplicada por la misma constante. Sin embargo, si la combinación lineal de dos señales distintas es usada como entrada para el mismo sistema, no hay ninguna garantía de que la señal resultante sea igual a la suma de las respuestas generadas por el rectificador para cada una de estas señales por separado. Este ejemplo claramente demuestra por qué es necesario considerar los dos principios enunciados en esta sección para poder definir a un sistema lineal.

## 2.3. Sistemas dinámicos lineales

En esta sección se discutirá la teoría básica detrás de los sistemas dinámicos lineales. En general, un circuito eléctrico (o electrónico) *lineal* puede ser visto como un sistema dinámico que es modelado a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas de la forma:

$$\mathbf{E}(t)\mathbf{x}'(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t). \quad (2.1)$$

En la expresión anterior,  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de incógnitas (voltajes y/o corrientes del circuito en cuestión), mientras que  $\mathbf{E}(t)$  y  $\mathbf{H}(t)$  son matrices de estado de  $m \times n$  y  $\mathbf{e}(t)$  es el vector de entrada de dimensión  $n$ , donde usualmente se tiene que  $m \geq n$ . Es necesario notar que algunas de las filas o columnas de  $\mathbf{E}(t)$  pueden tener elementos iguales a cero. Esto implica que en la ecuación (2.1) habrá relaciones puramente algebraicas que no involucran derivadas.

Las ecuaciones diferenciales algebraicas proporcionan la base matemática para el análisis en el dominio del tiempo de cualquier circuito electrónico como se ejecuta en simu-

ladores de circuitos. Sin embargo, la teoría detrás de estas ecuaciones es muy compleja y no será discutida en este trabajo de tesis. Para mayores detalles sobre este tópico, el lector puede consultar la referencia [15].

En el resto de esta tesis, se asumirá que las matrices  $\mathbf{E}(t)$  y  $\mathbf{H}(t)$  de la ecuación (2.1) son matrices cuadradas de  $n \times n$ . Asimismo, se asumirá que la matriz  $\mathbf{E}(t)$  es no singular<sup>6</sup> para todo  $t$ . Bajo estas condiciones, la ecuación (2.1) puede ser transformada de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad (2.2)$$

donde

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{E}^{-1}(t)\mathbf{H}(t) \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{E}^{-1}(t)\mathbf{e}(t). \quad (2.3b)$$

La ecuación (2.2) es conocida como ecuación de estado, donde el vector  $\mathbf{x}(t)$  se conoce como vector de estados. Esta ecuación representa a un sistema *lineal variante en el tiempo* (o LTV) no homogéneo. Se puede demostrar que para esta ecuación es posible determinar una solución única para cualquier condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Esto se cumple cuando el lado derecho de la ecuación (2.2) satisface la condición de Lipschitz.

La condición de Lipschitz establece que para un mapeo arbitrario  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  de  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^n$  se cumple que:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{b})\| \leq L\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|, \quad (2.4)$$

para cualquier  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  definidas en  $\mathbb{R}^m$ . En la expresión previa,  $L$  es una constante real mayor a cero y el símbolo  $\|\cdot\|$  representa a cualquier tipo de norma. Si esta condición se satisface, entonces se pueden hallar  $n$  soluciones linealmente independientes para el sistema LTV homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.5)$$

que definirán la solución de la ecuación (2.2) para cualquier condición inicial. Este conjunto de soluciones linealmente independientes puede integrarse dentro de una *matriz fundamental*. La matriz fundamental más importante que puede ser formulada para la ecuación (2.5) es la *matriz de transición*  $\Phi(t, t_0)$ . Esta matriz se forma a partir de la solución de la ecuación (2.5) usando como condiciones iniciales para  $\mathbf{x}(t_0)$  las  $n$  columnas

---

<sup>6</sup>Una matriz no singular es aquella cuyo determinante es diferente de cero. En consecuencia, una matriz no singular tiene una inversa.



de la matriz identidad  $I$  de  $n \times n$ . Para una condición inicial arbitraria  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , la solución de la ecuación (2.2) puede ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau. \quad (2.6)$$

En general, es difícil determinar  $\Phi(t, t_0)$  de forma analítica para un sistema general del tipo indicado en la ecuación (2.5). Se ha reportado en la literatura trabajos en esta dirección (por ejemplo, [16]). Debido a la complejidad de este problema, usualmente se recurre a métodos numéricos para hallar soluciones a la ecuación (2.5). Sin embargo, si se asume que la matriz  $\mathbf{A}(t)$  es una matriz de coeficientes constantes, la situación cambia radicalmente. Para el sistema *lineal, invariante en el tiempo* (o LTI)

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (2.7)$$

la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$  está dada por

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}. \quad (2.8)$$

Detalles específicos del cálculo de esta matriz se pueden hallar en [17, Sección 5.3, págs. 300-310].

Un problema importante relacionado con el sistema descrito por la ecuación (2.2) es la estabilidad del mismo. Para asegurarlo es necesario garantizar dos condiciones:

- La respuesta del sistema debe tender a cero para  $t > t_0$  cuando  $\mathbf{f}(t) = 0$  y  $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{0}$  (es decir, las condiciones iniciales del sistema son diferentes de cero).
- El vector de estados  $\mathbf{x}(t)$  debe estar acotado en magnitud cuando  $\mathbf{f}(t)$  es acotada en magnitud.

La primera condición está relacionada con la estabilidad asintótica del sistema. Se dice que el sistema (2.2) tiene estabilidad asintótica si la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$  definida para el sistema (2.5) satisface la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0. \quad (2.9)$$

La segunda condición tiene que ver con la estabilidad exponencial asintótica del sistema. Se dice que el sistema (2.2) tiene estabilidad exponencial asintótica si la matriz de transición

$\Phi(t, t_0)$  satisface la siguiente condición para  $t > t_s > t_0$

$$\|\Phi(0, t_0)\| \leq \gamma e^{-\alpha(t-t_s)}. \quad (2.10)$$

En la expresión anterior,  $\gamma$  y  $\alpha$  son constantes positivas. A partir de esta condición se puede demostrar que si los coeficientes de la matriz  $\mathbf{A}(t)$  en la ecuación (2.2) son acotados en magnitud,  $\mathbf{f}(t)$ , entonces  $\mathbf{x}(t)$  estará acotada en magnitud [18]. Para el caso de los sistemas LTI es posible garantizar ambos tipos de estabilidad siempre y cuando todos los eigenvalores de la matriz  $\mathbf{A}$  de la ecuación (2.7) tengan parte real negativa.

## 2.4. Transformaciones de coordenadas

Las transformaciones de coordenadas tienen un rol muy importante no solamente en el análisis de los sistemas dinámicos lineales sino también en el diseño de filtros analógicos de tiempo continuo. En términos generales, el sistema de LA ECUACIÓN (2.2) puede ser transformado en un sistema equivalente formulado en términos de un nuevo conjunto de variables de estado  $\mathbf{z}(t)$  a través de la transformación de coordenadas

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}(t)\mathbf{z}(t). \quad (2.11)$$

En esta expresión, la matriz  $\mathbf{L}(t)$  es una matriz cuadrada de  $n \times n$  que es no singular para cualquier instante de tiempo  $t$ . Evidentemente,  $\mathbf{z}(t)$  es un vector de dimensión  $n$ . Esto es una consecuencia clara del hecho de que el nuevo sistema debe tener el mismo número de estados que el sistema original. Si la expresión (2.11) es sustituida en la ecuación (2.2), se puede formular el sistema

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{h}(t) \quad (2.12)$$

donde

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{L}^{-1}(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{L}(t) - \mathbf{L}'(t)] \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{L}^{-1}(t)\mathbf{f}(t) \quad (2.13b)$$

Las transformaciones de coordenadas tienen un rol importante en la resolución de sistemas LTI de la forma dada en la ecuación (2.7). En este caso, se busca transformar el sistema original en un sistema equivalente cuya estructura esté definida en términos de

bloques canónicos de Jordan. Más detalles sobre este proceso pueden ser consultados en la referencia [19, Sección 7.8, págs. 587-596]. Es necesario hacer notar, que la transformación usada en el proceso anteriormente mencionado es invariante en el tiempo. En [16] se presentó una generalización del proceso de solución de sistemas LTI por medio de transformaciones de coordenadas para sistemas LTV. En ese trabajo se utilizan transformaciones de coordenadas variantes en el tiempo pero con determinante constante. Sin embargo, su aplicabilidad real queda limitada por el hecho de que el problema original de la solución de un sistema LTV se conecta a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Para dichas ecuaciones no hay garantía de que puedan hallarse soluciones analíticas.

Las transformaciones de coordenadas tienen también un lugar prominente (aunque menos visible) en el diseño de filtros analógicos de tiempo continuo. Se puede demostrar que cualquier función de transferencia puede ser representada por medio de ecuaciones de estado LTI [17, Sección 4.9, págs. 278-292]. La implementación de sistemas formulados en términos de ecuaciones de estado puede hacerse de muchas formas, por ejemplo:

- Por medio de redes pasivas,
- Usando amplificadores operacionales, resistencias y capacitores,
- Por medio de transconductores y capacitores,
- Usando *current conveyors* [20], etc.

Estas implementaciones a nivel de circuito pueden describirse por medio de ecuaciones de estado que relacionarán diferentes tipos de variables (voltajes y corrientes). Sin embargo, todas estas implementaciones son equivalentes en términos de la función de transferencia que pueden implementar. Es por esto que se puede implementar, sin dificultad alguna, un filtro elíptico con redes pasivas o con OTAs y capacitores. Las implementaciones particulares de un filtro específico tendrán limitaciones en términos de rango dinámico, consumo de potencia, componentes usados, sensibilidad, etc. Sin embargo, las ecuaciones de estado que rigen su dinámica (y, por tanto, su funcionalidad básica como filtros) son equivalentes porque están conectadas unas con otras por medio de transformaciones de coordenadas. Una discusión completa de este tópico puede hallarse en [21]. Las transformaciones de coordenadas también pueden ser usadas para mapear ecuaciones de estado de un filtro dado en un sistema equivalente con rangos dinámicos optimizados [22].

Una clase importante de transformaciones de coordenadas *lineales* de la forma indicada en la ecuación (2.11) son las así llamadas transformaciones de Lyapunov. En la discusión del párrafo anterior, no sería posible sintetizar filtros a partir de descripciones abstractas en términos de variables de estado si no existiesen las transformaciones de Lyapunov. Una transformación de Lyapunov tiene las siguientes características [23, Definición 3.3.1, pág. 44]:

- El determinante de  $\mathbf{L}(t)$  es diferente de cero para todo  $t$ .
- $\mathbf{L}'(t)$  existe y está definida para todo  $t$ .
- Los coeficientes de  $\mathbf{L}(t)$ , su inversa  $\mathbf{L}^{-1}(t)$  y  $\mathbf{L}'(t)$  son acotados en magnitud.

Estas transformaciones se caracterizan porque los sistemas que son obtenidos a partir de éstas tienen las mismas propiedades de estabilidad que los sistemas originales.

Finalmente, se pueden considerar filtros construídos a partir de transformaciones de coordenadas *no lineales*. Un ejemplo de este tipo de filtros son aquellos implementados en términos de transformaciones de coordenadas que involucran a funciones exponenciales [24]. Este tipo de filtros generaliza a los denominados “*log domain*” [25]. En el contexto de esta tesis no se considerará ninguno de estos sistemas.

---

# Metodología general para la compensación de la respuesta transitoria de sistemas LTI

---

### 3.1. Introducción

En el capítulo anterior se presentaron algunos conceptos básicos detrás de la teoría de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo. En el presente capítulo se planteará la metodología general para reducir la duración de la conducta transitoria de sistemas dinámicos lineales de tiempo continuo mediante el uso de transformaciones de coordenadas. Dichas transformaciones de coordenadas son aplicadas a las ecuaciones de estado que los definen. Al mismo tiempo, las transformaciones de coordenadas deben garantizar que las propiedades en el dominio de la frecuencia de los sistemas en cuestión no se vean afectadas cuando éstos operen de manera estacionaria. La metodología desarrollada en este capítulo será utilizada para formular una estrategia de diseño para la implementación de filtros con parámetros variantes en el tiempo basados en transconductores y amplificadores operacionales. Se demostrará que es posible modificar cualquier filtro basado en transconductores y capacitores para convertirlo en un filtro con parámetros variantes en el tiempo.

### 3.2. Metodología general para la síntesis de sistemas lineales variantes en el tiempo

Considere un filtro en tiempo continuo lineal invariante en el tiempo con una señal de entrada y una salida, el cual es representado por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde,  $u(t)$  y  $y(t)$  son la entrada y la salida del filtro respectivamente, mientras que  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estados de dimensión  $n$ . La matriz  $\mathbf{A}$  es la matriz de estado del sistema de  $n \times n$  mientras que  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son matrices de dimensiones  $n \times 1$  y  $1 \times n$ , respectivamente. El factor  $D$  es una constante escalar.

Asumiendo que la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  es impuesta para el sistema (3.1), la salida  $y(t)$  para una entrada  $u(t)$  está dada por

$$y(t) = \mathbf{C}\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau + Du(t). \tag{3.2}$$

El primer término del lado derecho de esta expresión se define en términos de la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$ . Esta matriz define la respuesta homogénea del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{3.3}$$

sujeta a la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Los dos últimos términos definen la respuesta particular del sistema (3.1) a una determinada entrada  $u(t)$ . La respuesta homogénea del sistema (3.3) está asociada a la respuesta transitoria del sistema (3.1), una reducción del comportamiento homogéneo del sistema (3.3) también dará lugar a una reducción en la duración de la respuesta transitoria del sistema (3.1).

Con el fin de crear las condiciones para la reducción del comportamiento transitorio del sistema (3.1), una relación de equivalencia se buscará entre el sistema (3.3) y un nuevo sistema homogéneo cuya conducta transitoria decaiga a su estado en equilibrio más rápido que la respuesta homogénea (3.3). Esta relación de equivalencia debe ser una transformación de Lyapunov de manera que el nuevo sistema tendrá las mismas

propiedades de estabilidad que el sistema (3.3). La transformación que se propone es:

$$\mathbf{x}(t) = g(t)\mathbf{Iz}(t). \quad (3.4)$$

En esta expresión,  $\mathbf{z}(t)$  es igual al vector de estado del sistema homogéneo nuevo,  $\mathbf{I}$  representa a la matriz identidad de dimensiones  $n \times n$  y  $g(t)$  se encuentra definida por

$$g(t) = e^{-\lambda a e^{-t/a}}, \quad (3.5)$$

donde las constantes  $\lambda$  y  $a$  son reales y positivas. Estas últimas tienen un rol importante en la reducción de la respuesta transitoria de los filtros con parámetros variantes en el tiempo desarrollados a partir de esta teoría. Dichos sistemas serán presentados en las siguientes secciones.

Utilizando la expresión (3.4), el sistema homogéneo (3.3) puede ser representado en términos de un nuevo conjunto de variables de estado  $\mathbf{z}(t)$  como se plantea a continuación

$$\mathbf{z}'(t) = \left[ \mathbf{A} - \frac{g'(t)}{g(t)}\mathbf{I} \right] \mathbf{z}(t). \quad (3.6)$$

En esta ecuación la función escalar  $\frac{g'(t)}{g(t)}$  está definida como

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda e^{-t/a}. \quad (3.7)$$

Esta función asegura que la evolución dinámica en el tiempo del sistema (3.6) llegue a su estado en equilibrio más rápido comparado con la respuesta homogénea del sistema dada en la ecuación (3.3). Con el fin de probar esta afirmación, basta con determinar la traza<sup>7</sup> de la matriz del sistema de las ecuaciones (3.3) y (3.6). Suponiendo que un sistema dinámico lineal presente estabilidad asintótica exponencial, su respuesta homogénea decaerá exponencialmente a cero con una velocidad proporcional a su traza negativo. Como se demostró en [11], la medida de estabilidad obtenida de esta manera bajo la condición anteriormente mencionada puede ser utilizada como indicador de la evolución general de un sistema dinámico lineal continuo en el tiempo.

La traza del sistema (3.3) es

$$tr_x(t) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad (3.8)$$

---

<sup>7</sup>La traza de una matriz cuadrada de tamaño  $n \times n$  es la suma de las  $n$  entradas que aparecen en su diagonal. La traza tendrá la suma de los eigenvalores algebraicos de la matriz en cuestión.

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  representan los eigenvalores algebraicos de la matriz de sistema  $\mathbf{A}$ . La traza del sistema (3.6) se indica a continuación.

$$tr_z(t) = tr_x(t) - n\lambda e^{-\frac{t}{a}}. \quad (3.9)$$

De esta expresión, se observa claramente que la traza de la matriz del sistema de la ecuación (3.6) es menor que la traza del sistema homogéneo dado en la expresión (3.3). Esto significa que la respuesta del sistema (3.6) decaerá más rápido a su punto de equilibrio comparado con la respuesta del sistema (3.3). Consecuentemente, el nuevo sistema estará descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left[ \mathbf{A} - \frac{g'(t)}{g(t)} \mathbf{I} \right] \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.3. Estrategia de diseño de filtros con parámetros variantes en el tiempo basados en OTAs-C

La teoría desarrollada hasta el momento será aplicada en el diseño de una red de compensación requerida para la reducción de la duración de la respuesta transitoria en filtros OTA-C. Una representación en términos de variables de estado basada en el modelo propuesto en [26], será considerada. Un filtro OTA-C puede ser modelado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{T}_c \mathbf{v}'(t) = \mathbf{G}\mathbf{v}(t) + \mathbf{G}_{in}v_{in}(t) \quad (3.11)$$

$$v_{out}(t) = \mathbf{C}_v\mathbf{v}(t) + Dv_{in}(t). \quad (3.12)$$

En la expresión anterior,  $v_{in}(t)$  y  $v_{out}(t)$  representan los voltajes de entrada y salida del filtro respectivamente, mientras que el vector de estados  $\mathbf{v}(t)$  contiene los voltajes nodales excluyendo el correspondiente a la entrada.  $\mathbf{T}_c$  es la matriz que contiene los capacitores del filtro, presenta la forma

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n C_{1j} & -C_{12} & \dots & -C_{1n} \\ -C_{12} & \sum_{j=1}^n C_{2j} & \dots & -C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{1n} & -C_{2n} & \dots & \sum_{j=1}^n C_{2j} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$



$\mathbf{G}$  es la matriz de transconductores y  $\mathbf{G}_{\text{in}}$  es la matriz de acoplamiento de entrada, estas son definidas a continuación

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{m11} & g_{m12} & \cdots & g_{m1n} \\ g_{m21} & g_{m22} & \cdots & g_{m2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{mn1} & g_{mn2} & \cdots & g_{mnn} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{G}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} g_{in1} & \cdots & g_{inn} \end{bmatrix}^T \quad (3.15)$$

mientras que  $\mathbf{C}_{\mathbf{v}}$  es una matriz de capacitores que adopta la forma

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Cabe señalar que la ecuación (3.11) se forma como una ecuación nodal que involucra los nodos cuyos voltajes son desconocidos. Los detalles de la formulación de esta ecuación son omitidos. Después de comparar la expresión (3.11) con la (3.1), se obtienen las relaciones:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{-1} \mathbf{G} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{-1} \mathbf{G}_{\text{in}} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\mathbf{v}}. \quad (3.19)$$

Con la finalidad de agregar el término de compensación requerido  $\frac{g'(t)}{g(t)}$  presente en la ecuación (3.10), la siguiente expresión debe ser considerada

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \mathbf{I} = \frac{g'(t)}{g(t)} \mathbf{T}_{\mathbf{c}}^{-1} \mathbf{T}_{\mathbf{c}}. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, el nuevo sistema con comportamiento transitorio de corta duración se puede formular como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mathbf{c}} \mathbf{v}'(t) &= \left[ \mathbf{G} - \frac{g'(t)}{g(t)} \mathbf{T}_{\mathbf{c}} \right] \mathbf{v}(t) + \mathbf{G}_{\text{in}} v_{in}(t) \\ v_{out}(t) &= \mathbf{C}_{\mathbf{v}} \mathbf{v}(t) + D_{in}(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

En esta expresión, el término  $\frac{g'(t)}{g(t)} \mathbf{T}_{\mathbf{c}}$  se asocia a una matriz de transconductancias

$$\mathbf{G}_p(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} \mathbf{T}_c. \quad (3.22)$$

La matriz  $\mathbf{G}_p(t)$  puede ser interpretada como una matriz que contiene información sobre el patrón de interconexiones de un conjunto de transconductores cuya transconductancia será proporcional al valor de capacitancias de los capacitores que componen a el filtro. Los transconductores presentes en la matriz  $\mathbf{G}_p(t)$  tendrán sus nodos de entrada conectados en paralelo con los capacitores presentes en el circuito. Debido a la presencia del término  $g'(t)/g(t)$ , los transconductores definidos a través de la matriz  $\mathbf{G}_p(t)$  tendrán valores de transconductancias que decrecerán exponencialmente. En la siguiente sección se presentarán diversos ejemplos para validar las expresiones anteriormente obtenidas.

### 3.4. Síntesis de un filtro pasa bajas de segundo orden

En esta sección se presenta un ejemplo que demostrará la aplicación de la teoría desarrollada hasta ahora. El sistema a analizar se muestra en la Fig. 3.1. Este circuito corresponde a un filtro pasa bajas de segundo orden de tiempo continuo [27]. La conducta en el dominio de la frecuencia de este filtro está descrita por la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{g_{m_2}g_{m_4}}{C_1C_2}}{s^2 + s\frac{g_{m_3}}{C_2} + \frac{g_{m_2}g_{m_1}}{C_1C_2}}. \quad (3.23)$$

La respuesta transitoria del filtro ante una señal de entrada tipo escalón, se grafica en la Fig. 3.2. Se han seleccionado las transconductancias  $g_{m_1}-g_{m_4}$  y los valores de los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  de tal forma que la respuesta ante la señal de entrada de tipo escalón sea subamortiguada. Para este filtro, los polos que caracterizan su respuesta en frecuencia son

$$P_{1-2} = -1 \pm 10j. \quad (3.24)$$

Dado que magnitud de la parte imaginaria de los polos de la función de transferencia (3.23) es mayor que la magnitud de la parte real, se garantiza al mismo tiempo que la respuesta del filtro a una señal de tipo escalón tenga un sobretiro notable. A partir de la función de transferencia y el valor de los polos, se obtienen los valores de las transconductancias y capacitores. Si se asume que todas las transconductancias que componen al filtro son iguales y que su valor es igual a  $100 \mu\text{A}/\text{V}$ , se obtiene que las capacitancias de  $C_1$  y  $C_2$

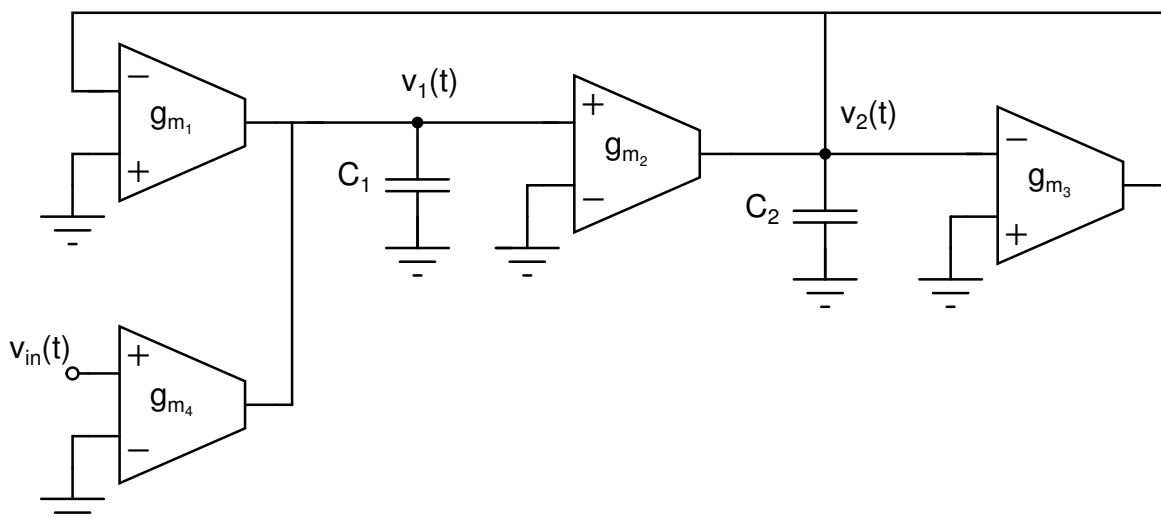


Figura 3.1: Filtro pasa bajas de segundo orden.

son  $2 \mu\text{F}$  y  $50 \mu\text{F}$  respectivamente. Es necesario notar que los valores de capacitancias calculados no son prácticos para su integración. Sin embargo, dichos valores son requeridos con la finalidad de que la respuesta transitoria del filtro frente a una señal de tipo escalón tenga un alto valor de sobretiro.

Las características que definen este tipo de comportamiento son el tiempo de levantamiento  $t_r$ , tiempo de establecimiento del 5%  $t_s$ , tiempo y valor del sobretiro máximo  $t_p$  y  $M_p$  respectivamente [28]. Para la respuesta transitoria analizada se tiene los siguientes valores:  $t_r \approx 168\text{ms}$ ,  $t_p \approx 316\text{ms}$ ,  $M_p \approx 1,729$  y  $t_s \approx 2,897\text{s}$ .

Con el objeto de reducir la duración de la respuesta transitoria del filtro en cuestión, es necesario determinar sus ecuaciones de estado. Esta tarea se realiza mediante la formulación de las ecuaciones nodales como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} C_1 v_1'(t) &= -g_{m_1} v_2(t) + g_{m_4} v_{in}(t) \\ C_2 v_2'(t) &= g_{m_2} v_1(t) - g_{m_3} v_2(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

En la expresión anterior,  $v_{in}(t)$  es el voltaje de entrada del filtro,  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  son los voltajes nodales correspondientes a las variables de estado, mientras que  $g_{m_1}$ - $g_{m_4}$  y  $C_1$ - $C_2$  son los transconductores y capacitores que conforman el filtro respectivamente. La expresión (3.25) puede ser reescrita de la siguiente forma:

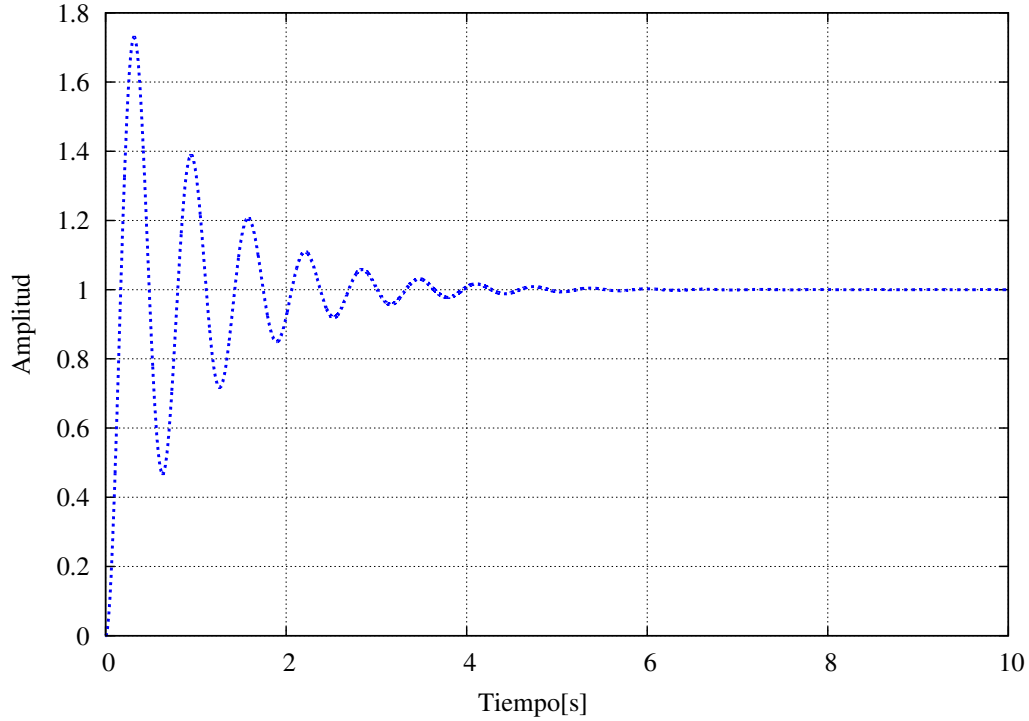


Figura 3.2: Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de la Fig. 3.1

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g_{m_1} \\ g_{m_2} & -g_{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m_4} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t). \quad (3.26)$$

A partir de esta expresión es posible identificar a los términos  $\mathbf{T}_c$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}_{in}$  de la ecuación (3.11). Con el objeto de transformar la ecuación (3.26) que modela al filtro de la Fig. 3.1 en una ecuación que representa un filtro con parámetros variantes en el tiempo, es necesario incluir el término  $\frac{g'(t)}{g(t)}\mathbf{T}_c$  en la matriz del sistema tal como está indicado en la ecuación (3.21).

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & -g_{m_1} \\ g_{m_2} & -g_{m_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{g'(t)}{g(t)} & 0 \\ 0 & \frac{g'(t)}{g(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m_4} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t). \quad (3.27)$$

De acuerdo a la expresión (3.7), el término  $\frac{g'(t)}{g(t)}$  representa a una función exponencial decreciente en el tiempo. Gracias a dicho término, la conducta dinámica del sistema descrito por la ecuación (3.27) tiende con mayor rapidez a su punto de equilibrio.

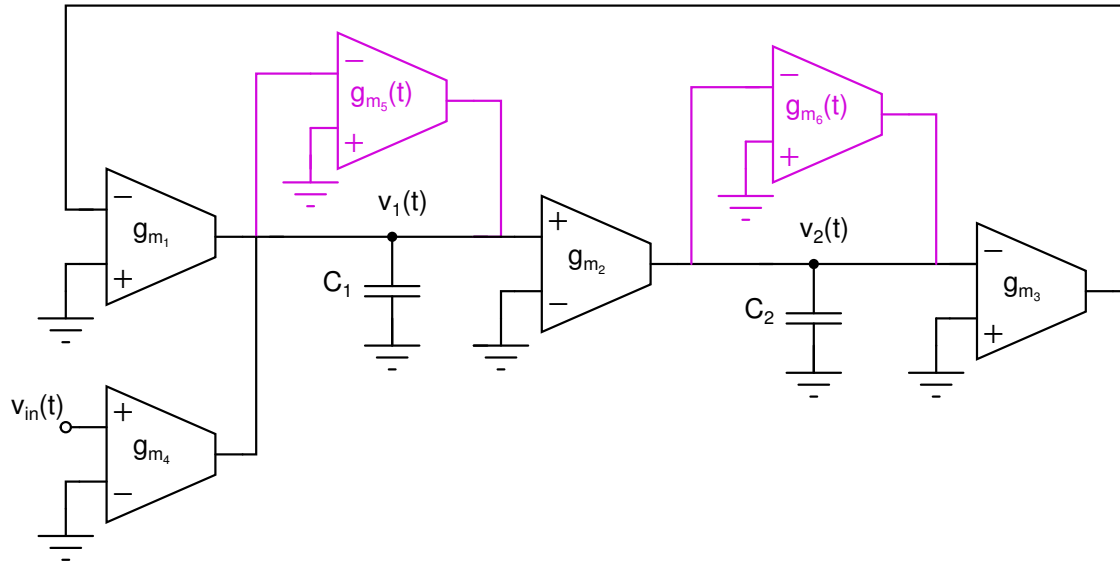


Figura 3.3: Filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo.

Al sustituir la matriz  $\frac{g'(t)}{g(t)} \mathbf{T}_c$  por la matriz de transconductancias variantes en el tiempo  $\mathbf{G}_p(t)$  en el sistema de ecuaciones (3.27), se obtiene el filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo modelado por la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & -g_{m1} \\ g_{m2} & -g_{m3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{m5}(t) & 0 \\ 0 & g_{m6}(t) \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m4} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t). \quad (3.28)$$

En esta expresión las transconductancias  $g_{m5}(t)$  y  $g_{m6}(t)$  están dadas por

$$g_{m5}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} C_1 \quad (3.29)$$

$$g_{m6}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} C_2. \quad (3.30)$$

La implementación del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo se muestra en la Fig. 3.3. Es necesario notar la que los transconductores que forman a este circuito se distinguen por dos colores. El color negro es usado para representar a los transconductores del filtro original, mientras que el color magenta es usado para los transconductores encargados de la compensación de la conducta transitoria del filtro. Dichos transconductores son precisamente  $g_{m5}(t)$  y  $g_{m6}(t)$ . Es necesario

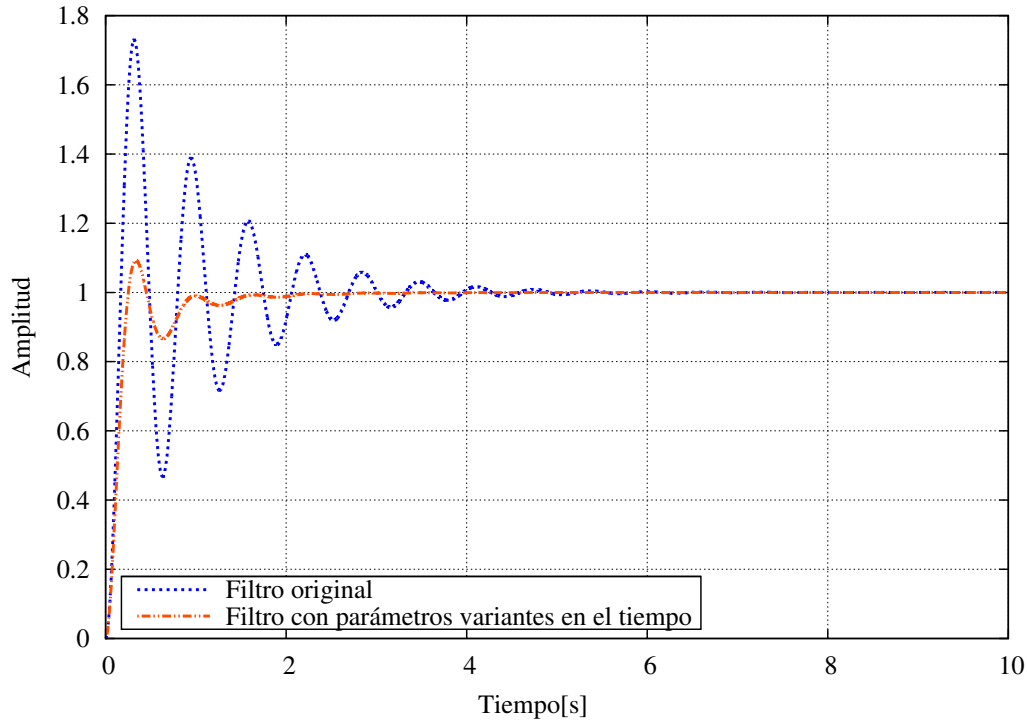


Figura 3.4: Respuesta a un escalón unitario del filtro de la Fig. 3.1 y del filtro de la Fig. 3.3

Especificación	Filtro original	Filtro con parámetros variantes en el tiempo
Tiempo de levantamiento $t_r$	168 ms	252 ms
Tiempo de pico $t_p$	316 ms	336 ms
Sobretiro máximo $M_p$	0.729	0.092
Tiempo de establecimiento $t_s$	2.897 s	837 ms

Cuadro 3.1: Resumen de las características de la respuesta transitoria del filtro de la Fig. 3.1 y del filtro de la Fig. 3.3.

notar que la transconductancia de estos transconductores varía exponencialmente en el tiempo. Asimismo, y de acuerdo con la expresión (3.27), los nodos de entrada de estos transconductores con transconductancias variantes en el tiempo están conectados en paralelo con los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  del filtro. Como se puede observar estos transconductores se encuentran conectados como si fueran resistores activos. Esto se debe esencialmente a la presencia del signo negativo en la expresión (3.21). Asimismo, la salida de los transconductores  $g_{m_5}(t)$  y  $g_{m_6}(t)$  está conectada respectivamente a los nodos que definen los voltajes

nodales  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ . Esto es una consecuencia directa de la formulación de las ecuaciones nodales en la expresión (3.27). En la Fig. 3.4 se ilustra la respuesta del filtro original y del filtro con parámetros variantes en el tiempo para una señal de entrada de tipo escalón. Para propósitos de esta simulación, se ha asumido que  $g'(t)/g(t) = 4e^{-t}$ . Tomando en cuenta esta información, se tiene que las transconductancia  $g_{m_5}(t)$  debe variar exponencialmente desde  $8 \mu\text{A}/\text{V}$  hasta cero, mientras que la transconductancia  $g_{m_6}(t)$  debe variar exponencialmente desde  $200 \mu\text{A}/\text{V}$  hasta cero. De la Fig. 3.4, se puede apreciar que el filtro compensado presenta una respuesta transitoria reducida respecto al original en un 71.10 %. En el cuadro 3.1 se muestra un resumen de los parámetros de la respuesta transitoria para ambos sistemas.

Finalmente, es necesario notar que el filtro con parámetros variantes en el tiempo posee más elementos comparado contra el filtro original. Si una implementación en circuito integrado es propuesta para este circuito, ciertamente el filtro con parámetros variantes tenderá a consumir más área para su implementación así como más potencia. Desafortunadamente, esto es un costo necesario para obtener un comportamiento transitorio de corta duración usando la técnica propuesta.

### **3.5. Síntesis de un filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática**

En el apartado anterior se presentó la aplicación de la metodología general para la compensación de la respuesta transitoria de un filtro pasa bajas de segundo orden lineal invariante en el tiempo. En esta sección se analizará un filtro pasa bajas de tercer orden que incorpora una etapa bicuadrática. Dicho filtro está ilustrado en la Fig. 3.5. El comportamiento en el dominio de la frecuencia del filtro en cuestión se encuentra definido por la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{g_{m_3}}{C_1}}{s + \frac{g_{m_6}}{C_1}} \cdot \frac{\frac{g_{m_1} g_{m_5}}{C_2 C_3}}{s^2 + s \frac{g_{m_2}^2}{C_2} + \frac{g_{m_4} g_{m_3}}{C_2 C_3}}. \quad (3.31)$$

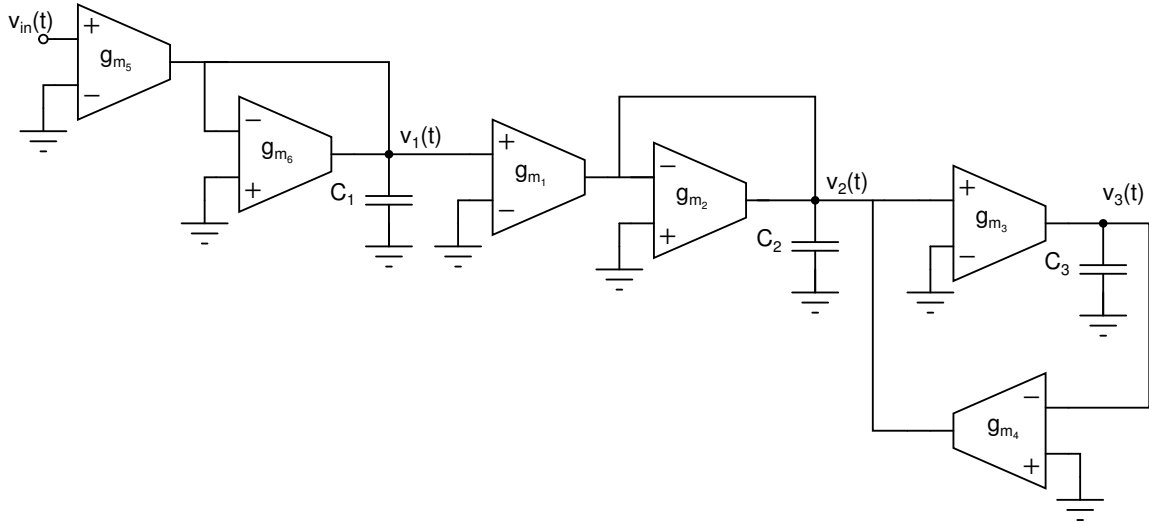


Figura 3.5: Filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática

Las ecuaciones de estado que describen la conducta dinámica del sistema son:

$$\begin{aligned}
 C_1 v_1'(t) &= -g_{m_6} v_1(t) + g_{m_5} v_{in}(t) \\
 C_2 v_2'(t) &= g_{m_1} v_1(t) - g_{m_2} v_2(t) - g_{m_4} v_3(t) \\
 C_3 v_3'(t) &= g_{m_3} v_2(t),
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde  $v_{in}(t)$  es el voltaje de entrada,  $v_1(t)-v_3(t)$  son los voltajes nodales que corresponden a las variables de estado, mientras que  $C_1-C_6$  y  $g_{m_1}-g_{m_6}$  son los capacitores y transconductores que componen al filtro. Como en el caso anterior, estas ecuaciones fueron formuladas por medio de análisis nodal. El sistema de ecuaciones (3.5) puede ser reescrito como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{m_6} & 0 & 0 \\ g_{m_1} & -g_{m_2} & -g_{m_4} \\ 0 & g_{m_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m_5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t). \tag{3.33}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, es necesario añadir la matriz de transconductancias variantes en el tiempo  $\mathbf{G}_p(t)$  definida en la expresión (3.22) en la relación (3.33). Consiguientemente, se obtiene las matrices de estado



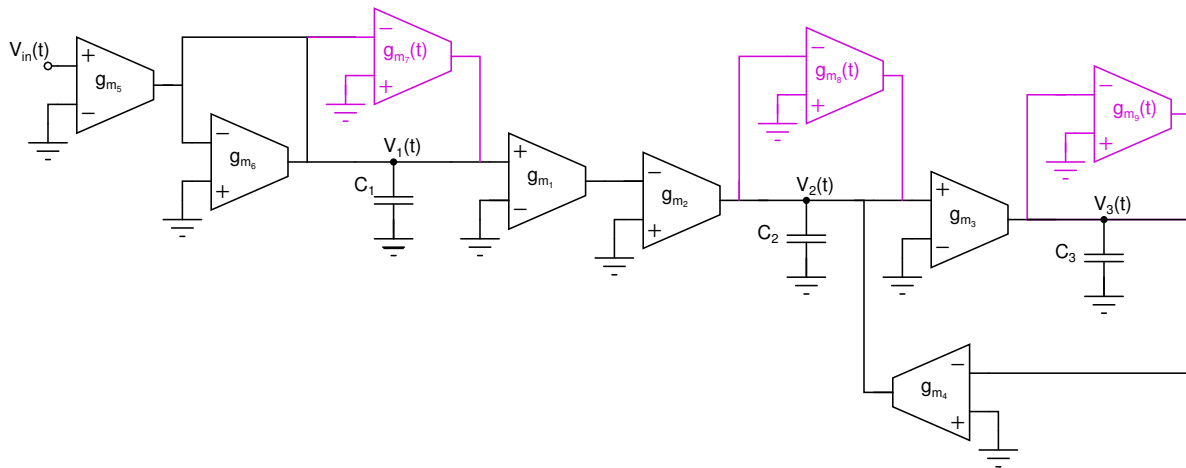


Figura 3.6: Filtro pasa bajas de tercer orden con parámetros variantes en el tiempo basado en el circuito de la Fig. 3.5.

Elementos	Valores
$g_{m_1} - g_{m_6}$	$100 \mu A/V$
$C_1$	$202.359119 \mu F$
$C_2$	$202.3594953 \mu F$
$C_3$	$49.70506894 \mu F$

Cuadro 3.2: Valores de los elementos del filtro de la Fig. (3.5).

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{m_6} & 0 & 0 \\ g_{m_1} & -g_{m_2} - g_{m_4} & 0 \\ 0 & g_{m_3} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{m_7}(t) & 0 & 0 \\ 0 & g_{m_8}(t) & 0 \\ 0 & 0 & g_{m_9}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m_5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t). \quad (3.34)$$

En esta ecuación, las transconductancias variantes en el tiempo  $g_{m_7}(t)$ ,  $g_{m_8}(t)$  y  $g_{m_9}(t)$  están dadas por las siguientes expresiones

$$g_{m_7}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}C_1 \quad (3.35)$$

$$g_{m_8}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}C_2 \quad (3.36)$$

$$g_{m_9}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}C_3. \quad (3.37)$$

La implementación correspondiente al filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática con parámetros variantes en el tiempo descrito por el conjunto de ecuaciones (3.34) se muestra en la Fig. 3.6. La respuesta transitoria del filtro original como del filtro con parámetros variantes en el tiempo ante una señal de entrada de tipo escalón se encuentra graficada en la Fig. 3.7. En este ejemplo se asumió que los polos del filtro original de tercer orden serían iguales a los polos de un filtro Chebyshev con frecuencia de corte normalizada de 1 rad/s con un rizo de 1 dB en la banda de paso. Para dicha aproximación, sus polos están dados por

$$p_1 = -0,49417 \quad (3.38)$$

$$p_2 = -0,24709 + 0,966j \quad (3.39)$$

$$p_3 = -0,24709 - 0,966j. \quad (3.40)$$

Esta elección de los polos para el filtro tiene por objeto garantizar un sobretiro notable al tener un par de polos complejos conjugados con una parte imaginaria mayor a la parte real. Los valores de los parámetros  $g_{m_1}-g_{m_6}$  y de las capacitancias  $C_1-C_3$  para los polos mencionados anteriormente estan indicados en el cuadro 3.2. Asimismo, para el filtro con parámetros variantes en el tiempo se asumió que  $g'(t)/g(t)=4e^{-t}$ . Esto implica que  $g_{m_7}(t)$  y  $g_{m_8}(t)$  decrecen exponencialmente de 809.4364  $\mu\text{A}/\text{V}$  a cero, y  $g_{m_9}(t)$  decrece exponencialmente de 198.8202  $\mu\text{A}/\text{V}$  a cero. En el cuadro 3.3 se resumen los parámetros de la conducta transitoria del filtro original y el filtro con parámetros variantes en el tiempo. Se puede observar que el filtro generado por medio de la metodología propuesta, presenta una respuesta transitoria de menor en un 88.15 %.

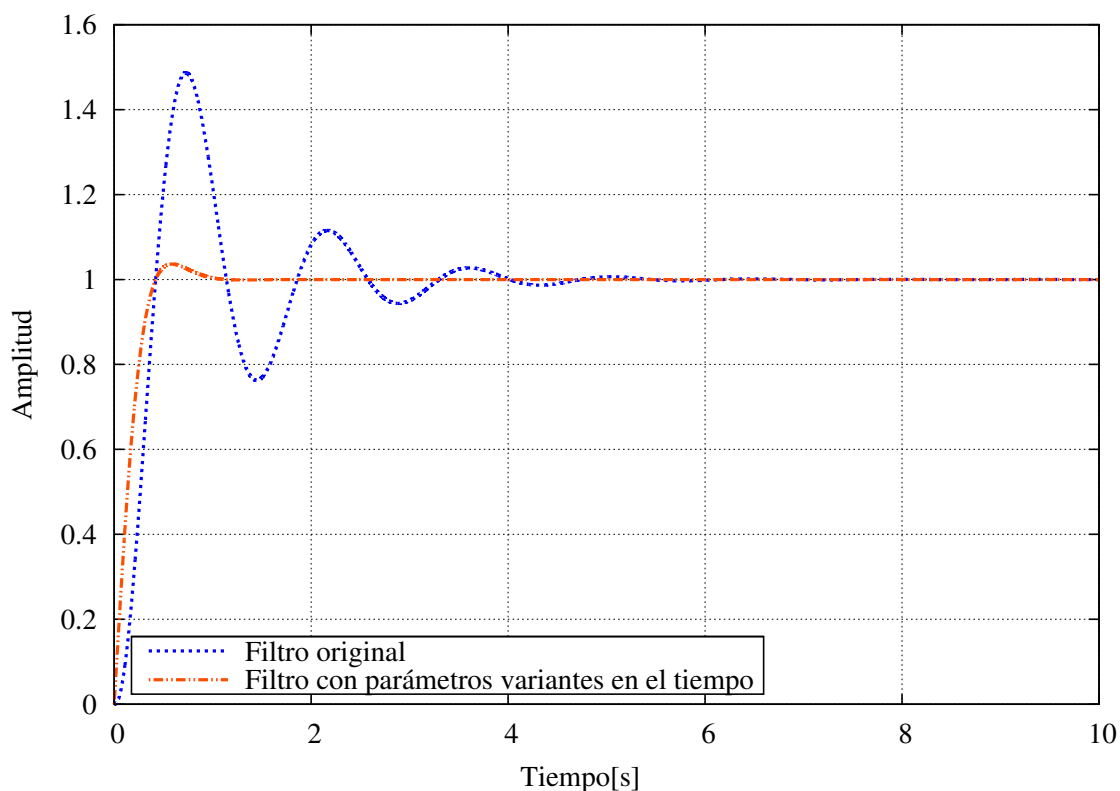


Figura 3.7: Respuesta a un escalón unitario del filtro de la Fig. 3.5 y del filtro de la Fig. 3.6.

Especificación	Filtro original	Filtro con parámetros variantes en el tiempo
Tiempo de levantamiento $t_r$	421 ms	421 ms
Tiempo de pico $t_p$	729 ms	585 ms
Sobretiro máximo $M_p$	0.486	0.036
Tiempo de establecimiento $t_s$	2.996 s	355 ms

Cuadro 3.3: Resumen de las características de la respuesta transitoria del filtro de la Fig. 3.5 y del filtro de la Fig. 3.6.

### 3.6. Síntesis de un filtro escalera LC pasa bajas elíptico de tercer orden

En esta sección se utilizará la técnica propuesta en esta tesis para reducir la respuesta transitoria de un filtro que presenta tanto polos como ceros. Para este propósito, se considerará un filtro escalera LC pasa bajas elíptico de tercer orden, el cual está repre-

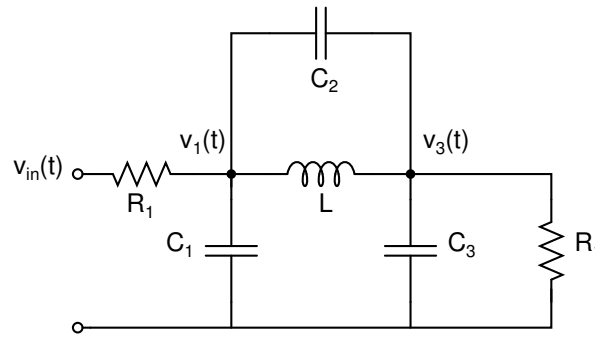


Figura 3.8: Filtro escalera LC pasa bajas elíptico.

sentado gráficamente en la Fig. 3.8. Es preciso obtener un circuito equivalente basado en elementos activos. Por consiguiente, el inductor y los resistores del filtro serán reemplazados por transconductores. Como se puede observar en la Fig. 3.8, se tienen dos resistores conectados de formas diferentes. El primero representa un resistor flotante, conectado entre el voltaje de entrada  $v_{in}(t)$  y el nodo  $v_1(t)$ . La ecuación nodal que caracteriza el comportamiento de este resistor es

$$i_{R_1} = \frac{v_{in} - v_1}{R_1}. \quad (3.41)$$

Considerando que  $R_1 = \frac{1}{g_m}$ , se tiene que la corriente que circula por la resistencia flotante es igual a

$$i_{R_1} = g_m(v_{in} - v_1). \quad (3.42)$$

La configuración con transconductores que describe el comportamiento de la ecuación (3.42) se ilustra en la Fig. 3.9(a). El segundo resistor presente en el filtro de la Fig. 3.8 es un resistor de carga que está conectado al nodo con voltaje nodal  $v_3(t)$ . La ecuación nodal que describe el comportamiento de la corriente en dicho resistor está dada por

$$i_{R_1} = \frac{v_3}{R_1}. \quad (3.43)$$

Al igual que para el resistor flotante, se debe tomar en cuenta que  $R_1 = \frac{1}{g_m}$  para generar la siguiente ecuación

$$i_{R_1} = v_3 g_m. \quad (3.44)$$

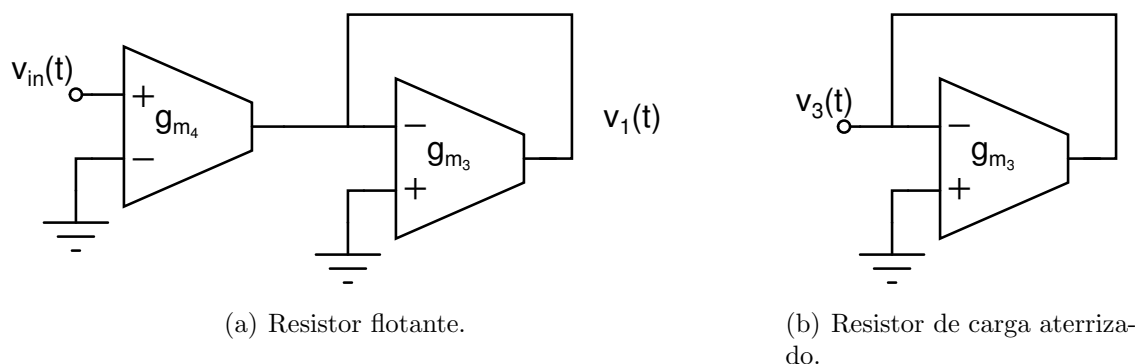


Figura 3.9: Implementación activa de resistores.

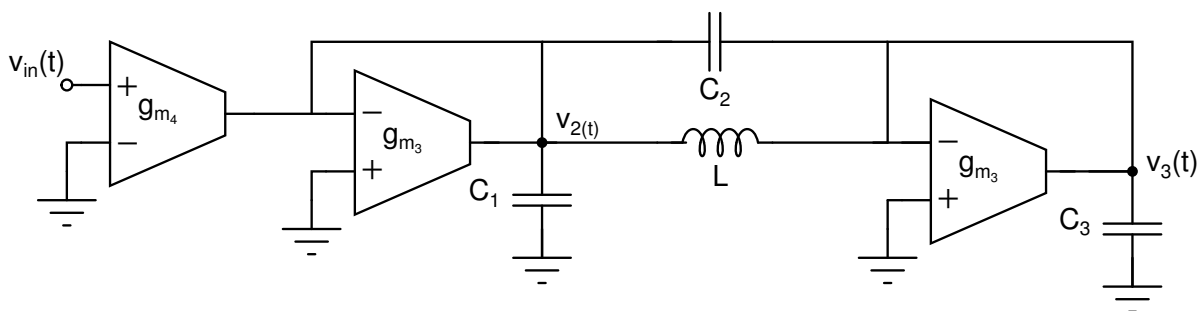


Figura 3.10: Filtro escadera pasa bajas elíptico con resistores activos.

La implementación que corresponde al resistor de carga aterrizado se encuentra en la Fig. 3.9(b). Al incluir estas dos nuevas configuraciones se obtiene el circuito de la Fig. 3.10. A fin de tener un circuito completamente integrable, sólo resta sustituir el inductor por su respectiva configuración activa. Para ello se hace uso de una estructura *gyrator-C*, el cual emula un comportamiento inductivo utilizando un capacitor de carga. La función principal de éste es invertir la característica de voltaje-corriente del elemento pasivo en cuestión. La configuración del *gyrator* se basa en dos transconductores conectados *back-to-back* para un inductor aterrizado. Debido a que se requiere un inductor flotante, el *gyrator* adopta su forma diferencial [29]. Ésta estructura se muestra en la Fig 3.11. La inductancia equivalente de este circuito está dada por la expresión

$$L = \frac{C_4}{g_{m_1}g_{m_2}}. \tag{3.45}$$

En la Fig. 3.12, se muestra implementación activa derivada del filtro escadera LC pasa bajas elíptico de tercer orden. La conductancia que presenta este filtro en el dominio de la

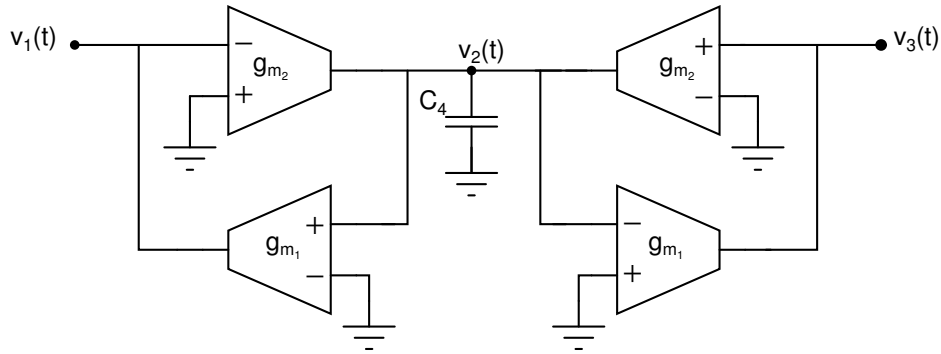


Figura 3.11: Emulación de un inductor flotante.

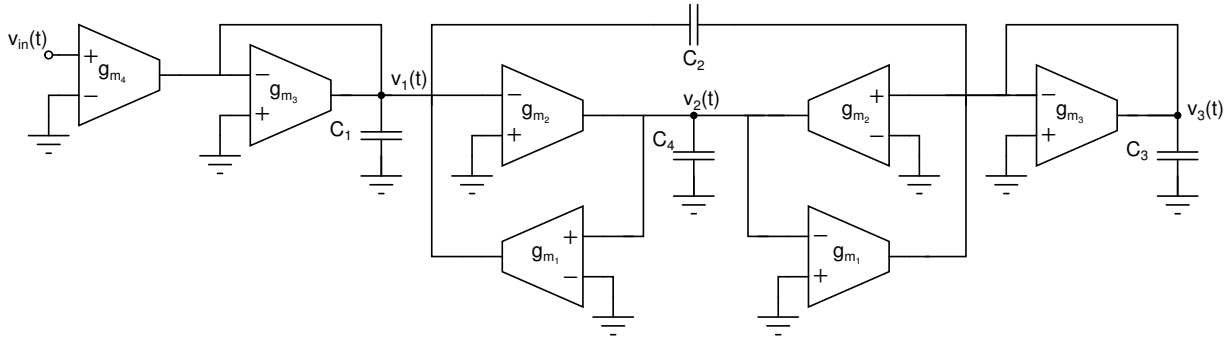


Figura 3.12: Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden con componentes activos.

frecuencia está descrita por la siguiente función de la transferencia

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{V_{in}(s)} = \frac{s^2 + \frac{g_{m_3}^2}{C_4^2}}{s^2 + s\frac{g_{m_1}}{3C_2} + \frac{2g_{m_1}^2}{C_2C_3}} \cdot \frac{\frac{g_{m_2}}{C_4^2}}{s + \frac{g_{m_4}}{C_1}}. \quad (3.46)$$

Las ecuaciones de estado que definen el comportamiento dinámico del filtro pasa bajas de tercer orden elíptico con componentes activo son las siguientes

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2)v_1'(t) - C_2v_3'(t) &= -g_{m_3}v_1(t) + g_{m_1}v_2(t) + g_{m_4}v_{in}(t) \\ C_4v_2'(t) &= -g_{m_2}v_1(t) + g_{m_2}v_3(t) \\ (C_2 + C_3)v_3'(t) - C_2v_1'(t) &= -g_{m_1}v_2(t) - g_{m_3}v_3(t), \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde  $v_{in}(t)$  es el voltaje de entrada,  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  y  $v_3(t)$  son los voltajes nodales de las variables de estado asociadas al filtro, mientras que  $C_{1-4}$  y  $g_{m_{1-4}}$  son los capacitores y transconductores presentes. Las ecuaciones de estado puede ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} C_1 + C_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & C_4 & 0 \\ -C_2 & 0 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1(t) \\ v'_2(t) \\ v'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{m_3} & g_{m_1} & 0 \\ -g_{m_2} & 0 & g_{m_2} \\ 0 & -g_{m_1} & -g_{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m_4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t). \quad (3.48)$$

La compensación de la respuesta transitoria del sistema se realiza mediante la adición de la matriz  $\mathbf{G}_p(t)$ . Sin embargo, a diferencia de los casos anteriores en donde esta matriz es diagonal, la nueva matriz tendrá componentes fuera de la diagonal. La matriz  $\mathbf{G}_p(t)$  para el circuito de la Fig. 3.12 está dada por

$$\mathbf{G}_p(t) = \begin{bmatrix} g_{m_5}(t) + g_{m_6}(t) & 0 & -g_{m_6}(t) \\ 0 & g_{m_8}(t) & 0 \\ -g_{m_6}(t) & 0 & g_{m_6}(t) + g_{m_7}(t) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

donde

$$g_{m_5}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} C_1 \quad (3.50)$$

$$g_{m_6}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} C_2 \quad (3.51)$$

$$g_{m_7}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} C_3 \quad (3.52)$$

$$g_{m_8}(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} C_4. \quad (3.53)$$

La ecuación que define ahora la dinámica del filtro con parámetros variantes en el tiempo está indicada a continuación

$$\begin{bmatrix} C_1 + C_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & C_4 & 0 \\ -C_2 & 0 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1(t) \\ v'_2(t) \\ v'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{m_3} & g_{m_1} & 0 \\ -g_{m_2} & 0 & g_{m_2} \\ 0 & -g_{m_1} & g_{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{m_5}(t) + g_{m_6}(t) & 0 & -g_{m_6}(t) \\ 0 & g_{m_8}(t) & 0 \\ -g_{m_6}(t) & 0 & g_{m_7} + g_{m_6}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m_4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t) \quad (3.54)$$

La implementación del filtro pasa bajas elíptico de tercer orden con parámetros variantes en el tiempo se muestra en la Fig. 3.13. Los transconductores adicionales a la

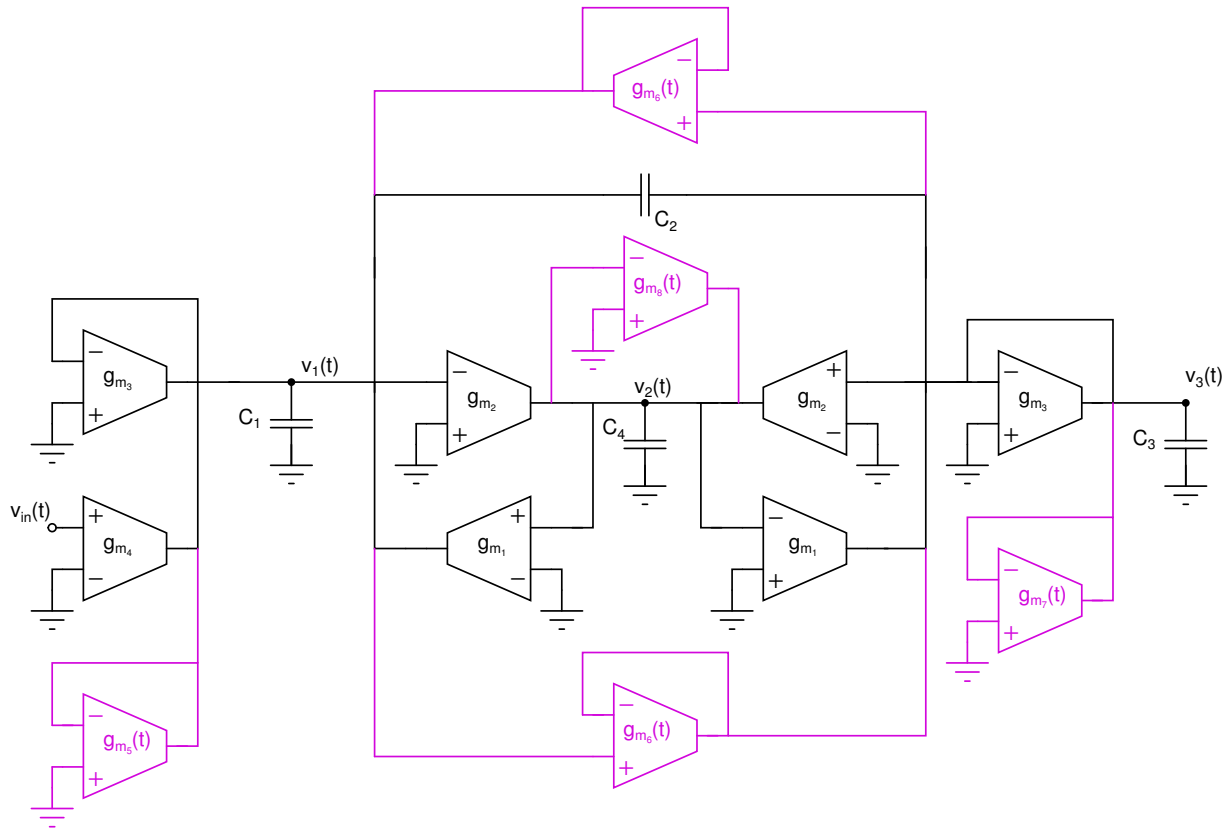


Figura 3.13: Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden con parámetros variantes en el tiempo.

Elementos	Valores
$g_{m1} - g_{m4}$	$100 \mu\text{A}/\text{V}$
$C_1$	$57.33609617 \mu\text{F}$
$C_2$	$106.3151632 \mu\text{F}$
$C_3$	$134.9417897 \mu\text{F}$
$C_4$	$637.6317003 \text{ nF}$

Cuadro 3.4: Valores de los elementos del filtro de la Fig. (3.5).

estructura del filtro original aparecen resaltados en color magenta. En la Fig. 3.14 se ilustra la respuesta ante una entrada escalón para el filtro original y para el filtro con parámetros variantes en el tiempo.



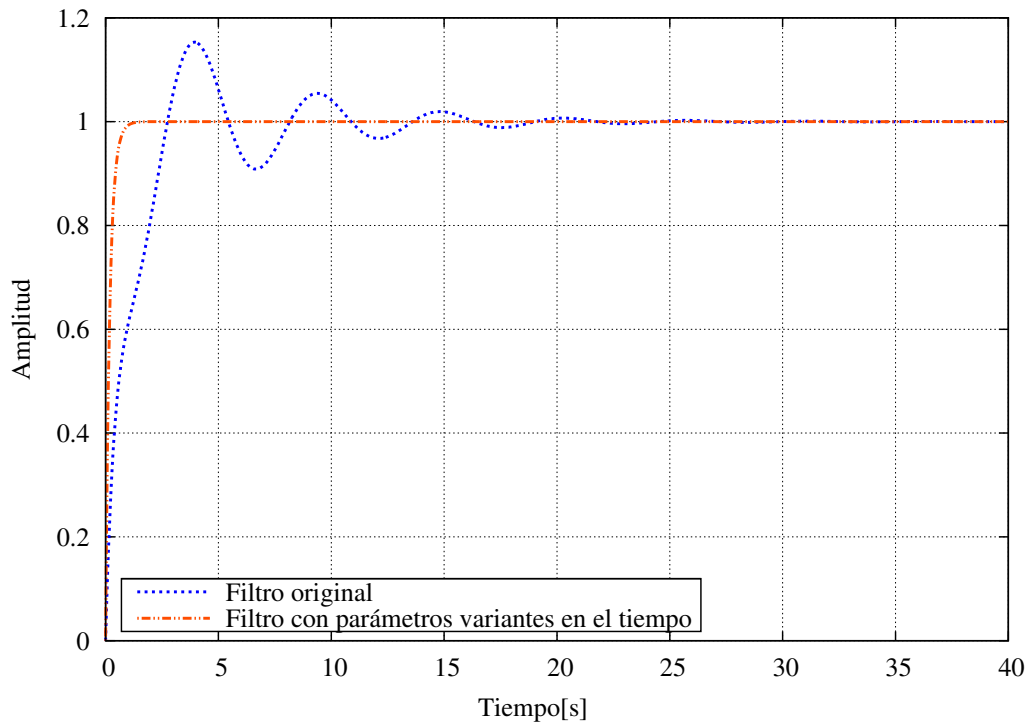


Figura 3.14: Respuesta a un escalón unitario del filtro de la Fig. 3.12 y del filtro de la Fig. 3.13.

Especificación	Filtro original	Filtro con parámetros variantes en el tiempo
Tiempo de levantamiento $t_r$	2.762 s	2.762 s
Tiempo de pico $t_p$	3.963 s	2.962 s
Sobretiro máximo $M_p$	0.153	0
Tiempo de establecimiento $t_s$	9.762 s	600 ms

Cuadro 3.5: Valores de las características de la respuesta transitoria del filtro de la Fig. 3.12 y del filtro de la Fig. 3.13.

En este ejemplo se asumió que los polos presentan la forma

$$p_1 = -1,7441 \tag{3.55}$$

$$p_2 = -0,1568 + 1,1703j \tag{3.56}$$

$$p_3 = -0,1568 - 1,1703j, \tag{3.57}$$

mientras que los ceros del filtro se encuentran dados por:

$$z_1 = 1,3037j \quad (3.58)$$

$$z_2 = -1,3037j. \quad (3.59)$$

Estos valores de polos y ceros corresponden a un filtro elíptico con una frecuencia de corte normalizada a 1 rad/s, un rizo de 0.1 dB en la banda de paso y una atenuación mínima en la banda de rechazo de 6.691 dB. A pesar de que la atenuación mínima en la banda de rechazo es muy pequeña para el filtro elíptico considerado, esta aproximación fue elegida para generar una entrada de tipo escalón una respuesta transitoria subamortiguada con un sobretiro considerable. Los valores de los transconductores  $g_{m_1}-g_{m_4}$  y de los capacitores  $C_1-C_4$  usados para obtener la aproximación anteriormente descrita, son indicados en el cuadro 3.4. Al igual que en los dos ejemplos anteriores, se considera que  $g'(t)/g(t)=4e^{-t}$ . Esto conlleva a que  $g_{m_5}(t)$  decrece exponencialmente de 229.3443  $\mu\text{A}/\text{V}$  a cero,  $g_{m_6}(t)$  decrece exponencialmente de 425.2606  $\mu\text{A}/\text{V}$  a cero,  $g_{m_7}(t)$  decrece exponencialmente de 539.7671  $\mu\text{A}/\text{V}$  a cero y  $g_{m_8}(t)$  decrece exponencialmente de 2.5505  $\mu\text{A}/\text{V}$  a cero.

En el cuadro 3.5 se reporta un resumen de la respuesta transitoria del filtro original y del filtro con parámetros variantes en el tiempo. Como se puede observar, la duración del transitorio ha sido reducida en un 93.85%. Una vez más se demostró que a través la metodología propuesta en este trabajo de investigación se puede obtener una reducción significativa de la duración del comportamiento transitorio en filtros pasa bajas.

---

### Implementación de la metodología general para la compensación de la respuesta transitoria de sistemas LTI

---

#### 4.1. Introducción

En el capítulo anterior se formuló una metodología general para la compensación del comportamiento transitorio en filtros basados en transconductores y capacitores. Asimismo, se demostró que es posible aplicar dicha metodología en filtros que incluyen tanto polos como ceros en su función de transferencia. En este capítulo se demostrará a través de un prototipo construido con circuitos discretos la validez del trabajo desarrollado.

#### 4.2. Diseño del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo

Con el objeto de probar la validez de la metodología propuesta en el capítulo anterior, se implementó el filtro pasa bajas de segundo orden mostrado en la Fig. 4.1 usando componentes discretos. Este circuito fue estudiado en la Sección 3.3. La elección de este circuito para su implementación usando elementos estuvo motivada por su relativa simplicidad.

Las ecuaciones que describen su conducta dinámica son

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g_{m_1} \\ g_{m_2} & -g_{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{m_4} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}(t). \quad (4.1)$$

El amplificador operacional de transconductancia CA3080 fue utilizado para la implementación del filtro mostrado en la Fig. 4.1. El amplificador anteriormente mencionado está basado en tecnología bipolar. Asimismo, se asumió que los polos complejos conjugados del filtro son iguales a

$$P_{1-2} = -6283 \pm 62830j. \quad (4.2)$$

Es necesario notar que la ubicación relativa en el plano complejo de estos polos es exactamente igual a la ubicación de los polos normalizados del ejemplo presentado en la Sección 3.3. Esto se hizo para demostrar que el procedimiento propuesto para la síntesis de un filtro con parámetros variantes en el tiempo es independiente de la normalización a la que puedan estar sujetos los componentes del filtro cuya conducta transitoria debe ser reducida en duración.

Si se conoce la ubicación de los polos del filtro pasa bajas de la Fig. 4.2 en el plano complejo así como su ganancia en DC, hay dos posibilidades para establecer los valores de sus componentes. La primera es considerar que todos los transconductores del filtro tienen valores de transconductancia iguales. La segunda consiste en asumir que los capacitores del filtro serán iguales. Tomando en cuenta que es sencillo ajustar el valor de las transconductancias a través de su corriente de polarización, y que se puede hallar capacitor con valores precisos de capacitancia, se optó por la segunda opción. Por lo tanto  $C_1 = C_2 = 0,1\mu F$ . Al mismo tiempo, se estableció que los capacitores a usar en la implementación del filtro serían capacitores cerámicos, pues este tipo de capacitores son adecuados para el procesamiento de señales analógicas. Los valores de las transconductancias  $g_{m_1}$ - $g_{m_4}$  se indican en la tabla 4.1.

En la Fig. 4.2 se muestra la implementación del filtro de la Fig. 4.1 con componentes discretos. Para ajustar el valor de las transconductancias de los amplificadores operacionales de transconductancia presentes en el filtro, se utilizó el valor de los polos indicados en la expresión (4.2) con la finalidad de obtener una respuesta transitoria

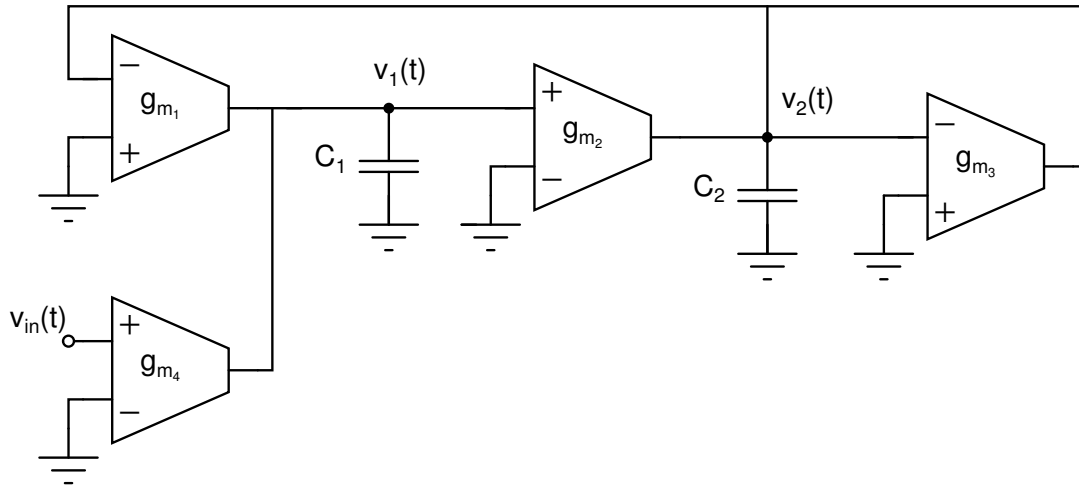


Figura 4.1: Filtro pasa bajas de segundo orden.

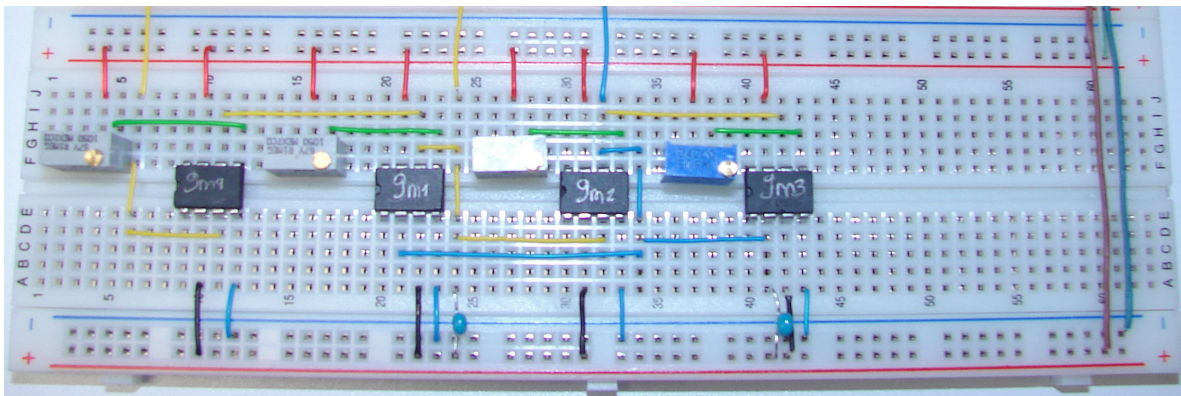


Figura 4.2: Filtro pasa bajas de segundo orden implementado con componentes discretos.

Transconductancia	Valor [ $\mu\text{A}/\text{V}$ ]
$g_{m1}$	640
$g_{m2}$	640
$g_{m3}$	128
$g_{m4}$	575

Cuadro 4.1: Valores de las transconductancias del filtro pasa bajas de la Fig. 4.2.

subamortiguada. La transconductancia de estos amplificadores está determinada por

$$g_m = \frac{I_{bias}}{2V_t}, \quad (4.3)$$

donde  $I_{bias}$  corresponde a la corriente fluyendo a través de la resistencia conectada a la terminal de polarización del amplificador, mientras que  $V_t$  es el voltaje térmico<sup>8</sup>. Con el objeto de tener un control fino de la corriente de polarización de los amplificadores, se utilizó para cada uno de ellos resistencias variables de alta precisión (o *trimpots*).

Se caracterizó la respuesta transitoria del circuito mostrado en la Fig. 4.2 con un tren de pulsos de frecuencia 100 Hz y amplitud  $10 \text{ mV}_{pp}$  como señal de entrada. En la Fig. 4.3 se muestra la respuesta observada en el laboratorio. La respuesta transitoria del filtro con componentes discretos presenta un tiempo de establecimiento de  $3,3 \text{ ms}$ . Para propósitos de referencia, en la Fig. 4.4 se presenta la respuesta en el dominio del tiempo del filtro considerado en la Sección 3.3. Se puede observar que las respuestas son prácticamente idénticas. Sin embargo, dado que los polos del filtro considerado en la Sección 3.3 están normalizados, la escala de tiempo para dicha respuesta difiere de la escala de tiempo del circuito caracterizado. Es necesario notar que señal de entrada usada para caracterizar el circuito de la Fig. 4.2 es relativamente pequeña en amplitud. La razón de esto es que el rango dinámico de entrada de un amplificador operacional de transconductancia CA3080 es muy pequeño (del orden de los 100 milivolts para un comportamiento razonablemente lineal).

Al aplicar la metodología propuesta en este trabajo de investigación al filtro de la Fig. 4.1 para obtener un filtro con parámetros variantes en el tiempo, se obtiene la estructura que aparece en la Fig. 4.5. En esta figura, los transconductores en color magenta tendrán transconductancias variantes en el tiempo. Dichas transconductancias están denotadas por  $g_{m_5}(t)$  y  $g_{m_6}(t)$ . Dado que la transconductancia de un amplificador operacional de transconductancia CA3080 es una función lineal de su corriente de polarización, es necesario ahora generar una corriente que decrezca exponencialmente en el tiempo. La técnica usada para generar dicha corriente será explicada en la siguiente sección.

---

<sup>8</sup>El voltaje térmico está dado por  $kT/q$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann  $k \approx 1,3806504 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ,  $T$  es la temperatura absoluta y  $q$  es la carga del electrón  $q \approx 1,602176 \times 10^{-19} \text{ J/K}$ . A temperatura ambiente,  $V_t = 26 \text{ mV}$

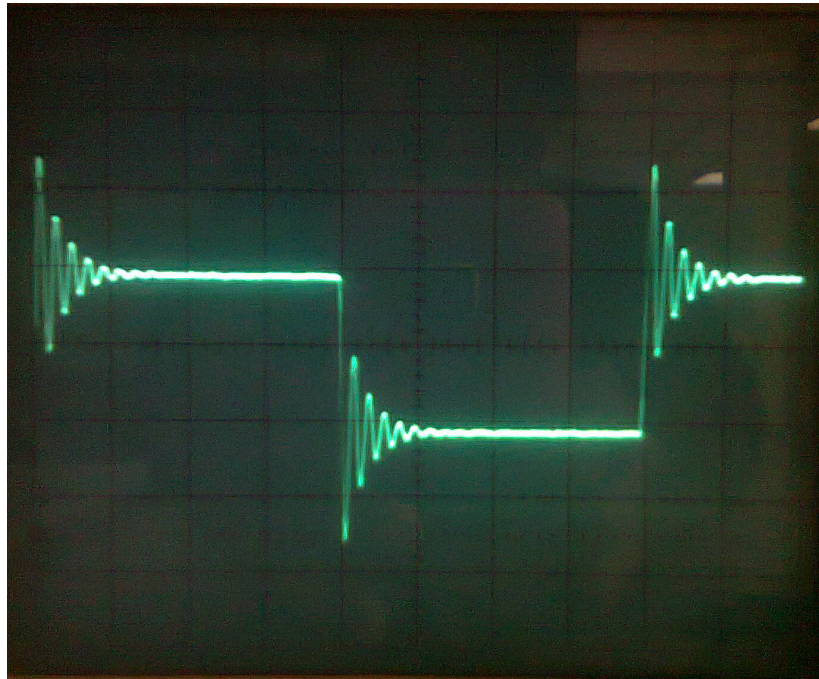


Figura 4.3: Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas del circuito de la Fig. 4.2

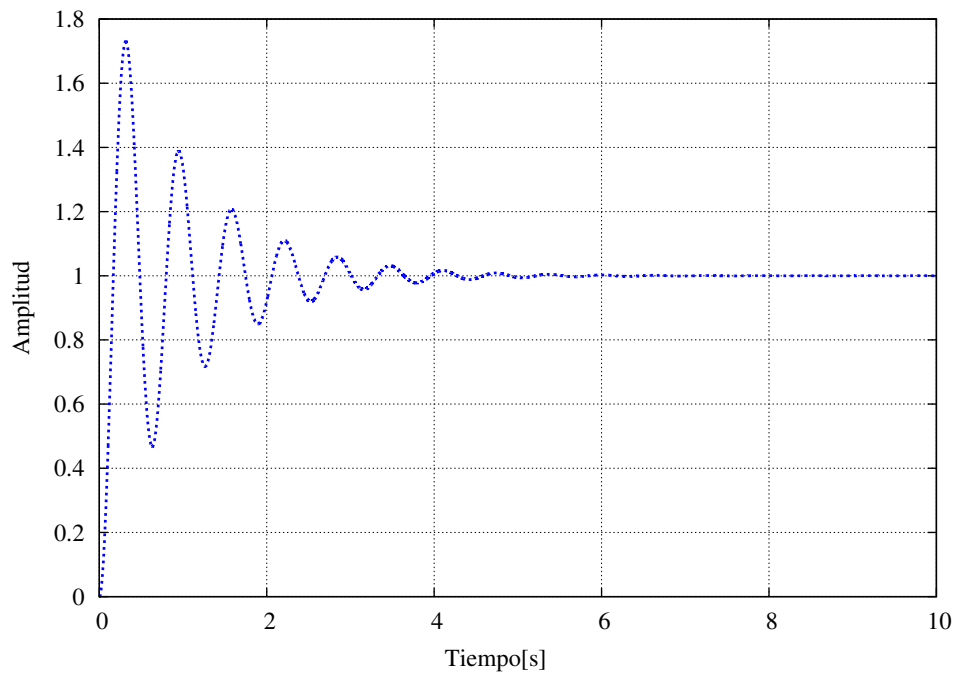


Figura 4.4: Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de segundo orden considerado en la Sección 3.3.





que la señal de reloj usada para el contador era de 100 Hz, la señal proporcionada por el segundo bit menos significativo  $b_1$  tenía una frecuencia de 50 Hz. Dicha señal fue usada como entrada para el filtro analógico. Debido a que éste último requiere de una señal de entrada de  $10 \text{ mV}_{pp}$  de amplitud, fue necesario utilizar un divisor de voltaje para atenuar la salida del segundo bit menos significativo del contador. La señal correspondiente al bit menos significativo  $b_0$  del contador tiene una frecuencia de 100 Hz. Dicha señal fue utilizada para la generación de la señal exponencial. Para evitar efectos de carga en el contador se utilizó un buffer de voltaje a la salida del bit menos significativo del contador. El amplificador operacional  $A_1$  se usó para implementar el buffer tal como se muestra en la Figura 4.6.

Para generar las señales exponenciales decrecientes requeridas para inducir la variación de parámetros en el filtro con parámetros variantes en el tiempo, se utilizó un filtro pasa altas implementado con un circuito RC. Es muy sencillo demostrar que la respuesta a un escalón de un filtro pasa altas será igual a una señal exponencial decreciente. La constante de tiempo considerada para el circuito RC es igual a  $\tau=200 \mu\text{s}$ . Para evitar efectos de carga entre el circuito RC y el siguiente bloque requerido en el circuito de control se usó un buffer de voltaje. Dicho buffer se implementó con el amplificador operacional  $A_2$ .

Existe un problema con el uso del circuito RC para la generación de señales exponenciales. Si éste recibe el tren de pulsos generado en el bit  $b_0$  del contador como entrada, se genera una secuencia de señales exponenciales decrecientes de amplitud positiva y negativa que se irán alternando en su aparición. En el circuito propuesto únicamente las señales de amplitud positiva son requeridas. Por tal motivo, se tuvo que implementar un circuito rectificador de media onda. Este circuito está compuesto por el amplificador operacional  $A_3$  en conjunto con los resistores y diodos,  $R_2$ - $R_3$  y  $D_1$ - $D_2$ . Estos diodos son implementados utilizando los transistores bipolares del arreglo de transistores NPN CA3083. Al presentarse un voltaje positivo a la entrada del circuito, éste se comporta como un amplificador inversor de ganancia unitaria, permitiendo que la corriente que fluye por el resistor  $R_2$  circule a su vez por el resistor  $R_3$  y el diodo  $D_2$ , mientras que el diodo  $D_1$  se encuentra polarizado de manera inversa. Al tener un voltaje negativo a la entrada del circuito, el resistor  $R_3$  y el diodo  $D_2$  no conducen corriente, mientras que el diodo  $D_1$  genera una diferencia de potencial proporcional a la corriente que fluye por la resistencia  $R_2$ . Gracias a la presencia del diodo  $D_1$ , el lazo de realimentación negativa del amplificador operacional se mantiene activo.

Debido a que el rectificador de media onda invierte la polaridad de la señal de salida,

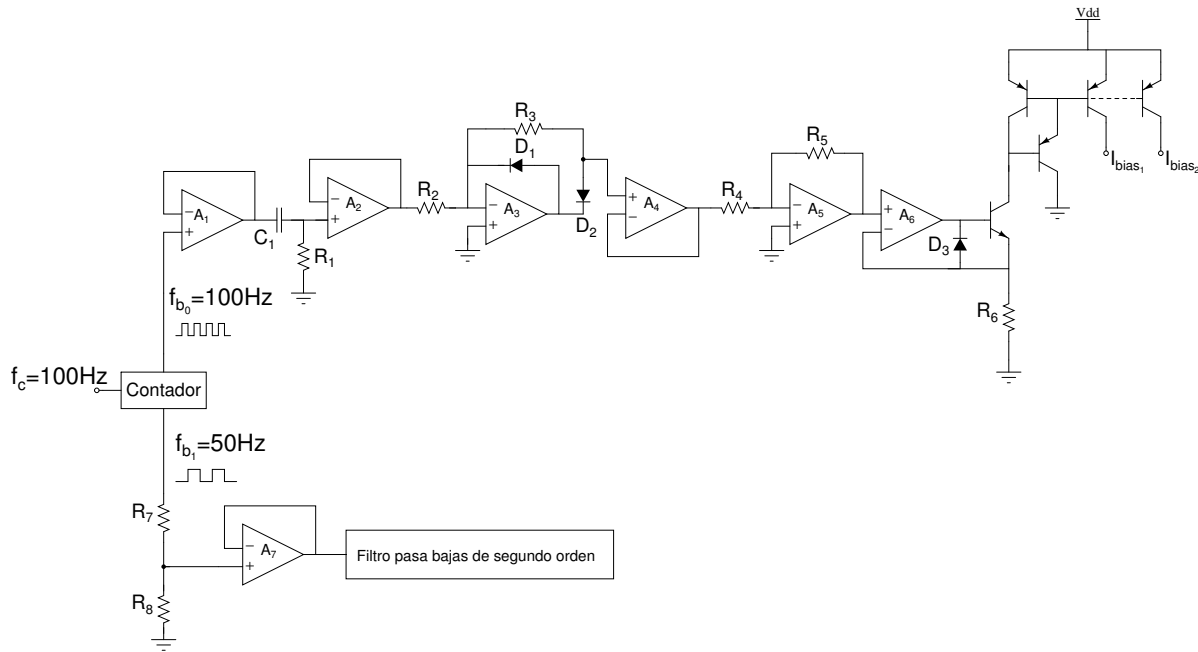


Figura 4.6: Circuito generador de corrientes exponencialmente decrecientes en el tiempo.

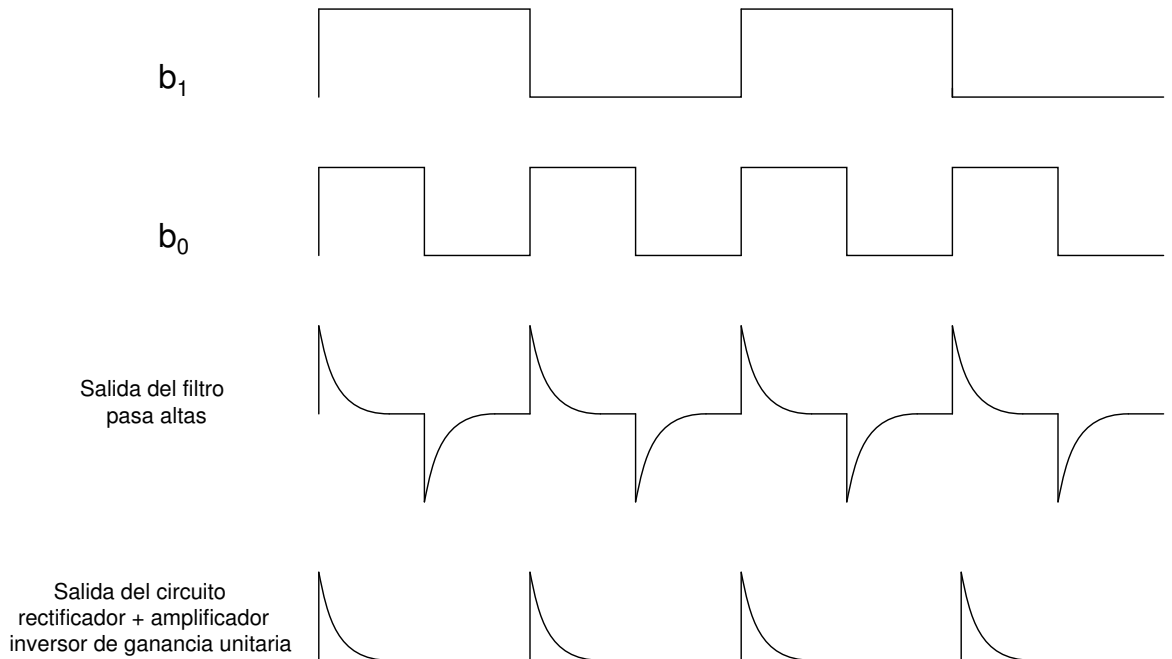


Figura 4.7: Diagrama simplificado de las señales generadas por el circuito de la Fig 4.6.

Elementos	Valores
$R_1-R_5$	10 k $\Omega$
$R_6$	20 k $\Omega$
$R_7$	590 k $\Omega$
$R_8$	2 k $\Omega$
$C_1$	20 nF

Cuadro 4.2: Valores de los elementos pasivos del filtro de la Fig. (4.6).

es necesario corregirla por medio de un amplificador inversor de ganancia unitaria. El circuito compuesto por el amplificador operacional  $A_5$  y los resistores  $R_4$  y  $R_5$ , forma el circuito anteriormente mencionado. Para evitar efectos de carga entre el amplificador inversor y el rectificador de media onda, se usó un buffer de voltaje. Este buffer de voltaje fue implementado con el amplificador operacional  $A_4$ .

Finalmente, el circuito basado en el amplificador operacional  $A_6$ , el diodo  $D_3$ , el transistor bipolar NPN y el espejo de corriente con beta mejorada implementado con el arreglo de transistores PNP MPQ2907 es el responsable de convertir el voltaje obtenido a la salida del circuito inversor en la corriente utilizada para polarizar los transconductores cuya transconductancia decrece exponencialmente. El amplificador operacional  $A_6$  es el encargado de proporcionar la corriente de base necesaria para que el transistor bipolar NPN opere en la región activa y proporcione una corriente de colector. Esta última es fijada por el resistor  $R_6$ . De manera similar a lo ocurrido en el circuito rectificador de media onda, el diodo  $D_3$  es utilizado como elemento de control para no romper el lazo de re-alimentación de este circuito. La corriente de polarización se verá reflejada en el espejo de corriente con beta mejorada formado por el conjunto de transistores bipolares PNP. Las corrientes de polarización obtenidas  $i_{bias_1}$  e  $i_{bias_2}$  serán utilizadas como corrientes de polarización para los transconductores de compensación  $g_{m_5}(t)$  y  $g_{m_6}(t)$ . Si se asume que  $g'(t)/g(t) = 2700e^{-t/200e-6}$  y para  $C_1=C_2=,1\mu F$  se tiene que las transconductancias  $g_{m_5}(t)$  y  $g_{m_6}(t)$  varían exponencialmente de un valor máximo de 270  $\mu A/V$  hasta cero. Para generar dichos valores de transconductancia, se requiere que el convertidor de voltaje a corriente basado en el amplificador operacional  $A_6$  genere una corriente máxima de polarización de 14  $\mu A$  para cada uno de los transconductores. En el cuadro 4.2 se muestran los valores de los resistores y capacitores utilizados en el circuito de control para generar las corrientes exponencialmente decrecientes.

#### 4.4. Caracterización del filtro con parámetros variantes en el tiempo

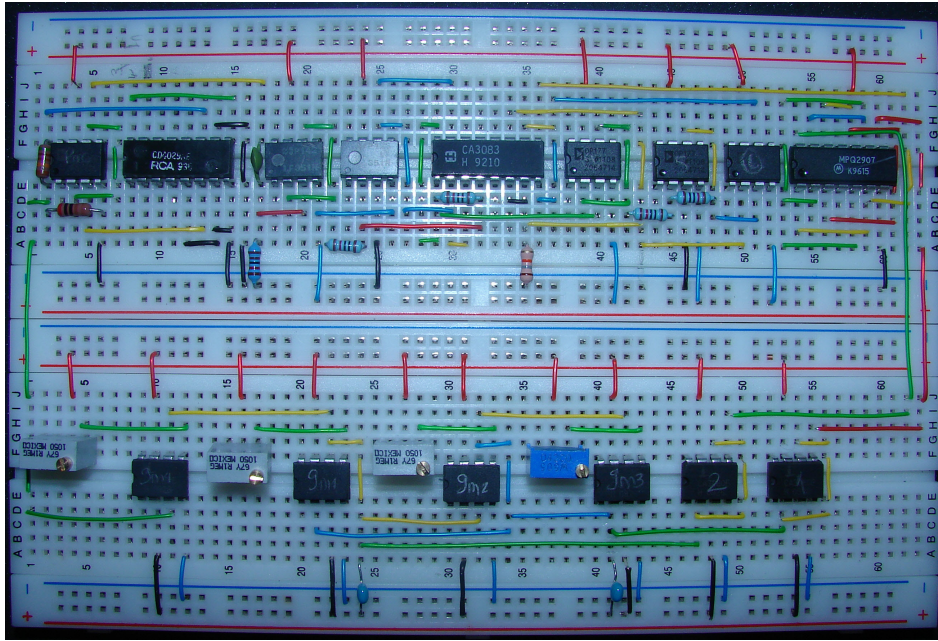


Figura 4.8: Implementación discreta del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo

La implementación discreta del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo se ilustra en la Fig. 4.8. En esta figura se observa el circuito implementado para el filtro pasa bajas original. En la parte superior se tiene el circuito de control de la Fig. 4.6. Los transconductores  $g_{m_5}(t)$  y  $g_{m_6}(t)$  encargados de la compensación de la respuesta transitoria del filtro con parámetros variantes en el tiempo están ubicados a la parte derecha del filtro original.

Al introducir el tren de pulsos de  $10 \text{ mV}_{pp}$  de amplitud a frecuencia  $50 \text{ Hz}$  a la entrada del filtro, a la salida de éste se observa la respuesta que se muestra en la Fig. 4.9. El tiempo de establecimiento de éste filtro es de  $1,2 \text{ ms}$ . Para propósitos de comparación, se presenta en la Fig. 4.10 la respuesta transitoria que produce el filtro con parámetros variantes en el tiempo modelado en Octave. Se puede percibir que existe mucha similitud entre los resultados teóricos y la conducta observada en el laboratorio. El comportamiento transitorio generado por el filtro con parámetros variantes en el tiempo se ha reducido en un  $63.36\%$  comparado con el comportamiento transitorio del filtro original.

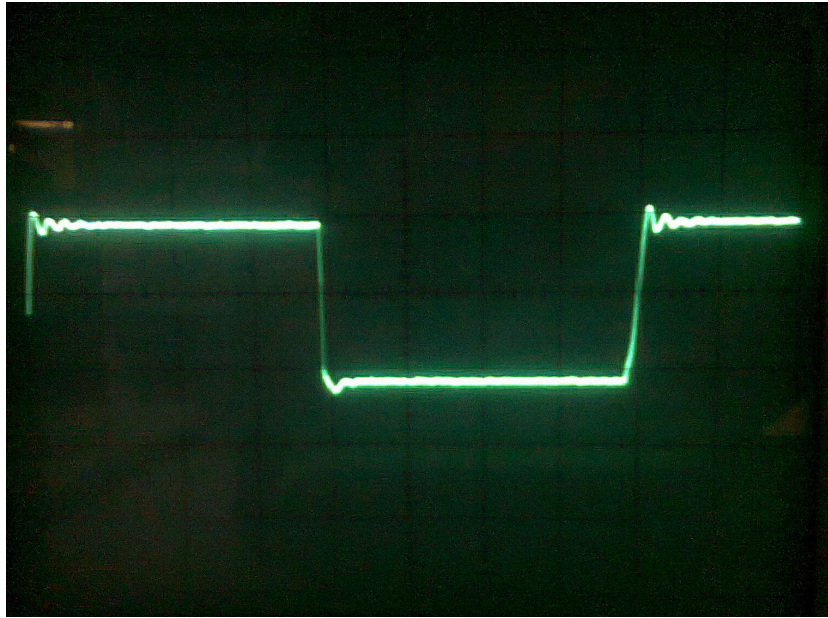


Figura 4.9: Respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo.

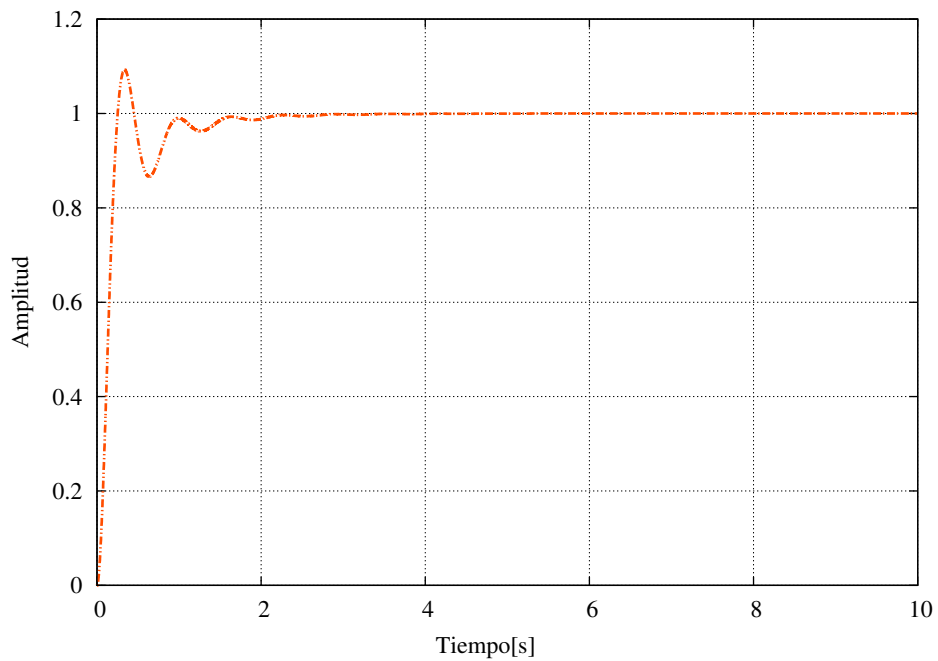


Figura 4.10: Resultados de simulación en Octave para la respuesta a un escalón unitario del filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo.



## CAPÍTULO 5

---

### Conclusiones

---

Los filtros con parámetros variantes en el tiempo se caracterizan por presentar un comportamiento transitorio de corta duración. La reducción de la respuesta transitoria es consecuencia de la variación temporal de algunos de sus parámetros descriptivos, sin afectar su respuesta en el dominio de la frecuencia en estado estacionario. Dichos parámetros son variados mediante una regla de control predefinida, para cumplir con dos objetivos fundamentales. El primero es reducir la conducta transitoria intrínseca del filtro y la segunda es garantizar sus propiedades de estabilidad. Existen diversas aplicaciones en las que éstos filtros son utilizados para el procesamiento de señales, en las cuales la conducta transitoria generada de manera natural por el filtro suele ser vista como una componente indeseada en la señal de salida del mismo.

En el presente trabajo de tesis se propuso una metodología general para la compensación de la respuesta transitoria de sistemas lineales invariantes en el tiempo con aplicación al diseño de filtros pasa bajas con parámetros variantes en el tiempo basados en OTAs y capacitores. Dicha metodología consiste en la transformación de las ecuaciones que caracterizan la conducta dinámica del filtro por medio de una transformación de Lyapunov. Con ello, el sistema resultante tendrá una respuesta transitoria reducida mientras conserva las mismas propiedades de estabilidad del sistema original.

Es importante notar que la variación en la traza del sistema obtenido a través de la transformación de Lyapunov lleva de una manera natural a tener un sistema que tiende

más rápido hacia su punto de equilibrio. La traza de una matriz puede ser utilizada como un indicador de la evolución general de un sistema dinámico en tiempo continuo. En un sistema dinámico lineal que presenta estabilidad asintótica exponencial, su respuesta homogénea decaerá exponencialmente a cero, con una velocidad proporcional a su traza negativa. Se observó que si la traza de los sistemas LTV considerados en esta tesis para la implementación de los filtros con parámetros variantes en el tiempo se reduce, la respuesta del sistema lineal variante en el tiempo decaerá más rápido a su punto en equilibrio comparado con la respuesta homogénea del sistema original.

El método de síntesis propuesto en esta tesis para los filtros con parámetros variantes en el tiempo a partir de un prototipo dado, involucra únicamente la adición de algunos transconductores cuyo valor de transconductancia es proporcional al valor de capacitancia de los capacitores que componen al filtro. Al mismo tiempo, la transconductancias de los transconductores agregados decrecen exponencialmente en el tiempo. La conexión de los transconductores adicionales dependerá de las ecuaciones de estado del filtro original. Mediante simulaciones a nivel sistema realizadas en Octave, se demostró que es posible modificar cualquier filtro pasa bajas basado en transconductores y capacitores para convertirlo en un filtro con parámetros variantes en el tiempo.

Finalmente, con el propósito de validar experimentalmente la metodología presentada en esta tesis para el diseño de filtros pasa bajas con parámetros variantes en el tiempo, se implementó un filtro pasa bajas de segundo orden en base a OTAs y capacitores con parámetros variantes en el tiempo. Tanto el filtro como el circuito encargado de inducir la variación en los parámetros del filtro fue desarrollado usando elementos discretos de propósito general. Las mediciones obtenidas mostraron concordancia con la teoría expuesta en este trabajo de tesis.

Las aportes realizados en este trabajo de tesis dejan abiertas nuevas líneas de investigación, entre las que se destacan:

- Ampliar el estudio de la aplicación de la metodología general de compensación de la respuesta transitoria de sistemas de filtrado pasa bajas en base a OTA-C, a diferentes tipos de sistemas de filtrado tales como filtros pasa altas, pasa todo, pasa banda y rechaza banda.
- Identificar bloques de circuitos que puedan ser fabricados en tecnología CMOS y que resulten adecuados para la implementación de los filtros con parámetros variantes en el tiempo que son desarrollados con la metodología expuesta en esta tesis.



- 
- Realizar el diseño completo a nivel transistor de un filtro pasa bajas con parámetros variantes en el tiempo, al igual que el circuito de control que incluye los transconductores de compensación de la respuesta transitoria.
  - Realizar el diseño de un layout para un prototipo del filtro con parámetros variantes en el tiempo para su fabricación en una tecnología CMOS.



---

## Bibliografía

---

- [1] B. Nauta, *Analog CMOS Filters for Very High Frecuencies*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1993.
- [2] K. L. Su, *Analog Filters*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 2nd. edition, 2003.
- [3] P. E. Allen and E. Sánchez-Sinencio, *Switched Capacitor Circuits*, Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, 1984.
- [4] T. Y. Lo and C. C. Hung, *1V CMOS  $G_m - C$  Filters*, Springer Science Business Media, Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 2009.
- [5] J. E. Kardontchik, *Introduction to the Desing of Transconductors-Capacitor Filters*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1992.
- [6] J. Silva-Martínez, M. Steyaert, and W. Sansen, *High-Performance CMOS Continuous-Time Filters*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1993.
- [7] J. Piskorowski and M.A.Gutiérrez de Anda, “A new class of continuous-time delay-compensated parameter-varying low-pass elliptic filters with improved dynamic behavior,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 56, no. 1, pp. 179 –189, Jan. 2009.

- [8] M. Jaskula and R. Kaszyński, “Using the parametric time-varying analog filter to average-evoked potential signals,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 53, no. 3, pp. 709 – 715, June 2004.
- [9] J. V. Odom, M. Bach, M. Brigell, G. E. Holder, D. L. McCulloch, and A. P. Tormene, “Iscev standard for clinical visual evoked potentials (2009 update).,” *Documenta Ophthalmologica*, vol. 120, 2010.
- [10] J. Piskorowski and T. Barciński, “Dynamic compensation of load cell response: a time-varying approach,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 7, pp. 1694–1704, Oct. 2008.
- [11] M.A. Gutiérrez de Anda and I. Meza Dector, “A second-order lowpass parameter-varying filter based on the interconnection of first-order stages,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 58, no. 8, pp. 1840 –1853, Aug. 2011.
- [12] R. Kaszyński, “A proposal of non-stationary low-pass Chebyshev filters,” in *Proceedings of the 1996 IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (EFTA '96)*, vol. 2, pp. 759 –762, Nov. 1996.
- [13] J. Walczak and A. Romanowska, “Second-order sections with simultaneous variation of both parameters,” *Elektryka*, vol. 206, no. 2, pp. 53–66, 2008.
- [14] H. D' Angelo, *Linear time-Varing Systems*, Allyn and Bacon, Oxford, 1970.
- [15] P. Kunkel and V. Mehrmann, *Differential-Algebraic Equations*, European Mathematical Society, Zürich, Switzerland, 2006.
- [16] F.L. Neerhoff and P. van der Kloet, “A complementary view on time-varying systems,” in *Proceedings of the 2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2001)*, vol. 3, pp. 779 –782 vol. 2, May 2001.
- [17] L.A. Zadeh and C.A. Desoer, *Linear system theory: the state space approach*, McGraw Hill, New York, 1963.
- [18] L.M. Silverman and B.D.O Anderson, “Controllability, observability and stability of linear systems,” *SIAM Journal of Control*, vol. 6, no. 1, pp. 121–130, February 1968.
- [19] C.D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000.

- [20] C.M. Chang, B.M. Al-Hashimi, C.L. Wang, and C.W. Hung, “Single fully differential current conveyor biquad filters,” *IEE Proceedings - Circuits, Devices and Systems*, vol. 150, no. 5, pp. 394–398, October 2003.
- [21] D. Frey, “Synchronous filtering,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I - Regular Papers*, vol. 53, no. 8, pp. 1772–1782, August 2006.
- [22] S.A.P. Haddad, S. Bagga, and W.A. Serdijn, “Log-domain wavelet bases,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I - Regular Papers*, vol. 52, no. 10, pp. 2023–2032, October 2005.
- [23] L.Y. Adrianova, *Introduction to linear systems of differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1995.
- [24] D.R. Frey, “Exponential state space filters: a generic current mode design strategy,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and applications*, vol. 43, no. 1, pp. 34–42, January 1996.
- [25] D.R. Frey and E.M. Drakakis, “Unifying perspective on log-domain filter synthesis,” *Electronics Letters*, vol. 45, no. 17, pp. 861–863, August 2009.
- [26] S. Koziel, S. Szczepanski, and R. Schaumann, “A general approach to continuous-time Gm-C filters based on matrix descriptions,” in *Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2002)*, vol. 4, pp. IV–647 – IV–650, 2002.
- [27] E. Sánchez-Sinencio, R.L. Geiger, and H. Nevarez-Lozano, “Generation of continuous-time two integrator loop OTA filter structures,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 35, no. 8, pp. 936–946, Aug. 1988.
- [28] M. Gopal, *Control Systems*, Mc Graw Hill, New York, 2nd. edition, 2003.
- [29] F. Yuan, *CMOS Active Inductors and Transformers: Principle, Implementation and Applications*, Springer, New York, 2008.



---

Código en Octave para la solución de las ecuaciones de estado de los filtros pasa bajas considerados en esta tesis

---

## 1. Filtro pasa bajas de segundo orden

```
function res=normal(x,t)

% Señal de entrada
vin=1;

% Valores de los transconductores y capacitores
gm=100e-6;
c1=50e-6;
c2=2e-6;

% Ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento
res (1) = -(gm/c2)*x(2) + (gm/c2)*vin ;
res (2) = (gm/c1)*x(1) - (gm/c1)*x(2);
```

## 2. Filtro pasa bajas de segundo orden con parámetros variantes en el tiempo

```
function res=speed(x,t)

% Señal de entrada
vin=1;

% Valores de los transconductores y capacitores
gm=100e-6;
c2=50e-6;
c1=2e-6;

% Valores de los parámetros variantes en el tiempo
alfa=4;
beta=1;
L1=alfa*exp(beta*(-t));
L2=alfa*exp(beta*(-t));

% Ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento
res (1) = -L1*x(1) - (gm/c1)*x(2) + (gm/c1)*vin;
res (2) = (gm/c2)*x(1) - ((gm/c2) + L2)*x(2);

% Código para resolver las funciones normal y speed
tfin = 10;
np = 10000;
t = linspace (0,tfin,np);
x0 = [0,0];
x1 = lsode ("normal",x0,t);
x2 = lsode ("speed",x0,t);
plot (t,x1 (:,2),'b',t,x2 (:,2),'r');
```



### 3. Filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática

```
function res=normal (x,t)

% Señal de entrada vin = 1;

% Valores de los transconductores y capacitores
gm = 100e-6;
c1 = 202.359119e-6;
c2 = 202.3594953e-6;
c3 = 49.70506894e-6;

% Ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento
res (1) = -(gm/c1)*x(1) + (gm/c1)*vin;
res (2) = (gm/c2)*x(1) - (gm/c2)*x(2) - (gm/c2)*x(3);
res (3) = (gm/c3)*x(2);
```

### 4. Filtro pasa bajas de tercer orden con una etapa bicuadrática con parámetros variantes en el tiempo

```
function res=speed (x,t)
% Señal de entrada
vin=1;

% Valores de los transconductores y capacitores
gm = 100e-6;
c1 = 202.359119e-6;
c2 = 202.3594953e-6;
c3 = 49.70506894e-6

% Valores de los parámetros variantes en el tiempo
alfa= 4;
```

```

beta= 1;
L1 = alfa*exp (beta*(-t));
L2 = alfa*exp (beta*(-t));
L3 = alfa*exp (beta*(-t));

% Ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento
res (1) = -((gm/c1) + L1)*x (1) + (gm/c1)*vin;
res (2) = (gm/c2)*x (1) - ((gm/c2) + L2)*x (2) - (gm/c2)*x (3);
res (3) = (gm/c3)*x (2) - L3*x (3);

% Código para resolver las funciones normal y speed
tfin = 10;
np = 10000;
t = linspace (0,tfin,np);
x0 = [0,0,0];
x1 = lsode ("normal",x0,t);
x2 = lsode ("speed",x0,t);
plot (t,x1 (:,3),'b',t,x2 (:,3),'r');

```

## 5. Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden

```

function res=normal(x,t)

% Señal de entrada
Vin = 1;

% Valores de las tranconductancias y capacitores
gm = 100e-6;
gm1 = 100e-6;
gm2 = 100e-6;
gmi = 100e-6;
gmr = 100e-6;
C1 = 57.33609617e-6;
C2 = 106.3151632e-6;

```

```

C3 = 134.9417897e-6;
C4 = 637.6317003e-9;
a = ((C1*C2) + (C1*C3) + (C2*C3));

% Ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento
res (1) = -(((C2+C3)*gmr)/a)*x (1)
          + ((C3*gm1)/a)*x(2) - ((C2*gmr)/a)*x(3)
          + (((C2*2*gm1) + (C3*2*gm1))/a)*Vin;
res (2) = -(gm2/C4)*x(1) + (gm2/C4)*x(3);
res (3) = -((C2*gmr)/a)*x(1) - ((C1*gm1)/a)*x(2)
          - (((C1+C2)*(gmr))/a)*x(3)
          + ((C2*2*gm1*Vin)/a);

```

## 6. Filtro pasa bajas elíptico de tercer orden con parámetros variantes en el tiempo

```

function res=speed(x,y)

% Señal de entrada
Vin = 1;

% Valores de las tranconductancias y capacitores
gm = 100e-6;
gm1 = 100e-6;
gm2 = 100e-6;
gmi = 100e-6;
gmr = 100e-6;
C1 = 57.33609617e-6;
C2 = 106.3151632e-6;
C3 = 134.9417897e-6;
C4 = 637.6317003e-9;
a = ((C1*C2) + (C1*C3) + (C2*C3));

```

```

% Valores de los parámetros variantes en el tiempo
alfa = 4;
beta = 1;
gmlambda1 = alfa*exp(beta*(-t));
gmlambda2 = alfa*exp(beta*(-t));
gmlambda3 = alfa*exp(beta*(-t));
gmlambda4 = alfa*exp(beta*(-t));
gmlambda5 = alfa*exp(beta*(-t));

% Ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento
res (1) = (((C2+C3)*(-gmr-gmlambda1))/a) + ((C2*gmlambda4)/a))*x(1)
          + (((C2+C3)*gm1)/a) - ((C2*gm1)/a))*x(2)
          + (((C2+C3)*gmlambda2)/a) + ((C2*(-gmr-gmlambda5))/a))*x(3)
          + (((C2*2*gmi) + (C3*2*gmi))/a)*Vin;
res (2) = -(gm2/C4)*x(1) - (gmlambda3/C4)*x(2) + (gm2/C4)*x(3);
res (3) = (((C2*(-gmr-gmlambda1))/a) + (((C1+C2)*gmlambda4)/a))*x(1)
          + (((C2*gm1)/a) - (((C1+C2)*gm1)/a))*x(2)
          + (((C2*gmlambda2)/a) + (((C1+C2)*(-gmr-gmlambda5))/a))*x(3)
          + ((C2*2*gmi*Vin)/a);

% Código para resolver las funciones normal y speed
tfin = 40;
np = 1000;
t = linspace(0,tfin,np);
x0 = [0,0,0];
x1 = lsode ("normal",x0,t);
x2 = lsode ("speed",x0,t);
plot (t,x1 (:,3),'b',t,x2 (:,3),'r');

```